COMPENDIUM CDP

Concurso de Primavera 1997 – 2024

Toomates Cooleccción vol. 53

Toomates Coolección

Los libros de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "**licencias digitales**" con las que las editoriales pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo libro, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.
Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de licencias digitales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf". **El conocimiento no es una mercancía**.
El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las editoriales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de unos libros de texto que actualmente son muy mediocres, y no mediante retorcidas técnicas comerciales.
 Todos los libros se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas.

¡Libérate de la tiranía y mediocridad de las editoriales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos

Toomates Coolección **Problem Solving** (en español):
Geometría Axiomática , Problemas de Geometría 1 , Problemas de Geometría 2
Introducción a la Geometría , Álgebra , Teoría de números , Combinatoria , Probabilidad
Trigonometría , Desigualdades , Números complejos , Funciones

Toomates Coolección **Llibres de Text** (en catalán):
Nombres (Preàlgebra) , Àlgebra , Proporcionalitat , Mesures geomètriques , Geometria analítica
Combinatòria i Probabilitat , Estadística , Trigonometria , Funcions , Nombres Complexos ,
Àlgebra Lineal , Geometria Lineal , Càlcul Infinitesimal , Programació Lineal , Mates amb Excel

Toomates Coolección **Compendiums**:
PAU España: Cataluña TEC Cataluña CCSS Valencia Galicia País Vasco Baleares
PAU Internacional: Portugal A Portugal B Italia UK (A Level) IB Francia (BAC)
Canguro: ESP CAT FR USA UK AUS
USA: Mathcounts AMC 8 10 12 AIME USAJMO USAMO TSTST TST ELMO Putnam
España: OME OMEFL OMEC OMEA OMEM CDP
Internacional: IMO OMI IGO SMT INMO CMO REOIM Arquimede HMMT BMO
Pruebas acceso: ACM4 , CFGS , PAP
Pizzazz!: Book A Book B Book C Book D Book E Pre-Algebra Algebra
AHSME: Book 1 Book 2 Book 3 Book 4 Book 5 Book 6 Book 7 Book 8 Book 9

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales, para facilitar su edición.

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a **toomates@gmail.com**

¡No utilices una versión anticuada! Todos estos libros se revisan y amplían constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.

Versión de este documento: **23/04/2024**

Consulta el **Catálogo de libros** Toomates Coolección en http://www.toomates.net/biblioteca.htm
Visita mi **Canal de Youtube**: **https://www.youtube.com/c/GerardRomo**
Visita mi pàgina web: **www.toomates.net** **¡Matemáticas patós!**

Índex.

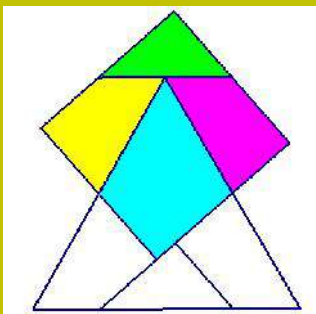
XXI	2017	1905
XXII	2018	2025
XXIII	2019	2149
XXIV	2020	2287
XXV	2022	2422
XXVI	2023	2740
XXVII	2024	2762

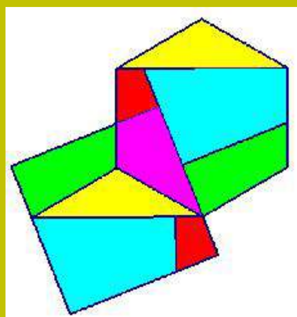
Las soluciones se presentan después de cada listado de enunciados.

Fuente: https://www.concursoprimavera.es/#problemas

Este recopilatorio se ha generado con la herramienta on-line www.ilovepdf.com

CONCURSO DE PRIMAVERA





1997 - 2001

Es más fácil detectar el error que descubrir la verdad.
(Galileo)

Presentación

***T**al como nos comprometimos, aparecen aquí recopilados, con soluciones desarrolladas, los problemas aparecidos en las cinco primeras pruebas, tanto de la primera como de la segunda fase, del Concurso de Primavera de Problemas de Matemáticas.*

***C**omo profesores de enseñanza secundaria, somos conscientes del trabajo que supone para cualquier profesor atender de forma razonable a todos los estudiantes de un aula, dada la extraordinaria diversidad de aptitudes, actitudes, preparación, intereses, ..., con que nos encontramos en cualquier grupo de alumnos de ESO o de Bachillerato. Por ello, pensamos que es interesante disponer de un material, en la línea del Concurso de Primavera, que facilite a los estudiantes el trabajo autónomo, y que permita a los que lo encuentren atractivo el trabajo en casa. Helo aquí. Obviamente, cada profesor, en su centro, mediante fotocopias, seleccionando partes, aportando su metodología, personalizándolo, será quien decidirá el uso y éxito de este libro.*

***A**unque indudablemente los culpables de la gestación de un libro son sus autores, éste no habría visto la luz sin los apoyos personales y económicos recibidos. A la Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid fundamentalmente, y a la Facultad de Matemáticas de la U.C.M., los usuarios de este libro quedamos deudores.*

“ Gracias a las personas que me dieron forma y dedicaron su tiempo.
Gracias a ti, lector, por leerme atento.”

Este libro

ÍNDICE

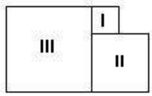
Comité organizador del Concurso de Primavera

Juan Jesús Donaire Moreno
Luis Ferrero de Pablo
Jesús García Gual
María Gaspar Alonso-Vega
Joaquín Hernández Gómez
Francisco López Álvarez
Fernando Moya Molina
Esteban Navarro Marugán
Merche Sánchez Benito
Víctor Manuel Sánchez González
Javier Soler Areta
José Mª. Sordo Juanena

1. Si mi calculadora dice que $\frac{1}{3} = 0'3333333$, ¿ qué dirá que es $\frac{1}{30}$?

A 00’333333; **B** 0’3030303; **C** 0’3333333; **D** 0’0303030; **E** 0’0333333

2. Las figuras I , II y III son cuadrados. Si el perímetro de I es 12 y el perímetro de II es 24, el perímetro de III es:



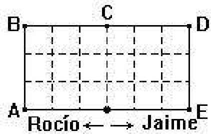
A 9; **B** 18; **C** 36; **D** 72; **E** 81.

3. El menor número entero mayor que la suma: $2 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{3} + 4 + \frac{1}{4} + 5 + \frac{1}{5}$

es:

A 14; **B** 15; **C** 16; **D** 17; **E** 18.

4. Rocío siempre camina el doble de rápido que Jaime. Si parten del punto señalado en sentido contrario, y van dando vueltas a la parcela rectangular de la figura, de 18 cuadrados de área, cuando se encuentren por primera vez, el punto más próximo de los indicados será:

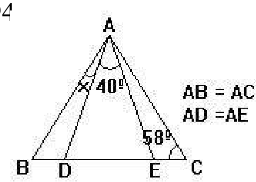


A ; **B** ; **C** ; **D** ; **E**.

5. Decimos que un año es “afortunado” si tiene al menos un día que, escrito en la forma usual “ día/mes/año” tiene la siguiente propiedad: El producto del número del día por el número del mes es igual a las dos últimas cifras del año. Por ejemplo, 1956 fue un año afortunado, pues el 8 de julio de ese año fue el 8/7/56 que verifica 8 . 7 = 56. ¿Cuál de los siguientes años no fue un año afortunado?

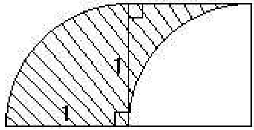
A 1990; **B** 1991; **C** 1992; **D** 1993; **E** 1994

6. El valor del ángulo x es:



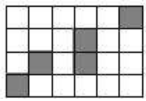
A 12º; **B** 24º; **C** 64º; **D** 70º; **E** 82º.

7. El área de la región sombreada es:



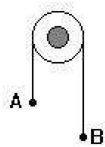
A π ; **B** $\frac{\pi}{4}$; **C** $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$; **D** 1 ; **E** 4.

8. En la figura adjunta hay sombreados algunos cuadrados. ¿Cuántos me quedan por sombrear para que al final el número total de cuadrados sombreados sea la mitad del número de cuadrados sin sombrear?



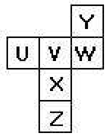
A 3; **B** 5; **C** 7; **D** 8; **E** 12.

9. Los puntos A y B son los extremos de una cuerda de 200 cm. que pasa por una polea fija X. A está 40 cm. más alto que B. ¿Cuánto debe bajar A para que B se quede 60 cm. más alto que A?



A 40 cm.; **B** 50cm.; **C** 60 cm,; **D** 70 cm.; **E** 80 cm.

10. La figura muestra las seis caras de un cubo que hemos desarrollado. Al formar otra vez el cubo, ¿ qué cara será la opuesta a la X ?



A Z; **B** U; **C** V; **D** W; **E** Y.

11. Escritos en fila todos los números del 1 al 500, ¿ qué dígito ocupará el lugar 1000 º ?

A 0; **B** 1; **C** 3; **D** 6; **E** 7.

12. Un icosaedro es un poliedro regular con 20 caras triangulares. ¿Cuántas aristas tiene?

A 12; **B** 20; **C** 24; **D** 30; **E** 60.

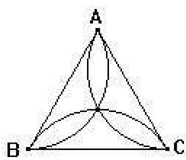
13. Si la media aritmética de x e y es $\frac{3y}{4}$, ¿ cuánto vale $\frac{x}{y}$?

A $\frac{1}{4}$; **B** $\frac{1}{2}$; **C** $\frac{3}{4}$; **D** 2 ; **E** No puedo asegurar nada.

14. ¿ Cuánto vale $99-97+95-93+......+7-5+3-1$?
(Los signos $+$ y $-$ se van alternando)

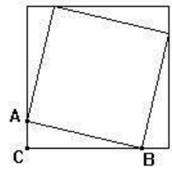
A 48; **B** 64; **C** 32; **D** 98; **E** 50.

15. Para construir el triángulo equilátero ABC hemos doblado un círculo de radio 2 como indica la figura. La distancia BO es: **A** 1 ; **B** $\sqrt{3}$; **C** $\sqrt{2}$; **D** $\frac{2}{3}$; **E** 2.



16. El último dígito de $2^{1997}-2$ es:

A 0; **B** 2; **C** 4; **D** 6; **E** 8.



17. En la figura adjunta, el área del cuadrado grande es 36 y el área del pequeño 25. El perímetro del triángulo ABC es:

A 10; **B** 11; **C** 12; **D** 13; **E** 14.

18. Si $1 < x < 10$, y, $1 < y < 10$, ¿ cuál de las siguientes desigualdades tiene que ser cierta?

A $y < \frac{10}{x}$; **B** $x > \frac{y}{10}$; **C** $y < \frac{x}{10}$; **D** $x < \frac{y}{10}$; **E** $\frac{100}{x} < y$

19. $S_6 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6$ y S_n de igual forma es la suma alternada de signo de los n primeros naturales empezando por +1. El valor de $S_{17} + S_{33} + S_{50}$ es:

A 0; **B** 1; **C** 2; **D** -1; **E** 51.

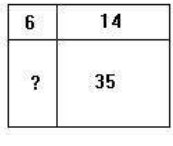
20. En la sucesión: $a, b, c, d, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...$ cada término es suma de los dos anteriores. El valor de a es:

A -3; **B** -1; **C** 0; **D** 1; **E** 3.

21. Un rectángulo de lados 8 y $2\sqrt{2}$ tiene el mismo centro que un círculo de radio 2. El área de la región común a ambos es:

A 2π ; **B** $2\pi + 2$; **C** $4\pi - 4$; **D** $2\pi + 4$; **E** $4\pi - 2$.

22. El rectángulo de la figura está dividido en cuatro rectángulos mediante rectas paralelas a los lados. Si las áreas de tres de estos cuatro rectángulos son 6, 14 y 35, el área del cuarto es:



A 10; **B** 15; **C** 20; **D** 21; **E** 25.

23. En una bolsa hay canicas rojas y azules. Si quitamos una roja, un séptimo de las que quedan son rojas, pero si en lugar de haber quitado una roja, hubiéramos quitado dos azules, un quinto de las restantes serían rojas. ¿ Cuántas canicas había al principio en la bolsa ?

A 8; **B** 22; **C** 36; **D** 57; **E** 71.

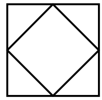
24. Si x e y son números reales distintos de cero tales que $|x| + y = 3$, y $|x|y + x^3 = 0$, el entero más próximo a $x - y$ es:

A -3; **B** -1; **C** 2; **D** 3; **E** 5.

25. ¿ Cuántas rectas pasan por (4,3) y cortan al eje X en un punto cuya abscisa es un entero positivo y primo, y al eje Y en un punto cuya ordenada es un entero positivo ?

A ninguna; **B** una; **C** dos; **D** siete; **E** infinitas

1. ¿Cuál es el área del cuadrado grande sabiendo que la del pequeño (cuyos vértices son los punto medios de los lados del cuadrado grande) es de 12 cm^2 ?



A 16; **B** 18; **C** 20; **D** 22; **E** 24.

2. Si ABC es un triángulo isósceles y el ángulo A vale 18º, ¿cuánto puede valer el ángulo B?

A 163º; **B** 81º; **C** 83º; **D** 56º; **E** 73º.

3. Si la suma de las aristas de una caja de zapatos es 324 cm. y la caja mide 36 cm. de largo y 24 de alto, ¿cuánto mide de ancho?

A 264 cm ; **B** 132 cm ; **C** 21 cm ; **D** 20 cm ; **E** No se puede saber

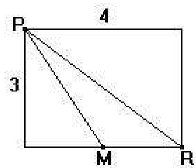
4. ¿ Cuántos enteros del 1 al 100 tienen algún 5 ?

A 10; **B** 15; **C** 19; **D** 20; **E** Nada de lo anterior.

5. Dos gatos *Mu* y *Mi* cazaron entre los dos 60 ratones. Si *Mu* caza tres ratones por cada dos ratones que caza *Mi*, ¿ cuántos ratones cazó *Mi* ?

A 2; **B** 30; **C** 24; **D** 40; **E** 36.

6. M es el punto medio de uno de los lados del rectángulo de la figura, que miden 3 y 4 cm. ¿ Cuál es el área en cm^2 del triángulo PMR ?



A 3; **B** 5; **C** 6; **D** 10; **E** 12.

7. La distancia de A a B es de 10 m. La de B a C, 4m y la de C a D, 3 m. Si A y D están lo más cerca posible, la distancia entre ellos es:

A 0 m.; **B** 3 m.; **C** 9 m.; **D** 11 m.; **E** 17 m.

8. El 8 de noviembre de 1988 fue un día curioso, pues escrito en forma usual 8/11/88 verifica que $8 \cdot 11 = 88$. ¿ Cuántos días curiosos hubo en 1990 ?

A 5; **B** 4; **C** 3; **D** 2; **E** 1.

9. ABCD es un cuadrado. P y Q son puntos en el exterior del cuadrado, tales que los triángulos APB y BCQ son equiláteros. ¿Cuánto mide el ángulo PQB?

A 10º; **B** 15º; **C** 20º; **D** 25º; **E** 30º.

10. Si ordenamos de menor a mayor los siguientes números, ¿cuál está en medio?

A $\frac{1}{3}$; **B** $\frac{3}{10}$; **C** 31% ; **D** 0'03 ; **E** 0'303.

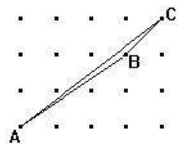
11. $$\frac{2+4+6+.......+34}{1+3+5+.......+51}=$$

A 1/3; **B** 2/3; **C** 3/2; **D** 17/3; **E** 34/3.

12. Si x es el número $0'\underbrace{00....}01$ (1997 ceros detrás de la coma), ¿ cuál de los siguientes representa el mayor número ?

A 3 + x; **B** 3 - x; **C** 3 . x ; **D** 3/x; **E** x/3.

13. La cuadrícula tiene 1 cm de lado.
El área (en cm^2) del triángulo ABC es:



A 1/4; **B** 1/2; **C** 3/4; **D** 1; **E** 5/4

14. Si la longitud y la anchura de un rectángulo la aumentamos el 10%, el perímetro de ese rectángulo aumentará el:

A 2'5%; **B** 40%; **C** 20%; **D** 10%; **E** No se puede saber sin conocer las dimensiones del rectángulo.

15. Antonio, Beatriz, Carlos y Diana están sentados en una fila de 4 sillas numeradas del 1 al 4. Emilio los ve y dice:
- Beatriz está al lado de Carlos.
- Antonio está entre Beatriz y Carlos.
Si las dos afirmaciones son falsas y Beatriz está sentada en la silla nº 3, ¿quién ocupa la nº 2 ?

A Antonio; **B** Beatriz; **C** Carlos; **D** Diana; **E** No hay información suficiente para poder responder.

16. En una lista de nueve enteros, seis de ellos son 7 , 8 , 3 , 5 , 9 y 5. El mayor valor posible de la mediana de esta lista de enteros es:

A 5; **B** 6; **C** 7; **D** 8; **E** 9.

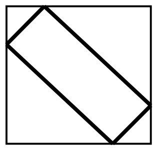
17. *Rayo* corre a velocidad constante, y *Centella m* veces más rápido que *Rayo* (*m* es un número mayor que 1). Si *Centella* le da una ventaja de h metros a *Rayo*, ¿ cuántos metros debe recorrer *Centella* para alcanzar a *Rayo* ?

A $h \cdot m$; **B** $\dfrac{h}{h+m}$; **C** $\dfrac{h}{m-1}$; **D** $\dfrac{h.m}{m-1}$; **E** $\dfrac{h+m}{m-1}$.

18. La sucesión 1 , 2 , 1 , 2 , 2 , 1 , 2 , 2 , 2 , 1 , 2 , 2 , 2 , 2 ,... está formada por *unos* separados por bloques de *doses*, habiendo *n doses* en el *n-ésimo* bloque. La suma de lo 1234 primeros términos de esta sucesión es:

A 1996; **B** 2419; **C** 2429; **D** 2439; **E** 2449.

19. De cada una de las esquinas de una hoja cuadrada de papel quitamos un triángulo rectángulo isósceles como indica la figura. Si la suma de las áreas de los triángulos quitados es 200 cm^2, la longitud de la diagonal del rectángulo que queda es:



A 10 ; **B** $10\sqrt{2}$; **C** 20 ; **D** $20\sqrt{2}$; **E** 40.

20. ¿ Cuál es el menor entero positivo n tal que $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}<0'01$?

A 2499; **B** 2500; **C** 2501; **D** 10000; **E** No existe.

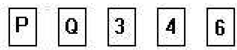
21. Si $(3x-1)^7 = a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + ... + a_0$
entonces $a_7 + a_6 + a_5 + ... + a_0$ es igual a:

A 0; **B** 1; **C** 64; **D** - 64; **E** 128.

22. Si tres números primos p , q y r satisfacen p + q = r y 1< p < q , p tiene que ser igual a:

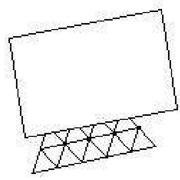
A 2; **B** 3; **C** 7; **D** 13; **E** No se puede determinar.

23. En una mesa hay cinco cartas como se muestra en la figura. Cada carta tiene una letra por una cara y un número positivo por la otra. Pedro dice: " Cualquier carta que tenga una vocal por un lado, tiene un número par por el otro ". Alicia descubre que esta afirmación es falsa dando la vuelta a una de las cinco cartas. ¿ A cuál ?



A 3; **B** 4; **C** 6; **D** P; **E** Q.

24. Juntando unos cuantos triángulos equiláteros pequeños e iguales, hemos formado un triángulo equilátero. Aquí te mostramos el triángulo equilátero grande parcialmente tapado por una hoja de papel. ¿ Cuántos triángulos equiláteros pequeños hemos usado para formar el grande ?



A 12; **B** 13; **C** 15; **D** 25; **E** 45.

25. La siguiente demostración de que 1 = 2 contiene (¡ por supuesto !) un error en uno de los pasos. ¿En qué paso (A, B, C, D ó E) está dicho error?

Supongamos $a = b$

A así $ab = b^2$; **B** así $ab - a^2 = b^2 - a^2$;
C así $a(b-a) = (b+a)\cdot(b-a)$; **D** simplificando $a = b + a$;
E y si $a = 1$ y $b = 1$, obtenemos 1 = 2.

1. ¿Qué número dista lo mismo de 179 y 837 ?
   A 453; **B** 458; **C** 503; **D** 508; **E** 509.

2. Si hoy es sábado, ¿qué día será dentro de 100 días?
   A Lunes; **B** Martes; **C** Miércoles; **D** Jueves; **E** Viernes.

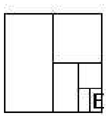
3. En esta cuenta de multiplicar se nos han borrado tres cifras, las marcadas con * y la marcada con la letra *a* ? ¿Cuál era la que hemos marcado con la letra *a*?

   $$\begin{array}{r} 8*06 \\ \times\ * \\ \hline a4754 \end{array}$$

   A 3; **B** 4; **C** 5; **D** 7; **E** 8.

4. Un libro y un cuaderno cuestan 2.200 pts. Si el libro cuesta 2.000 pts más que el cuaderno, ¿cuánto cuestan 10 cuadernos?

   A 500 pts; **B** 2.000 pts; **C** 1.000 pts; **D** 3.000 pts; **E** 2.200 pts.

5. 

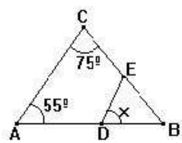
   ¿Qué parte del cuadrado total es el rectángulo **E** ?

   A 1/6; **B** 1/64; **C** 1/16; **D** 1/32; **E** Nada de lo anterior.

6. En un día de lluvia, la altura que alcanza el agua en un recipiente cilíndrico de 10 cm de diámetro es de 3 cm. ¿Qué altura habría alcanzado en otro recipiente cilíndrico cuyo diámetro sea de 20 cm?

   A 6 cm; **B** 1,5 cm; **C** 3 cm; **D** 9 cm; **E** Nada de lo anterior.

7. En el triángulo ABC, A=55º, C=75º y D y E están como se indica en la figura, en los lados AB y BC respectivamente. Si DB=BE; el ángulo x es:

   A 50º; **B** 55º; **C** 60º; **D** 65º; **E** 70º

8. La suma de las cifras del número $10^{97}-97$ es:

   A 873; **B** 876; **C** 858; **D** 967; **E** 849.

9. En una etapa del "Tour" de 200 km, Olano hizo los primeros 100 km a una media de 40 km/hora y los 100 últimos a una media de 25 km/hora. La media alcanzada a lo largo de la etapa fue:

   A 65 km/h; **B** 32,5 km/h; **C** 33 km/h; **D** 400/13 km/h; **E** Faltan datos.

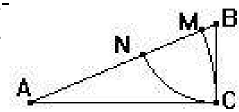
10. El número $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}-\frac{4}{5}}:\dfrac{5}{6}$ es igual a:

A $\frac{1}{144}$; **B** $\frac{1}{100}$; **C** $\frac{6}{5}$; **D** $\frac{25}{9}$; **E** 4 .

11. Si los lados de un rectángulo se aumentan en un 20%, su área aumenta el:

A 40% ; **B** 20% ; **C** 44% ; **D** 10%; **E** Nada de lo anterior.

12. En un triángulo rectángulo ABC de catetos 5 y 12, dibujamos los arcos CN y CM con centros B y A y radios 5 y 12, respectivamente. ¿ Cuál es la longitud de MN?

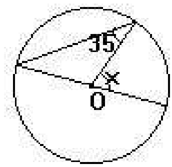


A 2 ; **B** $\frac{13}{5}$; **C** 3 ; **D** 4 ; **E** $\frac{24}{5}$.

13. En una circunferencia tenemos dos cuerdas paralelas de longitudes 10 cm y 14 cm que distan 6 cm entre sí. La longitud de la cuerda paralela a ambas y que equidista de ellas es:

A 12 ; **B** $\sqrt{156}$; **C** $\sqrt{168}$; **D** $\sqrt{176}$; **E** $\sqrt{184}$.

14. O es el centro de la circunferencia. El valor del ángulo x es:

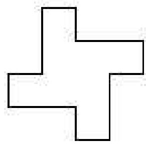


A 35º; **B** 45º; **C** 60º; **D** 70º; **E** 90º.

15. Como bien sabes, Einstein (E), Arquímedes (A) y Newton (N) ya han muerto. Si vivieran, ordenados de mayor a menor de edad, la respuesta sería:

A EAN; **B** ANE; **C** ENA; **D** NAE; **E** NEA.

16. El diagrama muestra una figura en la que los lados largos son todos de igual longitud así como todos los cortos, siendo la longitud de aquéllos doble que la de éstos. Si todos los ángulos son rectos y el área de la figura es $200 cm^2$, ¿cuál es el perímetro?



A 72; **B** 80; **C** 84; **D** 90; **E** No hay información suficiente.

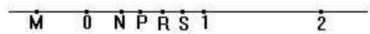
17. Si a, b y c son enteros positivos, siendo b impar, entonces $3^a + (b-1)^2 \cdot c$ es:

A Impar sea cual fuere c ; **B** Par sea cual fuere c ;
C Impar si c es par; **D** Impar si c es impar ; par si c es par**;**
E Impar si c no es múltiplo de 3; par si c es múltiplo de 3.

18. Los lados de un triángulo son 11, 15 y k, siendo k un número entero. ¿Para cuántos valores de k el triángulo es obtusángulo?

A 5; **B** 7; **C** 12; **D** 13; **E** 119.

19. Si multiplicamos las fracciones representadas por los puntos R y P, ¿qué punto de los señalados representa con mejor aproximación el producto?

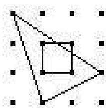


A M; **B** N; **C** S; **D** 1; **E** 2.

20. ¿Cuánto es la mitad de 4^{98} ?

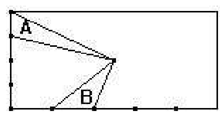
A 2^{99} ; **B** 2^{195}; **C** 4^{49}; **D** 2^{98}; **E** 2^{49} .

21. Los puntos de una cuadrícula están separados 1 cm. ¿Cuál es, en cm^2, el área de la región común al triángulo y al cuadrado?



A $\frac{4}{5}$; **B** $\frac{6}{7}$; **C** $\frac{11}{12}$; **D** $\frac{9}{10}$; **E** $\frac{10}{11}$.

22. Dividimos los lados verticales de un rectángulo en n segmentos iguales y los horizontales en m segmentos también iguales entre sí. Unimos el centro del rectángulo con los extremos de estos segmentos formando los triángulos A y B como se indica en la figura. ¿Cuál es el cociente entre el área del triángulo A y la del triángulo B?



A 1 ; **B** $\frac{m}{n}$; **C** $\frac{n}{m}$; **D** $\frac{2m}{n}$; **E** $\frac{2n}{m}$.

23. En una caja metemos una tarjeta etiquetada con un “1”, dos con un “2” cada una, tres con un “3” cada una, y así hasta 50 tarjetas con un “50”. En total hemos, pues, metido 1 + 2 + 3 +......+ 50 = 1275 tarjetas. Cogemos un montón de ellas. El mínimo número de tarjetas que debemos coger para garantizar que al menos haya diez tarjetas en las que está escrita la misma etiqueta es:

A 10; **B** 51; **C** 415; **D** 451; **E** 521.

24. El segmento AB es diámetro de una circunferencia de radio 1 y lado del triángulo equilátero ABC. Si la circunferencia corta a AC y BC en los punto D y E respectivamente, la longitud AE es:

A $\frac{3}{2}$; **B** $\frac{5}{3}$; **C** $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **D** $\sqrt{3}$; **E** $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

25. Considera los cinco números siguientes: 4, □,□,□, 32, de los cuales se han borrado los tres de en medio. Si el tercero y los siguientes los hemos obtenido sumando los dos anteriores, ¿cuál es la suma de los tres que se han borrado?

A 20; **B** 28; **C** 36; **D** 40; **E** No puedo asegurar nada con esos datos.

II CONCURSO DE PRIMAVERA. 1er NIVEL (PRIMARIA). 1ª FASE. DÍA 4-3-98.

1. ¿Cuál es el resto de la división de 9876 entre 6789?

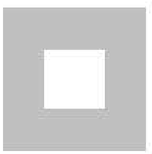
   A) 0; B) 1; C) 1111; D) 3087; E) 6790.

2. El producto de dos enteros consecutivos es 9900. ¿Cuál es su suma?

   A) 19; B) 199; C) 1109; D) 9901; E) 9899.

3. Tengo el doble de dinero que mi hermano lo que supone que tengo 10 ptas. más que él. ¿Cuánto tengo?

   A) 5 ptas.; B) 10 ptas.; C) 15 ptas.; D) 20 ptas.; E) 25 ptas.

4. 

   El perímetro del cuadrado grande es 36 y el del cuadrado 16. ¿Cuál es el área de la región sombreada?

   A) 4; B) 20; C) 25; D) 16; E) 65.

5. Si el número de primos menores que 50 es exactamente 15, ¿cuántos hay menores que 60?

   A) 19; B) 18; C) 17; D) 16; E) 15.

6. La suma de nueve de los diez primeros números positivos es 50. ¿Cuál es el que no he sumado?

   A) 1; B) 3; C) 5; D) 7; E) 8.

7. $(2 + 4 + 6 +... + 98 + 100) - (1 + 3 + 5 +... + 97 + 99) =$

   A) 1; B) 49; C) 50; D) 100; E) 200.

8. ¿Cuántas piezas de $5 \times 4 \times 2$ cm caben, como mucho, en una caja de $10 \times 8 \times 6$ cm?

   A) 10; B) 12; C) 20; D) 60; E) 80.

9. Si tengo 10 años más que mi hermano y hace diez años él tenía 10, ¿qué edad tendré dentro de otros diez años?

   A) 10; B) 20; C) 30; D) 40; E) 50.

10. De los siguientes números, ¿cuál es el más próximo a $123'456 \times 456'123$?

    A) 4.000; B) 5.000; C) 4.000; D) 50.000; E) 80.000.

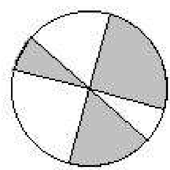
11. Los puntos A, B, C y D están alineados, como indica la figura:
Si $AC = 20$, $BD = 15$, $AD = 30$, ¿cuánto vale CD?

A) 5; B) 10; C) 15; D) 20.

12. ¿Cuántos primos son divisibles por 13?

A) 0; B) 1; C) 2; D) 13; E) Infinitos.

13.



Si el radio del círculo de la figura es 6, el área total de las regiones sombreadas es:

A) 6π; B) 12π; C) 18π; D) 36π.

14. De los veinte primeros números positivos, quito 5 impares. La suma de los quince restantes podría ser

A) 163; B) 168; C) 170; D) 186; E) 196.

15. En un concurso de 25 preguntas, contesté correctamente 10. ¿Qué porcentaje contesté correctamente?

A) 10%; B) 30%; C 40%; D) 50%; E) 60%.

16. Si la suma de dos números es 12 y la diferencia 2, ¿cuál es el producto?

A) 24; B) 35; C) 36; D) 14; E) 6.

17. Tengo varios billetes, numerados consecutivamente del 19 al 90. ¿Cuántos tengo?

A) 81; B) 109; C) 71; D) 72; E) 70.

18. Si el péndulo de un reloj muy grande vuelve a su posición inicial cada 2 segundos, ¿cuántas veces volverá en 1 hora?

A) 30; B) 1.800; C) 3.600; D) 7.200; E) 120.

19. ¿Qué número se ha perdido?: $10 \times 20 \times 30 = 1000 \times$?

A) 6; B) 60; C) 600; D) 6000; E) 0'6.

20. Juan tenía 400 ptas.; le dio el 40% a su hermano y gastó el 10% del resto. ¿Cuánto le queda ahora?

A) 200 ; B) 246; C) 240; D) 350; E) 216.

21. En cierto triángulo, el ángulo mayor es igual a la suma de los otros dos. ¿Cuánto vale el ángulo mayor?

A) 30º; B) 45º; C) 6º; D) 90º; E) 120º.

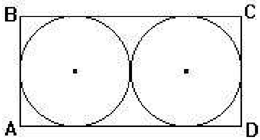
22. 12 : 3 = 20 : ?

A) 4; B) 5; C) 6; D) 8; E) 30.

23. ¿De cuántas formas diferentes pueden reordenarse las letras de la palabra $STOP$? (Por ejemplo: $TSOP$, $PTSO$, serían dos formas distintas).

A) 12; B) 4; C) 18; D) 16; E) 24.

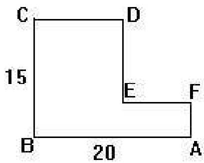
24.



La suma de las áreas de los dos círculos -iguales- de la figura es 72π. El área del rectángulo $ABCD$ es:

A) 72; B) 144; C) 288; D) 576; E) 36π.

25.



En el dibujo de la derecha, $AB = 20$ y $BC = 15$. Halla el perímetro de $ABCDEF$. (Todos los ángulos son rectos).

A) 35; B) 70; C) 75; D) 80; E) Faltan datos.

II CONCURSO DE PRIMAVERA 2º NIVEL (1º-2º-3º ESO). 1ª FASE. DÍA 4-3-98.

1. Un triángulo tiene todos sus lados de diferente longitud. Si uno mide 6 cm, otro más de 6 y otro menos de 6, el perímetro del triángulo no puede ser

A) 13; B) 18; C) 22; D) 20; E) 24.

2. Si $a\blacklozenge b$ significa $a + 2b$, entonces $1\blacklozenge(2\blacklozenge 3) =$

A) 9; B) 11; C) 17; D) 36; E) 38.

3. Alicia llega hasta 600, contando de 6 en 6 y empezando por 6. Pedro llega hasta 600, contando de 4 en 4 y empezando por 4. ¿Cuántos números de los que ha nombrado Alicia ha nombrado Pedro?

A) 50; B) 80; C) 100; D) 120; E) 250.

4. Si las entradas para el Zoo están a 300 ptas. para adultos y 200 para niños y por 2.900 ptas. me dan 13, ¿cuántas entradas de niño compré?

A) 3; B) 5; C) 7; D) 8; E) 10.

5. ¿Cuál es el número que falta?: $\frac{1}{4} = \sqrt{\frac{?}{64}}$?

A) 16; B) 8; C) 4; D) 2; E) 1.

6. De las siguientes parejas, ¿cuál no puede ser las medidas de dos ángulos de un triángulo isósceles?

A) 40º-70º; B) 45º-90º; C) 58º-64º; D) 50º-100º; E) 30º-75º.

7. La suma de los dos primos que hay entre 110 y 130 es

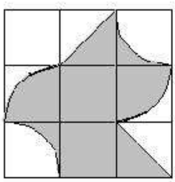
A) 232; B) 240; C) 242; D) 246; E) 248.

8. Si la media de los 12 estudiantes de una clase en un test es 90 y la de los 20 de otra es 80, la media de los 32 estudiantes es

A) $83'75$; B) $84'75$; C) 85; D) $85'75$; E) $86'75$.

9. Si 60 es un factor de N^2, uno de los siguientes números pude no ser un factor de N. ¿Cuál?

A) 4; B) 10; C) 15; D) 6; E) 30.

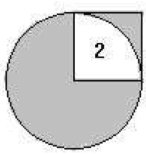
10. 

En el diagrama de la derecha, cada uno de los 9 cuadrados pequeños tiene área 1. ¿Cuál es el área de la región sombreada sabiendo que su frontera está compuesta por cuartos de circunferencia?

A) $3 + \pi$; B) $3 + \dfrac{\pi}{2}$; C) $3 + \dfrac{\pi}{4}$; D) 6; E) 5.

11. ¿Cuántos enteros coinciden con su inverso? (Recuerda: Inverso de $a = \dfrac{1}{a}$).

A) Ninguno; B) Uno; C) Dos; D) Tres; E) Cuatro.

12. 

Como ves en el dibujo, el centro del círculo coincide con un del cuadrado. Si el lado del cuadrado y el radio del círculo valen ¿cuál es el área de la región sombreada?

A) $4\pi - 4$; B) $2\pi + 4$; C) $3\pi - 4$; D) π; E) $\pi + 1$.

13. Si $0'5 < x \leq 1$ y $1 < y \leq 2$, no es posible que xy sea

A) 2; B) 1'5; C) 1; D) 0'5; E) 1'35.

14. De los siguientes números, ¿cuál es el más próximo a $\sqrt{999.999.999.999.999.999}$?

A) 999.999; B) 99.999.999; C) 9.999.999; D) 999.999.999; E) 9.990.999.999

15. La suma de los cuadrados de las longitudes de los tres lados de un triángulo rectángulo es 800. La longitud de la hipotenusa es

A) $\sqrt{800}$; B $\dfrac{1}{2}\sqrt{800}$; C) 25; D) 20; E) 40.

16. ¿Cuál es el cociente entre el mínimo común múltiplo de los 40 primeros enteros positivos y el mínimo común múltiplo de los 30 primeros?

A) 1.147; B) 2.294; C) 36.704; D) 89.466; E) 110.112.

17. $\dfrac{88}{77 \cdot 66}$ vale lo mismo que

A) $\dfrac{0'88}{7'7 \cdot 6'6}$; B) $\dfrac{0'88}{0'77 \cdot 0'66}$; C) $\dfrac{8'8}{7'7 \cdot 6'6}$; D) $\dfrac{8'8}{0'77 \cdot 0'66}$; E) $\dfrac{8'8}{7'7 \cdot 0'66}$.

18. En un rectángulo, un lado es doble que otro. Si todos los lados tienen longitud entera, el perímetro del rectángulo podría ser

A) 26; B) 27; C) 36; D) 44; E) 47.

19. (3999 + 3998 + 3997 +... + 1998) − (2002 + 2001 +... + 3 + 2 + 1) =

A) $2002 \cdot 2002$; B) $2002 \cdot 2001$; C) $2001 \cdot 2001$; D) $1997 \cdot 2002$; E) $1999 \cdot 1999$.

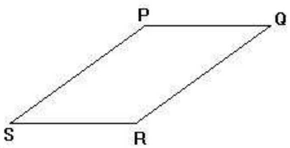
20. ¿Cuál es el resto de la división del producto de todos los primos desde 1 a 100 entre 4?

A) 3; B) 4; C) 2; D) 1; E) 0.

21. En el Club de Matemáticas del Instituto Albert Einstein hay 100 estudiantes de los que el 99% son chicas, pero de los miembros del Club que hay en 2º ESO las chicas son solamente el 98%. ¿Cuál podría ser el número de chicas de 2º ESO que hay en el Club de Matemáticas de ese Instituto?

A) 98; B) 97; C) 49; D) 48; E) 99.

22.

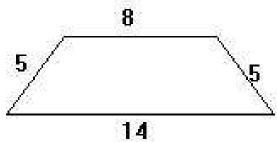


En el paralelogramo $PQRS$, el ángulo P es cuatro veces el ángulo Q. ¿Cuánto mide el ángulo P?

A) 110º; B) 116º; C) 125º; D) 144º; E) 120º.

23. ¿Cuál es el área del trapecio de la figura?

A) 44; B) 48; C) 90; D) 100; E) 110.



24. Una diagonal de un cuadrado es la base pequeña de un trapecio, estando la otra base sobre una recta que pasa por uno de los vértices del cuadrado. Si los otros dos lados del trapecio son prolongación de los lados del cuadrado y el área de éste es 2800, el área del trapecio es

A) $1400\sqrt{2}$; B) $2800\sqrt{2}$; C) 4200; D) 5600; E) $4200\sqrt{2}$.

25. Dos vértices de un triángulo equilátero están en un diámetro de un círculo de área 36π. Si el tercer vértice está también dentro del círculo, ¿cuánto vale como mucho el área del triángulo?

A) 36; B) 18π; C) $12\sqrt{3}$; D) 18; E) 6π.

II CONCURSO DE PRIMAVERA. 3er NIVEL (4º ESO - 1º BACHILLERATO). 1ª FASE. DÍA 4-3-98.

1. Si $r+\frac{1}{r}=19+\frac{1}{19}$, $s+\frac{1}{s}=19+\frac{1}{19}$ y $r>s$, $r{\cdot}s$ es

A) 0; B) 1; C) $\frac{19}{2}$; D) 19; E) 19^2.

2. $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ es exactamente igual a

A) $\sqrt{7}+2\sqrt[4]{3}$; B) $\sqrt{7}+\sqrt{1'18}$; C) $\sqrt{13'0282}$; D) 3'73205; E) $2+\sqrt{3}$.

3. 3. Un círculo y un cuadrado tienen áreas iguales. El cociente entre la longitud del lado del cuadrado y la del diámetro del círculo es

A) $\sqrt{\pi}$; B) $2\sqrt{\pi}$; C) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$; D) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; E) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

4. La gráfica de una de las siguientes funciones, corta a la gráfica de $y=|x|$ solamente en un pto. ¿De qué función se trata?

A) $y=x-2$; B) $y=x+1$; C) $y=x$; D) $y=x-1$; E) $y=2$.

5. La suma de dos números es 20 y la suma de sus cuadrados 300. ¿Cuál es su producto?

A) 15; B) 30; C) 50; D) 75; E) 100.

6. Si el producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares no es igual a -1, la pendiente de una de ellas tiene que ser

A) -1; B) 0; C) 1; D) -10; E) 10.

7. Si $x>0$ y x^2-2x+1 es 100.000.000.000.000, x es

A) 9.999.999; B) 10.000.001; C) 99.999.999; D) 100.000.001; E) 10.000.000.

8. Si (a, b) y (c, d) son las coordenadas de dos puntos distintos de la gráfica de $3x+4y=5$, entonces $\frac{b-d}{a-c}$ es igual a

A) $-\frac{3}{4}$; B) $+\frac{3}{4}$; C) $-\frac{4}{3}$; D) $+\frac{4}{3}$, E) $-\frac{5}{3}$.

9. ¿Cuántos valores de x no satisfacen $\frac{2x^2+8x+8}{x^2+4x+4}=2$.

A) 0; B) 1; C) 2; D) Más de 2 pero una cantidad finita; E) Infinitos.

10. ¿Para cuántos valores de x es $\dfrac{2}{x}$ entero?

A) 1; B) 2; C) 3; D) 4; E) Infinitos.

11. ¿Cuál es el menor entero $n > 0$ para el que 12^n es divisible por 2^9?

A) 3; B) 4; C) 5; D) 9; E) 10.

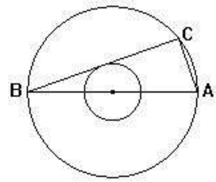
12. No hay ningún número real x para el que $|x + 1| - |x - 1|$ sea

A) 4; B) 1; C) 0; D) −2; E) 2.

13. Una habitación cuadrada está enlosetada con baldosas cuadradas e iguales. Las baldosas de las dos diagonales son negras y el resto blancas. Si hay 101 baldosas negras, el número total de baldosas es

A) 121; B) 625; C) 676; D) 2500; E) 2601.

14. Los radios de las dos circunferencias concéntricas de la figura son uno el triple del otro. La cuerda BC de la grande es tangente a la pequeña y $AC = 12$. El radio de la circunferencia mayor es



A) 13; B) 18; C) 21; D) 24; E) 26.

15. Al reflejarse la recta $y = mx + b$ sobre el eje x, da lugar a la recta $x - 3y + 11 = 0$. El valor de $m + b$ es

A) −6; B) −5; C) −4; D) −3; E) −2.

16. ¿Cuántos pares de enteros positivos (a, b) con $a + b \leq 100$ son solución de la ecuación $\dfrac{a+b^{-1}}{a^{-1}+b} = 13$?

A) 1; B) 5; C) 7; D) 9; E) 13.

17. ¿Cuáles de las siguientes funciones tienen la misma gráfica?

I. $y = x - 2$; II. $y = \dfrac{x^2-4}{x+2}$; III. $y = \dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$.

A) I y II solamente; B) I y III solamente; C) II y III solamente; D) I, II y III;
E) Ninguna. Todas tienen gráficas diferentes.

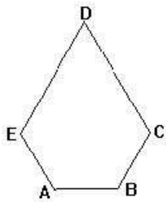
18. El año pasado había en El Corte Inglés bicicletas a 16.000 ptas. y cascos de ciclista a 4.000. Este año habían subido las bicicletas el 5% y los cascos el 10%. El porcentaje de incremento en la compra conjunta de bicicleta y casco ha sido el

A) 6%; B) 7%; C) 7'5%; D) 8%; E) 15%.

19. $\sqrt{\dfrac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}} =$

A) $\sqrt{2}$; B) 16; C) 32; D) $\sqrt[3]{12^2}$; E) 512'5.

20.



En el pentágono de la figura $ABCDE,$ los ángulos A y B son iguales y miden 120º; $EA = AB = BC = 2$ y $CD = DE = 4$. ¿Cuál es su área?

A) 10; B) $7\sqrt{3}$; C) 15; D) $9\sqrt{3}$; E) $12\sqrt{5}$.

21. ¿Para cuántos enteros n los ángulos del polígono regular de n lados tienen medida entera en grados?

A) 16; B) 18; C) 20; D) 22; E) 24.

22. Considera la sucesión de enteros positivos 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, ... donde cada uno de los enteros positivos aparece las veces que vale. ¿Cuál es el resto de la división del término que ocupa el lugar 1998 entre 5?

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4.

23. Antonio y Beatriz empiezan a trabajar el mismo día. El horario de Antonio consiste en 3 días de trabajo y 1 de descanso mientras que Beatriz trabaja 7 días seguidos y luego descansa 3 días seguidos. En los 1.000 primeros días de trabajo, ¿cuántos días coinciden en el descanso?

A) 48; B) 50; C) 72; D) 75; E) 100.

24. El número de primos mayores que 1998! + 1 y menores que 1998! + 1998 es

A) 1998; B) 1997; C) 1; D) 0; E) Nada de lo anterior.

25. El dígito de las unidades de la suma $1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + 1998^4$ es

A) 1; B) 2; C) 0; D) 5; E) 9.

II CONCURSO DE PRIMAVERA. 1er NIVEL (PRIMARIA). 2ª FASE. DÍA) 25-04-98.

1 En esta suma $\begin{array}{r} 2\ \ \ 7 \\ +1\ 9\ 4 \\ \hline 4\ 5\ 1 \end{array}$ como ves, falta una cifra. ¿Cuál es?

A) 0; B) 4; C) 5; D) 6; E) 7.

2 En la palabra CONCURSO, cada vocal vale 2 puntos y cada consonante 1. ¿Cuánto vale la suma de todas las letras?

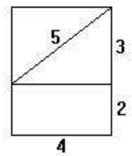
A) 9; B) 10; C) 11; D) 12; E) 13.

3 ¿Qué número es el mayor de éstos?

A) 5'07; B) 5'007; C) 5'017; D) 5'0171; E) 5'00098.

4 Una gata pesa 4 kg y cada uno de sus dos gatitos pesa 250 g. ¿Cuánto pesan entre los tres?

A) 5 kg; B) 4'450 kg; C) 4 kg y medio; D) 5'5 kg; E) Nada de lo anterior.

5 

Sofía cortó este rectángulo en las tres piezas que se muestran y con ellas formó un trapecio isósceles. ¿Cuál es el perímetro del trapecio isósceles?

A) 15 cm; B) 20 cm; C) 22 cm; D) 24 cm; E) 18 cm.

6 ¿En cuál de estos números la cifra de las centenas es igual a la suma de la cifra de las decenas y la de las unidades?

A) 531; B) 2.321; C) 311; D) 2.010; E) 3.111.

7 ¿Qué palabra de las siguientes tiene 2 ejes de simetría?

A) OSSO; B) SOS; C) COCO; D) 010; E) KO.

8 ¿En qué número la cifra de las unidades es más pequeña que todas las demás cifras de ese número?

A) 312; B) 75; C) 102; D) 122; E) 4.054.

9 Hoy, 25 de Abril, es sábado. ¿Qué día de los siguientes cae también en sábado?

A) 8 de Mayo; B) 16 de Mayo; C) 21 de Mayo; D) 24 de Mayo; E) Nada de lo anterior.

10 Redondeando a la decena de kilogramo más próxima, el peso de un delfín resulta ser de 170 kg. De los siguientes, ¿cuál puede ser el verdadero peso del delfín?

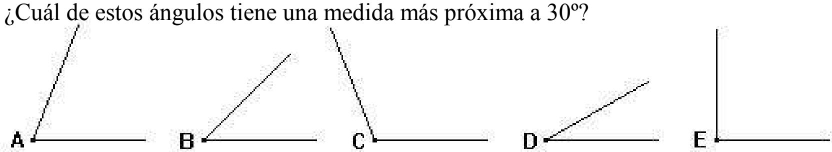
A) 176 kg; B) 160 kg; C) 173 kg; D) 159 kg; E) Nada de lo anterior.

11 Un cuadrilátero es un paralelogramo si tiene:
A) Un par de lados consecutivos iguales; B) Un par de lados paralelos;
C) Una diagonal que es eje de simetría; D) Dos ángulos consecutivos iguales;
E) Dos pares de lados paralelos.

12 En un cajón hay 3 calcetines blancos, 2 negros y 5 rojos. Sin mirar dentro del cajón, ¿cuál es el mínimo número de calcetines que hay que sacar para estar seguro que hay dos calcetines del mismo color?

A) 2; B) 3; C) 5; D) 4; E) 7.

13 ¿Cuál de estos ángulos tiene una medida más próxima a 30º?



A) B) C) D) E)

14 Para obtener una pintura de cierto color, Ana mezcla 5 litros de pintura roja, 2 litros de pintura azul y 2 litros de pintura amarilla. ¿Cuál es la proporción de pintura roja en el total de la mezcla?

A) 5 a 2; B) 9 a 4; C) 5 a 4; D) 5 a 9; E) Nada de lo anterior.

15 La diferencia entre dos números primos nunca puede ser

A) 1; B) 2; C) 7; D) 8; E) 10.

16 La suma de los cuadrados de los 20 primeros enteros positivos es 2.870. ¿Cuál es la suma de los cuadrados de los 19 primeros enteros positivos?

A) 2.350; B) 2.361; C) 2.470; D) 2.850; E) Falta información.

17 ¿Cuál es el menor número de cuadrados, cada uno de 4 m de perímetro, que puede cubrir totalmente un cuadrado de 4 m de lado?

A) 1; B) 4; C) 8; D) 12; E) 16.

18 El número $27 \times 31 \times 35 \times 39 \times 43$ dividido entre $43 \times 39 \times 35 \times 31 \times 3$ da

A) 1.998; B) 9; C) 0; D) 43; E) No se puede averiguar.

19 Cuando divido un número entre 3, el cociente es 240. Si divido el mismo número entre 6, el cociente será

A) 720; B) 480; C) 120; D) 80; E) Faltan datos.

20 Un reloj de pulsera (de 12 horas) atrasa 10 minutos cada día. Si lo ponemos hoy en hora, dentro de cuántos días volverá a dar la hora exacta.

A) 36; B) 72; C) 120; D) 144; E) 168.

II CONCURSO DE PRIMAVERA. 2º NIVEL (1º-2º-3º ESO). 2ª FASE.

1. ¿Cuántos números terminados en 7 (es decir, un 7 en el lugar de las unidades) hay entre 1 y 878?

A) 85; B) 87; C) 88; D) 90; E) 91.

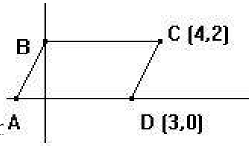
2. Cuál es el mayor cociente que puede obtenerse al tomar dos números del conjunto $\{-24, -3, -2, 1, 2, 8\}$

A) -24; B) 24; C) 12; D) 8; E) Nada de lo anterior.

3. ¿Cuántos números enteros entre 1 y 46 son divisibles por 3, o por 5, o por ambos?

A) 18; B) 21; C) 22; D) 24; E) 25.

4.



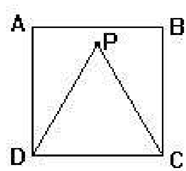
El área del paralelogramo $ABCD$ de la figura es:

A) 8; B) 6; C) 12; D) 14; E) Nada de lo

ar

5. ¿En cuántos ceros acaba el producto $25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$?

A) 3; B) 6; C) 9; D) 10; E) 12.



6. $ABCD$ es un cuadrado y P un punto dentro del cuadrado tal que CDP es un triángulo equilátero. ¿Cuánto mide el ángulo PC?

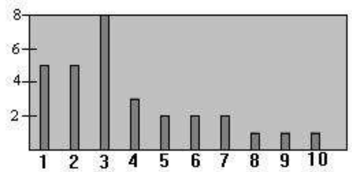
A) 75º; B) 70º; C) 60º; D) 45º; E) No hay suficiente información.

7. Un aula tiene 20 filas de asientos con 10 asientos en la primera fila y, en cada fila hay un asiento más que en la anterior. Queremos hacer un examen de forma que no haya dos estudiantes juntos en ninguna fila. ¿Cuál es el máximo número de estudiantes que podemos colocar?

A) 150; B) 180; C) 200; D) 300; E) 400.

8. En una compañía con miles de empleados, el siguiente diagrama de barras representa el número de empleados y los años que llevan trabajando en la compañía, pero se nos ha borrado la escala en el eje vertical.

¿Qué porcentaje de empleados de esa compañía lleva trabajando en ella 5 o más años?



A) 9%; B) 23,3%; C) 30%; D) 35%; E) Faltan datos.

9. La media aritmética de 10 números enteros positivos diferentes es 10. El mayor valor que puede tomar uno de ellos es

A) 10; B) 50; C) 55; D) 80; E) 90.

10. En la siguiente suma, cada letra representa un dígito. Letras distintas representan dígitos distintos. ¿Cuánto vale C?

$$\begin{array}{r} A\,B\,C \\ A\,B \\ +\quad A \\ \hline 3\,0\,0 \end{array}$$

A) 1; B) 3; C) 5; D) 7; E) Falta información.

11. Por cada 3º que aumenta la temperatura, el volumen de cierto gas aumenta 4 cm^3. Si el volumen del gas a 32º es 24 cm^3, ¿qué volumen ocupaba cuando la temperatura era de 20º?

A) 8 cm^3; B) 12 cm^3; C) 15 cm^3; D) 16 cm^3; E) 19 cm^3.

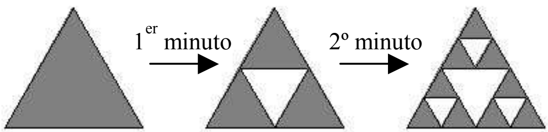
12. Cada una de las dos ruletas siguientes está dividida en 3 partes iguales. Las hacemos girar y multiplicamos los resultados obtenidos. ¿Cuál es la probabilidad de que este producto sea un número par?

A) 1/3; B) 1/2; C) 2/9; D) 7/9; E) 8/9.

13. El coro del Instituto Elena Morado tiene 10 chicas y 8 chicos y la orquesta está formada por 8 chicas y 10 chicos. Hay 6 chicas que son miembros tanto del coro como de la orquesta y 23 estudiantes que son miembros de alguno de los grupos, o de los dos. ¿Cuántos chicos del coro no están en la orquesta?

A) 1; B) 2; C) 3; D) 5; E) 6.

14. Un triángulo equilátero está originariamente pintado de negro. Cada minuto cambia, de forma que la cuarta parte de cada triángulo negro se vuelve blanca.



Al cabo de 5 minutos, ¿qué parte del triángulo original sigue estando de negro?

A) 1/1024; B) 15/64; C) 243/1024; D) 1/4; E) 17/64.

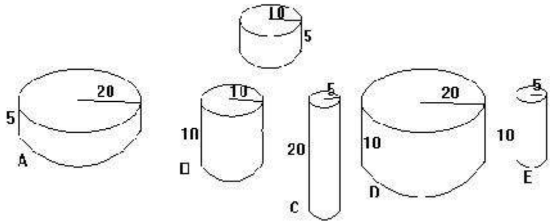
15. Para hacer un viaje de 30000 km utilizamos las cinco ruedas de un coche. (A veces cambiábamos una por la de repuesto). Si cada una de las cinco recorrió los mismos kilómetros, ¿cuántos km hizo cada una?

A) 6000; B) 7500; C) 24000; D) 30000; E) 37500.

16. La suma de los cuadrados de los 20 primeros enteros positivos es 2870. ¿Cuál es la suma de los cuadrados de los 19 primeros enteros positivos?

A) 2350; B) 2361; C) 2470; D) 2850; E) Nada de lo anterior.

17. De los cilindros que te mostramos a continuación, ¿cuál tiene doble volumen que el de arriba?



A) B) C) D) E)

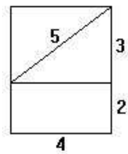
18. Los lados de un triángulo miden 6,5; 10 y s, siendo s un número entero. ¿cuál es el menor valor posible de s?

A) 1; B) 2; C) 3; D) 4; E) 5.

19. Tenemos 400 cubitos de 1 cm de arista con los que hacemos el mayor cubo posible. ¿Cuántos cubitos nos sobran?

A) 57; B) 72; C) 81; D) 90; E) 0.

20. Sofía cortó este rectángulo en las tres piezas que se muestran y con ellas formó un trapecio isósceles. ¿Cuál es el perímetro del trapecio isósceles?



A) 15 cm; B) 20 cm; C) 22 cm; D) 24 cm; E) 18 cm.

21. Un cuadrado y un rectángulo tienen igual perímetro: 32 cm. Si el lado del cuadrado es 6 cm menos que el largo del rectángulo, ¿cuánto mide el rectángulo de ancho?

A) 4; B) 2; C) 6; D) 8; E) Faltan datos.

22. De los cuatro resultados que se te indican, el más próximo a

$$\frac{487.000 \times 12.027.300 + 9.621.001 \times 487.000}{19.367 \times 0,5} \quad \text{es}$$

A) 10 millones; B) 100 millones; C) Mil millones; D) Diez mil millones; E) Cien mil millones.

23. Para pintar todas las caras de un cubo hacen falta 7,260 kg de pintura. Sabiendo que con 1 kg de pintura, pintamos 1 m^2 de superficie, ¿cuál es la suma de las aristas del cubo?

A) 21,6 m; B) 19,2 m; C) 16,8 m; D) 15,2 m; E) 13,2 m.

24. En un cajón hay 3 calcetines blancos, 2 negros y 5 rojos. Sin mirar dentro del cajón, ¿cuál es el mínimo número de calcetines que hay que sacar para estar seguro que hay dos calcetines del mismo color?

A) 2; B) 3; C) 5; D) 4; E) 7.

25. Un tanque con forma de prisma cuadrangular tiene por base un cuadrado de 40 cm de lado y contiene agua hasta una altura de 30 cm. Sumergimos totalmente en él un cubo de 20 cm de lado. ¿Hasta qué altura sube el agua?

A) 32 cm; B) 35 cm; C) 37,5 cm; D) 40 cm; E) 0 cm.

II CONCURSO DE PRIMAVERA. 3er NIVEL (4º ESO). 2ª FASE.

1. El menor entero positivo por el que hay que multiplicar 12 para que nos dé un cubo perfecto es

A) 144; B) 1728; C) 15; D) 16; E) 18.

2. Dividimos un cuadrado en diez mil cuadraditos pequeños, distribuidos en 100 filas de 100 cuadraditos cada fila. Pintamos de negro los 100 cuadraditos de la fila de arriba, 99 de la segunda, 98 de la tercera y así sucesivamente. ¿Qué porción del cuadrado grande hemos pintado de negro?

A) $\frac{1}{2}$; B) $\frac{51}{100}$; C) $\frac{101}{200}$; D) $\frac{201}{400}$; E) $\frac{49}{99}$.

3. Si seis gatos cazan 6 ratones en 6 minutos, ¿cuántos ratones cazarán 30 gatos en 30 minutos?

A) 30; B) 180; C) 150; D) 216; E) 6.

4. Si $\sqrt{2} - 1$ es una solución de la ecuación $3x^2 - ax + 1 = 0$, el valor de a es

A) $5\sqrt{2} - 5$; B) $8\sqrt{2} - 11$; C) $5\sqrt{2} + 5$; D) $4\sqrt{2} - 2$; E) Falta información.

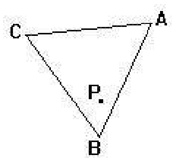
5. Si x es positivo, ¿Cuál de las siguientes expresiones es menor que l?

A) $\frac{1}{x}$; B) $\frac{1+x}{x}$; C) $\frac{x}{x+1}$; D) $\frac{1-x}{x}$; E) $\frac{x+1}{2x}$.

6. En una clase aprobó el 66% de los alumnos y en otra, en la que había el doble, aprobó solamente el 57%. El porcentaje de aprobados entre las dos clases fue

A) 62%; B) 61%; C) 61,5%; D) 60%;
E) Falta saber el nº de alumnos de alguna de las dos.

7.



El triángulo ABC de la figura es equilátero y de área $\sqrt{3}$. ¿Cuánto vale la suma de las distancias de P a $\overline{AB}$, a $\overline{AC}$ y a $\overline{BD}$?

A) 1; B) $\sqrt{3}$; C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; D) $2\sqrt{3}$; E) Falta información.

8. Un cubo tiene doble volumen que otro. El cociente entre las aristas del mayor y la del pequeño es

A) 2; B) $\frac{3}{2}$; C) $\sqrt{2}$; D) $\sqrt[3]{2}$; E) 8.

9. El producto de las edades de un padre y sus dos hijos es 4018. ¿Qué edad tenía el padre cuando nació el hijo mayor?

A) 27; B) 28; C) 34; D) 36; E) Faltan datos.

10. Si $x < -4$, $\left| 2 - |2 + x| \right|$ es igual a

A) -4; B) $4 + x$; C) $-4 - x$; D) x; E) $-x$.

11. ¿Cuánto vale $\dfrac{9^{2n} - 3^n}{3^n}$?

A) 9^{2n}; B) $3^{2n} - 1$; C) 26; D) $3^{3n} - 1$; E) $3^n - 1$.

12. $ABCD$ es un cuadrado y P un punto dentro del cuadrado tal que CDP es un triángulo equilátero. ¿Cuánto mide el ángulo PBC?

A) 75º; B) 70º; C) 60º; D) 45º; E) 72º.

13. Si $1 + \sqrt{x-1} = \sqrt{x+1}$, $2x$ es

A) 2,5; B) 0; C) 6/5; D) 5/8; E) No se puede calcular.

14. La media aritmética de dos números es 6 y la media geométrica 12. ¿Cuál es la ecuación de 2º grado que tiene esos dos números como raíces?

A) $x^2 + 12x + 144 = 0$; B) $x^2 - 12x + 144 = 0$; C) $x^2 - 6x + 24 = 0$;
D) $x^2 + 6x + 36 = 0$; E) $x^2 - 6x + 12 = 0$.

15. Un triángulo equilátero y un hexágono están inscritos en el mismo círculo. Si se divide el área del hexágono entre el área del triángulo se tiene:

A) 1,5; B) 2; C) 2,5; D) 3; E) $\sqrt{3}$.

16. Un auditorio tiene 26 filas y 24 butacas en cada una. Todas las butacas están numeradas empezando en la primera fila. ¿En qué fila se encuentra la butaca 375?

A) 13; B) 14; C) 15; D) 16; E) 12.

17. ¿En qué cuadrantes están contenidos los puntos (x, y) tales que $y > 2x$ e $y > 4 - x$?

A) I y II; B) II y III; C) I y III; D) III y IV, E) I y IV.

18. Si a, $b > 0$ y el triángulo del primer cuadrante formado por los ejes de coordenadas y la recta de ecuación $ax + by = 6$, tiene área 6, ab es igual a

A) 3; B) 6; C) 12; D) 108; E) Falta información.

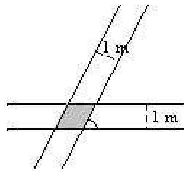
19. La solución de la ecuación $2^{2x} + 4 \cdot 2^{x} = 1$ es

A) $\lg\sqrt{5}$; B) $\lg(4-\sqrt{5})$; C) $\dfrac{\sqrt{5}-2}{2}$ D) $\lg\dfrac{\lg(\sqrt{5}-2)}{\lg 2}$; E) $\dfrac{\lg\sqrt{5}}{\lg 2}$.

20. Los tres primeros términos de una progresión son $\sqrt{5}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[6]{5}$. ¿Cuál es el cuarto?

A) $\sqrt[8]{5}$; B) $\sqrt[9]{5}$; C) $\sqrt[10]{5}$; D) 1; E) $\sqrt[7]{5}$.

21. Dos bandas, cada una de anchura 1, se solapan formando un ángulo a como indica la figura. ¿Cuánto vale el área de la región sombreada?



A) sen a; B) cos a; C) 1/sen a; D) 1/cos a; E) sen a/cos a.

22. Si por un artículo se pagan 1466,25 dólares incluyendo el impuesto del 15% y se sabe que este artículo tenía un descuento del 15%, entonces el precio original era:

A) 1460 \$; B) 1466,25 \$; C) 1500 \$; D) 1433,5 \$; E) 1450 \$.

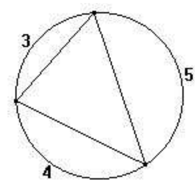
23. Sean a, b, c y d números enteros tales que $a < 2b$, $b < 3c$ y $c < 4d$. Si $d < 100$, el mayor valor posible para a es

A) 2367; B) 2375; C) 2399; D) 2400; E) 2401.

24. Un "punto reticular" es un punto del plano con coordenadas enteras. ¿Cuántos puntos reticulares hay en el segmento de extremos (3, 17) y (48, 281) incluyendo los extremos?

A) 2; B) 4; C) 6; D) 16; E) 45.

25. Los arcos que determinan los vértices del triángulo de la figura tienen longitudes 3, 4 y 5. ¿Cuál es el área del triángulo?



A) 6; B) $\dfrac{18}{\pi^2}$; C) $\dfrac{9}{\pi^2}\left(\sqrt{3}-1\right)$; D) $\dfrac{9}{\pi^2}\left(\sqrt{3}+3\right)$; E) Falta información.

III CONCURSO DE PRIMAVERA. 1er NIVEL (PRIMARIA). 1ª FASE. DÍA 3-3-99

1 ¿Cuántos segundos hay en 3 horas y media?

A) 210; B) 3600; C) 10800; D) 11500; E) 12600.

2 A Dani le dijeron que multiplicara un número por 5, y por error, lo que hizo fue dividirlo por 5. Si la respuesta que dio fue 5, ¿qué respuesta debería haber dado si hubiera hecho lo que le dijeron?

A) 1; B) 25; C) 50; D) 125; E) 200.

3 Al repartir cierta cantidad de manzanas entre 18 niños, a cada uno le tocaron 12. Si hubiera habido 6 niños menos, ¿cuántas manzanas habría recibido cada uno?

A) 6; B) 9; C) 18; D) 20; E) 24.

4 En una clase de 30 estudiantes, hay 7 que tienen gafas, 15 que tienen calculadoras y 2 que tienen gafas y calculadoras. ¿Cuántos de ellos no tienen ni gafas ni calculadoras?

A) 10; B) 8; C) 6; D) 4; E) 2.

5 Una parcela rectangular de 30 m por 40 m está rodeada por un paseo de 5 m de ancho. ¿Cuál es el área del paseo?

A) 800 m^2; B) 700 m^2; C) 375 m^2; D) 350 m^2; E) 300 m^2.

6 ¿Cuántas centenas hay en un millón?

A) Un millón; B) Mil; C) Diez mil; D) Cien; E) Mil.

7 Encuentra el número que se ha perdido aquí: $1000 \times 968 = 10 \times \ ?$

A) 0'968; B) 9'68; C) 96800; D) 968000; E) 9680.

8 La escala de un mapa es: $\frac{3}{4}$ de cm = 10 km. Si la distancia entre dos ciudades en el mapa es 12 cm, ¿cuál es la distancia en la realidad?

A) 90 km; B) 120 km; C) 150 km; D) 160 km; E) 180 km.

9 Rocío tiene una media de 8'4 en los dos primeros controles. Si en el tercero obtiene un 9'6, ¿cuál es la media de los tres?

A) 8'6; B) 8'8; C) 9; D) 9'1; E) 9'2.

10 $\frac{1}{4} + 0'75 =$

A) 0'775; B) 0'95; C) 0'975; D) 1; E) 1'25.

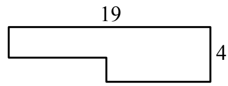
11 En una balanza en equilibrio hay en un platillo una tarta, y en el otro, media tarta del mismo tipo y una pesa de 600 g. ¿Cuánto pesa la tarta?

A) 300 g; B) 600 g; C) 900 g; D) 1200 g; E) 1500 g.

12 El mayor número, menor de 2468 y divisor de 2468 es el:

A) 2467; B) 1234; C) 842; D) 617; E) 1268.

13 Todos los ángulos de la figura son rectos. Su perímetro es:

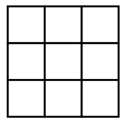


A) 26; B) 44; C) 45; D) 46; E) 50.

14 Un capicúa es un número que se lee igual de derecha a izquierda que de izquierda a derecha. Por ejemplo, el número 12321. ¿Cuántos números enteros comprendidos entre 100 y 1000 son capicúas?

A) 9; B) 10; C) 81; D) 90; E) 99.

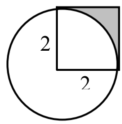
15 Si el área de cada uno de los nueve cuadraditos pequeños es 9,



el perímetro del cuadrado grande es

A) 12; B) 24; C) 36; D) 81; E) 108.

16 Un círculo y un cuadrado están colocados como indica la figura.



Si el lado del cuadrado es 2, ¿cuál es el área de la región sombreada?

A) $4\pi - 4$; B) $4 - \pi$; C) $2\pi - 4$; D) $\pi - 2$; E) $2\pi - 2$.

17 Tengo un perro y un gato que un día estaban fuera de casa, en la calle. El perro a 100 m de casa, el gato a 80 m. Los llamé a los dos a la vez y empezaron a correr para casa. Si el perro corre el doble de rápido que el gato, ¿cuánto le faltaba al gato para llegar a casa cuando llegó el perro?

A) 20 m; B) 30 m; C) 40 m; D) 50 m; E) 60 m.

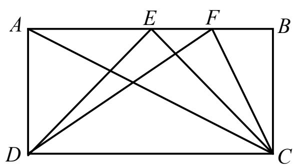
18 Tienes 3 bolsas llenas de bolas: en la bolsa A hay 6 bolas, 2 blancas y 4 negras, en la B 8 bolas, 3 blancas y 5 negras; en la C 10 bolas, 4 blancas y 6 negras. Sacando una bola de cada bolsa, ¿en cuál es más fácil que te salga blanca?

A) En la A; B) En la B; C) En la C; D) En todas igual; E) No se puede saber

19 Al tirar 2 dados, ¿qué suma es más fácil de sacar?

A) 5; B) 6; C) 7; D) 8; E) 9.

20 En la figura que ves, E es el punto medio del lado AB.
¿Qué triángulo tiene mayor área?
A) El triángulo ADC; B) El triángulo EDC;
C)El triángulo DFC; D) Los tres tienen la misma área;
E) Nada de lo anterior.



III CONCURSO DE PRIMAVERA. 2º NIVEL (1º- 2º ESO). 1ª FASE. DÍA 3-3-99

1. Si tu corazón bombea aproximadamente 80 mililitros de sangre cada segundo, ¿cuántos litros de sangre aproximadamente bombea en un día?

A) 7; B) 70; C) 500; D) 5000; E) 7000.

2. Para obtener 0'075 × 1'34, Alicia utilizó una calculadora pero se le olvidó meter las comas. Si la respuesta que leyó fue 10050, la respuesta correcta sería:

A) 1'005; B) 100'5; C) 10'05; D) 0'01005; E) 0'1005.

3. ¿Cuál es el valor de $2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + ... - 99 + 100$?

A) 49; B) 50; C) 51; D) 99; E) 101.

4. El producto $\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)$ es

A) 2; B) 3; C) 4; D) 5; E) 6.

5. Si en un conjunto de cinco números la media de los tres primeros es 15 y la media de los dos últimos es 10, ¿cuál es la media de los cinco?

A) 5; B) $\frac{25}{3}$; C) 12'5; D) 13; E) 25.

6. Unas barritas de almendra y avellana vienen en cajas de 8 barritas cada una, siendo 250 g el contenido de cada caja. En la caja leemos que cada barrita contiene 3'5 g de grasa. ¿Cuál es el porcentaje de grasa del contenido de la caja?

A) 1'4; B) 7; C) 11'2; D) 14; E) 28.

7. El cuadrado de la figura es un cuadrado mágico, es decir, que la suma de los números de cada fila, columna y diagonal es el mismo. ¿Cuál es el valor de N?

16	N	
11		15
12		

A) 13; B) 10; C) 17; D) 9; E) 14.

8. El velocímetro de mi coche marca el 10% más de la velocidad que realmente llevo. Si mi velocímetro marca 100 km/h, ¿a qué velocidad voy realmente?

A) $\left(91+\frac{1}{11}\right)$ km/h; B) 110 km/h; C) 90 km/h; D) $\frac{100}{9}$ km/h; E) $\left(90+\frac{10}{11}\right)$ km/h.

9. $5x - 2 - (3x - 4)$ es igual a

A) $2x - 4$; B) $-2x + 2$; C) $2x + 2$; D) $2x - 2$; E) $2x - 6$.

10. El peso total de un tubo y su contenido, que son 20 pastillas idénticas, es 180 gramos. Cuando el tubo contiene 15 pastillas, vemos que el peso total es 165 gramos. ¿Cuál es el peso, en gramos, del tubo?

A) 103; B) 115; C) 120; D) 125; E) 146.

11. Un concurso de matemáticas consta de 25 preguntas. Cada pregunta aporta 5 puntos si la respuesta es correcta, 2 puntos si está en blanco y 0 si la respuesta es errónea. Pedro, que no tuvo ningún fallo obtuvo 98 puntos. ¿Cuántas preguntas contestó correctamente?

A) 10; B) 12; C) 13; D) 16; E) 18.

12. Entre los hijos de una familia, cada chico tiene tantas hermanas como hermanos pero cada chica tiene solamente la mitad de hermanas que de hermanos. ¿Cuántos hijos hay en total en la familia?

A) 7; B) 5; C) 6; D) 4; E) 9.

13. Uno de los elefantes del zoo tiene una dieta especial y come cada día una cantidad de zanahorias igual a la que come uno de los conejos en un año (365 días). En un día, entre los dos comen 111 kg de zanahorias. ¿Cuántos kg de zanahorias come el conejo en un día?

A) $\frac{1}{2}$; B) $\frac{111}{365}$; C) $\frac{37}{122}$; D) $\frac{19}{61}$; E) $\frac{22}{73}$.

14. Si $x > 7$, ¿cuál de los siguientes números es el más pequeño?

A) $\frac{x}{7}$; B) $\frac{7}{x}$; C) $\frac{7}{x+1}$; D) $\frac{x+1}{7}$; E) $\frac{7}{x-1}$.

15. Las catorce cifras de una tarjeta de crédito están escritas en los cuadrados de abajo. Si la suma de tres cifras consecutivas cualesquiera es 20, ¿cuál es el valor de x?

			9				x				7		

A) 3; B) 4; C) 5; D) 7; E) 9.

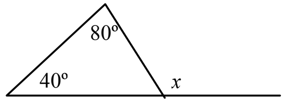
16. ¿Cuál sería el tercer número de la izquierda en la fila nº 89 del siguiente triángulo de números?

A) 8103; B) 6982; C) 10681; D) 7747; E) 7924.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & 3 & 4 & & \\ & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ & & & \vdots & & & \end{array}$$

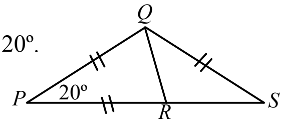
17. ¿Cuál es el valor del ángulo x de la figura?

A) 100; B) 120; C) 160; D) 140; E) 130.



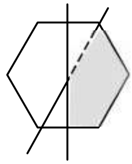
18. En el dibujo adjunto, $PQ = PR = QS$ y el ángulo QPR es 20º. ¿Cuál es el valor, en grados, del ángulo RQS?

A) 20; B) 40; C) 60; D) 80; E) 100.



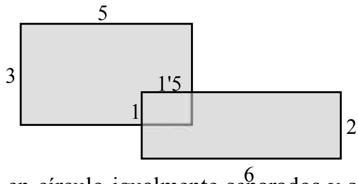
19. La dos rectas a trazos de la figura son ejes de simetría de ese hexágono regular.
¿Qué fracción del área del hexágono está sombreada?

A) 5/12; B) 7/24; C) 11/24; D) 1/3; E) 3/8.



20. Dos rectángulos se solapan como se indica en la figura. Hallar el área sombreada.

A) 25'5; B) 27; C) 24; D) 26'5; E) 28'5.

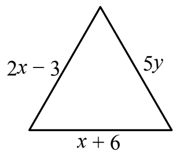


21. Los alumnos de un grupo de baile se ponen en círculo igualmente separados y se empiezan a contar a partir de uno de ellos. Si el que tiene el número 20 está diametralmente opuesto al que tiene el 53, ¿cuántos alumnos hay en el grupo?

A) 60; B) 62; C) 64; D) 66; E) 68.

22. Un triángulo equilátero tiene las longitudes que se marcan en la figura. ¿Cuánto vale y?

A) 35; B) 5; C) 6; D) 9; E) 3.



23. ¿Cuántos enteros de cuatro cifras, todas diferentes y ninguna 0, hay sabiendo que la suma de sus cifras es 12?

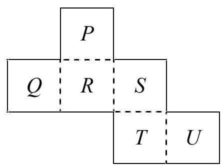
A) 56; B) 18; C) 256; D) 24; E) 48.

24. Entre los números 1,2, 3, 4, ..., 1000, ¿cuántos hay que no sean divisibles ni por 6 ni por 9?

A) 222; B) 277; C) 723; D) 778; E) 780.

25. Si doblamos el desarrollo de la figura para obtener un cubo, la cara opuesta a la marcada con U es la marcada con

A) P; B) Q; C) R; D) S; E) T.



III CONCURSO DE PRIMAVERA. 3er NIVEL (3º- 4º ESO). 1ª FASE. 3-3-99

1. Un millón de segundos son aproximadamente

A) 3 días; B) 12 días; C) 3 meses; D) 1 año; E) 2 años.

2. El valor de $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + ... - 998 + 999 - 1000 + 1001$ es:

A) 500; B) 501; C) −501; D) −1001; E) 1000.

3. $1+\frac{3}{100}+\frac{1}{1000}$ es igual a:

A) 1'31; B) 0'131; C) 1'0311; D) 1'0301; E) 1'031.

4. La media aritmética de cuatro números es 48. Si le restamos 8 a cada uno de ellos, ¿cuál es la media aritmética de los cuatro nuevos números?

A) 16; B) 40; C) 46; D) 44; E) 6.

5. Un equipo de baloncesto sabe que tiene que ganar al menos el 60% de sus partidos si quiere clasificarse para una segunda fase. Después de jugar 8 partidos, de los que ganó solamente el 50%, ¿qué porcentaje tiene que ganar, como mínimo, de los 12 que le quedan si quiere clasificarse?

A) $33,\widehat{3}\%$; B) 60%; C) 70%; D) $66,\widehat{6}\%$; E) 75%.

6. Durante dos años consecutivos, los precios suben un 10%. A comienzos del primer año 1 kg de queso costaba 500 pts. De los siguientes números, ¿cuál es el más próximo a la cantidad de queso en gramos que, al final del 2º año, puedo comprar con 1000 pts.?

A) 1600; B) 2400; C) 1650; D) 1670; E) 1820.

7. Si ordenamos en orden creciente los siguientes números:

A) $2 \cdot 2^7$; B) $2 \cdot 2^6 - 2$; C) $2 + 2^6$; D) 2^7; E) $2^{7/2}$. ¿Cuál ocupa el lugar central?.

8. ¿Cuál es la mayor potencia de 2 que divide exactamente a 1000000?

A) 2^3; B) 2^4; C) 2^5; D) 2^6; E) 2^8.

9. El peso total de un tubo más su contenido, que son 20 pastillas idénticas, es 180 gramos. Cuando el tubo contiene 15 pastillas, vemos que el peso total es 165 gramos. ¿Cuál es el peso del tubo?

A) 103 g; B) 115 g; C) 120 g; D) 125 g; E) 146 g.

10. Si $\frac{3}{2-\frac{x}{2}}=2$, entonces x es igual a:

A) 3; B) 1; C) −1; D) −2; E) 1/2.

11. Un albañil necesita 10000 ladrillos para cierto trabajo. Por su larga experiencia sabe que no más del 7% de los que le traigan se le van a romper. Si los ladrillos vienen en cajas de 100, ¿cuál es el mínimo número de cajas que debe pedir para estar seguro de acabar el trabajo?

A) 109; B) 106; C) 105; D) 107; E) 108.

12. Si $a^2 = a + 2$, a^3 es igual a

A) $a + 4$; B) $2a + 8$; C) $3a + 2$; D) $4a + 8$; E) $27a + 8$.

13. Si la diferencia entre los cuadrados de dos enteros consecutivos positivos es d, el menor de ellos puede representarse por

A) $d - 1$; B) $\frac{1}{2}(d-1)$; C) $\frac{1}{2}(d+1)$; D) $\frac{d}{2}$; E) $(d-1)^2$.

14. La diferencia entre dos números es 30. Si añadimos 5 a ambos, el mayor ahora resulta ser el triple del menor. ¿Cuál era el menor de los dos del principio?

A) 5; B) 8; C) 10; D) 12; E) 15.

15. Una papelería compra 40 plumas de tres tipos diferentes, por un total de 40.000 pts Si las plumas cuestan 250, 1000 y 5000 pts y hay más plumas de 1000 que de 5000 pts, ¿cuántas plumas compró de 250 pts.?

A) 20; B) 12; C) 24; D) 16; E) 18.

16. Dos ciclistas marchan a velocidad uniforme. El más lento tarda 15 segundos más que el más rápido en recorrer 4 km y recorre 1 km menos que el otro en 15 minutos. ¿Cuál es la velocidad, en km/h, del ciclista más rápido?

A) 40; B) 44; C) 48; D) 60; E) 64.

17. $\frac{1}{2}\left(1+(-1)^{11}\right)$ es igual a

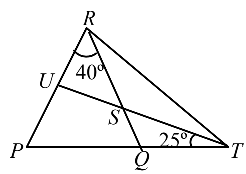
A) 6; B) 1; C) 0; D) 1/2; E) −5.

18. Si reordeno los números $p = 3^{60}$, $q = 5^{48}$, $r = 6^{36}$, $s = 7^{24}$ en orden decreciente, la solución sería

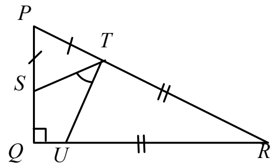
A) $s > r > p > q$; B) $q > r > p > s$; C) $q > p > r > s$; D) $s > p > r > q$; E) $r > s > p > q$

19. En el dibujo que ves, $PR = QR$, el ángulo $PRQ =$ 40º y el ángulo $PTU =$ 25º. ¿Cuánto vale el ángulo RST?

A) 140º; B) 125º; C) 135º; D) 115º; E) 110º.

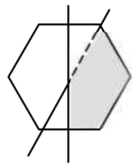


20. El triángulo PQR es rectángulo en Q y los triángulos PST y RTU son isósceles como se muestra en el dibujo. ¿Cuál es el valor del ángulo STU?



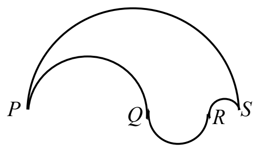
A) 30; B) 45; C) 50; D) 55; E) 60.

21. Las dos líneas a trazos de este hexágono regular son ejes de simetría. ¿Qué fracción del área del hexágono es la región sombreada?



A) 5/12; B) 7/24; C) 11/24; D) 1/3; E) 3/8.

22. La figura que ves está construida con 4 semicírculos. Si $PR = 12$ y $QS = 6$, el área encerrada es



A) 81π; B) 36π; C) 18π; D) 9π; E) 54π.

23. Los alumnos de un grupo de baile se ponen en círculo, igualmente separados, y se empiezan a contar a partir de uno de ellos. Si el que tiene el número 20 está diametralmente opuesto al que tiene el 53, ¿cuántos alumnos hay en el grupo?

A) 60; B) 62; C) 64; D) 66; E) 68.

24. En un círculo de radio 10 cm, dibujamos una cuerda que dista 6 cm del centro. ¿Cuánto dista del centro otra cuerda de longitud la mitad que aquella?

A) $\sqrt{96}$ cm; B) $\sqrt{84}$ cm; C) 9 cm; D) 8 cm; E) 3π cm.

25. ¿Cuántos números, del 1 al 1001 son divisibles por 5 ó por 9 pero no por ambos?

A) 311; B) 289; C) 267; D) 200; E) 100.

III CONCURSO DE PRIMAVERA. 4º NIVEL (1º- 2º Bach.). 1ª FASE. 3-3-99

1. $2^{2^3} : \left(2^2\right)^3$ es igual a:

A) 0; B) $\frac{1}{4}$; C) 1; D) $\frac{4}{3}$; E) 4.

2. ¿Cuántas cifras tiene el producto $5^{17} \times 4^9$?

A) 7; B) 10; C) 17; D) 18; E) 26.

3. ¿Cuánto vale $\frac{1001^2 - 999^2}{101^2 - 99^2}$?

A) 1; B) 10; C) 20; D) 40; E) 100.

4. Si dividimos el segmento de extremos $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{3}$ en tres partes iguales, el número que corresponde al punto más próximo a $\frac{1}{4}$ es:

A) $\frac{13}{24}$; B) $\frac{7}{18}$; C) $\frac{29}{36}$; D) $\frac{5}{12}$; E) $\frac{1}{3}$.

5. ¿Cuánto vale $2^{\log_a a^5}$?

A) $2a^5$; B) 2^{a^5}; C) 5^a; D)2^5; E) 5^2.

6. Si aumentamos en un 20% tanto el largo como el ancho de un rectángulo, ¿cuál es el porcentaje de incremento del área?

A) 40; B) 144; C) 44; D) 400; E) 20.

7. A una persona le suben sucesivamente el sueldo en un 20%, 25% y 55%. ¿Cuál es el porcentaje de subida sobre el sueldo original?

A) $33'\widehat{3}$; B) 27; C) 132,5; D) 135; E) 225,5.

8. ¿Cuál es la mayor potencia de 2 que divide a 1000000?

A) 2^3; B) 2^4; C) 2^5; D) 2^6; E) 2^8.

9. El último dígito del producto $3^{11} \times 4^{13}$ es:

A) 2; B) 4; C) 6; D) 8; E) 0.

10. Recuerda que $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 1$. ¿Cuál es el m.c.m. de A y B si $A = 10!\ 18!$ y $B = 12!\ 17!$

A) $\frac{18!\,12!}{6!}$; B) 18! 17!; C) $\frac{12!\,18!}{3!}$; D) 12! 18!; E) $\frac{18!\,17!}{6!}$.

11. La expresión $\frac{k}{3}(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)$ es igual a:

A) $\frac{1}{6}(k+1)(k+3)(k+4)$; B) $\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$; C) $\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$;
D) $\frac{2k}{3}(k+1)(k+2)$; E) $\frac{1}{4}(k+1)(2k+1)(3k+2)$.

12. La solución de la ecuación $\frac{1}{x-5} = 0'01$ es

A) −4'99; B) 5'01; C) 15; D) 95; E) 105.

13. Dos velas son de diferente longitud y grosor. La más larga dura 7 horas ardiendo y la más corta 10 horas. Si después de 4 horas ardiendo, las dos velas tienen igual longitud, ¿cuál es el cociente entre las longitudes de ambas?

A) 7/10; B) 3/5; C) 4/7; D) 5/7; E) 2/3.

14. Si $p = q\left(r - \frac{1}{s}\right)$, s es igual a:

A) $\frac{p}{q} - r$; B) $\frac{q}{qr-p}$; C) $\frac{q}{p-qr}$; D) $\frac{q}{r-p}$; E) $\frac{1}{qr-p}$.

15. Si la suma de dos números positivos p y q es n y la suma de sus inversos es m, $(p - q)^2$ es igual a:

A) n^2; B) $n^2 - m$; C) $\frac{n^2 - m}{n}$; D) $\frac{mn^2 - 4n}{m}$; E) $n^2 - 4mn$.

16. Si una solución de la ecuación $x^3 - 7x + 6 = 0$ es $x = 1$, la suma de las otras dos es:

A) 5; B) −1; C) 6; D) −8; E) −7.

17. Si $6^{x+y} = 36$ y $6^{x+5y} = 216$, x es igual a:

A) 1/4; B) 3/4; C) 5/4; D) 3/2; E) 7/4.

18. Pedro piensa en 3 números y te dice que si los sumas por parejas, obtienes 38, 44 y 52. ¿Cuál es el mayor de los tres?

A) 31; B) 28; C) 24; D) 29; E) 27.

19. Si $xy = 7$, ¿cuánto vale $\dfrac{2^{(x+y)^2}}{2^{(x-y)^2}}$?

A) 4; B) 2^7; C) 2^{14}; D) 2^{28}; E) 2^{196}.

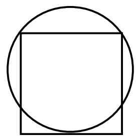
20. Si a y b son números reales tales que $0 < a < b$ y $a^2 + b^2 = 6ab$, ¿cuál es el valor de $\dfrac{a+b}{a-b}$?

A) $-\sqrt{2}$; B) -1; C) 0; D) $\sqrt{2}$; E) $\sqrt{6}$.

21. Si $f(x) = px^7 + qx^3 + rx - 4$ y $f(-7) = 3$, ¿cuánto vale $f(7)$?

A) -11; B) -3; C) 10; D) 17; E) No se puede determinar.

22. En el dibujo que ves, el cuadrado tiene dos de sus vértices en la circunferencia y el lado opuesto es tangente a la misma. ¿Cuál es el cociente entre el área del cuadrado y la del círculo?



A) $\dfrac{5\pi}{8}$; B) $\dfrac{64}{25\pi}$; C) $\dfrac{8}{5\pi}$; D) $\dfrac{5}{3\pi}$; E) $\dfrac{25}{9\pi}$.

23. El área de la región del plano determinada por los puntos (x, y) tales que $|2x - 3y| \le 12$ y $|2x + 3y| \le 12$ es:

A) 24; B) 144; C) 72; D) 48; E) 96.

24. Si la recta $y = 2x + 3$ se refleja sobre la $y = x + 1$, la ecuación de la recta reflejada es

A) $2x - y = 0$; B) $x - 2y + 1 = 0$; C) $x - 2y = 0$; D) $x - 2y - 2 = 0$; E) $x - y + 1 = 0$.

25. ¿Cuántas soluciones reales positivas tiene la ecuación $senx = \dfrac{x}{200}$?

A) 30; B) 31; C) 61; D) 62; E) 63.

III CONCURSO DE PRIMAVERA. 1er NIVEL (5º y 6º de Primaria). 2ª FASE. 24-04-99

1. Alicia, Beatriz y Carlos se gastaron entre los tres 240 pts en chucherías, de las que Alicia se gastó la mitad y Beatriz la tercera parte. ¿Cuánto gastó Carlos?

A) 40; B) 60; C) 80; D) 200; E) 100.

2. Se han coloreado en rojo los $\frac{2}{3}$ del número de caras de un cubo, y el resto en azul. ¿Cuántas caras han quedado coloreadas en azul?

A) 1; B) 2; C) 4; D) 5; E) 6.

3. El mayor número primo que es divisor de $30 \times 40 \times 50$ es el

A) 3; B) 5; C) 10; D) 50; E) 13.

4. Al incrementar en un cierto porcentaje 1000 pts, nos da lo mismo que al disminuir en ese mismo porcentaje 3000 pts. ¿Qué porcentaje es?

A) 20 %; B) 15 %; C) 25 %; D) 10 %; E) 50 %.

5. Si P, Q y R son cifras diferentes de cero y esta suma es correcta, ¿cuánto vale R?

A) 1; B) 9; C) 8; D) 7; E) 6.

$$\begin{array}{r} PQ \\ +\,RR \\ \hline PPP \end{array}$$

6. ¿Cuál es la cifra de las unidades del mayor número de cuatro cifras en el que todas sus cifras son diferentes?

A) 5; B) 6; C) 7; D) 8; E) 9.

7. Si 3 *tics* = 4 *tacs* y 2 *tacs* = 3 *tocs*, entonces 1 *toc* =

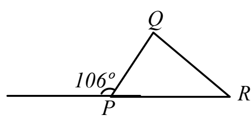
A) $\frac{1}{6}$ *tic*; B) $\frac{1}{2}$ *tic*; C) 2 *tics*; D) 6 *tics*; E) 24 *tics*.

8. Cuando las tres últimas cifras de un año son cifras consecutivas en orden decreciente (como por ejemplo en 1987), decimos que se trata de un año **descendente**. ¿En qué siglo aparecerá el próximo año descendente?

A) Siglo 23; B) Siglo 24; C) Siglo 25; D) Siglo 26; E) Siglo 27.

9. ¿Cuánto mide el ángulo Q del triángulo de la figura si R = 66º 45' ?

A) 45º 15'; B) 44º; C) 39º 15'; D) 40º 15'; E) 41º 15'.



10. Si escribimos en orden creciente todos los números enteros cuya primera cifra es el 2, es decir 2, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 200, 201, ... ¿qué cifra habremos escrito en el lugar 1000? (Verás que en el 3er lugar hay un 0, en el 4º un 2, etc.).

A) 0; B) 6; C) 7; D) 8; E) 9.

11. De los 25 primeros enteros positivos quitamos 5 números, todos pares. ¿Qué porcentaje de los que quedan son pares?

A) 20 %; B) 25 %; C) 28 %; D) 35 %; E) 40 %.

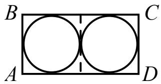
12. En un test como éste, de 25 cuestiones, se puntúa igual que aquí: 5 puntos por cada respuesta correcta, 2 puntos por cada respuesta en blanco y 0 puntos por cada respuesta errónea. Si Dani contestó 20 cuestiones de las que 15 eran correctas, su puntuación fue:

A) 90; B) 85; C) 80; D) 75; E) 70.

13. ¿Qué número se ha perdido aquí: $\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{6}+\frac{\lozenge}{6}$?

A) 3; B) 4; C) 2; D) $\frac{7}{2}$; E) $\frac{9}{2}$.

14. Si la suma de las áreas de los dos círculos iguales de la figura es 72π, el área del rectángulo $ABCD$ es



A) 36; B) 72; C) 144; D) 288; E) 576.

15. Si multiplicáramos todos los números enteros desde el 23211 al 23219, ¿cuál sería la última cifra del resultado?

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4.

16. La población, en números redondos, de España es 40 millones de habitantes. En forma de potencia, se escribe como:

A) 40×10^3; B) 4×10^6; C) 4×10^7; D) 4×10^9; E) 40×10^4.

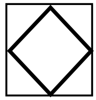
17. A las 4 de la tarde, un poste de 10 m de alto produce una sombra de 18 m de largo. A la misma hora, ¿qué longitud tendrá la sombra producida por un poste de 5 m de alto?

A) 11 m; B) 10 m; C) 9 m; D) 8 m; E) 7 m.

18. Si la media de 21 enteros consecutivos es 31, ¿cuál es el mayor?

A) 40; B) 41; C) 51; D) 52; E) 53.

19. Si el cuadrado exterior tiene de área 100 y los vértices del cuadrado interior están en los puntos medios del exterior, ¿cuál es el área del pequeño?



A) 80; B) 75; C) 50; D) 90; E) 10.

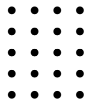
20. Un cuento de 1200 palabras tenía de media 5 letras por palabra y por cada 5 consonantes tenía 3 vocales. ¿Cuántas consonantes tenía ese cuento?

A) 2250; B) 3600; C) 3750; D) 4000; E) 5000.

21. Un gato es tres veces más rápido que un ratón. Si el ratón corre a 2 m por segundo y le lleva una ventaja de 12 m al gato, ¿cuánto tiempo tardará el gato en cazarlo?

A) 2 segundos; B) 3 segundos; C) 4 segundos; D) 5 segundos; E) 6 segundos.

22. En un rectángulo como éste, de 4 × 5, hay 14 puntos en la frontera. ¿Cuántos puntos habrá en la frontera en un rectángulo análogo de 1998 × 1999?

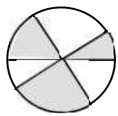


A) 7994; B) 7992; C) 7990; D) 7988; E) 7986.

23. De las siguientes desigualdades, ¿cuál es cierta?

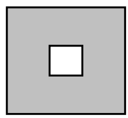
A) $\frac{1}{7} > \frac{1}{3}$; B) $\frac{4}{5} < \frac{3}{4}$; C) $\frac{2}{3} > \frac{7}{10}$; D) $\frac{5}{8} < \frac{3}{4}$; E) $\frac{3}{5} > \frac{7}{10}$.

24. Si el radio del círculo es 6, el área de la región sombreada es:



A) 6π; B) 12π; C) 18π; D) 24π; E) 36π.

25. Si el perímetro del cuadrado grande es 36 y el del cuadrado pequeño 16, ¿cuál es el área de la región sombreada?



A) 4; B) 20; C) 25; D) 65; E) 1040.

III CONCURSO DE PRIMAVERA. 2º NIVEL (1º-2º ESO). 2ª FASE. 24-04–99

1. Si multiplicamos un número por 3 y luego lo dividimos por $\frac{1}{2}$, el resultado es el mismo que si lo hubiéramos multiplicado por:

A) $\frac{3}{2}$; B) $\frac{2}{3}$; C) $\frac{7}{2}$; D) $\frac{5}{2}$; E) 6.

2. $0'9 : \frac{1}{2}$ es igual a:

A) 1'8; B) 0'45; C) 0'3; D) 0'18; E) 4'5.

3. $1 + \frac{3}{100} + \frac{1}{1000}$ es igual a:

A) 1'31; B) 0'131; C) 1'0311; D) 1'0301; E) 1'031.

4. De los siguientes números, ¿cuál es el más pequeño?

A) $\frac{1}{4}$; B) $\frac{2}{5}$; C) $\frac{2}{7}$; D) $\frac{3}{10}$; E) $\frac{3}{11}$.

5. Dos jarras idénticas están llenas de una mezcla de aceite y vinagre en la proporción de 2 a 1 una de ellas y de 3 a 1 la otra. Si vaciamos ambas jarras en una grande, la proporción de aceite y vinagre de la mezcla es:

A) 5 a 1; B) 12 a 5; C) 17 a 7; D) 6 a 5; E) 5 a 2.

6. En diez exámenes de Matemáticas que llevo este año, he obtenido una media de 6'8. ¿Cuánto debo obtener en el próximo para que la media de los once sea un 7?

A) 7; B) 7'2; C) 7'8; D) 8'8; E) 9.

7. Cada una de las hojas de un bloque de un millón de hojas tiene un grosor de 0'25 mm. ¿Cuál es, en metros, la altura del bloque?

A) 0'25; B) 2'5; C) 25; D) 250; E) 2500.

8. El menor entero positivo que al dividirlo por 6 da resto 1 y al dividirlo por 11 da resto 6 está comprendido entre

A) 115 y 120; B) 90 y 95; C) 125 y 130; D) 60 y 65; E) 35 y 40.

9. El número de gatos que viven en Gatolandia es un número de 6 cifras, cuadrado perfecto y cubo perfecto. Cuando se mueran 6 de esos gatos, el número de gatos que queden es primo. ¿Cuántos gatos hay en Gatolandia?

A) 279643; B) 117649; C) 262147; D) 531469; E) 998001.

10. Si m y n son enteros positivos, ¿cuál es el menor m para el que $2940\,m = n^2$?

A) 2940; B) 60; C) 15; D) 210; E) 9.

11. ¿Cuántos números hay desde el 1 hasta el 100 cuyo factor primo más pequeño es 7?

A) 14; B) 7; C) 4; D) 3; E) 5.

12. Pedro quiere dividir un número entre 4, pero se equivoca al darle a la calculadora y lo que hace es multiplicarlo por 4, obteniendo 60. ¿Cuál habría sido la respuesta si hubiera hecho lo que tenía que hacer?

A) 3'75; B) 15; C) 4; D) 12; E) 240.

13. Las longitudes, en cm, de los lados de un triángulo de perímetro 45 cm son $2x$, $3x$ y $4x$. ¿Cuál es la diferencia, en cm, entre el mayor y el menor lado?

A) 5; B) 10; C) 15; D) 20; E) 25.

14. Alicia tenía muchas monedas de duro. Después de darle un tercio del total a Pedro y un cuarto del total a Dani, le quedan 35. ¿Cuántas tenía?

A) 108; B) 420; C) 60; D) 96; E) 84.

15. ¿Cuál es el valor de x en la ecuación $\frac{2}{15} = \frac{1}{8} + \frac{1}{x}$?

A) $\frac{15}{8}$; B) $\frac{1}{7}$; C) 7; D) $\frac{120}{31}$; E) 120.

16. Si x e y son números enteros positivos y verifican que $x + y + xy = 54$, entonces $x + y$ es igual a:

A) 12; B) 14; C) 15; D) 16; E) 54.

17. Si m es un número entre 15 y 30 y n es un número entre 3 y 8, $\frac{m}{n}$ debe ser un número entre

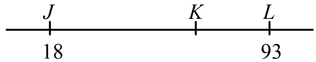
A) $\frac{8}{15}$ y 5; B) $\frac{15}{8}$ y 10; C) $\frac{15}{4}$ y 10; D) 5 y 10; E) $\frac{15}{4}$ y 15.

18. ¿De cuántas formas puede escribirse 75 como suma de números positivos consecutivos habiendo por lo menos dos?

A) 0; B) 1; C) 3; D) 5; E) 6.

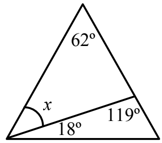
19. Si K está a $\frac{2}{3}$ de la distancia de J a L, qué número es el que marca?

A) 50; B) 56; C) 62; D) 68; E) 80.



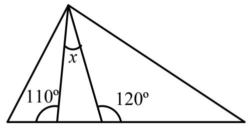
20. ¿Cuál es el valor, en grados, del ángulo x de la figura.

A) 58; B) 57; C) 80; D) 70; E) 43.



21. Calcula el valor, en grados, del ángulo x de la figura.

A) 40; B) 45; C) 35; D) 50; E) 55.



22. Un rectángulo de 70 cm de largo y 80 cm de ancho está totalmente recubierto por cuadrados idénticos. ¿Cuántos cuadrados, como mínimo, hacen falta?

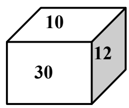
A) 56; B) 2940; C) 70; D) 30; E) Nada de lo anterior.

23. Dos ciudades distan 80 km. Quiero tardar una hora exacta en llegar de una a otra. Si en la primera media hora de viaje alcancé una media de 60 km/h, ¿qué velocidad media debo alcanzar, en km/h, en la segunda media hora si quiero cumplir mi propósito?

A) 75; B) 80; C) 100; D) 70; E) 90.

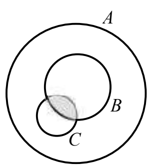
24. Las áreas de tres de las caras de esta caja en forma de paralelepípedo son 10, 12 y 30 cm^2. ¿Cuál es el volumen de la caja?

A) 60; B) 52; C) 3600; D) 300; E) 120.



25. Dentro del círculo A están todos los 50 primeros enteros positivos. De ellos, dentro de B están sólo los impares y dentro de C solamente los múltiplos de 7. ¿Cuántos hay en la zona sombreada?

A) 7; B) 5; C) 4; D) 3; E) 1.



III CONCURSO DE PRIMAVERA. 3er NIVEL (3º−4º ESO). 2ª FASE. 24-04−99

1. Entre los siguientes números, el que más se aproxima a 0'435: 0'0821 es

A) 0´02; B) 0'2; C) 0'5; D) 5; E) 50.

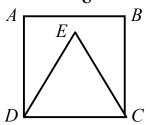
2. Si $A = \frac{0'1}{0'5}$, $B = \frac{0'5}{1}$ y $C = \frac{1}{0'5}$, ordenados resulta ser

A) $A > B > C$; B) $B > A > C$; C) $C > A > B$; D) $A > C > B$; E) $C > B > A$.

3. Una estrella está a $4'8 \cdot 10^8$ años luz de distancia. La mitad de esa distancia viene dada, en años luz, por el número

A) $4'8 \cdot 5^8$; B) $4'8 \cdot 10^4$; C) $2'4 \cdot 5^4$; D) $2'4 \cdot 10^4$; E) $2'4 \cdot 10^8$.

4. $ABCD$ es un cuadrado y DEC un triángulo equilátero. ¿Cuánto vale el ángulo AED? (El vértice en la letra central, E).



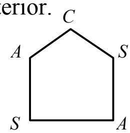
A) 90º; B) 80º; C) 135º; D) 50º;

E) 75º.

5. En el triángulo PQR, el ángulo P mide α grados y las bisectrices de los ángulos Q y R se cortan en T. ¿Cuánto vale el ángulo QTR?

A) $180º - \frac{\alpha}{2}$; B) $90 + \frac{\alpha}{2}$; C) $90 - \frac{\alpha}{2}$; D) $60 + \alpha$; E) Nada de lo anterior.

6. ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de la figura $CASAS$?



A) 360º; B) 540º; C) 450º; D) 720º; E) Nada de lo anterior.

7. Si el número de grados de cada ángulo interior de un polígono regular es x, el número de lados del polígono, en función de x, es

A) $\frac{x+360}{180}$; B) $\frac{180}{x}$; C) $\frac{360}{180+x}$; D) $\frac{360}{x}$; E) $\frac{360}{180-x}$.

8. La media aritmética de las puntuaciones de los cuatro representantes de mi Instituto en el 3er nivel del Concurso de Primavera fue 90, pero luego nos dimos cuenta que había habido un error, pues la puntuación de uno de ellos, en lugar de ser 97 resultó ser 79. ¿Cuál fue realmente la media obtenida por los cuatro?

A) 88; B) 87'5; C) 86'5; D) 85'5; E) 85.

9. En un grupo de hombres y mujeres la edad media es 31 años. Si la media de la edad de los hombres es 35 años y la de las mujeres 25, el cociente entre el número de hombres y el de mujeres es

A) $\frac{5}{7}$; B) $\frac{7}{5}$; C) $\frac{2}{1}$; D) $\frac{4}{3}$; E) $\frac{3}{2}$.

10. Sumando el número de 3 cifras $2a4$ con el 329 obtenemos $5b3$. Si $5b3$ es divisible por 3, el mayor valor posible para a es:

A) 1; B) 4; C) 7; D) 8; E) 9.

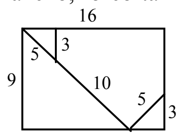
11. ¿En cuántos ceros acaba 13! (Recuerda $13! = 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$)?

A) Uno; B) Dos; C) Tres; D) Cuatro; E) Cinco.

12. El número de gatos que viven en Gatolandia es un número de 6 cifras, cuadrado perfecto y cubo perfecto. Cuando se mueran 6 de esos gatos, el número de gatos que queden es primo. ¿Cuántos gatos hay en Gatolandia?

A) 279643; B) 117649; C) 262147; D) 531469; E) 998001.

13. El rectángulo de la figura, de 16 cm de largo y 9 de ancho, lo cortamos como se indica, formando con las piezas un cuadrado.



¿Cuál es el perímetro del cuadrado formado?

A) 50; B) 48; C) 32; D) 40; E) 36.

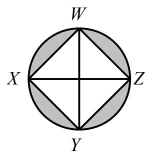
14. Si $xy = 6$, $yz = 9$ y $zx = 24$, un valor para xyz es

A) 648; B) 1296; C) 48; D) 3/2; E) 36.

15. Un punto reticular es un punto del plano con coordenadas enteras. ¿Cuántos puntos reticulares de la recta $3x + 4y = 59$ hay en el 1er cuadrante?

A) 2; B) 3; C) 4; D) 5; E) Infinitos.

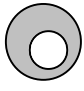
16. En el dibujo que ves, $WXYZ$ es un cuadrado. Si la diagonal WY es 4 cm, ¿cuánto vale, en cm^2, el área de la región sombreada?



A) $16\pi - 4$; B) $16\pi - 8$; C) $16\pi - 32$;

D) $14\pi - 4$; E) $4\pi - 8$.

17. En el dibujo de la figura, el radio del círculo grande es el doble que el del pequeño. ¿Cuál es el cociente entre el área de la región sombreada y el área de la región sin sombrear?

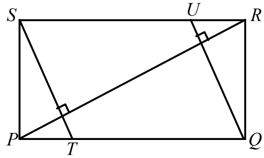


A) 2; B) 3; C) 4; D) 5; E) 1.

18. Decimos que un número entero es **ascendente** si cada una de sus cifras es mayor que la de su izquierda; por ejemplo 2478. ¿Cuántos números ascendentes hay entre 4000 y 5000?

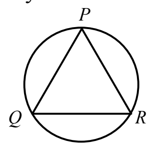
A) 7; B) 8; C) 9; D) 10; E) 11.

19. En el rectángulo que se muestra en la figura, ST y UQ son perpendiculares a PR. Si $PQ = 18$ y $QR = 12$, el área del paralelogramo $TQUS$ es



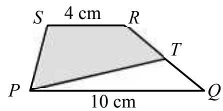
A) 144; B) 132; C) 96; D) 72; E) 120.

20. El triángulo PQR es isósceles siendo $PQ = PR = 15$ cm y $QR = 18$ cm. ¿Cuál es el radio de la circunferencia circunscrita?



A) 9'25; B) 9; C) 9'375; D) 8'75; E) 8'875.

21. Los lados PQ y RS son paralelos y están separados 6 cm. Si T es el punto medio de QR, ¿cuál es el área, en cm^2, de la región sombreada?

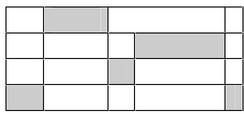


A) 21; B) 26; C) 27; D) 34; E) 42.

22. Si $\dfrac{m}{m+2n} = -3$, entonces $\dfrac{m}{n}$ es:

A) $-\dfrac{3}{2}$; B) $\dfrac{3}{2}$; C) $\dfrac{2}{3}$; D) $-\dfrac{2}{3}$; E) $-\dfrac{1}{2}$.

23. Suponiendo que todos los ángulos que aparecen son rectos y que las líneas horizontales están igualmente separadas, ¿qué fracción de área de la figura es la sombreada?



A) $\dfrac{13}{48}$; B) $\dfrac{5}{18}$; C) $\dfrac{5}{16}$; D) $\dfrac{1}{4}$; E) $\dfrac{1}{5}$.

24. Los precios de entrada al "Parque de las Ciencias" son 750 pts para los adultos y 250 pts para los jóvenes. Una tarde que se recaudaron 330.000 pts de entrada, el auditorio, con capacidad para 600 personas, no se llenó. ¿Cuántos adultos, como mínimo, fueron esa tarde a visitar el "Parque de las Ciencias"?

A) 359; B) 300; C) 365; D) 361; E) 367.

25. Los vértices de un cubo los numeramos del 1 al 8, de manera que los conjuntos de números correspondientes a los vértices de cada cara son: {1, 2, 6, 7}, {1, 4, 6, 8}, {1, 2, 5, 8}, {2, 3, 5, 7}, {3, 4, 6, 7} y {3, 4, 5, 8}. ¿Cuál es el número asignado al vértice más lejano al 6?

A) 1; B) 3; C) 4; D) 5; E) 7.

III CONCURSO DE PRIMAVERA. 4º NIVEL (1º−2º BACHILLERATO LOGSE). 2ª FASE. 24-04−99

1. A finales de 1997, la media anual de agua caída en Madrid durante los diez años del período 1 Enero 88 − 31 Diciembre 97 fue de 631 mm. Durante 1998, la cantidad de agua caída fue de 450 mm y la media anual en el período 1 Enero 89 − 31 Diciembre 98 fue de 601 mm. ¿Qué cantidad de agua cayó en 1988?

A) 750 mm; B) 616 mm; C) 1232 mm; D) 30 mm; E) 480 mm.

2. El número de gatos que viven en Gatolandia es un número de 6 cifras, cuadrado perfecto y cubo perfecto. Cuando se mueran 6 de esos gatos, el número de gatos que queden es primo. ¿Cuántos gatos hay en Gatolandia?

A) 279643; B) 117649; C) 262147; D) 531469; E) 998001.

3. Al escribir 1991 como diferencia de los cuadrados de dos enteros positivos, ambos menores que 100, el valor del más pequeño resulta ser

A) 95; B) 96; C) 81; D) 83; E) 85.

4. Los trenes de Madrid a Zaragoza salen cada hora y de Zaragoza a Madrid también cada hora. En cada uno de los dos trayectos tardan 3 horas y 45 minutos. Si coges un tren de Zaragoza a Madrid a las 12 horas, ¿con cuántos trenes Madrid-Zaragoza te vas a cruzar?

A) 3; B) 4; C) 5; D) 6; E) 7.

5. En un cierto examen todas las preguntas tienen igual valor. Si contestas 9 de las 10 primeras correctamente pero solamente los $\frac{3}{10}$ de las restantes, obtienes el 50% de la puntuación total. ¿Cuántas preguntas tiene el examen?

A) 60; B) 40; C) 20; D) 50; E) 30.

6. Si $P = 1 - \sqrt{\frac{Q}{R}}$, Q es:

A) $\frac{(P-1)^2}{R}$; B) $R\,(1-P)^2$; C) $R\,(1-P^2)$; D) $RP^2 - R$; E) $\frac{1-P^2}{R}$.

7. La solución de la ecuación $\sqrt[3]{n+\sqrt{n^2+8}} + \sqrt[3]{n-\sqrt{n^2+8}} = 8$ es:

A) 1; B) −1; C) 232; D) 280; E) Nada de lo anterior.

8. Unos gemelos y unos trillizos suman 150 años. Si permutáramos las edades sumarían 120 años. ¿Cuántos años tiene cada gemelo?

A) 12; B) 30; C) 42 D) 24; E) 20.

9. Juan trabajó el verano pasado en una finca. Un día tuvo que pesar cuatro sacos de patatas, cada uno de menos de 100 kg, pero la balanza que tenía solamente pesaba cosas de más de 100 kg. Resolvió el problema pesando dos sacos cada vez y obteniendo como resultados 103, 105, 106, 106, 107 y 109 kg. ¿Cuánto pesaba el saco de menos peso?

A) 50; B) 51; C) 49; D) 52; E) 48.

10. Si $\sqrt[3]{p} = 32$ y $\sqrt[2]{q} = 243$, $\sqrt[5]{pq}$ es igual a:

A) 72; B) 108; C) 6; D) $\frac{275}{2}$; E) $36\sqrt{6}$.

11. Si $n \neq 0$, la expresión $\sqrt[n]{\dfrac{20}{2^{2n+4} + 2^{2n+2}}}$ es igual a:

A) $\dfrac{\sqrt[n]{5}}{2}$; B) $\dfrac{4}{n}$; C) $\sqrt[n]{\dfrac{5}{2}}$; D) $\dfrac{1}{4}$; E) $\dfrac{\sqrt[n]{5/2}}{4}$.

12. Si x es un número real positivo tal que $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = 7$, ¿cuánto vale $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$?

A) $4\sqrt{7}$; B) $7\sqrt{7}$; C) $5\sqrt{7}$; D) $6\sqrt{7}$; E) $10\sqrt{7}$.

13. Si a y b son números positivos, ¿cuál de los siguientes números es el mayor?

A) $a^2 + b^2$; B) ab; C) $(a + b)^2$; D) $(a - b)^2$; E) $a^2 - b^2$.

14. ¿Cuál es el resto de la división de $1 + x^2 + x^{100}$ entre $x^2 - 1$?

A) -1; B) 3; C) 1; D) -3; E) 5.

15. ¿Para qué valores de x es $x^2 < |2x - 8|$?

A) $-2 < x < 4$; B) $0 < x < 2$; C) $-4 < x < 2$; D) $-4 < x < -2$; E) $x > 4$.

16. Algunos de los animales que hay en Madrid están realmente locos. El 10% de los gatos se creen que son perros y el 10% de los perros se creen que son gatos. Todos los demás, perros y gatos, son perfectamente normales. Un día hicimos un test a todos los perros y gatos de Madrid y resultó que el 20% del total se creían que eran gatos. ¿Qué porcentaje del total de gatos y perros de Madrid son realmente gatos?

A) 12'5; B) 18; C) 20; D) 22; E) 22'5.

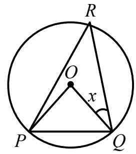
17. Un ciclista quiere ir de Madrid a un pueblo de la Sierra. Por viajes anteriores, sabe que si va a una media de 30 km/h llega a las 4 de la tarde y que si va a 20 km/h de media llega a las 6 de la tarde. Si quiere llegar justamente a las 5 de la tarde, ¿qué media, en km/h, debe alcanzar? (Se supone que siempre sale a la misma hora).

A) 22; B) 23; C) 24; D) 25; E) 26.

18. Si la raíz cúbica de abc es 4 y la raíz cuarta de $abcd$ es $2\sqrt{10}$, ¿cuánto vale d?

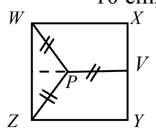
A) 25; B) 100; C) 2500; D) 320; E) 5.

19. Calcula el valor, en grados, del ángulo x de la figura sabiendo que el ángulo OPR es 5º y el OQP es 40º.



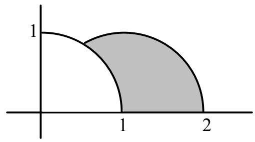
A) 30; B) 35; C) 40; D) 45; E) 50.

20. $WXYZ$ es un cuadrado con PV perpendicular a XY. Si $PW = PZ = PV =$ 10 cm, el área del cuadrado $WXYZ$, en cm^2, es



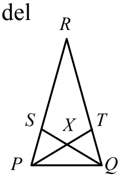
A) 225; B) 232; C) 248; D) 256; E) 324.

21. La figura muestra dos trozos de círculos, cada uno de radio 1 y los dos con centro en el eje de abscisas. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



A) 1; B) $\frac{\pi}{3}$; C) $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$; D) $\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}$; E) $\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}$.

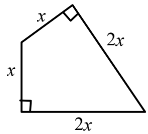
22. En el triángulo de la figura, $PR = QR =$ 12 cm, $RS = RT =$ 8 cm y el área del polígono $RSXT$ es 8 cm^2. ¿Cuál es, en cm^2, el área del triángulo PQR?



A) 18; B) 17; C) 16; D) 15; E) 14.

23. En el cuadrilátero de lados x, x, $2x$ y $2x$, y ángulos rectos como se muestra en la figura, el ángulo formado por los dos lados mayores es θ. El valor de sen θ es:

A) $\frac{1}{2}$; B) $\frac{2}{3}$; C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; D) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; E) $\frac{4}{5}$.



24. Al lanzar un dado rojo y otro blanco (las caras numeradas de 1 a 6), ¿cuál es la probabilidad de que el rojo gane al blanco?

A) $\frac{1}{2}$; B) $\frac{1}{6}$; C) $\frac{5}{12}$; D) $\frac{5}{6}$; E) $\frac{1}{3}$.

25. Uno de los dados que utilizaban los romanos para sus juegos tiene 6 caras cuadradas y 8 triangulares, siendo la probabilidad de obtener cada cara cuadrada el doble que la de obtener cada cara triangular. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara triangular?

A) $\frac{4}{7}$; B) $\frac{3}{11}$; C) $\frac{3}{7}$; D) $\frac{3}{10}$; E) $\frac{2}{5}$.

IV CONCURSO DE PRIMAVERA. 1er NIVEL (5º-6º PRIMARIA). 1º FASE. 1-3-00

1. Sabiendo que la longitud del monstruo del lago Ness es de 30 metros más la mitad de su propia longitud, ¿cuántos metros mide de largo?

   A) 60; B) 40; C) 45; D) 90; E) Faltan datos.

2. Una abuela reparte una cantidad de dinero entre sus diez nietos de la siguiente forma: al 2º le deja la mitad que al 1º, al 3º la mitad que al 2º, al 4º la mitad que al 3º y así sucesivamente. Si al más pequeño le deja 1 euro, ¿qué cantidad de dinero repartió?

   A) 512 euros ; B) 128 euros; C) 184 euros; D) 256 euros; E) 1023 euros.

3. Para fabricar 1 kg de miel, las abejas hacen 500.000 viajes entre la colmena y las flores. En cada viaje, una abeja transporta por término medio 8 mg de néctar. ¿Cuántos kg de néctar son necesarios para obtener 1 kg de miel?

   A) 4; B) 20; C) 40; D) 10; E) 8.

4. Seis amigos se encuentran en la calle y se saludan dándose un abrazo. ¿Cuántos abrazos se han dado en total?

   A) 15; B) 6; C) 12; D) 18; E) 36.

5. El número 195 se ha obtenido al multiplicar dos números impares consecutivos. ¿Qué dos números se han multiplicado?

   A) 23 y 25; B) 17 y 19; C) 13 y 15; D) 35 y 37; E) 21 y 23.

6. El término que sigue a la serie: 100, 121, 144, ... , es:

   A) 196; B) 169; C) 225; D) 256; E) 400.

7. En un mapa, la distancia entre dos ciudades es de 8 cm. Si en la realidad están separadas por 40 km, ¿cuál es la escala del mapa?

   A) 1:500.000; B) 1:1.000.000; C) 1:200.000; D) 1:50.000; E) 1:100.000.

8. Unas gafas valen 185 euros más que su funda. Las gafas y la funda valen 235 euros. ¿Cuánto cuestan las gafas?

   A) 210 euros; B) 420 euros; C) 185 euros; D) 105 euros; E) 195 euros.

9. Un camión transporta $1'45$ toneladas de fruta. Se descargan 850 kg y han quedado 25 cajas iguales. ¿Cuántos kg pesa cada caja?

   A) 12; B) 6; C) 10; D) 24; E) 15.

10. ¿Por cuánto has de multiplicar $0'005$ para que se convierta en $0'25$?

    A) 50; B) 10; C) 100; D) 20; E) 200.

11. ¿Cuántas caras se unen en los vértices de un dodecaedro?

    A) 12; B) 5; C) 6; D) 10; E) 3.

12. Los puntos (2, 1), (2, 5) y (4, 5) son tres vértices de un rectángulo. ¿Cuáles son las coordenadas del cuarto vértice?

    A) (5, 2); B) (1, 2); C) (4, 1); D) (2, 4); E) (5, 4).

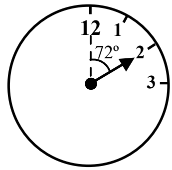
13. Para numerar las páginas de un cuaderno se han empleado 55 cifras. ¿Cuántas páginas tiene el cuaderno?

    A) 55; B) 16; C) 48; D) 32; E) 40.

14. En una clase de 30 estudiantes, 25 son de Madrid y 10 son chicos. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es seguro que es verdadera?

    A) No hay chicos madrileños; B) A lo más, hay 5 chicos madrileños;
    C) Hay exactamente 5 chicos madrileños; D) Al menos 5 chicos son madrileños;
    E) Hay menos de 15 chicas madrileñas.

15. El reloj de la figura ha perdido la aguja de los minutos, pero sabemos que el ángulo dibujado es de 72º. ¿Qué hora es en ese momento?



    A) Las 2 h 10 m; B) Las 2 h 15 m; C) Las 2 h 20 m;

    D) Las 2 h 24 m; E) Las 2 h 30 m.

16. Tres lápices y dos cuadernos cuestan 340 pts. Un lápiz y un cuaderno cuestan 150 pts. ¿Cuánto cuesta un cuaderno?

    A) 110 pts.; B) 105 pts.; C) 100 pts.; D) 95 pts. ; E) 90 pts.

17. Jonás observa que a las 10 h 10 m coinciden en una parada dos autobuses de distintas líneas. Sabiendo que las frecuencias de paso de esas líneas por esa parada son de 12 y 15 minutos, ¿cuándo volverán a coincidir en esa parada otros dos autobuses?

    A) A las 11 h; B) A las 11 h 10 m; C) A las 11 h 20 m; D) A las 11 h 30 m; E) A las 11 h 45 m.

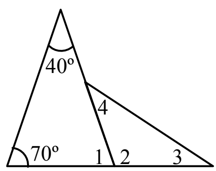
18. ¿Cuál es el área del cuadrado más pequeño que contiene a un círculo de radio 4?

    A) 8; B) 16; C) 32; D) 64; E) 128.

19. Jaime, Dani y Rocío se ponen en fila; ¿Cuál es la probabilidad de que se hayan colocado en orden alfabético; o sea, primero Dani, luego Jaime y luego Rocío?

    A) $\frac{1}{12}$; B) $\frac{1}{9}$; C) $\frac{1}{6}$; D) $\frac{1}{3}$; E) $\frac{2}{3}$.

20. Observa este dibujo, del que tú sabes que el ángulo 1 sumado con el ángulo 2, da 180º. Si te dicen que el ángulo 3 es igual al ángulo 4, ¿cuánto vale el ángulo 4?



A) 20º; B) 25º; C) 30º; D) 35º; E) 40º.

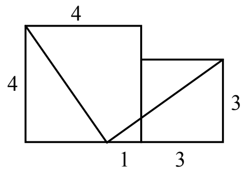
21. ¿Qué número es el $2 \times 10^6 + 8 \times 10^5 + 3 \times 10$?

A) 280.030; B) 2.800.003; C) 2.000.083; D) 2.800.030; E) Nada de lo anterior.

22. ¿Cuántos números comprendidos entre 1000 y 1300 tienen raíz cuadrada exacta?

A) 200; B) 199; C) Ninguno; D) 4; E) 5.

23. Los cinco trozos en que hemos cortado estos dos cuadrados los hemos recolocado para formar un cuadrado mayor. ¿Cuál es el perímetro de este nuevo cuadrado?



A) 28; B) 25; C) 21; D) 20; E) 18.

24. Andrés se llevó los dos quintos de un trozo de chocolate; Beatriz, un cuarto y el resto, 28 gramos, fue para Carlos. ¿Cuántos gramos pesaba el trozo de chocolate?

A) 62; B) 80; C) 84; D) 86; E) 90.

25. En una clase de 30 estudiantes, ¿cuál de los siguientes no puede ser el cociente entre el número de niñas y el de niños?

A) $\frac{2}{3}$; B) $\frac{1}{4}$; C) $\frac{1}{5}$; D) $\frac{3}{4}$; E) $\frac{3}{7}$.

IV CONCURSO DE PRIMAVERA. 2º NIVEL (1º-2º ESO). 1ª FASE. 1-3-00

1. $0'8\,(0'3 + 0'7) =$

   A) $0'94$; B) $0'08$; C) $0'176$; D) $0'8$; E) 8.

2. De los siguientes números, ¿cuál es el más pequeño?

   A) $0'0908$; B) $0'9008$; C) $0'0098$; D) $0'098$; E) $0'908$.

3. $0'2 \times 0'3 \times 0'4$ es igual a:

   A) $0'024$; B) $0'24$; C) $0'009$; D) $0'0024$; E) $2'4$.

4. ¿Por qué número hay que dividir $\frac{1}{2}$ para obtener de resultado 3?

   A) $\frac{1}{6}$; B) $\frac{1}{3}$; C) $\frac{3}{2}$; D) 3; E) 6.

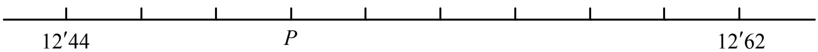
5. De los siguientes números, ¿cuál es el más próximo a $\frac{39}{18}+\frac{20}{9}+\frac{2}{3}$?

   A) 2; B) 3; C) 4; D) 5; E) 6.

6. En un examen en el que la puntuación máxima era un 10, la nota media de 10 estudiantes fue $9'2$. ¿Cuál fue la nota más baja que pudo obtener alguno de los 10?

   A) 2; B) 9; C) $9'2$; D) 4; E) 0.

7. En esta regla se han borrado la mayoría de los números como puedes observar. ¿A qué número correspondía el punto P?



   A) $12'47$; B) $12'48$; C) $12'50$; D) $12'52$; E) $12'56$.

8. Si la concentración de sal en el agua del mar es de 34 gramos por litro, ¿cuántas toneladas de sal habría en un kilómetro cúbico de agua del mar?

   A) 3.450; B) 34.000; C) 340.000; D) 3.400.000; E) 34.000.000.

9. 9 es el 15% de:

   A) 45; B) 54; C) 60; D) 90; E) 135.

10. En una elección al Consejo Escolar de un instituto se presentaron cinco candidatos y votaron 320 estudiantes, cada uno con 1 voto. Si el que ganó obtuvo 9, 13, 18 y 25 votos de ventaja sobre los otros cuatro, ¿cuántos votos obtuvo el candidato menos votado?

    A) 48; B) 49; C) 50; D) 51; E) 52.

11. Los números de teléfono de Coslada son de 7 cifras y empiezan por 6 (no contamos el prefijo 91). Por ejemplo, uno de ellos es el 6691944. ¿Cuántos son capicúas?

    A) 100; B) 1.000; C) 6.561; D) 10.000; E) 100.000.

12. Una mujer tiene 3 hijos en edad escolar. El producto de las edades de ella y de sus tres hijos es 16555. ¿Cuántos años hay de diferencia entre el mayor y el menor de los hijos?

    A) 4; B) 5; C) 6; D) 7; E) 11.

13. Si n es un entero, ¿qué número de los siguientes es siempre impar?

    A) $5n$; B) $n^2 + 5$; C) n^3; D) $n + 16$; E) $2n^2 + 5$.

14. En una floristería, las rosas rojas se venden a 300 pts. cada una y las amarillas a 500 pts. Una persona fue a comprar rosas de los dos tipos (al menos una de cada tipo), comprando 13 en total, entre las que había más amarillas que rojas. ¿Cuál de las siguientes cantidades de pts. pudo gastar?

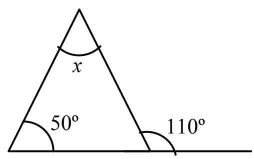
    A) 5100; B) 6700; C) 6500; D) 5800; E) 5700.

15. En un festival de Navidad, los adultos pagaban 750 pts. y los niños 250 pts. El festival se celebró en un auditorio para 600 personas, que no estaba lleno, y se recaudaron 330.000 pts. ¿Cuántos adultos, como mínimo, asistieron?

    A) 359; B) 300; C) 365; D) 361; E) 367.

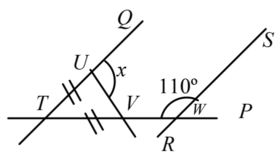
16. El valor, en grados, del ángulo x de la figura es

    A) 20; B) 45; C) 70; D) 55; E) 60.



17. En el dibujo de la figura, $PQ \parallel RS$ y $TU = TV$. Si el ángulo $TWS = 110º$, ¿cuál es el valor en grados del ángulo x de la figura?

    A) 135; B) 130; C) 125; D) 115; E) 110.



18. ¿Cuál es el área, en cm^2, de un rectángulo de 24 cm. de perímetro en el que un lado es doble que otro?

    A) 24; B) 16; C) 20; D) 12; E) 32.

19. Pintamos un cubo de forma que si dos caras tienen una arista común, las pintamos de colores distintos. ¿Cuántos colores hacen falta como mínimo para poder hacer esto?

    A) 2; B) 3; C) 4; D) 5; E) 6.

20. Dos planos paralelos distan 10 cm. Si P es un punto de uno de ellos, el conjunto de puntos equidistantes de ambos planos y a 6 cm de P es:

A) Un punto; B) Una línea recta y una circunferencia; C) Una línea recta; D) Una circunferencia; E) Una esfera.

21. Con las cifras 1, 2, 3 y 5 podemos formar 24 números de 4 cifras distintas cada uno. ¿Cuántos de estos veinticuatro son números pares?

A) 1; B) 2; C) 6; D) 12; E) 18.

22. ¿Cuántos triángulos isósceles de 25 cm de perímetro pueden construirse si cada lado mide un número entero de cm?

A) Ninguno; B) 5; C) 6; D) 7; E) 12.

23. Un coche sale de un punto P a las 12 de la mañana a 90 km/hora. ¿A qué hora dará alcance a un ciclista que salió de P a las 7 de la mañana a 15 km/hora?

A) Después de las 12 pero antes de las 12 y media; B) A las 12 y media;
C) Después de las 12 y media pero antes de las 13 horas; D) A las 13 horas;
E) Después de las 13 horas pero antes de las 13 horas 30 minutos.

24. ¿Cuánto vale la suma de las cifras del número $10^{99} - 99$?

A) 1999; B) 999; C) 878; D) 874; E) 798.

25. Sabiendo que 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100 = 5050, ¿cuántos signos + tendríamos que convertir en – para que el resultado fuera 1999?

A) 3; B) 4; C) 5; D) 6; E) Es imposible.

IV CONCURSO DE PRIMAVERA. 3er NIVEL (3º-4º ESO).1ª FASE. 1-3-00

1. Si $1246^3 = 1934434936$, $12'46^3$ será igual a

A) $193'4434936$; B) $1934'434936$; C) $19344'34936$; D) $193443'4936$; E) $1934434'936$.

2. ¿Cuánto vale la suma de las cifras del número $10^{99} - 99$?

A) 1999; B) 999; C) 878; D) 874; E) 798.

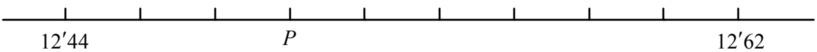
3. Una fórmula de Física dice que $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Si $R_1 = 3$ y $R_2 = 6$, R es igual a:

A) $\frac{1}{2}$; B) 2; C) $\frac{1}{9}$; D) 9; E) $\frac{9}{2}$.

4. En un examen en el que la puntuación máxima era un 10, la nota media de diez estudiantes fue 9’2. ¿Cuál fue la nota más baja que pudo obtener alguno de los diez?

A) 2; B) 9; C) 9’2; D) 4; E) 0.

5. Es esta regla, como puedes observar, se han borrado la mayoría de los números. ¿A qué número correspondía el punto P?



A) $12'47$; B) $12'48$; C) $12'50$; D) $12'52$; E) $12'56$.

6. En una epidemia de gripe en Madrid, hace tres días, tenía gripe el 10% de la población y estaba sana el 90% restante. En los tres últimos días, el 10% de los enfermos se curó y el 10% de los sanos cogió la gripe. ¿Qué porcentaje de la población está ahora sana?

A) 81%; B) 82%; C) 90%; D) 91%; E) 99%.

7. En una clase de Matemáticas se formaron grupos de cuatro y quedaron 2 estudiantes libres. Luego se formaron grupos de 5 y quedó libre 1 estudiante. Si 15 de los estudiantes eran chicas y había más chicas que chicos, ¿cuántos chicos había en la clase?

A) 7; B) 8; C) 9; D) 10; E) 11.

8. Añadiendo un 1 al principio y al final de un número, éste aumenta en 14.789. ¿Cuál era la suma de las cifras del número original?

A) 11; B) 10; C) 9; D) 8; E) 7.

9. ¿Cuál es el mayor de los siguientes números?

A) $\frac{4}{0'4}$; B) $\frac{4}{0'44}$; C) $\frac{4}{0'4^2}$; D) $\frac{4}{\sqrt{0'44}}$; E) $\frac{4}{0'44^2}$.

10. ¿Cuántos años del siglo XXI verificarán la propiedad de que dividiendo el número del año por 2, 3, 5 y 7 obtengamos siempre de resto 1?

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4.

11. El mayor divisor de 72^3, distinto del propio 72^3 es:

A) $2^9 \cdot 3^5$; B) $2^8 \cdot 3^6$; C) $2^8 \cdot 3^5$; D) $2^5 \cdot 3^5$; E) $2^6 \cdot 3^6$.

12. En Matematilandia hay un sistema muy curioso de limitación de velocidad: A 1 km del centro de la ciudad hay una señal de limitación de velocidad a 120 km/hora; a medio kilómetro, otra limitación a 60 km/hora, a $\frac{1}{3}$ de km, la limitación de velocidad llega a 40 km/hora; a $\frac{1}{4}$ km, la señal es de 30 km/hora, a $\frac{1}{5}$ km de 24 km/hora y, finalmente, a $\frac{1}{6}$ de km del centro de la ciudad, hay una señal de limitación de velocidad a 20 km/hora. Si viajas siempre a la velocidad límite, ¿qué tiempo tardas en llegar desde la señal de 120 km/hora al centro de la ciudad?

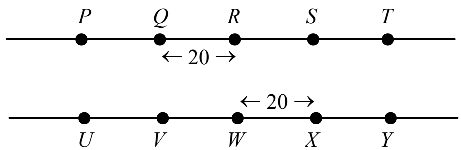
A) 30 seg.; B) 1 min. 13’5 seg.; C) 1 min. 42 seg.; D) 2 min. 27 seg.; E) 3 min.

13. En un festival de Navidad, los adultos pagaban 750 pts. y los niños 250 pts. El festival se celebró en un auditorio para 600 personas, que no se llenó, y se recaudaron 330.000 pts. ¿Cuántos adultos, como mínimo, asistieron al festival?

A) 359; B) 300; C) 365; D) 361; E) 367.

14. En una calle hay cinco casas, P, Q, R, S, y T en una acera y otras cinco, U, V, W, X, Y en la acera de enfrente, como se muestra en la figura. Las casas de una misma acera están separadas 20 m.

Un cartero está decidiendo si usar la ruta $PQRSTYXWVU$ o $PUQVRWSXTY$ para repartir 10 cartas, una en cada casa, y llega a la conclusión que, en los dos casos, recorre la misma cantidad de metros. ¿Cuál es ésta?

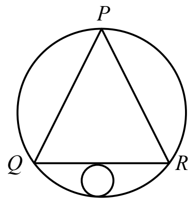


A) 160; B) 175; C) 180; D) 215; E) 220.

15. Si los cuatro enteros positivos diferentes m, n, p y q satisfacen la ecuación $(7 - m)(7 - n)(7 - p)(7 - q) = 4$, la suma $m + n + p + q$ es igual a:

A) 10; B) 21; C) 24; D) 26; E) 28.

16. En una circunferencia de radio 6 inscribimos el triángulo isósceles PQR en el que $PQ = PR$. Una segunda circunferencia es tangente a la 1ª y tangente a la base QR del triángulo en su punto medio, como se muestra en la figura. Si la longitud de PQ es $4\sqrt{5}$, el radio de la circunferencia pequeña es:



A) $\sqrt{5}$; B) 2; C) $\frac{8}{3}$; D) $\frac{7}{3}$; E) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

17. En el producto $\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)\left(1+\frac{9}{16}\right)\cdots\left(1+\frac{41}{400}\right)$, el factor que ocupa el lugar n es $1+\frac{2n+1}{n^2}$. ¿Cuánto vale dicho producto?

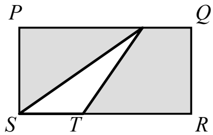
A) 441; B) 4041; C) 4410; D) 4001; E) 4010.

18. $\frac{m}{m-n}+\frac{n}{n-m}$ es igual a:

A) n^2-m^2; B) $2mn$; C) $\frac{mn+m^2+n^2m^2}{m^2-n^2}$; D) 1; E) $m-n$.

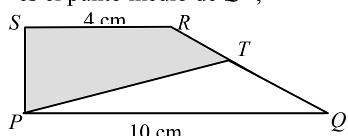
19. En el rectángulo de la figura, la longitud PQ es doble de la QR, $ST=6$ cm. y $TR=12$ cm. ¿Cuánto vale el área sombreada?

A) 54; B) 81; C) 108; D) 135; E) 162



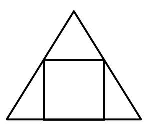
20. La altura del trapecio $PQRS$ de la figura mide 6 cm. Si T es el punto medio de QR, ¿cuál es el área de la región sombreada?

A) 21; B) 26; C) 27; D) 34; E) 42.



21. Un cuadrado de lado 1 está inscrito en un triángulo equilátero como se muestra en la figura. ¿Cuál es la longitud del lado del triángulo?

A) 2; B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; C) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$; D) $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$; E) $\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$.



22. Un triángulo equilátero de 12 cm de lado está cubierto de triángulos equiláteros pequeños de 1 cm de lado cada uno. ¿Cuántos triangulitos de estos se necesitan?

A) 12; B) 66; C) 120; D) 132; E) 144.

23. Con las cifras 1, 2, 3, 5 podemos formar 24 números de 4 cifras distintas cada uno. ¿Cuántos de estos veinticuatro son números pares?

A) 1; B) 2; C) 6; D) 12; E) 18.

24. ¿Cuántos triángulos isósceles de 25 cm. de perímetro pueden construirse si cada lado mide un número entero de cm?

A) Ninguno; B) 5; C) 6; D) 7; E) 12.

25. El valor de $\log tg 1º + \log tg 2º + \lg tg 3º + \cdots + \log tg 88º + \log tg 89º$, donde todos los logaritmos están en base 10 es:

A) 0; B) $\frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; C) $\frac{1}{2}\log 2$; D) 1; E) Nada de lo anterior.

IV CONCURSO DE PRIMAVERA. 4º NIVEL (1º-2º BACH.) 1º FASE. 1-3-00

1. Si $S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + ... + (-1)^{n-1}n$, con n entero positivo, $S_{1999} + S_{2000}$ es igual a:

A) −2; B) −1; C) 0; D) 1; E) 2.

2. De los siguientes números, ¿cuál es el que está justamente en medio de $\frac{1}{5}$ y $\frac{13}{25}$?

A) $\frac{17}{25}$; B) $\frac{7}{15}$; C) $\frac{3}{5}$; D) $\frac{9}{25}$; E) $\frac{8}{25}$.

3. Al hacer cinco nuevas aulas en un colegio, la media de estudiantes por clase se redujo en 6 y al hacer otras 5 nuevas se volvió a reducir, ahora en 4. Si el número de estudiantes permanece constante, ¿cuántos había?

A) 560; B) 600; C) 650; D) 720; E) 800.

4. ¿Cuántos enteros positivos x verifican que tanto x como $x + 99$ son cuadrados perfectos?

A) 1; B) 2; C) 3; D) 49; E) 99.

5. La última cifra del número $3^{17} + 7^{13}$ es:

A) 1; B) 6; C) 4; D) 2; E) 0.

6. El mayor divisor de 72^3, distinto del propio 72^3 es:

A) $2^9 \cdot 3^5$; B) $2^8 \cdot 3^6$; C) $2^8 \cdot 3^5$; D) $2^5 \cdot 3^5$; E) $2^6 \cdot 3^6$.

7. En una carrera de 1 km entre Alicia y Pedro, Pedro sale 48 m por delante de la línea de salida y pierde la carrera por 2 m. Si cada uno mantiene su velocidad, ¿cuántos metros recorrió Alicia hasta que cogió a Pedro?

A) 980; B) 930; C) 940; D) 950; E) 960.

8. $\sqrt{7+\sqrt{13}} - \sqrt{7-\sqrt{13}}$ es igual a:

A) $\frac{\sqrt{13}}{3}$; B) $\frac{3}{2}$; C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; D) $\sqrt{2}$; E) $2\sqrt[4]{13}$.

9. Si α y β son las soluciones de la ecuación $x^2 - \sqrt{531}x + \frac{431}{2} = 0$, entonces $\alpha^2 + \beta^2$ es igual a:

A) $\sqrt{531} - 431i$; B) $531 + \frac{431^2}{4}$; C) 100; D) $\sqrt{531}$; E) 531.

10. ¿Cuál es la suma de todas las soluciones distintas de la ecuación $x^2+3x+2=\left|x+1\right|$?

A) −4; B) 4; C) 0; D) −1; E) 2.

11. ¿Para qué valores de k, el sistema $\begin{cases} kx-y=2 \\ x+y=3 \end{cases}$ tiene una solución (x, y) en la que $x>0$ e $y>0$?

A) $k>-1$; B) $k<\frac{2}{3}$; C) $-1<k<\frac{2}{3}$; D) $k<-1$; E) $k>\frac{2}{3}$.

12. La media aritmética de n números es k. Si añadimos el número x, la nueva media aumenta en 1. ¿Cuánto vale x?

A) $k+n+1$; B) $k+1$; C) n; D) $k+n$; E) $\frac{n(k+1)}{n+1}$.

13. $2^{n+1}+2^{n+1}$ es igual a:

A) 2^{n+2}; B) 2^{2n+2}; C) 4^{2n+2}; D) 4^{2n+1}; E) 2^{n^2+2n+1}.

14. La gráfica de $y=3x^2-kx+2$ es simétrica respecto de la recta $x=\frac{1}{2}$. ¿Cuál es el mínimo valor que toma y?

A) $\frac{1}{2}$; B) $\frac{11}{2}$; C) $-\frac{1}{4}$; D) $\frac{3}{4}$; E) $\frac{5}{4}$.

15. $\frac{1}{ab+b^2}+\frac{1}{a^2+ab}$ es igual a:

A) $\frac{1}{ab}$; B) $\frac{1}{a^2+b^2}$; C) $\frac{a^2+b^2}{ab}$; D) $\frac{a+b}{ab}$; E) $\frac{2}{a^2+2ab+b^2}$.

16. Si $f(x)=\frac{1}{1+x}$, entonces $f\big(f(x)\big)$ es igual a:

A) $\frac{1}{(1+x)^2}$; B) $\frac{1+x}{2+x}$; C) 1; D) $\frac{1}{2+x}$; E) $\frac{2+x}{1+x}$.

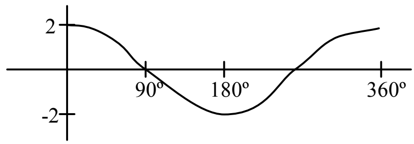
17. Si $f(x)=10x$ y $f\big(g(x)\big)=-5x$, $g(x)$ es igual a:

A) $-\frac{1}{2}$; B) $-\frac{x}{2}$; C) $-\frac{x}{10}$; D) $-\frac{1}{10}$; E) $-2x$.

18. La gráfica de la figura corresponde a la función

A) $y = 2\text{sen}\, x$; B) $y = 2\cos x$; C) $y = \text{sen}\, 2x$;

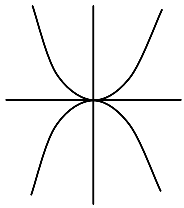
D) $y = sen\dfrac{x}{2}$; E) $y = \cos\dfrac{x}{2}$.



19. ¿Cuál de las siguientes funciones describe mejor la gráfica de la figura?

A) $y = |x|^2$; B) $|y| = x^2$; C) $y^2 = x^2$;

D) $y^2 = x$; E) $\sqrt{|y|} = x$.



20. En una progresión aritmética, la suma de los 50 primeros términos es 200 y la suma de los 50 siguientes, 2700. ¿Cuánto vale el primer término de la progresión?

A) −1221; B) –21′5; C) –20′5; D) 3; E) 3′5.

21. Los números a, b y c, ninguno cero, están en progresión aritmética. Si aumentamos a en 1, ó c en 2, resulta una progresión geométrica. ¿Cuánto vale b?

A) 16; B) 14; C) 12; D) 10; E) 8.

22. Si $a = \log_8 225$ y $b = \log_2 15$, entonces se verifica que:

A) $a = \dfrac{b}{2}$; B) $a = \dfrac{2b}{3}$; C) $a = b$; D) $a = \dfrac{3b}{2}$; E) $a = 2b$.

23. Si $\log_{b^2} x + \log_{x^2} b = 1$, con $b > 0$, $b \neq 1$, $x \neq 1$, x es igual a:

A) $\dfrac{1}{b^2}$; B) $\dfrac{1}{b}$; C) b^2; D) b; E) $\sqrt{b}$.

24. Si $\text{sen}\, 2x\ \text{sen}\, 3x = \cos 2x \cos 3x$, una solución de esta ecuación es:

A) 18º; B) 30º; C) 36º; D) 45º; E) 60º.

25. Si $A = 20º$ y $B = 25º$, el producto (1 + tg A)(1 + tg B) es igual a:

A) $\sqrt{3}$; B) 2; C) $1+\sqrt{2}$; D) 2(tg A + tg B); E) Nada de lo anterior.

IV CONCURSO DE PRIMAVERA. 1er NIVEL (5º-6º PRIMARIA). 2ª FASE. 8-4 2000.

1. Dani elige un número de dos cifras, se lo resta a 200 y luego multiplica el resultado por 2. ¿Cuál es el mayor número que puede obtener?

   A) 200; B) 202; C) 220; D) 380; E) 398.

2. Rocío habló a sus compañeros más de media hora pero menos de tres cuartos de hora. Si dijo 150 palabras por minuto, ¿cuál de los siguientes es el número de palabras que pronunció?

   A) 2250; B) 3000; C) 4200; D) 4350; E) 5650.

3. ¿Cuántos números enteros hay entre $\sqrt{8}$ y $\sqrt{80}$?

   A) 5; B) 6; C) 7; D) 8; E) 9.

4. Si ni A ni B son cero, ¿cuántas cifras tiene el número obtenido en la suma

   $$\begin{array}{r} 9876 \\ +\ \ A32 \\ \underline{B1} \end{array}$$

   A) 4; B) 5; C) 6; D) 9; E) Depende de los valores de A y de B.

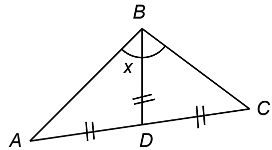
5. De los siguientes números ¿cuál es el más próximo a la raíz cuadrada de 200 millones?

   A) 1 400; B) 4 500; C) 14 000; D) 45 000; E) 100 millones.

6. En un triángulo isósceles, un ángulo es doble que otro. ¿Cuánto mide el ángulo más pequeño del triángulo?

   A) 30º; B) 36º; C) 40º; D) 60º; E) No hay suficientes datos para saberlo.

7. En la figura de la derecha, los segmentos $\overline{AD}, \overline{BD}$ y $\overline{DC}$ miden lo mismo. ¿Cuánto mide el ángulo $x\ (= A\hat{B}C)$?



   A) 100º; B) 85º; C) 90º; D) 95º; E) No se dan datos suficientes.

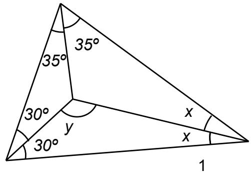
8. He conseguido sumar 1000 utilizando solamente doses y treses, la misma cantidad de doses que de treses. ¿Cuántos doses he utilizado?

   A) 200; B) 300; C) 250; D) 333; E) Ninguno de los anteriores.

9. La media de mis cuatro últimas notas en matemáticas es un 7. Si la cuarta nota ha sido un 8, ¿cuál es la suma de las tres primeras?

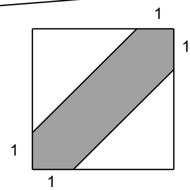
   A) 18; B) 19; C) 20; D) 21; E) 22.

10. ¿Cuánto mide el ángulo y de la figura?



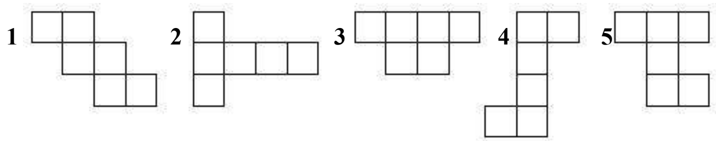
A) 110º; B) 115º; C) 120º; D) 125º; E) 130º.

11. ¿Cuál es el área de la franja sombreada dentro del cuadrado de lado 4 m?



A) 6 m^2; B) 7 m^2; C) 7’5 m^2; D) 8 m^2; E) 8’5 m^2.

12. ¿Cuáles de estos desarrollos corresponden a un cubo?



A) Todos; B) 1, 2, 4 y 5; C) 1, 2 y 4; D) 2 y 4; E) 4.

13. Si un número sumado a su tercera parte es igual a 576, el número está comprendido entre:

A) 390 y 400; B) 400 y 410; C) 410 y 420; D) 420 y 430; E) 430 y 440.

14. ¿Cuál es la afirmación contraria de “*Alguna vez he sacado más puntos*”?

A) Alguna vez he sacado menos puntos; B) Nunca he sacado menos puntos; C) Nunca he sacado más puntos; D) Siempre he sacado más puntos; E) Siempre he sacado menos puntos.

15. Cuatro personas se sientan en un banco para hacerse una foto, pero dos de ellas no quieren aparecer separadas. ¿De cuántas maneras pueden entonces sentarse?

A) De dos; B) De tres; C) De cuatro; D) De seis; E) De doce.

16. El mayor capicúa múltiplo de 6 menor que 1000 es

A) 666; B) 848; C) 888; D) 898; E) 999.

17. $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+2}}$ es igual a:

A) $\frac{3}{5}$; B) $\frac{5}{3}$; C) $\frac{4}{7}$; D) $\frac{7}{4}$; E) $\frac{7}{2}$.

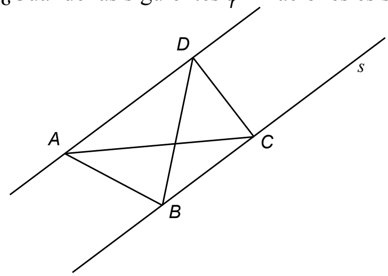
18. El ángulo interior de un octógono regular mide:

    A) 90º; B) 100º; C) 120º; D) 135º; E) 150º.

19. ¿Cuántos múltiplos de 7 menores que 1000 acaban en 13?

    A) Ninguno; B) Uno; C) Dos; D) Siete; E) Diez.

20. Las rectas r y s son paralelas. Llamamos T al triángulo ABC y M al triángulo DBC. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es siempre cierta?



    A) T y M tienen igual área

    B) T tiene mayor área que M

    C) T tiene menor área que M

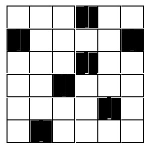
    D) T y M tienen igual perímetro

    E) T tiene mayor perímetro que M

21. Si dos números suman 1024 y se diferencian en 148, uno de ellos es:

    A) 436; B) 486; C) 512; D) 536; E) 586.

22. ¿Cuál es el menor número de cuadraditos que hay que sombrear en este tablero para que la figura resultante tenga algún eje de simetría?



    A) 1; B) 2; C) 3; D) 4; E) 5.

23. ¿Qué letra ocupa el lugar número 2000 en la sucesión CEBADACEBADACEBADA...

    A) A; B) B; C) C; D) D; E) E.

24. Contando a partir de 1000, hacia atrás, de 7 en 7, es decir: 1000, 993, 986, ... es seguro que no llego a nombrar el:

    A) 20; B) 62; C) 176; D) 776; E) 979.

25. Antonio cuenta de tres en tres: 1, 4, 7, 10, ... y Beatriz de cuatro en cuatro: 1, 5, 9, 13, ... ¿Cuál es el primer número mayor que 1000 que nombran los dos?

    A) 1007; B) 1008; C) 1009; D) 1010; E) 1011.

IV CONCURSO DE PRIMAVERA. 2º NIVEL (1º-2º ESO). 2ª FASE. DÍA 8-4-00.

1. $\dfrac{4}{5-\dfrac{3}{4}}$, es igual a: A) $\dfrac{16}{17}$; B) $\dfrac{1}{17}$; C) 8; D) $\dfrac{1}{2}$; E) $\dfrac{1}{4}$.

2. La nota media de Juan en sus cinco primeros controles de matemáticas en este curso, fue un 8. En el sexto control obtuvo un 7, en el séptimo obtuvo un 5 y la nota media de sus ocho primeros controles fue un 7'5. ¿Qué nota obtuvo en el octavo control?

A) 5; B) 6; C) 6'5; D) 7'5; E) 8.

3. Un grifo pierde una gota de agua cada segundo. Si 600 gotas de agua llenan una vasija de 100 mililitros, ¿cuántos litros de agua se pierden en 300 días?

A) 432; B) 4 320; C) 43 200; D) 432 000; E) 4 320 000.

4. Un grupo de estudiantes de 2º de E. S. O. ha organizado una campaña de lavado de coches para obtener dinero para un viaje de fin de curso. Algunos clientes piden un lavado simple, por el que pagan 500 ptas. y otros un lavado con jabón, por el que pagan 700 ptas. Si obtuvieron 17 600 ptas, ¿cuántos coches, como mínimo, lavaron?

A) 23; B) 24; C) 26; D) 28; E) 30.

5. Por 3 000 ptas me venden una camisa, pero si compro tres, me descuentan un 20% del total. ¿Cuánto dinero debo pagar por 3 camisas?

A) 8 400 ptas; B) 8 200 ptas; C) 8 000 ptas; D) 7 200 ptas; E) 7 000 ptas.

6. Como todos sabéis, un gato normal tiene 18 garras, 5 en cada pata delantera y 4 en cada pata trasera. En mi casa tengo 4 gatos cojos de una pata cada uno, siendo diferente la pata que le falta a cada gato. ¿Cuántas garras tienen entre los 4 gatos que hay en mi casa?

A) 64; B) 69; C) 52; D) 54; E) 68.

7. ¿Cuántos rectángulos distintos, de 600 cm^2 de área, tienen las dimensiones, en cm, de sus lados múltiplos de 5?

A) 4; B) 2; C) 6; D) 3; E) más de 6.

8. Si x e y pueden tomar valores enteros entre 1 y 9 (ambos inclusive), ¿cuántas cifras, no necesariamente distintas, hay en la suma $9826 + 71x + 2y$?

A) 4; B) 5; C) 6; D) Depende del valor de x pero no del de y; E) Depende de los valores de x y de y.

9. ¿De cuántas formas puedo escribir 111113 como suma de dos números primos?

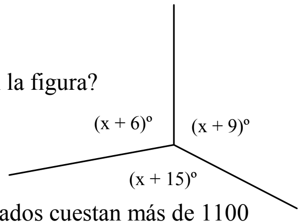
A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4.

10. Alicia tiene un paso de 0'5 metros de largo. Si camina dando dos pasos hacia adelante y uno hacia atrás, ¿cuántos pasos tiene que dar hasta llegar a una pared situada a una distancia de 20 m?

A) 116; B) 119; C) 118; D) 120; E) 124.

11. ¿Cuánto mide el mayor de los ángulos que se indican en la figura?

A) 135º; B) 120º; C) 116º; D) 130º E) 125º.



12. Si nueve helados cuestan menos de 1000 ptas y diez helados cuestan más de 1100 ptas, ¿cuál es el precio de cada helado?

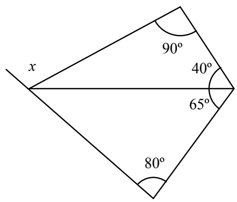
A) 100 ptas; B) 102 ptas; C) 110 ptas; D) 111 ptas; E) 112 ptas.

13. Tengo una calculadora averiada· Cuando sumo dos números, sólo aparece en la pantalla la cifra de las unidades. Por ejemplo, si sumo $6+7$, aparece un 3. He construido la sucesión de números: 8, 6, 4, 0, 4, 4, 8, 2, 0, ... de la siguiente forma: a partir del tercer término, cada uno es la suma de los dos anteriores tal y como aparece en mi calculadora. ¿Qué número ocupa el lugar 2001 en esta sucesión?

A) 8; B) 6; C) 4; D) 2; E) 0.

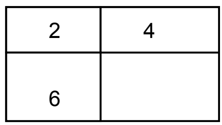
14. ¿Cuál es el valor del ángulo x de la figura?

A) 95º; B) 85º; C) 80º; D) 75º; E) 70º.

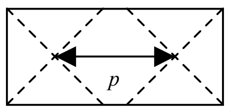


15. Se divide un rectángulo en otros cuatro rectángulos como se indica en la figura. Si las áreas de tres de ellos son 2, 4 y 6, ¿cuál es el valor del área del rectángulo original?

A) 24; B) 16; C) 8; D) 20; E) No se dan suficientes datos.

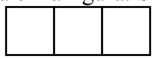


16. Un billete de autobús mide m cm de largo y n cm de ancho. Durante un viaje me he entretenido en hacer dobleces tal como indica la figura, siendo las líneas que aparecen bisectrices de los ángulos de las esquinas. ¿Cuánto mide la longitud p en centímetros?



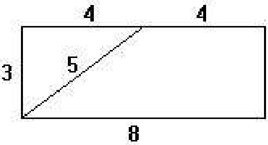
A) $m-0{,}5n$; B) $m-2n$; C) $m-n$; D) $m-\sqrt{2}n$; E) $\sqrt{2}(m-n)$.

17. Un rectángulo está formado por tres cuadrados, como se muestra en la figura. Si el perímetro del rectángulo es 24 cm, ¿cuál es su área?



A) 27 cm^2; B) 30 cm^2; C) 36 cm^2; D) 24 cm^2; E) 48 cm^2.

18. Cortamos un rectángulo de 3 × 8 en dc indica en la figura, y las recolocamos triángulo rectángulo con los dos trozos. 1 de este triángulo resultante mide:



A) 9; B) 6; C) 4; D) 7; E) 5.

19. ¿Cuál es el mayor número de *Lunes* que pueden aparecer en un periodo de 45 días?

A) 5; B) 6; C) 7; D) 8; E) 9.

20. Con las cifras 2, 3, 4, 5 y 6, puedo formar números de una, de dos, de tres, de cuatro y hasta de cinco cifras de forma que en cada número no hay cifras repetidas. ¿Cuántos de estos números son mayores que 4000?

A) 120; B) 138; C) 144; D) 156; E) 192.

21. ¿Cuál es el resto de la división de 1999^{2000} entre 5?
A) 4; B) 3; C) 2; D) 1; E) 0.

22. Cada una de las letras A, B, C, D representan un número diferente del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. Si $\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = 1$, ¿cuánto vale A + C?

A) 3; B) 4; C) 5; D) 6; E) 7.

23. Hay algunos números enteros positivos que verifican estas dos propiedades:
(1) La suma de los cuadrados de sus cifras es 50 y
(2) Cada cifra es mayor que la que hay a su izquierda.
¿Cuál es el producto de todas las cifras del mayor número de todos estos números enteros?

A) 7; B) 25; C) 36; D) 48; E) 60.

24. Dispongo de la cantidad que quiera de dígitos, excepto de doses, de los que solamente tengo 22. ¿Cuántas páginas de mi cuaderno puedo numerar con las cifras que tengo?

A) 22; B) 99; C) 112; D) 119; E) 199.

25. ¿En cuántos ceros acaba el producto 25·25·25·25·25·25·25·8·8·8?

A) 3; B) 6; C) 9; D) 10; E) 12.

IV CONCURSO DE PRIMAVERA. 3er NIVEL (3º-4º ESO). 2ª FASE. DÍA 8-4-00.

1. Para $x = 7$, ¿qué número de los siguientes es el más pequeño?

A) $\frac{6}{x}$; B) $\frac{6}{x+1}$; C) $\frac{6}{x-1}$; D) $\frac{x}{6}$; E) $\frac{x+1}{6}$.

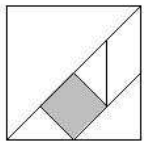
2. De los siguientes números, ¿cuál es el mayor?

A) 9'12344; B) $9'123\overline{4}$; C) $9'12\overline{34}$; D) $9'1\overline{234}$; E) $9'\overline{1234}$.

3. $2\left(1-\frac{1}{2}\right)+3\left(1-\frac{1}{3}\right)+4\left(1-\frac{1}{4}\right)+\ldots+10\left(1-\frac{1}{10}\right)=$

A) 45; B) 49; C) 50; D54; E) 55.

4. ¿Cuál es el cociente entre el área del cuadrado sombreado y el área del cuadrado grande?



A) $\frac{1}{6}$; B) $\frac{1}{7}$; C) $\frac{1}{8}$; D) $\frac{1}{12}$; E) $\frac{1}{16}$.

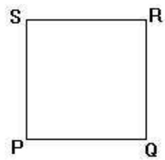
5. En un instituto de Madrid, el 30% de los estudiantes del club de Matemáticas están en el club de Ciencias y el 80% de los estudiantes del club de Ciencias están en el club de Matemáticas. Si hay 15 estudiantes en el club de Ciencias, ¿cuántos hay en el club de Matemáticas?

A) 12; B) 15; C) 30; D) 36; E) 40.

6. Beatriz escoge al azar dos números distintos del conjunto $\{8, 9, 10\}$ y los suma. Carlos escoge también al azar otros dos números distintos del conjunto $\{3, 5, 6\}$ y los multiplica. ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado obtenido por Beatriz sea mayor que el obtenido por Carlos?

A) $\frac{4}{9}$; B) $\frac{5}{9}$; C) $\frac{1}{2}$; D) $\frac{1}{3}$; E) $\frac{2}{3}$.

7. Doblamos el cuadrado $PQRS$ de la figura de forma que P coincida con R y Q con S. Si el área de la figura resultante es 9 cm^2, ¿cuál es, en centímetros, el perímetro del cuadrado original?



A) 9; B) 6; C) 18; D) 24; E) 26.

8. Fernando construye una sucesión de enteros positivos, según las tres reglas siguientes:

Regla 1: Si el entero es menor que 10, lo multiplica por 9;
Regla 2: Si el entero es par y mayor que 9, lo divide por 2.
Regla 3: Si el entero es impar y mayor que 9, le resta 5.

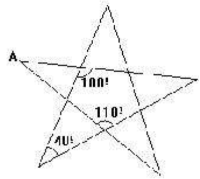
Empieza con un entero positivo elegido al azar, le aplica la regla adecuada y, a continuación, sigue aplicando la regla que corresponda a cada resultado obtenido. Un *ejemplo de sucesión construida según estas reglas sería: 23, 18, 9, 81, 76... Calcula el término 2000 de la sucesión que empieza 98, 49.*

A) 6; B) 11; C) 22; D) 27; E) 54.

9. Antonio, Beatriz y Carlos reparten su dinero de la siguiente forma: Antonio da a Beatriz y a Carlos dinero hasta que cada uno tenga el doble de lo que tenía; Beatriz hace ahora lo mismo con Antonio y con Carlos y, finalmente, Carlos hace lo mismo, es decir, les da a Antonio y a Beatriz dinero hasta que cada uno tenga el doble de lo que tenía en ese momento. Si Carlos empieza y termina con 36 ptas, ¿cuánto dinero tienen entre los tres?

A) 108 ptas; B) 180 ptas; C) 216 ptas; D) 252 ptas; E) 288 ptas.

10. ¿Cuánto mide el ángulo A de la figura?

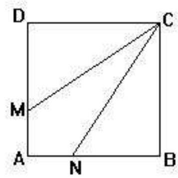


A) 20º; B) 30º; C) 35º; D) 40º; E) 45º.

11. En una tribu del Amazonas, 3 pescados se cambian por 2 barras de pan y 3 barras de pan por 11 bolsas de arroz. ¿Cuántas bolsas de arroz se darían por 18 pescados?

A) 39; B) 41; C) 42; D) 44 E) Nada de lo anterior.

12. Los segmentos CM y CN dividen el cuadrado ABCD, de lado 3, en tres partes de igual área. ¿Cuánto mide el segmento CM?



A) $\sqrt{10}$; B) $\sqrt{12}$; C) $\sqrt{13}$; D) $\sqrt{14}$; E) $\sqrt{15}$.

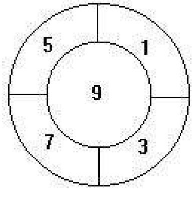
13. En un papel hay escrito un número de cuatro cifras. Si borramos las dos últimas, el número queda así: 86??. Sabiendo que el número original era divisible por 3, 4 y 5, ¿cuál es la suma de las dos cifras que hemos borrado?

A) 3; B) 4; C) 9; D) 6; E) 13.

14. Si $n = 1 + 3 + 5 + ... + 999$ y $m = 2 + 4 + 6 + ... + 1000$, $m - n$ es igual a:

A) 500; B) 1000; C) –499; D) 499; E) 501.

15. En una tirada de dardos, sabemos que los 8 que hemos tirado han caído en la figura de la derecha. Si las puntuaciones para cada zona son las que se indican, ¿cuál puede haber sido la puntuación total obtenida?



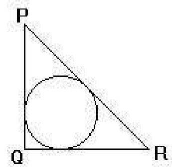
A) 6; B) 27; C) 39; D) 48; E) 74.

16. El número de votantes de mi barrio bajó en 400 durante un año. Al año siguiente aumentó en un 6% pero todavía había 40 menos que antes de la bajada. ¿Cuántos había antes de bajar?

A) 6000; B) 6040; C) 6360; D) 6400; E) 6440.

17. Si $\dfrac{m}{m+2n} = -3$, entonces $\dfrac{m}{n}$ es igual a:

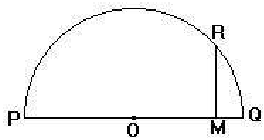
A) $-\dfrac{3}{2}$; B) $\dfrac{3}{2}$; C) $\dfrac{2}{3}$; D) $-\dfrac{2}{3}$; E) $-\dfrac{1}{2}$.



18. El triángulo de la figura es rectángulo en Q con PQ = QR = 6 cm. ¿Cuál es, en centímetros, el radio del círculo inscrito?

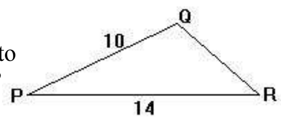
A) $3\sqrt{2}$; B) $2\sqrt{3}$; C) $6-3\sqrt{2}$; D) $\dfrac{3}{2}$; E) 3.

19. En la semicircunferencia de la figura, con centro O, $\overline{OM} = 3\cdot\overline{MQ}$ y $\overline{RM}$ es perpendicular a $\overline{PQ}$. ¿Cuál es el cociente $\dfrac{\overline{PR}}{\overline{RM}}$?



A) $\sqrt{3}$; B) $\sqrt{5}$; C) $\sqrt{7}$; D) 3; E) Nada de lo anterior.

20. En el triángulo PQR de la figura, PR =14 y PQ =10. La altura sobre el lado QR corta a su prolongación en un punto S tal que SQ =5. ¿Cuál es el perímetro del triángulo PQR?



A) $24+5\sqrt{2}$; B) $24+3\sqrt{3}$; C)29; D)30; E)31.

21. ¿Cuál es la última cifra distinta de 0 de 20! ? (Recuerda: 20! = 20·19·18·...·2·1)

A) 2; B) 4; C) 5; D) 6; E) 8.

22. Si la suma de 50 enteros consecutivos es 4475, ¿cuál es el mayor?
A) 65; B) 66; C) 112; D) 114; E) 116.

23. ¿Cuánto mide cada ángulo de un polígono convexo regular de 20 diagonales?

A) 18º; B) 45º; C) 72º; D) 135º; E) 162º.

24. Si ordenamos de menor a mayor los números $p = sen 24^{\circ}$, $q = \cos 65^{\circ}$, $r = sen 165^{\circ}$, se obtiene:
A) $p < q < r$; B) $p < r < q$; C) $r < p < q$; D) $r < q < p$; E) $q < p < r$.

25. En un trapecio isósceles de base mayor 16 hay inscrito un círculo. Si el seno del ángulo agudo del trapecio es 0'8, el área del círculo es

A) 9π; B) 16π; C) 25π; D) 36π; E) Nada de lo anterior.

**IV CONCURSO DE PRIMAVERA. 4º NIVEL (1º-2º BACHILLERATO LOGSE)
2ª FASE. DÍA 8-4-00**

1. ¿Cuál es el entero positivo más próximo a $\sqrt{1999+\sqrt{1999}}$?

A) 44; B) 45; C) 46; D) 47; E) 48.

2. En mi Instituto, la razón entre el número de chicos y chicas es 2 a 3 y la razón entre el número de chicas y profesores es 8 a 1. ¿Cuál es la razón entre el número de estudiantes y el de profesores?

A) 16 a 3; B) 5 a 1; C) 12 a 1; D) 13 a 1; E) 40 a 3.

3. En una bolsa con 100 bolas, el 95% son rojas. Quitamos algunas bolas rojas y entre las que quedan, el 75% son rojas. ¿Cuántas bolas rojas hemos quitado de la bolsa?

A) 20; B) 25; C) 50; D) 75; E) 80.

4. Entre los siguientes números, hay uno que es distinto a todos los demás. ¿Cuál?

A) $\frac{1999}{2000}$; B) $\frac{999}{2000}$; C) $\frac{1999998}{2000999}$; D) $\frac{2000999}{2002000}$; E) $\frac{999999}{2002000}$.

5. Luisa y María José salen juntas a pasear. Luisa pasea a 6 km por hora y María José a 4 km por hora. Salen a la vez y en la misma dirección. Cuando Luisa ha recorrido 1 km, se vuelve, hasta encontrarse con María José y entonces regresan las dos, cada una a su ritmo. ¿Cuántos minutos llegará María José más tarde que Luisa al punto de partida?

A) 10 minutos; B) 5 minutos; C) 4 minutos; D) 3 minutos 45 segundos; E) 3 minutos.

6. Si $\frac{1+2+3+...+n}{3n}$ = 36, entonces n es igual a:

A) 215; B) 195; C) 185; D) 205; E) 225.

7. Si m y n son números enteros positivos tales que $1 \le m < n$, ¿cuántas soluciones positivas tiene la ecuación $x^n - 1 - x^m = 0$?

A) Ninguna; B) n; C) Una; D) $n-m$; E) Cualquier número de soluciones positivas.

8. Si $pq = 21$, $qr = 132$, $rp = 77$ y $p > 0$, entonces p es igual a:

A) $\frac{49}{4}$; B) $\frac{4}{49}$; C) $\frac{11}{4}$; D) $\frac{2}{7}$; E) $\frac{7}{2}$.

9. De entre todos los enteros positivos x e y tales que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}$, ¿cuál es el mayor valor de y?

A) 60; B) 84; C) 96; D) 156; E) 288.

10. Si $2000^2 - 1996^2 = 111ak^2$, con a y k enteros, el máximo valor para $k - a$ es:

A) 4; B) –5; C) 11; D) 13; E) –13.

11. Una cierta función $f(x)$ toma todos los valores entre 0 y 1 pero ningún otro. ¿Qué función de las siguientes toma todos los valores entre –1 y 1?

A) $f(x) - 1$; B) $f(x) + 1$; C) $2f(x)$; D) $2f(x) - 1$ E) $2f(x) + 1$.

12. Si $a < b < c < d < e$, entonces, siempre es verdadero que:

A) $a + e < b + d$; B) $a + e < b + c + d$; C) $b + d < a + e$; D) $a + b + c < c + d + e$; E) $a + c + e < b + d$.

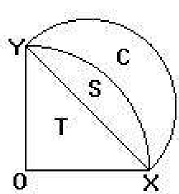
13. Si las longitudes de los tres lados de un triangulo son a, $a + 1$ y $a + 2$, los posibles valores de a son todos los que verifican:

A) $a > 0$; B) $0 < a < 1$; C) $a > 1$; D) $0 < a < 2$; E) $a = 1$.

14. $\frac{2\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})^2} - \frac{2\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})^2}$ es igual a:

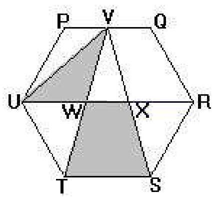
A) 48; B) $28\sqrt{3}$; C) $32 + 8\sqrt{3}$; D) $26\sqrt{3}$; E) 42.

15. Con centro en O dibujamos el cuadrante OXY, siendo XY a su vez diámetro del semicírculo que se muestra en la figura. Si llamamos T, S y C a las áreas de las regiones que se indican en la figura, ¿cuál es el cociente $\frac{T}{C}$?



A) $\frac{3}{\pi}$; B) 1; C) $\frac{13}{4\pi}$; D) $\frac{7}{2\pi}$; E) $\frac{15}{4\pi}$.

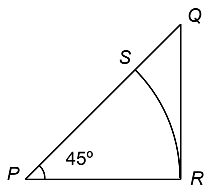
16. En el hexágono regular $PQRSTU$ de la figura, V es el punto medio de PQ, y W y X son los puntos que se señalan.



¿Cuánto vale $\dfrac{\acute{A}rea\,WXST}{\acute{A}rea\,UVW}$?

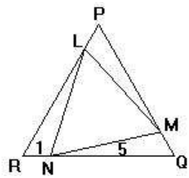
A) 2; B) 3; C) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; D) $\sqrt{3}$; E) $\sqrt{2}$.

17. En el triángulo rectángulo PQR de la figura, el ángulo P es de 45º y el arco de centro P y radio PR corta a PQ en S. ¿Cuál es el cociente entre el área de PRS y el área de RSQ?



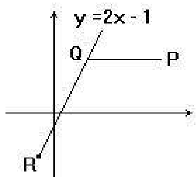
A) 1; B) $\dfrac{\pi}{8}$; C) $\dfrac{4-\pi}{2\pi}$; D) $\dfrac{2\pi}{4-\pi}$; E) $\dfrac{\pi}{4-\pi}$.

18. ¿Cuál es el cociente entre el área del triángulo equilátero grande PQR y el área del triángulo equilátero pequeño LMN?



A) $\dfrac{36}{25}$; B) $\dfrac{12}{5}$; C) $\dfrac{6}{5}$; D) $\dfrac{12}{7}$; E) $\dfrac{25}{21}$.

19.



La ecuación de la recta RQ de la figura es $y = 2x - 1$. Si el segmento $\overline{QP}$ es paralelo al eje de abscisas y las coordenadas de P son (8,4), ¿cuál es la distancia de P a Q?

A) 3’5; B) 4; C) 4’5; D) 5; E) 5’5.

20. ¿Para cuántos valores de x comprendidos entre 0’01 y 1 la gráfica de $f(x) = sen\,\dfrac{1}{x}$ corta al eje de abscisas?

A) 31; B) 28; C) 56; D) 14; E) 112.

21. Si $\dfrac{1}{\cos x} - tgx = 2$, entonces $\dfrac{1}{\cos x} + tgx$ es igual a:

A) 0’1; B) 0’2; C) 0’3; D) 0’4; E) 0’5.

22. Cuando dividimos el polinomio $P(x)$ entre x –19, obtenemos de resto 99 y cuando lo dividimos entre x – 99 obtenemos de resto 19. ¿Cuál es el resto de la división de $P(x)$ entre $(x-19)\cdot(x-99)$?

A) $-x+80$; B) $x+80$; C) $-x+118$; D) $x+118$; E) 0.

23. La sucesión $a_1, a_2, a_3, ...$ verifica que $a_1 = 19$, $a_{2000} = 99$ y para $n \geq 3$, a_n es la media aritmética de los $n - 1$ primeros términos. ¿Cuál es el valor de a_2 ?

A) 29; B) 59; C) 79; D) 99; E) 179.

24. ¿Cuál es el valor de la suma

$$\frac{1}{\log_2 100!} + \frac{1}{\log_3 100!} + \frac{1}{\log_4 100!} + ... + \frac{1}{\log_{100} 100!} ?$$

A) 0'01; B) 0'1; C) 1; D) 2; E) 10.

25. Una parábola de vértice (4, –5) corta al eje de abscisas en dos puntos, uno de abscisa positiva y otro negativa. Si la ecuación de la parábola es $y = ax^2 + bx + c$, ¿cuáles de los números a, b y c tienen que ser positivos?

A) Solamente a; B) Solamente b; C) Solamente c; D) Solamente a y b;
E) Ninguno de los tres.

V CONCURSO DE PRIMAVERA. 1er NIVEL (PRIMARIA). 1ª FASE. 7-3 01

1. La suma de dos enteros consecutivos es 2001. ¿Cuánto vale el producto de su suma por su diferencia?

A) 4002000; B) 2000; C) 2001; D) 3998000; E) Nada de lo anterior.

2. Si dos enteros positivos son distintos y ambos menores que 10, su producto podría ser:

A) 0; B) 1; C) 10; D) 100; E) 101.

3. Todos los primos que hay entre 30 y 100 tienen como cifra de las unidades:

A) 1; B) 3; C) Número par; D) 7; E) Número impar.

4. Un número entero es un cuadrado perfecto cuando puede expresarse como producto de un entero por sí mismo. Por ejemplo, 9 pues $9 = 3 \times 3$. ¿Cuántos cuadrados perfectos hay entre 37 y 10.005?

A) 50; B) 51; C) 93; D) 94; E) 100.

5. ¿En qué cifra acaba 3^{100}?

A) 1; B) 3; C) 9; D) 7; E) Nada de lo anterior.

6. Si la longitud de cada lado de un rectángulo es un número par, su perímetro no puede ser:

A) 16; B) 136; C) 180; D) 246; E) 300.

7. Cada uno de los seis "Hermanos Brothers" mide 1'80 m, pero cuando se sube uno encima de otro en determinados números acrobáticos, miden, entre los dos, 330 cm. ¿Cuántos cm mide la torre formada por los seis "Hermanos Brothers"?

A) 900; B) 930; C) 960; D) 990; E) 1020.

8. El perímetro del mayor de dos cuadrados es 8 veces el perímetro del pequeño. ¿Cuántos cuadrados pequeños tengo que utilizar para, sin montarse uno sobre otro, cubrir el cuadrado grande?

A) 4; B) 8; C) 16; D) 64; E) 128.

9. El otro día hice una lista de todos los números de 7 cifras que contenían exactamente 6 nueves. ¿Cuántos números tenía mi lista?

A) 7; B) 9; C) 62; D) 63; E) 90.

10. El precio de un bote de zumo es cinco veces el de un croissant. Si un bote de zumo cuesta 60 ptas más que 3 croissants, ¿cuánto cuesta un bote de zumo?

A) 100 ptas; B) 120 ptas; C) 150 ptas; D) 180 ptas; E) 200 ptas.

11. Un ascensor sale de la planta baja, desciende al 2º sótano, sube seis pisos, baja dos, sube tres, baja ocho y sube cuatro. ¿En qué piso se encuentra?

A) 1º; B) 2º; C) 3º; D) 4º; E) 5º.

12. Una ciudad tiene 100.000 habitantes en 1998. En el año 1999, la población aumentó un 4% y en el 2000 bajó un 4%. ¿Cuántos habitantes tenía a principio de 2001?

A) 100.000; B) 103.800; C) 96.240; D) 99.840; E) Nada de lo anterior.

13. En una clase, el 50% juegan al baloncesto, el 40% al tenis y el 10% a los dos deportes. ¿Cuántos no juegan a ninguno de los dos?

A) 10%; B) 20%; C) 30%; D) 40%; E) 0% .

14. Un libro tiene 216 páginas de 32 líneas. ¿Cuántas páginas tendría si tuviera 24 líneas en cada una?

A) 288; B) 162; C) 312; D) 292; E) 328.

15. En un mismo mes, tres domingos han caído en días pares. ¿En qué día de la semana ha caído el 20 de ese mes?

A) Lunes; B) Martes; C) Miércoles; D) Jueves; E) Nada de lo anterior.

16. En un torneo de ajedrez hay 6 jugadores. Cada jugador juega 3 partidas con cada uno de los otros. ¿Cuántas partidas se han jugado durante este torneo?

A) 18; B) 9; C) 36; D) 6; E) 45.

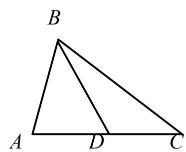
17. Un terreno está representado sobre un plano con una escala 1:2500 por un rectángulo de 64 mm de longitud y 48 mm de anchura. ¿Cuál es el área real del terreno?

A) 192 m^2; B) 1’92 hectáreas; C) 768 hectáreas; D) 7’68 hectáreas; E) 1’92 km^2.

18. Un peatón parte de una ciudad A a la velocidad de 5 km/hora. 1 hora 40 minutos después, un ciclista parte de A y lo alcanza 50 minutos más tarde. ¿Cuál es la velocidad media del ciclista?

A) 15 km/hora; B) 12’5 km/hora; C) 13’5 km/hora; D) 18 km/hora; E) 25 km/hora.

19. En el triángulo de la figura, los segmentos AD, BD y DC son iguales. ¿Cuánto mide el ángulo $A\hat{B}C$? (Con vértice en B).



A) 75º; B) 86º; C) 90º; D) 92º; E) Falta información.

20. ¿Qué ángulo forman las agujas del reloj a la 1 h 25'?

A) 100º; B) 107º 30'; C) 110º; D) 120º; E) 150º.

21. En los dos últimos Concursos de Primavera, Marta obtuvo 60 y 80 puntos. Si en el de este año obtiene 76 puntos, entonces su media...

A) Se mantiene igual; B) Aumenta en 2; C) Baja en 2; D) Aumenta en 1;

E) Baja en 1.

22. El número 9 tiene solamente 3 divisores (1, 3 y 9). ¿Cuál de estos números tiene solamente 3 divisores?

A) 81; B) 121; C) 225; D) 441; E) 625.

23. Tenemos una fracción $\frac{x}{y}$ de manera que si añadimos 8 al numerador y 12 al denominador, el valor de la fracción no varía. ¿Cuál podría ser la fracción $\frac{x}{y}$?

A) $\frac{1}{3}$; B) $\frac{5}{10}$; C) $\frac{9}{12}$; D) $\frac{10}{15}$; E) $\frac{12}{16}$.

24. Si 20 gatos comen 20 ratones en 20 días, ¿cuántos ratones comen 10 gatos en 10 días?

A) 5; B) 10; C) 20; D) 4; E) Nada de lo anterior.

25. En una clase hay 7 chicas por cada 5 chicos. Si el profesor reparte un día 90 caramelos a partes iguales entre todos y cada uno recibe 3, ¿cuántos caramelos le han sobrado al profesor?

A) 10; B) 18; C) 20; D) 22; E) 24.

V CONCURSO DE PRIMAVERA. 2º NIVEL (1º-2º ESO). 1ª FASE. 7-3-01

1. El resultado de 10 : 0’02 es:

A) 0’5; B) 200; C) 500; D) 50; E) 2000.

2. Dani se subió un día a un ascensor de la Torre Picasso. Después de subir 3 pisos, bajar 5, subir 7 y bajar 9, se encontró en el 23º piso. ¿En qué piso cogió el ascensor?

A) 1; B) 23; C) 19; D) 27; E) 25.

3. Sabiendo que 0’3 · 8 = 2’4, ¿cuánto valdrá 0’0003 × 0’8?

A) 0’024; B) 0’0024; C) 0’00024; D) 0’000024; E) 0’0000024.

4. La mitad de la tercera parte es

A) $\frac{1}{2}$; B) $\frac{1}{5}$; C) $\frac{3}{2}$; D) $\frac{1}{6}$; E) $\frac{2}{5}$.

5. ¿Entre qué número hay que dividir $\frac{1}{4}$ para obtener 5 como resultado?

A) $\frac{1}{5}$; B) 5; C) 20; D) $\frac{1}{20}$; E) Nada de lo anterior.

6. En un recipiente hay 13’42 litros de agua. Después de quitar 780 mililitros y añadir 57 centilitros, ¿cuántos litros de agua quedan?

A) 13’32; B) 13’21; C) 13’63; D) 15’52; E) 11’32.

7. Un gato debe tomar al día 250 mililitros de leche que viene en un recipiente de base rectangular de 25 × 9 × 20 cm. ¿Cuántos días le dura un recipiente?

A) 10; B) 12; C) 14; D) 16; E) 18.

8. Tengo 1920 ptas en mi bolsillo en moneda de 5, 10, 25, 100 y 500 ptas. Si tengo el mismo número de monedas de cada tipo, ¿cuántas monedas tengo en total?

A) 10; B) 15; C) 20; D) 25; E) 30.

9. En un juego de sí-no llevo acertadas el 80% de las 450 primeras preguntas. Si, al continuar jugando, quiero elevar mi porcentaje de aciertos a un 90% con el menor número de preguntas, ¿cuántas tengo que acertar seguidas?

A) 10; B) 45; C) 50; D) 250; E) 450.

10. ¿Cuántos números enteros desde 10 a 99 dan 9 como suma de sus cifras?

A) 9; B) 10; C) 18; D) 90; E) 99.

11. Si en una clase de 30 estudiantes, 20 llevan zapatillas, 15 son del Madrid y 13 llevan zapatillas y son del Madrid, ¿cuántos hay que ni llevan zapatillas ni son del Madrid?

A) 1; B) 2; C) 3; D) 4; E) 8.

12. En un montón hay 560 naranjas que metemos en bolsas de dos tipos: de 8 y 20 naranjas. Si al final tenemos 46 bolsas, el número de bolsas grandes está entre:

A) 10 y 14; B) 14 y 18; C) 18 y 24; D) 24 y 30; E) 30 y 34.

13. Casi todos los números enteros comprendidos entre 110 y 120 (ambos inclusive) pueden colocarse en fila, 119, 112, 116, 118, 114, 117, 111, 120, 115, 110, de manera que el máximo común divisor de cada dos consecutivos es mayor que 1. Si queremos construir una fila lo más larga posible y con esas características con los números comprendidos entre 31 y 39, ¿cuántos se quedarán fuera?

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4.

14. Un pintor que está subido a una escalera, observa que el número de peldaños que hay debajo de él es el doble de los que hay por encima. Si después de bajar 8 peldaños resulta que hay por debajo tantos como por encima, ¿cuántos peldaños tiene la escalera?

A) 27; B) 31; C) 32; D) 48; E) 49.

15. Considera todos los números mayores que 8 que verifican la propiedad de que al dividirlos por 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 dan siempre de resto 1. ¿Cuál es la suma de los dos más pequeños con esta propiedad?

A) 842; B) 2522; C) 3362; D) 912; E) 2532.

16. Un avión hace un viaje de 1968 km en 2 horas y 40 minutos. ¿Cuál ha sido la velocidad media alcanzada en km/hora?

A) 738; B) 744; C) 755; D) 760; E) 843.

17. Un equipo de baloncesto dispone de 8 jugadores de los que, como sabes, siempre hay 5 en la cancha. Si en un partido de 48 minutos, todos jugaron la misma cantidad de minutos, ¿cuántos minutos jugó cada uno?

A) 6; B) 30; C) 24; D) 32; E) 36.

18. En una competición escolar de salto de longitud, la media de los que pasaron la primera ronda fue 6'5 metros, la media de los que no la pasaron fue 4'5 m y la media de todos fue 4'9 m. ¿Qué tanto por ciento de los competidores pasó la primera ronda?

A) 4; B) 16; C) 20; D) 25; E) 55.

19. ¿Para cuántos enteros positivos n es verdadero que $\dfrac{n+17}{n-7}$ es un número entero positivo?

A) 4; B) 5; C) 6; D) 7; E) 8.

20. 7 croissants pesan lo mismo que 4 ensaimadas, y 5 palmeras pesan lo mismo que 6 ensaimadas. Si e, c y p son los pesos, en gramos, de una ensaimada, un croissant y una palmera, respectivamente, entonces

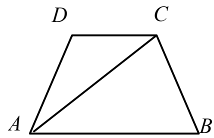
A) $c<p<e$; B) $p<c<e$; C) $p<e<c$; D) $c<e<p$; E) $e<p<c$.

21. Pintamos las caras de un octaedro regular de manera que si dos caras tienen un lado común, están pintadas de colores diferentes. ¿Cuál es el mínimo número de colores que necesitamos?

A) 2; B) 3; C) 4; D) 5; E) 6.

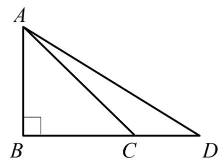
22. En el trapecio de la figura nos dicen que $AD = DC = CB$ y que $AB = AC$. ¿Cuánto mide el ángulo D?

A) 108º; B) 120º; C) 130º; D) 150º; E) Faltan datos.



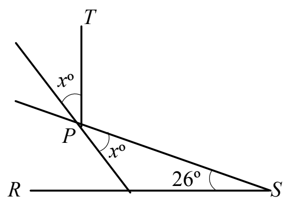
23. En el dibujo adjunto, $AB = 3$, $BD = 5$ y $AB = BC$. ¿Cuánto vale el área del triángulo ACD?

A) 6; B) 3; C) $\dfrac{9}{2}$; D) 8; E) Nada de lo anterior.



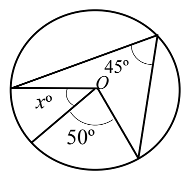
24. En el diagrama adjunto, los ángulos señalados con x^o son iguales y PT es perpendicular a RS. ¿Cuánto vale x?

A) 26; B) 32; C) 37; D) 38; E) 45.



25. En el dibujo que ves, O es el centro del círculo. ¿Cuánto vale x?

A) 40; B) 35; C) 30; D) 25; E) 20.



V CONCURSO DE PRIMAVERA. 3er NIVEL (3º-4º ESO). 1ª FASE. 7-3-01

1. En un juego de sí-no, acerté el 80% de las 450 primeras preguntas. Si, al continuar jugando, quiero elevar mi porcentaje de aciertos a un 90% con el menor número de preguntas, ¿cuántas preguntas tengo que acertar seguidas?

A) 10; B) 45; C) 50; D) 250; E) 450.

2. Si en una clase de 30 estudiantes, 20 llevan zapatillas, 15 son del Madrid y 13 llevan zapatillas y son del Madrid. ¿Cuántos hay que ni llevan zapatillas ni son del Madrid?

A) 1; B) 2; C) 3; D) 4; E) 8.

3. En un montón hay 560 naranjas que metemos en bolsas de dos tipos: de 8 y 20 naranjas. Si al final tenemos 46 bolsas, el número de bolsas grandes está entre:

A) 10 y 14; B) 14 y 18; C) 18 y 24; D) 24 y 30; E) 30 y 34.

4. Un pintor que está subido en una escalera, observa que el número de peldaños que hay debajo de él es el doble de los que hay por encima. Si después de bajar 8 peldaños resulta que tiene por debajo tantos como por encima, ¿cuántos peldaños tiene la escalera?

A) 27; B) 31; C) 32; D) 48; E) 49.

5. ¿Para cuántos enteros positivos n, $\dfrac{n+17}{n-7}$ es un número entero positivo?

A) 4; B) 5; C) 6; D) 7; E) 8.

6. p, q, r, s y t representan 5 números. La media de p, q y r es 8 y la media de p, q, r, s y t es 7. ¿Cuál es la media de s y t?

A) 4'5; B) 5; C) 5'5; D) 6; E) 6'5.

7. La edad media de los integrantes de un grupo de boy-scouts aumentaría en 1 año si abandonaran el grupo 5 chicos de 9 años de edad cada uno o si se unieran al grupo 5 chicos de 17 años cada uno. ¿Cuántos chicos componen dicho grupo?

A) 12; B) 15; C) 18; D) 20; E) Nada de lo anterior.

8. Llenamos una cuadrícula de p filas y q columnas con todos los enteros desde 1 a pq. Los escribimos en orden creciente, llenando en primer lugar la fila 1, luego la fila 2, etc. Si el 20 está en la tercera fila, el 41 en la 5ª y el 103 en la última, halla $p+q$.

A) 21; B) 22; C) 23; D) 24; E) 25.

9. En una epidemia de gripe faltaron a clase 15 chicos el lunes, 12 el martes y 9 el miércoles. Si entre los tres días hubo 22 estudiantes que faltaron a clase al menos un día, ¿cuántos estudiantes como máximo faltaron los tres días?

A) 5; B) 6; C) 7; D) 8; E) 9.

10. ¿Cuál es el mayor resto posible cuando dividimos un número de dos cifras entre la suma de sus cifras?

A) 13; B) 14; C) 15; D) 16; E) 17.

11. Emparejamos los 5 impares que hay desde –5 hasta 4 con los 5 pares y llamamos N a la suma de los productos de las parejas. ¿Cuál es el mínimo valor que puede tomar N?

A) –41; B) –40; C) –28; D) –10; E) 0.

12. El entero positivo N tiene exactamente 6 divisores, incluyendo 1 y N. Si el producto de 5 de éstos es 648, ¿cuál de los siguientes enteros tiene que ser el otro divisor de N?

A) 4; B) 9; C) 12; D) 16; E) 24.

13. ¿Cuántos divisores primos tiene $10^4 - 1$? (Recuerda que 1 no es un número primo).

A) 1; B) 2; C) 3; D) 4; E) 5.

14. Una pareja de novios escriben sus edades una a continuación de la otra, formando un número de 4 cifras que resulta ser un cuadrado perfecto, k^2. Nueve años más tarde repiten la operación -en el mismo orden- y ahora les vuelve a resultar otro número de 4 cifras, cuadrado de otro entero, 9 unidades mayor que el entero k de la vez anterior. Cuando lo hicieron por primera vez, uno de ellos tenía:

A) 18 años; B) 19 años; C) 20 años; D) 21 años; E) 22 años.

15. Si $\frac{a+b}{a-b} = \frac{7}{4}$, entonces $\frac{a^2}{b^2}$ es igual a:

A) $\frac{11}{3}$; B) $\frac{121}{9}$; C) $\frac{121}{16}$; D) $\frac{49}{9}$; E) $\frac{49}{16}$.

16. 7 croissants pesan lo mismo que 4 ensaimadas, y 5 palmeras pesan lo mismo que 6 ensaimadas. Si e, c y p son los pesos, en gramos, de una ensaimada, un croissant y una palmera, respectivamente, entonces

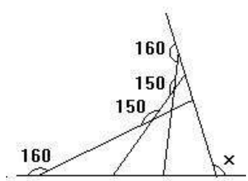
A) $c < p < e$; B) $p < c < e$; C) $p < e < c$; D) $c < e < p$; E) $e < p < c$.

17. El resultado de $2001^2 - 2000^2 + 1999^2 - 1998^2 + \dots\dots + 3^2 - 2^2 + 1^2 - 0^2$ es:

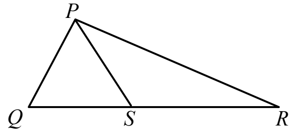
A) 1001^2; B) 2002^2; C) $2002 \cdot 1001$; D) $1001 \cdot 2001$; E) Nada de lo anterior.

18. En la figura adjunta damos la medida, en grados, de algunos ángulos. ¿Cuánto vale x?

A) 100; B) 110; C) 120; D) 130; E) 150.

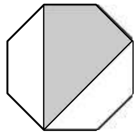


19. En el triángulo PQR, S es un punto de QR de forma que el área del triángulo PQS es igual al área del triángulo PSR. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones tiene que ser verdadera?



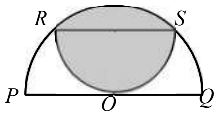
A) $PS \perp QR$; B) $QS = SR$; C) $PR = QR$; D) $2PS = QR$; E) $PQ^2 + PR^2 = QR^2$.

20. El octógono regular de la figura tiene 4 cm de lado. ¿Cuál es el área, en cm^2, de la región sombreada?



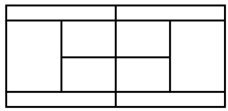
A) 16; B) $8\left(1+\sqrt{2}\right)$; C) 24; D) $16\left(1+\sqrt{2}\right)$; E) 32.

21. En la figura adjunta, las curvas $PRSQ$ y ROS son semicircunferencias y RS es paralela a PQ. Si el radio del círculo grande es 1 metro, ¿cuál es el área, en m^2, de la región sombreada?



A) $\dfrac{\pi-1}{2}$; B) $\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$; C) $\dfrac{\pi}{4}$; D) 1; E) $\dfrac{\pi}{2}-1$.

22. ¿Cuántos rectángulos hay en el dibujo de una pista de tenis?

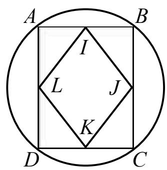


A) 19; B) 23; C) 29; D) 30; E) 31.

23. ¿Cuántos enteros mayores que 10 y menores que 100 aumenta en 9 unidades cuando se intercambian sus cifras?

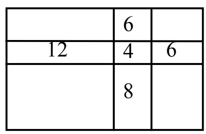
A) 1; B) 4; C) 8; D) 9; E) 10.

24. En un círculo de 3 cm de radio, inscribimos un rectángulo $ABCD$ y llamamos I, J, K, L a los puntos medios de sus lados. ¿Cuál es, en cm, el perímetro del rombo $IJKL$?



A) 6; B) 9; C) 12; D) $4\sqrt{3}$; E) Depende del rectángulo.

25. Un rectángulo grande está dividido en 9 rectángulos pequeños como indica el dibujo. En el interior de algunos de estos rectángulos pequeños aparece su perímetro, en cm. ¿Cuál es, en cm, el perímetro del rectángulo grande?



A) 26; B) 28; C) 36; D) 30; E) 24.

V CONCURSO DE PRIMAVERA. 4º NIVEL (BACHILLERATO LOGSE - COU). 1ª FASE: 7-3-01

1. El valor de $\left(0'2+\dfrac{1}{0'2}\right)^2$ es:

A) 27'4; B) 27'04; C) 25'44; D) 25'04; E) 5'408.

2. En una clase de 30 estudiantes, 20 llevan zapatillas, 15 son del Madrid y 13 llevan zapatillas y son del Madrid. ¿Cuántos hay que ni llevan zapatillas ni son del Madrid?

A) 1; B) 2; C) 3; D) 4; E) 8.

3. En un montón hay 560 naranjas que metemos en bolsas de dos tipos: de 8 y 20 naranjas. Si al final tenemos 46 bolsas, el número de bolsas grandes está entre:

A) 10 y 14; B) 14 y 18; C) 18 y 24; D) 24 y 30; E) 30 y 34.

4. Llenamos una cuadrícula de p filas y q columnas con todos los enteros desde 1 hasta $p \cdot q$. Los escribimos en orden creciente, llenando en primer lugar la fila 1, luego la fila 2, etc. Si el 20 está en la 3ª fila, el 41 en la 5ª y el 103 en la última, halla $p+q$.

A) 21; B) 22; C) 23; D) 24; E) 25.

5. En una epidemia de gripe, faltaron a clase 15 chicos el lunes, 12 el martes y 9 el miércoles. Si entre los tres días hubo 22 estudiantes que faltaron a clase al menos un día, ¿cuántos estudiantes, como máximo, faltaron los tres días?

A) 5; B) 6; C) 7; D) 8; E) 9.

6. Un recolector de fresas tiene que enviar 70 kg al mercado. Si usa cajas más grandes que las normales, cada una de 2 kg de más, tiene que utilizar 4 cajas menos. ¿Cuál es la capacidad, en kg, de las cajas normales?

A) 2; B) 5; C) 7; D) 10; E) 14.

7. $123456^2 + 123456 + 123457$ es el cuadrado de:

A) 123457; B) 123463; C) 123467; D) 123473; E) 123477.

8. ¿Cuántos enteros positivos de dos cifras son menores que el producto de sus cifras?

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 45.

9. Si $f(x) = |x| + |x+1| + |x-1|$, el valor mínimo para $f(x)$ es:

A) 1; B) 3; C) 4; D) 2; E) 0.

10. ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $\frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}+x^2-4=0$

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4.

11. El número de soluciones distintas, según los valores de a, del sistema de ecuaciones $x^2-y^2=0$; $(x-a)^2+y^2=1$ puede ser:

A) 0, 1, 2, 3, 4 ó 5; B) 0, 1, 2 ó 4; C) 0, 2, 3 ó 4; D) 0, 2 ó 4; E) 2 ó 4.

12. El parlamento de un país cuenta con 2000 diputados. El $12'\overline{12}$ % de los asistentes a una reunión son rubios y el $23'\overline{423}$ fuman. El número de diputados que faltaron a esa reunión está entre:

A) 100 y 300; B) 300 y 500; C) 500 y 700; D) 700 y 900; E) 900 y 1000.

13. Si n es un entero positivo, determinar para qué valor de n se satisface la ecuación

$$\frac{n^3-3}{n^3}+\frac{n^3-4}{n^3}+\frac{n^3-5}{n^3}+\frac{n^3-6}{n^3}+\cdots+\frac{5}{n^3}+\frac{4}{n^3}+\frac{3}{n^3}=169$$

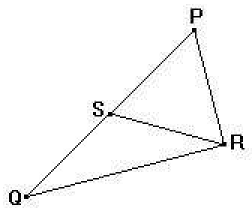
A) 5; B) 7; C) 9; D) 11; E) 13.

14. Una chica tarda 15 segundos en bajar una de las escaleras mecánicas del Metro. Al día siguiente, la escalera está estropeada y tarda 20 segundos, bajando a igual velocidad que el día anterior. ¿Cuántos segundos tardaría en bajar si se quedara parada en la escalera cuando ésta baja?

A) 40; B) 50; C) 35; D) 60; E) 65.

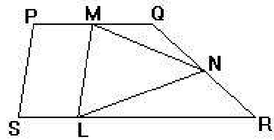
15. El triángulo PRS es equilátero y su área es la mitad que la del triángulo PQR. ¿Cuántos grados mide el ángulo PRQ?

A) 75; B) 80; C) 90; D) 100; E) 120.

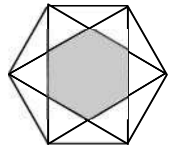


16. En el trapecio $PQRS$, PQ // SR y $SR = 2PQ$. El punto M es el punto medio de PQ, N es el punto medio de QR y L es un punto de SR tal que $LR = 3LS$. Si $PQ = 2$, el cociente entre el área del triángulo LMN y el área del trapecio $PQRS$ es:

A) $\frac{1}{2}$; B) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; C) $\frac{1}{4}$; D) $\frac{2}{3}$; E) $\frac{1}{3}$.

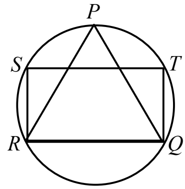


17. Unimos los vértices alternos de un hexágono regular. ¿Qué fracción del área total del hexágono está sombreada?



A) $\frac{1}{3}$; B) $\frac{1}{2}$; C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; D) $\frac{4}{9}$; E) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

18. En un círculo de radio 1, inscribimos un triángulo equilátero PQR. Si S y T son puntos de la circunferencia, de forma que $QRST$ es un rectángulo, ¿cuál es el área, en unidades cuadradas, de este rectángulo?

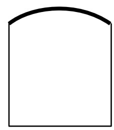


A) 3; B) $\frac{3}{2}$; C) 2; D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; E) $\sqrt{3}$.

19. Dos de los ángulos de un triángulo, inscrito en una circunferencia de radio 6, valen 15º y 60º. ¿Cuál es el área del triángulo?

A) $9\sqrt{3}$; B) $\frac{27\sqrt{3}}{4}$; C) $\frac{16\sqrt{2}}{3}$; D) $\frac{20\sqrt{2}}{3}$; E) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$.

20. Una ventana tiene forma de cuadrado, de 60 cm de lado, coronado por un segmento de un círculo de radio 50 cm. Si el segmento circular es menor que un semicírculo, ¿cuál es, en cm, la altura de la ventana?



A) 70; B) 80; C) 85; D) 90; E) 100.

21. El número de soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} 2x = \cos x$, con $0º \le x < 360º$, es:

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4.

22. Entre 8 estudiantes y 6 profesores tenemos que elegir un comité de 6 personas que contenga al menos 3 estudiantes y 2 profesores. ¿De cuántas formas podemos elegir el tal comité?

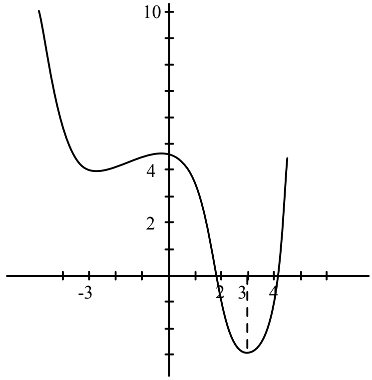
A) 1050; B) 1120; C) 7560; D) 840; E) 2170.

23. En una estantería de 7 huecos de una biblioteca hay 7 libros de tres autores distintos; 3 del autor A, 3 del B y 1 del autor C. Si están colocados al azar, ¿cuál es la probabilidad de que todos los volúmenes de cada autor estén juntos?

A) $\frac{3}{70}$; B) $\frac{1}{140}$; C) $\frac{3}{140}$; D) $\frac{1}{70}$; E) $\frac{1}{35}$.

24. ¿Cuántos enteros positivos b verifican la propiedad de que $\log_b 729$ es un entero positivo?

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4.



25. La gráfica adjunta muestra un trozo de la curva definida por la función polinómica $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$. ¿Cuál de los siguientes números es el más pequeño?

A) $P(0)$;

B) Suma de los coeficientes de P;

C) Mínimo de $P(x)$ en [–2, 1];

D) $P'(1) \cdot P'\left(-\frac{3}{2}\right)$;

E) $\lim_{x \to -4} P(x)$.

V CONCURSO DE PRIMAVERA. 1er NIVEL (5º-6º PRIMARIA). 2ª FASE. 21-04-01

1. El número que hay que sumarle a $\frac{1}{2}$ para que nos dé $\frac{5}{8}$ es:

   A) $\frac{1}{8}$; B) $\frac{2}{3}$; C) $\frac{3}{5}$; D) $\frac{9}{8}$; E) Nada de lo anterior.

2. Para llenar los $\frac{3}{5}$ de una piscina hacen falta 9 horas. ¿Cuántas horas hacen falta para llenar el resto?

   A) 3 B) 4; C) 5; D) 6; E) 7.

3. De los siguientes números, el más próximo a 299’03978 × 301’123456789 es

   A) 60.000; B) 90.000; C) 6.000; D) 50.000; E) 9.000.

4. Un entero menor que –3 es

   A) –2; B) $-\frac{35}{12}$; C) $-\frac{7}{2}$; D) –25; E) –3’1.

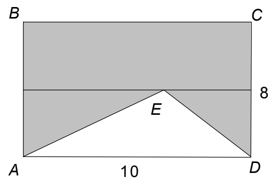
5. Si $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ y $a=2$ y $b=3$, c verifica:

   A) Está entre 0 y 1; B) Es 1; C) Está entre 1 y 2; D) Está entre 2 y 4;
   E) Es mayor que 4.

6. Un jardín de 10 m × 20 m está rodeado por un paseo de 1 m de ancho. ¿Cuál es, en m^2, el área del paseo?

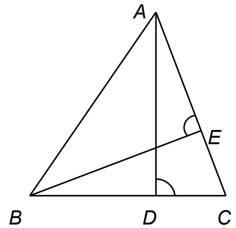
   A) 231; B) 31; C) 264; D) 64; E) Nada de lo anterior.

7. El rectángulo de la figura mide 10 cm de largo y 8 cm de ancho y el punto E está en el segmento paralelo a BC y AD que dista igual de ambos. ¿Cuál es, en cm^2, el área de la zona sombreada?



   A) 20; B) 40; C) 60; D) 80; E) 100.

8. En el triángulo ABC, AD=2, BC=6, AC=4, BE es perpendicular a AC, y AD es perpendicular a BC. ¿Cuánto mide BE?



   A) $\frac{4}{3}$; B) 2; C) 3; D) $\frac{2}{3}$; E) $\frac{8}{9}$.

9. Un rectángulo mide de largo 7 cm más que de ancho. Si su perímetro es 34 cm, ¿cuál es, en cm^2, su área?

   A) 50; B) 60; C) 70; D) 80; E) Nada de lo anterior.

10. Un triángulo rectángulo tiene catetos de longitudes 3 y 4 centímetros. ¿Cuál es, en cm^2, el área de otro rectángulo cuyos catetos son cada uno el triple que los del primero?

    A) 36; B) 18; C) 54; D) 60; E) Nada de lo anterior.

11. En unas elecciones, Antonio recibió 10.575 votos, Beatriz 7.990 votos y Carlos 2.585 votos. Si votó el 90% del censo, el número de electores de éste era:

    A) 19.035; B) 49.572; C) 23.265; D) 21.150; E) 23.500.

12. Trabajando 8 horas al día, Juan hizo una obra en 12 días. ¿Cuántos días habría empleado si hubiera trabajado solamente 6 horas cada día?

    A) 96; B) 16; C) 9; D) 48; E) 72.

13. Juan tiene 24 monedas más que su primo Jorge, que tiene 15 monedas más que Javier. Si entre los tres tienen 99 monedas, ¿cuántas tiene Javier?

    A) 15; B) 20; C) 39; D) 45; E) 60.

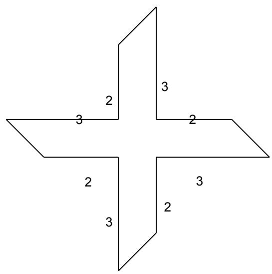
14. En una carrera de 1 kilómetro, *Superman* sale 5 segundos antes que *Billy el rápido*. Si *Superman* hace 3 Km en 1 minuto y *Billy el rápido* 5 km en 1 minuto, el resultado de la carrera fue:

    A) Ganó *Supermán* por 3 segundos; B) Empataron;
    C) Ganó *Superman* por 8 segundos; D) Ganó *Billy el rápido* por 3 segundos;
    E) Ganó *Billy el rápido* por 8 segundos.

15. ¿Cuántos números primos de dos cifras hay tal que la suma de sus cifras es menor que 5?

    A) 2; B) 3; C) 4; D) 5; E) Nada de lo anterior.

16. La figura que te mostramos, tiene una anchura uniforme de 1 cm. Las otras dimensiones son, en centímetros, las que te indicamos. ¿Cuál es, en cm^2, su área?

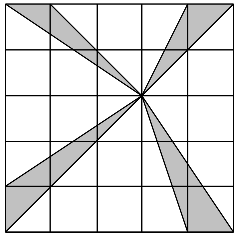


    A) 10; B) 11; C) 12; D) 13; E) 14.

17. Cuatro gatos y tres gatitos pesan 44 Kg. Tres gatos y dos gatitos pesan 32 Kg. ¿Cuántos kilos pesan dos gatos y un gatito?

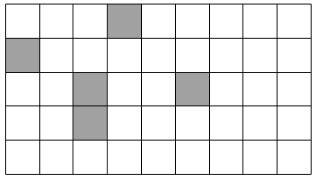
    A) 12; B) 16; C) 20; D) 24; E) 28.

18. ¿Cuál es el cociente entre el área sombreada y el área no sombreada?



A) $\frac{9}{25}$; B) $\frac{2}{5}$; C) $\frac{1}{4}$; D) $\frac{11}{25}$; E) Nada de lo anterior.

19. En la figura hay muchos más cuadrados en blanco que sombreados. El número de cuadrados que debo sombrear, además de los que ya lo están, para que al final el número de cuadrados sombreados resulte la mitad que el número de cuadrados sin sombrear, está comprendido entre:



A) 1 y 4; B) 5 y 8; C) 6 y 9; D) 8 y 11; E) 11 y 15.

20. Yo soy un número menor que 40. La cifra de mis unidades es el doble de la cifra de mis decenas y la suma de mis cifras es par. ¿Cuál es el producto de mis cifras?

A) 6; B) 8; C) 9; D) 10; E) 12.

21. En un colegio hay 35 estudiantes y cada uno tiene una taquilla. Todos los años, a final de curso, montan un juego algo extraño: se colocan en orden alfabético, va el primero y abre todas las taquillas. A continuación, el segundo las cierra de dos en dos; o sea, cierra la 2, 4, 6, etc. Luego va el tercero y acude a las taquillas números 3, 6, 9, 12, etc. y las abre si están cerradas y las cierra si están abiertas, luego el cuarto va a las taquillas 4, 8, 12, 16, etc. y hace lo mismo (las abre o las cierra según estén cerradas o abiertas) y así continúa el juego hasta pasar todos. Al final, la última taquilla abierta es la número:

A) 22; B) 23; C) 24; D) 25; E) 26.

22. Alicia, Beatriz, Carlos y David se ponen en fila. David no es el primero. Beatriz está entre Alicia y Carlos y Alicia está entre David y Beatriz. Si le asignamos el 1 al primero, el 2 al segundo, el 3 al tercero y el 4 al cuarto, el producto de los números de Alicia y Beatriz es:

A) 2; B) 3; C) 4; D) 6; E) 12.

23. En España se utiliza un convenio para escribir una fecha: en primer lugar el día y luego el mes; por ejemplo 18-06 es el 18 de Junio, pero en EEUU el convenio es al revés, así pues 04-01 es 1 de Abril. ¿Cuántos días al año pueden plantear dudas según se escriban en un sitio o en otro?

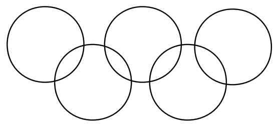
A) 12; B) 144; C) 221; D) 132; E) Nada de lo anterior.

24. La tabla muestra la distancia entre 3 ciudades. Si $AB + BC = AC$, ¿Cuál es la distancia que separa las ciudades A y B?

	A	B	C
A	-		21
B		-	
C		5	-

A) 14; B) 16; C) 21; D) 28; E) 35.

25. Si el área de cada círculo de la figura es de 1cm^2 y el área común a cualesquiera dos de ellos es $\frac{1}{8}\text{ cm}^2$, ¿cuál es el área de la región encerrada por los cinco círculos?



A) 4 cm^2; B) $\frac{9}{2}\text{cm}^2$; C) $\frac{35}{8}\text{ cm}^2$; D) $\frac{39}{8}\text{ cm}^2$; E) $\frac{19}{4}\text{ cm}^2$.

V CONCURSO DE PRIMAVERA. 2º NIVEL (1º-2º ESO). 2ª FASE. 21-04-01

1. De los siguientes números, ¿cuál es el más próximo a $\frac{39}{18}+\frac{20}{9}+\frac{2}{3}$?

   A) 2 B) 3 C) 4; D) 5; E) 6.

2. En una balanza hemos puesto 11,5 kg de palillos de 5 g cada uno. ¿Cuántos palillos palillos hay?

   A) 2.300; B) 230; C) 23.000; D) 230.000; E) 4.600.

3. En una pastelería venden croissants a 30 pts cada uno, o bien en paquetes de 7, a 100 ptas. el paquete o en paquetes de 12 a 180 ptas. el paquete. Mi madre me da 1000 ptas. para que compre 60 croissants y me dice que me quede con la vuelta. Yo quiero llegar a casa con 60 croissants como mínimo y con la mayor cantidad de dinero de vuelta. ¿Cuál es esta cantidad?

   A) 90 ptas.; B) 100 ptas.; C) 110 ptas.; D) 120 ptas.; E) 130 ptas..

4. Dani, Rocío y Jaime compraron un regalo cada uno para su madre en el día de su cumpleaños y a la hora de pagar, decidieron sumar los precios y repartir a partes iguales entre los tres. Si cada uno hubiera pagado el precio de su regalo, Dani habría pagado 100 ptas. más, Rocío 300 ptas. menos y Jaime habría pagado 2.000 ptas.. ¿Cuál fue el coste total de los tres regalos?

   A) 5.400 ptas.; B) 6.000 ptas.; C) 6.600 ptas.; D) 4.800 ptas.; E) 5.700 ptas..

5. El número 119 tiene una propiedad muy curiosa: Cuando lo divido entre 2 me da resto 1; si lo divido entre 3 el resto es 2, entre 4 el resto es 3, entre 5 el resto es 4 y cuando lo divido entre 6 me da de resto 5. ¿Cuántos números de 3 cifras, además del 119 tienen esta propiedad?

   A) 0; B) 1; C) 3 D) 7; E) 14

6. Si sumo cuatro números impares consecutivos y el más pequeño es $2m-1$, la suma es igual a:

   A) $8m-10$; B) $8m+2$; C) $8m+8$; D) $8m+10$; E) $8m+3$.

7. Un grupo de amigos decide comprar un balón de la *Champions league* entre todos. Al final, dos se descuelgan del acuerdo y los restantes tienen que pagar 100 pesetas más cada uno. Si cada uno pagó una cantidad entera de pesetas y el precio del balón estaba entre 10.000 y 12.000 pesetas, ¿entre cuántos amigos compraron el balón?

   A) 12; B) 13; C) 14; D) 15; E) 16.

8. En este cuadrado mágico el producto de los elementos de cada fila, columna o diagonal es siempre el mismo. Si está formado por enteros positivos, ¿cuánto vale x?

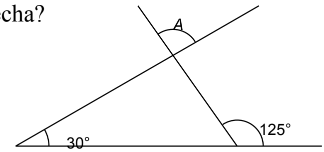
5		x
4		
	1	

A) 2; B) 4; C) 5; D) 16; E) 25.

9. Si m es un número impar y n es un número par, ¿qué número de los siguientes es impar?

A) $2m+5n$; B) $4m+3n$; C) $3m+4n$; D) $4m+2n$; E) $6(m+n)$.

10. ¿Cuántos grados mide el ángulo A del dibujo de la derecha?

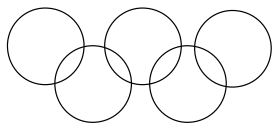


A) 75º; B) 85º; C) 95º; D) 125º; E) 155º.

11. El menor de los ángulos de un triángulo es de 10º. Construimos un triángulo mayor duplicando cada lado. ¿Cuánto mide ahora el ángulo más pequeño?

A) 10º; B) 20º; C) 30º; D) 40º E) 80º.

12. Si el área de cada círculo de la figura es de 1 cm^2 y el área común a cualesquiera dos de ellos es $\frac{1}{8}$ cm^2, ¿cuál es el área de la región encerrada por los cinco círculos?



A) 4 cm^2; B) $\frac{9}{2}$ cm^2; C) $\frac{35}{8}$ cm^2; D) $\frac{39}{8}$ cm^2; E) $\frac{19}{4}$ cm^2.

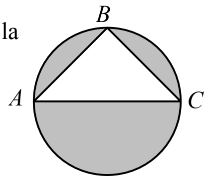
13. Si x personas hacen un trabajo en d días, ¿cuántos días necesitarían y personas para hacer el mismo trabajo?

A) $\frac{x}{y \cdot d}$; B) $\frac{x \cdot d}{y}$; C) $\frac{y}{x \cdot d}$; D) $\frac{y \cdot d}{x}$; E) $\frac{x \cdot y}{d}$.

14. Si $\frac{10+1}{20+2} = \frac{10}{20} + m$, entonces m debe ser

A) 0; B) $\frac{1}{2}$; C) 1; D) 2; E) Nada de lo anterior.

15. El segmento AC es un diámetro del círculo que se muestra en la figura y el triángulo ABC es isósceles. Si $AC = 10$, ¿cuál es el área de la región sombreada?



A) $25\pi - 25$; B) $25\pi - 50$; C) $100\pi - 25$;
D) $100\pi - 50$; E) $50\pi - 50$.

16. Utilizando solamente las cifras 1 y 2, ¿cuántos números de 4 cifras podremos formar de manera que todos tengan algún 1 y algún 2?

A)10 B) 12 C) 14 D) 15 E) 16

17. ¿Cuántos números enteros positivos menores que 900 son múltiplos de 7 y acaban en 2?

A) 13; B) 12; C) 11; D) 10; E) 14.

18. En un colegio hay 35 estudiantes y cada uno tiene una taquilla. Todos los años, a final de curso, montan un juego algo extraño: se colocan en orden alfabético, va el primero y abre todas las taquillas. A continuación, el segundo las cierra de dos en dos; o sea, cierra la 2, 4, 6, etc. Luego va el tercero y acude a las taquillas números 3, 6, 9, 12, etc. y las abre si estaban cerradas y las cierra si estaban abiertas, luego el cuarto va a las taquillas 4, 8, 12, 16, etc. y hace lo mismo (las abre o las cierra según estén cerradas o abiertas) y así continúa el juego hasta pasar todos. Al final, la última taquilla abierta es la número:

A) 22; B) 23; C) 24; D) 25; E) 26.

19. Si $\frac{p}{q} = -1$, $p + q$ es igual a:

A) $2p$; B) $2q$; C) $-2p$; D) $-2q$; E) 0.

20. Un ciclista va de excursión y cuando lleva recorrido un tercio del camino, para a comer un poco. Si en ese momento le faltan aún 11 km para llegar a la mitad del camino, ¿cuántos kilómetros tiene la excursión completa?

A) 132; B) 66; C) 44; D) 33; E) 22.

21. En un cumpleaños 15 chicos comieron patatas, 12 comieron gusanitos y 10 comieron ambas cosas. Si tres no comieron nada, ¿cuántos chicos había en ese cumpleaños?

A) 20; B) 40; C) 35; D) 30; E) 18.

22. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ con $c \neq d$, ¿cuál de las siguientes igualdades no es verdadera?

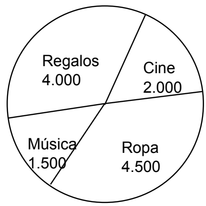
    A) $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$; B) $a^2d^2=b^2c^2$; C) $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$; D) $\frac{a}{d}=\frac{b}{c}$; E) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

23. En tres árboles hay 15 jilgueros y 14 gorriones. Cada árbol tiene al menos 4 jilgueros y 2 gorriones y ningún árbol tiene más gorriones que jilgueros. ¿Cuántos pájaros hay como mucho en el árbol que más tenga?

    A) 14; B) 12; C) 13; D) 15; E) 11.

24. Alicia ha gastado este mes 12.000 pesetas de sus ahorros, que ha repartido como se observa en el diagrama. Si el ángulo de cada sector es proporcional al gasto correspondiente, ¿cuántos grados mide el ángulo del sector dedicado a música?

    A) 40º; B) 45º; C) 50º; D) 55º; E) 60º.



25. Dani y Pedro colaboran en una campaña de plantación de árboles que ha organizado el Ayuntamiento. El primer día plantaron entre los dos 39 árboles. Dani no pudo ir el segundo día, pero Pedro trabajó al mismo ritmo que el primer día y, al acabar, llevaban entre los dos días 60 árboles plantados. ¿Cuántos árboles plantó Dani?

    A) 17; B) 18; C) 19; D) 20; E) 21.

V CONCURSO DE PRIMAVERA. 3er NIVEL (3º- 4º ESO). 2ª FASE. 21-04-01

1. De los siguientes números, ¿cuál es el más pequeño?

   A) $0'4^2$; B) $0'5^2$; C) $0'5^{-1}$; D) 5^{-1}; E) $\sqrt{0'25}$.

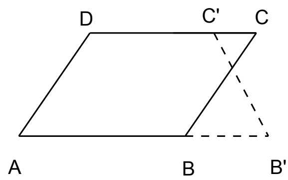
2. ¿Cuántos números enteros entre 2 y 1000 se pueden escribir como potencias de base un número impar no primo y exponente un número entero mayor que 1?

   A) 2; B) 3; C) 4; D) 5; E) 6.

3. ¿Para cuántos números enteros n es $1-\sqrt{1-(n+1)^2}$ un número entero?

   A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) Para infinitos n.

4. Considera el paralelogramo $ABCD$ de la figura en el que el lado DC lo hemos acortado un 25% y el lado AB lo hemos alargado un 50% dando lugar al trapecio $AB'C'D$. ¿En qué porcentaje ha aumentado el área del paralelogramo para llegar a ser el área del trapecio?

   A) 0%; B) 12'5%; C) 20%; D) 25%; E) 40%.

5. En este año 2001, la Olimpiada Internacional de Matemáticas (*International Mathematical Olympiad*, conocida en todo el mundo con las iniciales IMO) se celebra en EEUU. Piensa que I, M y O son números enteros positivos cuyo producto es 2001. De todas las distribuciones posibles, cuál es el mínimo valor para la suma I+M+O?

   A) 23; B) 55; C) 99; D) 671; E) 675.

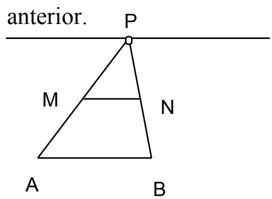
6. Durante el fin de semana pasado, Alicia gastó parte de las monedas que tenía ahorradas. El sábado gastó el 20% de las que tenía y el domingo el 20% de las que le quedaban aún. Si el lunes tenía todavía 32 monedas, ¿cuántas tenía al principio?

   A) 40; B) 50; C) 55; D) 60; E) 75.

7. Mi factura de teléfono se compone de una cantidad fija cada dos meses y una cantidad proporcional al tiempo que estoy colgado al teléfono. En la factura de *Diciembre-Enero* pagué 12.200 pts, pero en la de *Febrero-Marzo* que estuve hablando el doble de horas, pagué 19.600 pts. ¿Cuál es la cantidad fija que pago en mis facturas telefónicas?

   A) 4.500; B) 4.600; C) 4.800; D) 5.000; E) Nada de lo anterior.

8. En la figura que se muestra a la derecha, los puntos M y N son los puntos medios de los lados PA y PB del triángulo PAB. Si P se mueve sobre una recta paralela al lado AB, ¿cuántas de las cuatro cantidades siguientes cambian?

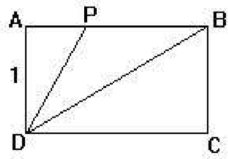
1. La longitud del segmento MN; 2. El perímetro del triángulo PAB;
3. El área del triángulo PAB; 4. El área del trapecio $ABNM$.

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4.

9. En un colegio hay 1000 estudiantes y cada uno tiene una taquilla. Todos los años, a final de curso, montan un juego algo extraño: se colocan en orden alfabético, va el primero y abre todas las taquillas. A continuación, el segundo las cierra de dos en dos; o sea, cierra la 2, 4, 6, etc. Luego va el tercero y acude a las taquillas números 3, 6, 9, 12, etc. y las abre si estaban cerradas y las cierra si estaban abiertas, luego el cuarto va a las taquillas 4, 8, 12, 16, etc. y hace lo mismo (las abre o las cierra según estén cerradas o abiertas) y así continúa el juego hasta pasar todos. Al final, la última taquilla abierta es la número:

A) 940; B) 947; C) 954; D) 961; E) 968.

10. En el rectángulo $ABCD$, $AD = 1$ y las rectas DB y DP dividen en tres partes iguales al ángulo D. ¿Cuál es el perímetro del triángulo BDP?



A) $3+\frac{\sqrt{3}}{3}$; B) $2+\frac{4\sqrt{3}}{3}$; C) $2+2\sqrt{2}$; D) $\frac{3+3\sqrt{5}}{2}$; E) $2+\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

11. En mi Instituto han participado en la 1ª fase del V Concurso de Primavera el 40% de los estudiantes de 3º-4º de E.S.O. y cuatro de cada cinco de los estudiantes de Bachillerato. Si el número de participantes de esos dos niveles ha sido el mismo, ¿cuál de las siguientes afirmaciones tiene que ser verdadera?

A) Hay cinco veces más alumnos en Bachillerato que en 3º-4º E.S.O.

B) Hay el doble de estudiantes en Bachillerato que en 3º-4º E.S.O.

C) Hay tantos estudiantes en Bachillerato como en 3º-4º E.S.O.

D) Hay el doble de estudiantes en 3º-4º E.S.O. que en Bachillerato.

E) Hay cinco veces más estudiantes en 3º-4º E.S.O. que en Bachillerato.

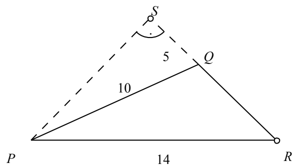
12. Si $|x-2| = p$ y $x < 2$, $x - p$ es igual a:

A) –2; B) 2; C) $2-2p$; D) $2p-2$; E) $|2p-2|$.

13. Elegimos dos números primos entre 4 y 18 y a su producto le restamos su suma. ¿Cuál de los siguientes números he podido obtener?

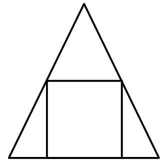
A) 21; B) 60; C) 119; D) 180; E) 231.

14. En el triángulo PQR, PR=14 y PQ=10. Si prolongamos RQ hasta que corte en S a la perpendicular PS, resulta que QS=5. ¿Cuál es el perímetro del triángulo PQR?



A) $24+5\sqrt{2}$; B) $24+3\sqrt{3}$; C)29; D)30; E) 31.

15. Si un cuadrado de lado 1 está inscrito en un triángulo equilátero como se muestra en la figura, la longitud del lado del triángulo es:



A) 2; B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; C) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$; D) $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$; E) $\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$.

16. En un triángulo PQR, S es el punto medio del lado QR. Si $PQ=6$, $PR=8$ y los ángulos Q y R suman 90º, PS es igual a:

A) 4'75; B) 5; C) 5'5; D) 6; E) 7.

17. Si $\frac{4^x}{2^{x+y}}=8$, $\frac{9^{x+y}}{3^{5y}}=243$, $x\cdot y=$

A) $\frac{13}{5}$; B) 4; C) 6; D) 12; E) – 4.

18. La longitud de la cuerda común a dos circunferencias que se cortan es 16 cm. Si los radios son 10 y 17 cm, y el centro de cada una es exterior a la otra circunferencia, la distancia entre los centros, expresada en centímetros, es:

A) 27; B) 21; C) $\sqrt{389}$; D) 15; E) 27 π.

19. Si $x-y>x$ y $x+y<y$, entonces

A) $y<x$; B) $x<y$; C) $xy<0$; D) $xy>0$; E) No se puede asegurar nada.

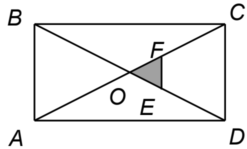
20. Si un arco de 60º del círculo A tiene la misma longitud que uno de 45º del círculo B, el cociente entre el área del círculo A y el área del círculo B es

A) $\frac{16}{9}$; B) $\frac{9}{16}$; C) $\frac{4}{3}$; D) $\frac{3}{4}$; E) Nada de lo anterior.

21. Si m y n son las soluciones de la ecuación $x^2+mx+n=0$, $m\neq 0$ y $n\neq 0$, entonces $m+n$ es igual a

A) $-\frac{1}{2}$; B) – 1; C) $\frac{1}{2}$; D) 1; E) No se puede determinar.

22. En el rectángulo $ABCD$ de la figura, AB=6 cm y BC=12 cm. Si FE es paralelo a CD y mide 2 cm, ¿cuál es, en cm^2, el área del triángulo OEF?



A) 1; B) 2; C) 3; D) 4; E) No se puede determinar.

23. Si vendemos un artículo a x pts, perderemos un 15% sobre el precio de coste, pero si lo vendemos a y pts ganaremos un 15% sobre el precio de coste. ¿Cuánto vale $\frac{y}{x}$?

A) $\frac{23}{17}$; B) $\frac{17y}{23}$; C) $\frac{23x}{17}$; D) Depende del precio de coste;
E) Nada de lo anterior.

24. Si el área de una corona circular es $\frac{25}{2}\pi$ cm^2, ¿cuál es, en cm, la longitud de una cuerda de la circunferencia grande tangente a la circunferencia pequeña?

A) $\frac{5}{\sqrt{2}}$; B) 5; C) $5\sqrt{2}$ D) 10; E) $10\sqrt{2}$.

25. Denotamos por n! (factorial de n) al producto $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1$. ¿Cuántos números primos hay mayores que $n!+1$ y menores que $n!+n$?

A) 0; B) 1; C) $\frac{n}{2}$ si n es par, $\frac{n+1}{2}$ si n es impar; D) $n-1$; E) n.

V CONCURSO DE PRIMAVERA. 4º NIVEL (BACHILLERATO LOGSE). 2ª FASE. 21-04-01

1. Si $a>0$, $\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt[3]{a}$ es igual a:

   A) $\sqrt{a}$; B) $\sqrt[9]{a}$; C) $\sqrt[12]{a}$; D) $\sqrt[9]{a^2}$; E) $\sqrt[18]{a^2}$.

2. ¿Cuántas afirmaciones de las cuatro siguientes son verdaderas?

   $$2^{10}+2^{10}=2^{11};\quad 2^{10}-2^{10}=0^{10};\ 2^{10}\cdot 2^{10}=2^{20};\quad 2^{10}:2^{10}=10^{0}$$

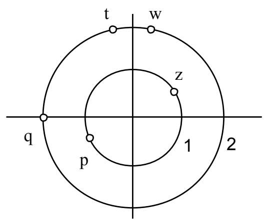
   A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4.

3. La longitud de la cuerda común a dos circunferencias que se cortan es 16 cm. Si los radios son 10 y 17 cm, y el centro de cada una es exterior a la otra circunferencia, la distancia entre los centros, expresado en centímetros, es:

   A) 27; B) 21; C) $\sqrt{389}$; D) 15; E) 27 π.

4. Los números complejos z, w, t, p, q están representados gráficamente como se muestra en el diagrama de la derecha. El complejo z · w es:

   A) q; B) p; C) t; D) w; E) z.



5. En un triángulo rectángulo ABC (ángulo recto en A) las bisectrices de los ángulos agudos se cortan en P. Si la distancia entre P y la hipotenusa es $\sqrt{8}$, ¿cuál es la distancia entre P y A?

   A) $\sqrt{8}$; B) 3; C) $\sqrt{10}$; D) $\sqrt{12}$; E) 4.

6. ¿Cuántos números enteros positivos menores que 501 no son divisibles ni por 2 ni por 3?

   A) 83; B) 84; C) 163; D) 167; E) 4.

7. En una circunferencia de centro O y radio 1 dibujamos un diámetro AD, el lado AC del cuadrado inscrito y el lado AB del octógono regular inscrito. (A, B y C son vértices consecutivos del octógono). ¿Cuál es el área del cuadrilátero $BCDO$?

   A) 1; B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; C) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$; D) $\dfrac{4+\sqrt{2}}{8}$ E) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

8. Representamos por $E(a)$, parte entera de a, al mayor entero menor o igual que el número real a. Por ejemplo $E(2001)=2001, E(3'14)=3$ y $E(-1'42)=-2$. ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $E\left(2-x^2\right)=\left|2-x^2\right|$?

A) 0; B)2; C) 3; D) 5; E) Infinitas.

9. Considera los puntos reticulares del plano, es decir, aquellos puntos de coordenadas enteras. Elegimos n cualesquiera de ellos. ¿Cuál es el menor valor de n para estar seguro de que al menos uno de los puntos medios de los segmentos que unen cualesquiera de ellos es también un punto reticular?

A) 2; B) 3; C) 4; D) 5; E) 6.

10. Considera la siguiente proposición sobre los números naturales: "Para cualquier x par, $f(x)$ es par". ¿Cuál sería la negación de esta proposición?

A) Para cualquier x par, $f(x)$ es impar; B) Para cualquier x impar, $f(x)$ es par;

C) Para cualquier x impar, $f(x)$ es impar;D) Existe x par tal que $f(x)$ es impar;

E) Existe x impar, tal que $f(x)$ es impar.

11. Antonio suele tomar una mezcla de naranjada y limonada. Un día llenó un vaso con naranjada y limonada a partes iguales. Cuando estuvieron bien mezclados, bebió un tercio de la mezcla y luego volvió a llenar el vaso con limonada. ¿Qué fracción del total había al final de naranjada?

A) $\frac{1}{6}$; B) $\frac{1}{3}$; C) $\frac{1}{2}$; D) $\frac{3}{4}$; E) $\frac{5}{6}$.

12. Si m>0 y los puntos (m,3) y (1, m) están en una recta de pendiente m, m es igual a:

A)1; B) $\sqrt{2}$; C) $\sqrt{3}$; D) 2; E) $\sqrt{5}$.

13. Cuando al número de 4 cifras **8abc** le resto el **cba8** obtengo 7623. Si a>b>c, el número de ternas posibles (a, b, c) es:

A) 1; B) 5; C) 6; D) 7; E) 9.

14. Una avioneta vuela a 320 km/h con el viento en calma. En un viaje, el viento soplaba a 40 km/h y tardó, yendo contra el viento, 135 minutos. ¿Cuántos minutos tardó en el viaje de vuelta en el que el viento soplaba a favor?

A) 94'5; B)105; C) 118'25 D)120; E) 112'5.

15. En un colegio hay 1000 estudiantes y cada uno tiene una taquilla. Todos los años, a final de curso, montan un juego algo extraño: se colocan en orden alfabético, va el primero y abre todas las taquillas. A continuación, el segundo las cierra de dos en dos; o sea, cierra la 2, 4, 6, etc. Luego va el tercero y acude a las taquillas números 3, 6, 9, 12, etc. y las abre si estaban cerradas y las cierra si estaban abiertas, luego el cuarto va a las taquillas 4, 8, 12, 16, etc. y hace lo mismo (las abre o las cierra según estén cerradas o abiertas) y así continúa el juego hasta pasar todos. Al final, la última taquilla abierta es la número:

    A) 940; B) 947; C) 954; D) 961; E) 968.

16. Si $tg\, x = \dfrac{2ab}{a^2 - b^2}$ con $a > b > 0$ y $0º < x < 90º$, sen x es igual a:

    A) $\dfrac{a}{b}$; B) $\dfrac{b}{a}$; C) $\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2a}$; D) $\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2ab}$; E) $\dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$.

17. Si a y b son dos números enteros no negativos, $\left(2^a + 2^b\right)^2$ puede escribirse como suma de dos potencias distintas de 2 siempre que:

    A) $a = b$; B) $a = 0$ ó $b = 0$; C) $|a - b| = 1$ D) a y b sean potencias de 2; E) Nunca.

18. En un triángulo acutángulo (los tres ángulos son agudos), el ángulo más pequeño es $\dfrac{1}{5}$ del mayor. Si cada uno de los ángulos mide un número entero de grados, ¿cuántos grados suman los dos ángulos mayores?

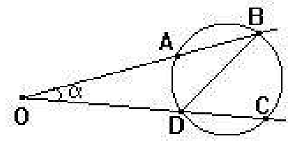
    A) 157; B) 160; C) 163; D) 166; E) Son posibles varias soluciones.

19. ¿Cuántos puntos de corte tienen las gráficas de $f(x) = \cos x$ y $g(x) = \text{sen}\, x$ en el intervalo $[0, 1000\pi]$?

    A) 500; B) 1000; C) 1500; D) 2000; E) Infinitos.

20. Los arcos AB, BC y CD de la figura que se muestra a la derecha, miden cada uno 100º. ¿Cuánto mide el ángulo α formado por las rectas AB y CD?

    A) 15º; B) 20º; C) 25º; D) 30º; E) 40º.



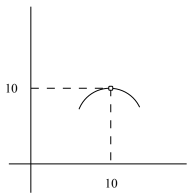
21. Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x + 1| + |x + 3|$ y las cuatro afirmaciones siguientes:
    1. f es estrictamente creciente en los reales positivos.
    2. f es estrictamente decreciente en los reales negativos;
    3. f es constante en algún intervalo;
    4. f es estrictamente positiva.

¿Cuántas de estas afirmaciones son verdaderas?

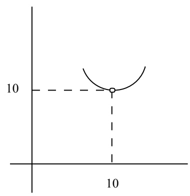
A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4.

22. ¿Cuál de los siguientes dibujos muestra un trozo de la gráfica de $y = (10 - x)^2 + 10$?

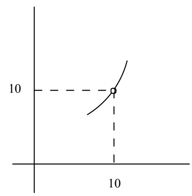
A)



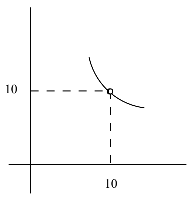
B)



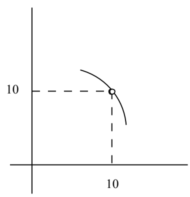
C)



D)



E)



23. ¿Cuántos valores enteros diferentes puede tomar la función $y = 3 - 3|\cos x|$?

A) 2; B) 3; C) 4; D) 6; E) 7.

24. Si $f(x) = x - 1$ y $(g \circ f)(x) = x^2 - 1$, entonces $g(3)$ es igual a:

A) 3; B) 4; C) 8; D) 9; E) 15.

25. La diagonal más corta de un polígono regular de n vértices inscrito en una circunferencia de radio 1 mide:

A) sen $\frac{\pi}{n}$; B) 2 sen $\frac{\pi}{n}$; C) sen $\frac{2\pi}{n}$; D) 2 sen $\frac{2\pi}{n}$; E) 2 tg $\frac{2\pi}{n}$.

Nº	Fase 0	Fase 1	Fase 2
1	E	E	D
2	C	B	A
3	C	C	D
4	D	C	C
5	E	C	D
6	A	A	C
7	D	B	D
8	A	A	C
9	B	B	D
10	E	E	E
11	C	B	C
12	D	D	D
13	B	B	E
14	E	D	D
15	B	D	B
16	A	D	B
17	B	D	A
18	B	B	D
19	B	C	B
20	A	C	E
21	D	E	C
22	B	A	B
23	B	A	C
24	A	D	D
25	A	D	D

Primera Fase				Segunda Fase			
Nº	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nº	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
1	D	E	B	1	C	C	E
2	B	C	E	2	C	C	C
3	D	A	C	3	A	B	C
4	E	E	B	4	C	A	D
5	C	C	C	5	B	C	C
6	C	D	B	6	B	A	D
7	C	B	B	7	D	C	B
8	B	A	A	8	B	C	D
9	D	A	B	9	B	C	A
10	D	E	E	10	C	A	C
11	B	C	C	11	E	A	D
12	B	B	A	12	D	D	A
13	C	D	E	13	D	A	A
14	A	D	B	14	D	C	B
15	C	D	C	15	C	C	B
16	B	B	C	16	C	C	D
17	D	A	E	17	E	B	A
18	B	C	A	18	B	D	A
19	A	D	B	19	C	A	D
20	E	C	B	20	B	B	D
21	D	C	E	21		B	C
22	B	D	D	22		C	C
23	E	A	E	23		E	A
24	C	C	D	24		D	B
25	B	C	E	25		B	D

Primera Fase					Segunda Fase				
Nº	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Nº	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
1	E	E	B	E	1	A	E	D	A
2	D	E	B	D	2	B	A	E	B
3	C	C	E	B	3	B	E	E	E
4	A	A	B	B	4	E	A	E	E
5	A	D	D	D	5	B	C	B	E
6	C	C	C	C	6	B	E	B	B
7	C	D	B	C	7	B	D	E	D
8	D	E	D	D	8	A	D	D	A
9	B	C	C	D	9	C	B	E	B
10	D	C	B	C	10	B	C	B	A
11	D	D	E	C	11	D	C	B	D
12	B	A	C	E	12	B	A	B	A
13	D	C	B	D	13	C	B	B	C
14	D	C	C	B	14	D	E	E	B
15	C	B	D	D	15	A	E	D	C
16	B	D	E	B	16	C	B	E	A
17	B	B	C	E	17	C	B	B	C
18	C	C	C	D	18	B	D	D	A
19	C	A	C	D	19	C	D	E	D
20	D	A	B	A	20	C	B	C	D
21		D	A	A	21	B	D	C	E
22		E	C	B	22	C	A	A	D
23		E	D	D	23	D	C	D	E
24		D	B	C	24	C	A	D	C
25		C	C	E	25	D	C	D	E

Primera Fase					Segunda Fase				
Nº	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Nº	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
1	A	D	B	C	1	D	A	B	B
2	E	C	D	D	2	E	E	B	E
3	A	A	B	B	3	B	B	A	E
4	A	A	A	C	4	B	C	C	C
5	C	D	C	E	5	C	D	E	C
6	B	A	B	B	6	B	D	A	A
7	A	C	E	E	7	C	A	D	C
8	A	E	B	D	8	A	D	B	E
9	D	C	C	C	9	C	A	D	D
10	A	E	A	A	10	D	A	B	C
11	E	B	B	E	11	B	E	D	D
12	C	C	B	A	12	C	D	C	D
13	D	E	D	A	13	E	A	B	C
14	D	E	B	E	14	C	A	A	A
15	D	D	E	A	15	E	A	D	B
16	A	E	C	B	16	C	D	D	A
17	B	C	A	B	17	D	A	A	E
18	D	E	D	B	18	D	B	C	D
19	C	B	D	B	19	B	C	E	E
20	D	D	C	C	20	A	E	D	A
21	D	C	E	C	21	E	D	B	E
22	E	C	E	B	22	B	E	D	C
23	D	D	C	D	23	E	C	D	E
24	B	D	C	A	24	C	D	C	C
25	D	E	A	B	25	C	C	B	A

Primera Fase					Segunda Fase				
Nº	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Nº	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
1	C	C	E	B	1	A	D	A	A
2	C	D	E	E	2	D	A	D	E
3	E	C	B	B	3	B	D	D	B
4	D	D	E	A	4	D	A	B	C
5	A	D	E	C	5	C	E	B	E
6	D	B	C	B	6	D	C	B	D
7	B	E	D	A	7	C	C	C	C
8	D	B	A	A	8	C	A	B	D
9	C	E	C	D	9	B	C	D	D
10	C	A	C	B	10	C	C	B	D
11	A	E	B	C	11	E	A	D	B
12	D	B	B	D	12	B	B	C	C
13	B	D	C	B	13	A	B	C	A
14	A	E	D	D	14	D	A	D	B
15	D	B	B	C	15	B	A	E	D
16	E	A	D	E	16	B	C	B	E
17	B	B	D	A	17	C	A	B	C
18	A	C	A	E	18	C	D	B	C
19	C	E	B	A	19	D	E	D	B
20	B	D	D	A	20	B	B	B	B
21	B	A	A	E	21	D	A	B	D
22	B	A	E	E	22	D	D	B	B
23	D	B	C	A	23	D	A	A	C
24	A	B	C	E	24	B	B	C	E
25	B	A	B	D	25	B	B	A	D

1er CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS. FEBRERO 1997. MODELO DE PRUEBA

1. **(E)** Si $\frac{1}{3} = 0'3333333$, $\frac{1}{30} = \frac{1}{3} : 10$, es decir, 0´0333333.

2. **(C)** El lado de I mide 3 y el de II, 6 así que el lado de III será 9 y su perímetro, 36.

3. **(C)** Como $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{77}{60}$, sigue la expresión dada es igual a 14 + $\frac{77}{60}$, es decir, mayor que 15 pero menor que 16, por lo que la respuesta será 16.

4. **(D)** El perímetro de la figura es 24 y como Rocío recorre dos lados de cuadrado por cada uno que recorre Jaime, cuando Jaime haya recorrido x Rocío habría recorrido $2x$, siendo $2x + x = 24$, es decir $x = 8$ y contando 8 lados desde el punto de partida en el sentido de Jaime, llegamos a que, de los puntos dados, el más cercano del punto de encuentro es el D.

5. **(E)** Como las únicas descomposiciones de 94 son 47 · 2 y 94 · 1 y tanto 47 como 94 no pueden ser números de día ni de mes, la respuesta es E.

6. **(A)** Como $AB = AC$, el ángulo B vale 58º, por lo que el ángulo A valdrá 180 − (58 + 58), es decir, 64º. Por otra parte, la figura es simétrica respecto a la perpendicular desde A al lado BC, con lo que el ángulo EAC vale también x y $x + 40 + x = 64$, de donde $x = 12$º.

7. **(D)** El cuadrante de la izquierda coincide con el cuadrante en blanco de la derecha por lo que la suma de las dos zonas sombreadas será 1.

8. **(A)** La figura consta de 24 cuadraditos, de los que hay 5 sombreados. Si sombreo x más, deberá ocurrir que $2(5 + x) = 24 - (5 + x)$, es decir $x = 3$.

9. **(B)** Si A baja 40 cm, B sube 40 cm y B estaría 40 cm más alto que A. Así pues, si A baja otros 10, los subirá B y ahora ya la diferencia será 60 cm más alto B que A, por lo que la respuesta será bajar A 50 cm y el dato de la longitud total de la cuerda, 200 cm, es para despistar.

10. **(E)** La única cara que no tiene ninguna arista en común con X es Y.

11. **(C)** Los 9 primeros números ocuparán 9 lugares; los 99 primeros números ocuparían 9 + 2 · 90 = 189 lugares. Así pues, quedan 1000 − 189 = 811 lugares que serán ocupadas por números de 3 cifras, habiendo pues 811 : 3 = 270 números completos y la primera cifra del número que ocupe el 271º lugar. Como el primer número de tres cifras es 100, el 270º es el 369 y la primera cifra del siguiente, 370, es 3.

12. **(D)** Al haber 20 caras, habría 60 aristas, pero como cada una vale para 2 caras, habrá en total la mitad, o sea, 30 aristas.

13. (B) $\frac{x+y}{2} = \frac{3y}{4} \Rightarrow 4x + 4y = 6y$, es decir $4x = 2y$, ó $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$.

14. (E) Se trata de los 50 primeros impares con signos $+$ y $-$ alternativamente. Agrupándolos de 2 en 2, obtengo 25 veces el 2, o sea, 50.

15. (B) Por la simetría de la figura, el punto O es el centro del triángulo y BO es el radio del círculo, o sea, 2.

16. (A) La última cifra de las sucesivas potencias de 2 forman ciclos 2, 4, 8, 6, 2, 4... Como $2^{1997} = 2 \cdot 2^{1996}$ y 1996 es múltiplo de 4, sigue que 2^{1996} acaba en 6, por lo que $2^{1997} - 2$ acabará en 0.

17. (B) Por la simetría de la figura, la suma de las longitudes de los dos catetos del triángulo ABC es el lado del cuadrado grande, o sea, 6. Como la hipotenusa de dicho triángulo es el lado del cuadrado pequeño, es decir, 5, su perímetro será 11.

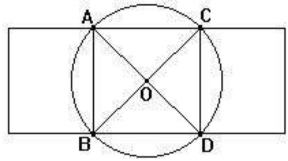
18. (B) Como $x > 1$, $10x > 10 \Rightarrow 10x > y \Rightarrow x > \frac{y}{10}$ y la respuesta es B.

19. (B) Observamos que $S_2 = -1$, $S_4 = -2$, en general, $S_{2n} = -n$. Así pues

$S_{17} + S_{33} + S_{50} = S_{16} + 17 + S_{32} + 33 + S_{50}$, es decir, $-8 + 17 - 16 + 33 - 25 = 1$.

20. (A) Sabemos que $d + 0 = 1$, por lo que $d = 1$, $c + d = 0$, con lo que $c = -1$, $b + c = d$, o sea, $b - 1 = 1$, de donde $b = 2$ y, finalmente, $a + 2 = -1$, es decir, $a = -3$.

21. (D) Como $AB = 2\sqrt{2}$ y $OA = OB = 2$, se sigue que el triángulo AOB es rectángulo y por tanto la zona común a ambas figuras se compone de un cuadrado de lado $2\sqrt{2}$ y dos segmentos circulares iguales cada uno de área S. Por otra parte, $8 + 4S = 4\pi$, área del círculo, con lo que $S = \pi - 2$ y el área común será: $8 + 2(\pi - 2) = 2\pi + 4$.



22. (B) Descomponiendo en factores cada una de las áreas dadas observaríamos que $6 = 2 \cdot 3$, $14 = 2 \cdot 7$ y $35 = 5 \cdot 7$, con lo que el rectángulo que queda tendría de lados 3 y 5 y de área 15.

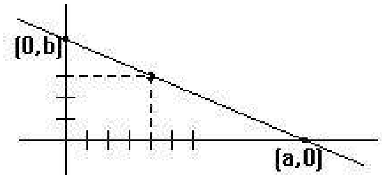
Aquellos que queráis ser más rigurosos diríais $6 = x \cdot y$; $14 = y \cdot z$ y $35 = z \cdot u$. Me piden el valor de $x \cdot u$. Como $xy = 6$; $yz = 14$; $zu = 35$, multiplicando primeros y segundos términos, tenemos que:

$(yz)^2 xu = 6 \cdot 14 \cdot 35$, y como $yz = 14$, es $xu = \frac{6 \cdot 14 \cdot 35}{14^2} = 15$.

23. **(B)** Llamando r y a al número de canicas rojas y azules respectivamente, podemos escribir: $r + a - 1 = 7\ (r - 1)$ y $r + a - 2 = 5r$ de donde $r = 4$ y $a = 18$ por lo que el número inicial de canicas 22.

24. **(A)** Ambos números no pueden ser positivos ni ambos negativos pues en cualesquiera de esos dos casos no se verificaría la 2ª ecuación. Supongamos que x es positivo. El sistema es equivalente al $x + y = 3$, $y = -x^2$, que nos conduce a $x - x^2 - 3 = 0$, ecuación que no tiene soluciones reales. Así pues, $x < 0$ y la 1ª ecuación es $-x + y = 3$, es decir $x - y = -3$ y la respuesta es A.

25. **(C)**



En la figura observamos que $\frac{a}{b} = \frac{a-4}{3}$, así pues $b\ (a - 4) = 3a$, y como a es primo debe dividir a b ó a a-4. Lo segundo por tamaño es imposible, luego $b = k \cdot a$, y así de $k \cdot a \cdot (a - 4) = 3a$, concluimos que:

$k = 3$ y $a - 4 = 1$, ó, $k = 1$ y $a - 4 = 3$ (en ambos casos a es primo) obteniendo pues un par de rectas.

1er CONCURSO DE PRIMAVERA. 1ª FASE. 4-3-97. 1 HORA 15 MINUTOS.

1. **(E)** Trazando en el cuadrado grande las dos paralelas medias, observamos que la figura queda dividida en 8 triángulos iguales, de los cuales 4 constituyen el cuadrado pequeño por lo que el área de éste será la mitad de la del grande, es decir, el área del cuadrado grande es 24 cm^2.

2. **(B)** Una posibilidad -la única cierta al mirar las respuestas- es que A sea el ángulo desigual, por lo que entre los otros dos sumarán 162º, es decir B = 81º.

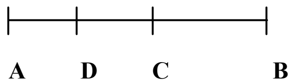
3. **(C)** La suma de las 12 aristas es 324 cm, y la suma de los cuatro largos más los cuatro altos es $4 \cdot 36 + 4 \cdot 24 = 240$ cm, siendo entonces el ancho igual a $\frac{324-240}{4} = 21$ cm.

4. **(C)** Tienen algún 5 el 05, 15, 25, ..., 95 más los restantes nueve, a saber, 51, 52, 53, 54, 56, ... 59, que empiezan por 5, es decir, 19 en total.

5. **(C)** Por cada 5 ratones Mu caza 3 y Mi 2. Así pues en 60, 12 grupos de 5, Mi cazó 24.

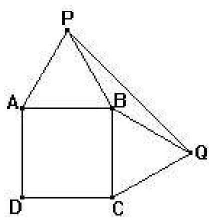
6. **(A)** El triángulo PMR tiene de base 2 y altura 3, por lo que su área es 3.

7. **(B)** Para que A y D estén lo más cerca posible, la distribución de los puntos es la de la figura por lo que A dista 3 m de D.



8. **(A)** Descomponemos 90 en factores (día, mes) de forma que ninguno sea superior a 31 y el 2º sea inferior o igual a 12, obteniendo:
$90 = 30 \cdot 3 = 18 \cdot 5 = 15 \cdot 6 = 10 \cdot 9 = 9 \cdot 10$, que corresponden al 30/3/90, 18/5/90, 15/6/90, 10/9/90 y 9/10/90, o sea 5 días curiosos.

9. **(B)** El triángulo PQB es isósceles, de ángulo desigual $B = 360º - (90º + 60º + 60º) = 150º$, por lo que el ángulo PQB medirá 15º.



10. (E) Puestos en fracción tenemos los números $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{31}{100}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{303}{100}$, que escritos todos con igual denominador corresponden al $\frac{1000}{3000}$, $\frac{900}{3000}$, $\frac{930}{3000}$, $\frac{90}{3000}$, $\frac{909}{3000}$, es decir, el central será el $\frac{909}{3000}$ que corresponde al $0'303$.

11. (B) Cada sumando del denominador es par y cada uno del denominador es múltiplo de 3. Así pues $\frac{2+4+6+...+34}{3+6+9+...+51} = \frac{2(1+2+3+...+17)}{3(1+2+3+...+17)} = \frac{2}{3}$.

12. (D) Como $x < 1$, $\frac{3}{x}$ será mayor que 3 y mucho mayor que $3 + x$. Así pues, la respuesta es (A).

13. (B) Trazando horizontales y verticales desde los vértices A, B y C, observamos que el área del triángulo ABC será $4 \cdot 3 - \left(\frac{4\cdot 3}{2} + \frac{3\cdot 2}{2} + \frac{1\cdot 1}{2} + 1\cdot 2\right) = \frac{1}{2}$.

14. (D) Si x e y son las dimensiones del rectángulo original, las del nuevo serían $2\left(x + \frac{x}{10}\right) + 2\left(y + \frac{y}{10}\right)$, es decir, el perímetro ha aumentado en $2\left(\frac{x}{10} + \frac{y}{10}\right) = \frac{1}{10}2(x+y)$. Como $2(x + y)$ es el perímetro del original, el aumento ha sido un 10%.

15. (D) Sabemos que ni Beatriz está al lado del Carlos ni Antonio está entre Beatriz y Carlos. Por otra parte, Beatriz está sentada en la silla 3, por lo que Carlos no está ni en la 2 ni en la 4, así que estará en la 1 y Antonio, que no está entre Beatriz y Carlos, estará en la 4, quedando la 2 para Diana.

16. (D) El mayor valor posible para la mediana aparecerá cuando los tres números que falten sean superiores o iguales a 9, siendo entonces los nueve enteros, ordenados, 3, 5, 5, 7, 8, 9, a, b, c con a, b y c mayores o iguales que 9, por lo que la mediana será 8.

17. (D) Si v es la velocidad de Rayo y mv la de Centella, (en m/seg), en cada segundo le gana $mv - v = v(m - 1)$, por lo que para ganarle los h metros que le dio de ventaja deben haber transcurrido $\frac{h}{v(m-1)}$ segundos, tiempo en el que Centella habrá recorrido $mv\frac{h}{v(m-1)} = \frac{mh}{m-1}$ metros y la respuesta será (D).

18. **(B)** Agrupemos los términos de la sucesión así: 12, 122, 1222, 12222, ... y veamos si 1234 términos corresponden a un número exacto de estos nuevos bloques. El primer bloque tiene 2 términos, el 2º 3, el n-ésimo $n + 1$. Así pues 2 + 3+ 4 + ... + (n + 1) = 1234 nos lleva a $\frac{2+n+1}{2}n = 1234$, es decir, $n^2 + 3n - 2468 = 0$, con lo que $n = \frac{-3 \pm 99'...}{2}$, de donde $48 < n < 49$, es decir, hay 48 bloques completos y algunos términos más para constituir los 1234 primeros términos. Los 48 primeros bloques ocupan $2 + 3 + 4 + ... + 49 = \frac{2+49}{2} \cdot 48 = 1224$ términos por lo que nos quedan 10 términos más, o sea un "1" y nueve "2".
Los primeros 48 bloques suman $3 + 5 + 7 + \ ... + 97 = \frac{3+97}{2} \cdot 48 = 2400$ que al añadirle 19 -suma de un "1" y nueve "2"- obtendremos 2419.

19. **(C)** Cada lado queda dividido en dos trozos x e y. Sabemos que $2\frac{x^2}{2} + 2\frac{y^2}{2} = 200$, o sea, $x^2 + y^2 = 200$. Los lados del rectángulo miden $x\sqrt{2}$ e $y\sqrt{2}$ por lo que su diagonal medirá $\sqrt{2x^2 + 2y^2}$, es decir $\sqrt{2 \cdot 200} = 20$.

20. **(C)** Si $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} < \frac{1}{100}$, es $1 < \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{100}$, es decir $\sqrt{n} + \sqrt{n-1} > 100$ por lo que 2500 no verifica esa propiedad pero 2501 sí y la respuesta es C.

21. **(E)** Nos dicen que $(3x - 1)^7 = a^7x^7 + a^6x^6 + ... \ ax + a^0$ y nos piden $a^7 + a^6 + ... \ a^1 + a^0$. Dándole a x el valor 1, tenemos que $a^7 + a^6 + ... \ a^1 + a^0 = 2^7$, o sea, 128 y la respuesta es E.

22. **(A)** Si $p + q = r$, p y q no pueden ser ambos impares por lo que el menor, p, será 2.

23. **(A)** La afirmación será falsa si hay una carta con vocal por un lado y número impar por el otro. La única carta que puede cumplir eso es la A, por lo que Alicia le dio la vuelta a la A e hizo notar que tenía una vocal.

24. **(D)** El triángulo grande consta de 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 25 triángulos pequeños.

25. **(D)** Si C afirma que $a(b - a) = (b + a)(b - a)$ no se puede deducir que $a = b + a$ pues $b - a = 0$ ya que $b = a$. Así pues, el error está en la afirmación D.

1er CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS. 2ª FASE. 26-4-97. 1 HORA 30 MINUTOS.

1. **(D)** $\dfrac{179+837}{2}=508$

2. **(A)** 100 días son 14 semanas y 2 días, por lo que dentro de 14 semanas y dos días será lunes.

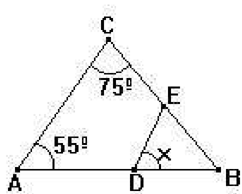
3. **(D)** El asterisco del multiplicador debe ser un 9 por lo que el del multiplicando es un 3 y a será un 7.

4. **(C)** El cuaderno costará 100 ptas., por lo que 10 cuadernos costarán 1000 ptas.

5. **(D)** El cuadrado más pequeño de los que aparecen -que es el doble del rectángulo E- es $\dfrac{1}{16}$ del total, con lo que E ocupa $\dfrac{1}{32}$ del total.

6. **(C)** Puesto que la altura alcanzada por el agua en un recipiente es independiente de la anchura del mismo, la respuesta será C, 3 cm.

7. **(D)** El ángulo B vale 50º y como $DB = BE$, los ángulos $B\hat{D}E$ y $B\hat{E}D$ son ambos iguales a $\dfrac{180-50}{2}=65º$, por lo que la respuesta es D.



8. **(C)** $10^{97}-97=1000...0-97$ donde el uno está seguido de 97 ceros, por lo que los dos últimos números del resultado son 03 y delante de ellos hay 95 nueves, siendo, pues, la suma de sus cifras $9\cdot 95+3=858$.

9. **(D)** En los primeros 100 km tardó 2 h 30′ y en los segundos 100 km tardó 4 horas siendo entonces la velocidad media $\dfrac{200}{6,5}=\dfrac{400}{13}$ km/hora y la respuesta es D.

10. **(E)** $$\frac{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}-\frac{4}{5}}:\frac{5}{6}=\frac{-\frac{1}{6}}{-\frac{1}{20}}:\frac{5}{6}=\frac{20}{6}:\frac{5}{6}=4\,.$$

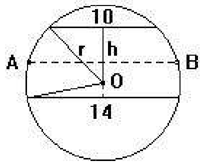
11. **(C)** Llamando x e y a las dimensiones de los lados del rectángulo, las del nuevo rectángulo serán $x+\dfrac{x}{5}$ e $y+\dfrac{y}{5}$, por lo que su área será

$xy + 2\dfrac{xy}{5} + \dfrac{xy}{25}$, es decir que el aumento de área ha sido

$\dfrac{2xy}{5} + \dfrac{xy}{25} = xy \cdot \dfrac{11}{25}$ que representa un $\dfrac{11}{25}$ del total, o sea, un 44%.

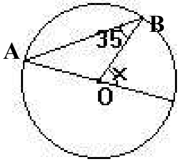
12. (D) Como $AB = 13$ y $AM = 12$, tenemos que $MB = 1$ y $MN = BN - BM = 5 - 1 = 4$.

13. **(E)** Nos piden la longitud de la cuerda AB. Sea r el radio de la circunferencia y h la distancia del centro a la cuerda pequeña**.** Así pues $r^2 = h^2 + 5^2$ y $r^2 = (6 - h)^2 + 7^2$, de donde $h^2 + 25 = (6 - h)^2 + 49$ con lo que $h = 5$, $r = \sqrt{50}$ y la distancia del centro a la cuerda AB es $5 - 3 = 2$, por lo que la longitud AB será $2\sqrt{50 - 4} = \sqrt{184}$ y la respuesta será E.



(Observemos que la solución no cambia si las dos cuerdas están en un mismo semicírculo, debido a que las relaciones entre las medidas están al cuadrado)

14. **(D)**



El triángulo OAB es isósceles por lo que el ángulo mayor de vértice O será 180º − 2 · 35º con lo que su suplementario x medirá 70º.

15. (B) Arquímedes vivió antes de Cristo, Newton en el siglo XVII y Einstein en el siglo XX, por lo que el orden sería Arquímedes - Newton - Einstein y la respuesta B.

16. (B) Si llamamos x a la longitud del lado corto, el perímetro de la figura sería $16x$. Por otra parte, podemos descomponer dicha figura en 8 cuadrados de lado x con lo que $x^2 = \dfrac{200}{8} = 25$, $x = 5$ y el perímetro 16 · 5 = 80 cm.

17. (A) Como b es impar, $(b - 1)^2 c$ es un número par, sea como fuere c. Por otra parte, 3^a siempre es impar, por lo que $3^a + (b - 1)^2 c$ será impar sea cual fuere c y la respuesta es A.

18. (D) En principio el lado mayor puede ser el de 15 o el k.

Si es 15, para que el triángulo sea obtusángulo deberá ser $15^2 > 11^2 + k^2$, es decir, $k^2 < 104$, por lo que k, que obviamente deberá ser mayor que la diferencia entre los otros dos, podrá tomar los valores 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Si el lado mayor es k deberá ocurrir que $k^2 > 15^2 + 11^2$, es decir, $k^2 > 346$ pero, obviamente, menor que la suma 15 + 11. Así pues k podría tomar los valores 19, 20, 21, 22, 23, 24 y 25, dando pues, en total 13 triángulos.

19. **(B)** R y P representan números positivos menores que 1, por lo que su producto debería ser positivo y menor que ambos, siendo entonces N el punto que mejor representa dicho número.

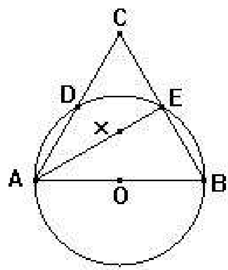
20. **(E)** $\dfrac{498}{2} = 249$.

21. **(C)** Llamando x e y a los catetos horizontal y vertical respectivamente del triángulo pequeño que queda fuera de la zona común, podemos escribir, por semejanza de triángulos, que $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{2}$, $\dfrac{1-y}{1} = \dfrac{2}{3}$, de donde obtenemos $y = \dfrac{1}{3}$, $x = \dfrac{1}{2}$ y el área del triángulo pequeño será $\dfrac{1}{12}$ con lo que el área de la zona común será $1 - \dfrac{1}{12} = \dfrac{11}{12}$ y la respuesta es C.

22. **(B)** Llamando b y h a la base y la altura respectivamente del rectángulo, tenemos que el área del triángulo $A = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{h}{n}\cdot\dfrac{b}{2}$ y el área del triángulo $B = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{b}{m}\cdot\dfrac{h}{2}$ de donde $\dfrac{\text{Área } A}{\text{Área } B} = \dfrac{m}{n}$.

23. **(C)** Una posibilidad de no asegurar que haya 10 tarjetas con la misma etiqueta es coger todas las numeradas del 1 al 9 y 9 de cada una de las numeradas del 10 al 50, es decir, 1 + 2 + 3 + ... + 9 + 9 · 41 = 414. Así pues, si cogemos 415 tarjetas hemos asegurado que al menos hay 10 escritas con la misma etiqueta.

24. **(D)** Llamando x a AE, como los triángulos AEC y AEB son rectángulos, se verifica que sen $C = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{x}{2}$, de donde $x = \sqrt{3}$.



25. **(D)** Llamando a, b y c a los números borrados, nos piden $a + b + c$ y sabemos que $4 + a = b$, $a + b = c$ y $b + c = 32$ de donde $a = 8$, $b = 12$, $c = 20$, por lo que la suma pedida es 40.

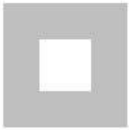
II CONCURSO DE PRIMAVERA. 1er NIVEL (PRIMARIA). 1ª FASE. DÍA 4-3-98. 1 HORA 15 MINUTOS

1. **(D)**

$$\begin{array}{l|l} 9876 & \underline{6789} \\ 3087 & 1 \end{array}$$

2. **(B)** 9900 = 99 · 100 por lo que la suma de ambos es 199.

3. **(D)** Si tener el doble supone tener 10 ptas más, es que él tiene 10, por lo que yo tendré 20 ptas.

4. **(E)**  El lado del cuadrado grande es 9 y el del pequeño 4, por lo que sus áreas son 81 y 16 respectivamente siendo entonces la diferencia 81 − 16 = 65 el área de la zona sombreada.

5. **(C)** Tendremos que ver los primos mayores que 50 y menores que 60 que son 53 y 59 con lo que la respuesta es 17.

6. **(C)** Como los 10 primeros números positivos suman 1 + 2 + 3 + ... + 10 = 55, el que no he sumado es 55 − 50 = 5.

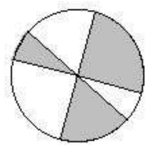
7. **(C)** Cada paréntesis tiene 50 sumandos y cada sumando del paréntesis de la izquierda es una unidad mayor que el correspondiente de la derecha, por lo que el resultado es 50.

8. **(B)** A lo largo, en el fondo caben 2, que también caben a lo ancho. Así pues, en el fondo caben 4 y como cada una mide 2 cm de alta y la caja 6 cm, podemos poner tres capas, siendo entonces 4 · 3 = 12 el número de piezas que podemos poner.

9. **(D)** Hace 10 años yo tenía 20 años, hoy tendré 30 y dentro de otros diez tendré 40 años.

10. **(D)** Redondeando a 100 y 500, obtenemos que el más próximo al producto es 100 · 500 = 50000, es decir, la respuesta D.

11. **(B)** Si AC = 20 y AD = 30, entonces CD = 10, estando el dato de BD para despistar.



12. **(B)** Si fueran divisibles por 13 no serían primos, salvo que fueran el propio 13, luego la respuesta es 1.

13. **(C)** Como se observa, por cada región sombreada hay otra exactamente igual, sin sombrear, luego las regiones sombreadas ocupan la mitad del círculo cuya área es $\pi \cdot 6^2 = 36\pi$ siendo entonces 18π el área sombreada.

14. (A) Entre los 20 primeros positivos hay 10 pares y 10 impares, luego su suma es par. Si quito 5 impares, la suma que he quitado es impar por lo que la suma que me queda será impar, siendo 163 la única respuesta posible.

15. (C) $\frac{10}{25} = \frac{40}{100} = 40\%$.

16. (B) Como la mitad de 12 es 6, los números son 5 y 7 y su producto 35.

17. (D) 90 − 19 = 71 y como cuento tanto el 19 como el 90, tendré 72 billetes.

18. (B) Como 1 hora son 60 · 60 = 3600 segundos, volverá 3600 : 2 = 1800 veces.

19. (A) 10 × 20 × 30 = 6000 = 1000 × 6, luego la respuesta es A.

20. (E) Juan le dio a su hermano $\frac{40 \cdot 400}{100} = 160$ ptas. por lo que le quedaban

400 − 160 = 240 ptas. de las que gastó $\frac{240 \cdot 10}{100} = 24$, con lo que ahora le queda

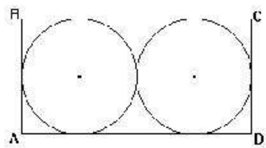
240 − 24 = 216 ptas.

21. (D) Como la suma es 180º, el mayor valdrá la mitad, o sea, 90º.

22. (B) 12 : 3 = 4, por lo que el divisor de 20 debe ser 5.

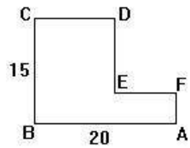
23. (E) Tengo 4 opciones para la 1ª letra, 3 para la 2ª, 2 para la 3ª y 1 para la 4ª, así pues el número de ordenaciones será 4 · 3 · 2 · 1 = 24.

24. (C) Cada círculo tiene de área $\frac{72\pi}{2} = 36\pi = 6^2 \cdot \pi$,



luego su radio es 6. Por otra parte la longitud del rectángulo es dos diámetros, o sea, 24 y la anchura un diámetro, o sea 12, con lo que el área del rectángulo será 24 × 12 = 288.

25. (B) Como CD + EF = BA y DE + FA = CB, el perímetro de la figura es igual al de un rectángulo de lados 20 y 15, o sea, 2 · 20 + 2 · 15 = 70.



II CONCURSO DE PRIMAVERA. 2º NIVEL (1º-2º-3º ESO). 1ª FASE. DÍA 4-3-98. 1 HORA 15 MINUTOS

1. **(E)** El perímetro no puede ser 24 cm pues al medir un lado 6 cm, entre los otros dos mediarían 18 lo que es imposible pues si uno es menor de 6, el otro sería más de 12 con lo que un lado sería mayor que lo suma de los otros dos.

2. **(C)** 2 ♠ 3 = 2 + 2 · 3 = 8 y 1 ♠ 8 = 1 + 2 · 8 = 17.

3. **(A)** Los múltiplos comunes a 6 y 4 son nombrados por los dos, es decir, tanto Alicia como Pedro nombran los múltiplos de 12 que son 600 : 12 = 50.

4. **(E)** Si hubiera comprado las 13 para adultos me habría gastado 13 · 300 = 3900 ptas. Como sólo gasté 2900 ptas., la diferencia, 1000 ptas, fue lo que me "ahorré" comprando entradas de niño. Como en cada una me ahorro 100 ptas, es que compré 10 entradas de niño.

5. **(C)** $\frac{1}{4}=\sqrt{\frac{1}{16}}=\sqrt{\frac{4}{64}}$, por lo que la respuesta es 4.

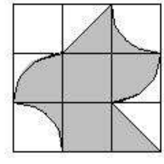
6. **(D)** Analizando las respuestas vemos que si dos ángulos miden 50º y 100º, el restante debería medir 30º y el triángulo no sería isósceles.

7. **(B)** Los primos que hay entre 110 y 130 son 113 y 127, cuya suma es 240 y la respuesta será B.

8. **(A)** La suma de las notas en la clase de 12 estudiantes es 12 · 90 = 1080 y en la de 20, 20 · 80 = 1600 con lo que la suma total será 2680 y la media $\frac{2680}{32}=83'75$.

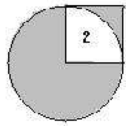
9. **(A)** $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Así pues, 2^2 es un factor de N^2 y es posible que 2, pero no 2^2, fuera un factor de N, por ejemplo, siendo $N = 2 \cdot 3 \cdot 5$, por lo que la respuesta sería A.

10. **(E)** Observando en los cuadrados sombreados los limitados por arcos de circunferencias, vemos que agrupándolos convenientemente de dos en dos suman dos cuadrados completos. Análogamente los dos triángulos suman un cuadrado completopor lo que la respuesta es 2 + 2 + 1 = 5.



11. **(C)** Si $a=\frac{1}{a}$, es porque $a^2 = 1$ y eso ocurre cuando $a = 1$ y cuando $a = -1$.

12. **(B)** La región sombreada es tres cuartas partes de un círculo y la parte del cuadrado no ocupada por un cuarto de círculo, es decir



$$\frac{3}{4}\pi \cdot 2^2 + 4 - \frac{1}{4}\pi \cdot 2^2 = 3\pi + 4 - \pi = 2\pi + 4 .$$

13. **(D)** xy siempre será mayor que $0'5$ pues $0'5 < x$ y $1 < y$, por lo que la respuesta es D.

14. **(D)** El número que hay dentro de la raíz cuadrada es muy próximo a $\underbrace{10...0}_{18 \text{ ceros}}$, por lo que su raíz cuadrada será muy próxima a $\underbrace{10...0}_{9 \text{ ceros}}$ y la respuesta será D.

15. **(D)** Llamando x e y a los catetos, $\sqrt{x^2 + y^2}$ es la hipotenusa por lo que $x^2 + y^2 + x^2 + y^2 = 800$, de donde $x^2 + y^2 = 400$ y $\sqrt{x^2 + y^2} = 20$.

16. **(B)** Habrá que ver los factores que aparecen en el mínimo común múltiplo de los 40 primeros enteros y que no aparecen en el de los 30 primeros. Dichos factores son todos los primos que hay entre 30 y 40 que son 31 y 37 y además un 2, pues un factor del mínimo común múltiplo de los 40 primeros números es 2^5 (por existir el 32) y la mayor potencia de 2 en el otro mínimo común múltiplo es 2^4.

Así pues, el cociente pedido será $31 \cdot 37 \cdot 2 = 2294$.

17. **(A)** $\dfrac{88}{77 \cdot 66} = \dfrac{0'88}{7'7 \cdot 6'6}$ (dividiendo numerador y denominador por 100).

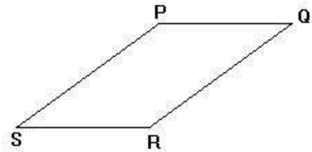
18. **(C)** Si los lados miden $2x$, $2x$, x y x, el perímetro será múltiplo de 6 y la respuesta C.

19. **(D)** Cada paréntesis consta de 2002 sumandos y la diferencia entre cada sumando de un paréntesis y el correspondiente del otro es 1997 por lo que la respuesta será $1997 \cdot 2002$.

20. **(C)** El producto de todos los primos citados es un número par (tiene el factor 2) pero no múltiplo de 4; así pues es de la forma $4a + 2$ que al dividirlo entre 4 dará resto 2.

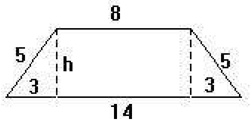
21. **(C)** En dicho club de Matemáticas hay 99 chicas. Por otra parte, el número de estudiantes de dicho club que cursa 2º ESO o bien es 100, con lo que habría 98 chicas ó 50 con lo que habría 49 chicas. Pero si fueran 100, todas estarían en 2º de ESO y el total de chicas es 99, no 98, así que en 2º de ESO hay 50 estudiantes de los que 49 son chicas y el resto de los componentes del club, otros 50, son todo chicas y no cursan 2º.

22. (D)



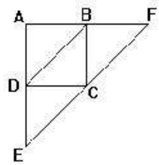
Como los cuatro ángulos suman 360º y son iguales dos a dos, $P + Q = 180º$, o sea, $5Q = 180º$, $Q = 36º$ y $P = 4 \cdot 36 = 144º$.

23. (A)

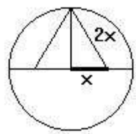


h = $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ y Área = $\dfrac{14+8}{2} \cdot 4 = 44$

24. (C) El trapecio citado es el $BFED$ que se compone de tres triángulos rectángulos iguales. Como el área del cuadrado es 2800 y éste se compone de dos triángulos rectángulos iguales a aquéllos, el área del trapecio será $3 \cdot \dfrac{2800}{2} = 4200$.



25. (C) El mayor triángulo equilátero con esas características es el que tiene como altura el radio, que si el área del círculo es 36π, valdrá 6. Por otra parte, $(2x)^2 = 6^2 + x^2$, con lo que $x = 2\sqrt{3}$ y la base de dicho triángulo medirá $4\sqrt{3}$ por lo que su área será $\dfrac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 = 12\sqrt{3}$.

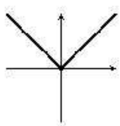


II CONCURSO DE PRIMAVERA. 3º NIVEL (4º ESO - 1º BACHILLERATO). 1ª FASE. DÍA 4-3-98. 1 HORA 15 MINUTOS

1. **(B)** Tanto r como s son la soluciones de la ecuación $x+\frac{1}{x}=19+\frac{1}{19}$, que es equivalente a la $19x^2-362x+19=0$ en la que el producto de las soluciones es $\frac{19}{19}=1$.

2. **(E)** Inspeccionando las soluciones vemos que $\left(2+\sqrt{3}\right)^2=4+3+4\sqrt{3}=7+4\sqrt{3}$, por lo que $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$ y la respuesta es E.

3. **(C)** Si A es el área común, el lado del cuadrado es $\sqrt{A}$ y el diámetro del círculo es $2\cdot\sqrt{\frac{A}{\pi}}$, por lo que el cociente será $\frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{\frac{A}{\pi}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

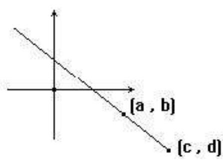
4. **(B)** Como la gráfica de $y=|x|$ es  , de las dadas, la que la corta en un solo punto será $y=x+1$.

5. **(C)** Si $x+y=20$ y $x^2+y^2=300$, elevando la primera igualdad al cuadrado y restándole la segunda tenemos que $2xy=100$, por lo que $xy=50$.

6. **(B)** El producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares siempre es -1 excepto si una de ellas es horizontal, es decir, de pendiente 0.

7. **(B)** Nos dicen que $(x-1)^2=\underbrace{10...0}_{14\text{ ceros}}$ y $x>0$, de donde $x-1=10.000.000$, es decir $x=10.000.001$.

8. **(A)** $\frac{b-d}{a-c}$ es la pendiente de la recta dada, que escrita su ecuación en forma explícita es $y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$, es decir, de pendiente $-\frac{3}{4}$.



9. **(B)** La igualdad es válida para cualquier x que no anule el denominador y como éste se anula solamente una vez, en $x=-2$, la respuesta será B.

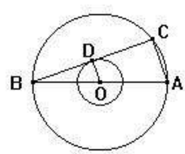
10. **(E)** $\frac{2}{x}$ es entero para cualquier x de la forma $\pm\frac{1}{n}$ con n natural, es decir, para infinitos valores de x.

11. **(C)** Puesto que $12^n = (2^2 \cdot 3)^n = 2^{2n} \cdot 3^n$, 2^9 será un factor suyo cuando $2n \geq 9$ y el menor entero positivo n con esa propiedad es el 5.

12. **(A)** Interpretando $|a - b|$ como la distancia de a a b, concluimos que si $x \geq 1$, la diferencia pedida siempre será 2, si $x \leq -1$, dicha diferencia siempre será -2 y si $-1 < x < 1$, dicha diferencia alcanzará un valor entre -2 y 2, así que nunca será 4.

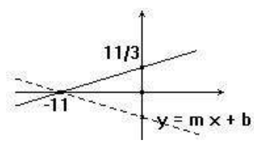
13. **(E)** Si hay 101 baldosas entre las dos diagonales, es que en cada una hay 51 (una está contada dos veces), es decir, en cada lado hay 51 baldosas, por lo que el número total de baldosas será $51^2 = 2601$.

14. **(B)** La recta OD es paralela a AC pues los ángulos $B\hat{D}O$ y $B\hat{C}A$ son ambos rectos.



Así pues, sen $B = \frac{OD}{BO} = \frac{1}{3} = \frac{AC}{BA} = \frac{12}{BA}$, de donde sigue que $BA = 36$ y el radio de la circunferencia mayor será 18.

15. **(C)** La recta de trazos es la $y = mx + b$ cuya pendiente será $m = -\frac{1}{3}$ y ordenada en el origen $b = -\frac{11}{3}$, por lo que $m + b = -4$.



16. **(C)** $\frac{a + b^{-1}}{a^{-1} + b} = \frac{a + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} + b} = \frac{a}{b} = 13$, de donde $a = 13b$ y como $a + b \leq 100$, las parejas (a, b) de enteros positivos en esas condiciones son $(13 \cdot 1, 1)$, $(13 \cdot 2, 2)$, ... $(13 \cdot 7, 7)$, es decir, siete.

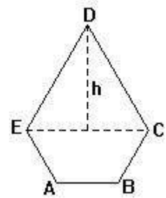
17. **(E)** Las gráficas de II y III son rectas con un agujero cada una, en los puntos de abscisas -2 y 3 respectivamente. Como la de I es una recta, sigue que todas las gráficas son diferentes.

18. **(A)** Este año las bicicletas cuestan $16000 + \frac{5}{100}16000 = 16800$ ptas. y los cascos $4000 + \frac{10}{100}4000 = 4400$, por lo que la compra conjunta costará 21200 ptas.

que frente a 20000 que costaba el año pasado ha supuesto un incremento de 1200 sobre 20000, es decir, un porcentaje de $\frac{1200}{20000}\cdot 100 = 6$ con lo que la respuesta es A.

19. **(B)** $\sqrt{\frac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}} = \sqrt{\frac{2^{30}+2^{20}}{2^{12}+2^{22}}} = \sqrt{\frac{2^{20}(2^{10}+1)}{2^{12}(1+2^{10})}} = \sqrt{2^8} = 2^4 = 16.$

20. **(B)** $ABCE$ es la mitad de un hexágono regular de lado 2 por lo que su área será $3\cdot\frac{2^2\cdot\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$, y CDE es un triángulo equilátero de base $EC = 4$ y área $\frac{4^2\cdot\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$, teniéndose que el área pedida es $3\sqrt{3}+4\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$.



21. **(E)** Si n es el número de lados de un polígono regular, su ángulo central valdrá $\frac{360º}{n}$, por lo que cada ángulo del polígono valdrá $2\frac{180-\frac{360º}{n}}{2}$, es decir, $180º-\frac{360º}{n}$. Dicho número será entero cuando n sea un divisor de 360, es decir, (1, 360), (2, 180), (3, 120), (4, 90), (5, 72), (6, 60), (8, 45), (9, 40), (10, 36), (12, 30), (15, 24), (18,20), o sea, 24 valores.

22. **(D)** Escribiendo bloques formados por unos, doses, treses, etc., veamos si hay un número entero de bloques para cubrir 1998 lugares.

Para ello, si n es el nº buscado, debería verificarse que $1998 = \frac{1+n}{2}n$. Así pues $n^2 + n - 3996 = 0$, de donde $62 < n < 63$, por lo que el número que ocupa el lugar 1998 es el 63. (Los 62 primeros números ocupan menos de 1998 lugares y los 63 primeros más) y el resto pedido será el resto de la división de 63 entre 5, o sea, 3.

23. **(E)** Antonio descansa los días 4, 8, 12, ..., es decir los días múltiplo de 4. Beatriz descansa los días 8, 9, 10, 18, 19, 20, 28, 29, 30, etc.

Así pues, entre otros, Beatriz descansa los múltiplos de 10 y como Antonio descansa los múltiplos de 4, coincidirán en los días múltiplos de 20 (ya que 20 = mcm (4 ,10)). Por otra parte, Beatriz descansa los múltiplos de 10 menos 2 que son múltiplos de 4 alternativamente. Los días impares que descansa Beatriz nunca coincidirán con días de descanso de Antonio.

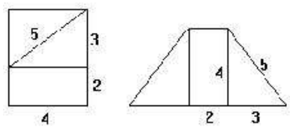
En total, hay 50 múltiplos de 20 y 100 múltiplos de 10 menos 2, por lo que el número total de días de coincidencia en el descanso será 50 + 50 = 100.

24. **(D)** Cualquier número entero mayor que 1998! + 1 y menor que 1998! + 1999, es de la forma 1998! + n donde 1 < n < 1998 por lo que dicho número será divisible entre n y por tanto no será primo.

25. **(E)** Como la última cifra de la cuarta potencia de cada uno de los diez primeros enteros positivos coincidirá con la de cualquier número que tenga igual número de unidades que el número en cuestión, hallemos la última cifra de dichas potencias:

1, 6, 1, 6, 5, 6, 1, 6, 1, 0. La suma de todas ellas es 33. En la suma pedida hay 200 ciclos completos cuya suma acabará, pues, en la última cifra de 200 · 33 que será 0 y habrá que quitar la última cifra de $1999^4 + 2000^4$, que es 1, por lo que la suma pedida acabará en 9.

II CONCURSO DE PRIMAVERA. 1er NIVEL (PRIMARIA). 2ª FASE. DÍA 25-4-98. 1 HORA 15 MINUTOS

1. **(C)** Como de 7 + 4 me llevo 1, la cifra pedida será 5.
2. **(C)** La palabra CONCURSO tiene 8 letras de las cuales solamente 3 son vocales, por lo que la suma pedida sería $3 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 11$.
3. **(A)** La primera cifra diferente es la de las centésimas y la mayor aparece en A.
4. **(C)** Entre los dos gatitos pesan medio kilo y entre los tres 4 kg y medio.
5. **(B)** 

El trapecio que formó Sofía es el de la figura cuyo perímetro será $5 + 2 + 5 + 8 = 20$ cm.
6. **(B)** En B, la cifra de las centenas es 3 que es la suma de 2, cifra de las decenas, y 1, cifra de las unidades.
7. **(D)** OIO tiene dos ejes de simetría, uno horizontal otro vertical.
8. **(B)** En 75 la cifra de las unidades es 5 y la otra, 7.
9. **(B)** Los próximos sábados a partir de hoy, 25 de Abril, son 2 de Mayo, 9, 16, etc..., por lo que la respuesta será B.
10. **(C)** Si redondeo 173 kg a la decena más próxima, obtengo 170.
11. **(E)** Los paralelogramos son los cuadriláteros con los lados paralelos dos a dos.
12. **(D)** Si saco 3 calcetines es posible que haya uno de cada color pero si saco 4, es seguro que al menos dos son del mismo color por lo que la respuesta es D.
13. **(D)** Los más parecidos a 30º son B y D y de ellos el más parecido es D.
14. **(D)** Hay 5 litros de pintura roja en un total de 9 litros de pintura, por lo que la proporción pedida es 5 a 9.
15. **(C)** La diferencia entre dos primos siempre será un número par pues ambos son impares, excepto que uno sea el 2, pero 7 nunca podrá ser dicha diferencia pues por lo que hemos dicho será impar y si uno es 2, el otro sería 9 que no es primo por lo que la respuesta es C.
16. **(C)** En la suma que nos piden no aparece 20^2 que habrá, pues, que restarlo a 2870, suma de los cuadrados de los 20 primeros enteros positivos, dándonos $2870 - 400 = 2470$.
17. **(E)** El lado de cada cuadrado pequeño es 1 m, por lo que con 16 de los pequeños puedo cubrir el grande.

18. **(B)** $\dfrac{27 \times 31 \times 35 \times 39 \times 43}{43 \times 39 \times 35 \times 31 \times 3} = \dfrac{27}{3} = 9$

19. **(C)** Si al repartir cierta cantidad de cosas entre 3 caben a 240 cada uno, si las reparto entre 6 cabrían a la mitad, o sea, a 120.

20. **(B)** Volverá a dar la hora exacta cuando haya atrasado 12 horas, o sea, 720 minutos que ocurrirá dentro de 72 días si cada día atrasa 10 minutos.

II CONCURSO DE PRIMAVERA. 2º NIVEL (1º-2º-3º-ESO). 2ª FASE. DÍA 25-4-98. 1 HORA 30 MINUTOS

1. **(C)** 878 se compone de 87 decenas de números y 8 números. Como uno de éstos es el 877, habrá en total 88 números terminados en 7.

2. **(C)** Si observamos los números dados, vemos que el mayor cociente se da en $\frac{-24}{-2}=12$.

3. **(B)** Habrá que ver cuántos son divisibles por 3, que son 3, 6, 9, ..., 45, es decir 15, además los divisibles por 5, que son 5, 10, 15, 20, ..., 45, o sea, 9, sumarlos y descontar los contados dos veces, o sea, los divisibles por 15, que son 15, 30, 45, es decir, 15 + 9 − 3 = 21.

4. **(A)** Al ser un paralelogramo, A es (−1, 0) por lo que la base mide 4, la altura 2 y el área 8.

5. **(C)** El producto dado tiene 14 cincos y 9 doses. Cada pareja de 5 y 2 aporta un cero, por lo que dicho producto acabará en 9 ceros.

6. **(A)** El ángulo $P\hat{C}B$ mide 30º y el triángulo CPB es isósceles siendo 180 − 30 = 150º la suma de los dos ángulos iguales, así que el ángulo PBC mide $\frac{150}{2}=75º$.

7. **(C)** En la 1ª fila hay 10 asientos y podemos colocar con las condiciones pedidas a 5 estudiantes. En la 2ª hay 11 con lo que podremos colocar a 6. En la 3ª hay 12 y podemos colocar solamente 6. Siguiendo este argumento podremos colocar 5, 6, 7, 8, etc. en las filas impares y 6, 7, 8, etc. en las filas pares. Así pues, el número total de estudiantes que podemos colocar cumpliendo los requisitos pedidos es 5 + 2 (6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14) + 15 = 20 + 180 = 200.

8. **(C)** Aunque se haya borrado la escala en el eje vertical podemos rehacerla poniendo, por ejemplo 10 trabajadores (o cualquier número) para cada división. Así pues, habría 50 trabajadores con 1 año de trabajo, otros 50 con 2, 80 con 3 años, 30 con 4 etc. Esto haría un total de 50+50 +80 +30 + 3·20 + +3·10 = 300 trabajadores de los que 3 · 2 + 3 · 10 llevan trabajando 50 más años, es decir 90 de un total de 300, lo que supone el 30%.

9. **(C)** La suma de todos es 10 · 10 = 100 y el mayor aparecerá cuando los otros nueve tomen los más pequeños valores posibles, es decir 1, 2, 3, ..., 9. Como la suma de estos nueve es 1 + 2 + 3 + ... + 9 = 45, el mayor podría llegar a ser 100 − 45 = 55.

10. **(A)** Como el número representado por ABC es menor que 300, el representado por AB es menor que 30, así que $A = 2$ y la suma es

$$\begin{array}{r} 2BC \\ 2B \\ + \quad 2 = \\ \hline 300 \end{array}$$

Como $B + C \neq 18$ (pues ambos no pueden ser 9), sigue que

$B + C + 2 = 10$ y $1 + B + 2 = 10$, de donde $B = 7$, con lo que da $C = 1$ y la suma es

$$\begin{array}{r} 271 \\ 27 \\ + \quad 2 \\ \hline 300 \end{array}$$

11. **(A)** De 20º a 32º hay 4 subidas de 3 grados cada una, lo que habría supuesto un aumento de $4 \cdot 4 = 16$ cm^3. Si el volumen ahora es 24 cm^3, cuando estaban a 20º sería de $24 - 16 = 8$ cm^3.

12. **(D)** Hay nueve parejas, todas igualmente probables, que nos pueden aparecer. De las nueve, el producto de ellas será impar cuando los dos factores lo sean, es decir, las (1, 3) y (1, 5), por lo que en siete casos el producto será par y la probabilidad será, pues, $\frac{7}{9}$.

13. **(A)** Como hay 36 miembros entre los dos grupos y 23 son de alguno de los dos, o de los dos, hay $36 - 23 = 13$ que, seguro, son tanto del coro como de la orquesta. De estos trece, 6 son chicas por lo que hay 7 chicos que son del coro y de la orquesta y como en el coro hay 8 chicos, habrá 1 chico del coro que no está en la orquesta.

14. **(C)** 1er minuto: $\frac{1}{4}$ blanco y $\frac{3}{4}$ negro

2º minuto: $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16}$ blanco y $\frac{9}{16}$ negro

3er minuto: $\frac{7}{16} + \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{37}{64}$ blanco y $\frac{27}{64}$ negro

4º minuto: $\frac{37}{64} + \frac{27}{64} \cdot \frac{1}{4} = \frac{175}{256}$ blanco y $\frac{81}{256}$ negro

5º minuto: $\frac{175}{256} + \frac{81}{256} \cdot \frac{1}{4} = \frac{781}{1024}$ blanco y $\frac{243}{1024}$ negro

15. **(C)** Puesto que el viaje ha sido de 30.000 km y siempre llevábamos 4 ruedas, entre todas han recorrido $30.000 \cdot 4 = 120.000$ km que, repartidos entre las 5 ruedas que hemos utilizado, tocan a $\frac{120000}{5} = 24000$ km cada una.

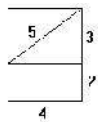
16. (C) El único sumando que apareció en la primera suma y no aparece en la suma pedida es 20^2 por que el resultado pedido será $2870 - 20^2 = 2470$.

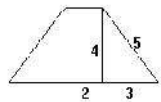
17. (B) Como el cilindro B tiene igual base y doble altura, tendrá doble volumen que el dado.

18. (D) S debe ser mayor que la diferencia $10 - 6'5 = 3'5$, por que el menor valor posible para S es 4. Observa que con $6'5$, 10 y 4 se puede formar un triángulo.

19. (A) El cubo grande debe tener un volumen inferior o igual a 400 cm^3 y un número entero como arista. Así pues, hay que encontrar el mayor entero a tal que $a^3 \leq 400$, y ese a es 7 por lo que habríamos utilizado $7^3 = 343$ cubitos y nos sobrarían $400 - 343 = 57$.

20. (B) Podemos disponer las piezas dadas para formar el trapecio isósceles de la siguiente forma:
por lo que el perímetro pedido será:
$5 + 2 + 5 + 8 = 20$ cm.





21. (B) El lado del cuadrado mide $\frac{32}{4} = 8$ cm por lo que el largo del rectángulo es de $8 + 6 = 14$ cm. Como el perímetro de éste es 32, el largo y el ancho sumaría 16 por lo que el rectángulo medirá 2 cm de ancho.

22. (C)

$$\frac{487.000 \times 12.037.300 + 9.621.001 \times 487.000}{19.367 \times 0'5} \approx \frac{500.000\,(12.000.000 + 10.000.000)}{20.000 \times 0'5} =$$

$= 50 \cdot 22.000.000 \approx$ Mil millones.

23. (E) El cubo tendrá $\frac{7'260}{1} = 7'26$ m^2 de superficie, es decir $6a^2 = 7'26$ y $a = 1'1$ m, siendo a la arista del cubo. Como un cubo tiene 12 aristas, la suma de todas ellas será $1'1 \cdot 12 = 13'2$ m.

24. (D) Sacando 3 calcetines es posible que sacáramos uno de cada color, pero si sacamos 4, es seguro que hay dos calcetines del mismo color.

25. (B) El agua subirá un volumen igual al del cubo sumergido, es decir, $20^3 = 8000$ cm^3. Este volumen ocupará una parte del prisma de base $40^2 = 1600$ cm^2, lo que hará que la altura ocupada por el agua que sube será $\frac{8000}{1600} = 5$ cm con lo que el agua, que estaba a 30 cm de altura, subirá a 35 cm de altura.

II CONCURSO DE PRIMAVERA. 3er NIVEL (4º ESO, 1º BACHILLERATO O EQUIVALENTE). 2ª FASE. DÍA 25-4-98. 1 HORA 30 MINUTOS

1. **(E)** Puesto que $12 = 2^2 \cdot 3$, el menor factor que le falta para llegar a ser un cubo perfecto es $2 \cdot 3^2$, es decir, 18.

2. **(C)** Hemos pintado de negro 1 cuadradito de la fila de abajo, 2 de la siguiente, etc., hasta 100 de la de arriba, es decir, un total de 1 + 2 + 3 + ... + 100. La forma más cómoda de realizar esta suma es observar que agrupando los sumandos por parejas (1º, último), (2º, penúltimo), etc., todas suman 101 y como hay 50 parejas obtendríamos 50 · 101 = 5050 cuadraditos pintados de negro que constituyen una proporción de $\frac{5050}{10000} = \frac{101}{200}$.

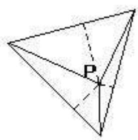
3. **(C)** 30 gatos en 6 minutos cazarán 30 ratones, por lo que en 30 minutos cazarán 150 ratones.

4. **(D)** El producto de las dos soluciones es $\frac{1}{3}$, así que la otra es $\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{3}$ y la suma es $\frac{a}{3}$, o sea, $\frac{a}{3} = \sqrt{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}+1}{3} = \frac{4\sqrt{2}-2}{3}$, de donde $a = 4\sqrt{2} - 2$.

5. **(C)** Al ser $x + 1 > x$ y ambos positivos, $\frac{x}{x+1} < 1$ y la respuesta es C.

6. **(D)** Si x y $2x$ son el número de alumnos de ambas clases, el número de aprobados fue $\frac{66x}{100} + \frac{57 \cdot 2x}{100} = \frac{180x}{100} = \frac{9x}{5}$ y la proporción de aprobados $\frac{\frac{9x}{5}}{x+2x} = \frac{3}{5}$, es decir, el 60%.

7. **(B)** Uniendo P con cada uno de los vértices obtenemos tres triángulos cada uno de base un lado del triángulo equilátero y de altura la distancia de P a ese lado.



Como la suma de las áreas de estos triángulos es el área del triángulo original, podemos escribir $\sqrt{3} = \frac{l}{2}(h_1 + h_2 + h_3)$

llamando h_i a estas distancias. Así pues, $h_1 + h_2 + h_3 = \frac{2\sqrt{3}}{l}$ y al ser $\sqrt{3} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, es $l = 2$ y la suma pedida $\sqrt{3}$.

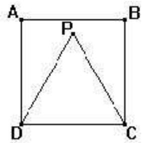
8. **(D)** Llamando A y a a las aristas, tenemos que $\dfrac{A^3}{a^3} = 2$, de donde $\dfrac{A}{a} = \sqrt[3]{2}$.

9. **(A)** Descomponiendo 4018 en factores primos observamos que $4018 = 2 \cdot 7^2 \cdot 41$ y la única opción razonable para edades de padre y dos hijos es 41, $2 \cdot 7$ y 7, así que el padre tenía $41 - 14 = 27$ años cuando nació su hijo mayor.

10. **(C)** Como $x < -4$, $2 + x < -2$, por lo que $|2 + x| > 2$ y $2 - |2 + x| < 0$ y vale $2 + 2 + x = 4 + x$ por lo que su valor absoluto será su opuesto, es decir $-4 - x$.

11. **(D)** $\dfrac{9^{2n} - 3^n}{3^n} = \dfrac{3^{4n} - 3^n}{3^n} = \dfrac{3^n(3^{3n} - 1)}{3^n} = 3^{3n} - 1$.

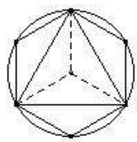
12. **(A)** Como el ángulo $P\hat{C}B$ es de 30º y el triángulo PBC es isósceles, cada uno de los otros dos ángulos, en particular el PBC, medirá 75º.



13. **(A)** Si $1 + \sqrt{x - 1} = \sqrt{x + 1}$ sigue que $1 + x - 1 + 2\sqrt{x - 1} = x + 1$, es decir $2\sqrt{x - 1} = 1$, de donde $4x - 4 = 1$, $x = 1'25$ y $2x = 2'5$. (Observa que, efectivamente, $1'25$ es solución de la ecuación dada).

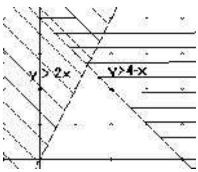
14. **(B)** Si $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = 6$ y $\sqrt{x_1 x_2} = 12$, sigue que $x_1 + x_2 = 12$ y $x_1 x_2 = 144$, de donde la ecuación $x^2 - 12x + 144 = 0$ tendrá por soluciones x_1 y x_2.

15. **(B)** Dividiendo el hexágono en 6 triángulos isósceles como se indica en la figura, observamos que el triángulo ocupa tres de ellos, por lo que el cociente pedido será $\dfrac{6}{3} = 2$.



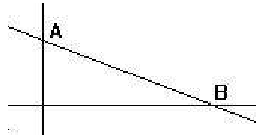
16. **(D)** Al dividir 375 entre 24, obtenemos de cociente 15 y de resto 11, por lo que habrá 15 filas completas antes de la butaca nº 375 y ésta se encontrará en la fila 16.

17. **(A)** Representando gráficamente dichos puntos, tenemos la siguiente figura:



Así pues, los puntos pedidos se encuentran entre los cuadrantes I y II y la respuesta es A.

18. (A) Si a y b son positivos, la recta de ecuación $ax + by = 6$ estará en posición como la de la figura, siendo los puntos **A** y **B** los $\left(0, \dfrac{6}{b}\right)$ y $\left(\dfrac{6}{a}, 0\right)$ respectivamente, de donde $6 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{6}{a} \cdot \dfrac{6}{b}$, con lo que $ab = 3$.

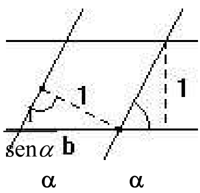


19. (D) Llamando a 2^x, t, obtendríamos $t^2 + 4t - 1 = 0$, por lo que t, que debe ser positivo, será igual a $\dfrac{-4+\sqrt{20}}{2}$, es decir, $\sqrt{5} - 2$ con lo que si $2^x = \sqrt{5} - 2$, $x = \log_2\left(\sqrt{5} - 2\right)$. Como en las respuestas sólo aparecen base 10, podemos poner que si $2^x = \sqrt{5} - 2$, tomando base 10, es $x \log 2 = \log\left(\sqrt{5} - 2\right)$, de donde $x = \dfrac{\log\left(\sqrt{5} - 2\right)}{\log 2}$ y la respuesta es D.

20. (D) Llamando x al 4º término, tenemos que $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{x}{\sqrt[6]{5}}$, de donde

$$x = \frac{\sqrt[3]{5}\sqrt[6]{3}}{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{\frac{5^2 5}{5^3}} = 1$$

21. (C)



La región sombreada es un paralelogramo de base b y altura 1. Como $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{b}$, es $b = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$ y el área

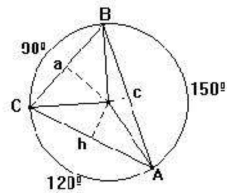
22. (C) Llamando x al precio original, tenemos que el precio sobre el que hemos cargado el impuesto es $x - \dfrac{15x}{100} = \dfrac{85x}{100}$. Así pues, $\dfrac{85x}{100} + \dfrac{15}{100}\dfrac{85x}{100} = 1466'25$, de donde $x = \dfrac{14662500}{9775} = 1500$ \$.

23. (A) Al ser enteros y $d < 100$, es $d \leq 99$ con lo que $c < 396$, así pues $c \leq 395$, de donde $b < 1185$, por lo que $b \leq 1184$, $2b \leq 2368$, de donde $a < 2368$ y el mayor valor entero posible para a es 2367.

24. (B) La ecuación de la recta que une los puntos (3, 17) y (48,281) es $y=\frac{88}{15}x-\frac{3}{5}$, es decir $y=\frac{88x-9}{15}$, o lo que es lo mismo $15y+9=88x$.

Como (3, 17) es solución de esta ecuación, podemos poner $\begin{cases}15y+9=88x\\ 15\cdot 17+9=88\cdot 3\end{cases}$ que, restando, nos lleva a $\frac{y-17}{x-3}=\frac{88}{15}=\frac{88k}{15k}$ para cualquier nº real k. Así pues, $\begin{cases}y=17+88k\\ x=3+15k\end{cases}$. Como, por ejemplo, $3\le x\le 48$, los únicos k posibles son 0, 1, 2, 3 de donde habrá 4 puntos reticulares incluyendo los extremos.

25. (D) Una forma cómoda de resolver el problema pasa por determinar, en primer lugar, los ángulos centrales que subtienden estos arcos. Como el valor del ángulo central es proporcional al arco que determina, sigue que son: $3\cdot\frac{360}{12}$, $4\cdot\frac{360}{12}$ y $5\cdot\frac{360}{12}$ con lo que los ángulos del triángulo serían en cada caso la mitad, es decir 45º, 60º y 75º. Así pues, el ángulo central desde el que se ve el arco de longitud 3 es de 90º, por lo que $\frac{2\pi r}{4}=3$, $r=\frac{6}{\pi}$ y el problema se reduce a hallar el área de un triángulo de ángulos 45º, 60º y 75º, inscrito en un círculo de radio $\frac{6}{\pi}$.



$$\text{sen } 60º=\frac{\frac{b}{2}}{\frac{6}{\pi}}\Rightarrow b=2\cdot\frac{6}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{6\sqrt{3}}{\pi}\quad;\quad \text{sen } 45º=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{6}{\pi}}\Rightarrow a=2\cdot\frac{6}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{6\sqrt{2}}{\pi}$$

$$\text{Área}=\frac{1}{2}\cdot b\cdot a\ \text{sen } C=\frac{1}{2}\cdot\frac{6\sqrt{3}}{\pi}\cdot\frac{6\sqrt{2}}{\pi}\cdot\text{sen } 75º=\frac{18}{\pi^2}\sqrt{6}\cdot\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)=$$

$=\frac{9}{\pi^2}\left(3+\sqrt{3}\right)$. (Ôbtenemos sen 75º como sen (45º + 30º) = $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$).

Nota: Para hallar más rápidamente las longitudes de los lados se puede aplicar directamente el teorema de los senos $\frac{a}{\text{sen } A}=\frac{b}{\text{sen } B}=\frac{c}{\text{sen } C}=2R$ siendo R el radio de la circunferencia circunscrita.

III CONCURSO DE PRIMAVERA. 1er NIVEL (PRIMARIA). 1ª FASE. DÍA 3-3-99.

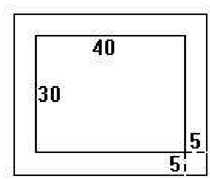
1. **(E)** Como cada hora tiene 60 minutos, tendrá 3600 segundos, por lo que el número de segundos de 3 horas y media será $3{,}5 \times 3600 = 12600$.

2. **(D)** A Dani le dieron el 25, que si lo hubiera multiplicado por 5 habría respondido 125.

3. **(C)** Sabemos que 18×12 es el número de manzanas que hemos repartido. Si en lugar de 18 niños hubiera habido 6 menos, o sea, 12, el número de manzanas para cada uno sería el otro factor, o sea, 18.

4. **(A)** Hay 7 estudiantes que tienen gafas. De los 23 restantes, hay 13 que tienen calculadora, pues había 2 que tenían calculadora y gafas. Así que quedan $23 - 13 = 10$ que no tienen ni calculadora ni gafas.

5. **(A)** El área de la parcela es $30 \times 40 = 1200$ m^2 y el paseo rodea un rectángulo que contiene a la parcela de 40×50 m^2, luego de área 2000 m^2. La diferencia entre las dos, $2000 - 1200 = 800$ m^2 será lo que corresponde solo al paseo.



6. **(C)** $\dfrac{1.000.000}{100} = 10.000$ centenas.

7. **(C)** $1000 \times 968 = 10 \times 96800$.

8. **(D)** Si $\dfrac{3}{4}$ cm equivalen a 10 km, entonces 1 cm equivale a $= \dfrac{4}{3} \cdot 10$ Km, y 12 cm a $12 \cdot \dfrac{4}{3} \cdot 10$ km $= 160$ km.

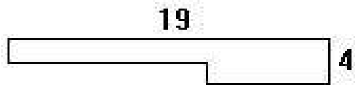
9. **(B)** Sumando los dos primeros controles, Rocío obtuvo $8'4 \cdot 2 = 16'8$. Como en el tercero obtuvo un $9'6$, entre las tres sumó $16'8 + 9'6 = 26'4$ por lo que la media pedida será $\dfrac{26'4}{3} = 8'8$.

10. **(D)** $\dfrac{1}{4} + 0{,}75 = 0'25 + 0'75 = 1$

11. **(D)** La pesa de 600 g equivale a la otra media tarta, por lo que la tarta entera pesará 1200 g.

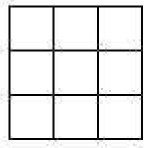
12. **(B)** Si el número buscado es el mayor divisor de 2468 distinto de él, será su mitad, o sea 1234.

13. **(D)** El perímetro de la figura dada coincide con el de un rectángulo de lados 19 y 4, o sea, $2 \cdot 19 + 2 \cdot 4 = 46$.

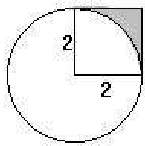


14. **(D)** Los números pedidos serán mayores o iguales a 101 y menores o iguales a 999 y lo que deben verificar es tener la primera cifra igual que la 3ª. Así pues, si la central es un cero habrá 9, 101, 202, ..., 909, y análogamente para cualquier posible cifra central, es decir, habrá en total $9 \times 10 = 90$ capicúas.

15. **(C)** El lado de cada cuadradito pequeño es 3, por lo que el lado del cuadrado grande es 9 y su perímetro $9 \times 4 = 36$.



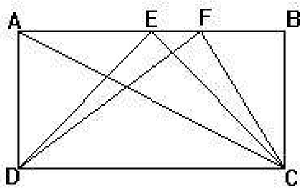
16. **(B)** La región sombreada es un cuadrado excepto un cuadrante. Como el área del círculo es $\pi \cdot 2^2$, el área del cuadrante es la cuarta parte, o sea, π, por lo que el área pedida es $4 - \pi$.



17. **(B)** Cuando el perro recorrió los 100 m que le separaban de casa, el gato habría recorrido la mitad, o sea 50 m y como estaba a 80 m, aún le faltaban $80 - 50 = 30$.

18. **(C)** En la bolsa A hay 2 blancas de un total de 12, en la B 3 de un total de 16 y en la C 4 de un total de 20 bolas. Es decir, en la A de cada 6 hay 1 blanca, en la C de cada 5 hay 1 blanca y en la B hay menos de 1 blanca por cada 5 pues hay 3 blancas y más de 15 bolas. Así pues, donde es más fácil sacar blanca es en la C.

19. **(C)** Escribo todos los resultados posibles (1, 1), (1, 2) (1, 3) ... (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5) y (6, 6). (Le he hecho una señal a los dados para distinguirlos, así pues cuento el (2, 5) y el (5, 2) por ejemplo). Ahora veo que la suma 5 se da en 4 veces, la suma 6 en 5 veces, la 7 en 6 veces, la 8 en 5 y la 9 en 4 veces, por lo que la respuesta es suma 7, o sea, C.



20. **(D)** Todos los triángulos tienen igual base e igual altura, por lo que tendrán igual área.

III CONCURSO DE PRIMAVERA. 2º NIVEL (1º-2º ESO). 1ª FASE. DÍA 3-3-99.

1. **(E)** Un día son 24 horas, o sea $24 \cdot 3600 = 86400$ segundos.

$86400 \cdot 80 \approx 100.000 \cdot 70 = 7.000.000$ mililitros = 7000 litros.

2. **(E)** Si Alicia hubiera puesto las comas, tenía que haber contado $3 + 2 = 5$ lugares desde la derecha y habría obtenido $0'10050$, es decir, $0'1005$, por lo que la respuesta es E.

3. **(C)** De 2 a 99 hay 98 sumandos que agrupados por parejas hacen que cada pareja valga -1, por lo que esas 49 parejas sumarán -49 que sumado al último sumando, 100, resultará 51.

4. **(A)** Transformando los factores en $1+\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$; $1+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$; $1+\frac{1}{7}=\frac{8}{7}$; $1+\frac{1}{8}=\frac{9}{8}$;

$1+\frac{1}{9}=\frac{10}{9}$, tenemos $\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{10}{9}=2$

5. **(D)** La suma de los tres primeros es $15 \cdot 3 = 45$; la suma de los dos últimos es $10 \cdot 2 = 20$ así que la suma de todos es 65 por lo que su media será $\frac{65}{5}=13$.

6. **(C)** El total de grasa entre las 8 barritas de cada caja es $8 \cdot 3'5 = 28$ g que sobre un total de 250 g que pesa la caja supone una proporción de $\frac{28}{250}=\frac{112}{1000}=11'2\%$.

7. **(D)** La suma de cada fila, columna o diagonal es $16 + 11 + 12$, es decir 39, por lo que el cuadradito central es $39 - (11 + 15) = 13$, con lo que el que está a la derecha de N será el $39 - (12 + 13) = 14$ y $N = 39 - (16 + 14) = 9$.

16	N	
11		15
12		

8. **(E)** Voy realmente a x km/hora, con lo que $x+\frac{10x}{100}=100$, es decir $11x = 1000$ y

$x=\frac{1000}{11}=\left(90+\frac{10}{11}\right)$ km/hora.

9. **(C)** $5x - 2 - (3x - 4) = 5x - 2 - 3x + 4 = 2x + 2$.

10. **(C)** La diferencia $180 - 165 = 15$ será el peso de $20 - 15 = 5$ pastillas, así que cada pastilla pesará 3g, las 20 pesarán 60 g y el tubo pesará $180 - 60 = 120$ g.

11. **(D)** Pedro dejó x preguntas en blanco, por lo que contestó $25 - x$. Como no tuvo ningún fallo, se verificará que $2x + 5(25 - x) = 98$, es decir, $27 = 3x$ y $x = 9$, por lo que contestó correctamente $25 - 9 = 16$ preguntas.

12. (A) Si quito un chico, queda igual número de chicas que de chicos $= x$. Así que hay x chicas y $x + 1$ chicos. Si quito una chica, me quedan $x - 1$ chicas y $x + 1$ chicos y me dicen que $2(x - 1) = x + 1$, es decir, $x = 3$ y el total será 7, tres chicas y cuatro chicos.

13. (C) En un día, un conejo come x kg de zanahorias y un elefante 365 kg de zanahorias. Nos dicen que $x + 365x = 111$, por lo que $x = \frac{111}{366} = \frac{37}{122}$ kg.

14. (C) El mayor denominador aparece en C, $x + 1$, donde a su vez no hay ningún numerador menor, por lo que será el más pequeño.

15. (B)

			9	a	b	c	x				7		

Llamemos a, b y c a las tarjetas que hay entre 9 y x. Así pues $9 + a + b = 20$ y $a + b + c = 20$, de donde $c = 9$. Como, por otra parte $b + c + x = 20$, sigue que $x = a$. Así pues, numeremos ahora:

			9	a	b	9	a				7		

La suma de tres consecutivas es $9 + a + b$, luego a la derecha de a habrá b, a la derecha 9, a la derecha a y a la derecha 7. Así que $9 + a + 7 = 20$ y $a = 4$, de donde $x = 4$.

16. (D) El primer número de la izquierda de la fila 2 es $2 = 1 + 1$

El primer número de la izquierda de la fila 3 es $5 = 1 + 1 + 3$

El primer número de la izquierda de la fila 4 es $10 = 1 + 1 + 3 + 5$

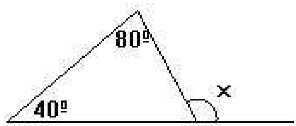
El primer número de la izquierda de la fila 5 es $17 = 1 + 1 + 3 + 5 + 7$

Así pues, el primer número de la izquierda de la fila 89 es 1 + suma 88 primeros impares.

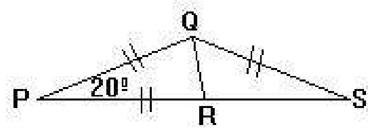
El primer impar es $1 = 2 \cdot 1 - 1$, el 2º, $3 = 2 \cdot 2 - 1$, el 88º será $2 \cdot 88 - 1 = 175$.

Tenemos que sumar entonces $1 + 3 + 5 + ... + 173 + 175$ y luego sumarle 1. Agrupando en pareja los 88 impares (1º- último), (2º- penúltimo) etc., cada pareja suma 176, y hay 44 parejas, así que dicha suma será $176 \cdot 44 = 7744$ por lo que el primer número de la izquierda de dicha fila será 7745 y el tercero 7747.

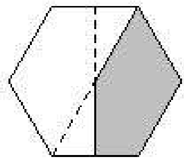
17. (B) Como el tercer ángulo de ese triángulo es $180 - (40 + 80) = 60º$, x será 120º.



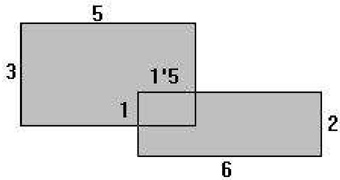
18. (**C**) El triángulo PQR es isósceles, por lo que el ángulo PQR = 80º. Análogamente el ángulo PSQ = 20º, por lo que el ángulo PQS = 140º y el ángulo RQS es la diferencia entre PQS y PQR, o sea, 140º − 80º = 60º.



19. (**A**) Trazando las diagonales mayores del hexágono obtenemos 6 triángulos equiláteros iguales. La figura sombreada consta de $2 + \frac{1}{2}$ de estos triángulos, es decir, la fracción de área sombreada es $\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$.



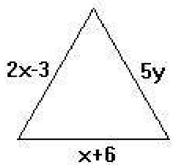
20. (**A**)



La suma de las áreas de los rectángulos es $5 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 27$ y el área común es $1'5 \cdot 1 = 1'5$. Como ésta está contada dos veces en la suma de las áreas, sigue que el área sombreada es $27 - 1'5 = 25'5$.

21. (**D**) Entre el 20 y el 53 hay 32 alumnos (sin contar ni el 20 ni el 53) en cada una de las mitades del círculo. Así que el número total será 64 + 2 = 66.

22. (**E**)



Como $2x - 3 = x + 6$ pues el triángulo es equilátero, que $x = 9$ y como $x + 6 = 5y$, entonces $y = 3$.

23. (**E**) Como son todas diferentes y ninguna cero, entre las tres menores suma al menos 6 ·(1 + 2 + 3). Así pues, una posibilidad es 6123 y todas las ordenaciones posibles con esas 4 cifras, o sea, 24 números. Pero la suma 12 con todas diferentes no se da solamente en 1 + 2 + 3 + 6 sino también en 1 + 2 + 4 + 5. Así pues, la cantidad total de números con esas características será 24 · 2 = 48.

24. (**D**) Averigüemos en primer lugar los divisibles por 6, 9 ó 6 y 9. Como los múltiplos de 6 van de 6 en 6 habrá 166 número divisibles por 6. Análogamente habrá 111 números divisibles por 9 pero entre todos éstos, 166 + 111 = 277, hemos contado dos veces los divisibles por 18 que son 55. Así que, divisibles por 6 ó 9 son 277 − 55 = 222, por lo que no divisibles ni por 6 ni por 11 habrá 1000 − 222 = 778 números.

25. (**C**) La única cara que no tiene ninguna arista en común con la marcada con U es la R.

III CONCURSO DE PRIMAVERA. 3er NIVEL (3º-4º ESO). 1ª FASE. DÍA 3-3-99. 1 HORA 30 MINUTOS

1. **(B)** Un día tiene 86400 segundos, así que $\frac{1.000.000}{86400} \approx \frac{1.000.000}{100.000} = 10$, por lo que la respuesta es B.

2. **(B)** Tomando los mil primeros sumandos y agrupándolos en parejas, cada una de las 500 parejas resulta ser −1, por lo que la suma total será −500 +1001 = 501.

3. **(E)** $1 + \frac{3}{100} + \frac{1}{1000} = 1 + 0'03 + 0'001 = 1'031$, es decir, respuesta E.

4. **(B)** Sabemos que $\frac{a+b+c+d}{4} = 48$ y nos piden el valor de

$\frac{a-8+b-8+c-8+d-8}{4}$, es decir $\frac{a+b+c+d}{4} - 8$, o sea, 40.

5. **(D)** De los 20 partidos que juega, debe ganar al menos $\frac{60}{100}20 = 12$. Como ya ha jugado 8, de los que ha ganado 4, le quedan 8 por ganar de un total de 12, que le quedan por jugar, así que la proporción que debe ganar de lo que le queda es $\frac{8}{12} = \frac{2}{3} = 66'6\%$.

6. **(C)** A final del primer año, 1 kg de queso costaba $500 + \frac{500}{10} = 550$ ptas. y a final del segundo año $550 + \frac{550}{10} = 605$ ptas., así que con 1000 ptas. podré comprar $\frac{1000}{605}$ kg, es decir, un poco más de 1653 gramos, por lo que la respuesta será C.

7. **(B)** El orden es $2^{7/2}$, $2 + 2^6$, $2 \cdot 2^6 - 2$, 2^7, $2 \cdot 2^7$, es decir, que el central es $2 \cdot 2^6 - 2$, respuesta B.

8. **(D)** Un millón es 10^6, es decir, $2^6 \cdot 5^6$, por lo que la respuesta es 2^6.

9. **(C)** La diferencia 180 − 165 = 15 es el peso de las 5 pastillas que hemos tomando hasta ese momento. Así pues, cada pastilla pesará 3 g, las 20 pastillas 60 g y el peso del tubo será 180 − 60 = 120 g.

10. **(B)** $\dfrac{3}{2-\dfrac{x}{2}}=2$, es decir, $\dfrac{6}{4-x}=2$, por lo que $4-x=3$ y $x=1$.

11. **(E)** Debe pedir x ladrillos sabiendo que $x-\dfrac{7x}{100}\geq 10000$, es decir $x\geq 10753$.

Como vienen en cajas de 100, con 108 cajas sabe que podrá acabar el trabajo.

12. **(C)** Como $a^2=a+2$, $a^3=a^2+2a$, pero como $a^2=a+2$, $a^3=a+2+2a=3a+2$ y la respuesta es C.

13. **(B)** Sabemos que $(x+1)^2-x^2=d$ siendo x el menor de ellos. Así que $2x+1=d$ y $x=\dfrac{d-1}{2}$.

14. **(C)** Los números eran x y $30+x$, que al añadir 5 a ambos se convierten en $x+5$ y $35+x$. Como nos dicen que $35+x=3\,(x+5)$, $x=10$.

15. **(D)** Llamando x, y, z al número de plumas de cada tipo, sabemos que $x+y+z=40$, $250x+1000y+5000z=40000$ e $y>z$ y nos piden el valor de x. La 2ª ecuación la podemos transformar en $x+4y+20z=160$, que junto a la primera, $x+y+z=40$, nos conduce, eliminando y, a $3x-16z=0$. Como x y z son enteros, x debe ser de la forma $16k$ y $z=3k$, con lo que $y=40-19k$. Si $k=2$, $z=6$ e $y=2$, lo que no es posible ya que $y>z$. Así que $k=1$ y $x=16$

16. **(E)** El más lento tarda $\dfrac{15}{4}$ segundos más que el más rápido en recorrer 1 km. Así si el rápido recorre 1 km en t minutos, el lento lo recorrerá en $t+\dfrac{1}{16}$ minutos. Luego la velocidad del rápido en km/minuto es $\dfrac{1}{t}$ y la del lento $\dfrac{1}{t+\dfrac{1}{16}}=\dfrac{16}{16t+1}$,

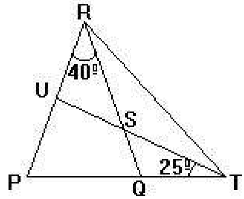
por lo que sus velocidades respectivas, en km/hora serán $\dfrac{60}{t}$ y $\dfrac{960}{16t+1}$.

Por otra parte, si uno recorre 1 km menos que el otro en 15 minutos, sigue que en una hora recorrerá 4 km menos con lo que $\dfrac{960}{16t+1}+4=\dfrac{60}{t}$, ecuación que nos lleva a $16t^2+t-15=0$ cuya solución positiva (la otra carece de sentido) es $t=\dfrac{15}{16}$, con lo que la velocidad del rápido en km/hora será $60:\dfrac{15}{16}=64$ km/hora.

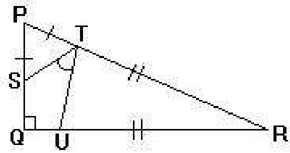
17. **(C)** $(-1)^{11} = -1$, por lo que la respuesta será 0, es decir, C.

18. **(C)** Como 12 es un divisor de todos los exponentes, podemos poner
$3^{60} = \left(3^5\right)^{12} = 243^{12}$; $5^{48} = \left(5^4\right)^{12} = 625^{12}$; $6^{36} = \left(6^3\right)^{12} = 216^{12}$ y
$7^{24} = \left(7^2\right)^{12} = 49^{12}$ con lo que ya basta ordenar las bases, lo que daría lugar a $625 > 243 > 216 > 49$, es decir, $q > p > r > s$.

19. **(C)** Como el triángulo PRQ es isósceles, cada ángulo de la base, en particular el PQR vale 70º, por lo que su suplementario, SQT valdrá 110º. Así pues, el ángulo QST vale $180º - (110º + 25º) = 45º$ y el ángulo pedido, RST, valdrá $180º - 45º = 135º$.



20. **(B)** Llamando x al ángulo QRT, tenemos que



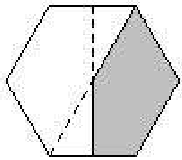
$UTR = \dfrac{180º - x}{2}$, $QPR = 90º - x$,

$PTS = \dfrac{180-(90-x)}{2} = \dfrac{90+x}{2}$. Por otra parte,

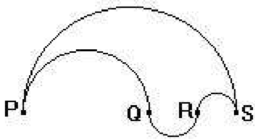
$UTR + STU + PTS = 180º$, de donde

$$STU = 180 - \frac{180 - x}{2} - \frac{90 + x}{2} = \frac{360 - 180 + x - 90 - x}{2} = 45º .$$

21. **(A)** Trazando las diagonales mayores del hexágono obtenemos 6 triángulos equiláteros iguales. La figura sombreada consta de $2 + \dfrac{1}{2}$ de estos triángulos, es decir, la fracción de área sombreada es $\dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{12}$.



22. **(C)**



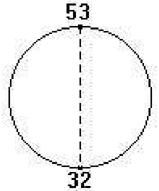
Llamando x a PQ, es $QR = 12 - x$, $RS = 6 - (12 - x) = x - 6$ y $PS = 12 + x - 6 = x$

Así pues el área pedida es

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x+6}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{12-x}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{x-6}{2}\right)^2 =$$

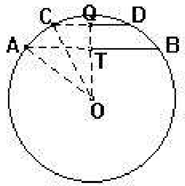
$$= \frac{1}{2}\pi\frac{(x+6)^2 - x^2 + (12-x)^2 - (x-6)^2}{4} = \frac{\pi(36+144-36)}{8} = 18\pi$$

23. (D)



Entre el 20 y el 53, sin contar ninguno de los dos, hay 32 alumnos. Como 20 es el diametralmente opuesto a 53, por otro lado habrá otros 32 alumnos por lo que el número de alumnos del grupo será 66.

24. (B)



Nos dicen que la cuerda AB, de longitud $2x$, dista 6 cm del centro y nos piden la distancia al centro Q de la cuerda CD de longitud x. Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos OAT y OCQ podemos poner:

$$\begin{cases} 10^2 = 6^2 + x^2 \\ 10^2 = y^2 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \end{cases}$$

siendo y la distancia del centro a la cuerda CD. La segunda ecuación equivalente a $400 = 4y^2 + x^2$, que restándole la primera, nos lleva a $300 = 4y^2 - 36$, es decir $y = \sqrt{84}$ cm.

25. (C) Del 1 al 1001 hay 200 números divisibles por 5, 111 números divisibles por 9 y 22 números divisibles por 45. Así pues, como los números divisibles por 45 son divisibles tanto por 5 como por 9, y están, por tanto, contados en los 200 y en los 111, la solución al problema será $200 + 111 - 2 \cdot 22 = 267$.

III CONCURSO DE PRIMAVERA. 4º NIVEL (1º-2º BACHILLERATO). 1ª FASE. DÍA 3-3-99. 1 HORA 30 MINUTOS

1. **(E)** $2^{2^3} : \left(2^2\right)^3 = 2^8 : 2^6 = 2^2 = 4$.

2. **(D)** $5^{17} \cdot 4^9 = 5^{17} \cdot 2^{18} = (5 \cdot 2)^{17} \cdot 2 = 2 \cdot 10^{17}$, que es un número con 17 ceros, es decir, con 18 cifras.

3. **(B)** $\dfrac{1001^2 - 999^2}{101^2 - 99^2} = \dfrac{(1001+999)(1001-999)}{(101+99)(101-99)} = \dfrac{2000}{200} = 10$.

4. **(B)** La longitud de dicho segmento es $\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{12}$, por lo que cada una de las partes medirá $\dfrac{5}{36}$, con lo que el punto más próximo a $\dfrac{1}{4}$ corresponderá al número $\dfrac{1}{4} + \dfrac{5}{36} = \dfrac{7}{18}$.

5. **(D)** Como $\log_a a^5 = 5$, la respuesta será 2^5.

6. **(C)** Si x e y son las dimensiones originales del rectángulo de área xy, las nuevas dimensiones serán $\left(x + \dfrac{x}{5}\right)$ e $\left(y + \dfrac{y}{5}\right)$, por lo que su área será $xy + \dfrac{2xy}{5} + \dfrac{xy}{25}$, es decir, $xy + \dfrac{11xy}{25}$ que, con respecto a la anterior, ha aumentado $\dfrac{11xy}{25}$, es decir un $\dfrac{11}{25}$ ó lo que es lo mismo un 44%.

7. **(C)** Si x es el sueldo original, los sueldos después de las subidas son $x + \dfrac{x}{5} = \dfrac{6x}{5}$, $\dfrac{6x}{5} + \dfrac{1}{4}\dfrac{6x}{5} = \dfrac{30x}{20} = \dfrac{3x}{2}$ y $\dfrac{3x}{2} + \dfrac{11}{20}\dfrac{3x}{2} = \dfrac{93x}{40}$, por lo que el sueldo original ha aumentado en $\dfrac{93x}{40} - x = \dfrac{53x}{40}$ que supone un $\dfrac{53}{40}$, es decir, un $132'5\%$.

8. **(D)** Puesto que un millón, 10^6, es $2^6 \cdot 5^6$, la respuesta será 2^6.

9. **(D)** Podemos escribir $3^{11} \cdot 4^{13}$ como $12^{11} \cdot 4^2$, es decir, $16 \cdot 12^{11}$. La última cifra de 12^{11} coincidirá con la última de 2^{11} y como las potencias de 2 acaban en 2, 4, 8, 6, 2, 4, ..., es decir forman ciclos de 4 elementos, 2, 4, 8, 6, 2^{11} acabará igual que 2^3, es decir en 8 y $16 \cdot 12^{11}$ acabará también en 8.

10. **(C)** Puesto que $A = 10! \cdot 18! = 10!\ 17!\ 18$ y $B = 12!\ 17! = 10!\ 17!\ 11 \cdot 12$, el número pedido deberá dividir a $10! \cdot 17!$ y además a 18 y a $11 \cdot 12$. Bastará, pues, hallar el m.c.m. $(18, 11 \cdot 12)$, es decir, $11 \cdot 2^2 \cdot 3^2$ y la respuesta será $10!\ 17!\ 11 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 10! \cdot 11 \cdot 17! \cdot 18 \cdot 2 = 11! \cdot 18!\ 2$ que lo podemos escribir como $\dfrac{11!\,18!\,12}{6}$, es decir, $\dfrac{12!\,18!}{3!}$ y la respuesta es C.

11. **(C)** $\dfrac{k}{3}(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)=(k+1)(k+2)\left(\dfrac{k}{3}+1\right)=\dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$.

12. **(E)** La ecuación dada, $\dfrac{1}{x-5}=0'01$, la podemos poner como $\dfrac{1}{x-5}=\dfrac{1}{100}$, de donde $x-5=100$ y $x=105$.

13. **(D)** Llamando l_1 a la longitud de la vela larga y l_2 a la otra, al cabo de 4 horas se habrá consumido $\dfrac{4l_1}{7}$ en la 1ª **y** $\dfrac{4l_2}{10}$ en la 2ª, por lo que las longitudes que quedaron son $\dfrac{3l_1}{7}$ y $\dfrac{3l_2}{5}$. Como nos dicen que $\dfrac{3l_1}{7}=\dfrac{3l_2}{5}$, sigue que $\dfrac{l_2}{l_1}=\dfrac{5}{7}$.

14. **(B)** Si $p = q\left[r-\dfrac{1}{s}\right]$, es $p = qr-\dfrac{q}{s}$, es decir $\dfrac{q}{s}=qr-p \Rightarrow s=\dfrac{q}{qr-p}$.

15. **(D)** Sabemos que $p+q=n$ y $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=m$. De la 2ª igualdad, sigue que $\dfrac{p+q}{pq}=m$, es decir $pq=\dfrac{p+q}{m}=\dfrac{n}{m}$.

Por otra parte $(p-q)^2=p^2+q^2-2pq==(p+q)^2-4pq== n^2-\dfrac{4n}{m}=\dfrac{mn^2-4n}{m}$.

16. **(B)** Si una solución de $x^3-7x+6=0$ es $x=1$, entonces x^3-7x+6 es divisible por $x-1$ quedando $x^3-7x+6=(x-1)(x^2+x-6)$. Así pues $x^3-7x+6=0$ lo ponemos como $(x-1)(x^2+x-6)=0$ por lo que las otras dos soluciones son las soluciones de la ecuación $x^2+x-6=0$ cuya suma es -1. (Recuerda: la suma de las soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ es $-\dfrac{b}{a}$).

17. **(E)** Sabemos que $6^{x+y}=6^2$ y $6^{x+5y}=6^3$, de donde $x+y=2$, $x+5y=3$ con lo que $x=\dfrac{7}{4}$.

18. **(D)** Si Pedro piensa a, b y c sabes que $a + b = 38$, $a + c = 44$ y $b + c = 52$. Sumando las tres igualdades, es $2(a + b + c) = 134$, por lo que $a + b + c = 67$, de donde sigue que $c = 29$, $b = 23$ y $a = 15$ y la respuesta es D.

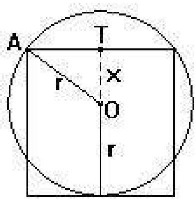
19. **(D)** $$\frac{2^{(x+y)^2}}{2^{(x-y)^2}} = 2^{(x+y)^2-(x-y)^2} = 2^{4xy} = 2^{28}.$$

20. **(A)** $\frac{a+b}{a-b}$ es un número negativo pues $0 < a < b$. Calculemos su cuadrado:

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = \frac{a^2+b^2+2ab}{a^2+b^2-2ab} = \frac{8ab}{4ab} = 2 \text{, de donde } \frac{a+b}{a-b} = -\sqrt{2}.$$

21. **(A)** Sabemos que $p\,(-7)^7 + q\,(-7)^3 + r\,(-7) - 4 = 3$ y nos piden $p \cdot 7^7 + q \cdot 7^3 + r \cdot 7 - 4$. De la información dada, tenemos que $-(p \cdot 7^7 + q \cdot 7^3 + r \cdot 7) = 7$ por lo que el resultado pedido será $-7 - 4 = -11$.

22. **(B)**



Llamando r al radio de la circunferencia, el lado del cuadrado es $r + x$ y podemos poner

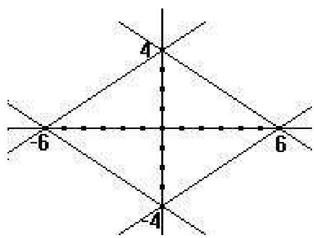
$$r^2 = x^2 + \left(\frac{r+x}{2}\right)^2$$ sin más que aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo AOT. Así pues

$$r^2 - x^2 = \frac{(r+x)^2}{4}$$, de donde sigue

$4(r^2 - x^2) = (r + x)^2$, o lo que es lo mismo, $4(r - x) = r + x$, es decir, $3r = 5x$, y por tanto el lado del cuadrado es $r + \frac{3r}{5} = \frac{8r}{5}$ y su área $\frac{64r^2}{25}$. Como el área del círculo es πr^2, el cociente pedido es $\frac{64}{25\pi}$.

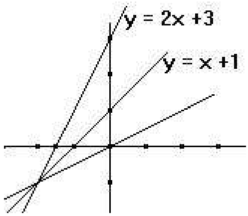
23. **(D)** Nos piden el área de la región del plano determinada por los puntos (x, y) tales que: $-12 \leq 2x - 3y \leq 12$ y $-12 \leq 2x + 3y \leq 12$.

Dibujando esta región, obtenemos la siguiente:



Así pues, se trata de un rombo de diagonales 12 y 8 y área 48.

24. (C)



La recta reflejada pasa por (−2, −1), punto de corte de las dos rectas dadas. Otro punto de ella será el simétrico de cualquier punto de $y = 2x + 3$ respecto de $y = x + 1$. Obtengamos por ejemplo, el simétrico de P (0, 3).
$y = -x + 3$ es la recta perpendicular a $y = x + 1$ que pasa por (0, 3) y la corta en (1, 2), así que P', simétrico de (0, 3) respecto de $y = x + 1$, será el otro extremo de un segmento cuyo centro es (1, 2) y un extremo (0, 3), es decir, (2, 1), con lo que la recta solución será la que pasa por (−2, −1) y (2, 1), es decir, $y = \frac{1}{2}x$, y la respuesta es C.

25. (E) La recta $y = \frac{x}{200}$, cortará a la curva $y =$ sen x en puntos cuya abscisa sea menor o igual que 200 pues sen $x \le 1$. Observando las gráficas de ambas líneas, vemos que en cada intervalo $[2k\pi, (2k+1)\pi)$ corta 2 veces excepto en [0, 2π) que corta una. Dividiendo 200 entre 2π, observamos que hay 31 intervalos completos, que supondrá 61 puntos de corte, quedándonos además un intervalo de longitud mayor que π. Como estos dos cortes siempre se producen en la primera mitad del intervalo $[2k\pi, (2k+1)\pi)$, habrá que añadirle otros dos puntos más de corte, resultando, pues, 63 los puntos de corte de ambas líneas, es decir, las soluciones positivas de la ecuación $\operatorname{sen} x = \frac{x}{200}$.

III CONCURSO DE PRIMAVERA. 1er NIVEL (PRIMARIA). 2ª FASE. DÍA 24-4-99. 1 HORA 30 MINUTOS

1. **(A)** Alicia gastó 120 ptas y Beatriz 80 ptas, por lo que Carlos gastó 240 − 200 = 40 ptas.

2. **(B)** Como el cubo tiene 6 caras, he coloreado en rojo los $\frac{2}{3}$ de 6, o sea 4, por lo que en azul he coloreado 2.

3. **(B)** Como el número buscado es primo, si divide al producto de tres números es que divide a uno de ellos, por lo que la respuesta es 5.

4. **(E)** 1000 + una parte de 1000 = 3000 − esa misma parte de 3000. Si a esa parte de mil, la llamo a, que será una fracción, tengo que $1000 + 1000 \cdot a = 3000 - 3000a$ y eliminando todos los ceros tengo que $1 + a = 3 - 3a$, que, por tanteo, obtengo que $a = 0'5$, es decir, el 50%.

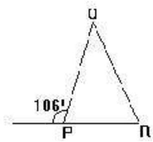
5. **(B)** Como PQ y RR son números menores que 100, su suma es menor que 200 por lo que $P = 1$ y puedo escribir $\begin{array}{r} 1Q \\ +RR \\ \hline 111 \end{array}$ de donde al ser $1Q$ menor que 20, RR debe ser mayor que 90, por lo que $R = 9$.

6. **(B)** Nos estamos refiriendo al 9876, por lo que la respuesta es 6.

7. **(B)** 1 tac son $\frac{3}{4}$ tic y 1 toc son $\frac{2}{3}$ tac por lo que 1 toc = $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$ tic = $\frac{1}{2}$ tic.

8. **(A)** En el siglo 23 aparecerá el año 2210 que será un año "descendente".

9. **(C)**



El ángulo P del triángulo medirá 180 − 106 = 74º y la suma de los ángulos P y R será 74º + 66º 45′ = 140º 45′, por lo que medirá 180º − 140º 45′, es decir,

179º 60′ − 140º 45′ = 39º 15′.

10. **(B)** Con 1 cifra habrá 1, el 2, con 2 cifras habrá 10 y con 3 cifras, 100, por lo que con números de los pedidos de menos de 4 cifras hemos ocupado 1 + 2 · 10 + 3 · 100 = 321 lugares. Los 1000 − 321 = 679 lugares restantes los ocuparemos con números de 4 cifras, por lo que escribiremos 169 completos (4 · 169 = 676), es decir hasta el 2168, quedándonos 3 lugares que los ocuparán las tres primeras cifras de 2169, por lo que el lugar 1000 lo ocupará un 6.

11. **(D)** Entre los 25 primeros enteros positivos hay 12 pares y 13 impares. Si hemos juntado 5 pares nos quedarán 7 pares y 13 impares, por lo que la proporción de pares será 7 de 20, es decir, un 35%.

12. **(B)** Dani obtuvo 5 · 15 puntos por las correctas y 2 · 5 por las que dejó en blanco, o sea, obtuvo 75 + 10 = 85 puntos.

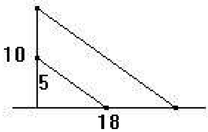
13. **(C)** Como $\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}$, es decir $\frac{1}{2}$, se habrá perdido un 2 pues $\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

14. **(D)** Cada círculo tiene de área 36π, o sea, $6^2\pi$, por lo que su radio será 6, con lo que las dimensiones del rectángulo son 24 y 12 y su área 288.

15. **(A)** Como entre esos números está el 23212 y el 23215, la última cifra del producto de estos dos es un cero, por lo que la respuesta pedida será cero.

16. **(C)** 40 millones = $40 \cdot 10^6 = 4 \cdot 10 \cdot 10^6 = 4 \cdot 10^7$.

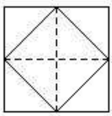
17. **(C)**



Como los dos triángulos deben tener exactamente la misma forma y el pequeño tiene de altura la mitad, su base será también la mitad, o sea, la sombra será de 9 m.

18. **(B)** La media de 21 enteros consecutivos será el que ocupa el término central, es decir, el que ocupa el lugar 11. Así pues, si el que ocupa el lugar 11 es el 31, el que ocupa el lugar 21, será el 41.

19. **(C)**



Si trazamos paralelas a los lados por el centro del cuadrado, vemos que éste quedaría dividido en 8 triángulos rectángulos iguales, de los que el pequeño ocupa 4, es decir, el área del pequeño será la mitad de la del mayor, o sea, 50.

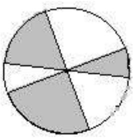
20. **(C)** El cuento tenía 6000 letras de las que de cada ocho, 5 eran consonantes y 3 vocales. Como en 6000, hay 6000 : 8 = 750 grupos de 8, habrá $750 \cdot 5 = 3750$ consonantes.

21. **(B)** El gato corre a 6 m por segundo, por lo que en cada segundo le recorta $6 - 2 = 4$ m al ratón. Así pues, para recortarle los 12 m que le lleva de ventaja, tardará 12 : 4 = 3 segundos.

22. **(C)** En el lado de arriba y en el de abajo habrá 1998 puntos en cada uno. En los dos verticales habrá 1997 en cada uno pues los extremos ya los hemos contado en los lados horizontales. Así pues, habrá en total $2 \cdot 1998 + 2 \cdot 1997 = 7990$.

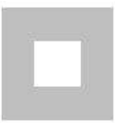
23. **(D)** Como $5 \cdot 4 < 8 \cdot 3$, entonces $\frac{5}{8}<\frac{3}{4}$ y la cierta es D.

24. **(C)**



Por cada sector sombreado hay uno exactamente igual en blanco, lo que el área de la región sombreada será la mitad de la del círculo, y como ésta es $6^2 \cdot \pi = 36\pi$, la respuesta será 18π.

25. **(D)**



El lado del cuadrado grande es 36 : 4 = 9 y el pequeño 16 : 4 = 4. Así pues, el área del cuadrado grande es $9^2 = 81$, el área del pequeño $4^2 = 16$ y el área de la región sombreada será $81 - 16 = 65$.

III CONCURSO DE PRIMAVERA. 2º NIVEL (1º-2º ESO). 2ª FASE. DÍA 24-4-99. 1 HORA 30 MINUTOS

1. **(E)** Como dividir por $\frac{1}{2}$ es equivalente a multiplicar por 2, el número lo hemos multiplicado por 3 y por 2, es decir, por 6.

2. **(A)** $0'9 : \frac{1}{2} = \frac{9}{10} : \frac{1}{2} = \frac{9 \cdot 2}{10 \cdot 1} = \frac{18}{10} = 1'8$.

3. **(E)** $1 + \frac{3}{100} + \frac{1}{1000} = 1 + 0'03 + 0'001 = 1'031$.

4. **(A)** La forma más cómoda es hacer la división sacando uno o dos decimales. $\frac{1}{4} = 0'25$, $\frac{2}{5} = 0'40$, $\frac{2}{7} = 0'28$, $\frac{3}{10} = 0'30$, $\frac{3}{11} = 0'27$. Así pues, el más pequeño es $\frac{1}{4}$.

5. **(C)** Supongamos que en la primera hay 12 litros, 8 serán de aceite y 4 de vinagre. Si en la segunda hay 12 litros, 9 serán de aceite y 3 de vinagre. Así pues, en la mezcla, de 24 litros, 17 son de aceite y 7 de vinagre por lo que la proporción de aceite y vinagre es 17 a 7.

6. **(E)** Hasta ahora he obtenido $6'8 \cdot 10 = 68$ puntos y contando también el próximo, debo obtener $7 \cdot 10 = 77$ puntos, así que en el próximo he de sacar un 9.

7. **(D)** $0'25 \cdot 1000000$ mm $= 25 \cdot 10000$ mm $= 25 \cdot 10$ m $= 250$ m.

8. **(D)** Si un número al dividirlo entre 11 da resto 6, si hacemos la división por exceso daría resto -5 (por ej. $28 = 2 \cdot 11 + 6 = 3 \cdot 11 - 5$).

Así pues, podemos escribir que el número buscado es de la forma $6a + 1$ y también de la forma $11b - 5$ con a y b enteros.

Así pues $6a + 1 = 11b - 5$, es decir, $11b - 6a = 6$, por lo que $11b$ es múltiplo de 6 y el más pequeño positivo es el 66. Es decir, el número es el $66 - 5 = 61$.

9. **(B)** Como el número es cuadrado perfecto y cubo perfecto, es una sexta potencia de un entero, es decir, es de la forma a^6, con a entero.

Los únicos enteros a para los que a^6 tiene 6 cifras son 9, 8, 7 pues 10^6 tiene 7 cifras y 5^6 tiene 5. ($7^6 = 117649$). Así pues, el número buscado es 9^6, 8^6 ó 7^6. Al restarle 6, obtendríamos $9^6 - 6$ que no es primo pues es múltiplo de 3, $8^6 - 6$ que no es primo pues es par, por lo que en Gatolandia habrá 7^6 gatos, es decir, 117649.

10. **(C)** Como $2940 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$, tomando $m = 3 \cdot 5$, tenemos que $2940\,m = 2^2 3^2 5^2 7^2$, es decir, un cuadrado perfecto.

11. **(C)** Serán de la forma $7a$ pero con a no divisible ni por 2 ni por 3 ni por 5. Así pues serán $7 \cdot 1$, $7 \cdot 7$, $7 \cdot 11$, $7 \cdot 13$, es decir, cuatro.

12. **(A)** A Pedro le han dado el $\frac{60}{4} = 15$, por lo que la respuesta que tendría que haber dado es $\frac{15}{4} = 3'75$.

13. **(B)** Como $2x+3x+4x = 45$, $x = 5$, el mayor lado es $4 \cdot 5 = 20$ y el menor $2 \cdot 5 = 10$, por lo que la diferencia pedida será $20 - 10 = 10$.

14. **(E)** Si el total es x, tenemos que, Alicia dio $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = \frac{7x}{12}$, por lo que le quedan $\frac{5x}{12}$, que es 35. Así pues, si $\frac{5x}{12} = 35$, es que $\frac{x}{12} = 7$, con lo que $x = 84$.

15. **(E)** Si $\frac{2}{15} = \frac{1}{8} + \frac{1}{x}$, entonces $\frac{2}{15} - \frac{1}{8} = \frac{1}{x}$, es decir, $\frac{16-15}{120} = \frac{1}{x}$, por lo que $\frac{1}{120} = \frac{1}{x}$ y $x = 120$.

16. **(B)** Observando $x + y + xy$ podemos ponerlo como $(x + 1)(y + 1) - 1$; así pues $(x + 1)(y + 1) = 55$, de donde un factor es 11 y el otro 5 pues x e y son positivos. Así pues, por ejemplo, $x + 1 = 11$, $y + 1 = 5$, de donde $x = 10$, $y = 4$ y $x + y = 14$.

17. **(B)** Nos dicen que $15 < m < 30$ y $3 < n < 8$.

Así pues $\frac{m}{n}$ será menor que $\frac{30}{3}$ y mayor que $\frac{15}{8}$ y la respuesta será B.

18. **(D)** Si hay una cantidad impar de sumandos, el central debe ser un divisor de 75 y si tienen que ser todos positivos, como central vale $\frac{75}{3} = 25$ y $\frac{75}{5} = 15$. Así pues, con cantidad impar de sumandos tenemos $24 + 25 + 26$ y $13 + 14 + 15 + + 16 + 17$.
Si hay una cantidad par de sumandos $2n$, hay n parejas (1º y último), (2º y penúltimo), etc., y todas suman lo mismo, por lo que la pareja central sumará $\frac{75}{n}$.

Si $n = 1$ tenemos $37 + 38$.

Si $n = 3$ la pareja central suma $\frac{75}{3} = 25 = 12 + 13$ y la descomposición es

$10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15$.

Si $n = 5$ la pareja central suma $\frac{75}{5} = 15 = 7 + 8$ y la descomposición es

3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12.

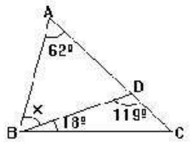
El próximo divisor de 75 es 15, por lo que si la pareja central sumara $\frac{75}{15} = 5$, es que habría números negativos.

Así pues, las posibles sumas con las condiciones pedidas son:

37 + 38, 24 + 25 + 26, 13 + 14 + 15 + 16 + 17, 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 y 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12.

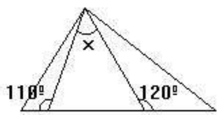
19. (D) La distancia de J a L es 93 − 18 = 75 por lo que k estará a $\frac{2}{3} \cdot 75 = 50$ de J, luego marcará el 68.

20. (B)



El ángulo D del triángulo ABD mide 180 − 119 = 61º, por lo que $x = 180º − (62 + 61) = 57º$ y el dato del 18º no aporta nada al problema.

21. (D)



Los ángulos del lado del triángulo en el que el ángulo opuesto es x miden 70º y 60º, así que:

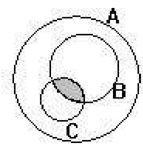
$x = 180º − (70º + 60º) = 50º$.

22. (A) El menor número de cuadrados aparecerá cuando éstos sean lo mayor posible, es decir, de lado igual al mcd (70, 80) = 10. Así pues, el área 70 × 80 = 5600 cm^2 la cubrimos con cuadrados de 10^2 = 100 cm^2 de área, por lo que harán falta 56.

23. (C) En la primera media hora, recorrí 30 km, por lo que me faltan 50 km por recorrer en media hora, que lo conseguiré si en esa media hora alcanzo una media de 100 km/hora.

24. (A) Llamando a, b y c a las dimensiones, sé que $a \cdot b = 30$, $b \cdot c = 12$, $a \cdot c = 10$, por lo que multiplicando todas las igualdades, llego a que $(a \cdot b \cdot c)^2 = 3600$, de donde el volumen , que es $a \cdot b \cdot c$, será 60 cm^3.

25. (C)



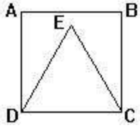
A = {1, 2, 3, ..., 50}; **B** = {1, 3, 5, ..., 49};
C = {7, 14, 21, ..., 49 }
En la zona sombreada están los impares múltiplos de 7, o sea, 7, 7 · 3, 7 · 5 y 7 · 7, es decir hay cuatro números.

III CONCURSO DE PRIMAVERA. 3er NIVEL (3º-4º ESO). 2ª FASE. DÍA 24-4-99. 1 HORA 30 MINUTOS

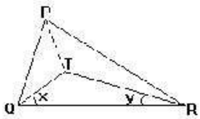
1. **(D)** Aproximando $0'435$ a $0'5$ y $0'0821$ a $0'1$, el cociente se aproximaría a $0'5 : 0'1$, es decir, 5.

2. **(E)** $A = \frac{1}{5}$, $B = \frac{1}{2}$ y $C = 2$ por lo que $C > B > A$.

3. **(E)** La mitad de $4'8 \cdot 10^8$ será $2'4 \cdot 10^8$.

4. **(E)** 

Como el ángulo ADE es de 30º y el triángulo ADE es isósceles, cada uno de los otros dos ángulos iguales, en particular el AED, valdrá 75º.

5. **(B)** 

Llamando x e y como en la figura, sabemos que:

$$2x + 2y + \alpha = 180º \text{ y } QTR = 180º - (x + y).$$

Despejando $x + y$ en la 1ª ecuación es $x + y = \dfrac{180º - \alpha}{2}$,

por lo que $QTR = 180º - \dfrac{180º-\alpha}{2} = 90º + \dfrac{\alpha}{2}$.

6. **(B)** Al tratarse de un pentágono convexo, su descomposición en tres triángulos de vértices los del polígono prueba que la suma de los ángulos del pentágono es 3 . 180º = 540º.

7. **(E)** Sabemos que si n es el número de lados,

$$x = 2\left(180º - \frac{360º}{n}\right)\Big/2 = 180º - \frac{360º}{n}, \text{ por lo que } n = \frac{360º}{180º - x}.$$

8. **(D)** La suma de los cuatro en el primer caso fue 90 × 4 = 360 y la suma de los cuatro, una vez corregido el error fue 360 − (97 − 79) = 342, por lo que la media real sería 342 : 4 = 85′5.

9. **(E)** Si hay x hombres e y mujeres sabemos que $31(x + y) = 35x + 25y$, de donde $4x = 6y$, o sea, $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{2}$.

10. **(B)**

$$\begin{array}{r} 2\,a\,4 \\ +3\,2\,9 \\ \hline 5\,b\,3 \end{array}$$

Sabemos que $5 + b + 3$ es múltiplo de 3, por lo que $5 + b$ lo es, por lo que $b = 1$ ó 4 ó 7.
Por otra parte, observando la suma, vemos que $a + 2 + 1 = b$, así que $a + 2 + 1$ deberá ser 7 por lo que $a = 4$.

11. **(B)** Cada cero del producto final es consecuencia de la existencia de un 2 y un 5, por lo que bastará ver cuántos 5 aparecen en 13! (El número de 2 será mayor o igual). Como sólo los factores 5 y 10 aportan un 5 cada uno, la respuesta es 2.

12. **(B)** Al ser el número de gatos un cuadrado perfecto y un cubo perfecto, debe ser una potencia sexta y las únicas potencias sextas con 6 cifras son 7^6, 8^6 y 9^6 pues 10^6 tiene 7 cifras y 6^6 solamente 5, mientras que 7^6 ya tiene 6. Por otra parte, al restar 6 debemos obtener un número primo y $9^6 - 6$ no es primo por ser múltiplo de 3, $8^6 - 6$ tampoco por ser par, luego el número de gatos de Gatolandia es 7^6, es decir, 117649.

13. **(B)** Como el área del rectángulo es $16 \cdot 9 = 144$, ésa debe ser también el área del cuadrado, o sea, que su lado será $\sqrt{144} = 12$ y su perímetro $12 \cdot 4$, es decir, 48.

14. **(E)** Multiplicando obtenemos $(xyz)^2 = 6 \cdot 9 \cdot 24 = 3^4 \cdot 2^4$, por lo que un valor para xyz es 36.

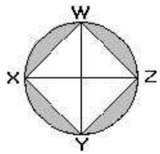
15. **(D)** Hay que encontrar parejas de números enteros positivos (x, y) tales que $3x + 4y = 59$. A ojo, vemos que una de esas parejas es, por ejemplo, (13, 5).

Así pues, $\begin{cases} 3x + 4y = 59 \\ 3 \cdot 13 + 4 \cdot 5 = 59 \end{cases}$. Restando, tenemos $3(13 - x) = 4(y - 5)$, es decir,

$\dfrac{y-5}{3} = \dfrac{13-x}{4} = k$, de donde $\begin{cases} y = 3k + 5 \\ x = 13 - 4k \end{cases}$. Si $k = -2$, $y < 0$. Así pues, tenemos

$k = -1$, que da lugar a (17, 2); $k = 0$, obteniendo (13, 5); $k = 1$, que nos proporciona (9, 8); $k = 2$, nos da (5, 11); $k = 3$ da lugar a (1, 14). Si $k > 3$, $x < 0$. Obtenemos en total 5 parejas.

16. **(E)**

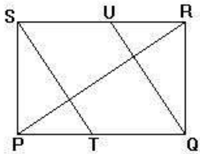


Como $WY = 4$, el radio del círculo es 2, su área 4π y el área del cuadrado 8, por lo que la respuesta es $4\pi - 8$.

17. **(B)** Llamando r al radio del círculo pequeño, el área de la región sombreada es $\pi \cdot (2r)^2 - \pi r^2 = 3\pi r^2$. Como el área de la región sin sombrear es πr^2, el cociente pedido es 3.

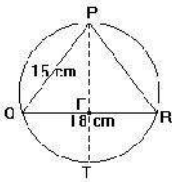
18. **(D)** La 2ª cifra puede ser 5, 6, ó 7.
Siendo 5, la 3ª puede ser 6 lo que da lugar a tres números ascendentes, o 7 que da lugar a dos números ascendentes, u 8 que da lugar a uno.
Si la 2ª cifra es 6, la 3ª puede ser 7 dando lugar a dos números ascendentes, u 8 que sólo nos da el 4689.
Finalmente si la 2ª cifra es un 7, hay un solo número ascendente. En total, tenemos, pues $3 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 = 10$.

19. **(E)**



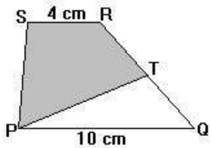
Al ser las rectas ST y QU perpendiculares a la diagonal, los triángulos QRU y PST son semejantes al PQR, por lo que podemos poner $\frac{18}{12} = \frac{12}{UR} \Rightarrow UR = 8$. Análogamente $PT =$ 8, por lo que la suma de las áreas de dichos triángulos es 12 · 8 y el área del paralelogramo $TQUS$ será 12 · 18 − 12 · 8 = 12 · 10 = 120.

20. **(C)**



PT es un diámetro, entonces $QF = 9$ y $PF = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$ Por otra parte, el triángulo QPT es rectángulo y $QF = 9$ la altura sobre la hipotenusa, de donde $PF \cdot FT = QF^2$, es decir, $FT = \frac{81}{12}$, así que el radio de dicha circunferencia será: $\frac{1}{2}(PF + FT) = \frac{1}{2}\left(12 + \frac{81}{12}\right) = \frac{225}{24} = 9'375$.

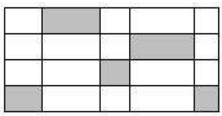
21. **(C)**



Si T es el punto medio de QR, su distancia a PQ será $\frac{6}{2} = 3$, por lo que el área del triángulo $PTQ = \frac{1}{2} 10 \cdot 3 = 15$ y como el área del trapecio $PTQ = \frac{10+4}{2} 6 = 42$, el área de la región sombreada será 42 − 15 = 27.

22. **(A)** Como $\frac{m}{m+2n} = -3$, sigue que $n = -3m - 6n \Rightarrow 4m = -6n$ y $\frac{m}{n} = \frac{-3}{2}$.

23. **(D)**



Dividiendo el rectángulo en 5 trozos con las líneas verticales, cada trozo sombreado es $\frac{1}{4}$ de esa banda, por lo que la suma de las áreas de los trozos sombreados será $\frac{1}{4}$ del área total.

24. **(D)** Si a es el número de adultos y n el de niños sabemos que $a + n < 600$, y $750a + 250n = 330000$. La segunda ecuación equivale a la $3a + n = 1320$, por lo que $n = 1320 - 3a$, así que $a + 1320 - 3a < 600$, es decir $720 < 2a$, por lo que el menor valor entero posible de a es 361.

25. **(D)** El vértice más alejado al 6 será el vértice común de las 3 caras que no contienen al 6, es decir de las {1, 2, 5, 8}, {2, 3, 5, 7} y {3, 4, 5, 8}, es decir el 5.

III CONCURSO DE PRIMAVERA. 4º NIVEL (1º-2º BACHILLERATO). 2ª FASE. DÍA 24-4-99. 1 HORA 30 MINUTOS

1. **(A)** En los diez años del 88 al 97 cayeron 631 · 10 = 6310 mm. En los diez años desde el 89 al 98 cayeron 601 · 10 = 6010 mm pero como en el 98 cayeron 450, en los nueve anteriores, es decir del 89 al 97 cayeron 6010 − 450 = 5560 mm. Si del 89 al 97 cayeron 5560 mm y del 88 al 97 cayeron 6310, es que en 1988 cayó 6390 − 5560 = 750 mm.

2. **(B)** Al ser dicho número cuadrado perfecto y cubo perfecto es de la forma a^6 con a entero y los únicos números de esa forma con 6 cifras son 7^6, 8^6 y 9^6. Como $8^6 - 6$ no es primo, pues es par, y $9^6 - 6$ tampoco pues es múltiplo de 3, el número de gatos en Gatolandia es 7^6, o sea, 117649.

3. **(E)** Si $x^2 - y^2 = 1991$ con x e y enteros positivos, es $(x+y)(x-y) = 1991$ donde x e y son de distinta paridad pues si no, la suma, por ejemplo, sería par y sería par $(x+y)(x-y)$. Así pues, hay que descomponer 1991 en producto de dos números impares y con suma menor que 200 que da lugar a 1991 = 181 · 11 por lo que $\begin{cases} x+y=181 \\ x-y=11 \end{cases}$ de donde el más pequeño $y = 85$.

4. **(E)** Estoy en tren desde las 12 hasta las 15h. 45′. Así pues, me cruzaré con el de las 9, 10, ..., hasta el de las 15 horas, es decir, me cruzaré con 7 trenes.

5. **(E)** Llamando n al número de preguntas y p a la puntuación por cada pregunta, podemos escribir $9p + \frac{3}{10}(n-10)p = \frac{np}{2}$, donde, eliminando p, llegamos a $9 + \frac{3n}{10} - 3 = \frac{n}{2}$, es decir, $n = 30$.

6. **(B)** Como $P = 1 - \sqrt{\frac{Q}{R}}$, $\sqrt{\frac{Q}{R}} = 1 - P$, $\frac{Q}{R} = (1-P)^2$ y $Q = R(1-P)^2$.

7. **(D)** Elevando al cubo ambos términos tenemos:

$$n + \sqrt{n^2+8} + 3\sqrt[3]{\left(n+\sqrt{n^2+8}\right)^2\left(n-\sqrt{n^2+8}\right)} +$$

$$+ 3\sqrt[3]{\left(n+\sqrt{n^2+8}\right)\left(n-\sqrt{n^2+8}\right)^2} + n - \sqrt{n^2+8} = 512,$$

es decir, $2n + 3\sqrt[3]{(-8)\left(n+\sqrt{n^2+8}\right)} + 3\sqrt[3]{(-8)\left(n-\sqrt{n^2+8}\right)} = 512$, por lo que $2n - 6\left(\sqrt[3]{n+\sqrt{n^2+8}}+\sqrt[3]{n-\sqrt{n^2+8}}\right) = 512$, es decir,

$2n - 6 \cdot 8 = 512$ y $n = 280$.

8. **(A)** Los gemelos tienen g años y los trillizos t años. Así pues,

$2g + 3t = 150$ y $2t + 3g = 120$, de donde $g = 12$ y $t = 41$.

9. **(B)** Llamando x, y, z, t al peso de cada saco, tenemos que

x + y = 103; x + z = 105; x + t = 106

y + z = 106; y + t = 107; z + t = 109

sumando las tres últimas pesadas obtenemos $2(y + z + t) = 322$, de donde $y + z + t = 161$ y como $y + z = 106$, $t = 55$, y una vez conocido el valor de una incógnita, obtenemos $x = 51$, $y = 52$, $z = 54$, de donde el saco de menos peso, pesaba 51 kg.

10. **(A)** $p = 32^3 = 2^{15}$, $q = 243^2 = 3^{10}$ por lo que $\sqrt[5]{pq} = \sqrt[5]{2^{15}3^{10}} = 2^3 \cdot 3^2 = 72$.

11. **(D)** $\sqrt[n]{\dfrac{20}{2^{2n+4}+2^{2n+2}}} = \sqrt[n]{\dfrac{2^2\cdot 5}{2^2\cdot 2^{2n+2}+2^{2n+2}}} = \sqrt[n]{\dfrac{2^2\cdot 5}{5\cdot 2^{2n+2}}} = \sqrt[n]{\dfrac{2^2}{2^{2n+2}}} = \sqrt[n]{\dfrac{1}{2^{2n}}} =$

$= \sqrt[n]{\left(\dfrac{1}{4}\right)^n} = \dfrac{1}{4}$.

12. **(A)** Observando que $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot \dfrac{1}{x} + 3x \cdot \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} =$

$= x^3 + \dfrac{1}{x^3} + 3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$, tenemos que

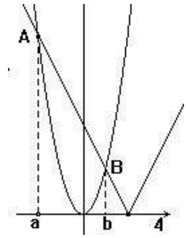
$x^3 + \dfrac{1}{x^3} = \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x+\dfrac{1}{x}\right) = \sqrt{7^3} - 3\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$.

13. **(C)** Como $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, observando los números dados, resulta C ser el mayor.

14. **(B)** El resto de la división de $1 + x^2 + x^{100}$ entre $x^2 - 1$ será un polinomio de la forma $ax + b$. Así pues $1 + x^2 + x^{100} = (x + 1)(x - 1)\,Q(x) + ax + b$.

Si $x = 1$, tenemos que $3 = a + b$ y si $x = -1$, es $3 = -a + b$, de donde $a = 0$ y $b = 3$, por lo que el resto pedido será 3.

15. **(C)** Una forma cómoda de resolver el problema es esbozar las gráficas de $y = x^2$ e $y = |2x - 8|$ que nos conduce a la siguiente figura:
Así pues los x buscados son los $a < x < b$ siendo a y b las abscisas de los puntos de corte de $y = x^2$, $y = -2x + 8$, es decir, las soluciones de $x^2 + 2x - 8 = 0$ que son -4 y 2, por lo que la respuesta será $-4 < x < 2$, es decir, **C**.



16. (A) Hay g gatos y p perros en Madrid y nos piden $\dfrac{g}{g+p}$. Se creen que son gatos $\dfrac{90}{100}g + \dfrac{10}{100}p$ que supone $\dfrac{20}{100}(g+p)$.

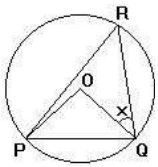
Así pues, $9g + p = 2g + 2p$, es decir, $7g = p$, por lo que $\dfrac{g}{g+p} = \dfrac{g}{8g} = \dfrac{1}{8} = 12'5\%$.

17. (C) El tiempo empleado, yendo a 30 km/hora es t y yendo a 20 km/hora es $t + 2$. Así pues, $30t = 20(t + 2)$, de donde $t = 4$ y el espacio que debe recorrer es 120 km. Como quiere tardar $t + 1$ hora, es decir, 5 horas, debe alcanzar una media de $\dfrac{120}{5} = 24$ km/hora.

18. (A) Sabemos que $abc = 64$ y $abcd = \left(2\sqrt{10}\right)^4 = 1600$, de donde

$$d = \frac{1600}{64} = 25.$$

19. (D)

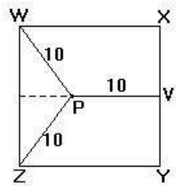


Como ORP es también 5º, sigue que $POR = 170º$ y como $OQP = OPQ = 40º$, es $POQ = 100º$, de donde $QOR = 360º - (170 + 100) = 90º$. Por otra parte, ROQ es también x, por lo que $2x + 90 = 180º$ y $x = 45º$.

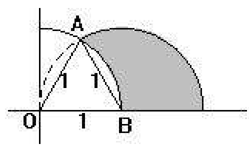
20. (D) Por los datos del problema, P equidista de los lados WX y ZY. Así pues, llamando l al lado del cuadrado, es

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 + (l-10)^2 = 10^2$$, que nos lleva a $5l^2 - 80l = 0$, es decir

$l = 16$ y el área pedida 256.

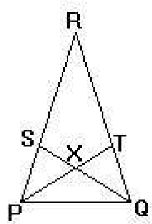


21. (D) El centro del arco de la izquierda es el origen, por lo que el triángulo OAB es equilátero ya que BA es el radio del arco de la derecha. Calculemos el área intersección OAB de los dos trozos de círculos. Se compone de un sector de 60º y el correspondiente segmento. Su área



será, pues, $\frac{\pi}{6}+\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, por lo que el área pedida será $\frac{\pi}{2}-\left[\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right]=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}$.

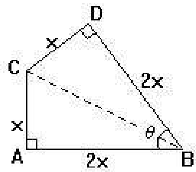
22. (D)



Llamemos x al área del triángulo PXS e y a la del PXQ. Se tiene que $\frac{\text{Área}\,\Delta RXS}{\text{Área}\,\Delta PXS}=\frac{8}{4}=2$ (ya que ambos triángulos comparten altura) es decir, área $\Delta\ RXS = 2x$; pero dicha área es 4, por lo que $x = 2$.

Por otra parte, $\frac{\text{Área}\,\Delta PTR}{\text{Área}\,\Delta PTQ}=\frac{8+x}{y+2}=\frac{10}{y+2}=\frac{8}{4}$ pues éste es el cociente entre las bases. Así pues, $y = 3$ y el área pedida es $8 + 2 \cdot 2 + 3 = 15$.

23. (E)



Los triángulos ABC y BCD son iguales por tener iguales sus respectivos lados. Así pues $\text{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$,

y sen $\theta = 2$ sen $\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{2\text{tg}\frac{\theta}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{1+\frac{1}{4}}=\frac{4}{5}$.

24. (C) La probabilidad de que empaten es $6\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{6}$ y como la probabilidad de ganar rojo es igual que de la perder, es $2p+\frac{1}{6}=1$, por lo que $p=\frac{5}{12}$.

25. (E) De los 14 casos posibles, hay 8 con probabilidad p y 6 con probabilidad $2p$, por lo que $8p + 6 \cdot 2p = 1$ y $p = \frac{1}{20}$, con lo que al haber 8 caras triangulares, la probabilidad de cara triangular es $8\cdot\frac{1}{20}=\frac{2}{5}$.

IV CONCURSO DE PRIMAVERA. 1er NIVEL (PRIMARIA). 1ª FASE. DÍA 1-3-2000.

1. **(A)**
Representando por este segmento 

el monstruo, vemos que 30 metros será la mitad de su longitud por lo que medirá 60 m de largo.

2. **(E)** Si al 10º le deja un euro, al 9º le deja 2, al 8º 4 y así sucesivamente. Como hay 10 nietos, al mayor le habrá dejado 512 euros por lo que la suma de lo que ha repartido será 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ... + 512 = 1023 euros.

3. **(A)** Si en cada viaje se transportan 8 mg de néctar, en 500000 se transportarán 500.000 · 8 mg = 500 · 8 g = 4000 g = 4 kg.

4. **(A)** El primero saluda a los 5 restantes, el 2º a los otros 4, el 3º a los otros 3 y así hasta el 5º que saludará al sexto. En total habrá 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 abrazos.

5. **(C)** Los números pedidos deberán estar muy próximos a $\sqrt{195}$ que está comprendido entre 14 y 15, así que pensamos en 13 y 15 y comprobamos que $13 \cdot 15 = 195$.

6. **(B)** Se observa que los primeros términos son 10^2, 11^2, 12^2, por lo que el siguiente será 13^2, es decir, 169.

7. **(A)** 8 cm del mapa son 4000000 cm de la realidad, por lo que la escala es 8:4000000, es decir, 1: 500000.

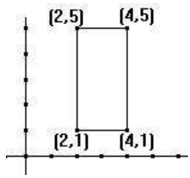
8. **(A)** Fundas + Fundas + 185 = 235. Así que las fundas valen 25 euros, por lo que las gafas costarán 25 + 185 = 210 euros.

9. **(D)** El camión transporta 1450 kg de fruta por lo que nos han quedado $1450 - 850 = 600$ kg a repartir entre 25 cajas iguales, de donde cada caja pesará 600 : 25 = 24 kg.

10. **(A)** $0'005$ multiplicado por 100 dará $0'5$, que al multiplicarlo por $0'5$ nos dará $0'25$, así que la respuesta es $100 \cdot 0'5 = 50$.

11. **(E)** 3.

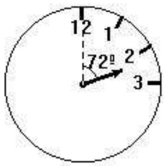
12. **(C)** Si dibujas los tres vértices dados, observarás que el cuarto vértice es (4, 1).



13. **(D)** En las nueve primeras páginas hemos gastado 9 dígitos. Los 46 restantes -como utilizamos dos dígitos a partir de la décima- los gastaremos en 46 : 2 = 23 páginas, por lo que el cuaderno tendrá 9 + 23 = 32 páginas.

14. (D) Si hubiera menos de 5 chicos madrileños, habría más de 5 chicos que no eran de Madrid, cosa que no puede darse pues hay 25 de Madrid y 30 en total, así que al menos 5 chicos son madrileños y la respuesta es D.

15. **(D)**



El ángulo dibujado es el formado por la aguja de las horas y la línea que va desde el centro a las 12 y. Si la aguja de las horas estuviera en las 2, el ángulo sería de 60º, así que la aguja de las horas está 12º debajo de las 2. Como entre las 2 y las 3, habría recorrido 30º, tenemos que para

60 min ——— 30º

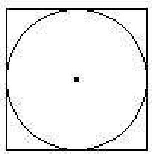
x ——— 12º

de donde $x = \dfrac{12 \cdot 60}{30} = 24$ min por lo que serán las 2 h 24 m.

16. (A) Si un lápiz y un cuaderno cuesta 150 ptas., 2 lápices y 2 cuadernos costarán 300 ptas. por lo que, como tres lápices y dos cuadernos cuestan 340 ptas, se deduce que un lápiz costará 40 ptas y un cuaderno 150 − 40 = 110 ptas.

17. (B) Cada múltiplo común de 12 y 15 volverán a coincidir, por lo que la primera vez que volverán a coincidir será dentro de un número de minutos que indique el mínimo común múltiplo de 12 y 15. Puesto que $12 = 2^2 \cdot 3$ y $15 = 3 \cdot 5$, m.c.m. $(12, 15) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$, con lo que coincidirán a as 11 h. 10 m..

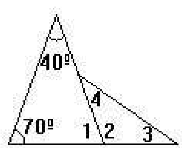
18. (D)



Si el cuadrado contiene al círculo, su lado será al menos el diámetro del círculo; así pues, el cuadrado más pequeño pedido tendrá de lado 8 y su área 64.

19. C) Si pensamos en todas las posibles ordenaciones, encontramos seis. (La primera posición la puede ocupar cualquiera de los tres, la segunda cualquiera de los dos que quedan y la tercera ya está otorgada para el otro, así que habrá 3 · 2 · 1 posibles ordenaciones). Si hay seis posibles casos, la probabilidad que se dé uno determinado de esos 6 es uno de seis, es decir, $\dfrac{1}{6}$.

20. (D)

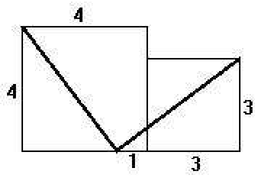


El ángulo 1 vale 180º − (40º + 70º) = 70º, así pues el ángulo 2 vale 180º − 70º = 110º, por lo que entre el 3 y el 4 sumarán 180º− 110º = 70º. Como ambos son iguales, cada uno debe valer 35º.

21. (D) Estamos hablando de dos millones, ochocientos mil treinta, es decir, 2800030.

22. **(E)** Como $31 < \sqrt{1000} < 32$ y $36 < \sqrt{1300} < 37$, los números pedidos serán 32^2, 33^2, 34^2, 35^2 y 36^2, es decir, cinco.

23. **(D)**



Estos cinco trozos ocupan ahora una superficie de $4^2 + 3^2 = 25$, así que ésa será la superficie del nuevo cuadrado, por lo que su lado será 5 y su perímetro 20.

24. **(B)** Entre Andrés y Beatriz se llevaron $\frac{2}{5}+\frac{1}{4}$, es decir, $\frac{13}{20}$, por lo que el resto fue $\frac{7}{20}$, que pesaba 28 g. Así pues $\frac{1}{20}$ de chocolate pesaba 4 g con lo que el trozo entero pesaría 80 g.

25. **(D)** El cociente pedido no puede ser $\frac{3}{4}$ pues eso querría decir que de cada siete estudiantes, tres serían niños y cuatro niñas, pero en esa clase no puede haber una cantidad exacta de grupos de siete estudiantes pues el número total, 30, no es divisible entre 7.

IV CONCURSO DE PRIMAVERA. 2º NIVEL (1º-2º ESO). 1ª FASE. DÍA 1-3-2000

1. (D) $0'3 + 0'7 = 1$ y $0'8 \cdot 1 = 0'8$.

2. (C) Hay tres de ellos cuya primera cifra decimal es 0. De ellos, el más pequeño es el que tiene más pequeña la segunda cifra decimal, es decir, el $0'0098$.

3. (A) $2 \times 2 \times 6 = 24$ y desplazando la coma tres lugares a la izquierda, llegamos al $0'024$.

4. (A) $\frac{1}{2} : x = 3$. Así pues, $\frac{1}{2x} = 3$, $1 = 6x$, $x = \frac{1}{6}$.

5. (D) $\frac{39}{18} + \frac{20}{9} + \frac{2}{3} = \frac{39}{18} + \frac{40}{18} + \frac{12}{18} = \frac{91}{18}$ que es un número comprendido entre $5 = \frac{90}{18}$ y $6 = \frac{108}{18}$, así pues mucho más cerca de 5.

6. (A) Entre los 10 estudiantes suman 92 puntos. La nota más baja posible de alguno de ellos parecería cuando los otros 9 tengan la nota máxima, 10, por lo que entre estos nueve sumarían 90 puntos y el otro estudiante habría obtenido un 2.

7. (C) Entre $12'44$ y $12'62$ vemos que hay nueve espacios iguales. Como $12'62 - 12'44 = 0'18$, cada espacio ocupará $\frac{0'8}{9} = 0'02$ por lo que P marcará

$12'44 + 3 \cdot 0'02 = 12'44 + 0'06 = 12'50$.

8. (E) $1 \text{ km}^3 = 1000^3$ litros, que tendrían $34 \cdot 1000^3$ gramos de sal, es decir, $34 \cdot 1000^2$ kg = 34.000.000 kg.

9. (C) 15 ——— 100

9 ——— x de donde $x = 60$.

10. (E) Si el candidato que ganó obtuvo x votos, los restantes obtuvieron $x - 9$, $x - 13$, $x - 18$ y $x - 25$ por lo que $x + x - 9 + x - 13 + x - 18 + x - 25 = 320$, es decir, $5x - 65 = 320$, con lo que $5x = 385$ y $x = 77$. Así pies, el candidato más votado obtuvo 77 puntos y el menos votado $77 - 25 = 52$ puntos.

11. (B) Habrá 100 números formados por las tres primeras cifras, desde 600 hasta 699. Cada uno dará lugar a 10 capicúas, por ejemplo el 677 dará lugar al 677□776 y la cifra □ puede ser 0, 1, 2, ... 9. Así pues, habrá $100 \cdot 10 = 1000$ capicúas.

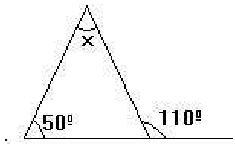
12. (C) Observamos que $16555 = 1 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 43$. Si nos dicen que tiene tres hijos en edad escolar, es que ella tiene 43 años y sus hijos 5, 7, y 11 por lo que la respuesta es $11 - 5 = 6$. (Cualquier otra descomposición de 16555, por ejemplo $16555 = 1 \cdot 7 \cdot 43 \cdot 55$ que atribuiría 55 años a la madre y 1, 7 y 43 a los hijos, además de biológicamente harto improbable, choca con la condición del enunciado de que los tres hijos estén en edad escolar).

13. (E) Como $2n^2$ siempre es par, $2n^2 + 5$ siempre será impar.

14. (E) Si compró a rosas amarillas y r rojas, tenemos que: $a \geq 1$, $r \geq 1$, $a + r = 13$ y $a > r$, habiendo gastado $300r + 500a$, es decir $300\,(13 - a) + 500a = 200a + 3900 =$ $= 100\,(2a + 39)$ donde al ser $a > r$, es $a \geq 7$, es decir a puede tomar los valores 7, 8, 9, 10, 11 y 12. Comprobando con las soluciones vemos que $a = 7$ no da lugar a ninguna, $a = 8$ tampoco, y $a = 9$ da lugar a $100\,(18 + 39) = 5700$ ptas que es la solución E.

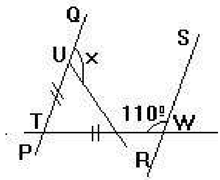
15. (D) Si asistieron a adultos y n niños, tenemos que $750a + 250n = 330000$, es decir, $3a + n = 1320$ siendo $a + n < 600$. Así pues $n < 600 - a$ y $3a + 600 - a > 1320$, de donde $2a > 720$, así que $a > 360$ con lo que asistieron como mínimo 361 adultos.

16. (E)



El ángulo suplementario a 110º será 70º por lo que
$70º + 50º + x = 180º$ y $x = 60º$.

17. (C)



El ángulo obtuso marcado con T es 110º por lo que el ángulo T del triángulo TUV valdrá 70º. Al ser isósceles, cada uno de los otros dos valdrá 55º, por lo que $x = 180º - 55º = 125º$

18. (E) Si los lados son x y $2x$, el perímetro es $x + x + 2x + 2x = 6x = 24$, así que $x = 4$ y los lados son 4 y 8 cm por lo que el área del rectángulo será 32 cm^2.

19. (B) Con 2 colores es imposible pues cada cara tiene 4 con aristas comunes con ella. En cambio con 3 colores, uno para cada par de caras opuestas podemos conseguir lo que buscamos.

20. (D) El conjunto pedido estará contenido en el plano paralelo a los dados y a 5 cm de cada uno, es decir, a 5 cm de P y consistirá en una circunferencia contenida en ese plano y tal que cada uno de sus puntos diste 6 cm de P. (Aquellos que conocéis el teorema de Pitágoras podéis concluir que dicha circunferencia es la que tiene por centro el pie de la perpendicular bajada desde P a dicho plano y por radio $\sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$).

21. (C) Habrá $\frac{24}{4} = 6$ números acabados en cada una de las cifras y serán pares las que acaban en 2, es decir, 6.

22. (C) Si los lados iguales miden x y el otro y, tenemos que $2x+y=25$ con x e y enteros positivos. Además $2x>y$. Así pues $y+y<25$ y $2x+2x>25$, es decir, $y\leq 12$ y $x\geq 7$.

Si $x=7$, $y=11$ (Recordar $2x+y=25$)

$x=8$, $y=9$

$x=9$, $y=7$

$x=10$, $y=5$

$x=11$, $y=3$

$x=12$, $y=1$.

Tenemos, pues, seis triángulos con esas características.

23. (D) Cuando el coche salió, el ciclista ya había recorrido 5 · 15 = 75 km. Como en cada hora le resta 90 − 15 = 75 km, le bastará 1 hora para darle alcance; así pues, le alcanzará a las 13 horas.

24. (D) $10^{99}-99=1\overbrace{00......0}^{99\text{ ceros}}-99=\underbrace{99........9}_{97\text{ nueves}}01$ por lo que la suma de las cifras de dicho número será $97\cdot 9+1=874$.

25. (E) Por cada signo + que convertimos en −, estamos restando el doble del número que sigue al signo + tocado, es decir, estamos restando un número par, con lo que, al ser 5050 par, sean cuales fueran los signos + tocados, el resultado será par, o sea, nunca llegaría a ser 1999.

IV CONCURSO DE PRIMAVERA. 3er NIVEL (3º-4ºESO). 1ª FASE. DÍA 1-3-2000

1. **(B)** Como $12'46 = \frac{1246}{100}$, tenemos que $12'46^3 = \frac{1246^3}{10^6}$, por lo que habrá que contar seis lugares desde la derecha, obteniendo $1934'434936$.

2. **(D)** 10^{99} lo escribimos como la unidad seguida de 99 ceros, por lo que $10^{99} - 99$ será un número de 99 cifras, las dos últimas 0, 1 y las 97 primeras iguales a 9, por lo que la suma de todas ellas será $97 \cdot 9 + 1 = 874$.

3. **(B)** Sabemos que $\frac{1}{R} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$. Así que $\frac{1}{R} = \frac{1}{2}$, de donde $R = 2$.

4. **(A)** Entre los diez estudiantes citados sumaron 92 puntos y la nota más baja que pudo obtener uno de ellos se habría dado cuando los nueve restantes obtuvieron la nota máxima, es decir entre ellos sumaron 90 puntos por lo que un estudiante pudo haber obtenido un 2.

5. **(C)** Entre $12'44$ y $12'62$ hay 9 subdivisiones, por lo que cada una equivale a $\frac{12'62 - 12'44}{9} = 0'02$. Como P está en la 3ª subdivisión, representará al número $12'44 + 3 \cdot 0'02 = 12'50$.

6. **(B)** Trabajemos con 100 individuos cosa que no afecta al resultado del problema y es más cómodo para muchos de vosotros. Hace tres días había 10 enfermos y 90 sanos. En los tres últimos días se curó uno (el 10% de 10) y enfermaron nueve (el 10% de los sanos). Así pues ahora hay 1 + 81 = 82 sanos, que representará el 82%.

7. **(E)** Si x es el número de estudiantes, sabemos que $x \geq 15$, $x < 30$, $x = 4a + 2$ y $x = 5b + 1$. Así pues, x es un número par pero no múltiplo de 4 y que acaba en 6. Hay una única respuesta, 26, que correspondería a 11 chicos.

8. **(B)** Si el número es x tenemos que, al formar el número $1x1$, ha aumentado x en 14789, es decir: $10x + 1 + 10^n - x = 14789$ siendo n el número de cifras de x. Así pues, $9x + 10^n = 14788$, de donde $10^n = 10000$ y $9x = 4788$ con lo que $x = 532$ y la suma de sus cifras es 10.

9. **(C)** Al tener todos los números dados igual numerador, bastará ver el de menor denominador. Como tanto $0'4$ como $0'44$ son menores que 1, el menor será el de menor base y mayor exponente, o sea, $0'4^2$ por lo que la respuesta será $\frac{4}{0'4^2}$, es decir, C.

10. **(A)** Nos piden cuántos números x comprendidos entre 2000 y 2100 verifican $x = 2a + 1 = 3b + 1 = 5c + 1 = 7d + 1$ con a, b, c y d enteros. Así pues, $x - 1$

será múltiplo de 2, 3, 5 y 7. El menor número con estas características es m.c.m. (2, 3, 5, 7) = 210 y como 210 no tiene ningún múltiplo comprendido entre 2000 y 2100, sigue que no hay ningún $x - 1$ con esta propiedad.

11. **(B)** El mayor divisor de un número positivo distinto de él es su mitad. Así pues
$$\frac{72^3}{2} = \frac{2^9 \cdot 3^6}{2} = 2^8 \cdot 3^6 .$$

12. **(B)** Calculemos las distancias entre las señales:

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2};\ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6};\ \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12};\ \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20} \text{ y } \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}.$$

Recorro $\frac{1}{2}$ km a 120 km/hora, $\frac{1}{6}$ km a 60 km/hora, $\frac{1}{12}$ km a 40 km/hora, $\frac{1}{20}$ km a 30 km/hora, $\frac{1}{30}$ km a 24 km/hora y finalmente $\frac{1}{6}$ km a 20 km/hora.

Así pues, el tiempo empleado en minutos, será: $\dfrac{\frac{1}{2}}{2} + \dfrac{\frac{1}{6}}{1} + \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{2}{3}} + \dfrac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{2}} + \dfrac{\frac{1}{30}}{\frac{2}{5}} + \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}$

$$= = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{147}{120} = 1 \text{ m } 13'5 \text{ segundos.}$$

13. **(D)** Si a es el número de adultos y n el número de niños que asistieron tenemos que $a + n < 600$ y $750a + 250n = 330000$. La última ecuación la podemos escribir como $3a + n = 1320$ que, junto a la primera, nos lleva a $3a + 600 - a > 1320$, es decir $a > 360$ por lo que, como mínimo, asistieron 361 adultos.

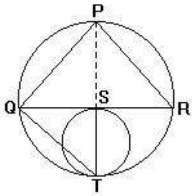
14. **(B)** Llamando x a la anchura de la calle, el recorrido en la 1ª ruta es $4 \cdot 20 + x + 4 \cdot 20$ y en la 2ª es $4\left(x + \sqrt{20^2 + x^2}\right) + x$.

Al ser iguales, tenemos que $160 = 4\left(x + \sqrt{400 + x^2}\right)$, que nos lleva a

$(40 - x)^2 = \sqrt{400 + x^2}$, es decir, $1600 + x^2 - 80x = 400 + x^2$, por lo que $x = 15$ y cualquiera de los dos recorrido es de 175 m.

15. **(E)** Cada uno de los paréntesis es un divisor de 4; su producto es 4 y son todos diferentes; así que tendrán que valer 2, −2, 1 y −1; es decir, $m = 5$, $n = 9$, $p = 6$, $q = 8$ (o en cualquier otro orden) por lo que su suma será 28.

16. (C)



Al ser $P\hat{Q}T = 90º$, podemos poner $PQ^2 + QT^2 = PT^2$, es decir, $80 + QT^2 = 144 \Rightarrow QT = 8$.

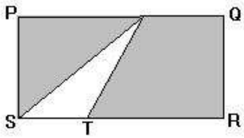
Llamando x a ST, por la semejanza de los triángulos PQT y QST, tenemos que $\frac{12}{8} = \frac{8}{x}$, de donde $x = \frac{16}{3}$ y el radio pedido será $\frac{8}{3}$.

17. (A) El factor que ocupa el lugar n, a saber, 1 + $\frac{2n+1}{n^2} = \frac{n^2+2n+1}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{n^2}$.

Así pues, el producto pedido será $\frac{2^2}{1^2} \cdot \frac{3^2}{2^2} \cdots \frac{21^2}{20^2} = 21^2 = 441$.

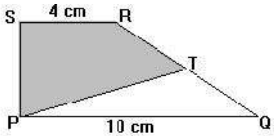
18. (D) $\frac{m}{m-n} + \frac{n}{n-m} = \frac{m}{m-n} - \frac{n}{m-n} = \frac{m-n}{m-n} = 1$.

19. (D)



Si $ST = 6$ y $TR = 12$, entonces $PQ = SR = 18$, por lo que $QR = 9$ y el área del triángulo en blanco es $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 = 3 \cdot 9$, con lo que el área sombreada será $18 \cdot 9 - 3 \cdot 9 = 15 \cdot 9 = 135$.

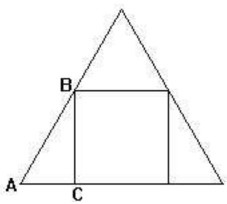
20. (C)



Si la altura del trapecio es 6, la altura sobre la base PQ del triángulo TPQ será 3 por lo que el área de dicho triángulo será $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3 = 15$.

Como el área del trapecio es $\frac{1}{2}(10+4) \cdot 6 = 42$, el área pedida será $42 - 15 = 27$.

21. (E)



El triángulo ABC es la mitad de un triángulo equilátero; así que si $AC = x$, $AB = 2x$, por lo que $(2x)^2 = 1 + x^2$ y $x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, con lo que el lado del triángulo valdrá $\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1 = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$.

22. (E) Como el triángulo grande es semejante a los pequeños y la razón de semejanza es 12, su área será 12^2 veces mayor, así que necesitaremos 144 triangulitos pequeños.

23. **(C)** En cada una de las cifras dadas, acabarán 6 de los 24 números formados y serán pares sólo los que terminen en 2, o sea, 6.

24. **(C)** Llamando x a los lados iguales e y a los lados desiguales, tenemos que $2x + y = 25$ y además $y < 2x$ donde x e y deben ser números enteros positivos. Como consecuencia de las afirmaciones hechas, es $2x + 2x > 25$, así que $x \geq 7$. Como $2x < 25$, $x \leq 12$. Así pues tenemos 6 posibilidades, una para cada uno de los seis enteros 7, 8, 9, 10, 11 y 12.

25. **(A)** La expresión dada es lg (tg 1º · tg 2º · tg 3º ·... ... · tg 89º). Como, al agrupar por parejas los factores 1º − 89º, 2º − 88º, etc., resultan ser ángulos complementarios, el producto de las tangentes de cada una de estas 44 parejas es 1. Como el otro factor, tg 45º, también es 1, la respuesta es log 1 = 0.

IV CONCURSO DE PRIMAVERA. 4º NIVEL (1º-2º BACHILLERATO). 1ª FASE. DÍA 1-3-2000

1. **(C)** Agrupando por parejas, $1-2$, $3-4$, etc., cada una suma -1; así pues si hay $2n$ términos, habrá n parejas y $S_{2n}=-n$.

Como $S_{2n+1}=S_{2n}+2n+1$, tenemos que $S_{1999}=S_{1998}+1999=-999+1999=1000$ y $S_{2000}=-1000$, por lo que la suma pedida es 0.

2. **(D)** El número pedido, x, verificará que $x-\frac{1}{5}=\frac{13}{25}-x$, es decir

$$x=\frac{\frac{1}{5}+\frac{13}{25}}{2}=\frac{18}{50}=\frac{9}{25}.$$

3. **(B)** Si había n estudiantes y a aulas, tenemos que $\frac{n}{a}-6=\frac{n}{a+5}$ y

$\frac{n}{a+5}-4=\frac{n}{a+10}$. De la primera ecuación obtenemos $n(a+5)-6a(a+5)=na$, que nos conduce a $5n=6a(a+5)$. La segunda la podemos poner como $n(a+10)-4(a+5)\cdot(a+10)==n(a+5)$, y nos lleva a $5n=4(a+5)(a+10)$. Igualando estas expresiones para $5n$, tenemos que $6a(a+5)=4(a+5)(a+10)$, de donde $6a=4a+40$ y $a=20$, con lo que $5n=6\cdot 20\cdot 25$ y $n=600$.

4. **(C)** Tenemos que $x=a^2$, $x+99=b^2$ con a y b enteros. Restando es $99=b^2-a^2$. Descomponiendo en factores, es $99=(b+a)(b-a)$. Así pues, como $99=99\cdot 1==33\cdot 3=11\cdot 9$, tenemos que

$$\begin{cases}a+b=99\\ a-b=1\end{cases} \text{ ó } \begin{cases}a+b=33\\ a-b=1\end{cases} \text{ ó } \begin{cases}a+b=11\\ a-b=9\end{cases}$$. La solución de cada sistema da lugar a un valor de x, por lo que habrá 3 enteros positivos x con esas características.

5. **(E)** Analizando las terminaciones de las potencias de 3 y de las potencias de 7, tenemos que 3^1 acaba en 3, 3^2 en 9, 3^3 en 7, 3^4 en 1 y a partir de aquí se van repitiendo las terminaciones, por lo que dichas terminaciones forman ciclos de 4 elementos (3, 9, 7, 1) con lo que 3^{17} acabará igual que 3^1, o sea en 3. Análogamente, las últimas cifras de las potencias de 7 son: 7^1 acaba en 7, 7^2 en 9, 7^3 en 3, 7^4 en 1 y dichas terminaciones forman también ciclos de 4 elementos (7, 9, 3, 1) con lo que 7^{13} acabará igual que 7^1, o sea, en 7 y la suma pedida acabará en 0.

6. **(B)** El mayor divisor de un número positivo distinto de él es su mitad, por lo que la respuesta es $\frac{72^3}{2}=\frac{2^9\cdot 3^6}{2}=2^8\cdot 3^6$.

7. **(E)** Cuando Alicia ha recorrido los 1000 m de la carrera, Pedro ha recorrido 1000 − (48 + 2) = 950 m, así que la velocidad de Alicia es $\frac{1000}{950}v=\frac{20v}{19}$ siendo v la velocidad de Pedro en m/minuto.

Si Alicia coge a Pedro al cabo de t minutos habrá recorrido $\frac{20v}{19}t$ y Pedro vt por lo que $vt + 48 = \frac{20}{19}vt$, de donde $vt = 912$ m y los metros que recorrió Alicia serán $\frac{20}{19}\cdot 912 = 960$ m.

8. **(D)** Llamando x al número positivo $\sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}}$, tenemos que $x^2 = 7+\sqrt{13}+7-\sqrt{13}-2\sqrt{49-13}$, así que $x^2=2$ y $x=\sqrt{2}$.

9. **(C)** $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$. Puesto que $\alpha+\beta=\sqrt{531}$ y $\alpha\beta=\frac{431}{2}$, tenemos que $\alpha^2+\beta^2 = 531 - 431 = 100$.

10. **(A)** $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$. Resolvamos pues $(x+1)(x+2)=|x+1|$.

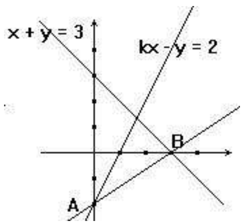
Si $x + 1 > 0$, la ecuación es equivalente a $x + 2 = 1$, de donde $x = -1$, que hay que desechar ya que $x + 1 = 0$.

Si $x + 1 < 0$, podemos poner $x + 2 = -1 \Rightarrow x = -3$.

Finalmente si $x + 1 = 0$, $x = -1$.

Así pues, las soluciones distintas de la ecuación dada son −1 y −3 de suma −4.

11. **(E)**



Una interpretación geométrica del sistema facilita los cálculos:

La pendiente de la recta AB es $\frac{2}{3}$ y su ecuación es: $\frac{2}{3}x-y=2$. Así pues, para que $kx-y=2$ corte en el primer cuadrante a $x + y = 3$, deberá estar más inclinada que $\frac{2}{3}x-y=2$, o sea, $k>\frac{2}{3}$.

12. (A) La suma de los n números dados es $n \cdot k$ y la media de los $n + 1$ nuevos números es $k + 1$ por lo que su suma será $(k + 1) \cdot (n + 1)$, con lo que el número añadido será $(k + 1)(n + 1) - nk = n + k + 1$.

13. (A) $2^{n+1} + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} = 2^{n+2}$.

14. (E) Determinemos en primer lugar el valor de k. Si x_1 y x_2 son las soluciones de $3x^2 - kx + 2 = 0$, sabemos que $x_1 + x_2 = \dfrac{k}{3}$. Puesto que $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{1}{2}$, sigue que $1 = \dfrac{k}{3}$ y $k = 3$.

Por otra parte, el cociente de x^2 es positivo, por lo que el mínimo valor que toma y lo toma en el vértice. Como éste tiene de abscisa $\dfrac{1}{2}$, el valor pedido será: $3\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \dfrac{1}{2} + 2 = \dfrac{5}{4}$.

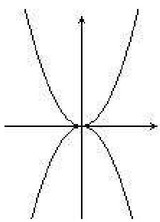
15. (A) $\dfrac{1}{ab+b^2} + \dfrac{1}{a^2+ab} = \dfrac{1}{b(a+b)} + \dfrac{1}{a(a+b)} = \dfrac{a+b}{ab(a+b)} = \dfrac{1}{ab}$.

16. (B) Si $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $f(f(x)) = \dfrac{1}{1+f(x)} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}} = \dfrac{1+x}{2+x}$.

17. (B) $f(g(x)) = 10g(x) = -5x$. Así pues, $g(x) = -\dfrac{x}{2}$.

18. (B) La función es del tipo coseno y observando que toma valores entre -2 y 2 es $y = 2\cos x$.

19. (B)



Observando las posibles respuestas, vemos que $|y| = x^2$ a la gráfica formada por los pares de puntos tales que $y = x^2$ $y = -x^2$, que son los de la gráfica de la figura, así que la respuesta es B.

20. **(C)** Sabemos que $200 = \frac{a_1 + a_1 + 49d}{2} \cdot 50$ y $2700 = \frac{a_1 + 50d + a_1 + 99d}{2} \cdot 50$ ecuaciones que podemos simplificar como $200 = 50a_1 + 1225d$ y $2700 = 50a_1 + 3725d$ que restándolas nos conducen a $2500 = 2500d$, por lo que $d = 1$ y $a_1 = \frac{200 - 1225}{50} = -20{,}5$.

21. **(C)** Nos dicen que $a + c = 2b$, $(a + 1)\, c = b^2$ y $a\,(c + 2) = b^2$.

Así pues, $(a + 1)\, c = a\,(c + 2)$, es decir, $c = 2a$, y sustituyendo este valor en las dos primeras ecuaciones, tenemos que $3a = 2b$ y $2a\,(a + 1) = b^2$. Dividiendo (recordar que ninguno es 0) es $\frac{2(a+1)}{3} = \frac{b}{2}$, por lo que $b = \frac{4(a+1)}{3}$ y $3a = \frac{8(a+1)}{3}$ de donde $a = 8$ y $b = 12$.

22. **(B)** Sabemos que $8^a = 225$ y $2^b = 15$. Así pues, $2^{3a} = 225$ y $2^{2b} = 225$ de donde $a = \frac{2b}{3}$.

23. **(D)** Llamando $\lg_{b^2} x = r$ y $\log_{x^2} b = s$, tenemos que $b^{2r} = x$ y $x^{2s} = b$, por lo que $\left(b^{2r}\right)^{2s} = b$ y $rs = \frac{1}{4}$. Por otra parte nos dicen que $r + s = 1$. De estas dos últimas igualdades, deducimos $r = s = \frac{1}{2}$ por lo que $x = b^{2\cdot\frac{1}{2}} = b$.

24. **(A)** Una posibilidad para que se verifique esa ecuación es que sen $2x$ = cos $3x$ y cos $2x$ = sen $3x$, es decir, $2x + 3x = 90º$ y $x = 18º$.

25. **(B)** Parece razonable pensar en tg $(A + B)$ pues $A + B = 45º$ y conocemos sus razones trigonométricas. Así pues, tg $(A + B) = 1 = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \ \operatorname{tg} B}$, de donde

tg A + tg B = = 1 − tg A tg B, o sea, tg A + tg B + tg A tg B = 1. Como
(1 + tg A) · (1 + tg B) = tg A + tg B + tg A tg B + 1, sigue que
(1 + tg A) · (1 + tg B) = 1 + 1 = 2.

IV CONCURSO DE PRIMAVERA. 1er NIVEL (5º-6º PRIMARIA). 2ª FASE. 8-4 2000.

1. (**D**) Cuanto menor sea el número pensado, mayor será el resultado obtenido. Así pues Dani pensó el 10 y $200-10=190$, que multiplicado por 2 nos da 380.

2. (**E**) En media hora hay 30 minutos y en tres cuartos de hora 45. Rocío pronunció entonces, más de 30 x 150 palabras, o sea más de 4500, por lo que la única opción posible es E.

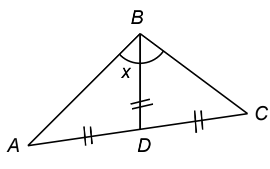
3. (**C**) Como $\sqrt{8}$ es menor que 3 y $\sqrt{80}$ menor que 9, los enteros pedidos serán desde 3 hasta 8, contando ambos, o sea, 6.

4. (**B**) Al efectuar la suma, sea cual fuere B, me llevo 1 de la segunda columna, por lo que, sea cual fuere A (observa que te dicen que $A \neq 0$) me llevo 1 de la tercera columna. Así el resultado tendrá cinco cifras.

5. (**C**) Como 200 millones es un número formado por un 2 y ocho ceros , su raíz cuadrada sería la raíz cuadrada de 2 multiplicada por 10000 y la opción que más se parece a ese número es 14000, o sea C.

6. (**B**) Si no quieres ir mirando las cinco opciones a ver cuál podría ser, podrías pensar que hay dos posibilidades: o los ángulos pequeños son los iguales y el otro es el doble, o los iguales son los grandes y el otro es la mitad. En el primer caso la suma equivale a 4 ángulos pequeños, por lo que al ser ésta 180º, el pequeño sería $\frac{180º}{4}=45º$, que no es ninguna de las respuestas. Será entonces la otra opción, siendo la suma equivalente a cinco ángulos pequeños y el valor de éste $\frac{180º}{5}=36º$, o sea la opción B.

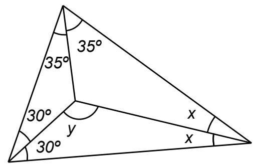
7. (**C**) Si llamas a al ángulo ABD y b al ángulo CBD, tienes que llamar a al ángulo DAB y b al ángulo DCB por ser isósceles los triángulos correspondientes. Como por otra parte, la suma de los ángulos de un triángulo es 180º, puedes poner $a+b+a+b=180º$ y como $x=a+b$, queda que $x=180º$



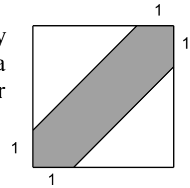
8. (**A**) Con un 2 y un 3 sumo 5. Así pues, como debo sumar 1000, habré formado 200 parejas de dos y tres, es decir, he utilizado 200 doses.

9. (**C**) Entre las cuatro notas he sumado 28 puntos, por lo que la suma de las tres primeras habrá sido $28-8=20$ puntos.

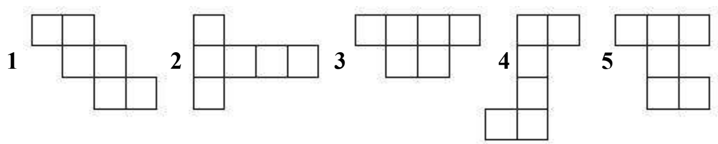
10. (**D**) Al ser la suma de los ángulos de un triángulo 180º, sabemos que $2x = 180º - 130º$, pues $30º + 30º + 35º + 35º = 130º$. Así pues, $x = 25º$, por lo que en el triángulo de abajo $y = 180º - 55º = 125º$.



11. (**B**) Lo más cómodo es hallar el área del cuadrado, 16 m^2, y restarle las áreas de los dos triángulos blancos, siendo cada uno de ellos un triángulo rectángulo isósceles de cateto 3, por lo que la suma de sus áreas será $\frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 9$ y el área de la zona sombreada es $16 - 9 = 7\ m^2$.



12. (**C**)



3 no puede corresponder a un cubo pues hay un vértice (el central) del desarrollo en el que confluyen más de tres caras. Tampoco 5 pues las caras de la derecha se solaparían al cerrar el cubo. Como en los otros casos sí es posible , la respuesta es 1, 2 y 4, o sea C.

13. (**E**) Podemos afirmar que las cuatro terceras partes del número es 576 , por lo que una tercera parte será $\frac{576}{4} = 144$, y el número será $144 \cdot 3 = 432$.

14. (**C**) Lo contrario a alguna vez es nunca, por lo que la afirmación contraria a la nuestra será *" Nunca he sacado más puntos"*.

15. (**E**) Imagínate a esas dos personas como una persona gorda. Tendríamos entonces tres personas que corresponderían a seis maneras de sentarse (*ABC, ACB, BAC, BCA, CAB* y *CBA*) pero como esas dos personas se pueden sentar juntas de dos formas, a la izquierda o a la derecha una de la otra, tendremos en total $6 \text{x} 2 = 12$ formas de sentarse.

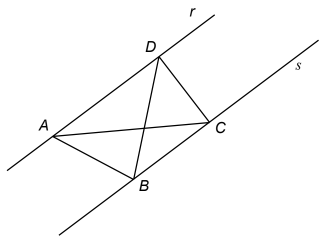
16. (**C**) Para que un número sea múltiplo de 6 debe serlo de 2 y de 3, o sea debe ser par y la suma de sus cifras múltiplo de 3. Nuestro número, entonces, debe acabar en 8 y la cifra central ser tal que sumada a 16 sea múltiplo de 3. La mayor con esa característica es 8 y el número pedido, 888.

17. (**D**) $1 + \frac{1}{1+2} = \frac{4}{3}$. Así, $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+2}} = 1 + \frac{1}{\frac{4}{3}} = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{3}$.

18. (**D**) El ángulo central de un octógono regular mide $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$. Así pues, la suma de los otros dos ángulos de cada triángulo formado uniendo el centro con los vértices de un lado es $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$, y esa suma es la medida del ángulo interior.

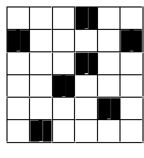
19. (**B**) Los múltiplos de 7 son de la forma $7 \cdot x$, y para que acabe en 3, x debe acabar en 9, ya que es la única cifra que multiplicada por 7 acaba en 3. Por otra parte como al multiplicar 7 por 9 llevo 6 a las decenas, para que nuestro múltiplo acabe en 13, la cifra de las decenas de x por 7 debe acabar en 5 (para que al sumarle seis acabe en 1) y por ello esa cifra debe ser también 5. Así que el primer x es 59 y ya no hay más ya que $7 \cdot 159 > 1000$.

20. (**A**) Tomando como base de los dos triángulos el segmento BC, tenemos que tienen la misma base y la misma altura, ya que ésta es la distancia entre las rectas paralelas, y por tanto tienen la misma área.



21. (**E**) Si los números fueran iguales, cada uno sería el 512. Como se diferencian en 148, es que el mayor es $512 + \frac{148}{2} = 512 + 74 = 586$ y el menor $512 - 74 = 438$, por lo que uno de ellos es 586 y la respuesta es E.

22. (**B**) De los cuatro ejes de simetría de un cuadrado la diagonal que va del vértice izquierdo de arriba al vértice derecho de abajo tiene ya dos parejas de cuadraditos negros simétricos y uno autosimétrico, luego sólo quedan por pintar los simétricos de los dos restantes.



23. (**E**) CEBADA tiene seis letras, así que en la sucesión hay ciclos de seis en seis. Al dividir 2000 entre 6 obtenemos 333 ciclos y me sobran dos letras, luego la letra en la posición 2000 será la segunda de CEBADA.

24. (**C**) Si observamos la distancia de cada opción a 1000, vemos que la única que no es múltiplo de 7 es $1000 - 176 = 824$, por lo que la respuesta es 176, o sea C.

25. (**C**) Antonio nombra los múltiplos de 3 más 1 y Beatriz los múltiplos de 4 más 1. Así los dos nombrarán los múltiplos de 12 más 1. El primer múltiplo de 12 mayor que 1000 es 1008 (al dividir 1000 entre 12 obtengo 4 de resto). Así pues, el primer número mayor que 1000 que nombrarán los dos será el 1009.

IV CONCURSO DE PRIMAVERA. 2º NIVEL (1º-2º ESO). 2ª FASE. DÍA 8-4-00.

1. (**A**) $\dfrac{4}{5-\dfrac{3}{4}}=\dfrac{4}{\dfrac{17}{4}}=\dfrac{16}{17}$

2. (**E**) Entre los primeros cinco controles, Juan sumó $8\cdot 5=40$ puntos, y entre los ocho primeros sumó $7{,}5\cdot 8=60$ puntos, así que entre los tres últimos (6º, 7º y 8º) obtuvo 20 puntos . Como en el sexto obtuvo un 7 y en el séptimo un 5, en el último un 8.

3. (**B**) Un día tiene $24\cdot 60\cdot 60=86400$ segundos. Se pierden $300\cdot 86400=25920000$ gotas de agua en 300 días, que llenarían $25920000:600=43200$ vasijas de 100 ml, luego se desperdician 4320 l.

4. (**C**) Llamando x e y respectivamente al número de coches con lavado simple y con lavado con jabón, sabemos que $500x+700y=17600$, y el número de coches lavados será menor cuantos mayor sea y (el número de coches lavados con jabón). Se trata de encontrar entre las soluciones enteras de la ecuación $5x+7y=176$ la que tenga mayor y. Como $y=\dfrac{176-5x}{7}$, empezamos a dar valores a x de 0 a 6, hasta conseguir un valor entero para y. Para $x=3,\ y=23$, luego la respuesta es $23+3=26$ coches.

5. (**D**) Sin descuento pagaría 9000 pts, así que debo pagar $0{,}8\cdot 9000=7200$ pts.

6. (**D**) Al estar cojos cada gato de una pata distinta es como si a la hora de contar patas tuviera tres gatos normales, y por tanto $3\cdot 18=54$ garras

7. (**A**) Los lados de los rectángulos pedidos son $5a$ y $5b$ con $a<b$, por lo que $25a\cdot b=600$ y $a\cdot b=24$ con $a<b$, es decir cuatro valores enteros para a (1, 2, 3 y 4) luego cuatro rectángulos distintos.

8. (**D**) Como $71x$ no puede pasar de 710 y $2y$ de 20, la suma pedida puede tener cuatro o cinco cifras. Tiene cinco si $x>2$ y tiene cuatro si x es 1 o 2 ya que en ambos caso la distancia a 10000 es mayor que 20. Luego la respuesta es D.

9. (**A**) Ambos primos no pueden ser impares ya que su suma sería par. Así uno de ellos es el 2, por lo que el otro, 111111, sería múltiplo de 3 con lo que la respuesta es *de ninguna forma*, o sea A.

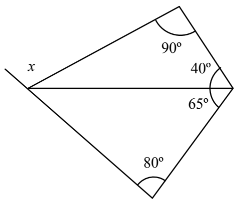
10. (**A**) Cada tres pasos avanza 0,5m, por lo que para los 19 primeros metros necesitará $19\cdot 6 = 114$ pasos. Como el último metro lo alcanza en dos pasos la respuesta es 116 pasos.

11. (**E**) Sabemos que $x+6+x+9+x+15=360$, luego $x=110^{\text{o}}$, y el ángulo pedido será $(x+15)^{\text{o}}=125^{\text{o}}$ y la respuesta E.

12. (**D**) Un helado cuesta menos de $\dfrac{1000}{9}$ ptas, es decir menos de 112 ptas, pero más de $\dfrac{1000}{10}=110$, luego la respuesta es D.

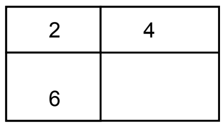
13. (**A**) Calculo algunos términos más hasta observar algún patrón:
8, 6, 4, 0, 4, 4, 8, 2, 0, 2, 2, 4, 6, 0, 6, 6, 2, 8, 0, 8, 8, 6, 4, ... Me doy cuenta de que después de veinte números repito las dos cifras del comienzo y por tanto entro en un ciclo de 20 números. Así como al dividir 2001 entre 20 el resto es 1, será el primer número del ciclo el que esté en esa posición, es decir el 8.

14. (**A**)

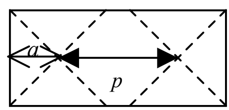


El ángulo suplementario a x es $360^{\text{o}}-(90^{\text{o}}+40^{\text{o}}+65^{\text{o}}+80^{\text{o}})=85^{\text{o}}$, por lo que $x=180^{\text{o}}-85^{\text{o}}=95^{\text{o}}$.

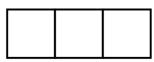
15. (**A**) Las áreas de los rectángulos son proporcionales a su altura. Así el rectángulo de área 6 tiene el triple de altura de la del triángulo de área 2, y eso ocurrirá con los rectángulos correspondientes de la derecha, de forma que el cuarto rectángulo tiene área 12, y el rectángulo completo, $2+6+4+12=24$.



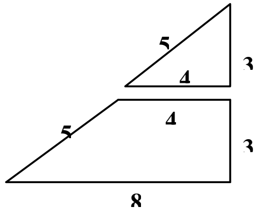
16. (**D**) a es la mitad de la diagonal de un cuadrado de lado n, por lo que vale $\dfrac{\sqrt{2}}{2}n$ y $p=m-2a=m-\sqrt{2}\,n$.



17. (**A**) Si x es el lado del cuadrado, nos dicen que $3x+3x+x+x=24$, por lo que , $x=3$ y el rectángulo tiene dimensiones 9 y 3 cm, y por tanto su área será 27 cm^2.



18. (**B**) Colocando las dos piezas como se ve en la figura el triángulo rectángulo que se forma tiene de lados 6, 8 y 10.



19. (**C**) En 45 días hay seis semanas completas y tres días más. Si uno de éstos es lunes tendríamos siete lunes en ese periodo.

20. (**E**) Para ser mayores que 4000 pueden ser de cinco cifras (hay que emplear todas las cifras y vale cualquiera en cualquier posición) así que de éstos hay $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$; o pueden ser de cuatro cifras pero tienen que empezar por 4, 5 o 6 y por ello el número de éstos será $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 72$. En total habrá 192 números mayores que 4000.

21. (**D**) Para hallar el resto al dividir por 5 basta con saber la última cifra del número 1999^{2000}, que es la última cifra de 9^{2000}. Como $9^1 = 9$ y $9^2 = 81$, las terminaciones de las potencias de 9 son 9 si el exponente es impar y 1 si el exponente es par.

22. (**E**) Para que la diferencia de fracciones sea uno, el primer numerador debe ser 3 o 4. Si es 4 no vale ninguno de los otros números como denominador, así que el primer numerador es 3 y tanteando un poco vemos que la colocación de las cifras es: $\frac{3}{1} - \frac{4}{2}$, y así $A + C = 7$.

23. (**C**) Cada cifra será menor o igual que 7. Razonemos sobre la cifra mayor.
    Si es 7, la otra debe ser 1 y el número es 17
    Si es 6, el cuadrado de la cifra anterior es menor de 14 y ...; tenemos la solución 1236.
    Si es 5, rápidamente aparece 345.
    Si es 4, ya no hay más números.
    El número mayor es 1236 y el producto de sus cifras es 36.

24. (**D**) Con las 100 primeras páginas gasto diez 2 como terminación y diez 2 como cifra de decena. Llevamos ya veinte, podré gastar otro 2 en 102 y el último en 112, pudiendo acabar de numerar hasta la 119.

25. (**C**) Los ceros del producto se producen por el emparejamiento de un 2 y un 5. Factores 5 tengo doce y factores 2 nueve, luego nueve parjas 2·5.

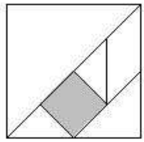
IV CONCURSO DE PRIMAVERA. 3er NIVEL (3º-4º ESO). 2ª FASE. DÍA 8-4-00.

1. (**B**) Con numerador 6, el más pequeño es el que tiene denominador más grande. A igual denominador el más pequeño es el que tiene menor numerador. Nos queda pues comparar $\frac{6}{8}$ con $\frac{7}{6}$, y lo es el primero.

2. (**B**) La quinta cifra decimal de 9'12344 y $9'123\overline{4}$ es 4, pero $9'123\overline{4}$ continúa.

3. (**A**) $2\left(1-\frac{1}{2}\right)+3\left(1-\frac{1}{3}\right)+4\left(1-\frac{1}{4}\right)+...+10\left(1-\frac{1}{10}\right)=2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{2}{3}+...+10\cdot\frac{9}{10}=$ $1+2+...+9=45$.

4. (**C**) Las diagonales del cuadrado sombreado son la mitad del lado del cuadrado. Su área es $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}l\cdot\frac{1}{2}l=\frac{1}{8}l^2$

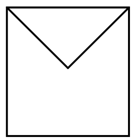


5. (**E**) Puesto que en el Club de Ciencias hay 15 estudiantes, el 80% de ellos, o sea 12. Estos 12 constituyen el 30% de los estudiantes del Club de Matemáticas, por lo que éste tendrá $\frac{12\cdot 100}{30}=40$ estudiantes.

6. (**D**) Las posibles sumas de Beatriz son 17, 18 y 19 los posibles productos de Carlos son 15, 18 y 30. Si metemos los datos en una tabla, vemos que Beatriz gana en cuatro de ellos.

	17	**18**	**19**
15	B	B	B
18	C	=	B
30	C	C	C

7. (**D**) La figura resultante es un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa es el lado del cuadrado. Su área es la cuarta parte del cuadrado por lo que el área de éste será $4\cdot 9=36$ cm^2, 6 cm su lado y 24 cm su perímetro.



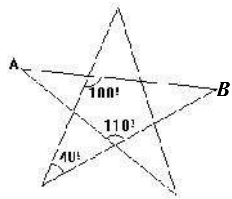
8. (**B**) Si empezamos por 98, se va formando la sucesión: 98, 49, 44, 22, 11, 6, 54, 27, 22, 11,... Así que después de los tres primeros se produce un ciclo de cinco números: 22, 11, 6, 54 y 27. Restamos 3 a 2000 y hallamos el resto de dividir 1997 entre 5, que es 2. El segundo número del ciclo es el que ocupa la posición 2000.

9. (**D**) Como Carlos empieza con 36 ptas, tras la primera jugada tiene 72 ptas, y tras la 2ª 144. Como acaba con 36 ptas en la tercera jugada reparte 108 ptas entre Antonio y Beatriz. Veamos en una tabla el desarrollo del juego.

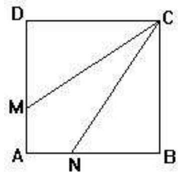
	Antonio	Beatriz	Carlos
Al comienzo	a	b	36
Después 1ª jugada	a-b-36	2b	72
Después 2ª jugada	2·(a-b-36)	2b- (a-b-36) -72	144
Después 3ª jugada	4·(a-b-36)	2·(2b- (a-b-36) −72)	36

Como en el juego el dinero ni se crea ni se destruye, la suma de las cantidades de cualquier fila debe ser igual. Comparamos la 1ª y la 4ª fila de la tabla:
$a+b+36=4a-4b-144+6b-2a-72+36$; o $a+b=216$, y $a+b+36=252$.

10. (**B**) Nombramos el vértice-ángulo B. Puesto que $B+100º+40º=180º$, B es 40º, y como $B+A+110º=180º$, tenemos que A = 30º.



11. (**D**) 18 pescados equivalen a 12 barras de pan que equivalen a 44 bolsas de arroz.

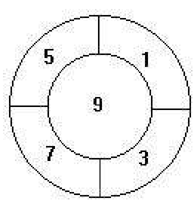


12. (**C**) Como el área del cuadrado es 9, el área del triángulo CDM es 3 u^2, y como su base CD mide 3 u, su altura DM mide 2 u y la hipotenusa CM mide $\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}\ u$.

13. (**B**) El número original es 86ab y b = 0, pues el número es par y divisible por 5. Como también es divisible por 3, debe ser $8+6+a+0$ múltiplo de 3, y por ello a es 1, 4 o 7. De las tres opciones sólo 8640 es múltiplo de 4, luego la suma de las cifras borradas $4+0=4$

14. (**A**) $m-n=2-1+4-3+6-5+...+1000-999=500$.

15. (**D**) La puntuación máxima son 72 puntos y la mínima 8, por lo que descartamos las soluciones A y E.
Por otra parte, se trata de sumar ocho números impares por lo que el resultado será par, y la única solución con esas características es 48.



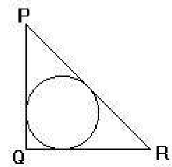
16. (**D**) Si había x votantes antes de la bajada, sabemos que $1{,}06\cdot(x-400)=x-40$.

Tenemos pues que $0{,}06x=424-40=384$, y $x=\dfrac{384}{0{,}06}=6400$.

17. (**A**) Dividimos por n arriba y abajo la fracción $\dfrac{m}{m+2n}$ quedándonos: $\dfrac{\frac{m}{n}}{\frac{m}{n}+2}=-3,$

Llamando $a=\dfrac{m}{n}$, tenemos que $\dfrac{a}{a+2}=-3$, y por tanto, $a=-3a-6$ y $a=\dfrac{-3}{2}$.

18. (**C**) Al unir el centro del círculo con cada uno de los tres vértices dividimos el triángulo rectángulo en tres triángulos cuyas bases son los lados de aquel triángulo y cuyas alturas son iguales al radio del círculo. Como la hipotenusa mide $\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{72}$, tenemos que la suma de las áreas de los tres triángulos interiores es: $\dfrac{6r}{2}+\dfrac{6r}{2}+\dfrac{\sqrt{72}r}{2}=r\cdot\dfrac{6\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}$, por otro lado igual al área del triángulo rectángulo, $\dfrac{6\cdot 6}{2}=18$. Igualando ambespejando r nos queda:

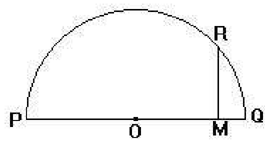


$$r=\frac{6}{2+\sqrt{2}}=\frac{6\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)}{4-2}=3\cdot\left(2-\sqrt{2}\right).$$

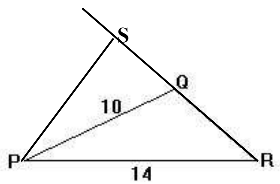
19. (**E**) Como se pide una proporción podemos razonar sobre una figura semejante. Así podemos suponer que $MQ=1$ y entonces $OM=3$ por lo que por el teorema de la altura, $RM=\sqrt{7\cdot 1}$. Por otra parte,

$PR=\sqrt{PM^2+RM^2}=\sqrt{7^2+\sqrt{7}^2}=\sqrt{56}$, con lo que

$\dfrac{PR}{RM}=\dfrac{\sqrt{56}}{\sqrt{7}}=\sqrt{8}$, y la respuesta es E.



20. (**D**) Como $PQ=10$ y $SQ=5$, $PS=\sqrt{10^2-5^2}=\sqrt{75}$ y $SR=\sqrt{14^2-\sqrt{75}^2}=\sqrt{121}=11$, luego el perímetro de PQR es $10+14+6=30$.



21. (**B**) $20!=2^{10+5+2+1}\cdot 3^{6+2}\cdot 5^4\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19$. Si quitamos a su factorización sus cuatro cincos y cuatro doses, nos queda el producto $2^{14}\cdot 3^8\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19$. 2^6 acaba en 4; 2^{12} acaba en 6; 2^{14} acaba en 4.
3^4 acaba en 1; 3^8 acaba en 1.

$7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$ acaba en 1.

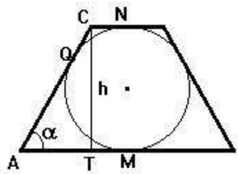
$2^{14} \cdot 3^8 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$ acaba en lo mismo que $4 \cdot 1 \cdot 1$, es decir en 4.

22. (**D**) Podemos emparejar los cincuenta sumandos, en 25 parejas que suman lo mismo (primero más último; segundo más penúltimo;...) por lo que esta suma será $\frac{4475}{25} = 179$. La diferencia entre el primero y el último es 49 y por tanto dos veces el primero más 49 es 179. El primero es 65 y el último 114.

23. (**D**) Podemos hallar primero el número n de lados o de vértices. Cada diagonal es la unión de dos vértices no contiguos. Desde cada vértice podemos trazar $n-3$ diagonales, luego el número de diagonales es $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$, igual a 20, y a ojo o pr la ecuación de 2º grado n = 8. El ángulo central del octógono regular mide 45º y el interior su suplementario es 135º.

24. (**C**) $p = \operatorname{sen} 24^\circ$ $q = \cos 65^\circ = \operatorname{sen} 25^\circ$ $r = \operatorname{sen} 165^\circ = \operatorname{sen} 15^\circ$ y el seno es creciente en el primer cuadrante, luego se obtiene: $r < p < q$.

25. (**B**) Si $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}8$, $\cos\alpha = \sqrt{1-0{,}64} = 0{,}6$ y $tg\alpha = \frac{0{,}8}{0{,}6} = \frac{4}{3}$. As´pues $\frac{4}{3} = \frac{\text{h}}{\text{AT}}$, y $\text{AT} = \frac{3\text{h}}{4}$.



El diámetro del círculo es h y AQ= AM = 8.

Por otra parte, CQ = CN = TM = 8 – AT = $8 - \frac{3h}{4}$.

Tenemos entoces que AC = AQ + QC = $8 + 8 - \frac{3h}{4} = 16 - \frac{3h}{4}$, y $\text{AC}^2 = \text{h}^2 + \text{AT}^2$,

de donde $\left(16 - \frac{3\text{h}}{4}\right)^2 = \text{h}^2 + \left(\frac{3\text{h}}{4}\right)^2$, por lo que $256 - 24\text{h} = \text{h}^2$, ecuación cuya solución positiva es h = 8, siendo entonces 16π el área del círculo.

**IV CONCURSO DE PRIMAVERA. 4º NIVEL (1º-2º BACHILLERATO LOGSE)
2ª FASE. DÍA 8-4-00**

1. (**B**) $\sqrt{1999+\sqrt{1999}}$ es mayor que 45 pues $45^2 < 1999+\sqrt{1999}$ ya que $(2025-1999)^2 = 26^2 < 1999$. Por otra parte $\sqrt{1999+\sqrt{1999}} < \sqrt{2000+50} < 46$.
Así pues nuestro número está comprendido entre 45 y 46, pero como $\sqrt{2050} < 45{,}5$, el entero más próximo es 45.

2. (**E**) Hay x chicos, y chicas y z profesores; sabemos que $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}, \frac{y}{z}=8$, y nos piden $\frac{x+y}{z}=\frac{x}{z}+\frac{y}{z}$, y $\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}=\frac{x}{z}=\frac{2}{3}\cdot 8=\frac{16}{3}$. Así pues $\frac{x+y}{z}=\frac{16}{3}+8=\frac{40}{3}$.

3. (**E**) Hemos quitado x bolas rojas de una bolsa, en la que de 100 bolas, había 95 rojas. Así pues tenemos $95-x$ bolas rojas de un total de $100-x$ bolas, que suponen el 75%, es decir, $\frac{95-x}{100-x}=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$, de donde $380-4x=300-3x$, y $x=80$.

4. (**C**) Observando las respuestas-muy cuidadosamente- vemos que
A) $B=\frac{999}{2000}=E=\frac{999999}{200020000}$ (hemos multiplicado numerador y denominador por 1001) y $A=D$ por idéntico motivo, quedándonos C como la única posible respuesta.

5. (**C**) Cuando Luisa ha recorrido 1 km, han transcurrido 10 minutos desde que salieron. En ese momento María José lleva recorridos $\frac{2}{3}$km, por lo que, desde ese instante, tardan en juntarse $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{15}}=2$ minutos. Así comienzan a regresar juntas a $1-2\cdot\frac{1}{10}=\frac{4}{5}$ km del comienzo. Esos kms los hace Mª Luisa en $\frac{4}{5}:\frac{1}{10}=8$ minutos y Mª José $\frac{4}{5}:\frac{1}{15}=12$ minutos, por lo que Mª Luisa llega 4 minutos antes que Mª José al punto de partida.

6. (**A**) Como $1+2+3+...+n=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$, nos dicen que $\dfrac{n+1}{6}=36$, de donde $n=215$.

7. (**C**) Si derivamos $f(x)=x^n-1-x^m$, $f'(x)=n\,x^{n-1}-m\,x^{m-1}=n\,x^{m-1}(x^{n-m}-\dfrac{m}{n})$, la derivada tiene una única raíz postiva, $\sqrt[n-m]{\dfrac{m}{n}}$ (y por ello cambia de signo al pasar por ella) y la raíz 0 (m-1) veces. Como en $+\infty$ es positiva, lo es después de $a=\sqrt[n-m]{\dfrac{m}{n}}$, y es negativa antes con $x>0$. Por tanto $f(x)$ tiene un mínimo en a.

Como $f(a)<0$ (ya que $\dfrac{m}{n}<1$) la función baja desde altura 0 en 0 hasta altura $f(a)$ y de ahí sube hasta $+\infty$, luego sólo tiene un cero en el semieje real positivo.

8. (**E**) Multiplicando todas las igualdades, tenemos $(p\cdot q\cdot r)^2=3\cdot7\cdot11\cdot12\cdot7\cdot11$ y como $q\cdot r>0$ y $p>0$, $p\cdot q\cdot r=6\cdot7\cdot11$, y $p=\dfrac{6\cdot7\cdot11}{q\cdot r}=\dfrac{6\cdot7\cdot11}{11\cdot12}=\dfrac{7}{2}$.

9. (**D**) Si $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{12}$, $\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-12}{12x}$, por lo que $y=\dfrac{12x}{x-12}=12+\dfrac{144}{x-12}$.
Como $x>12$ para que $y>0$, y será más grande cuanto más pequeño sea el entero positivo $x-12$. Por tanto el mayor valor entero de y será 156.

10. (**C**) $2000^2-1996^2=3996\cdot4=2^4\cdot3^2\cdot111=111a\cdot k^2$, por lo que $2^4\cdot3^2=a\cdot k^2$, y así el mayor valor de $a\cdot k$, se tendrá cuando menor sea a y mayor sea k, es decir para los entreos $a=1$ y $k=2^2\cdot3$, siendo $k-a=11$.

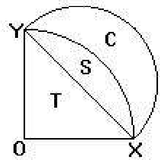
11. (**D**) Si $f(x)$ toma todos los valores entre 0 y 1, $2\cdot f(x)$ toma todos los valores entre 0 y 2, y $2f(x)-1$ toma todos los valores entre –1 y 1.

12. (**D**) La desigualdad $a+b+c<c+d+e$ es equivalente a $a+b<d+e$ que es evidente ya que $a<b<c<d<e$.

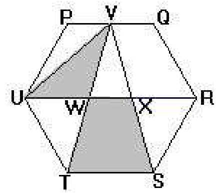
13. (**C**) Sabemos que $a+(a+1)>a+2$, de donde $a>1$, y la respuesta es C.

14. (**A**) $\dfrac{2\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})^2}-\dfrac{2\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})^2}=\dfrac{2\sqrt{3}\cdot\left[(2+\sqrt{3})^2-(2-\sqrt{3})^2\right]}{(2-\sqrt{3})^2(2+\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}\cdot8\sqrt{3}=48$

15. (**C**) Tomando 1 como radio OX tenemos que $\mathrm{YX}=\sqrt{2}$ y $C=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, por lo que el cociente pedido es 1.

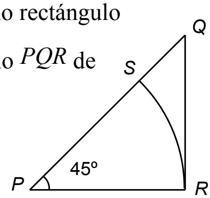


16. (**A**) Tomando como 1 el lado del hexágono, $\mathrm{WX}=\frac{1}{2}$, por lo que $\mathrm{UW}=\frac{1}{2}\cdot\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$. Por otro lado el trapecio TSXW y el triángulo UVW tienen igual altura, por lo que el cociente de sus áreas es igual al cociente $\frac{\mathrm{WX}+\mathrm{TS}}{\mathrm{UW}}=\frac{1/2+1}{3/4}=2$.

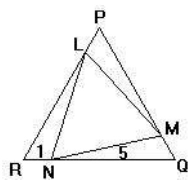


17. (**E**) Suponiendo $PR=1$, el área de PRS es $\frac{\pi}{8}$ y el del triángulo rectángulo isósceles es 1/2, luego el áres de PRS es En el triángulo rectángulo PQR de la figura, el ángulo P es $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$, y el cociente pedido es:

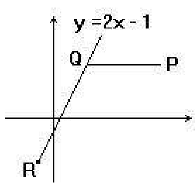
$$\frac{\frac{\pi}{8}}{\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}}=\frac{\pi}{4-\pi}.$$



18. (**D**) Aplicando el teorema del coseno al triángulo PLM tenemos que $\mathrm{LM}^2=1^2+5^2-2\cdot1\cdot5\cos 60º=21$. La relación de áreas de dos figuras semejantes es la de los cuadrados de dos medidas correspondientes: $\frac{36}{21}=\frac{12}{7}$.



19. (**E**)



La ordenada de Q es la de P, o sea 4, por lo que su abscisa x verificará que $4=2x-1$, siendo $x=\frac{5}{2}$.

Así la distancia pedida es $8-\frac{5}{2}=5{,}5$.

20. (**A**) $\operatorname{sen}\frac{1}{x}=0$ cuando $x=\frac{1}{k\pi}$, siendo k entero y distinto de 0. Se trata de ver cuántos valores enteros de $k>0$ hacen que $0,01<\frac{1}{k\pi}<1$, es decir, $1<k\pi<100$, lo que ocurre desde $k=1$ hasta $k=31$.

21. (**E**) Por un lado, $\frac{1}{\cos x}+tgx=\frac{1+\operatorname{sen}x}{\cos x}$.

Por otro, $\frac{1}{\cos x}-tgx=\frac{1-\operatorname{sen}x}{\cos x}=\frac{1-\operatorname{sen}^2 x}{\cos x\cdot(1+\operatorname{sen}x)}=\frac{\cos x}{(1+\operatorname{sen}x)}=2$, así que la respuesta es $\frac{1}{2}$.

22. (**C**) El resto de la división de $P(x)$ entre $(x-19)\cdot(x-99)$ es un polinomio de primer grado $r(x)=ax+b$. Así pues $P(x)=(x-19)\cdot(x-99)\cdot C(x)+ax+b$

$\begin{cases} P(19)=19a+b=99 \\ P(99)=99a+b=19 \end{cases}$; de donde $80a=-80$; $a=-1$ y $b=118$.

23. (**E**) Para $n>2$ $a_n=\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_{n-1}}{n-1}$,

$a_{n+1}=\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{n}=\frac{(n-1)a_n+a_n}{n}=a_n$. La sucesión es constante a partir del tercer término, luego $a_3=a_{2000}=99=\frac{19+a_2}{2}$, y por tanto $a_2=179$.

24. (**C**) Usando que $\log_a b\cdot\log_b a=1$, la suma

$\frac{1}{\log_2 100!}+\frac{1}{\log_3 100!}+\frac{1}{\log_4 100!}+...+\frac{1}{\log_{100} 100!}$ se transforma en

$\log_{100!}2+\log_{100!}3+\log_{100!}4+...+\log_{100!}100=\log_{100!}100!=1$

25. (**A**) El vértice de la parábola tiene ordenada negativa y corta al eje de abscisas, luego es hacia arriba ($a>0$). Además lo corta en dos punto,uno de abscisa positiva y otro negativa, ello implica que la ordenada en el origen, c, es negativa. Por otro lado la abscisa del vértice 4 es igual a $\frac{-b}{2a}$, y por tanto a y c tienen distinto signo. Así sólo a es negativo.

V CONCURSO DE PRIMAVERA. 1er NIVEL (PRIMARIA). 1ª FASE. DÍA 7-3-2001.

1. **(C)** Si los números son consecutivos, su diferencia es 1 por lo que el producto de su suma por su diferencia será igual a su suma, es decir, 2001 y la respuesta es C.

2. **(C)** Al ser ambos positivos, la respuesta no puede se 0, por ser distintos no puede ser 1 y por ser ambos menores que 10 no puede ser ni 100 ni 101, quedándonos entonces como única respuesta posible 10, que es igual a 2×5.

3. **(E)** Si un número es primo -salvo 2- tiene que acabar obligatoriamente en cifra impar.

4. **(D)** Como $37 > 6^2$ y $10.005 < 101^2$, serán todos los cuadrados de los enteros 7, 8, 9, 10, ..., 100, es decir, 94.

5. **(A)** Puesto que las diversas potencias de 3 acaban en 3, 9, 7, 1, y a partir de aquí vuelve a repetirse el ciclo, 3^{100} acabará igual que 3^4, pues en 100 hay 25 ciclos completos del anterior, es decir, acabará en 1.

6. **(D)** Si cada lado es un número par, la suma de dos lados iguales sería múltiplo de 4, por lo que el perímetro debería ser múltiplo de 4 y 246 no cumple esa propiedad, por lo que la respuesta es D.

7. **(B)** Si entre dos "Hermanos Brothers" miden 3′60 m pero la torre formada por cada dos de ellos mide solamente 330 cm, se pierden 30 cm cuando se juntan dos (uno se apoya en los hombros del otro). Así pues, como en la torre formada por los seis hay 5 apoyos, se habían perdido $5 \times 30 = 150$ cm, por lo que la altura de la torre será $6 \times 180 - 150 = 930$ cm.

8. **(D)** Si el perímetro de uno es 8 veces el de otro, su lado será 8 veces mayor por lo que harán falta 64 cuadrados pequeños para cubrir el grande.

9. **(C)** En los seis lugares, desde 2º a 7º, puedo utilizar 9 cifras. En el 1er lugar, solamente 8 cifras, así que en total tendré $9 \times 6 + 8 = 62$ números con la condición pedida.

10. **(C)** Un bote de zumo equivale a 5 croissants y también a 3 croissants más 60 ptas. Así pues, 5 croissants valen igual que 3 croissants más 60 ptas., de donde se deduce que 2 croissants valen 60 ptas., o sea, 1 croissant 30 ptas. y un bote de zumo $5 \cdot 30 = 150$ ptas.

11. **(A)** El piso en el que se encuentra vendrá dado por el número $0 - 2 + 6 - 2 + 3 - 8 + 4 = 1$, o sea, en el 1er piso.

12. **(D)** A principio de 2000 tenía 100.000 + $\frac{4}{100} \cdot 100000 = 104000$. A principios de 2001 tendría $104000 - \frac{4}{100} \times 104000 = 104000 - 4160 = 99840$ habitantes.

13. (B) Supón que hay 100 estudiantes, 10 juegan a los dos deportes, 40 sólo a baloncesto y 30 sólo a tenis. Así pues, hay 80 que juegan a algún deporte por lo que $100 - 80 = 20$ no juegan a ninguno y la respuesta es B.

14. (A) El libro en total tiene 216×32 líneas, por lo que si cada página tuviera 24 líneas, tendría $\frac{216 \times 32}{24} = 288$ páginas.

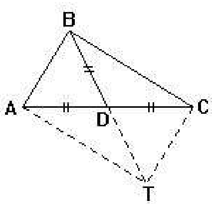
15. (D) Como los domingos van de 7 en 7, caen alternativamente en días pares por lo que fue domingo el día 2, 16 y 30. Así pues, el 20 de ese mes fue jueves.

16. (E) Si cada uno jugara sólo una partida con cada uno habría tantas partidas como parejas. Cada uno lo emparejó con los cinco restantes pero así, cada pareja la he contado dos veces, por lo que el número de parejas es $\frac{6 \times 5}{2} = 15$. Puesto que cada pareja ha jugado 3 partidas, el número de partidas jugadas será $15 \cdot 3 = 45$.

17. (B) El terreno tiene de longitud $\frac{64 \cdot 2500}{1000}$ m, es decir, 160 m y de anchura $\frac{48 \cdot 2500}{1000} = 120$ m, por lo que su área será $160 \cdot 120 = 19200$ m^2, es decir, $1'92$ hectáreas.

18. (A) El peatón recorre cada minuto $\frac{1}{12}$ km, por lo que cuando sale el ciclista, lleva ya recorridos $\frac{1}{12} \cdot 100 = \frac{100}{12} = \frac{25}{3}$ km. A los 50 minutos, ha recorrido $\frac{25}{3} + \frac{1}{12} \cdot 50 = \frac{75}{6} = \frac{25}{2}$ km, distancia que el ciclista ha recorrido en 50 minutos, por lo que ha ido a una velocidad de $\frac{\frac{25}{2}}{50} = \frac{1}{4}$ km/ minuto, es decir a $\frac{1}{4} \cdot 60 = 15$ km/hora.

19. (C)



Si dibujamos el triángulo ACT, igual al dado, resulta un paralelogramo $ABCD$ en el que sus diagonales son iguales pues $AD = BD$ ($AC = 2AD$, ya que $AD = DC$, y $BT = 2BD$ ya que $BD = DT$). Un paralelogramo con las diagonales iguales es un rectángulo y el ángulo pedido es de 90º.

20. (B) A la 1 h 25′, la aguja de los minutos señala al 5 y la de las horas está entre el l y el 2. Como la aguja de las horas recorre 30º en 60 minutos, recorre 12º 30′ en 25 minutos que se le restan al ángulo entre 1 y 5 , es decir, 120º − 12º 30′ = 107º 30′.

21. (B) Su media era de $\dfrac{60+80}{2}=70$ y ahora es $\dfrac{60+80+76}{3}=72$, por lo que ha aumentado en 2 puntos.

22. (B) Todos los números que nos han dado son cuadrados perfectos: $81=9^2$, $121=11^2$, $225=15^2$, $441=21^2$ y $625=25^2$. Cualquier cuadrado perfecto -salvo 1- tiene al menos 3 divisores; el 1, su raíz cuadrada y él. No tendrá más si su raíz cuadrada es primo y, de las dadas, el que tiene esa propiedad es 121 pues 11 es primo.

23. (D) Nos dicen que $\dfrac{x}{y}=\dfrac{x+8}{y+12}$, o sea, una solución inmediata es $\dfrac{x}{y}=\dfrac{8}{12}$ y, de las respuestas, la fracción que es igual a $\dfrac{8}{12}$ es $\dfrac{10}{15}$, es decir D.

24. (A) 10 gatos en 20 días comerán la mitad de ratones que 20 gatos, o sea, comerán 10, por lo que en 10 días comerán 5 ratones.

25. (B) El número de estudiantes de la clase es múltiplo de 12, por lo que el número de caramelos recibido será múltiplo de 36, ya que cada uno recibe 3. El mayor múltiplo de 36 menor o igual a 90 es 72, por lo que al profesor le han sobrado 90 − 72 = 18 caramelos.

V CONCURSO DE PRIMAVERA. 2º NIVEL (1º-2º ESO). 1ª FASE. DÍA 7-3-2001.

1. **(C)** $10 : 0'02 = 1000 : 2 = 500$.

2. **(D)** Lo que subió o bajó Dani viene dado por el número $3 - 5 + 7 - 9 = -4$, así que bajó 4 pisos por lo que si, después de esto, se encontró en el 23º piso, es que cogió el ascensor en el 27º.

3. **(C)** $0'0003 \times 0'8 = \dfrac{0'3}{1000} \times \dfrac{8}{10} = \dfrac{0'24}{10000} = 0'00024$.

4. **(D)** $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$.

5. **(D)** $\dfrac{\frac{1}{4}}{x} = 5 \Rightarrow \dfrac{1}{4} = 5x$ y $x = \dfrac{1}{20}$.

6. **(B)** Hemos quitado 78 centilitros y añadido 57, o sea, hemos quitado 31 centilitros por lo que nos quedarán $13'42 - 0'31 = 13'21$ litros.

7. **(E)** El recipiente tiene de volumen $25 \times 9 \times 20$ cm^3 por lo que caben $25 \times 9 \times 20$ mililitros. Si cada día toma 250, le durará $\dfrac{25 \times 9 \times 20}{250} = 18$ días.

8. **(B)** Si tuviera 1 moneda de cada tipo tendría $5 + 10 + 25 + 100 + 500 = 640$ ptas.. Como tengo 1920 ptas. tendré $\dfrac{1920}{640} = 3$ monedas de cada tipo, es decir, $3 \cdot 5 = 15$ monedas en total.

9. **(E)** De las 450 primeras preguntas, he acertado $\dfrac{80 \times 450}{100} = 360$ y quiero que $360 + x = \dfrac{90}{100}(450 + x)$, así que $36000 + 100x = 40500 + 90x$, de donde $10x = 4500$ y $x = 450$.

10. **(A)** Son los números 18, 27, 36,... , 90, o sea, nueve.

11. **(E)** Hay $20 - 13 = 7$ estudiantes que llevan zapatillas y no son del Madrid, $15 - 13 = 2$ que son del Madrid y no llevan zapatillas y 13 que llevan zapatillas y son del Madrid. El resto, o sea, $30 - (7 + 2 + 13) = 8$ no llevan zapatillas ni son del Madrid.

12. (B) Si x e y son el número de bolsas de cada tipo, sabemos que $x+y=46$ y $8x+$ $20y==560$. Si $\begin{cases} x+y=46 \\ 8x+20y=560 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8x+8y=368 \\ 8x+20y=560 \end{cases} \rightarrow 12y=192$,

$y=\frac{192}{12}=16$ y la respuesta es B.

13. (D) Naturalmente se quedarían fuera, por lo menos, los primos, o sea, 31 y 37. De los restantes, 35 = 5 · 7 y ni 5 ni 7 son divisores de ningún otro número. Así que 35 se queda fuera. El resto los puedo ordenar, por ejemplo como 39, 33, 36, 34, 32, 38, con lo que hemos dejado fuera 3 y la respuesta es D.

14. (E) Si tiene n peldaños encima tiene $2n$ debajo, por lo que el número de peldaños de las escaleras es $3n+1$. Al bajar 8, resulta que $n+8=2n-8$, por lo que $n=16$ y la escalera tendrá 49 peldaños.

15. (B) Si x es uno de los números pedidos, $x-1$ es múltiplo de 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 por lo que el menor x con esta propiedad es mcm (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) = = mcm (3, 5, 7, 8) = 3 · 5 · 7 · 8 = 840. Así pues, el número más pequeño con esa propiedad es 841, el siguiente 840 unidades más y la suma de ambos, 841 + 841 + 840 = 2522.

16. (A) 2 horas y 40 minutos = $2+\frac{40}{60}=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$ horas. Así pues, la velocidad media será $\frac{1968}{\frac{8}{3}}=\frac{3\cdot 1968}{8}=3\cdot 246=738$ km/hora.

17. (B) Entre los 5 jugadores que hubo siempre jugaron 5 · 48 = 240 minutos que, repartidos entre 8 da $\frac{240}{8}=30$ minutos cada uno.

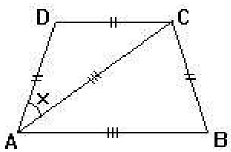
18. (C) Si pasaron x saltadores y no pasaron y saltadores tenemos que la suma de todos los saltos fue $4'9\,(x+y)$; la suma de los que pasaron la 1ª ronda $6'5x$ y la de los que no la pasaron $4'5y$ por lo que $4'9\,(x+y)=6'5x+4'5y$, es decir $0'4y=1'6x$, por lo que $y=4x$, es decir, de un total de $x+y=5x$ saltadores, la pasaron x, o sea, el 20%.

19. (E) $\frac{n+17}{n-7}=1+\frac{24}{n-7}$. Así pues, hay que encontrar los n tales que $n-7$ es un divisor de 24. Como 24 tiene por divisores (1, 24), (2, 12) (3, 8) (4, 6), es decir 8 divisores, corresponderán a 8 valores de $n-7$, o sea, 8 valores de n.

20. **(D)** 1 croissant es $\frac{4}{7}$ ensaimada y 1 palmera $\frac{6}{5}$ ensaimada. Así pues $c < e < p$ y la respuesta es D.

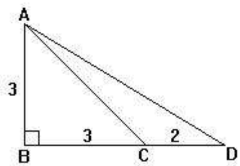
21. **(A)** Si las cuatro caras de la pirámide de arriba las pintamos blanco, negro, blanco, negro y las de abajo, negro, blanco, negro, blanco (cada una de las de arriba de color distinto a la de abajo que tiene con ella una arista común) hemos cumplido nuestro propósito y la respuesta es A.

22.



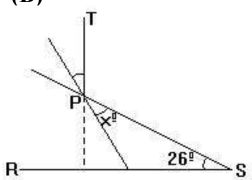
Llamando x, como en la figura, al ángulo ADC, tenemos que por ser $AD = DC$, el ángulo ACD es también x, al igual que CAB por ser alternos internos. Como, por otra parte es un trapecio isósceles, el ángulo ABC es igual al BAD, es decir, $2x$, y por ser $AC = AB$, el ángulo ACB es también $2x$, por lo que $BCD = 3x$ y ADC también $3x$. Así pues, $3x + 3x + 2x + 2x = 360º$, $x = 36º$ y el ángulo D, que es ADC, será $3 \cdot 36 = 108º$.

23.



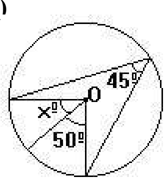
Como $BD = 5$ y $BC = AB = 3$, $CD = 5 - 3 = 2$ y si CD es la base del triángulo pedido, AB es su altura, por lo que su área será $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$.

24. **(B)**



Llamando Q al pie de la perpendicular desde P a RS, como esta perpendicular es la prolongación de PT, se sigue que $PQS = 90º$ y $QPS = 90º–26º = 64º$. Por otra parte, el ángulo KPQ es también $xº$ por valer $xº$ su opuesto por el vértice. Así pues, $64º = xº + xº$ y $x = 32$.

25. **(A)**



$50º + xº = 2 \cdot 45º$ por ser el valor del ángulo inscrito la mitad del central que abarca el mismo arco, por lo que $x = 40$.

V CONCURSO DE PRIMAVERA. 3er NIVEL (3º-4º ESO). 1ª FASE. DÍA 7-3-2001.

1. **(E)** De las 450 primeras preguntas, he acertado $\frac{80\times 450}{100}=360$ y quiero que $360+x=\frac{90}{100}(450+x)$, así que $36000 + 100x = 40500 + 90x$, de donde $10x = 4500$ y $x = 450$.

2. **(E)** Hay 7 estudiantes que llevan zapatillas y no son del Madrid; 2 que son del Madrid y no llevan zapatillas y 13 que llevan zapatillas y son del Madrid. El resto, o sea, $30 - (7 + 2 + 13) = 8$ no llevan zapatillas ni son del Madrid.

3. **(B)** Si x e y son el número de bolsas de cada tipo, sabemos que $x+y=46$ y $8x+20y=560$. Resolviendo el sistema, obtenemos $y = 16$ por lo que la respuesta es B.

4. **(E)** Si el pintor tiene n peldaños encima, tiene $2n$ debajo, por lo que el número de peldaños de las escaleras es $3n + 1$. Al bajar 8, resulta que $n + 8 = 2n - 8$, por lo que $n = 16$ y la escalera tendrá 49 peldaños.

5. **(E)** $\frac{n+17}{n-7}=1+\frac{24}{n-7}$. Así pues, hay que encontrar los n tales que $n - 7$ es un divisor de 24. Como 24 tiene por divisores (1, 24), (2, 12) (3, 8) (4, 6), es decir, 8 divisores, corresponderán a 8 valores de $n - 7$, o sea, 8 valores de n.

6. **(C)** Sabemos que $p + q + r = 24$ y $p + q + r + s + t = 35$, por lo que $s + t = 11$ y su media $5'5$.

7. **(D)** En el siguiente cuadro resumimos la situación:

Nº de chicos	Media	Suma de edades
x	m	xm
$x - 5$	$m + 1$	$xm - 45$
$x + 5$	$m + 1$	$xm + 85$

Así pues $(x - 5)(m + 1) = xm - 45$

$(x + 5)(m + 1) = xm + 85$.

De las ecuaciones anteriores, sigue que $\begin{cases} x-5m-5=-45 \\ x+5m+5=85 \end{cases}$, es decir

$\begin{cases} x-5m=-40 \\ x+5m=80 \end{cases}$, de donde $2x = 40$, $x = 20$.

8. **(A)** La 1ª fila la forman los enteros desde 1 hasta q. La tercera desde $2q + 1$ a $3q$, la 5ª desde $4q + 1$ a $5q$ y la última −la p-ésima− desde $(p - 1)q$ a pq.

Así pues sabemos que $\begin{cases} 2q+1 \le 20 \le 3q \\ 4q+1 \le 41 \le 5q \\ (p-1)q \le 103 \le pq \end{cases}$ y nos piden $p + q$.

De la primera información, tenemos que $2q \le 19$ y $20 \le 3q$, así que $q \le 9$ y $q \ge 7$ por lo que q puede ser 7, 8 ó 9. De la 2ª, obtenemos $4q \le 40$ y $41 \le 5q$, por lo que $q \le 10$ y $q \ge 9$ (Recordar que q es entero). Así pues, $q = 9$ ó 10, que junto a la información anterior nos asegura que $q = 9$, con lo que la última información se reduce a $9(p - 1) \le 103 \le 9p$, de donde $p \le 12$ y $p \ge 12$, es decir, $p = 12$ y $p + q = 21$.

9. **(C)** El número máximo de estudiantes que faltaron los tres días se daría si todos los que faltaron el miércoles, 9, hubieran faltado los otros días. Pero si hubiera sido así, el martes faltaron $12 - 9 = 3$ chicos que no faltaron el miércoles y el lunes $15 - 9 = 6$ chicos que no faltaron el miércoles. Si entre esos 3 y 6 no hubiera repetidos, resultaría $9 + 3 + 6 = 18$ el número de estudiantes que faltaron al menos un día y no 22 como dice el problema, y menos si hubiera habido estudiantes repetidos. Tampoco 8, compruébalo con el mismo argumento. 7 sí, pues $12 - 7 = 5$ chicos faltaron el martes y no el miércoles y $15 - 7 = 8$, faltaron el lunes y no el miércoles, por lo que, si no hubo entre éstos ausencias repetidas, faltaron, un día al menos, $5 + 8 + 9 = 22$ estudiantes y la respuesta es C.

10. **(C)** Si llamamos a al número y b a la suma de sus dígitos, el mayor valor posible para b es 18 (suma de los dígitos de 99), así que el mayor resto posible sería 17. Pero si $b = 18$, el número en cuestión es 99 y el resto de la división de 99 entre 18 es 9. Supongamos que el resto es 16 por lo que b sería 17 pues con 18 ya hemos visto que el resto no es 16, sino 9. Si $b = 17$, el número es 98 ó 89, pero al dividir cualquiera de éstos por 17, no obtenemos 16 de resto.
Pensemos ahora en resto = 15. Como el divisor no puede ser ni 18 ni 17 (ya analizados) podría ser 16 que responde a 97, 88, 79 y 79 al dividirlo entre 16 da cociente 4 y resto 15, así que 15 es el mayor resto posible.

11. **(B)** Los 5 impares en cuestión son −5, −3, −1, 1 y 3 y los 5 pares −4, −2, 0, 2 y 4. La forma de emparejarlos para que la suma de los productos de las parejas sea la más pequeña posible pasaría por asociar −1 con 0 para no desperdiciar el 0. Por otra parte, el producto en cuestión será un número par, con lo que la respuesta −41 es imposible. Pero −40 sí es posible haciendo:

$$(-1) \cdot 0 + (-5) \cdot 4 + (-3) \cdot 2 + + 1\,(-2) + 3\,(-4) = -40.$$

12. **(B)** Los únicos números que tienen 6 divisores son o bien los p^5 ó los pq^2 (los divisores de p^5 son 1, p, p^2, p^3, p^4 y p^5 y los de pq^2 son 1, p, q, pq, q^2, pq^2). El producto de cinco de ellos es una potencia de un primo p, en el 1er caso, y como $648 = 2^3 \cdot 3^4$ no es así, sigue que $N = p \cdot q^2$. El producto de los seis divisores de $p \cdot q^2$ es

$p^3 \cdot q^6$, así que en nuestro caso será $648 \cdot k = 2^3 \cdot 3^4 \cdot k$, por lo que $k = 3^2 = 9$ y el otro divisor de N es 9 y la respuesta B.

13. **(C)** $10^4 - 1 = (10^2 + 1)(10^2 - 1) = 101 \cdot 99 = 101 \cdot 3^2 \cdot 11$ cuyos únicos divisores primos son 101, 3 y 11.

14. **(D)** Razonemos en primer lugar sobre el caso de que las edades no acaben en 0 por lo que si una es el número de dos cifras $\overline{ab}$, 9 años más tarde es el $\overline{a+1 \ \ b-1}$.
Así pues, sabemos que $\overline{ab \ cd} = k^2$ y $\overline{a+1 \ \ b-1 \ \ c+1 \ \ d-1} = (k+9)^2$, es decir:
$1000a + 100b + 10c + d = k^2$ y $1000(a+1) + 100(b-1) + 10(c+1) + d - 1 = (k+9)^2$. Restando nos queda: $1000 - 100 + 10 - 1 = 18k + 81$, así que $828 = 18k$ y $k = 46$, por lo que $abcd = 46^2 = 2116$ y uno de ellos tenía 21 años.
(Como ha salido una de las respuestas, ésa era la opción considerada).

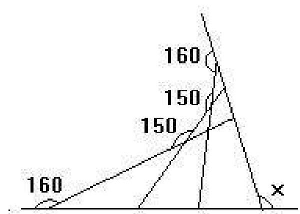
15. **(B)** $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{7}{4} \Rightarrow 4a + 4b = 7a - 7b \Rightarrow 11b = 3a \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{11}{3}$ y $\dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{121}{9}$.

16. **(D)** 1 croissant pesa $\dfrac{4}{7}$ ensaimada y 1 palmera $\dfrac{6}{5}$ ensaimada. Así pues $c < e < p$ y la respuesta es D.

17. **(D)** Agrupando cada diferencia de cuadrados en producto de suma por diferencia, tenemos que, al ser la diferencia 1, la expresión dada es igual a:
$(2001 + 2000) + (1999 + 1998) + (1997 + 1996) + \ldots + (1 + 0) = 1 + 5 + 9 + \ldots + 4001$.
Esta suma es la de una progresión aritmética de diferencia 4, que empieza en 1 y acaba en 4001. Su término general es $4n - 3$, y el último 4001($= 4n - 3$) se corresponde con el término que ocupa el lugar 1001. Así la suma de los 1001 términos de esa progresión es $\dfrac{1+4001}{2} \cdot 1001 = 2001 \cdot 1001$, es decir D.

18. **(A)** Llamando P, Q y R a los ángulos interiores del triángulo que aparece en el centro de la figura, tenemos:

$P = 180º - 150º = 30º$
$Q = 180º - 150º = 30º$
$R = 180º - (30º + 30º) = 120º$

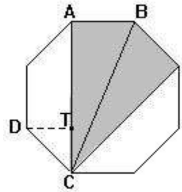


El suplementario de R valdrá 60º por lo que
$\alpha = 180º - (20º + 60º) = 100º$.

Así pues, $\beta = 80º$ por lo que $180º - x = 180º - (80º + 20º)$ de donde $x = 100º$.

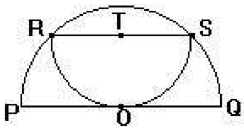
19. (B) Como los triángulos PQS y PSR tienen igual área e igual altura, deben tener igual base, por lo que $QS = SR$ y la respuesta es B.

20. (D)



El área pedida es el doble del área del triángulo ABC, de base 4 y altura $AC = 2TC + 4$ y el triángulo DTC es rectángulo e isósceles de hipotenusa 4, por lo que $2TC^2 = 16$ y $TC = 2\sqrt{2}$. Así pues, $AC = 4\sqrt{2} + 4$ y el área pedida es $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\left(4\sqrt{2} + 4\right) = 16\left(1 + \sqrt{2}\right)$.

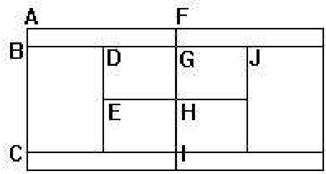
21. (A)



Como ROS es una semicircunferencia, si $OT = x$, $RT = x$ por lo que $1 = 2x^2$, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y el ángulo bajo el que se ve el segmento de cuerda RS es 90º por lo que el área de éste será $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\pi - 2}{4}$. Como el área del semicírculo RSO es $\frac{1}{2}\pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$, el resultado pedido será

$$\frac{\pi - 2}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi - 2}{4} = \frac{\pi - 1}{2}.$$

22. (E) Nombremos los vértices superior izquierdo de cada rectángulo y contemos los rectángulos que tienen ese vértice:

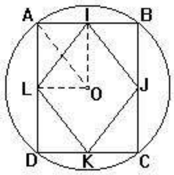


	Nº de rectángulos
A	6
B	6
C	2
D	5
E	2
F	3
G	4
H	1
I	1
J	1

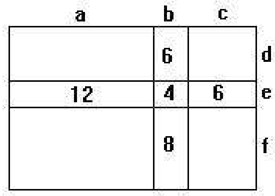
En total, 31 rectángulos

23. (C) Los números pedidos son de la forma $10a + b$ y nos dicen que $10b + a - (10a + b) = 9 \Rightarrow$ $\Rightarrow 9\,(b - a) = 9$ de donde $b - a = 1$. Como se trata de números mayores que 10, b puede tomar cualquier valor desde 2 a 9, es decir, hay 8 números con la condición requerida.

24. **(C)**



Cada lado del rombo es igual al radio, pues basta unir O, centro de la circunferencia, con A y observar que $OLAI$ es un rectángulo y por tanto sus diagonales son iguales. Así pues, el perímetro del rombo es 12.



25. **(B)** Llamemos a los lados de los rectángulos pequeños como indica el dibujo. Sabemos que: $b + d = 3$, $c + e = 3$, $b + f = 4$, $b + e = 2$ y $a + e = 6$.

Sumando estas igualdades llegamos a:
$3b + d + c + 3e + f + a = 18$, por lo que
$a + c + d + f = 18 - 3\,(b + e) = 18 - 3 \cdot 2 = 12$.
Nos piden $2\,(a + b + c + d + e + f)$ y como $a + c + d + f = 12$ y $b + e = 2$, la respuesta es $2 \cdot 14 = 28$.

V CONCURSO DE PRIMAVERA. 4º NIVEL (BACHILLERATO LOGSE-COU). 1ª FASE. DÍA 7-3-2001.

1. **(B)** $\left(0'2 + \frac{1}{0'2}\right)^2 = 5'2^2 = 27'04$ por lo que la respuesta es B.

2. **(E)** Hay 20 − 13 = 7 estudiantes que llevan zapatillas y no son del Madrid, 15 − 13 = 2 estudiantes que son del Madrid y no llevan zapatillas y 13 estudiantes que llevan zapatillas y son del Madrid, por lo que el resto, es decir, 30 − (7 + 2 + 13) = 8 estudiantes ni llevan zapatillas ni son del Madrid.

3. **(B)** Llamando x al número de bolsas pequeñas e y al de bolsas grandes, tenemos que $x + y = 46$ y $8x + 20y = 560$, de donde resolviendo el sistema obtenemos $y = 16$, por lo que la respuesta es B.

4. **(A)** En la 1ª fila escribimos los números de 1 a q; en la 2ª de $q + 1$ a $2q$, en la 3ª de $2q + 1$ a $3q$, la 5ª desde $4q + 1$ a $5q$ y en la última, es decir, en la p-ésima desde $(p - 1)q + 1$ a pq.

Por la información que nos dan, sabemos que $2q + 1 \leq 20 \leq 3q$, $4q + 1 \leq 41 \leq 5q$ y $(p - 1)q \leq 103 \leq pq$.

De la 1ª información, deducimos $q \leq 9$ y $q \geq 7$ (nótese que q debe ser entero), de la 2ª, que $q \leq 10$ y $q \geq 9$. Puesto que nos dicen $q \leq 9$ y $q \geq 9$, debe ser $q = 9$ con lo que $9(p - 1) \leq 103 \leq 9p$, por lo que $p - 1 \leq 11$ y $p \geq 12$, así que $p = 12$ y $p + q = 21$, con lo que la respuesta es A.

5. **(C)** 9 estudiantes no pudieron faltar los tres días pues, entonces el martes faltaron 3 que no faltaron el miércoles y en el supuesto de que esos tres hubieran ido a clase el lunes, ese día habrían faltado 15 − 9 = 6 que no faltaron ninguno de los otros días, por lo que el número de estudiantes que faltó algún día fue 6 + 3 + 9 = 18 y no 22 como dice el enunciado.

El mismo argumento nos dice que 8 tampoco, pues 12 − 8 = 4, 15 − 8 = 7, 9 − 8 = 1 y 4 + 7 + 1 + 8 ≠ 22.

En cambio 7 estudiantes sí pudieron faltar los tres días, pues pudiera haber ocurrido que solamente el lunes faltaron 15 − 7 = 8, solamente el martes 12 − 7 = 5 y solamente el miércoles 9 − 7 = 2 con lo que los que faltaron algún día habrían ido 8 + 5 + 2 + 7 = 22, como indica el enunciado.

6. **(B)** Llamando x el nº de kg de una caja normal e y al número de cajas normales, tenemos que $xy = 70$ y $(x + 2)(y - 4) = 70$, lo que nos lleva a $2y - 4x = 8$, es decir, $y = 4 + 2x$ que llevado a la 1ª ecuación nos conduce a $2x^2 + 4x = 70$, o sea, $x^2 + 2x - 35 = 0$, por lo que $x = 5$.

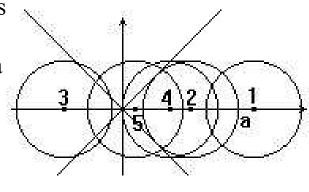
7. **(A)** $123456^2 + 123456 + 123457 = 123456\,(123456 + 1) + 123457 =$
$= 123457\,(123456 + 1) = 123457^2$.

8. **(A)** Si $10a + b$ ($a \neq 0$) es el número pedido y ab el producto de sus cifras, tenemos que $10a + b - ab = a\,(10 - b) + b$ que nunca será negativo, por lo que no habrá ningún número de dos cifras menor que el producto de éstas.

9. **(D)** $f(x) \leq |x + 1| + |x - 1|$ y esta suma es la suma de distancias de un punto x a 1 y -1, que como mínimo será 2 (cuando $-1 \leq x \leq 1$). Así pues, el valor mínimo de $f(x) = |x| + |x + 1| + |x - 1|$ es 2, que se alcanza en $x = 0$.

10. **(B)** Nos dicen que $\dfrac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} = 4 - x^2$, que nos lleva a $x^6 = (4 - x^2)^3$, es decir, $x^2 = 4 - x^2$, por lo que $x = \pm\sqrt{2}$. Comprobando ambas soluciones, vemos que $\sqrt{2}$ sí es solución pero $-\sqrt{2}$ no, pues el término de la izquierda sería negativo y el de la derecha positivo. Así pues, hay una única solución real y la respuesta es B.

11. **(C)** Si representamos gráficamente las dos ecuaciones vemos que $x^2 - y^2 = 0$ representa el par de rectas $y = x$, $y = -x$ y $(x - a)^2 + y^2 = 1$ representa la circunferencia de centro (a, 0) y radio 1.
(En el dibujo observamos los cinco distintos casos de intersección según la posición de la circunferencia, lo que depende de la distancia del centro (a,0) a las rectas)



Como la distancia del punto (a, 0) a cualquiera de esas rectas es $\dfrac{|a|}{\sqrt{2}}$,

tenemos:

1) Si $|a| > \sqrt{2}$, no hay ninguna solución al sistema.

2) Si $|a| = \sqrt{2}$, tenemos 2 soluciones (circunferencia tangente a ambas rectas)

3) Si $1 > |a| < \sqrt{2}$, hay 4 puntos de corte con ambas rectas.

4) Si $|a| = 1$, hay 3 soluciones distintas.

Finalmente

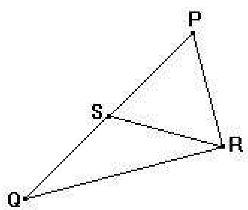
5) Si $|a| < 1$, hay también 4 soluciones distintas. Así pues, puede haber 0, 2, 3 ó 4 soluciones y la respuesta es C.

12. (D) Puesto que $12'\overline{12} = \dfrac{1200}{99} = \dfrac{400}{33}$ y $23'\overline{420} = \dfrac{23400}{999} = \dfrac{2600}{111}$, tenemos que si x es el número de asistentes, $\dfrac{400}{33}\dfrac{x}{100}$ y $\dfrac{2600}{111}\dfrac{x}{100}$, es decir $\dfrac{4x}{33}$ y $\dfrac{26x}{111}$ deben ser números enteros por lo que al no tener divisiones comunes 4 y 33 ni 26 y 111, el número x debe ser múltiplo de 33 y de 111, es decir múltiplo de $33 \cdot 37$, mínimo común múltiplo de ambos. $33 \cdot 37 < 2000$ pero $2 \cdot 33 \cdot 37 > 2000$, así que el número de asistentes $x = 33 \cdot 37 = 1221$, faltando $2000 - 1221 = 779$ diputados a esa reunión siendo D la respuesta.

13. (B) La suma dada es $\dfrac{3+4+5+...+n^3-3}{n^3}$ por lo que el numerador tiene $n^3 - 5$ sumandos y su suma vale $\dfrac{3+n^3-3}{2}(n^3-5)$, con lo que la ecuación dada es $\dfrac{n^3(n^3-5)}{2n^3} = 169$, es decir $n^3 = 343$ y $n = 7$.

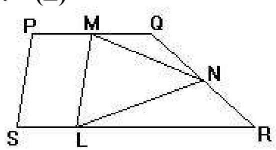
14. (D) Si v_1 es la velocidad de la chica cuando la escalera está parada, v_2 la velocidad de la escalera y l la longitud de ésta, tenemos que $\dfrac{l}{v_1+v_2} = 15$, $\dfrac{l}{v_1} = 20$ y nos piden $\dfrac{l}{v_2}$. Escribiendo las ecuaciones dadas como $\dfrac{v_1+v_2}{l} = \dfrac{1}{15}$, $\dfrac{v_1}{l} = \dfrac{1}{20}$ tenemos que $\dfrac{v_2}{l} = \dfrac{1}{15} - \dfrac{1}{20} = \dfrac{1}{60}$, de donde $\dfrac{l}{v_2} = 60$ segundos.

15. (C)



Tomando PS y PQ las bases de los dos triángulos citados, tenemos que $PQ = 2PS$, por lo que SQR es un triángulo isósceles de ángulo desigual 120º, con lo que cada uno de sus ángulos iguales mide 30º y el ángulo PRQ medirá 30º + 60º = 90º.

16. (E)

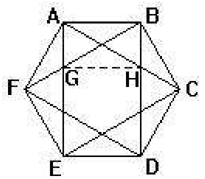


Nos dicen que $PQ = 2$, $SR = 4$, $PM = MQ = 1$, $SL = 1$ y $LR = 3$. Llamando h a la altura del triángulo LNR que parte del vértice N, tenemos que la altura del trapecio $PQRS$ es $2h$ por lo que su área será $\dfrac{1}{2}(4+2) \cdot 2h = 6h$.

Por otra parte Área LMN = Área $MQRL$ − (Área LRN + Área MQN) =

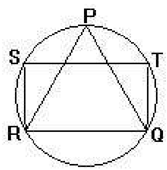
$= \frac{1}{2}(3+1)\cdot 2h - \left(\frac{1}{2}3h + \frac{1}{2}1\cdot h\right) = 4h - 2h = 2h$, con lo que el cociente pedido es $\frac{2h}{6h} = \frac{1}{3}$.

17. (A)



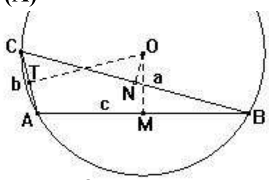
Las diagonales que hemos trazado del hexágono mayor se dividen entre sí en tres partes iguales pues, por ejemplo, $ABGH$ es un rectángulo. Así pues, cada lado del hexágono pequeño es $\frac{1}{3}d$ siendo d la diagonal BF que, llamando l al lado del hexágono grande, será: $d = l^2 + l^2 - 2 \cdot l \cdot l \cdot \cos 120º = 3l^2$, por lo que $d = l\sqrt{3}$ y el lado del hexágono pequeño es $\frac{l\sqrt{3}}{3}$. Así pues, la razón entre los lados de los dos hexágonos es $\frac{\sqrt{3}}{3}$, por lo que la razón entre sus áreas será $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$.

18. (E)



Si l es el lado del triángulo equilátero, tenemos que $\cos 30º = \frac{l}{2}$, por lo que $l = \sqrt{3}$. Así pues, el lado RQ del rectángulo es $\sqrt{3}$. Por otra parte, como RQ y QT son perpendiculares, RT debe ser un diámetro, por lo que $QT = \sqrt{2^2 - 3} = 1$ y el área pedida es $\sqrt{3}$.

19. (A)

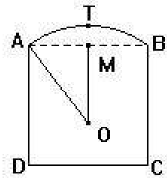


Calculemos los lados a y c del triángulo. Los ángulos son $C = 60º$, $B = 15º$ y $A = 105º$. El ángulo AOB es el doble del ángulo C del triángulo por lo que $OAM = 90º - 60º = 30º$ y $\frac{c}{2} = 6\cdot\cos 30º$, de donde $C = 6\sqrt{3}$. De igual forma, como el arco $\widehat{CAB}$ es de 360º - 2A = 150º, el ángulo OCN es 90 − 75º = 15º, por lo que $\frac{a}{2}$ = 6 cos 15º, de donde $a = 12\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = 3\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$. Para calcular el área del triángulo ABC, tomemos como base c y como altura

$h = a \cdot \text{sen}\, B = a\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = = \dfrac{3}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) = 3$, por lo que el

área pedida será $\dfrac{1}{2}6\sqrt{3} \cdot 3 = 9\sqrt{3}$.

20. **(A)**



Como $AM = 30$ y $AO = 50$, $OM = 40$ cm, por lo que $MT = 50 - 40 = 10$ cm y la altura de la ventana es $60 + 10 = 70$ cm.

21. **(E)** Si sen $2x = \cos x$, entonces $2\text{sen}\, x \cos x - \cos x = 0$, luego $\cos x\,(2\,\text{sen}\, x - 1) = 0$, por lo que $\cos x = 0$ ó sen x $= \dfrac{1}{2}$. Como en cada caso hay dos ángulos x que verifican dicha ecuación (90º, 270º, 30º, 150º), habrá cuatro soluciones.

22. **(E)** En el comité puede haber 4 estudiantes y 2 profesores ó 3 estudiantes y 3 profesores. Así pues, el número de elecciones será:

$\dbinom{8}{4} \cdot \dbinom{6}{2} + \dbinom{8}{3}\dbinom{6}{3} = 70 \cdot 15 + 56 \cdot 20 = = 2170.$

23. **(A)** El número de casos posibles será $PR_7^{3,3,1} = \dfrac{7!}{3!\,3!} = 140$ y si A, B y C son los autores distintos habrá P_3 casos en los que estén todos los libros de un autor juntos. Así pues, la probabilidad pedida es $\dfrac{P_3}{140} = \dfrac{6}{140} = \dfrac{3}{70}$.

24. **(E)** Si $\lg_b 729 = n$, es $b^n = 729 = 3^6$. Así pues, tenemos: $b = 3$, $n = 6$; $b = 3^2$, $n = 3$; $b = 3^3$, $n = 2$; $b = 3^6$, $n = 1$, es decir, cuatro enteros positivos b.

25. **(D)** $4 < P\,(0) < 5$; suma de los coeficientes de $P = P(1) < P(0)$ y $P(1) > 0$. Mínimo de $P(x)$ en $[-2, 1] = P(1)$; $P'(1) < 0$ y $P'\left(-\dfrac{3}{2}\right) > 0$, por lo que

$P'(1) \cdot P'\left(-\dfrac{3}{2}\right) < 0$ y $\lim\limits_{x\to -4} P(x) > 0$, por lo que la respuesta es

$P'(1) \cdot P'\left(-\dfrac{3}{2}\right)$, es decir, D.

V CONCURSO DE PRIMAVERA. 1er NIVEL (PRIMARIA). 2ª FASE. DÍA 21-04-01.

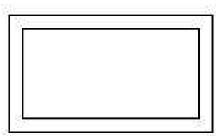
1. El número pedido será $\frac{5}{8}-\frac{1}{2}=\frac{5}{8}-\frac{4}{8}=\frac{1}{8}$.

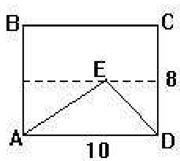
2. **(D)** El resto son $\frac{2}{5}$. Nos dicen que para llevar los $\frac{3}{5}$ hacen falta 9 horas, luego en 3 horas llenaría $\frac{1}{5}$, es decir, en 6 horas el resto.

3. **(B)** Aproximando cada factor por 300, tenemos que el producto es parecido a $300 \cdot 300 = 90000$ por lo que la respuesta es B.

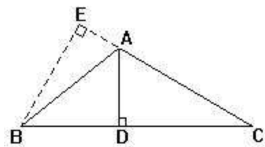
4. **(D)** Hay solo dos enteros en la lista de respuestas, -2 y -25 y el único menor que -3 es -25, con lo que la respuesta es D.

5. **(C)** Sabemos que $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{c}$, es decir $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}=\frac{1}{c}$, por lo que $c=\frac{6}{5}$ y la respuesta es C.

6. **(D)**  El jardín junto al paseo forma un rectángulo de dimensiones 12 m $\times$ 22 m por lo que su área es 264 m^2. De ellos, $10 \times 20 = 200$ m^2 corresponden al jardín, por lo que el área del paseo será $264 - 200 = 64$ m^2.



7. **(C)** El área del rectángulo es $10 \times 8 = 80$ cm^2 y el área del triángulo AED es $\frac{1}{2}10\cdot 4 = 20$ cm^2, por lo que el área de la zona sombreada será $80 - 20 = 60$ cm^2.

8. **(C)** 

Podemos tomar en ese triángulo como base BC y altura AD o como base AC y altura BE. Así pues, deberá ocurrir que $6 \cdot 2 = 4 \cdot BE$, por lo que $BE =$

(Observemos que el razonamiento no depende del

dibujo - mejor hecho en la solución)

9. **(B)** Como el perímetro es 34 cm, un largo más un ancho será 17. Si ambos midieran igual, un largo más un ancho sería $17 - 7 = 10$, es decir, el ancho sería 5, por lo que el largo es $5 + 7 = 12$ cm y su área es $12 \cdot 5 = 60$ cm^2.

10. **(C)** Los catetos del otro triángulo rectángulo medirán 9 y 12 cm, por lo que su área será $\frac{1}{2}9 \cdot 12 = 54$ cm^2.

11. **(E)** El número de votos fue 10575 + 7990 + 2585 = 21150 que representa el 90% del número de electores. Así pues, éste fue $\frac{100\cdot 21150}{90}=23500$.

12. **(B)** Si Juan hubiera trabajado 1 hora al día, habría tardado 8 × 12 = 96 días, por lo que trabajando 6 horas habría tardado $\frac{96}{6}=16$ días.

13. **(A)** monedas de Javier + monedas de Jorge + monedas de Juan = 99, es decir: monedas de Javier + 15 + monedas de Javier + 24 + 15 + monedas de Javier = 99, o sea: 54 + triplo de monedas de Javier = 99, por lo que el triplo del Nº de monedas de Javier es 99 − 54 = 45 y el número de monedas de Javier será $\frac{45}{3}=15$.

14. **(D)** Superman tarda 20 segundos en hacer 1 km y Billy el rápido solamente 12 segundos. Así pues, sin ventaja ninguna, ganaría Billy el rápido por 8 segundos y como le dio 5 segundos de ventaja, le ganó por 3 segundos.

15. **(B)** Los primos pedidos deben empezar por 1, 2 ó 3 pues a partir de ahí la suma de las cifras no es menor que 5 salvo en 40 que no es primo. Así pues son 11, 13 y 31.

16. **(B)** Si cortamos en horizontal los brazos verticales y en vertical los horizontales para quitar el triángulo de los extremos nos quedaría una cruz de área 4 · 2 · 1 + 1 = 9 cm^2. Como la cruz dada tiene además 4 triángulos de catetos 1 y 1, habrá que añadirle $4\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=2$ cm^2 y el área de dicha cruz será 11 cm^2.

17. **(C)** Con la información que nos dan, sabemos que 1 gato y un gatito pesan 44 − 32 = 12 kg, luego 2 gatos y 2 gatitos pesarán 24 kg. Como 3 gatos y 2 gatitos pesan 32 kg, resulta que 1 gato pesará 32 − 24 = 8 kg, así que 2 gatos y un gatito pesarán 8 + 12 = 20 kg.

18. **(C)** Si decimos que el lado de cada cuadrícula vale 1, el área no sombreada se compone de 4 triángulos, todos de base 1, dos de ellos de altura 2 y otros dos de altura 3. Así pues el área de la zona sombreada es $2\frac{1}{2}\cdot 2+2\frac{1}{2}\cdot 3=5$. Como el área total es 5 · 5 = 25, el área no sombreada es 25 − 5 = 20, por lo que el cociente pedido es $\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$.

19. **(D)** La figura se compone de 5 · 9 = 45 cuadrados de los cuales hay 5 sombreados. Voy a llamar x al número de cuadrados que voy a sombrear. Así pues, si ahora hay 45 − 5 = 40 sin sombrear, luego habrá 40 − x sin sombrear y 5 + x sombreados. Yo quiero que 5 + x sea la mitad de 40 − x, es decir, que el doble de 5 + x, que será

10 + 2x, sea igual a 40 − x. Si tanteas un poco, llegas a que x será 10, por lo que la respuesta es D.

20. **(B)** La cifra de mis unidades tiene que ser par pues es el doble de algo y como la suma de mis cifras es par, la cifra de mis decenas también tiene que ser par, por lo que será el 24 y el producto de mis cifras será 8.

21. **(D)** Las taquillas que quedan abiertas son las que son modificadas un número impar de veces, o sea, aquellas cuyo número tiene un número impar de divisores. Observa que si un número tiene un divisor, entonces tiene otro distinto, por ejemplo el 18 tiene el 2 y el 9 $\left(\frac{18}{2}\right)$, el 3 y el $\frac{18}{3}=6$, por lo que el número de su divisores sería par, salvo aquellos que, al hacer este razonamiento, aparece el mismo divisor, por ejemplo el 25 tiene el 5 y el $\frac{25}{5}=5$. Estos números son los cuadrados perfectos y tendrán, entonces, un número impar de divisores. Así pues quedarán abiertas la 1, 4, 9, 16 y 25 por lo que la última abierta será la 25.

22. **(D)** Llamemos A, B, C y D a estos chicos. Nos dicen que Beatriz está entre Alicia y Carlos, por lo que es ABC ó CBA. Como Alicia está entre Beatriz y David sería $DABC$ ó $CBAD$ pero la 1ª opción hay que descartarla pues David no es el primero. Así que C es el 1, B el 2, A el 3 y D el 4 por lo que el producto de los números de Alicia y Beatriz es 3 · 2 = 6.

23. **(D)** Los 12 primeros días de cada mes plantearía dudas pues, por ejemplo 07−10 puede ser el 7 de Octubre o el 10 de Julio. El día nº 13 de cada mes no planteará dudas pues no hay 13 meses y así ninguno más, por lo que tendríamos en total 12 · 12 = 144 días que pudieran plantear dudas, a los que hay que restar el 1−1, el 2−2,..., hasta el 12−12 (pues han sido contados dos veces) y nos quedarán 144 − 12 = 132.

24. **(B)** La distancia entre A y C es 21 y la distancia entre C y B, o sea, entre B y C, es 5, por lo que si $AB + BC = AC$, tenemos que AB + 5 = 21 con lo que la distancia entre A y B es 16 km.

25. **(B)** Los cinco círculos ocupan 5 · 1 = 5 cm^2 pero los trozos comunes los hemos contado dos veces cada uno, por lo que el área pedida será $5-4\cdot\frac{1}{8}=5-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$ cm^2.

VCONCURSO DE PRIMAVERA. 2º NIVEL (1º-2º ESO). 2ª FASE. DÍA 21-04-01.

1. **(D)** $\frac{39}{18}+\frac{20}{9}+\frac{2}{3}=\frac{39}{18}+\frac{40}{18}+\frac{12}{18}=\frac{91}{18}$ **, por lo que la respuesta es D**

2. **(A)** E total hay 11500 gramos y como cada palillo pesa 5g, habrá $\frac{11500}{5}=2300$ palillos.

3. **(D)** Como puedes ver en el enunciado, los croissants salen más baratos si compro paquetes de 7. Comprar 8 paquetes de 7 no es aconsejable pues los cuatro croissants que me faltan los tengo que comprar individuales y salen muy caros. Pero con 7 paquetes de 7 y uno de 12 compro 61 croissants y gasto $7\cdot 100+180=880$ ptas, por lo que me sobran 120 ptas y es la mejor opción.

4. **(A)** Si después de las negociaciones, cada uno pagó x ptas, el regalo costó 3x ptas. Si no hubiera habido arreglos, Dani habría pagado $x+100$, Rocío $x-300$ y Jaime 2000 ptas, por lo que , de donde $x=1800$ y el regalo costó $3\cdot 1800=5400$ ptas.

5. **(E)** Por los datos que me dan, $119=2a+1=3b+2=4c+3=5d+4=6c+5$ siendo a, b, c y d enteros. Pero observa que también puedo poner $119=2A-1=3B-1=4C-1=5D-1=6E-1$, con A, B, C, D y E enteros (ahora he hecho la división por exceso, es decir cada cociente es una unidad mayor que el correspondiente anterior). Así pues $120=2A=3B=4C=5D=6E$, y todos los múltiplos de 120 son múltiplos de 2, 3, 4, 5 y 6. Pero también tienen esta propiedad los múltiplos de $60=m.c.m.(2,3,4,5,6)$. Como hay 15 múltiplos de 60 que tengan tres cifras, la respuesta a nuestro problema es 14.

6. **(C)** Los impares consecutivos son $2m-1,\ 2m+1,\ 2m+3,\ 2m+5$ y suman $2m+8$.

7. **(C)** Si llamas x al número de estudiantes e y a lo que tenía que haber pagado cada uno, tenemos que $x\cdot y=(x-2)\cdot(y+100)$, o bien, $x\cdot y=x\cdot y+100x-2y-200$, por lo que $100x-2y=200$, es decir, $y=50(x-2)$. Así pues $x\cdot 50\cdot x\cdot(x-2)$ está comprendido entre 10000 y 12000, o lo que es lo mismo, $200<x\cdot(x-2)<240$. Vamos a obtener, tanteando, el número x. Como $200<x\cdot(x-2)$, $200<x^2$ y x será mayor que $\sqrt{200}$ y empezamos a tantear con x = 15; $15\cdot 13<200$; x = 16, $200<16\cdot 14<240$, por lo que había 16 chicos y lo compraron entre 14.

8. **(A)** Rellenamos el cuadrado en este orden: a, 20, $a/5$, 100 y 25. Así pues, observando la primera fila y una diagonal, tenemos que

5	100	x
4	$a/5$	25
a	1	20

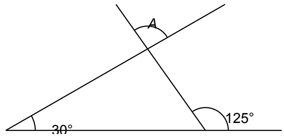
$500x = \frac{a^2x}{5}$, de donde $2500 = a^2$ y $a = 50$, y el cuadrado queda así:

5	100	2
4	10	25
50	1	20

El producto constante es 1000 y $x = 2$.

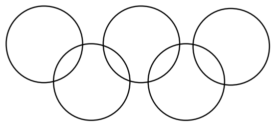
9. **(C)** $3m$ será impar y $4n$, par, por lo que $3m + 4n$ será impar.

10. **(C)** Los ángulos del triángulo son 30º, $180º - 125º = 55º$ y $180º - (30º + 55º) = 95º$. El ángulo A es el opuesto por el vértice al de 95º, luego A = 95º.



11. **(A)** Como el triángulo construido es semejante al dado, sus ángulos serían iguales a los de éste, por lo que el más pequeño medirá también 10º.

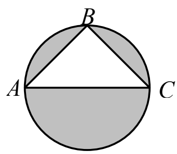
12. **(B)** El área ocupada por los cinco círculos es 5 cm^2, pero los trozos comunes están contados dos veces, así que el área pedida será $5 - 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{9}{2}$ cm^2.



13. **(B)** Una persona hce ese trabajo en $x \cdot d$ días, luego y personas en $\frac{x \cdot d}{y}$ días.

14. **(A)** Si $\frac{10+1}{20+2} = \frac{10}{20}$, por lo que $m = 0$.

15. **(A)** Tomando AC como base del triángulo, la altura es el radio, o sea $\frac{10}{2} = 5$, por lo que el área del triángulo es $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 = 25$, y el área de la región sombreada es $\pi \cdot 5^2 - 25 = 25\pi - 25$.



16. **(C)** Con unos y doses podemos formar 16 números de 4 cifras pues para cada una de ellas hay dos posibilidades (1 o 2) y $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. Pero entre éstos estará el 1111 y el 2222 que no podemos contarlos, por lo que la respuesta es $16 - 2 = 14$.

17. **(A)** La única cifra que al multiplicarla por 7 acaba en 2 es 6. Así pues si el número buscado es $7a$, se tiene que $a < \frac{900}{7}$, es decir $a < 129$ y como en cada decena hay un número acabado en 6 y en 130 hay 13 decenas, y habrá 13 números menores que 129, múltiplos de 7 y que acaban en 6.

18. **(D)** Las taquillas que quedan abiertas son las que son modificadas un número impar de veces, o sea, aquellas cuyo número tiene un número impar de divisores. Si a es un divisor del número x, $\frac{x}{a}$ será otro, por lo que el número de divisores de un número siempre es par, savo que $a = \frac{x}{a}$, es decir que x sea un cuadrado perfecto. Así las taquillas que quedan abiertas son las de número cuadrado perfecto. La taquilla que queda abierta con número cuadrado perfecto menor que 35 es la nº 25.

19. **(E)** Si $\frac{p}{q} = -1$, entonces $p = -q$ y $p + q = 0$

20. **(B)** 11 km equivalen a $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ de camino, es decir, $11 \text{ km} = \frac{1}{6}$ de camino por lo que la excursión completa es de 66 km.

21. **(A)** Hubo $15 - 10 = 5$ chicos que comieron solamente patatas, $12 - 10 = 2$ que comieron solamente gusanitos, 10 que comieron ambas cosas y 3 que no comieron nada, lo que hace un total de $5 + 2 + 10 + 3 = 20$ chicos.

22. **(D)** Si $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ pero $\frac{3}{2} \neq \frac{6}{1}$.

23. **(A)** El número máximo de jilgueros que puede haber en el árbol que más haya es $15 - 2 \cdot 4 = 7$. Si en cada uno de los otros árboles hubiera la misma cantidad de gorriones, 2, habría en éste $14 - 2 \cdot 2 = 10$ gorriones, lo que rompe una de las condiciones del problema. Así pues, 3 gorriones de éstos tendrían que estar en los otros dos árboles, y en el que más pájaros haya habrá $7 + 7 = 14$, quedando los pájaros distribuidos así: 1º $4j$ y $3g$; 2º $4j$ y $4g$; 3º $7j$ y $7g$.

24. **(B)** 12000 ptas corresponde a 360º, luego 1500 ptas, que es la octava parte de 12000, corresponderán a la octava parte de 360º, es decir, 45º.

25. **(B)** Pedro plantó él solo, $60 - 39 = 21$ árboles el 2º día y, como trabajó al mismo ritmo, plantó 21 el 1er día, por lo que Dani plantó $39 - 21 = 18$ árboles.

V CONCURSO DE PRIMAVERA. 3er NIVEL (3º -4º ESO). 2ª FASE. DÍA 21-−04-2001.

1. **(A)** $0'4^2 = 0'16$; $0'5^2 = 0'25$; $0'5^{-1} = 2$; $5^{-1} = \frac{1}{5}$ y $\sqrt{0'25} = 0'5$ por lo que el más pequeño es $0'4^2$.

2. **(D)** Con base 9 tenemos 9^2 y 9^3; con base 15, 15^2; con base 21, 21^2; con 25, 25^2; y con base 27 tendríamos 27^2 que ya está contado pues es 9^3. Así pues, tenemos 5 números con las condiciones pedidas.

3. **(D)** $1 - \sqrt{1-(n+1)^2}$ será entero cuando lo sea $\sqrt{1-(n+1)^2}$ y eso se verificará cuando $1 - (n + 1)^2 = 1$ ó $1 - (n - 1)^2 = 0$, es decir si $n + 1 = 0$ ó $n + 1 = \pm 1$, o sea, para tres valores de n.

4. **(B)** El paralelogramo inicial tenía de base b y altura h y el trapecio al que hemos llegado tiene de bases $b+\frac{b}{2}$ y $b-\frac{b}{4}$ y altura también h. Así pues, el área del trapecio es $A = \frac{\frac{3b}{2}+\frac{3b}{4}}{2}h = \frac{9bh}{8}$ y como bh era el área del paralelogramo, ésta ha aumentado en $\frac{1}{8}$ es decir, el $12'5$ %.

5. **(B)** $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$ por lo que la suma más pequeña posible se da en $3 + 23 + 29 = 55$ ya que 23 nunca aparecerá como suma por ser un factor primo y aparecer él, o algún múltiplo de él, en cualquier descomposición de 2001.

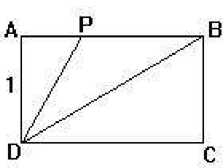
6. **(B)** Alicia gastó $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ de $\frac{4}{5}$ de sus monedas; es decir, gastó $\frac{1}{5}+\frac{4}{25}=\frac{9}{25}$ del total de sus monedas, por lo que le quedaban $\frac{16}{25}$ que equivalen a 32 monedas. Así pues, $\frac{1}{25}$ son 2 monedas y el total de monedas que tenía al principio era de 50.

7. **(C)** Si a es lo que pago por hora y b el fijo, tengo que el total pagado es $ax + b$ siendo x el número de horas que hablo. Así pues $ax + b = 12200$ y $2ax + b = 19600$. La primera igualdad es equivalente a $2ax + 2b = 24400$ que al restarle la segunda nos da $b = 4800$ ptas. y la respuesta es C.

8. **(B)** Al moverse P como indica el problema, obtenemos triángulos de base AB y altura la distancia de la recta AB a la paralela que pasa por P. Así pues: MN, paralela media, permanece constante e igual a la mitad de AB. El perímetro del triángulo PAB obviamente cambia. Su área, en cambio, no; será siempre $\frac{1}{2}\,AB\cdot h$ siendo h la distancia entre las dos paralelas citadas. Finalmente el trapecio $ABNM$ tendrá siempre igual área por no cambiar ni sus bases ni su altura. Así pues, cambia una sola cantidad y la respuesta es B.

9. **(D)** Las taquillas que quedan abiertas son las que son modificadas un número impar de veces, es decir, aquellas cuyo número tiene un número impar de divisores. Si a es un divisor del número x, $\frac{x}{a}$ será otro, por lo que el número de divisores de un número siempre es par, salvo que $a = \frac{x}{a}$, es decir, que x sea un cuadrado perfecto. Así pues, las taquillas que quedan abiertas son las de número cuadrado perfecto y el mayor con estas características es $31^2 = 961$.

10. **(B)**



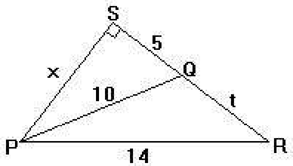
Como los ángulos que aparecen con vértice D son de 30º, el triángulo BDP es isósceles y DB es el lado de un triángulo equilátero cuya mitad es $BC = 1$, así pues $BD = 2$. DP es el lado de un triángulo equilátero de altura $AD = 1$, de donde si $AP = x$, es $DP = 2x$ y $x^2 + 1 = (2x)^2$, por lo que $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y el perímetro del triángulo pedido es $\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} + 2 = 2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$ y la respuesta es B.

11. **(D)** Si x es el número de estudiantes de 3º - 4º ESO e y el de Bachillerato, nos dicen que $\frac{40x}{100} = \frac{4y}{5}$, es decir, $x = 2y$ y la afirmación verdadera es D.

12. **(C)** Nos dicen que $2 - x = p \Rightarrow x = 2 - p$ y $x - p = 2 - 2p$.

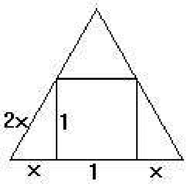
13. **(C)** Como ambos primos son impares, su producto menos su suma es impar, por lo que los candidatos a la respuesta son 21, 119 y 231.
Por otra parte, si x e y son los números, su producto $P = xy$ y su suma $S = x + y$ verifican que $(x - 1)(y - 1) = xy - x - y + 1 = P - S + 1$ por lo que en la 1ª opción, 21, $(x - 1)(y - 1) = 22$; en la 2ª, 119, $(x - 1)(y - 1) = 120$ y en la 3ª, 231, Como x e y son mayores que 4 y menores que 18, no es posible que $(x - 1)(y - 1) = 2 \cdot 11$; si $(x - 1)(y - 1) = 232$, tampoco es posible, pues 29 es un factor de 232, luego debe aparecer él o un múltiplo suyo en cualquier descomposición en factores de 232 y $29 > 18$. Así pues, $(x - 1)(y - 1) = 120 = 12 \cdot 10$, por lo que $x = 13$, $y = 11$, y la respuesta es $P - S = 119$, o sea, C.

14. (D)



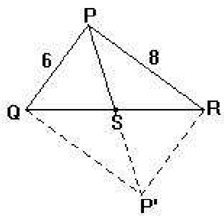
Si llamamos x a PS, es $x^2 + 5^2 = 10^2$, de donde $PS = \sqrt{75}$, por lo que llamando t a QR, $75 + (5 + t)^2 = 196$, de donde $t = 6$ y el perímetro del triángulo PQS es $10 + 6 + 14 = 30$.

15. (E)



En la figura observamos que $(2x)^2 = 1^2 + x^2$, por lo que $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y la longitud del lado del triángulo es $1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$.

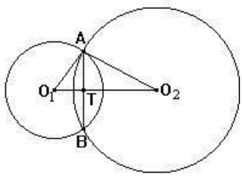
16. (B)



El triángulo en cuestión es rectángulo, de donde $QR = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$, por lo que $PS = 5$ ya que si P' es el simétrico de P respecto de S, $PRP'Q$ es un rectángulo por lo que sus diagonales son iguales.

17. (B) Nos dicen que $\frac{2^{2x}}{2^{x+y}} = 2^3$ y $\frac{3^{2x+2y}}{3^{5y}} = 3^5$ de donde $2x - x - y = 3$ y $2x + 2y - 5y = 5$, o sea, $x - y = 3$ y $2x - 3y = 5$ con lo que $x = 4$, $y = 1$ y el producto xy es 4.

18. (B)

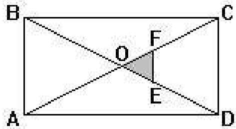


Si $O_1T = x$ y $TO_2 = y$, tenemos que $10^2 = x^2 + 8^2$ y $17^2 = y^2 + 8^2$, por lo que $x = 6$, $y = 15$ y $O_1O_2 = x + y = 21$ cm.

19. (D) Como $x - y > x$, tenemos que $y < 0$ y como $x + y < y$, es $x < 0$ por lo que $xy > 0$ y la respuesta es D.

20. (B) Si r_1 y r_2 son los radios de A y B respectivamente, es $\frac{2\pi r_1}{6} = \frac{2\pi r_2}{8}$, por lo que $\frac{r_1}{r_2} = \frac{3}{4}$, de donde $\frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} = \frac{9}{16}$.

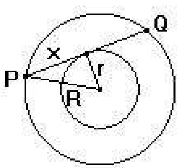
21. **(B)** Sabemos que $mn = n$ y como $n \neq 0$, es $m = 1$. Por otra parte, $m + n = -m$, es decir $m + n = -1$.

22. **(B)** 

El triángulo OEF es semejante al OCD. Como el cociente entre sus bases FE y CD es $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, el cociente entre sus áreas será $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ y como el área de OCD es $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$, el área del triángulo OEF será $\frac{18}{9} = 2$.

23. **(A)** Si el precio de coste es c, es $x = c - \frac{15c}{100} = \frac{85c}{100}$ e $y = c + \frac{15c}{100} = \frac{115c}{100}$, por lo que $\frac{y}{x} = \frac{115}{85} = \frac{23}{17}$.

24. **(C)**



Siendo x la mitad de la longitud de PQ y R y r los radios de las circunferencias es $R^2 = x^2 + r^2$, por lo que $R^2 - r^2 = x^2$. Por otra parte, el área de la corona es $\pi(R^2 - r^2) = 25\ \frac{\pi}{2}$, de donde $R^2 - r^2 = \frac{25}{2}$, o sea, $x = \frac{5}{\sqrt{2}}$. La longitud de la cuerda será $\frac{10}{\sqrt{2}}$, es decir, $\frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$.

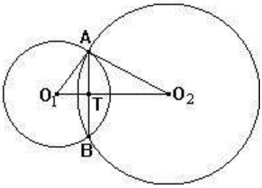
25. **(A)** Si t es un número entero comprendido entre $n! + 1$ y $n! + n$, es $t = n! + q$ con $1 < q < n$, por lo que $n! + q$ será divisible entre q y, por tanto, no será primo, así que la respuesta es ninguno.

V CONCURSO DE PRIMAVERA. 4º NIVEL (BACHILLERATO LOGSE-COU). 2ª FASE. DÍA 21-04-2001

1. **(A)** $\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt[3]{a}=\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt[6]{a^2}=\sqrt[6]{a^3}=\sqrt{a}$ **.**

2. **(E)** $2^{10}+2^{10}=2\cdot 2^{10}=2^{11}$; $2^{10}-2^{10}=0$; $2^{10}\cdot 2^{10}=2^{20}$; $2^{10}:2^{10}=1$, así que todas son verdaderas.

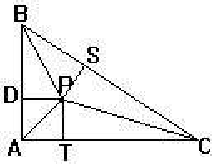
3. **(B)**



Si $O_1T=x$ y $TO_2=y$, tenemos que $10^2=x^2+8^2$ y $17^2=y^2+8^2$, por lo que $x=6$, $y=15$ y $O_1O_2=x+y=21$ cm.

4. **(C)** Como $|z|=1$ y $|w|=2$, $|zw|=2$. Por otra parte Arg (zw) = Arg z + Arg w < 180º. Finalmente, $zw\neq u$ pues $z\neq 1$. Así pues, el único complejo de los dados de módulo 2 y argumento menor que 180º es t, por lo que la respuesta es C.

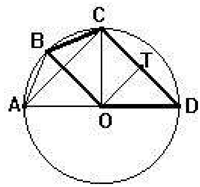
5. **(E)**



Como $PT=PS=\sqrt{8}$ y $PTAD$ es un cuadrado pues $PD=PT$ por ser P un punto de la bisectriz de A, sigue que $PA=\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}=4$.

6. **(D)** Veamos en primer lugar cuantos son divisibles por 2 ó por 3. Hay 250 divisibles por 2, 166 divisibles por 3 y 83 divisibles por ambos, es decir, por 6. Así pues la cantidad de números divisibles por 2 o por 3, será 250 + 166 − 83 por lo que el resto, es decir, 500 − (250 + 166 − 83) = 167 no sería divisible ni por 2 ni por 3.

7. **(C)** El cuadrilátero $BCDO$ es un trapecio pues CD es paralela a BO ya que los ángulos BOA y CDO son ambos de 45º. Sus bases miden $OB=1$ y $DC=\sqrt{2}$ y su altura OT es $\frac{\sqrt{2}}{2}$ pues OCD es un triángulo rectángulo isósceles de catetos 1 y OT es la altura sobre la hipotenusa.



Así pues, Área $BCDO=\frac{1+\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$.

8. **(D)** Si $E\,(2-x^2)=|2-x^2|$, entonces $E\,(2-x^2)\geq 0$ por lo que $2-x^2\geq 0$. Por otra parte, $2-x^2$ debe ser entero pues coincide con su parte entera. Así pues $2-x^2=2$, $2-x^2=1$ ó $2-x^2=0$. La primera ecuación aporta una solución, $x=0$, la 2ª dos,

$x = \pm 1$ y la 3ª otras dos $x = \pm\sqrt{2}$, por lo que hay 5 soluciones reales de la ecuación dada.

9. **(D)** Si elegimos cuatro, pudiera ocurrir (el caso peor) que sus coordenadas tomaran cada una de las cuatro distribuciones posibles (par, par), (par, impar), (impar, par), (impar, impar) por lo que ningún punto medio de dos de ellos tendría coordenadas enteras, pero al elegir 5, habrá dos puntos con la misma variación par/impar en sus coordenadas por lo que su punto medio será reticular.

10. **(D)** La negación de "Para cualquier x par, $f(x)$ es par" es "Existe un x par tal que $f(x)$ es impar", o sea, D.

11. **(B)** En el vaso había $\frac{1}{2}$ de naranjada y $\frac{1}{2}$ de limonada y Antonio bebió $\frac{1}{6}$ de naranjada y $\frac{1}{6}$ de limonada. Así pues, después de beber, quedaba $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ de cada líquido y al llenar la mezcla con limonada se quedó en $\frac{1}{3}$ de naranjada.

12. **(C)** $m = \dfrac{m-3}{1-m}$, por lo que $m - m^2 = m - 3$ y $m = \pm\sqrt{3}$. Como nos dicen que $m > 0$, la respuesta es $m = \sqrt{3}$, o sea, C.

13. **(A)** Si ,

$$\begin{array}{r} 8abc \\ -cba8 \\ \hline 7623 \end{array}$$

entonces $c = 1$ y $10 + b - (a + 1) = 2$, así que $a - b = 7$. La tercera columna nos vuelve a aportar $a - (b + 1) = 6$, o sea, $a - b = 7$. Así que $a = 9$, $b = 2$, $c = 1$ es una respuesta y como $a > b > c$ es la única.

14. **(B)** Escribamos todas las velocidades en km/minuto.

velocidad avioneta = 320 km/hora = $\frac{16}{3}$ km/minuto

velocidad viento = 40 km/hora = $\frac{2}{3}$ km/minuto.

Sabemos que $\dfrac{d}{\frac{16}{3} - \frac{2}{3}} = 135$, así pues, $d = 135 \cdot \frac{14}{3} = 630$ km.

Nos piden $\dfrac{d}{\frac{16}{3} + \frac{2}{3}}$, es decir $\frac{630}{6} = 105$ minutos.

15. **(D)** Las taquillas que quedan abiertas son las que son modificadas un número impar de veces, es decir, aquellas cuyo número tiene un número impar de divisores. Si a

es un divisor del número x, $\frac{x}{a}$ será otro, por lo que el número de divisores de un número siempre es par, salvo que $a = \frac{x}{a}$, es decir, que x sea un cuadrado perfecto.

Así pues, las taquillas que quedan abiertas son las de número cuadrado perfecto y el mayor con estas características es $31^2 = 961$.

16. **(E)** Escribiendo tg x en función de las razones trigonométricas del ángulo $\frac{x}{2}$,

tenemos que $\text{tg}x = \frac{sen\, x}{\cos x} = \frac{2\text{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} - \text{sen}^2\frac{x}{2}} = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$, igualdad que se da si

$\cos\frac{x}{2} = \frac{a}{a^2 + b^2}$ y $\text{sen}\frac{x}{2} = \frac{b}{a^2 + b^2}$, (observar que a, $b > 0$) por lo que

$\text{sen}\, x = 2\ \text{sen}\ \frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$

Otro método más fácil: $1 + \text{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 x}$ y

$\text{sen}^2 x == 1 - \cos^2 x = \frac{\text{tg}^2 x}{1 + \text{tg}^2 x}$. Así pues, $\text{sen}^2 x = \frac{\left(\frac{2ab}{a^2 - b^2}\right)^2}{1 + \left(\frac{2ab}{a^2 - b^2}\right)^2} = \frac{4a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2}$

con lo que al ser a y b positivos, es $\text{sen}\, x = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$.

17. **(C)** Si $\left(2^a + 2^b\right)^2 = 2^{2a} + 2^{2b} + 2 \cdot 2^a \cdot 2^b = 2^{2a} + 2^{2b} + 2^{a+b+1}$

fuera $2^n + 2^m$ con $n < m$, entonces (suponiendo $a < b$) tendríamos que

$2^{2a} \cdot (1 + 2^{2b-2a} + 2^{b-a+1}) = 2^n \cdot (1 + 2^{m-n}) \Rightarrow 1 + 2^{2b-2a} + 2^{b-a+1} = 1 + 2^{m-n}$

y así $2^{2b-2a} + 2^{b-a+1} = 2^{b-a+1} \cdot \left(2^{b-a-1} + 1\right) = 2^{m-n}$, de donde

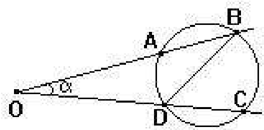
$\left(2^{b-a-1} + 1\right)$ debe ser par, y por tanto $b - a - 1 = 0$

Por tanto y como b puede ser mayor que a se tiene por simetría que $|a - b| = 1$ y la respuesta es C.

18. **(C)** Llamando a los ángulos a, b y $5a$ es $6a + b = 180º$, por lo que $b = 6(30º - a)$. Nos dicen que a, b y $5a$ son menores de 90º, así pues $6\,(30º - a) < 90º \Rightarrow 30 - a < 15º \Rightarrow$ $\Rightarrow a > 15º$. Por otra parte $5a < 90º \Rightarrow a < 18º$ y nos quedan, en principio, dos opciones para a: $a = 16º$, $5a = 80º$ y $b = 180 - 96 = 84$ por lo que $5a$ no es el mayor ó $a = 17º$, $5a = 85$ y $b = 180 - 102 = 78$ que sí responde al problema. Así pues, los ángulos mayores son 78º y 85º y su suma será 163º.

19. **(B)** En cada intervalo $[0, 2\pi]$, $[2\pi, 4\pi]$, $[4\pi, 6\pi]$, etc., estas curvas se cortan dos veces. Como en $[0, 2000\pi]$ hay 500 intervalos de éstos (cada uno es de longitud 2π) se cortarán 1000 veces y la respuesta es B.

20. **(B)**



El arco AD mide $360º - 3 \cdot 100 = 60º$. Si unimos D con B, tenemos que $OBD = \dfrac{60º}{2} = 30º$,

$BDC = \dfrac{100}{2} = 50º$ por lo que $ODB = 180º - 50º = 130º$

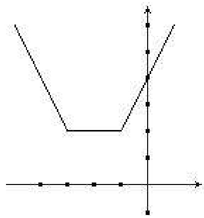
y el ángulo α pedido es $180 - (30º + 130º) = 20º$.

21. **(D)** Si esbozamos la gráfica de f, responderemos fácilmente a la cuestión planteada.

$$f(x) = |x+1| + |x+3| = \begin{cases} -x-1-x-3 & \text{si } x \le -3 \\ -x-1+x+3 & \text{si } -3 < x \le -1 \\ x+1+x+3 & \text{si } -1 < x \end{cases},$$

es decir, $$f(x) = \begin{cases} -2x-4 & \text{si } x \le -3 \\ 2 & \text{si } -3 < x \le -1 \\ 2x+4 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

por lo que la gráfica de f será algo así:



Así pues 1 es verdadera, 2 falsa, 3 verdadera y 4 verdadera con lo que hay tres afirmaciones verdaderas y la respuesta es D.

22. **(B)** La curva $y = (10 - x)^2 + 10$ es una parábola con coeficiente principal positivo y que en $P\,(10, 10)$ presenta su mínimo valor ya que $(10 - x)^2 + 10 \ge 10$ para todo x. Así pues, la respuesta es B.

23. **(C)** $y = 3 - 3\,|\cos x|$ toma valores enteros cuando $3\,|\cos x|$ sea entero y eso ocurre cuando $\cos x = 0$, $\cos x = \pm\dfrac{1}{3}$, $\cos x = \pm\dfrac{2}{3}$, $\cos x = \pm 1$, es decir, para 7 valores de x. Pero algunos de estos valores dan lugar a la misma imagen. En concreto:

Si $\cos x = 0$, $y = 3$

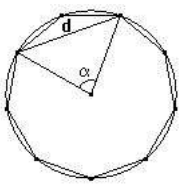
Si $\cos x = \pm\dfrac{1}{3}$, $y = 2$

Si $\cos x = \pm \dfrac{2}{3}$, $y = 1$

Si $\cos x = \pm 1$, $y = 0$. Tenemos, pues, cuatro valores enteros para $f(x)$.
Otro enfoque: $0 \le y \le 3$ pues $|\cos x| \le 1$ y toma todos los valores entre 0 y 3 pues es una función continua, es decir, toma 4 valores enteros diferentes.

24. **(E)** $(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = x^2 - 1 = (x-1)(x-1) = \left(f(x)+2\right) \cdot f(x)$. Así pues, $g(t) = (t+2)\,t$ por lo que $g(3) = 5 \cdot 3 = 15$.

25. **(D)**



Sabemos que $\alpha = 2 \cdot \dfrac{2\pi}{n}$ y $d^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos \alpha =$

$= 2 - 2 \cos \dfrac{4\pi}{n} = 2\left(1 - \cos\dfrac{4\pi}{n}\right) = 2 \cdot 2 \,\text{sen}^2 \dfrac{2\pi}{n} =$

$= 4 \,\text{sen}^2 \dfrac{2\pi}{n}$, por lo que $d = 2 \,\text{sen} \dfrac{2\pi}{n}$.

GANADORES DEL V CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Primer Nivel:

Primer premio (ex aequo)

Natalia Barahona León (6º de Primaria) del Colegio Amor de Dios (Madrid)

Manuel Vivanco Puyol (6º de Primaria) del C.P. Santa María (Madrid)

Tercer Premio

María Díaz Ordóñez (5º de Primaria) del Colegio Amorós (Madrid)

Segundo Nivel

Primer premio

Javier López Martín (2º de E.S.O.) del I.E.S. El Burgo de Las Rozas (Las Rozas)

Segundo Premio

Javier de la Nuez González (1º de E.S.O.) de la Scuola Media Italiana (Madrid)

Tercer Premio

David Fernández Sánchez (2º de E.S.O.) del I.E.S Jorge Guillén (Alcorcón)

Tercer Nivel

Primer premio

Luis Hernández Corbato (4º de E.S.O.) del I.E.S. Fortuny (Madrid)

Segundo Premio

Worrawit Pattaranit (4º de E.S.O.) del I.E.S. Ramiro de Maeztu (Madrid)

Tercer Premio

Hong Chen (3º de E.S.O.) del IES Mariano José de Larra (Madrid)

Cuarto Nivel

Primer premio

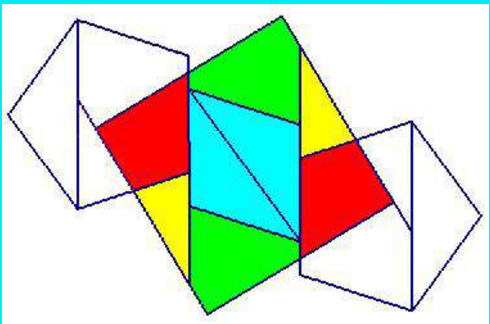
Fernando Cruz Robledillo (COU) del I.E.S. Cervantes (Madrid)

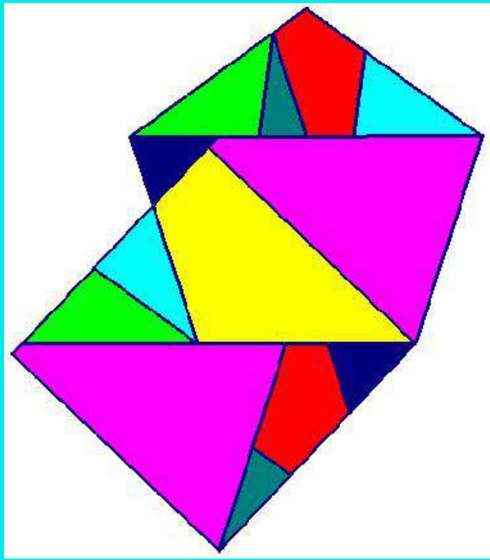
Segundo Premio

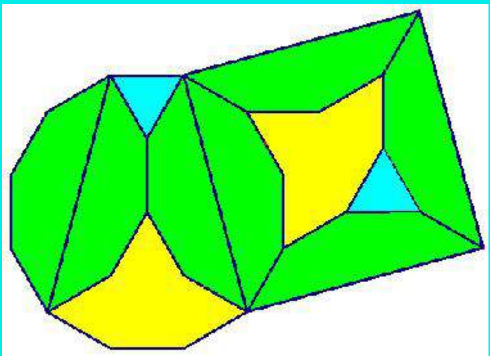
Javier Cóppola Rodríguez (1º Bachillerato) del Cº. Sª. María del Yermo (Madrid)

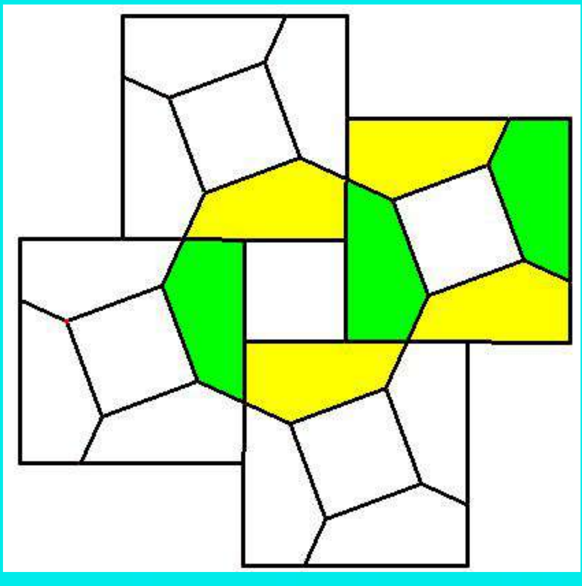
Tercer Premio

Ignacio Cruz Caridad (2º Bachillerato) del Liceo Francés (Madrid)

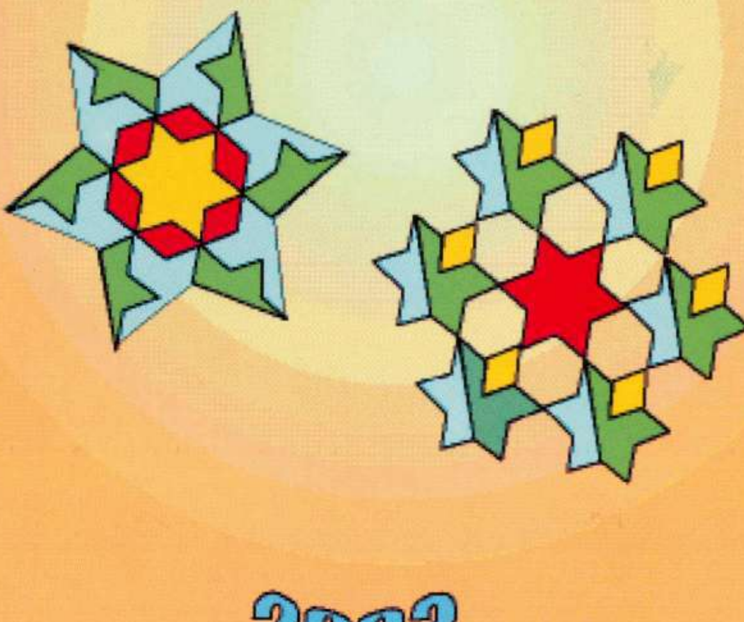








VII CONCURSOS DE PRIMAVERA



2003

Comunidad de Madrid

Comité organizador del Concurso de Primavera

Juan Jesús Donaire Moreno
Jesús García Gual
Joaquín Hernández Gómez
Fernando Moya Molina
Merche Sánchez Benito
Javier Soler Areta

Luis Ferrero de Pablo
María Gaspar Alonso-Vega
Francisco López Álvarez
Esteban Serrano Marugán
Víctor Manuel Sánchez González
José Mª Sordo Juanena

Sistema de ecuaciones

"Uno es dos menos uno.
Soledad es uno menos todos los demás."
Ángel Guinda

Presentación

"Hace ya siete años ....."

No somos periódicos, sólo un poco clásicos. Ya no nos repetimos, nos citamos; y así un año más nos reencontramos en el VII Concurso de Primavera dispuestos a hacer navegar nuestras florecillas en el río de Heráclito.

En este libro dejamos las pistas de lo que se hizo el curso pasado. Aquí están las "pruebas", pero la ilusión y el empeño de los participantes (estudiantes, profesores y padres) no pueden ser siquiera reflejados, aunque sí reconocidos. Seguros estamos de que un año más su estímulo y esfuerzo volverán.

Dar también las gracias a las instituciones académicas: Facultad de Matemáticas de la U.C.M. y Consejería de Educación de la C.M., y a las editoriales grupo ANAYA y grupo S.M., por la ayuda interesada (ya que su interés es la educación) que nos prestan para poder llevar a cabo este concurso. Y al Área de Formación del Profesorado dentro de la Dirección General de Ordenación Académica por el apoyo que hace posible este libro.

Comité Organizador

1. Si el 1 de Enero de 1989 fue sábado, el 1 de Enero de 1990 será:

A) Sábado; **B)** Domingo; **C)** Lunes; **D)** Martes; **E)** Miércoles.

2. Si el producto de dos números enteros positivos es 5, ¿cuál es su suma?

A) 10; **B)** 6; **C)** 5; **D)** 4; **E)** 8.

3. $(100-1)+(101-2)+(102-3)+(103-4)=400-?$

A) 0; **B)** 3; **C)** 4; **D)** 10; **E)** 12.

4. $10^3+(10^3-10^2)+(10^2-10)+(10-1)=$

A) 2008; **B)** 2002; **C)** 1998; **D)** 1999; **E)** 1990.

5. ¿Qué número se ha perdido aquí?
$400-100=?-50$

A) 350; **B)** 300; **C)** 200; **D)** 150; **E)** 250.

6. ¿Cuál de los siguientes números no es divisor de $1\times2\times3\times4\times5\times6$?

A) 8; **B)** 9; **C)** 10; **D)** 7; **E)** 36.

7. Un millón dividido entre 10.000 es

A) 10; **B)** 100; **C)** 1.000; **D)** 10.000; **E)** 100.000.

8. 475 minutos después de la 1 de la tarde son las:

A) 19:55; **B)** 20:45; **C)** 20:55; **D)** 21:55; **E)** 22:05.

9. $2^8-2^7-2^6-2^5$ es

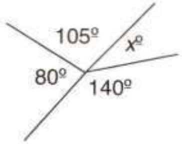
A) 2^5; **B)** 2^4; **C)** 2^3; **D)** 2^2; **E)** 2.

10. $2\times\frac{1}{11}+3\times\frac{1}{1000}+7\times\frac{1}{10000}=$

A) 2,37; **B)** 0,237; **C)** 0,0237; **D)** 0,00237; **E)** 0,000237.

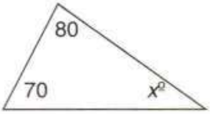
11. Un millón de segundos es aproximadamente

A) 3 días; **B)** 12 días; **C)** 3 meses; **D)** 1 año; **E)** 2 años.



12. ¿Cuál es el valor del ángulo x de la figura?

A) 35; **B)** 80; **C)** 75; **D)** 40; **E)** 45.

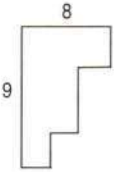


13. ¿Cuál sería el valor del ángulo x del triángulo de la figura?

A) 50; **B)** 40; **C)** 30; **D)** 20; **E)** 10.

14. El mayor de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo nunca puede valer

A) 42º; **B)** 46º; **C)** 48º; **D)** 89º; **E)** 80º.



15. ¿Cuál es el perímetro de la figura?

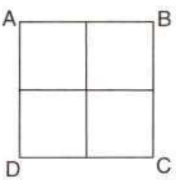
A) 17; **B)** 72; **C)** 34; **D)** 51; **E)** 48.

16. El mayor de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo nunca puede valer

A) 42º; **B)** 46º; **C)** 48º; **D)** 89º; **E)** 80º.

17. Si un coche va a 30 km por hora, en un minuto recorre

A) 15 km; **B)** 2 km; **C)** $\frac{1}{2}$ km; **D)** 4 km; **E)** 1 km.



18. Dividimos un cuadrado en 4 cuadraditos como indica la figura. Si el perímetro de cada uno de los cuadrados pequeños es 4 cm, ¿cuál es, expresado en cm, el perímetro del cuadrado *ABCD*?

A) 8; **B)** 12; **C)** 16; **D)** 20; **E)** 24.

19. Si 500 pesetas son 3 euros, entonces 15.000 pesetas son:

A) 60 euros; **B)** 50 euros; **C)** 45 euros; **D)** 30 euros; **E)** 25 euros.

20. Para cualquier número natural, ¿cuál de los siguientes números es siempre par?

A) el siguiente; **B)** su cuadrado; **C)** el número más su cuadrado;
D) el cuadrado más cinco; **E)** el cuadrado más dos.

21. El producto de todos los divisores de 15 es:

A) 15; **B)** 30; **C)** 150; **D)** 225; **E)** 75.

22. La multiplicación 37×99 da:

A) 3663; **B)** 3593; **C)** 3563; **D)** 3533; **E)** 3636.

23. El número de en medio entre 0,6 y 1,3 es:

A) 0,35; **B)** 0,7; **C)** 0,85; **D)** 0,95; **E)** 0,90.

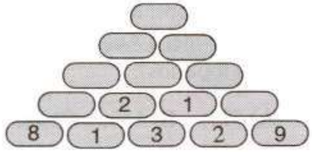
24. Si un corredor (a velocidad constante) hace 42 km en 2 horas 20 minutos, en una hora ha hecho:

A) 9 km; **B)** 12 km; **C)** 15 km; **D)** 18 km; **E)** 25 km.

25. $\dfrac{0{,}2}{0{,}04} =$

A) $\frac{1}{2}$; **B)** 0,2; **C)** 5; **D)** -2; **E)** 0,8.

26. En la siguiente torre de números, situamos en cada piedra la diferencia positiva de los números que hay en las piedras en que se apoya. El número de la piedra superior es:



A) 0; **B)** 1; **C)** 2; **D)** 3; **E)** 4.

27. El siguiente número de la serie 5, 6, 8, 11, ... es:

A) 10; **B)** 12; **C)** 14; **D)** 15; **E)** 19.

28. Lo que le falta al número 4,356 para llegar al número 7 es:

A) mayor que 3; **B)** menor que 2,5; **C)** un número entero; **D)** 3,356;
E) un número comprendido entre 2,6 y 2,7.

29. Un pescado pesa 9 kg.; la cola pesa la mitad que la cabeza y la cabeza 4 kg. menos que el cuerpo. ¿Cuánto pesa el cuerpo?

A) 5 kg; **B)** 6 kg; **C)** 6,5 kg; **D)** 7 kg; **E)** no se puede saber.

30. En qué cifra terminará el número 3^{11}

A) 1; **B)** 3; **C)** 6; **D)** 7; **E)** 9.

31 Para enviar mensajes secretos utilizamos la siguiente clave: la primera letra de una palabra la sustituimos por la que la sigue en el abecedario; la segunda se sustituye por la que tiene delante en el abecedario y así sucesivamente vamos sustituyendo las letras que ocupan lugar impar, por la siguiente en el abecedario y las que ocupan el lugar par, por la anterior. ¿Cómo se enviaría de manera secreta la palabra SUERTE?

A) TVFSUF; **B)** USREET; **C)** ETREUS; **D)** TTFQUD; **E)** RVDSSF.

32. Un balón lo puedo guardar en una caja cúbica de 30 cm de arista. Si tenemos un cajón en forma de cubo, con 90 cm de arista, ¿cuántos balones, metidos en sus cajas, cabrán dentro?

A) 27; **B)** 9; **C)** 18; **D)** 3; **E)** 12.

33. Ana y Carlos realizan el siguiente juego: Ana escribe un número de 3 cifras y se lo entrega a Carlos; éste halla los cuadrados de todas las cifras, los suma y el resultado obtenido se lo devuelve a Ana. Nuevamente Ana hallará los cuadrados de las cifras del número que le entregó Carlos, los sumará y el resultado se lo entregará a Carlos y así sucesivamente. Si empezó el juego Ana escribiendo el 725 ¿cuál será el siguiente número que tendrá que devolver Ana a Carlos?

A) 527; **B)** 113; **C)** 78; **D)** 28; **E)** ninguno de ellos.

34. El área de un cuadrado es 64 centímetros cuadrados. ¿Cuánto mide su perímetro?

A) 16 cm; **B)** 8 cm; **C)** 64 cm; **D)** 32 cm; **E)** 128 cm.

35. En un cierto año, que recuerdo era bisiesto, el 13 de febrero fue lunes. ¿Qué día de la semana fue el 13 de mayo?

A) lunes; **B)** martes; **C)** miércoles; **D)** jueves; **E)** sábado.

36. Mi reloj se atrasa 20 segundos cada hora. Ahora mismo lo he puesto en punto. ¿Dentro de cuánto tiempo llevará media hora de retraso?

A) 2 días; **B)** 3 días y 18 horas; **C)** 60 horas; **D)** 75 horas y 30 minutos; **E)** 4800 minutos.

37. ¿Qué número tengo que poner en el lugar de la N para que se cumpla $3 \times N + 1 = 73$?

A) 12; **B)** 72; **C)** 36; **D)** 7; **E)** 24.

38. Tenemos 8 niños formando dos hileras de cuatro, una enfrente de la otra. Andrés está al lado de Borja, Luis enfrente de Claudio, Enrique al lado de Paco, Daniel al lado de Andrés, Paco enfrente de Daniel y al lado de Luis, Manuel al lado de Enrique, entonces:

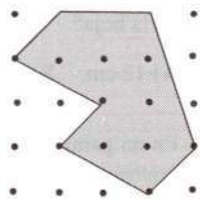
A) Claudio está al lado de Paco;
B) Luis está enfrente de Andrés;
C) Enrique está enfrente de Borja;
D) Claudio está al lado de Daniel;
E) Manuel está al lado de Luis.

39. Si la suma de todos los números naturales desde el 33 hasta el 78 es 2553 ¿cuánto será la suma de todos los números desde el 34 hasta el 79?

A) 2553; **B)** 2599; **C)** 2554; **D)** 2555; **E)** 2631.

40. ¿Cuál es el área de la figura sombreada?

A) 9,5; **B)** 8; **C)** 7,5; **D)** 9; **E)** 6,5.



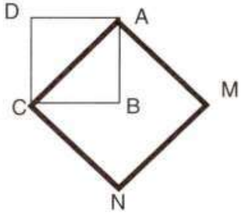
41. Mi mamá ha dejado un frutero con cerezas en la cocina. Entra mi amiga Ana, se come una y se lleva la mitad de las que quedan. Después entra mi hermano Luis, se come otra y se guarda la mitad de las que quedan. A continuación Antonio entra y hace lo mismo. Cuando entro yo, me encuentro que sólo quedan 5 cerezas. ¿Cuántas había en el frutero?

A) 41; **B)** 43; **C)** 45; **D)** 47; **E)** 49.

42. ¿Qué número hay que poner en el cuadrito? $5 + 3 \times 4 - 7 \times 2 - \square = 1$

A) 2; **B)** 49; **C)** 19; **D)** 17; **E)** ninguno de ellos.

43. El lado del cuadrado *ABCD* mide 1 cm. ¿Cuál es el área del cuadrado *AMNC*?



A) 1 cm^2; **B)** 1,5 cm^2; **C)** 2 cm^2; **D)** 2,5 cm^2; **E)** 3 cm^2.

44. En mi clase hemos hecho una carrera de relevos por equipos de cuatro, recorriendo un kilómetro cada uno. En mi equipo hemos tardado: Luis 4 minutos y 12 segundos, Antonio 3 minutos 58 segundos, Carlos 4 minutos y 23 segundos y yo 4 minutos 7 segundos. Los ganadores tardaron 15 segundos menos que nosotros. ¿Cuánto tardaron los ganadores?

A) 16 minutos 25 segundos; **B)** 16 minutos 55 segundos; **C)** 17 minutos 28 segundos;
D) 15 minutos 45 segundos; **E)** 16 minutos 48 segundos.

45. Una hoja de papel de forma rectangular y 56 cm de perímetro, se corta a lo largo en tres tiras y cada tira se divide en cuatro partes, resultando 12 cuadrados iguales. ¿Cuál era la longitud de la hoja?

A) 12 cm; **B)** 15 cm; **C)** 16 cm; **D)** 18 cm; **E)** 20 cm.

46. En un garaje hay 26 vehículos entre motos y coches y un total de 82 ruedas. El número de motos es:

A) 11; **B)** 15; **C)** 16; **D)** 18; **E)** 20.

47. El hermano de Sofía, Pablo, tiene un hermano más que hermanas, ¿cuántos hermanos más que hermanas tiene Sofía?

A) los mismos; **B)** 1; **C)** 2; **D)** 3; **E)** 4.

48. Un poliedro tiene 8 caras, 6 vértices y ¿cuántas aristas?

A) 6; **B)** 8; **C)** 10; **D)** 12; **E)** 14.

49. En la última evaluación, Luis ha hecho dos controles, obteniendo un 6 en el primero y un 5 en el segundo. ¿Qué calificación deberá obtener en el tercero para que la nota media de la evaluación sea de 7 puntos?

A) 7; **B)** 8; **C)** 9; **D)** 10; **E)** ya no podrá conseguirlo.

50. En mi colegio hay 600 alumnos entre infantil, primaria y secundaria. Una quinta parte de ellos son de infantil, un tercio de primaria. y tres décimos del primer ciclo de secundaria. ¿Cuántos alumnos hay del segundo ciclo de secundaria?

A) 100; **B)** 120; **C)** 150; **D)** 180; **E)** 200.

1. ¿Cuál es, de entre los siguientes, el valor más próximo a 601: 0,305?

A) 2; **B)** 20; **C)** 200; **D)** 2000; **E)** 20000.

2. En un viaje de 20000 km, utilizamos igualmente las cinco ruedas (las cuatro más la de repuesto). ¿Cuántos km hizo cada una?

A) 4000; **B)** 5000; **C)** 16000; **D)** 20000; **E)** 100000.

3. Un voltímetro marca entre 0 y 20 voltios. Si el valor medio de 3 lecturas ha sido 16 voltios, la lectura más pequeña posible podría haber sido de:

A) 8 voltios; **B)** 9 voltios; **C)** 6 voltios; **D)** 11 voltios; **E)** 10 voltios.

4. Si la suma de tres enteros consecutivos es 27, el más pequeño de los tres es el:
A) 11; **B)** 9; **C)** 8; **D)** 7; **E)** 5.

5. ¿Cuánto vale $\frac{1}{96} + \frac{97 \cdot 95}{96} - 97$?

A) $\frac{1}{96}$; **B)** 0; **C)** $-\frac{1}{96}$; **D)** 1; **E)** -1.

6. $0{,}2^2$ es igual a:

A) 0,04; **B)** 0,4; **C)** 2; **D)** 0,02; **E)** 0,004.

7. $2 \cdot (8 - 3) =$

A) 13; **B)** 24; **C)** 3; **D)** 5; **E)** 10.

8. $2 + 3\,(8 - 4) =$

A) 20; **B)** 22; **C)** 36; **D)** 9; **E)** 14.

9. La raíz cuadrada de $15 \cdot 20 \cdot 12$ es igual a:

A) 6000; **B)** 60; **C)** 6; **D)** 80; **E)** Nada de lo anterior.

10. De los siguientes números, ¿cuál es el que mejor se aproxima a la raíz cuadrada positiva de $\frac{1999}{10000}$?

A) 0,0045; **B)** 0,0141; **C)** 0,0445; **D)** 0,1408; **E)** 0,4453.

11. Si sustituimos las cuatro letras que aparecen en la suma *BAD* + *MAD* + *DAM* (letras diferentes, números diferentes) por los números 1, 9, 8 y 3, ¿cuál es la mayor suma que podemos obtener?

A) 1916; **B)** 2045; **C)** 2056; **D)** 2065; **E)** 2049.

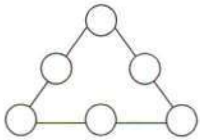
12. ¿Cuántos números enteros entre 100 y 400 tienen algún 2?

A) 100; **B)** 120; **C)** 138; **D)** 140; **E)** 148.

13. En un determinado año, el mes de Enero tuvo exactamente cuatro martes y cuatro sábados. ¿En qué cayó el 1 de Enero de ese año?

A) Lunes; **B)** Martes; **C)** Miércoles; **D)** Viernes; **E)** Sábado.

14. En el triángulo mágico de la figura, cada uno de los círculos está ocupado por uno de los 6 enteros del 10 al 15, de forma que la suma *S* de los números de cada lado es la misma. ¿Cuál es el mayor valor posible de *S*?



A) 36; **B)** 37; **C)** 38; **D)** 39; **E)** 40.

15. De los siguientes conjuntos de números, ¿en cuál es mayor la media aritmética?

A) Múltiplos de 2 entre 1 y 101; **B)** Múltiplos de 3 entre 1 y 101;
C) Múltiplos de 4 entre 1 y 101; **D)** Múltiplos de 5 entre 1 y 101;
E) Múltiplos de 6 entre 1 y 101.

16. Si $200 \le a \le 400$ y $600 \le b \le 1200$, ¿cuál es el mayor cociente posible entre *b* y *a*?

A) $\frac{3}{2}$; **B)** 3; **C)** 6; **D)** 200; **E)** 1200.

17. El menor número que se puede obtener multiplicando dos números del conjunto $\{-7, -5, -1, 1, 3\}$ es:

A) -35; **B)** -21; **C)** -15; **D)** -1; **E)** 3.

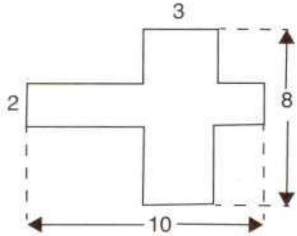
18. Si el cumpleaños de Cristina cae en Jueves, ¿qué día de la semana será 60 días después de su cumpleaños?

A) Lunes; **B)** Miércoles; **C)** Jueves; **D)** Viernes; **E)** Sábado.

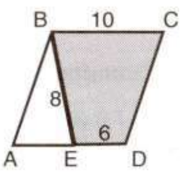
19. Alrededor de un patio circular de 12 m de radio, quiero colocar macetas separadas 1 m unas de otras, ¿cuántas macetas me harían falta aproximadamente?

A) 12; **B)** 38; **C)** 48; **D)** 75; **E)** 450.

20. ¿Cuánto vale el área ocupada por los rectángulos de la figura?



A) 23; **B)** 38; **C)** 44; **D)** 46; **E)** No se puede determinar con la información dada.

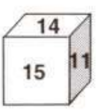


21.¿Cuál es el área de la región sombreada *BEDC* sabiendo que *ABCD* es un paralelogramo?

A) 24; **B)** 48; **C)** 60; **D)** 64; **E)** 80.

22. Juan tiene una bolsa con 128 manzanas. Le vende el 25% a Pedro y el 25% de las que quedan a Alicia. Si se come la más grande de las que le quedan ¿cuántas tiene ahora?

A) 7; **B)** 63; **C)** 65; **D)** 71; **E)** 111.



23. En cada una de las caras de un cubo hay números enteros consecutivos, de manera que la suma de los números de cada uno de los tres pares de caras opuestas es la misma. ¿cuál es la suma de los 6 números de las caras de este cubo?

A) 75; **B)** 76; **C)** 78; **D)** 80; **E)** 81.

24. En una fila de una sala de cine hay 120 asientos. ¿Cuántos debemos ocupar como poco para que la persona que venga luego a sentarse tenga que colocarse obligatoriamente al lado de uno de nosotros?

A) 30; **B)** 40; **C)** 41; **D)** 60; **E)** 119.

25. ¿En cuántos ceros acaba el producto $25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$?

A) 3; **B)** 6; **C)** 9; **D)** 10; **E)** 12.

26. Si la media aritmética de 10 enteros positivos diferentes es 10, ¿cuál es el mayor valor posible que puede tomar alguno de ellos?

A) 10; **B)** 50; **C)** 55; **D)** 90; **E)** 91.

27. En la suma que ves, cada cifra ha sido reemplazada por una letra. Si cifras distintas representan letras distintas, el valor de la letra *C es:*

$$\begin{array}{r} \mathbf{ABC} \\ \mathbf{AB} \\ +\quad \mathbf{A} \\ \hline 300 \end{array}$$

A) 1; **B)** 3; **C)** 5; **D)** 7; **E)** 9.

28. La suma de las tres cifras de 998 es $9 + 9 + 8 = 26$. ¿Cuántos números de 3 cifras, cuya suma es 26, son pares?

A) 1; **B)** 2; **C)** 3; **D)** 4; **E)** 5.

29. Llenamos con números los nueve cuadraditos de la figura, de manera que en cada fila y en cada columna aparecen el 1, 2, 3. ¿Cuánto vale $A + B$?

1		
	2	*A*
		B

A) 2; **B)** 3; **C)** 4; **D)** 5; **E)** 6.

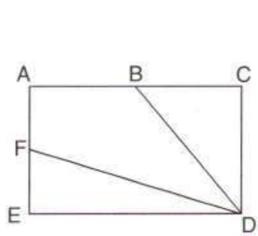
30. Si la media aritmética de cuatro números es 85 y el mayor vale 97, ¿cuánto es la media aritmética de los tres restantes?

A) 81; **B)** 82,7; **C)** 83; **D)** 84; **E)** 84,3.

31. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3}}} =$

A) $\frac{1}{6}$; **B)** $\frac{3}{10}$; **C)** $\frac{7}{10}$; **D)** $\frac{5}{6}$; **E)** $\frac{10}{3}$.

32. En el rectángulo de la figura, $AC = 32$, $AE = 20$ y B y F son los puntos medios de AC y AE respectivamente. ¿Cuál es el área del cuadrilátero $ABDF$?



A) 320; **B)** 325; **C)** 330; **D)** 335; **E)** 340.

33. Paco, Quique, Raúl, Sonia y Tomás echan una carrera en la que Paco ganó a Quique, Paco ganó a Raúl, Quique ganó a Sonia y Tomás quedó detrás de Paco pero delante de Quique. ¿Quién no pudo quedar tercero en esta carrera?

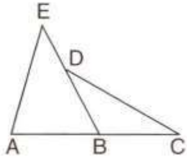
A) Ni Paco ni Quique; **B)** Ni Paco ni Raúl; **C)** Ni Paco ni Sonia;
D) Ni Paco ni Tomás; **E)** Ni Paco, ni Sonia, ni Tomás.

34. Mamá tiene que trabajar cada día 8 horas sin incluir los 45 minutos que utiliza para comer. Si empieza a trabajar a las 7:25 de la mañana y come a mediodía, ¿a qué hora deja de trabajar?

A) 3:40 de la tarde; **B)** 3:55 de la tarde; **C)** 4:10 de la tarde;
D) 4:25 de la tarde; **E)** 4:40 de la tarde.

35. La cifra de las unidades del producto de cualesquiera seis enteros consecutivos es

A) 0; **B)** 2; **C)** 4; **D)** 6; **E)** 8.



36. Si el ángulo A es de 60º, el ángulo E de 40º y el C de 30º, ¿cuánto vale el ángulo BDC?

A) 40º; **B)** 50º; **C)** 60º; **D)** 70º; **E)** 80º.

37. ¿Para cuántos enteros N ($N > 0$) es $\dfrac{36}{N+2}$ un número entero?

A) 7; **B)** 8; **C)** 9; **D)** 10; **E)** 12.

38. Si el perímetro de un cuadrado es el triple del perímetro de otro, ¿cuántas veces es mayor el área del grande que la del pequeño?

A) 2; **B)** 3; **C)** 4; **D)** 6; **E)** 9.

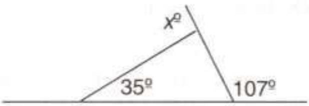
39. Una bolsa contiene 9 bolas rojas, 7 blancas y 8 azules. El menor número de bolas que debemos sacar para estar seguros de que tenemos cuatro del mismo color es:

A) 8; **B)** 9; **C)** 10; **D)** 12; **E)** 18.

40. ¿Cuál es la suma de las cifras del resultado de multiplicar un número de 94 nueves por uno de 94 cuatros?

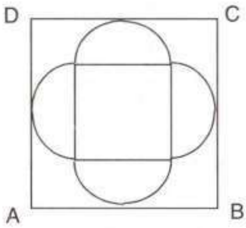
A) 846; **B)** 855; **C)** 945; **D)** 954; **E)** 1072.

41. ¿Cuál es el valor del ángulo x?



A) 142; **B)** 72; **C)** 107; **D)** 108; **E)** 145.

42. Sobre cada lado de un cuadrado de 4 cm de lado construimos cuatro semicírculos (como se muestra en la figura) con cada uno de los lados como diámetro. A continuación, construimos otro cuadrado *ABCD* con los lados paralelos al original y de forma que cada uno de sus lados es tangente a una de las semicircunferencias.
¿Cuál es el área del cuadrado *ABCD*?

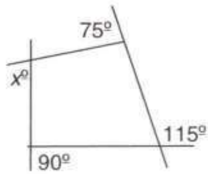


A) 16; **B)** 32; **C)** 36; **D)** 48; **E)** 64.

43. Si los ángulos de un triángulo están en proporción $2:3:4$, ¿cuánto vale el mayor?

A) 40º; **B)** 80º; **C)** 45º; **D)** 90º; **E)** 72º.

44. Prolongamos los ángulos de un cuadrilátero como se indica en la figura ¿cuál es el valor del ángulo x?

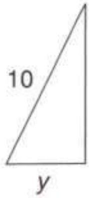


A) 100; **B)** 90; **C)** 80; **D)** 75; **E)** 70.

45. Si un rectángulo mide 150 cm de largo y 50 cm de ancho, su área, en m^2 es:

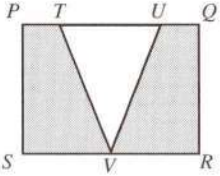
A) 7500; **B)** 75; **C)** 7,5; **D)** 0,75; **E)** 750.

46. El triángulo rectángulo de la figura tiene un cateto de doble longitud que el otro. ¿Cuál es su área?



A) 40; **B)** 50; **C)** $\frac{50}{9}$; **D)** $\frac{100}{3}$; **E)** 20.

47. *PQRS* es un rectángulo en el que $PQ = 12$ cm y $QR = 8$ cm. Si V es el punto medio de RS y T y U son puntos en PQ tales que $PT = UQ = 2$ cm, ¿cuál es el área, en cm^2, de la región sombreada?



A) 69; **B)** 64; **C)** 65; **D)** 63; **E)** 62.

48. Una cuerda de 10 cm de longitud en un círculo de 26 cm de diámetro, ¿cuánto dista del centro del círculo?

A) 13; **B)** 12; **C)** 10; **D)** 24; **E)** 5.

49. Las ruedas de un coche que va a 60 km/hora dan 4 vueltas por segundo. ¿Cuál es el diámetro, en metros, de dichas ruedas?

A) $\frac{25}{12\pi}$; **B)** $\frac{6\pi}{25}$; **C)** $\frac{25\pi}{6}$; **D)** $\frac{100}{6\pi}$; **E)** $\frac{25}{6\pi}$.

50. ¿Cuántos cubos de 2 cm de lado caben en una caja en forma de prisma de 6 cm de largo, 4 cm de ancho y 2 cm de alto?

A) 24; **B)** 12; **C)** 6; **D)** 8; **E)** 48.

1. De los siguientes números, ¿cuál es el que mejor aproxima la raíz cuadrada positiva de $\frac{1999}{10000}$?

   A) 0,0045; **B)** 0,0141; **C)** 0,0445; **D)** 0,1408; **E)** 0,4453.

2. La velocidad media alcanzada por un coche durante los 20 primeros kilómetros de un recorrido fue de 50 km/h y durante los últimos 20 kilómetros fue de 60 km/h. ¿Qué velocidad media, expresada en km/h, alcanzó durante los 40 km de recorrido?

   A) 55; **B)** 54; **C)** $\left(54+\frac{6}{11}\right)$; **D)** $\left(55+\frac{5}{11}\right)$; **E)** $\left(55+\frac{6}{11}\right)$.

3. Si la suma de n enteros consecutivos nos da 105, es que n no puede ser:

   A) 3; **B)** 15; **C)** 5; **D)** 6; **E)** 7.

4. Dividimos una tableta de chocolate entre 3 chicos de forma que al primero le damos $\frac{2}{5}$ de la tableta y al segundo $\frac{1}{3}$. ¿Qué cantidad queda para el tercero?

   A) $\frac{11}{15}$; **B)** $\frac{3}{8}$; **C)** $\frac{4}{15}$; **D)** $\frac{5}{8}$; **E)** Nada.

5. Si $a=2$ y $b=-3$, $\frac{a-2b}{a+b}$ es igual a:

   A) 8; **B)** -6; **C)** -8; **D)** $-\frac{1}{8}$; **E)** $-\frac{1}{6}$.

6. $0{,}3^3-0{,}2^2$ es igual a:

   A) 0,5; **B)** 0,23; **C)** $-0{,}13$; **D)** $-0{,}013$; **E)** 0,05.

7. ¿De cuántas formas puede descomponerse el número 24 como suma de dos primos?

   A) Ninguna; **B)** 1; **C)** 2; **D)** 3; **E)** 4.

8. ¿Cuál es el resto de la división de $3^{1981}+2$ entre 11?

   A) 5; **B)** 0; **C)** 7; **D)** 6; **E)** 3.

9. Si $|x-1| = 2x$, x debe ser igual a:

A) -1; **B)** 1; **C)** 3; **D)** -1 ó $\frac{1}{3}$; **E)** $\frac{1}{3}$.

10. $5x - 2(4 - x)$ es igual a:

A) $7x - 8$; **B)** $3x - 8$; **C)** $7x - 6$; **D)** $3x - 6$; **E)** $4x - 8$.

11. $\frac{x}{3} - \frac{y-2}{6}$ es igual a:

A) $2x - y + 2$; **B)** $2x - y - 2$; **C)** $\frac{2x-y+2}{6}$; **D)** $\frac{2x-y-2}{6}$; **E)** Nada de lo anterior.

12. El menor entero positivo que da de resto 1, 1 y 5 respectivamente al dividirlo por 3, 5 y 7 es:

A) 61; **B)** 51; **C)** 46; **D)** 71; **E)** Nada de lo anterior.

13. Si $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, z es

A) $\frac{xy}{x-y}$; **B)** $\frac{x-y}{xy}$; **C)** $x-y$; **D)** $\frac{xy}{y-x}$; **E)** $\frac{y-x}{xy}$.

14. Si $y = \frac{x+2}{x-3}$, x es

A) $\frac{3y-2}{y+1}$; **B)** $\frac{3y+2}{y-1}$; **C)** $\frac{2-3y}{1+y}$; **D)** $\frac{y+2}{y-3}$; **E)** $\frac{y-2}{y+3}$.

15. Si $8r^3 = 1$, el valor de r es:

A) 2; **B)** $\frac{1}{2n}$; **C)** $\frac{1}{8}$; **D)** $-\frac{1}{2}$; **E)** $\frac{1}{2}$.

16. Si $ab = 12$, $bc = 20$ y $ac = 15$ y a es positivo, abc es igual a:

A) 360; **B)** 3600; **C)** 60; **D)** 36; **E)** 600.

17. ¿Cuál es la última cifra de $(7^5)^3$?

A) 1; **B)** 3; **C)** 7; **D)** 9; **E)** 2.

18. Si $a^{2b} = 5$, entonces $2a^{6b} - 4$ es igual a:

A) 26; **B)** 246; **C)** 242; **D)** $12\sqrt{5} - 4$; **E)** 8.

19. Si $f(n) = (n-1)f(n-1)$ para $n > 1$ y $f(1) = 1$, $f(4)$ es ... :

A) 1; **B)** $\frac{1}{6}$; **C)** $\frac{1}{24}$; **D)** 24; **E)** 6.

20. Si $x > 5$, ¿qué número de los siguientes es el más pequeño?

A) $\frac{5}{x}$; **B)** $\frac{5}{x+1}$; **C)** $\frac{5}{x-1}$; **D)** $\frac{x}{5}$; **E)** $\frac{x+1}{5}$.

21. Para cada par de números a y b definimos $a * b$ como $a * b = ab - a + b$. ¿Cuál es la solución de $5 * x = 17$?

A) $\frac{17}{5}$; **B)** 2; **C)** -2; **D)** 3; **E)** $\frac{11}{3}$.

22. Si la recta $y = 3x - 6$ pasa por el punto $(a, 2)$, el valor de a es

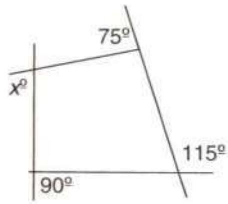
A) 2; **B)** 0; **C)** $\frac{8}{3}$; **D)** 8; **E)** -2.

23. Si $(4, 2)$ es el punto medio del segmento de extremos $(x, 4)$ y $(3, y)$, $x + y$ es igual a:

A) 5; **B)** 6; **C)** 7; **D)** -7; **E)** 0.

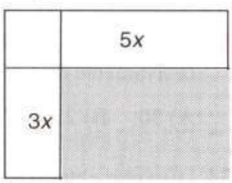
24. Si prolongamos los lados de un cuadrilátero obteniendo los ángulos que se señalan en el dibujo, ¿cuál sería el valor del ángulo x?

A) 100; **B)** 90; **C)** 80; **D)** 75; **E)** 70.



25. El rectángulo $PQRS$ de la figura está dividido, como se indica, en un cuadrado y tres rectángulos. Si el área del cuadrado es x^2 cm^2 y la de los rectángulos que se indican $5x$ y $3x$ cm^2, ¿cuál es el área, en cm^2, del rectángulo sombreado?

A) 15; **B)** $5x^2$; **C)** $8x^2$; **D)** $15x$; **E)** $8x$.



26 ¿Cuál es el área en cm^2, de un círculo de p cm de circunferencia?

A) $\frac{p^2}{4\pi}$; **B)** $\frac{p^2}{4}$; **C)** πp^2; **D)** $2\pi p$; **E)** $\frac{2\pi}{p}$.

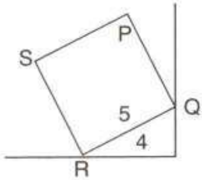
27. Un satélite describe una órbita circular alrededor de la Tierra de 60000 km de longitud. Si el radio de la órbita aumentara 1 km, ¿en cuánto aumentaría la longitud de la misma?

A) 2π km; **B)** 1000 km; **C)** 60000 km; **D)** $2\pi \cdot 60000$ km; **E)** No variaría.

28. En una caja en forma de paralelepípedo de $3 \times 4 \times 12$ cm, ¿cuál es la longitud, en cm, de la varilla más larga que cabe?

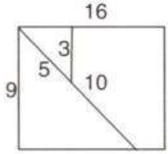
A) 1; **B)** $\sqrt{19}$; **C)** 13; **D)** 12; **E)** $\sqrt{160}$.

29. En el cuadrado de la figura, ¿cuál es la distancia del punto P a la horizontal?



A) $\sqrt{50}$; **B)** 7; **C)** 8; **D)** $3 + \sqrt{5}$; **E)** 6.

30. Cortamos el rectángulo de la figura, de 16×9, en los trozos que se muestran y reordenamos las piezas formando un cuadrado. ¿Cuál es el perímetro de este cuadrado?



A) 32; **B)** 36; **C)** 40; **D)** 48; **E)** 50.

31. ¿Cuántas cifras tiene el número $25^{16} + 2^{38}$?

A) 16; **B)** 27; **C)** 34; **D)** 38; **E)** 54.

32. ¿Cuántos pares de enteros positivos hay tales que la diferencia de sus cuadrados es 400?

A) 1; **B)** 2; **C)** 3; **D)** 4; **E)** Nada de lo anterior.

33. Señalamos en una circunferencia 30 puntos uniformemente espaciados, que numeramos sucesivamente de 1 a 30. ¿Cuál es el punto diametralmente opuesto al señalado con un 7?

A) 20; **B)** 21; **C)** 22; **D)** 23; **E)** 24.

34. ¿Cuántos enteros positivos, menores que 500, no son divisibles ni por 2 ni por 3?

A) 168; **B)** 167; **C)** 166; **D)** 165; **E)** 83.

35. Al dividir m entre 5 me da resto 2 y al dividir n entre 5 me da resto 4. ¿Cuál es el resto de la división $m + n$ entre 5?

A) 2; **B)** 4; **C)** 3; **D)** 6; **E)** 1.

36. Un punto reticular es un punto del plano con coordenadas enteras. ¿Cuántos puntos reticulares hay, en el primer cuadrante, en la recta $3x + 4y = 59$?

A) 2; **B)** 3; **C)** 4; **D)** 5; **E)** Infinitos.

37. Hay enteros positivos que tienen estas propiedades:

I: la suma de los cuadrados de sus cifras es 50 y

II: cada cifra es mayor que la que está a su izquierda.

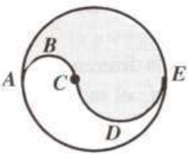
¿Cuál es el producto de las cifras del mayor entero con estas dos propiedades?

A) 7; **B)** 25; **C)** 36; **D)** 48; **E)** 60.

38. Si el punto C divide al diámetro ACE en la razón 2:3, ¿cuál es el cociente entre el área de la región sombreada y la sin sombrear?

(ABC y CDE son semicircunferencias)

A) 2:3; **B)** 1:9; **C)** 3:2; **D)** 9:4; **E)** 5:2.



39. Si multiplicamos todos los números pares del 2 al 98 ambos inclusive, excepto los que acaban en 0, ¿cuál es la cifra de las unidades del producto?

A) 0; **B)** 2; **C)** 4; **D)** 6; **E)** 8.

40. Si a es un 50% mayor que c y b un 25% mayor que c, ¿qué porcentaje es a mayor que b?

A) 20%; **B)** 25%; **C)** 50%; **D)** 100%; **E)** 200%.

41. Considera la sucesión de números 1, −2, 3, −4, 5, −6, ... ¿Cuál es la media aritmética de los 200 primeros términos de esta sucesión?

A) − 1; **B)** − 0,5; **C)** 0; **D)** 0,5; **E)** 1.

42. La suma de siete enteros es −1. ¿Cuántos puede haber, como mucho, mayores que 13?

A) 1; **B)** 4; **C)** 5; **D)** 6; **E)** 7.

43. X e Y son dos números de 3 cifras cada uno, las de X son 1, 2 y 3 y las de Y, 4, 5 y 6. Se sabe que $X+Y$ es par y que la cifra del medio de X es el 2. ¿Cuál es la cifra de las unidades del producto $X \cdot Y$?

A) No se puede determinar con esos datos; **B)** 2; **C)** 6; **D)** 5; **E)** 4.

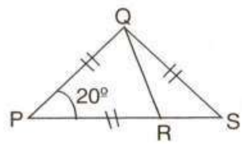
44. El número de oro, ϕ, satisface la ecuación $\phi^2 = \phi + 1$. ¿Cuánto vale ϕ^5?

A) $3\phi + 1$; **B)** $4\phi + 2$; **C)** $5\phi + 3$; **D)** $6\phi + 4$; **E)** $7\phi + 5$.

45. ¿Cuál es la cifra de las unidades de la suma siguiente?
$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! + ... + 2000! + 2001! + 2002!$ (Recuerda: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$)
A) 1; **B)** 3; **C)** 5; **D)** 7; **E)** 9.

46. Si $PQ = PR = QS$ y el ángulo P es 20º, ¿cuánto vale el ángulo RQS?

A) 20; **B)** 40; **C)** 60; **D)** 80; **E)** 100.



47. Si la diferencia entre los cuadrados de dos enteros consecutivos es d, el mayor puede escribirse en la forma

A) $d+1$; **B)** $\frac{d+1}{2}$; **C)** $d^2 + 1$; **D)** $d^2 - 1$; **E)** No se puede determinar con esos datos

48. En un conjunto de 5 números, la media de los tres primeros es 15 y la de los dos últimos, 10. ¿Cuál es la media de los 5 números?

A) 5; **B)** 8; **C)** 12,5; **D)** 13; **E)** 25.

49. ¿Cuál es la mayor potencia de 2 que divide a un millón?

A) 2^3; **B)** 2^4; **C)** 2^5; **D)** 2^6; **E)** 2^8.

50. Si x es un número positivo tal que $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 7$, $x^3 + \frac{1}{x^3}$, es igual a:

A) $4\sqrt{7}$; **B)** $7\sqrt{7}$; **C)** $5\sqrt{7}$; **D)** $6\sqrt{7}$; **E)** $10\sqrt{7}$.

1. La gráfica de $y = 10(x+1)(x-3)$ corta al eje x en dos puntos, P y Q. ¿Cuál es la longitud del segmento PQ?

A) 20; **B)** 2; **C)** 40; **D)** 4; **E)** $\frac{2}{5}$.

2. Si $f(x) = x^2 - 7x + k$ y $f(k) = -9$, $f(-1)$ es igual a:

A) –9; **B)** –3; **C)** 3; **D)** 5; **E)** 11.

3. ¿Cuál es la distancia más corta entre dos puntos, uno de la parábola $y = 4x^2 + 2$ y otro de la $y = -3x^2 - 4$?

A) 1; **B)** 2; **C)** 6; **D)** 7; **E)** 13.

4. El valor mínimo de la función $f(x) = 2^{x^2 - 2x}$ es:

A) $\frac{1}{2}$; **B)** –1; **C)** 2; **D)** 0; **E)** 1.

5. Si m y n son las raíces de la ecuación $7x^2 + 9x + 21 = 0$, el valor de $(m+7)(n+7)$ es:

A) 37; **B)** 52; **C)** 61; **D)** 55; **E)** 43.

6. Si la ecuación $(1-3k)x^2 + 3x + 4 = 0$ tiene raíces reales, ¿cuál es el mayor valor entero que puede tomar k?

A) –2; **B)** –1; **C)** 0; **D)** 1; **E)** 2.

7. ¿Cuánto vale $200 - 199 + 198 - 197 + 196 - ... + 2 - 1$?

A) 99; **B)** 200; **C)** 100; **D)** 101; **E)** 1.

8. Si la suma de los n primeros términos de una sucesión es $n(n+1)(n+2)$, ¿cuál es el décimo término?

A) 114; **B)** 330; **C)** 396; **D)** 600; **E)** 1320.

9. Representando por t_n el n-ésimo término de una progresión aritmética, resulta que $t_p = q^2$ y $t_q = p^2$. ¿Cuál es la diferencia de dicha progresión?

A) $-p-q$; **B)** $q-p$; **C)** $p+q$; **D)** $p-q$; **E)** $\frac{p+q}{2}$.

10. El menor entero positivo x para el que la suma $x + 2x + 3x + ... + 100x$ es un cuadrado perfecto es

A) 100; **B)** 101; **C)** 202; **D)** 5050; **E)** Nada de lo anterior.

11. Añadiendo el mismo número a 60, 100 y 150, obtenemos tres números en progresión geométrica. ¿Cuál es la razón de esta progresión?

A) 2; **B)** 1; **C)** $\frac{5}{4}$; **D)** 100; **E)** Nada de lo anterior.

12. En una progresión geométrica de números positivos, resulta que cada término es la suma de los dos siguientes. ¿Cuál es la razón de dicha progresión?

A) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; **B)** $\frac{\sqrt{5}}{2}$; **C)** 1; **D)** $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; **E)** $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

13. Si el polinomio $2x^3 - 9x^2 + 13x + k$ es divisible por $x - 2$, también es divisible por:

A) $x + 2$; **B)** $x - 1$; **C)** $x + 1$; **D)** $2x - 1$; **E)** $2x + 1$.

14. Si m, n y 1 son raíces de la ecuación $x^3 - mx^2 + nx - 1$, la suma de las raíces de dicha ecuación es:

A) -1; **B)** 0; **C)** 1; **D)** 2; **E)** 3.

15. Si a, b y c son las raíces de la ecuación $x^3 - 3x^2 + mx + 24 = 0$ y $-a$ y $-b$ son las raíces de la $x^2 + nx - 6 = 0$, n es igual a:

A) 1; **B)** -1; **C)** 7; **D)** -7; **E)** Nada de lo anterior.

16. Si el área de un sector de un círculo de radio 5 cm es 10 cm^2, el ángulo del sector, expresado en radianes es:

A) $\frac{\pi}{2}$; **B)** 1; **C)** $\frac{\pi}{3}$; **D)** $\frac{4}{5}$; **E)** Nada de lo anterior.

17. Si $\operatorname{tg} x = 1{,}5$ y $0° \le x \le 90°$, entonces

A) $0° \le x < 30°$; **B)** $30° \le x < 45°$; **C)** $45° \le x < 60°$; **D)** $60° \le x < 75°$; **E)** $75° \le x < 90°$.

18. Las agujas de las horas y de los minutos de un reloj miden, respectivamente, 4 y 6 cm. ¿Cuál es la distancia entre las puntas de las agujas a las dos?

A) $\sqrt{52 - 24\sqrt{3}}$; **B)** $2\sqrt{7}$; **C)** $2\sqrt{5}$; **D)** $2\sqrt{3}$; **E)** $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$

19. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $x = 10\cos x$?

A) 3; **B)** 5; **C)** 6; **D)** 7; **E)** 10.

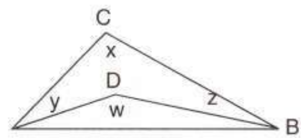
20. Si $\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = 1{,}2$, $\operatorname{sen}^3\alpha + \cos^3\alpha$ es:

A) 1,2; **B)** 0,936; **C)** 0; **D)** 0,432; **E)** 1,728.

21. ¿Qué términos deben quitarse de la suma $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$ para que la suma de los que quedan sea 1?

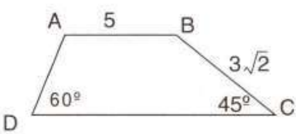
A) $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{8}$; **B)** $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{12}$; **C)** $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{12}$; **D)** $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{10}$; **E)** $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{10}$

22. En el triángulo ABC de la figura, D es un punto interior y x, y, z y w son medidas, en grados, de los ángulos que se señalan. En términos de y, z y w, el valor de x es:



A) $w - y - z$; **B)** $w - 2y - 2z$; **C)** $180 - w - y - z$;
D) $2w - y - z$; **E)** $180 - w + y + z$

23. La figura $ABCD$ es un trapecio con $AB /\!/ DC$, $AB = 5$ $BC = 3\sqrt{2}$, $\angle BCD = 45°$ y $\angle CDA = 60°$. ¿Cuánto mide DC?



A) $7 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$; **B)** 8; **C)** $\frac{19}{2}$; **D)** $8 + \sqrt{3}$;

E) $8 + 3\sqrt{3}$.

24. Sean a, a', b, b' números reales con a y $a' \neq 0$. La solución de $ax + b = 0$ es menor que la solución de $a'x + b' = 0$ si y solo si

A) $a'b < ab'$; **B)** $ab' < a'b$; **C)** $ab < a'b'$; **D)** $\frac{b}{a} < \frac{b'}{a'}$; **E)** $\frac{b'}{a'} < \frac{b}{a}$.

25. La suma del mayor entero menor o igual que x y el menor entero mayor o igual que x es 5. El conjunto de números x que verifican esto es:

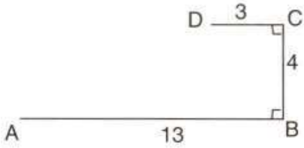
A) $\frac{5}{2}$; **B)** $\{x /\ 2 \le x \le 3\}$; **C)** $\{x /\ 2 \le x < 3\}$; **D)** $\{x /\ 2 < x \le 3\}$; **E)** $\{x /\ 2 < x < 3\}$.

26. El producto $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{9^2}\right)\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$ es igual a:

A) $\frac{5}{12}$; **B)** $\frac{1}{2}$; **C)** $\frac{11}{20}$; **D)** $\frac{2}{3}$; **E)** $\frac{7}{10}$.

27. Si $a-1=b+2=c-3=d+4$, ¿cuál de los cuatro números a, b, c ó d es el mayor?
A) a; **B)** b; **C)** b; **D)** d ; **E)** No hay ninguno que sea siempre el mayor.

28. En la figura adjunta la suma de las distancias AD y BD es



A) Entre 10 y 11; **B)** 12; **C)** Entre 15 y 16;
D) Entre 16 y 17 ; **E)**17.

29. Sea c una constante. El sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} x-y = 2 \\ cx+y = 3 \end{array}\right\}$ tiene solución (x, y) en el primer cuadrante si y solo si

A) $c=-1$; **B)** $c>-1$; **C)** $c<\frac{3}{2}$; **D)** $0<c<\frac{3}{2}$; **E)** $-1<c<\frac{3}{2}$.

30. Alicia, Beatriz y Carlos toman dos tabletas de vitamina C cada día mientras que Dani toma solo una. Así las cosas tenían un tubo todo lleno que les iba a durar 24 días. Si Dani decidió tomar también dos, ¿cuántos días les duraría el tubo?

A) 21; **B)** 22; **C)** 18; **D)** 20; **E)** 16.

31. ¿Cuál es el resto de la división de $3^{1981}+2$ entre 11?
A) 5; **B)** 0; **C)** 7; **D)** 6; **E)** 3.

32. Si sumamos los números de 3 cifras, $6a3$ y $2b5$, el resultado es un número divisible por 9. ¿Cuál es el mayor valor posible para $a+b$?

A) 12; **B)** 9; **C)** 2; **D)** 20; **E)** Nada de lo anterior.

33. Con los dígitos impares, 1, 3, 5, 7 y 9 formamos todos los números posibles de 3 cifras cada uno. La suma de todos ellos es:

A) 69375; **B)** 19375; **C)** 625^3; **D)** 34975; **E)** 33300.

34. Si $|x|=|y|$, $x<0$, $y>0$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

A) $x^2y>0$ **B)** $x+y=0$; **C)** $xy<0$; **D)** $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=0$; **E)** $\frac{x}{y}+1=0$.

35. ¿Para qué valores de x es $|x|+|x-1|=1$?

A) Solamente 0 y 1; **B)** Solamente 0 y -1; **C)** Para todo x;
D) $-1<x\leq 1$; **E)** $0\leq x\leq 1$.

36. La afirmación $|x+1|+2|x-2|<6$ es equivalente a

A) $-1<x<2$; **B)** $0<x<1$; **C)** $-1<x<3$; **D)** $x<2$; **E)** $x<-1$ ó $x>2$.

37. Tras haber tirado una moneda 200 veces, nos han salido 110 caras. ¿Cuántas caras consecutivas debemos obtener a partir de ahora para que al final el número de caras sea exactamente el 70% del número de tiradas?

A) 30; **B)** 300; **C)** 220; **D)** 100; **E)** Nada de lo anterior.

38. Si $(x-3)(2x+1)=0$, los posibles valores de $2x+1$ son:

A) Solamente 0; **B)** 0 y 3; **C)** $-\frac{1}{2}$ y 3; **D)** 0 y 7; **E)** $-\frac{1}{2}$ y $-\frac{7}{2}$.

39. Si $\frac{a+3b}{a-b}=3$, entonces $\frac{a}{b}$ es igual a:

A) 1; **B)** 2; **C)** 3; **D)** 4; **E)** 5.

40. Si $(a-b)^2+6ab=48$, el máximo valor para ab es

A) 0; **B)** 24; **C)** 6; **D)** 8; **E)** Infinito.

41. ¿Cuántas soluciones reales diferentes tiene la ecuación $x^3+x-8=\frac{8}{x^2}$?

A) 0; **B)** 1; **C)** 2; **D)** 3; **E)** 5.

42. Si n es un entero positivo, $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right)$ es igual a:

A) $\frac{1}{n}$; **B)** $\frac{n-1}{n}$; **C)** n; **D)** $\frac{2}{n(n-1)}$; **E)** $\frac{2}{n}$.

43. Si $x-y>x$ y $x+y<y$, entonces

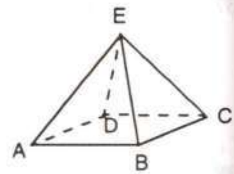
A) $y<x$; **B)** $x<y$; **C)** $x<y<0$; **D)** $x<0$ e $y<0$; **E)** $x<0$ e $y>0$.

44. El coeficiente de x^{99} en el desarrollo de $(x-1)(x-2)\ldots(x-100)$ es:

A) –5050; **B)** –4950; **C)** –99; **D)** –100; **E)** –4851.

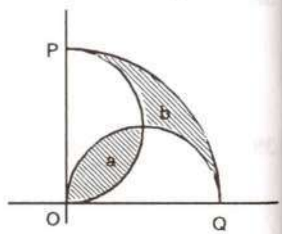
45. Si $x_n^2 - x_{n-1}x_{n+1} = (-2)^n$ para $n \geq 1$ y $x_0 = x_1 = 1$, entonces x_3 es

A) 1; **B)** – 3; **C)** 3; **D)** 5; **E)** 13.



46. La pirámide $ABCDE$ tiene base cuadrada $ABCD$ y aristas AE, BE, CE, DE de igual longitud. Si $AB = 20$ cm y la altura de dicha pirámide es 10 cm la longitud de AE, en cm, es

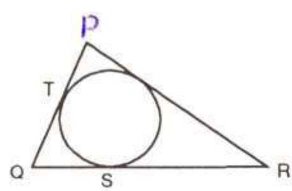
A) $10\sqrt{3}$; **B)** $10\sqrt{2}$; **C)** $10\sqrt{5}$; **D)** 15; **E)** 16,5.



48. En la figura, observas que OPQ es un cuarto de círculo, y sobre OP y OQ hemos dibujado sendas semicircunferencias.

Si llamamos a y b a las áreas sombreadas, ¿cuánto vale $\frac{a}{b}$?

A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; **B)** $\frac{1}{2}$; **C)** $\frac{\pi}{4}$; **D)** 1; **E)** $\frac{\pi}{3}$.



48. En el triángulo de la figura PQR, con la circunferencia inscrita, resulta que $SR = 7$ cm, $QS = 4$ cm y $TP = 4$ cm. ¿Cuál es, es cm, el perímetro de dicho triángulo?

A) 30; **B)** 50; **C)** 15π; **D)** 11π; **E)** 60.

49. Un polígono convexo es aquel en el que cada uno de sus ángulos interiores vale menos de 180º. De los siguientes números, ¿cuál no puede ser el número de diagonales de tal polígono?

A) 9; **B)** 27; **C)** 45; **D)** 54; **E)** 5.

50. Al tirar dos dados, uno rojo y uno blanco, ¿cuál es la probabilidad de que en el rojo aparezca un número superior al del blanco?

A) $\frac{1}{2}$; **B)** $\frac{1}{6}$; **C)** $\frac{5}{12}$; **D)** $\frac{5}{6}$; **E)** $\frac{1}{3}$.

VI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: Día 6 de marzo de 2002

NIVEL I (5º y 6º de PRIMARIA)

LEE DETENIDAMENTE LAS SIGUIENTES INSTRUCCIONES:

- **Escribe ahora los siguientes datos:**

Apellidos	Nombre	
Colegio o Instituto	**Curso**	**Año de nacimiento**

- **No pases la página hasta que se te indique.**
- **Duración de la prueba: 1 HORA, 30 MINUTOS**
- **No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas ni ningún otro instrumento de medida.**
- **Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.**
- **No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:**

> Cada respuesta correcta te aportará **5 puntos**
> Cada pregunta que dejes en blanco, **2 puntos**
> Cada respuesta errónea, **0 puntos**

- **RODEA LA LETRA CORRESPONDIENTE A LA RESPUESTA CORRECTA.**
- **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y RODEA LA CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U. C. M.

COLABORAN:

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid, Ediciones S. M. y Grupo ANAYA.

1. El número 0,53 se puede expresar como:

A) $5 + \frac{3}{10}$; **B)** $\frac{3}{10} + \frac{5}{100}$; **C)** $\frac{5}{10} + \frac{3}{100}$; **D)** $3 + \frac{5}{10}$; **E)** $5 + \frac{3}{100}$

2. Si expresamos el producto 2,73x0,01 como un número decimal, obtenemos:

A) 27,3; **B)** 0,273; **C)** 0,0273; **D)** 0,00273; **E)** Nada de lo anterior.

3. Redondeando a las unidades el número 10,82 nos da:

A) 10,8; **B)** 1082; **C)** 10; **D)** 11; **E)** 108,2.

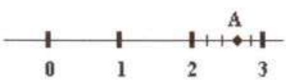
4. El resultado de la división de 23,1 entre 0,1 es:

A) 2,31; **B)** 23,1; **C)** 231; **D)** 2310; **E)** 0,231.

5. Un recipiente está lleno hasta los $\frac{2}{5}$ de su capacidad. Si le faltan 27 litros para estar lleno, la capacidad total del recipiente, en litros, es:

A) 54; **B)** $\frac{135}{2}$; **C)** $\frac{81}{5}$; **D)** 45; **E)** 81.

6. El número al que corresponde el punto A de la figura es:



A) 2,3; **B)** $3 - \frac{1}{2}$; **C)** $\frac{3}{5}$; **D)** $\frac{13}{5}$; **E)** $2 + \frac{5}{3}$

7. Si a y b son números tales que $a \times b = -1{,}5$, el producto $(-0{,}5) \times a \times (-6) \times b \times (-2)$ es igual a:

A) -9; **B)** 6; **C)** 9; **D)** 3; **E)** -6.

8. Si $a \times b$ es positivo y $a + b$ es negativo, sobre los signos de a y b puedo asegurar:

A) Son ambos positivos; **B)** Depende del signo de $a - b$; **C)** Son ambos negativos;
D) Me faltan datos para responder;
E) No es posible que $a \times b$ sea positivo y $a + b$ negativo.

9. El número que dista de – 3 lo mismo que de – 4,6 es:

A) $\frac{3+4,6}{2}$; **B)** ; **C)** –3,5; **D)** –3,8; **E)** – 4.

10. El número que debería haber en el cuadro para que la igualdad 5,6 + □ = 24,3 fuera cierta es:

A) 24,3 x 5,6; **B)** 24,3 + 5,6; **C)** 5,6 – 24,3; **D)** 24,3 – 5,6; **E)**

11. El 15% de 200 es igual a:

A) 15; **B)** ; **C)** 30; **D)** 0,15; **E)** Nada de lo anterior.

12. Sobre un paralelogramo *ABCD* hacemos los siguientes enunciados:

1. Todos los lados son iguales. 2. Las diagonales son iguales. 3. Las diagonales son perpendiculares. 4. Puedo escoger dos ángulos que sumen 180º. 5. Hay dos parejas de lados paralelos. Sea cual sea el paralelogramo, podemos asegurar que son siempre verdaderos:

A) Todos; **B)** Solamente 2, 4 y 5; **C)** Solamente 3 y 5;
D) Solamente 4 y 5; **E)** Solamente 5.

13. Sobre un triángulo isósceles ABC hacemos los siguientes enunciados:

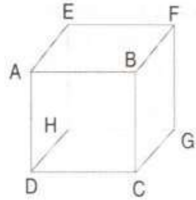
1. Los ángulos suman 180º. 2. El punto de corte de las alturas dista lo mismo de los tres vértices. 3. Hay dos alturas que tienen la misma longitud. 4. El punto de corte de las alturas está en una bisectriz. 5. El punto de corte de las alturas nunca coincide con un vértice del triángulo. Sea cual sea el triángulo isósceles, podemos asegurar que siempre son verdaderos:

A) Todo; **B)** Solamente 1, 2 y 3; **C)** Solamente 1, 3, 4 y 5; **D)** Solamente 1, 3 y 4;
E) Solamente 1.

14. *ABC* es un triángulo rectángulo con ángulo recto en A. Si AB = 3 cm, AC = 4 cm, BC = 5 cm, su área, en cm^2, es igual a:

A) 10; **B)** 6; **C)** 12; **D)** Faltan datos;
E) No hay ningún triángulo con esas características.

15. Las tres dimensiones que son necesarias para conocer todo sobre este prisma son:



A) BC, AD y AE; **B)** AB, BF y EF; **C)** DC, CG y BF;
D) AE, BF y HE; **E)** HE; CD y DH.

16. Si M es cualquier punto de la mediatriz del segmento AB, entonces:

A) MA es paralelo a MB; **B)** $MA = MB$; **C)** $MA = 2AB$;
D) $MB = MA - AB$; **E)** Nada de lo anterior.

17. En el colegio Luis Santaló, el número de estudiantes ha bajado un 10% en el ultimo año; sin embargo el porcentaje de chicas ha pasado del 40% al 55%. Con estos datos, sobre el número de chicos en el colegio podemos asegurar:

A) Ha aumentado un 0,5%; **B)** Ha aumentado un 1%; **C)** Se mantiene igual;
D) Ha bajado un 15%; **E)** Ha bajado más de un 25%.

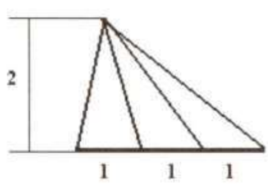
18. "Alicia tiene por lo menos 5 euros", dijo Pedro.
No, respondió Dani, "tiene menos de 5".
Puede ser, dijo Roçio, "pero por lo menos tiene 1".
Sabiendo que sólo uno de ellos dijo la verdad, ¿cuántos euros podría tener Alicia?
A) 0; **B)** 1; **C)** 2; **D)** 5; **E)** 6.

19. En el cuadrado mágico de la figura sabes que las horizontales, verticales y diagonales suman lo mismo. ¿Qué número debe aparecer en la casilla marcada con x?

X		
	15	3
12		24

A) 3; **B)** 4; **C)** 5; **D)** 6; **E)** 7.

20. ¿Cuánto suman las áreas de todos los triángulos que se pueden formar en la figura adjunta?
A) 3; **B)** 4; **C)** 7; **D)** 8; **E)** 10.



21. ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación $\dfrac{654 \times 654 \times 15}{3 \times 218 \times 2 \times 327 \times 5}$?

A) 24; **B)** 3; **C)** 654; **D)** 15; **E)** 327.

22. Un arquitecto tiene dos planos de un mismo edificio: Uno a escala 1:20 y otro a escala 1:50. ¿Cuál es la longitud de la fachada de un edificio en el plano de escala 1:50 si en el de escala 1:20 es de 20 cm?

A) 16 cm; **B)** 8 cm; **C)** 50 cm; **D)** 4 cm; **E)** 12 cm.

23. ¿Cuántos segundos tardará un tren de 200 m de largo en pasar completamente un túnel de 200 m a una velocidad de 200 km/hora?

A) 72; **B)** 36; **C)** 3,6; **D)** 7,2; **E)** 10,8.

24. Tengo 51 monedas en mi monedero que son o bien de 1 euro o bien de 20 céntimos. Si tengo en total 35 euros, ¿cuántas monedas tengo de 1 euro?

A) 32; **B)** 29; **C)** 31; **D)** 20; **E)** 26.

25. ¿Cuántas cuerdas pueden trazarse como máximo en un círculo, cada una de ellas de la longitud del radio y sin que ningún par de ellas tengan ningún punto en común?

A) 3; **B)** 4; **C)** 5; **D)** 6; **E)** 7.

VI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: Día 6 de marzo de 2002

NIVEL II (1º y 2º E.S.O.)

LEE DETENIDAMENTE LAS SIGUIENTES INSTRUCCIONES:

- **Escribe ahora los siguientes datos:**

Apellidos	Nombre	
Colegio o Instituto	**Curso**	**Año de nacimiento**

No pases la página hasta que se te indique.

- **Duración de la prueba: 1 HORA, 30 MINUTOS**
- **No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas ni ningún otro instrumento de medida.**
- **Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.**
- **No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:**

Cada respuesta correcta te aportará **5 puntos**
Cada pregunta que dejes en blanco, **2 puntos**
Cada respuesta errónea, **0 puntos**

- **RODEA LA LETRA CORRESPONDIENTE A LA RESPUESTA CORRECTA.**
- **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y RODEA LA CORRECTA.**

CONVOCA:

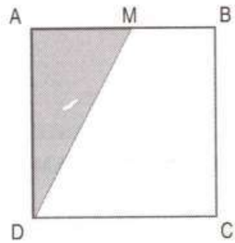
Facultad de Matemáticas de la U. C. M.

COLABORAN:

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid, Ediciones S. M. y Grupo ANAYA

1. La cuarta parte de la mitad del doble de 28 es:

   A) 14; **B)** 3,5; **C)** 7; **D)** 1,75; **E)** Nada de lo anterior.



2. En el cuadrado *ABCD*, *M* es el punto medio del lado *AB* y el área del triángulo *AMD* es 1 cm^2. ¿Cuál es, en cm^2, el área del cuadrado *ABCD*?

   A) 2; **B)** 3; **C)** 4; **D)** 5; **E)** 6.

3. Alicia abre un libro y observa que la suma de los números de las páginas que tiene delante es 99. ¿Cuál es el producto de esos números?

   A) 2500; **B)** 2450; **C)** 2400; **D)** 2350; **E)** 2300.

4. La suma de 11 enteros consecutivos es 2002. ¿Cuál es el mayor?

   A) 184; **B)** 185; **C)** 186; **D)** 187; **E)** 188.

5. ¿Cuántos números de dos cifras son divisibles por 2 y también por 7?

   A) 4; **B)** 5; **C)** 6; **D)**7; **E)** 8.

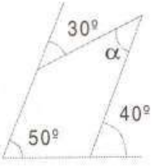
6. Si $A-1 = B+2 = C-3 = D+4 = E-5$, ¿qué número es mayor?

   A) *A*; **B)** *B*; **C)** *C*; **D)** *D*; **E)** *E*.

7. Un litro de refresco de limonada contiene un 80% de agua. ¿Qué tanto por ciento de agua contendrá medio litro de ese refresco?

   A) 20; **B)** 40; **C)** 60; **D)** 80; **E)** 100.

8. El valor del ángulo α es:



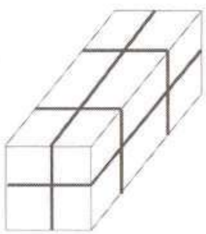
A) 20° ; **B)** 25° ; **C)**30° ; **D)** 35° ; **E)** 40°.

9. La pasada noche me desperté y vi que mi reloj de pulsera marcaba las 2. Inmediatamente, me di cuenta de que estaba parado, le di cuerda y me volví a dormir. Cuando me levanté, el despertador marcaba las 7 h y mi reloj de pulsera las 5 h 30 minutos. ¿A qué hora me desperté durante la noche?

A) 3h; **B)** 3h 30min; **C)** 4 h; **D)** 4 h 30 min; **E)** Nada de lo anterior.

10. Una hoja de papel tiene forma de cuadrado de 2 dm de lado. La dividimos en cuadraditos de 25 cm^2 de área cada uno. ¿Cuántos cuadraditos de éstos hemos obtenido?
A) 5; **B)** 8; **C)** 9; **D)** 16; **E)** 21

11. Una caja está cerrada con una cinta adhesiva como indica la figura. Si las dimensiones de la caja son 10x10x30 cm, ¿Cuántos cm de cinta adhesiva hemos gastado?
A) 200; **B)** 240; **C)** 250; **D)** 260; **E)** 300.



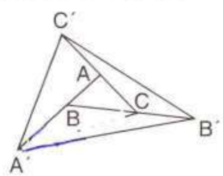
12. ¿ Cuánto tiempo necesitarías para escribir a ordenador un millón de letras si eres capaz de escribir 100 por minuto?

A) 200h; **B)** 166h 40 min; **C)** 160h 40 min;
D) 120h 40 min; **E)** 18h 10 min

13. Alicia va al gimnasio todos los días, Beatriz cada dos días, Clara cada tres días, Dani cada 4 días, Enrique cada 5 días, Felipe cada 6 días y Gonzalo un día a la semana. Si hoy se han juntado todos, ¿dentro de cuántos días volverán a hacerlo?

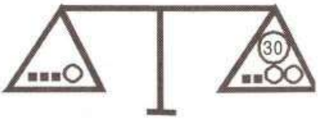
A) 27; **B)** 28; **C)** 210; **D)** 420; **E)** 5040

14. A partir del triángulo *ABC* construimos el *A´B´C´* de la siguiente forma: *A´* es el simétrico de *A* respecto de *B*; *B´* es el simétrico de *B* respecto de *C* y *C´* es el simétrico de *C* respecto de *A*. Si el área del *ABC* es 2, el área del *A´B´C´* es:



A) 6; **B)** 8; **C)** 10; **D)**12; **E)** 14.

15. En la balanza de la figura, que está equilibrada, hay un total de 9 objetos (cubos, bolas y una bola de madera que pesa 30g). Si los 9 objetos pesan 500 g, ¿cuántos gramos pesa un cubo?

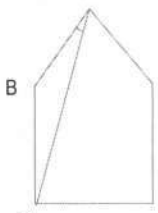


A) 40; **B)** 50; **C)** 60; **D)** 70; **E)** 80

16. Tenemos tres cajas: una blanca, una amarilla y una verde y tres objetos: una moneda, una canica y un cigarrillo. Cada caja contiene un objeto. La caja verde está a la izquierda de la blanca y la amarilla a la derecha de la canica. Si el cigarrillo está en la caja que está a la derecha de la amarilla, ¿en qué caja está la moneda?

A) En la amarilla; **B)** En la verde; **C)** En la blanca;
D) Faltan datos; **E)** Los datos son contradictorios.

17. La figura representa un pentágono *ABCDE* con todos los lados de igual longitud y ángulos rectos en *CD*. ¿Cuál es, en grados, la medida del ángulo *BAC*?



A) 12; **B)** 15; **C)** 20; **D)** 30; **E)** 45.

18. Tengo 46,20 euros en mi bolsillo en monedas de 2 euros, 1 euro, 50 céntimos, 20 céntimos, 10 céntimos y 5 céntimos de euro, de forma que tengo la misma cantidad de monedas de cada tipo. ¿Cuántas monedas tengo de 2 euros?

A) 10; **B)** 11; **C)** 12; **D)** 13; **E)** 14.

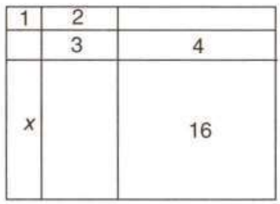
19. A Juan le pagan por un trabajo del que su ayudante, David, se lleva el 20% ¿Cuántos euros debe pedir Juan por el trabajo si quiere llevarse para él 40 euros?

A) 40,80; **B)** 42; **C)** 46; **D)**48; **E)** 50.

20. En el colegio Luis Santaló, el número de estudiantes ha bajado un 10% en el último año; sin embargo el porcentaje de chicas ha pasado del 40% al 55%. Con estos datos, sobre el número de chicos en el colegio podemos asegurar:

A) Ha aumentado un 0,5%; **B)** Ha aumentado un 1%; **C)** Se mantiene igual;
D) Ha bajado un 15%; **E)** Ha bajado más de un 25%.

21 Un rectángulo está dividido en pequeños rectángulos como se indica en la figura. Si las áreas de estos rectángulos, que no están a escala, son las que aparecen en el dibujo, el valor de x debe ser



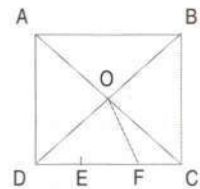
: **A)** 5; **B)** 6; **C)** 7; **D)** 8; **E)** 9.

22. ¿Cuántos triángulos isósceles de 25 cm de perímetro podemos formar si cada lado mide un número entero de cm?

A) Ninguno; **B)** 5; **C)** 6; **D)** 7; **E)** 12.

23. *ABCD* es un cuadrado de centro O y E y F son puntos del segmento DC de forma que $DE = EF = FC$. ¿Qué fracción del área del cuadrado corresponde al triángulo ODF?

A) $\frac{1}{4}$; **B)** $\frac{1}{6}$; **C)** $\frac{2}{9}$; **D)** $\frac{3}{10}$; **E)** $\frac{4}{11}$

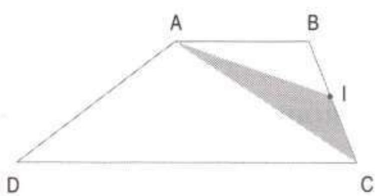


23. El valor de la suma: $1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)$ es:

A) $\frac{481}{60}$; **B)** $\frac{961}{120}$; **C)** $\frac{87}{10}$; **D)** $\frac{241}{30}$; **E)** Nada de lo anterior.

25. En el trapecio de la figura, una base es doble que la otra. Si I es el punto medio del lado BC, ¿qué fracción del área del trapecio ocupa el triángulo rayado?

A) $\frac{1}{4}$; **B)** $\frac{1}{5}$; **C)** $\frac{1}{6}$; **D)** $\frac{1}{7}$; **E)** $\frac{1}{8}$



VI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: Día 6 de marzo de 2002

NIVEL III (3º y 4º E.S.O.)

LEE DETENIDAMENTE LAS SIGUIENTES INSTRUCCIONES:

Escribe ahora los siguientes datos:

Apellidos	Nombre	
Colegio o Instituto	**Curso**	**Año de nacimiento**

- **No pases la página hasta que se te indique.**
- **Duración de la prueba: 1 HORA, 30 MINUTOS**
- **No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas ni ningún otro instrumento de medida.**
- **Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.**
- **No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente**:

> Cada respuesta correcta te aportará **5 puntos**
> Cada pregunta que dejes en blanco, **2 puntos**
> Cada respuesta errónea, **0 puntos**

- **RODEA LA LETRA CORRESPONDIENTE A LA RESPUESTA CORRECTA.**
- **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y RODEA LA CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U. C. M.

COLABORAN:

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid, Ediciones S. M. y Grupo ANAYA.

1. En un recipiente hay 26 litros de agua y en otro 7 litros. Después de echar igual cantidad de agua en ambos recipientes, resulta que en uno hay triple que en el otro. ¿Cuántos litros de agua hemos echado en cada recipiente?

A) 15; **B)** 10; **C)** 7,5; **D)** 5; **E)** 2,5.

2. Antonio tiene muchas pegatinas verdes en forma de cuadrado y Beatriz tiene también muchas pegatinas rojas de la misma forma y tamaño que las de Antonio. Deciden hacer un diseño según la siguiente regla:

Antonio pega una pegatina verde y Beatriz la rodea con 8 rojas suyas para formar un segundo cuadrado. Antonio rodea este segundo cuadrado con 16 pegatinas verdes de las suyas formando un tercer cuadrado, a continuación Beatriz coloca las suyas que hagan falta para formar un cuarto cuadrado y así sucesivamente.

¿Cuántas pegatinas verdes tiene que colocar Antonio para formar el séptimo cuadrado?

A) 40; **B)** 36; **C)** 49; **D)** 48; **E)** 64.

3. Tengo 2002 naranjas que las meto en cuatro bolsas de manera que en cada bolsa echo más naranjas que en la bolsa anterior. Si en cada bolsa echo más de 99 naranjas y entre la segunda y tercera bolsa eché 1265, ¿cuántas eché en la 4ª bolsa?

A) 558; **B)** 629; **C)** 634; **D)** 721; **E)** 734.

4. En cada una de las cinco jarras de la figura hay café, chocolate o leche (en ninguna hay mezcla) en las cantidades que se indican. No sabemos qué contiene cada jarra pero sí sabemos que hay en total, el doble de café que de chocolate, que el chocolate está en una única jarra y que no hay tres jarras con el mismo líquido. ¿En qué jarra está el chocolate?

5. La suma de 11 enteros consecutivos es 2002, la suma del menor y el mayor de los once es:

A) 360; **B)** 362; **C)**364; **D)** 365; **E)** 366.

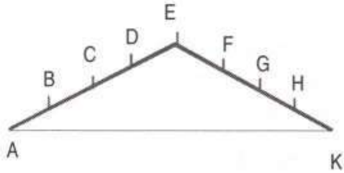
6. En una clase de 3º de E.S.O., por cada 3 chicos hay 4 chicas. El número de estudiantes de esa clase puede ser:

A) 26; **B)**27; **C)** 28; **D)** 30; **E)** 32.

7. Un señor de 52 años tiene dos hijos, de 24 años y 18 años. ¿Cuántos años han de pasar para que la edad del padre sea la suma de las edades de sus hijos?

A) 6; **B)** 10; **C)** 5; **D)** 4; **E)** 11.

8. Entrenándose para una carrera cuyo trayecto es el que se indica en la figura, Ana comienza en lugares diferentes y no recorre siempre la misma distancia, pero siempre va más deprisa bajando que subiendo. En el camino, a distancias iguales, están marcados los controles *A, B, C, D, E* (cima), *F, G, H, K* (meta). ¿ En cuál de los siguientes trayectos tardará menos tiempo?.



A) *C-E-G-F*; **B)** *B-E-G*; **C)** *C-E-H*; **D)** *D-E-K-H*; **E)** *D-E-H-F*.

9. Una motocicleta ha hecho el mismo trayecto de 120 km dos días seguidos. El segundo día fue a una velocidad media de 8 km/h más que el primer día y tardó 30 minutos menos. ¿Cuál fue la velocidad media en km/h del primer día?

A) 32; **B)** 36; **C)** 40; **D)** 44; **E)** 48.

10. ¿Cuál es el área del pentágono de vértices (1,1), (3, – 1), (6,2), (5,6) y (2,5)?

A) 22; **B)** 23; **C)** 24; **D)** 25; **E)** 26.

11. Representamos por *A, B, C* y *D* la cantidad de números, menores que 2002, que son múltiplos de 3, 5, 15 y 30 respectivamente. Para hallar la cantidad de números impares que son múltiplos de 3 ó de 5, debemos calcular:

A) $\frac{A+B-C}{2}$; **B)** $A+B-D$; **C)** $A+B-C$; **D)** $A+B-C-D$; **E)** $\frac{A}{2}-C+D$

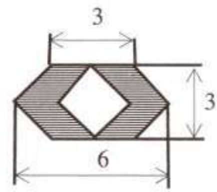
12. El cucurucho de un helado tiene 1cm de radio y 4cm de altura. ¿Cuántos centímetros mide el radio de una bola de helado que rellene el cucurucho completo?

A) $\frac{\pi}{3}$; **B)** $\frac{3}{4}\pi$; **C)** 1; **D)** 1,5; **E)** Nada de lo anterior.

13. Tenemos 3 cajas: una blanca, una azul y una verde y tres objetos: una moneda, una canica y un caramelo. Cada caja contiene un objeto. La caja verde está a la izquierda de la blanca y la azul a la derecha de la que tiene la canica. Si el caramelo está en la caja que está a la derecha de la azul, ¿en qué caja está la moneda?

A) En la azul; **B)** En la verde; **C)** En la blanca;
D) Faltan datos; **E)** Los datos son contradictorios.

14. ¿Cuál es el área de la zona rayada?
A) 5; **B)** 9; **C)** 12; **D)** 15; **E)** 18.

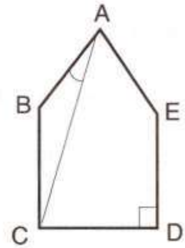


15. Dos descuentos sucesivos uno del 10% y otro del 20%, equivalen a un único descuento del:

A) 15%; **B)** 20%; **C)** 28%; **D)** 30%; **E)** 200%.

16. La figura representa un pentágono *ABCDE* con todos los lados de igual longitud y ángulos rectos en *C* y *D*. ¿Cuál es, en grados, la medida del ángulo *BAC*?

A)12; **B)**15; **C)**20; **D)**30; **E)**45.



17. ¿Cuántos pesos distintos pueden medirse con una balanza de dos platillos si disponemos de 3 pesas, una de 1 kg, otra de 3 kg y otra de 9 kg?.

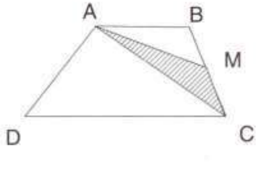
A) 3; **B)** 6; **C)** 7; **D)**13; **E)**17.

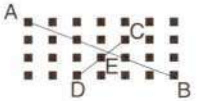
18. Si a y b son números reales no nulos tales que $ab = a - b$, el valor de $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$ es:

A) -2 ; **B)** $-\frac{1}{2}$; **C)** $\frac{1}{3}$; **D)** $\frac{1}{2}$; **E)** 2.

19. En el trapecio de la figura, una base es doble que la otra. Si *M* es el punto medio del lado *BC*, ¿qué fracción del área del trapecio ocupa el triángulo rayado?

A) $\frac{1}{4}$; **B)** $\frac{1}{5}$; **C)** $\frac{1}{6}$; **D)** $\frac{1}{7}$; **E)** $\frac{1}{8}$.





20. El diagrama muestra 28 puntos cada uno distante 1cm de los vecinos más cercanos. Si el segmento AB corta al CD en E, la longitud de AE es:

A) $\frac{4\sqrt{5}}{3}$; **B)** $\frac{5\sqrt{5}}{3}$; **C)** $\frac{12\sqrt{5}}{7}$; **D)** $2\sqrt{5}$; **E)** $\frac{5\sqrt{65}}{9}$

21. Los lados de un triángulo miden 4, 6 y "x" y los de otro 4, 6 e "y". ¿Cuál es el menor número positivo que no puede ser el valor de $|x - y|$?

A) 2; **B)** 4; **C)** 6; **D)** 8; **E)** 10.

22. Desde un punto de la hipotenusa de un triángulo rectángulo trazamos paralelas a los catetos quedando el triángulo dividido en un cuadrado de área Q y dos triángulos rectángulos de áreas T y R respectivamente. Si $\frac{T}{Q} = m$ entonces $\frac{R}{Q}$ es:

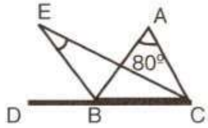
A) $\frac{1}{2m+1}$; **B)** m; **C)** $1 - m$; **D)** $\frac{1}{4m}$; **E)** $\frac{1}{8m^2}$.

23. Antonio tarda 40 minutos en pintar una pared y Benito 2 horas en pintar otra igual. ¿Cuánto tiempo tardarían los dos juntos en pintar tres paredes iguales a aquellas?

A) media hora; **B)** tres cuartos de hora; **C)** 1 hora; **D)** 1hora y media;
E) 1 hora y tres cuartos.

24. Dentro de 3 años, Jaime tendrá el triple de años que tenía hace 3 años, dentro de cuatro años tendrá el "_____ " de años que tenía hace 4 años. La palabra que falta es:

A) séxtuplo; **B)** quíntuplo; **C)** cuádruple; **D)** triple; **E)** doble.



25. Si CE es la bisectriz del ángulo ACB y BE la bisectriz del ángulo ABD y el ángulo A es de 80º, ¿cuántos grados mide el ángulo BEC?

A) 35; **B)** 40; **C)** 45; **D)** 50; **E)** 5

VI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: Día 6 de marzo de 2002

NIVEL IV (1º y 2º BTO.)

LEE DETENIDAMENTE LAS SIGUIENTES INSTRUCCIONES:

Escribe ahora los siguientes datos:

Apellidos	Nombre	
Colegio o Instituto	**Curso**	**Año de nacimiento**

- **No pases la página hasta que se te indique.**
- **Duración de la prueba: 1 HORA, 30 MINUTOS**
- **No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas ni ningún otro instrumento de medida.**
- **Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.**
- **No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente**:

> Cada respuesta correcta te aportará **5 puntos**
> Cada pregunta que dejes en blanco, **2 puntos**
> Cada respuesta errónea, **0 puntos**

- **RODEA LA LETRA CORRESPONDIENTE A LA RESPUESTA CORRECTA.**
- **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y RODEA LA CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U. C. M.

COLABORAN:

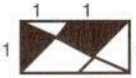
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid, Ediciones S. M. y Grupo ANAYA.

1. El reloj de mi coche no marca los segundos. Durante un viaje, a la altura del kilómetro 235 marcaba las 9:10 y en el kilómetro 245 las 9:17. La velocidad media "v", en km/h, verifica:

A) $v \leq 75$; **B)** $75 < v < 100$; **C)** $v = 75$; **D)** $v = 100$; **E)** $v \geq 100$.

2. ¿Cuál es el cociente entre el área sombreada, el área total del rectángulo?

A) $\frac{1}{4}$; **B)** $\frac{1}{3}$; **C)** $\frac{2}{5}$; **D)** $\frac{5}{12}$; **E)** $\frac{1}{2}$.



3. En un conjunto de 7 elementos, ¿cuántos subconjuntos de 3 elementos podemos formar de manera que cualesquiera dos de ellos tenga exactamente un elemento en común?

A) 3; **B)** 5; **C)** 7; **D)** 9; **E)** 11.

4. Se considera la función f definida en los enteros positivos de la siguiente manera:

$$f(n) = \begin{cases} n+5 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Sabiendo que $f(f(f(k))) = 35$ y que k es impar, entonces la suma de las cifras de k es:

A) 8; **B)** 9; **C)** 10; **D)** 12; **E)** 15.

5. Si los ángulos de un triángulo están en la proporción 1:5:6 y la longitud del lado mayor del triángulo es 6 cm, ¿cuál es la longitud en cm, de la altura correspondiente a este lado?

A) 1; **B)** 1,5; **C)** 2; **D)** 2,5; **E)** 3.

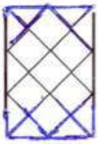
6. Si $f: R \rightarrow {}^{D}$ con $f(x) \geq 0$ todo x, y además $f(1) = 2$ y $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, ¿cuánto vale $f\left(\frac{1}{2}\right)$

A) 0; **B)** $\frac{1}{2}$; **C)** 1; **D)** $\sqrt{2}$; **E)** 4.

7. ¿Cuántos números enteros, estrictamente positivos y menores que 1000 son productos de dos números pares?

A) 100; **B)** 150; **C)** 200; **D)** 249; **E)** 250.

8. En la figura de la derecha tienes un esquema del enlosetado de una habitación rectangular de 2 m x 3 m en la que se han necesitado, como observas, 7 losetas enteras y 10 mitades. Si queremos enlosetar de forma análoga y con losetas de la misma medida que las anteriores un salón de 10 m x 20 m, ¿cuántas losetas enteras necesitamos?.



A) 200; **B)** 230; **C)** 300; **D)** 370; **E)** 400.

9. Dos triángulos iguales cuyos ángulos miden 30º, 60º y 90º están colocadas de forma que sus hipotenusas coinciden y se solapan parcialmente. Si la hipotenusa es 12, el área de la región común a ambos es:

A) $6\sqrt{3}$; **B)** $8\sqrt{3}$; **C)** $9\sqrt{3}$; **D)** $12\sqrt{3}$; **E)** 24.

11. La fracción $\dfrac{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{3\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ es igual a:

A) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$; **B)** 1; **C)** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; **D)** $\dfrac{4}{3}$; **E)** $\dfrac{16}{9}$.

11. Tres grifos A, B y C llenan un depósito en 1 hora. Cuando abrimos solamente los grifos A y C, llenamos el depósito en 1 h 30 min, y cuando abrimos solamente B y C lo llenamos en 2 horas. ¿En cuántas horas lo llenaríamos si abriéramos solamente A y B?
A) 1,1; **B)** 1,15; **C)** 1,2; **D)** 1,25; **E)** 1,75.

12. Si α es un ángulo agudo y sen $\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{x-1}{2x}}$, tg α es igual a:

A) x; **B)** $\dfrac{1}{x}$; **C)** $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$; **D)** $\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x}}$; **E)** $\sqrt{x^2-1}$.

13. Si "p" es un primo mayor que 5, entonces $p^2 - 1$ es divisible entre 24:

A) Nunca; **B)** Sólo 24 veces; **C)** Siempre; **D)** Sólo si p=5; **E)** Sólo si p < 2400.

14. El conjunto de soluciones reales de la desigualdad $|x-1| + |x+2| < 5$ es:

A) $(-3, 2)$; **B)** $(-1, 2)$; **C)** $(-2, 1)$; **D)** $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$; **E)** El conjunto vacío.

15. En una progresión aritmética con un número par de términos, resulta que la suma de los términos que ocupan lugar impar es 24 y la suma de los que ocupan lugar par es 30. Si la diferencia entre el último y el primer término de la progresión es 10,5, ¿cuántos términos tiene esa progresión?

A) 20; **B)** 18; **C)** 12; **D)** 10; **E)** 8.

16. Dos coches A y B recorren la misma distancia. El coche A recorre la mitad de la distancia a v_1 km/h y la otra mitad a v_2 km/hora. El coche B va la mitad del tiempo a v_1 km/h y la otra mitad a v_2 km/h. Si la velocidad media alcanzada por el coche A es x km/h y la velocidad media alcanzada por el B es y km/hora tenemos que siempre:

A) $x \leq y$; **B)** $x \geq y$; **C)** $x = y$; **D)** $x < y$; **E)** $x > y$.

17. Si x_1 y x_2 son números distintos con $3x_1^2 - ax_1^2 = 3x_2^2 - ax_2^2$ y $a \neq 3$ entonces $x_1 + x_2$ es igual a:

A) $-\frac{a}{3}$; **B)** $\frac{a}{3}$; **C)** $\frac{1}{3}$; **D)** 0; **E)** $-\frac{1}{3}$.

18. El resto de la división de $x^{51} + 51$ entre $x + 1$ es:

A) 0; **B)** 1; **C)** 49; **D)** 50; **E)** 51.

19. El menor entero k para el que la ecuación $2x(kx - 4) - x^2 + 6 = 0$ no tiene raíces reales es:

A) – 1; **B)** 2; **C)** 3; **D)** 4; **E)** 5.

20. Si (a, b) y (c, d) son dos puntos de la recta $y = mx + k$, la distancia entre ellos en función de a, c y m es:

A) $|a - c|\sqrt{1 + m^2}$; **B)** $|a + c|\sqrt{1 + m^2}$; **C)** $\dfrac{|a - c|}{\sqrt{1 + m^2}}$;

D) $|a - c|(1 + m^2)$; **E)** $|a - c||m|$.

21. Si $i^2 = -1$, entonces $(1 + i)^{20} - (1 - i)^{20}$ es igual a:

A) – 1024; **B)** – 1024i; **C)** 0; **D)** 1024; **E)** 1024i.

22. Si m, n, p y q son números reales y $f(x) = mx + n$ y $g(x) = p(x) + q$, la ecuación $f(g(x)) = g(f(x))$ tiene solución

A) Para cualquier valor de m, n, p y q.
B) Si y sólo si $m = p$ y $n = q$.
C) Si y sólo si $mq - np = 0$.
D) Si y sólo si $n(1 - p) - q(1 - \mathrm{m}) = 0$.
E) Si y sólo si $(1 - n)(1 - p) - (1 - q)(1 - m) = 0$.

23. Si N es un número entero positivo de 3 cifras, la probabilidad de que $\log_2 (N)$ sea un número entero es:

A) 0; **B)** $\frac{3}{899}$; **C)** $\frac{1}{225}$; **D)** $\frac{1}{300}$; **E)** $\frac{1}{450}$.

24. Lanzamos tres dados al aire. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres números que resultan pueden ordenarse en progresión aritmética de diferencia 1?

A) $\frac{1}{6}$; **B)** $\frac{1}{9}$; **C)** $\frac{1}{27}$; **D)** $\frac{1}{54}$; **E)** $\frac{7}{36}$.

25. ¿Cuántas parejas de números reales (x, y) verifican simultáneamente las ecuaciones siguientes:

$x = x^2 + y^2$

$y = 2xy$

A) 8; **B)** 1; **C)** 2; **D)** 3; **E)** 4.

VI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)	NIVEL II (1º y 2º de ESO)
NIVEL III (3º y 4º de ESO	NIVEL IV (Bachillerato)

2ª FASE: Sábado 20 de Abril de 2002

LEE DETENIDAMENTE LAS SIGUIENTES INSTRUCCIONES:

- **No pases la página hasta que se te indique.**
- **Duración de la prueba: <u>1 HORA , 30 MINUTOS</u>.**
- **Dada la naturaleza de la prueba, no debes utilizar calculadoras, reglas graduadas ni ningún otro instrumento de medida.**
- **Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a éstas, inténtalo con las restantes.**
- **No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente**:

Cada respuesta correcta te aportará	**5 puntos**
Cada pregunta que dejes en blanco,	**2 puntos**
Cada respuesta errónea,	**0 puntos**

- **Escribe tus datos en la HOJA DE RESPUESTAS en los recuadros correspondientes**
- **MARCA CON UNA CRUZ (x), EN LA HOJA DE RESPUESTAS, LA OPCIÓN QUE CONSIDERES CORRECTA (A,B,C,D o E), EN CADA UNA DE LAS VEINTICINCO PREGUNTAS**
- **SI TE EQUIVOCAS ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA RESPUESTA CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M

COLABORAN:

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid, Ediciones S.M. y Grupo ANAYA

1. Si $(100 - 1) + (101 - 2) + (102 - 3) + (103 - 4) = 400 - \square$, ¿qué número debe haber dentro del cuadrado?

A) 0; **B)** 3; **C)** 4; **D)** 10; **E)** 12.

2. ¿Cuál de los siguientes números no es divisor de $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$

A) 7; **B)** 8; **C)** 9; **D)** 10; **E)** 36.

3. Un millón de segundos es aproximadamente

A) 3 días; **B)** 12 días; **C)** 3 meses; **D)** 1 año; **E)** 2 años.

4. El mayor de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo nunca puede valer

A) 42° ; **B)** 46° ; **C)** 48° ; **D)** 80° ; **E)** 89°.

5. Un telegrama cuesta 3 euros las 10 primeras palabras y 0,18 euros por cada palabra adicional. Si pongo un telegrama de 15 palabras, ¿cuánto debo pagar?

A) 4,5 euros; **B)** 2,7 euros; **C)** 3,18 euros; **D)** 3,90 euros; **E)** Nada de lo anterior.

6. El siguiente número de la serie 5, 6, 8 , 11, ... es

A) 12; **B)** 14; **C)** 15; **D)** 17; **E)** 19.

7. Un pescado pesa 9 kg ; la cola pesa la mitad que la cabeza y la cabeza 4 kg menos que el cuerpo. ¿Cuánto pesa, en kg, el cuerpo?

A) 5; **B)** 6; **C)** 6,5; **D)** 7; **E)** No se puede saber.

8. Si doy dos cortes a una tarta como la de la figura, puedo obtener como mucho 4 trozos, aunque no sean iguales. Si doy 4 cortes a la tarta, el máximo número de trozos que puedo obtener es:

A) 8; **B)** 9; **C)** 11; **D)** 12; **E)** 16.

9. Un balón lo puedo guardar en una caja cúbica de 30 cm de arista. Si tenemos un cajón en forma de cubo, con 90 cm de arista, ¿cuántos balones, metidos en sus cajas, cabrán dentro?

A) 27; **B)** 9; **C)** 18; **D)** 3; **E)** 12.

10. Mi reloj se atrasa 20 segundos cada hora. Ahora mismo lo he puesto en punto. ¿Dentro de cuánto tiempo llevará media hora de retraso?

A) 2 días; **B)** 3 días y 18 horas; **C)** 60 horas; **D)** 75 horas; **E)** 4800 minutos .

11. Una hoja de papel de forma rectangular y 56 cm de perímetro se corta a lo largo en 3 tiras y cada tira se divide en 4 partes, resultando 12 cuadrados iguales. ¿Cuál era, en cm, la longitud de la hoja?

A) 12; **B)** 15; **C)** 16; **D)** 18; **E)** 20.

12. En un garaje con 32 vehículos entre motos y coches hay un total de 102 ruedas. ¿Cuántas motos hay?
A) 17; **B)** 8; **C)** 13; **D)** 14; **E)** 11.

13. Si el hermano de Beatriz, Antonio, tiene un hermano más que hermanas, ¿cuántos hermanos más que hermanas tiene Beatriz?
A) 0; **B)** 1; **C)** 2; **D)** 3; **E)** 4.

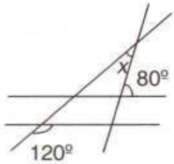
14. Si la suma de todos los números naturales desde el 33 hasta el 78 es 2553, ¿cuál será la suma de todos los números desde el 34 hasta el 79?
A) 2553; **B)** 2599; **C)** 2554; **D)** 2555; **E)** 2631.

15. Los 550 estudiantes de un colegio van a salir de excursión en autobús. Cada autobús tiene 64 plazas. ¿Cuántos autobuses hacen falta?

A) 8; **B)** 8,59375; **C)** 8,6; **D)** 9; **E)** 10.

16. ¿Cuánto vale, en grados, el ángulo x de la figura?

A) 20º ; **B)** 30º ; **C)** 40º ; **D)** 60º ; **E)** 70º.

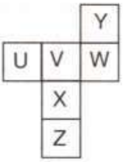


17. Si escribimos en filas los enteros positivos como indica el diagrama, qué fila es aquella cuya suma es más próxima a 150?

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15

A) 5ª ; **B)** 6ª ; **C)** 7ª ; **D)** 8ª ; **E)** 26ª

18. El desarrollo de un cubo es el que te mostramos en la figura. Al volver a armar el cubo, la cara opuesta a la X es:



A) Z; **B)** U; **C)** V; **D)** W; **E)** Y.

19. Si expresamos $100^{25} - 25$ como un número entero, la suma de sus cifras es:

A) 219; **B)** 444; **C)** 432; **D)** 453; **E)** 435.

20. Un carnicero vende paquetes de chuletas y salchichas. Cada paquete contiene 4 chuletas y 6 salchichas. Al final del día ha vendido c chuletas y s salchichas. ¿Cuál de las siguientes igualdades es la correcta?

A) $s + c = 10$; **B)** $4c = 6s$; **C)** $4s = 6c$; **D)** $4s + 6c = 10$; **E)** $4c + 6s = 10$.

21. En un avión de 108 plazas, por cada asiento libre hay 2 ocupados. ¿Cuántos pasajeros viajan en el avión?

A) 36; **B)** 42; **C)** 56; **D)** 64; **E)** 72.

22. Alicia elige un número entero. Escribe el doble de ese número, luego dobla el resultado, lo vuelve a doblar y vuelve otra vez a doblar el resultado. De los siguientes números, ¿cuál es el que con toda seguridad no ha obtenido?

A) 80; **B)** 1200; **C)** 48; **D)** 84; **E)** 880.

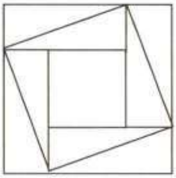
23. Si el dragón rojo tuviera 6 cabezas más que el dragón verde, tendrían entre los dos 34 cabezas. Pero resulta que el dragón rojo tiene 6 cabezas menos que el dragón verde. ¿Cuántas cabezas tiene el dragón verde?

A) 6; **B)** 8; **C)** 12; **D)** 14; **E)** 16.

24. Hace tres años, la suma de las edades de los trillizos Antonio, Beatriz y Carlos más la edad de la hermana Diana, cuatro años mayor, era 24 años. ¿Qué edad tiene hoy Diana?

A) 5; **B)** 8; **C)** 9; **D)** 12; **E)** 15.

25. El lado del cuadrado más grande de la figura es 4 cm. y el del más pequeño 2 cm. ¿Cuál es, en cm^2, el área del cuadrado intermedio?



A) 8; **B)** 9; **C)** 10; **D)** 11; **E)** 12.

1. Un voltímetro marca entre 0 y 30 voltios. Si el valor medio de 3 lecturas ha sido de 24 voltios, la lectura más pequeña podía haber sido de:

A) 0; **B)** 8; **C)** 10; **D)** 12; **E)** 24.

2. ¿Cuánto vale $\frac{1}{2002} + \frac{2003 \cdot 2001}{2002} - 2003$?

A) $\frac{1}{2002}$; **B)** 0; **C)** $\frac{-1}{2002}$; **D)** 1; **E)** -1.

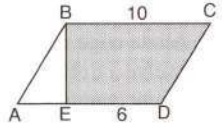
3. $0{,}4^2$ es igual a:

A) 0,016; **B)** 0,16; **C)** 1,6; **D)** 0,0016; **E)** 0,8.

4. Si $2 - 3(5 + \square) + 22 = 0$, el número que debe aparecer en $\square$ es:

A) −9; **B)** −3; **C)** 8; **D)** 3; **E)** 9.

5. *ABCD* es un paralelogramo de base 10 cm, el segmento *ED* mide 6 cm y el área del triángulo *ABE* es 16 cm^2. ¿Cuál es el área, en cm^2, de la región sombreada *BEDC*?

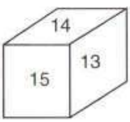


A) 32; **B)** 60; **C)** 64; **D)** 68; **E)** 72.

6. Mi calculadora tiene una tecla $\boxed{\frac{1}{x}}$ que convierte cada número en su inverso. Por ejemplo si en pantalla tengo un 8 y pulso esa tecla, aparece 0,125. Si pongo en pantalla el número 32, ¿cuál es el menor número de veces que tengo que pulsar la tecla para que aparezca de nuevo el 32?

A) 1; **B)** 2 ; **C)** 3; **D)** 4; **E)** 5.

7. Las 6 caras del cubo que vemos parcialmente en la figura contienen un número. Si los 6 números son consecutivos y la suma de los números de cada uno de los tres pares de caras opuestas es la misma, ¿cuál de las siguientes puede ser la suma de los números de las seis caras?



A) 75; **B)** 76 ; **C)** 78; **D)** 80; **E)** 81.

8. En una fila de un cine hay 120 asientos, todos desocupados. ¿Cuántos debemos ocupar, como poco, para que la persona que venga luego a sentarse tenga que colocarse obligatoriamente al lado de uno de nosotros?

A) 30; **B)** 40; **C)** 41; **D)** 60; **E)** 119.

9. La suma de las tres cifras de 996 es $9 + 9 + 6 = 24$. ¿Cuántos números de tres cifras cuya suma sea 24 son pares?

A) 1; **B)** 2; **C)** 3; **D)** 4; **E)** 6.

10. ¿En cuántos ceros acaba el número $125^4 \cdot 6^{13}$?

A) 4; **B)** 17; **C)** 13; **D)** 12; **E)** 9.

11. El Concurso de Primavera tiene 25 preguntas y se desarrolla en 1 hora y media. Si quisiéramos hacer 30 preguntas, manteniendo el mismo tiempo por pregunta, el tiempo que deberíamos dar debería ser:

A) 1 hora 35 minutos; **B)** 1 hora 40 minutos; **C)** 1 hora 48 minutos;
D) 1 hora 50 minutos; **E)** 2 horas.

12. En la tienda de al lado, 1 kg de azúcar cuesta 0,90 euros. En el hipermercado, que está lejos, el precio es menor, 0,80 euros. La menor cantidad de kgs de azúcar que hay que comprar para que resulte más barato hacerlo en el hipermercado si el viaje de ida y vuelta en autobús cuesta 1,50 euros es un número que verifica:

A) Está entre 8 y 11; **B)** Está entre 11 y 14s; **C)** Está entre 14 y 17;
D) Está entre 17 y 20 ; **E)** Está entre 20 y 23.

13. En los exámenes finales, un estudiante tiene que hacer 8 pruebas, en cada una de las cuales puede obtener de 2 a 5 puntos. En las seis pruebas que ha hecho Pedro ha obtenido un promedio de 3,5 puntos. ¿Qué media debe obtener entre las dos pruebas que le quedan para que la media final sea de 4 puntos?

A) 5; **B)** Es imposible; **C)** 4,5; **D)** 4; **E)** 4,75.

14. ¿Cuál de las igualdades siguientes es siempre cierta cuando en vez de x ponemos cualquier número?

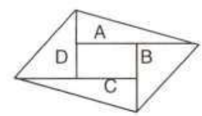
A) $3x + 1 = 4$; **B)** $\frac{2}{x} = 0$; **C)** $2 \cdot 3 + 0(1 + x) = 6$; **D)** $\frac{x-2}{2} = x$;

E) $\frac{3x + 1}{x} = 4$.

15. El número formado por un 1 seguido de 2002 ceros se divide entre 15. ¿Cuál es el resto de la división?

A) 2; **B)** 4; **C)** 6; **D)** 8; **E)** 10.

16. Prolongamos los lados del rectángulo ABCD de área 1 cm^2 en la forma indicada, hasta duplicar su longitud. ¿Cuál es el área, en cm^2, de la figura obtenida?



A) 4; **B)** 5; **C)** 6; **D)** 7; **E)** Faltan datos.

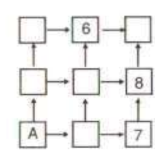
17. Si K es el 10% de L, L es el 20% de M, M es el 30% de N y P es el 40% de N, el cociente $\frac{K}{P}$ es igual a:

A) 7; **B)** $\frac{3}{2}$; **C)** $\frac{2}{300}$; **D)** $\frac{3}{200}$; **E)** $\frac{1}{250}$.

18. Si el producto de tres números enteros mayores que 3 es 2187, entonces la suma de los números es igual a:

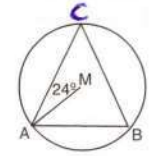
A) 55; **B)** 45; **C)** 91; **D)** 249; **E)** No se puede saber.

19. Nueve cartas, con cifras del 1 al 9 (todas distintas), se ponen boca abajo y se unen con flechas que van de un número menor a uno mayor. Se vuelven dos de las cartas y aparecen los números 6 y 7 ¿cuál es la suma de las cartas A y B?



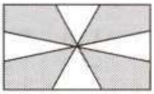
A) 6; **B)** 7; **C)** 8; **D)** 9; **E)** 10.

20. M es el centro del círculo circunscrito al triángulo ABC, los lados AC y BC son iguales y el ángulo MAC (vértice en A) mide 24°. ¿Cuánto mide en grados el ángulo MAB?



A) 30° ; **B)** 40° ; **C)** 42° ; **D)** 48° ; **E)** 66°.

21. La bandera de la figura se usa en los barcos. Los lados del rectángulo están divididos en tres partes iguales. ¿Cuál es el cociente entre la parte blanca y la parte sombreada?



A) 1; **B)** $\frac{1}{2}$; **C)** $\frac{1}{3}$; **D)** $\frac{1}{4}$; **E)** $\frac{2}{3}$.

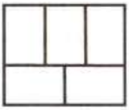
22. En una clase, el número de chicos es el 80% del número de chicas, entonces, el número de chicas es el ....% del número de chicos. ¿Qué número falta en los puntos suspensivos?

A) 110; **B)** 120; **C)** 125; **D)** 150; **E)** Depende del número de chicas.

23. Blanca Nieves coloca a los 7 enanitos de menor a mayor para repartirles los 77 champiñones que han cogido. Primero da algunos champiñones al menor y luego le da a los restantes un champiñón más que al anterior. ¿Cuántos champiñones recibe el mayor?

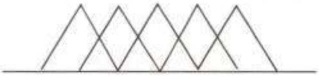
A) 17; **B)** 8; **C)** 14; **D)** 10; **E)** 15.

24. El rectángulo de la figura, de 176 cm de perímetro, se ha dividido en 5 rectángulos iguales. ¿Cuál es el perímetro de cada uno de estos 5 rectángulos?
A) 35,2; **B)** 76; **C)** 80; **D)** 84; **E)** 86.



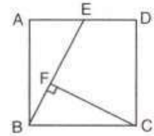
25. Se lanzan dos dados de parchís. Llamamos A a obtener *"suman 6"*, B a *"suman menos de 4"* y C a *"suman más de 9"*. Jaimito piensa que si los ordena de mayor a menor según la probabilidad de que ocurran, corresponde a C la mayor, le sigue B y la menor corresponde al caso A. Esto lo escribe de forma abreviada así: CBA. Pero Jaimito se equivoca ¿Cuál es la forma de ordenarlos según sus probabilidades? :
A) ABC; **B)** ACB; **C)** BAC; **D)** BCA; **E)** CAB.

1. Dibujamos cinco triángulos equiláteros, cada uno de lado $2\sqrt{3}$ cm de forma que todos estén a un mismo lado de una recta, con un lado sobre ella y de tal manera que el punto medio de la base de cada uno es vértice del siguiente, como indica la figura. ¿Cuánto vale el área, en cm^2, de la región cubierta por los cinco?



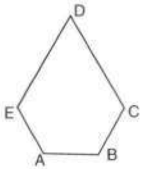
A) 10; **B)** 12; **C)** 15; **D)** $10\sqrt{3}$; **E)** $12\sqrt{3}$.

2. En la figura adjunta *ABCD* es un cuadrado 2 cm x 2 cm ; *E* es el punto medio de *AD* y *F* está en *BE*. Si CF es perpendicular a *BE*, el área del cuadrilátero, en cm^2, CDEF es:



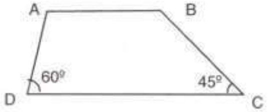
A) 2; **B)** $3-\frac{\sqrt{3}}{2}$; **C)** $\frac{11}{5}$; **D)** $\sqrt{5}$; **E)** $\frac{9}{4}$

3. El polígono *ABCDE* de la figura verifica que los ángulos *A* y *B*, ambos iguales, valen 120º cada uno y que $EA = AB = BC = 2$ cm y $CD = DE = 4$ cm. ¿Cuál es su área en cm^2?



A) 10; **B)** $7\sqrt{3}$; **C)** 15; **D)** $9\sqrt{3}$; **E)** $12\sqrt{5}$.

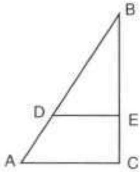
4. La figura *ABCD* es un trapecio con lados paralelos *AB* y *CD*, $AB = 5$ cm , $BC = 3\sqrt{2}$ cm, el ángulo de vértice *C* mide 45º y el de vértice *D*, 60º. ¿Cuánto mide *DC* en cm?



A) $7+\frac{2\sqrt{3}}{3}$; **B)** 8; **C)** $\frac{19}{2}$;

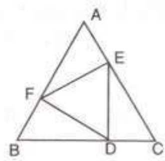
D) $8+\sqrt{3}$; **E)** $8+3\sqrt{3}$.

5. En el triángulo rectángulo *ABC*, $AC = 6$ cm , $BC = 8$ cm. Si los puntos *D* y *E* están en los lados *AB* y *BC* respectivamente y el ángulo BED es de 90º y DE = 4 cm, la longitud BD, en cm, es igual a:



A) 6; **B)** $\frac{20}{3}$; **C)** $2\sqrt{13}$; **D)** $\sqrt{41}$; **E)** $\frac{28}{9}$.

6. El triángulo equilátero DEF está inscrito en el triángulo equilátero ABC como se muestra en la figura con DE perpendicular a BC ¿Cuál es el cociente entre el área de DEF y el área de ABC?



A) $\frac{1}{6}$; **B)** $\frac{1}{4}$; **C)** $\frac{1}{3}$; **D)** $\frac{2}{5}$; **E)** $\frac{1}{2}$.

7. El cociente: $\dfrac{(2^4)^8}{(4^8)^2}$ es igual a:

A) $\frac{1}{4}$; **B)** $\frac{1}{2}$; **C)** 1; **D)** 2; **E)** 8.

8. De los siguientes números, ¿cuál es un cuadrado perfecto?
A) $4^4 \cdot 5^5 \cdot 6^6$; **B)** $4^4 \cdot 5^6 \cdot 6^5$; **C)** $4^5 \cdot 5^4 \cdot 6^6$; **D)** $4^6 \cdot 5^4 \cdot 6^5$; **E)** $4^6 \cdot 5^5 \cdot 6^4$.

9. El perímetro de un rectángulo es 100 y su diagonal tiene longitud x, ¿cuál es el área de ese rectángulo?

A) $625 - x^2$; **B)** $625 - \frac{x^2}{2}$; **C)** $1250 - x^2$; **D)** $1250 - \frac{x^2}{2}$; **E)** $2500 - \frac{x^2}{2}$.

10. Las dimensiones de una caja rectangular vienen dadas todas ellas por números enteros y el volumen de la caja es 2002 ¿Cuál es el menor valor posible para la suma de las tres dimensiones?

A) 36; **B)** 38; **C)** 42; **D)** 44; **E)** 92.

11. Si a y b son números distintos para los que $\frac{a}{b} + \frac{a + 10b}{b + 10a} = 2$, el valor de $\frac{a}{b}$ es:

A) $\frac{3}{5}$; **B)** $\frac{7}{10}$; **C)** $\frac{4}{5}$; **D)** $\frac{9}{10}$; **E)** 1.

12. Este año hay en el instituto un 10% de estudiantes más que el año pasado. Si el número de chicos ha aumentado un 5% y el de las chicas un 20%, la fracción del total de estudiantes que corresponde ahora a las chicas es :

A) $\frac{1}{3}$; **B)** $\frac{4}{11}$; **C)** $\frac{2}{5}$; **D)** $\frac{4}{9}$; **E)** $\frac{1}{2}$.

13. Dos paredes de una habitación y el techo se juntan en ángulo recto en un punto P. Una mosca está en el aire a 1 m de una pared, 8 m de la otra y a 9 m del punto P. ¿A qué distancia, en metros, está del techo?

A) $\sqrt{13}$; **B)** $\sqrt{14}$; **C)** $\sqrt{15}$; **D)** 4; **E)** $\sqrt{17}$.

14. Sea AB un segmento de longitud 26 y C y D dos puntos en él tales que $AC = 1$ y $AD = 8$. Sean E y F dos puntos en una de las semicircunferencias de diámetro AB tales que EC y FD son perpendiculares a AB. Calcula EF

A) 5; **B)** $5\sqrt{2}$; **C)** 7; **D)** $7\sqrt{2}$; **E)** 12.

15. En una urna echamos canicas blancas, canicas negras, dados blancos y dados negros. El 20% de los objetos de la urna son dados y el 40% de las canicas son blancas. ¿Qué porcentaje de los objetos de la urna son canicas negras?

A) 40%; **B)** 48%; **C)** 52%; **D)** 60%; **E)** 80%.

16. El número de chicos de mi clase es 2/3 del número de chicas. ¿Qué porcentaje de chicos hay en la clase?

A) 25%; **B)** 33%; **C)** 40%; **D)** 45%; **E)** 48%.

17. Representamos por $P(n)$ y $S(n)$ el producto y la suma respectivamente de las cifras del entero n. Por ejemplo $P(23) = 6$ y $S(23) = 5$. Supón que n es un entero de dos cifras tal que $P(n) + S(n) = n$ ¿Cuál es la cifra de las unidades de n?

A) 2; **B)** 3; **C)** 6; **D)** 8; **E)** 9.

18. Cuando desplazamos la coma de cierto número decimal positivo cuatro lugares a la derecha, el nuevo número es el cuádruplo del inverso del número inicial, ¿cuál era el número original?

A) 0,0002; **B)** 0,002; **C)** 0,02 ; **D)** 0,2; **E)** Nada de lo anterior.

19. Si el producto de tres números enteros consecutivos es divisible por 7, ¿cuál de los siguientes números no es necesariamente divisor de dicho producto?

A) 6; **B)** 14; **C)** 21; **D)** 28; **E)** 42.

20. En un cono de 10 cm de diámetro de la base y 12 cm de altura hay inscrito un cilindro tal que su altura es igual al diámetro de su base. ¿Cuál es, en cm, el radio de la base del cilindro?

A) $\frac{8}{3}$; **B)** $\frac{30}{11}$; **C)** 3; **D)** $\frac{25}{8}$; **E)** $\frac{7}{2}$

21. En el cuadrado mágico de la figura, la suma de los números de cada fila, columna o diagonal es la misma.¿Cuánto vale $y + z$?

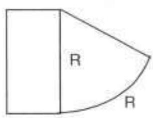
v	24	w
18	x	y
25	z	21

A) 43; **B)** 44; **C)** 45; **D)** 46; **E)** 47.

22. Uno de los ángulos de un triángulo rectángulo mide 25º ¿Cuántos grados mide el ángulo formado por la altura y la mediana trazadas sobre la hipotenusa?

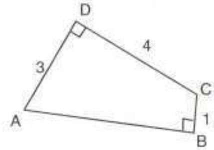
A) 25º; **B)** 30º; **C)** 35º; **D)** 40º; **E)** 45º.

23. Un sector circular de radio R y cuyo arco también mide R tiene la misma área que un rectángulo de altura R. ¿Cuál es la base del rectángulo?



A) $\frac{\pi R}{4}$; **B)** $\frac{R}{2}$; **C)** $\frac{R}{3}$; **D)** $\frac{2R}{\pi}$; **E)** R.

24. Un cuadrilátero $ABCD$ tiene ángulos rectos en B y D. Si $BC = 1$ cm , $CD = 4$ cm y $DA = 3$ cm. ¿Cuál es el área, en cm^2 del cuadrilátero?



A) 8; **B)** $6 + \sqrt{6}$; **C)** $\frac{17}{2}$; **D)** 17; **E)** $12 + 2\sqrt{6}$.

25. Si $x : y = 6$, $y : z = 5$, $u : z = 4$ y $v : u = 3$, entonces $x : v$ es igual a:

A) 2,5; **B)** 22,5; **C)** 40; **D)** 360; **E)** Nada de lo anterior.

1. Si $\{a_n\}$ es una sucesión tal que $a_1 = 1$ y $3 \cdot a_{n+1} - 3 \cdot a_n = 1$ para todo $n \geq 1$, el valor de a_{2002} es:

A) 666; **B)** 667; **C)** 668; **D)** 669; **E)** 670.

2. Sea $P(x) = k\,x^3 + 2\,k^2 x^2 + k^3$. Calcula la suma de todos los números reales k para los que $x - 2$ es un factor de $P(x)$.

A) -8; **B)** -4; **C)** 0; **D)** 4; **E)** 8.

3. Si $f_n(x) = x^n$ y $a \neq 1$, considera los cuatro números siguientes:

1) $(f_{11}(a) \cdot f_{13}(a))^{14}$; 2) $f_{11}(a) \cdot f_{13}(a) \cdot f_{14}(a)$; 3) $(f_{11}(f_{13}(a)))^{14}$;

4) $f_{11}(f_{13}(f_{14}(a)))$

¿Cuáles de éstos valen lo mismo que $f_{2002}(a)$?

A) Solamente 1) y 2); **B)** Solamente 2) y 3); **C)** Solamente 3) y 4);
D) Solamente 2), 3) y 4; **E)** Todos.

4. Este año hay en el instituto un 10% de estudiantes más que el año pasado. Si el número de chicos ha aumentado un 5% y el de las chicas un 20%, la fracción del total de estudiantes que corresponde ahora a las chicas es :

A) $\frac{1}{3}$; **B)** $\frac{4}{11}$; **C)** $\frac{2}{5}$; **D)** $\frac{4}{9}$; **E)** $\frac{1}{2}$.

5. Dos paredes de una habitación y el techo se juntan en ángulo recto en un punto P. Una mosca está en el aire a 1 m de una pared, 8 m de la otra y a 9 m del punto P. ¿A qué distancia, en metros, está del techo?

A) $\sqrt{13}$; **B)** $\sqrt{14}$; **C)** $\sqrt{15}$; **D)** 4; **E)** $\sqrt{17}$.

6. En una caja hay 1001 bolas blancas y 1001 bolas negras. Si P_1 es la probabilidad de que al coger dos bolas al azar sean del mismo color y P_2 la probabilidad de que sean de diferente color, entonces $P_2 - P_1$ es igual a:

A) 0; **B)** $\frac{1}{2002}$; **C)** $\frac{1}{2001}$; **D)** $\frac{2}{2001}$; **E)** $\frac{1}{1000}$.

7. ¿Para cuántos valores enteros positivos de n se verifica que $n^3 - 8n^2 + 20n - 13$ es un número primo?

A) 1; **B)** 2; **C)** 3; **D)** 4; **E)** Más de 4.

8. Si a, b y c son números reales tales que $a^2 + 2b = 7$, $b^2 + 4c = -7$ y $c^2 + 6a = -14$, $a^2 + b^2 + c^2$ es igual a:

A) 14; **B)** 21; **C)** 28; **D)** 35; **E)** 49.

9. Sea f una función tal que para todo $x > 0$ se verifica que $f(x) + 2f\left(\frac{2002}{x}\right) = 3x$. El valor de $f(2)$ es

A) 1000; **B)** 2000; **C)** 3000; **D)** 4000; **E)** 6000.

10. ¿Para cuántos valores enteros positivos de m se verifica que $\frac{2002}{m^2 - 2}$ es un entero positivo?

A) 1; **B)** 2; **C)** 3; **D)** 4; **E)** Más de 4.

11. Sea AB un segmento de longitud 26 y C y D dos puntos en él tales que $AC = 1$ y $AD = 8$. Sean E y F dos puntos en una de las semicircunferencias de diámetro AB tales que EC y FD son perpendiculares a AB. Calcula EF

A) 5; **B)** $5\sqrt{2}$; **C)** 7; **D)** $7\sqrt{2}$; **E)** 12.

12. En una urna echamos canicas blancas, canicas negras, dados blancos y dados negros. El 20% de los objetos de la urna son dados y el 40% de las canicas son blancas. ¿Qué porcentaje de los objetos de la urna son canicas negras?

A) 40%; **B)** 48%; **C)** 52%; **D)** 60%; **E)** 80%.

13. Si el número de chicos de mi clase es $\frac{2}{3}$ del número de chicas, ¿qué porcentaje de chicos hay en la clase?

A) 25%; **B)** 33%; **C)** 40%; **D)** 45%; **E)** 48%.

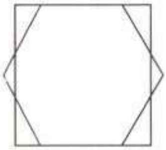
14. Si el producto de tres enteros consecutivos es divisible por 7, ¿cuál de los siguientes números no es necesariamente un divisor de dicho producto?

A) 6; **B)** 14; **C)** 21; **D)** 28; **E)** 42.

15. ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $|1 - x^2| = 1 - x$?

A) 0; **B)** 1; **C)** 2; **D)** 3; **E)** 4.

16. A partir de un cuadrado de lado 1 cm, construimos un hexágono regular como indica la figura. ¿Cuánto vale el área, en cm^2, de la zona común a ambas figuras?



A) $\frac{2}{\sqrt{3}} - 1$; **B)** $1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}$; **C)** $2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$; **D)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **E)** $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

17. La ecuación de incógnita x, $\ln(3 + x) = \ln 3 + \ln x$ (donde x es un número real positivo) verifica que:

A) No tiene solución; **B)** Se verifica para todo $x > 0$; **C)** Tiene solución única;

D) Tiene dos soluciones; **E)** Tiene infinitas soluciones.

18. Si $0 < a < b$, una de las desigualdades siguientes no es siempre cierta. ¿Cuál?

A) $a^2 < b^3$; **B)** $a + 2 < b + 3$; **C)** $2a < 3b$;

D) $\frac{2}{b+3} < \frac{3}{a+2}$; **E)** $(a+2)^2 < (b+3)^2$.

19. En un rectángulo, designamos por r el cociente entre la medida mayor y la menor. Si cortamos este rectángulo en dos por los puntos medios de los lados más largos, cada uno de los rectángulos resultantes tiene el mismo valor de r que el inicial. ¿Cuál es el valor de r?

A) 4; **B)** 2; **C)** $\sqrt[3]{4}$; **D)** $\sqrt{2}$; **E)** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

20. ¿Cuál de las siguientes funciones está acotada en $[6, +\infty)$?

A) $y = x \operatorname{sen} x$; **B)** $y = x + \frac{1}{x}$; **C)** $y = 5 - x^2$; **D)** $y = \frac{x+5}{x-5}$; **E)** $y = 1 + |x|$.

21. Yo vivía en Siracusa hace más o menos 22 siglos; calculé el área de un segmento de parábola y otras muchas cosas; he probado que el área lateral del cilindro circunscrito a una esfera es igual al área de esa esfera; una cierta espiral lleva mi nombre..., pero sobre todo, se sabe que dije: "Dadme un punto de apoyo y ...." ¿Quién soy?

A) Alejandro Magno; **B)** Apolonio; **C)** Arquímedes; **D)** Euclides; **E)** Pitágoras.

22. En el triángulo ABC sea M el punto medio de BC. Si $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm y $AM = 5$ cm, ¿cuál es, en cm^2, el área del triángulo?

A) 15; **B)** 14; **C)** 12; **D)** 10; **E)** Nada de lo anterior.

23. La función definida por $f(x) = \dfrac{cx}{2x+3}$ verifica que $f(f(x)) = x$ para todo x distinto de $-\dfrac{3}{2}$. ¿Cuánto vale c ?

A) -3; **B)** $-\dfrac{3}{2}$; **C)** $\dfrac{3}{2}$; **D)** 3; **E)** Faltan datos.

24. El número entero solución de la ecuación $\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{2+4+6+\ldots+2n} = \dfrac{115}{116}$ es:

A) 110; **B)** 115; **C)** 116; **D)** 231; **E)** Esta ecuación no tiene soluciones enteras.

25. Si desarrollamos el polinomio $(x+y)^9$ y lo ordenamos en potencias decrecientes de x, resulta que el segundo y el tercer término del desarrollo tienen el mismo valor para $x = p$ e $y = q$ siendo p y q números positivos cuya suma vale 1. ¿Cuánto vale p?

A) $\dfrac{1}{5}$; **B)** $\dfrac{4}{5}$; **C)** $\dfrac{1}{4}$; **D)** $\dfrac{3}{4}$; **E)** $\dfrac{8}{9}$.

VIII OLIMPIADA DE MAYO
ALUMNOS PREMIADOS

PRIMER NIVEL

VIVANCO PUYOL, MANUEL	CP Santa María	Oro
SEROR GARCÍA, FERNANDO	Colegio San Javier	Plata
VISO GARROTE, SALVADOR	Ntra Sra de las Maravillas	Plata
MATEOS GONZÁLEZ, ÁLVARO	Liceo Francés	Bronce
GILARDI OLARREA, JULIO	IES Mirasierra	Bronce
HUMANEZ ARNÁS, ANTONIO	Mater Clementissima	Bronce
PÉREZ CERDA HERRERO, JUAN MIGUEL	C.Sagrados Corazones	Bronce
SANTOS MENÉNDEZ, FERNANDO DE LOS	Ntra Sra de las Maravillas	Mención
GAMELO ABELLANAS, MARTA	Colegio Alemán	Mención
GARCÍA-JUNCEDO DEL RÍO, EDUARDO	Colegio Bernadette	Mención

SEGUNDO NIVEL

FERNÁNDEZ SÁNCHEZ, DAVID	IES Jorge Guillén	Oro
LORENZO GARCÍA, ELISA	IES Fortuny	Plata
GARCÍA GARCÍA, BETARIZ	IES Mirasierra	Plata
GONZÁLEZ RODRÍGUEZ, JORGE	C. Sagrados Corazones	Bronce
DI DECO SAMPEDRO, JAVIER	Ntra Sra de las Maravilla	Bronce
MARTÍN BRUALLA, RICARDO	Colegio Alemán	Bronce
TENA ORCAJO, JOSÉ IGNACIO	IES San Juan Bautista	Bronce
BERNABÉ MORODO, ANA	San Viator	Mención
RAMÍREZ CARRILLO, CARLOS	San Viator	Mención
CARPIO PINEDO, JOSÉ	IES San Juan Bautista	Mención

Cóppola Rodríguez, Javier; Tercer Premio; Cuarto Nivel; 2° de Bachillerato;
Colegio Santa María del Yermo

Hernández Corbato, Luis; Segundo Premio; Cuarto Nivel; 1° de Bachillerato;
IES Fortuny

García Soriano, David; Primer Premio; Cuarto Nivel; 2° de Bachillerato;
Colegio Chamberí

Di Deco Sampedro, Javier; Tercer Premio; Tercer Nivel; 3° de E.S.O.;
Colegio Nuestra Señora de las Maravillas

Lorenzo García, Elisa; Tercer Premio; Tercer Nivel; 3° de E.S.O.;
IES Fortuny

Tena Horcajo; José Ignacio; Tercer Premio; Tercer Nivel; 3° de E.S.O.;
IES San Juan Bautista

García García, Beatriz; Segundo Premio; Tercer Nivel; 3° de E.S.O.;
IES Mirasierra

Barrera Mayoral, Daniel de la; Primer Premio; Tercer Nivel; 4° de E.S.O.;
Colegio La Inmaculada; Getafe

Ramírez Carrillo, Carlos; Tercer Premio; Segundo Nivel; 2° de E.S.O.;
Colegio San Viator

García-Junceda del Río, Eduardo; Segundo Premio; Segundo Nivel; 1° de E.S.O.;
Colegio Bernadette

Torres Niño, Javier; Primer Premio; Segundo Nivel; 2° de E.S.O.;
Colegio San Viator

González Herrero, Juan José; Tercer Premio; Primer Nivel; 5° de Primaria;
Colegio Alemán

Alfaya Sánchez, David; Primer Premio; Primer Nivel; 6° de Primaria;
CP Miguel de Cervantes; Tres Cantos

Izquierdo Arseguet, Diego; Primer Premio; Primer Nivel; 6° de Primaria;
Liceo Francés

PRIMAVERA 2002. Segunda Fase

	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
1	C	D	E	C
2	A	E	C	A
3	B	B	B	C
4	A	D	D	B
5	D	C	B	D
6	C	B	C	C
7	B	A	C	C
8	C	B	C	A
9	A	D	D	B
10	B	D	B	C
11	C	C	C	D
12	C	C	B	B
13	D	B	D	C
14	B	C	D	D
15	D	E	B	D
16	A	B	C	C
17	B	D	E	C
18	E	B	C	A
19	B	D	D	D
20	C	C	B	D
21	E	B	D	C
22	D	C	D	C
23	B	C	B	A
24	D	C	B	B
25	C	E	A	B

I OLIMPIADA DE MAYO
MAYO 1995
Primer nivel

Problema 1

La comisión directiva de una sociedad secreta está formada por cuatro personas. Para admitir nuevos socios se rigen por los siguientes criterios:

- Votan solamente los miembros de la directiva, y lo pueden hacer de tres formas: a favor, en contra o absteniéndose.
- Cada aspirante debe obtener por lo menos dos votos a favor y ninguno en contra.

En la última reunión de la directiva se consideraron 8 solicitudes de ingreso. Del total de votos emitidos, resultaron 23 votos a favor, 2 en contra y 7 abstenciones.¿Cuál es la mayor, y cuál es la menor cantidad de solicitudes que pudieron ser aceptadas en esta ocasión?

Problema 2

Julia tiene 289 monedas guardadas en cajas. Todas las cajas contienen la misma cantidad de monedas (que es mayor que 1) y en cada caja sólo hay monedas de un mismo país. Las monedas de Bolivia son más del 6% del total, las de Chile más del 12% del total, las de Méjico más del 24% del total, y las de Perú más del 36% del total. ¿Puede tener Julia alguna moneda de España?

Problema 3

Rodolfo y Gabriela tienen 9 fichas numeradas del 1 al 9 y se entretienen con el siguiente juego: Sacan alternadamente 3 fichas cada uno, de acuerdo con las siguientes reglas:

- Comienza el juego Rodolfo, eligiendo una ficha y en los turnos siguientes debe tomar, cada vez, una ficha 3 unidades mayor que la que sacó Gabriela.
- Gabriela a su vez, elige la primera ficha, y en los turnos siguientes debe tomar una ficha 2 unidades mayor que la que ella misma sacó.
- Gana el que obtiene el número mayor al sumar sus 3 fichas. Si el juego no se puede completar, hay empate.

Si ambos juegan sin equivocarse, ¿cómo debe empezar Rodolfo para asegurarse no perder?

Problema 4

Tenemos 4 triángulos equiláteros blancos de 3 cm de lado y los unimos por sus lados para obtener una pirámide de base triangular. En cada arista de la pirámide marcamos 2 puntos rojos que la dividen en 3 partes iguales.

Numera esos puntos de forma que al recorrerlos en el orden que esos números te indiquen resulte un camino de la menor longitud posible. ¿Cuánto mide ese camino?

Problema 5

Una tortuga camina a 60 m por hora y una lagartija lo hace a 240 m por hora. Ambas parten desde el vértice A de una pista rectangular de 120 m de largo y 60 de ancho, empezando a recorrer ambas el lado menor. La lagartija tiene por costumbre avanzar dos lados consecutivos de la pista, retroceder uno, volver a avanzar dos, volver a retroceder uno y así sucesivamente. ¿Cuántas veces y en qué lugares se encuentran la lagartija y la tortuga mientras la tortuga da su primera vuelta?

I OLIMPIADA DE MAYO
MAYO 1995
Segundo nivel

Problema 1

Verónica, Ana y Gabriela situadas en una ronda se divierten con el siguiente juego: una de ellas elige un número y lo dice en voz alta; la que está a su izquierda lo divide entre su mayor divisor primo y dice el resultado en voz alta; la que está a su izquierda divide este número entre su mayor divisor primo y dice el resultado en voz alta, y así sucesivamente. Gana la que diga en voz alta el número 1, y entonces el juego finaliza.

Ana eligió un número mayor que 50 y menor que 100 y ganó.

Verónica eligió el siguiente del que eligió Ana, y también Verónica ganó.

Dar todos los números que pudo elegir Ana

Problema 2

El dueño de la ferretería "el tornillo flojo" compró una partida de tornillos en cajas cerradas y los vende sueltos; nunca tiene más de una caja abierta. Al finalizar el lunes quedan 2208 tornillos; al finalizar el martes tiene todavía 1616 tornillos, y al finalizar el miércoles tiene 973 tornillos. Todas las noches anota la cantidad de tornillos que hay en la única caja abierta. La cantidad que anotó el martes es triple de la que anotó el lunes, y la que anotó el miércoles es doble de la del lunes. ¿Cuántos tornillos trae cada caja, si se sabe que son menos de 500?

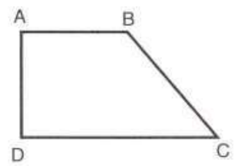
Problema 3
Se considera un primer número de 3 cifras, ninguna de ellas 0. Intercambiando dos de sus cifras de lugar, se obtiene un segundo número menor que el primero. Si la diferencia entre el primero y el segundo número es un número de 2 cifras y la suma del primero y del segundo es un número capicúa menor que 500, ¿cuáles son los posibles valores de esta suma?

Problema 4
Se considera una pirámide cuya base es un triángulo equilátero *BCD* y cuyas caras son triángulos isósceles rectángulos en el vértice común *A*. Una hormiga sale desde el vértice *B*, llega a un punto *P* de la arista *CD*, desde allí se dirige a un punto *Q* de la arista *AC* para retornar al punto *B*. Si el camino que recorrió tiene longitud mínima, ¿cuánto mide el ángulo *PQA*?

Problema 5
Tenemos 105 monedas, entre las cuales sabemos que hay 3 falsas. Las monedas auténticas pesan todas lo mismo y su peso es mayor que el de las falsas, que también pesan todas lo mismo. Indicar de qué manera se pueden seleccionar 26 monedas auténticas realizando sólo dos pesadas en una balanza de dos platos.

II OLIMPIADA DE MAYO
MAYO 1996
Primer nivel

Problema 1
Un terreno *ABCD* tiene forma de trapecio rectangular. El ángulo en *A* mide 90° y el ángulo en *D* mide 90°. *AB* mide 30m ; *AD* mide 20m y *DC* mide 45m. Este terreno se tiene que dividir en dos parcelas de igual área trazando una paralela al lado *AD*. ¿A qué distancia de *D* hay que trazarla?



Problema 2
Considerando los números naturales de tres cifras, ¿en cuántos de ellos al sumar dos de sus cifras se obtiene el doble de la restante? Justifica tu respuesta.

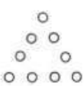
Problema 3

A y B son dos recipientes cilíndricos que contienen agua. La altura del agua en A es de 1000 cm y en B, 350 cm. Utilizando una bomba, se transfiere el agua desde A hasta B. Se observa que en el recipiente A, la altura del agua disminuye 4 cm por minuto, y que en B aumenta 9 cm por minuto. ¿Después de cuánto tiempo, desde que se empezó a utilizar la bomba, serán iguales las alturas en A y en B?

Problema 4

En este dibujo, hay tres casillas en cada uno de los lados del cuadrado. Ubica un número natural en cada casilla de modo que la suma de los números de dos casillas contiguas sea siempre impar.

En este dibujo, hay cuatro casillas en cada lado del triángulo. Justifica por qué no es posible colocar un número natural en cada casilla de modo que la suma de los números de dos casillas contiguas sea siempre impar.



Si dibujas ahora un polígono de 45 lados, y en cada uno ubicas 50 casillas, cuidando que en cada vértice haya una casilla, ¿puedes colocar en cada casilla un número natural de modo que la suma de los números de dos casillas contiguas sea siempre impar? ¿Por qué?

Problema 5

En un juego de preguntas y respuestas, cada acierto suma 5 puntos al jugador, cada respuesta incorrecta le resta dos puntos, y cuando el jugador no contesta, ni se le suma ni se le resta nada. Cada partida tiene 30 preguntas. Francisco jugó 5 partidas y en todas obtuvo la misma puntuación, mayor que 0, pero la cantidad de aciertos, respuestas incorrectas y preguntas sin responder en cada partida fue diferente. ¿Cuáles son todas las puntuaciones que pudo obtener Francisco?

II OLIMPIADA DE MAYO
MAYO 1996
Segundo nivel

Problema 1

En el rectángulo *ABCD*, *AC* es una diagonal.

Una recta *r* se mueve paralelamente a *AB*, formando dos triángulos opuestos por el vértice, interiores al rectángulo.

Prueba que la suma de las áreas de dichos triángulos es mínima cuando r pasa por el punto medio del segmento *AD*.

Problema 2

Uniendo $15^3 = 3375$ cubitos de 1 cm^3 se pueden construir cuerpos de 3375 cm^3 de volumen. Indica cómo se construyen dos cuerpos *A* y *B* con 3375 cubitos cada uno y tales que la superficie total de B sea 10 veces la superficie total de *A*.

Problema 3

Natalia y Marcela cuentan de 1 en 1 empezando juntas en 1, pero la velocidad de Marcela es el triple que la de Natalia (cuando Natalia dice su segundo número, Marcela dice su cuarto número). Cuando la diferencia de los números que dicen al unísono es alguno de los múltiplos de 29, entre 500 y 600, Natalia sigue contando normalmente y Marcela empieza a contar de forma descendente, de modo que, en cierto momento, ambas dicen al unísono el mismo número.

¿Cuál es este número?

Problema 4

Sea *ABCD* un cuadrado, y *F* un punto cualquiera del lado *BC*. Se traza por *B* la perpendicular a la recta *DF* que corta a la recta *DC* en *Q*.

¿Cuánto mide el ángulo *FQC*?

Problema 5

Se tiene una cuadrícula de 10×10. Un movimiento consiste en avanzar 7 cuadros a la derecha y 3 cuadros hacia abajo. En caso de salirse por un renglón se continúa por el principio (izquierda) del mismo renglón, y en caso de terminarse una columna se continúa por el principio de la misma columna (arriba).

¿Dónde se debe empezar para terminar, después de 1996 movimientos, en una esquina?

III OLIMPIADA DE MAYO
MAYO 1997
Primer nivel

Problema 1

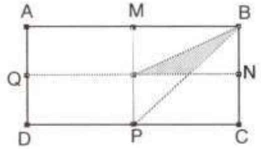
En un tablero cuadrado con 9 casillas (de 3 por 3) se deben colocar 9 elementos del conjunto $S = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$, diferentes entre sí, de modo que cada uno esté en una casilla y se cumplan las siguientes condiciones:

- Las sumas de los números de la segunda y tercera fila sean, respectivamente, el doble y el triple de la suma de los números de la primera fila
- Las sumas de los números de la segunda y tercera columna sean, respectivamente, el doble y el triple de la suma de los números de la primera columna.

Mostrar todas las formas posibles de ubicar elementos de S en el tablero, cumpliendo las condiciones indicadas.

Problema 2

En el rectángulo *ABCD, M, N, P* y *Q* son los puntos medios de los lados. Si el área del triángulo sombreado es 1, calcular el área del rectángulo *ABCD*.



Problema 3

En un tablero de 8 por 8, se han colocado 10 fichas que ocupan, cada una, una casilla. En cada casilla sin ficha, está escrito un número entre 0 y 8, que es igual a la cantidad de fichas colocadas en sus casillas vecinas. Casillas vecinas son las que tienen un lado o un vértice en común. Dar una distribución de fichas para la cual la suma de los números escritos en el tablero sea la mayor posible.

Problema 4

Joaquín y su hermano Andrés van todos los días a clase en el autobús de la línea 62. Joaquín paga siempre los billetes. Cada billete tiene impreso un número de 5 dígitos. Un día Joaquín observa que la suma de los números de sus billetes - el suyo y el de su hermano - además de consecutivos, son tales que la suma de los diez dígitos es precisamente 62. Andrés le pregunta si la suma de los dígitos de alguno de los billetes es 35 y, al saber la respuesta, puede decir correctamente el número de cada billete. ¿Cuáles eran esos números?

Problema 5

Cuando Pablo cumple 15 años, celebra una fiesta invitando a 43 amigos. Les presenta una tarta con forma de polígono regular de 15 lados, y coloca sobre ella 15 velas.

Las velas se disponen de modo que entre velas y vértices no haya nunca tres alineados (tres velas cualesquiera no están alineadas, ni dos velas cualesquiera con un vértice, ni dos vértices con una vela)

Luego Pablo divide la tarta en trozos triangulares, mediante cortes que unen velas entre sí o velas y vértices, pero que además no se cruzan con otros cortes ya realizados.

¿Por qué, al hacer esto, Pablo puede distribuir un trozo de tarta a cada uno de sus invitados, pero él se quedó sin comer?

III OLIMPIADA DE MAYO
MAYO 1997
Segundo nivel

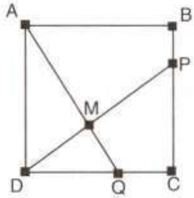
Problema 1

¿Cuántos números de siete dígitos son múltiplos de 388 y terminan en 388?

Problema 2

En un cuadrado *ABCD* de lado *k*, se ubican los puntos *P* y *Q* sobre los lados *BC* y *CD* respectivamente, de modo que $PC = 3PB$ y $QD=2QC$. El punto de intersección de *AQ* y *PD* es *M*.

Determinar el área del triángulo *QMD* en función de *k*.

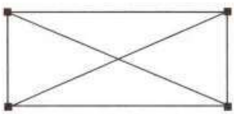


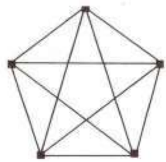
Problema 3

Se tiene 10000 fichas iguales con forma de triángulo equilátero. Con esos triangulitos se forman hexágonos regulares, sin superposiciones ni huecos. Si se forma el hexágono regular que desperdicia la menor cantidad posible de triangulitos, ¿Cuántos sobran?

Problema 4

En las figuras, se señalan los vértices con un círculo. Se llaman caminos a los segmentos que unen vértices. Se distribuyen números enteros no negativos en los vértices, y en cada camino se escribe la diferencia de los números de sus extremos. Diremos que una distribución de números es *garbosa* si aparecen en los caminos todos los números de 1 a n, siendo n el número de caminos. Dar, si es posible, una distribución garbosa para las siguientes figuras. En caso de no poder hacerlo, explicar por qué.





Problema 5

¿Cuáles son las posibles áreas de un hexágono con todos los ángulos iguales y cuyos lados miden 1, 2, 3, 4,5 y 6 en algún orden?

IV OLIMPIADA DE MAYO
MAYO 1998
Primer nivel

Problema 1

Con 6 varillas se construye una pieza como la de la figura. Las tres varillas exteriores son iguales entre sí. Las tres varillas interiores son iguales entre sí. Se desea pintar cada varilla de un solo color, de modo que en cada punto de unión, las tres varillas que llegan tengan distinto color. Sólo se pueden pintar de azul, blanco, rojo o verde. ¿De cuántas maneras se puede pintar la pieza?

Problema 2

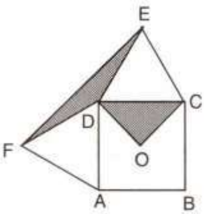
Se tienen 1998 piezas rectangulares de 2 cm de ancho y de 3 cm de largo y con ellas se arman cuadrados (sin superposiciones ni huecos). ¿Cuál es la mayor cantidad posible de cuadrados que se pueden tener al mismo tiempo?

Problema 3

Hay cuatro botes en una de las orillas de un río. Sus nombres son Ocho, Cuatro, Dos y Uno, porque esa es la cantidad de horas que tarda cada uno en cruzar el río. Se puede atar un bote a otro, pero no más de uno, y entonces el tiempo que tardan ambos en cruzar es igual al del más lento de los dos botes. Un solo marinero debe llevar todos los botes a la otra orilla. ¿Cuál es la menor cantidad de tiempo que se necesita para completar el traslado?

Problema 4

ABCD es un cuadrado de centro *O*. Sobre los lados *DC* y *AD* se han construido los triángulos equiláteros *DAF* y *DCE*. Decide si el área del triángulo *EDF* es mayor, menor o igual que el área del triángulo *DOC*.



Problema 5

Elige un número de 4 cifras (ninguna de ellas 0), y comenzando con él construye una lista de 21 números distintos, de cuatro cifras cada uno, que cumpla la siguiente regla: después de escribir cada número en la lista se calculan todos los promedios entre 2 cifras de ese número, se descartan los promedios que no sean números enteros, y con los restantes se forma un número de 4 cifras que ocupará el siguiente lugar en la lista. Por ejemplo, si en la lista se escribió 2946, el siguiente puede ser 3333 ó 3434 ó 5345 ó cualquier otro número formado con las cifras 3, 4 ó 5.

IV OLIMPIADA DE MAYO
MAYO 1998
Segundo nivel

Problema 1

Inés eligió 4 dígitos distintos del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Formó con ellos todos los posibles números de 4 cifras distintas, y los sumó todos. El resultado obtenido fue 193314. Halla los cuatro dígitos que eligió Inés.

Problema 2

ABC es un triángulo equilátero. N es un punto del lado AC tal que $AC = 7 \cdot AN$. M es un punto del lado AB tal que MN es paralela a BC y P es un punto del lado BC tal que MP es paralela a AC. Halla la fracción (área de MNP) / (área ABC)

Problema 3

Dado un tablero cuadriculado de 4×4 con cada casilla pintada de un color distinto, se desea cortarlo en dos pedazos de igual área mediante un solo corte que siga las líneas de la cuadrícula. ¿De cuántas maneras puede hacerse?

Problema 4

En el suelo del patio está dibujado un octógono regular. Emilio escribe en los vértices los números del 1 al 8 en cualquier orden. Pone una piedra en el punto 1, y camina hacia el punto 2. Cuando ha recorrido 1/2 del camino se detiene y deja la segunda piedra. Desde allí camina hacia el punto 3. Cuando ha recorrido 1/3 del camino se detiene y deja la tercera piedra. Desde allí sigue hacia el punto 4; cuando ha recorrido 1/4 del camino se detiene y deja la cuarta piedra. Así sigue hasta que, después de dejar la séptima piedra, camina hacia el punto 8 y cuando ha recorrido 1/8 del camino se detiene y deja la octava piedra.
La cantidad de piedras que quedan en el centro del octógono depende del orden en que escribió los números en los vértices. ¿Cuál es la mayor cantidad de piedras que pueden quedar en ese centro?

Problema 5

En el planeta X31 hay sólo 2 tipos de billetes. Solamente hay quince precios enteros que no se puedan pagar exactamente (se paga de más y se recibe cambio). Si 18 es uno de los precios que no se puede pagar exactamente, halla el valor de cada tipo de billete.

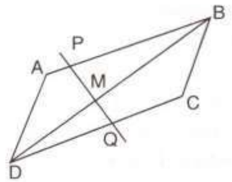
V OLIMPIADA DE MAYO
MAYO 1999
Primer nivel

Problema 1

Se eligen dos números entre 1 y 100 inclusive, tales que su diferencia es 7 y su producto es múltiplo de 5. ¿De cuántas maneras distintas puede hacerse?

Problema 2

En un paralelogramo *ABCD*, *BD* es la diagonal mayor. Al hacer coincidir *B* con *D* mediante una doblez se forma un pentágono regular. Calcular las medidas de los ángulos que forma la diagonal *BD* con cada uno de los lados del paralelogramo.



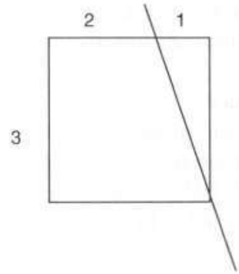
Problema 3

En cada escalón de una escalera de 10 peldaños hay una rana. Cada una de ellas puede, de un salto, colocarse en otro escalón pero cuando lo hace, al mismo tiempo otra rana saltará la misma cantidad de escalones en sentido opuesto: una sube y otra baja.

¿Conseguirán las ranas colocarse todas juntas en un mismo escalón?

Problema 4

Diez cartones cuadrados de 3 cm. de lado se cortan por una línea, como se indica en la figura. Después de los cortes se tienen 20 piezas: 10 triángulos y 10 trapecios. Construir un cuadrado que utilice las 20 piezas sin superposiciones ni huecos.



Problema 5

Ana, Beatriz, Carlos, Diego y Emilia juegan un torneo de ajedrez. Cada jugador se enfrenta una sola vez con cada uno de los otros cuatro. Cada jugador se anota 2 puntos si gana la partida, 1 punto si empata y 0 puntos si pierde. Al final del torneo, resulta que las puntuaciones de los cinco jugadores son todas distintas.

Hallar el mayor número de empates que pudo haber en el torneo, justificando por qué no pudo haber un número mayor de empates.

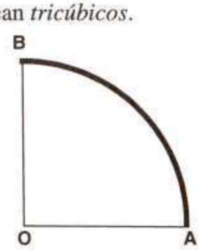
V OLIMPIADA DE MAYO
MAYO 1999
Segundo nivel

Problema 1

Un número natural de tres cifras se llama *tricúbico* si es igual a la suma de los cubos de sus dígitos. Hallar todas las parejas de números consecutivos tales que ambos sean *tricúbicos*.

Problema 2

La figura representa la cuarta parte de un círculo de radio 1. En el arco AB, se consideran dos puntos P y Q de forma tal que la recta PQ es paralela a la recta AB. Sean X e Y los puntos de intersección de la recta PQ con las rectas OA y OB respectivamente. Calcular $PX^2 + PY^2$.



Problema 3

En una fila, escribimos los números del 1 al 10, en este orden. En una segunda fila, debajo de la anterior, escribimos los números del 1 al 10, en cualquier orden. Completamos una tercera fila escribiendo en cada casilla la suma de los dos números escritos arriba. ¿Hay alguna forma de completar la segunda fila de modo que las cifras de las unidades de los números de la tercera fila sean todas distintas?

Problema 4

Sea ABC un triángulo equilátero. M es el punto medio del segmento AB y N es el punto medio del segmento BC. Sea P el punto exterior a ABC tal que el triángulo ACP es isósceles y rectángulo en P. PM y AN se cortan en I.
Probar que CI es la bisectriz del ángulo MCA.

Problema 5

Tenemos 12 puntos que son vértices de un polígono regular de 12 lados. Rafael debe trazar segmentos que tengan sus extremos en dos de los puntos dibujados. Tiene permitido que cada punto sea extremo de más de un segmento y que los segmentos se crucen, pero tiene prohibido trazar tres segmentos que sean los tres lados de un triángulo en el que cada vértice es uno de los puntos iniciales.
Hallar el mayor número de segmentos que puede trazar Rafael, y justificar por qué no puede trazar un mayor número de segmentos

VI OLIMPIADA DE MAYO
MAYO 2000
Primer nivel

Problema 1

Hallar todos los números naturales de cuatro cifras formados por dos dígitos pares y dos dígitos impares que verifican que al multiplicarlos por 2 se obtienen números de cuatro cifras con todos sus dígitos pares y al dividirlos por 2 se obtienen números naturales de cuatro cifras con todos sus dígitos impares.

Problema 2

Sea ABC un triángulo rectángulo en A, cuyo cateto AC mide 1 cm. La bisectriz del ángulo BAC corta a la hipotenusa en R; la perpendicular a AR trazada por R corta al lado AB en su punto medio. Hallar la medida del lado AB.

Problema 3

Para escribir todos los números naturales consecutivos desde $1ab$ hasta $ab2$ inclusive se han empleado $1ab1$ cifras. Determinar cuántas cifras más se necesitan para escribir los números naturales hasta el aab inclusive. Dar todas las posibilidades. (a y b representan dígitos)

Problema 4

Se tienen piezas con forma de triángulo equilátero de lados 1; 2; 3; 4; 5 y 6 (50 piezas de cada tamaño).

Se quiere armar un triángulo equilátero de lado 7 utilizando algunas de estas piezas, sin huecos ni superposiciones. ¿Cuál es el menor número de piezas necesarias?

Problema 5

En una hilera hay 12 naipes que pueden ser de tres clases: con sus dos caras blancas, con sus dos caras negras, o con una cara blanca y la otra negra.

Inicialmente hay 9 naipes con el lado negro hacia arriba.

Se da la vuelta a los seis primeros naipes de la izquierda y quedan 9 naipes con la cara negra hacia arriba.

A continuación se da la vuelta a los seis naipes centrales y quedan así 8 naipes con la cara negra hacia arriba.
Finalmente se da la vuelta a seis naipes: los tres primeros de la izquierda y los tres últimos de la derecha, y quedan así 3 naipes con la cara negra hacia arriba.
Decidir si con esta información se puede saber con certeza cuántos naipes de cada clase hay en la hilera.

VI OLIMPIADA DE MAYO
MAYO 2000
Segundo nivel

Problema 1

El conjunto $\{1,2,3,4\}$ puede ser partido en dos subconjuntos $A = \{1, 4\}$ y $B = \{3, 2\}$ sin elementos comunes y tales que la suma de los elementos de A es igual a la suma de los elementos de B. Una tal partición es imposible para el conjunto $\{1,2,3,4,5\}$ y también para el conjunto $\{1,2,3,4,5,6\}$.
Determinar todos los valores de n para los que el conjunto de los n primeros números naturales puede ser partido en dos subconjuntos sin elementos comunes tales que la suma de los elementos de cada subconjunto sea la misma.

Problema 2

En un paralelogramo de área 1 se trazan las rectas que unen cada vértice con el punto medio de cada lado no adyacente a él. Las 8 rectas trazadas determinan un octógono en el interior del paralelogramo. Calcular el área de dicho octógono.

Problema 3

Sean S una circunferencia de radio 2; S_1 una circunferencia de radio 1 tangente interiormente a S en B y S_2 una circunferencia de radio 1 tangente a S_1 en el punto A pero que no es tangente a S. Si K es el punto de intersección de la recta AB con la circunferencia S, demostrar que K pertenece a la circunferencia S_2.

Problema 4

Se tiene un cubo de $3 \times 3 \times 3$ formado por la unión de 27 cubitos de $1 \times 1 \times 1$. Se retiran algunos cubitos de tal modo que los que permanecen siguen formando un sólido constituido por cubitos que están unidos por lo menos por una cara al resto del sólido. Cuando se retira un cubito, los que permanecen lo hacen en el mismo lugar en que estaban.

¿Cuál es el máximo número de cubitos que se pueden retirar de modo que el área del sólido que resulta sea igual al área del cubo original?

Problema 5

Un rectángulo se puede dividir en n cuadrados iguales y también se puede dividir en $n+98$ cuadrados iguales. Si el área del rectángulo es n, con n entero, hallar los lados del rectángulo. Dar todas las posibilidades.

VII OLIMPIADA DE MAYO
MAYO 2001
Primer nivel

Problema 1

Sara escribió en la pizarra un número entero de menos de treinta cifras y que termina en 2. Celia borra el 2 del final y lo escribe al principio. El número que queda escrito es igual al doble del número que escribió Sara. ¿Qué número escribió Sara?

Problema 2

Tomamos un rectángulo *ABCD* de papel; el lado *AB* mide 5 cm y el lado *BC* mide 9 cm. Le hacemos tres pliegues:

a) Llevamos el lado *AB* sobre el lado *BC* y denominamos *P* al punto del lado *BC* que coincide con *A*. Se forma entonces un trapecio rectángulo *BCDQ*.
b) Doblamos de manera que *B* y *Q* coincidan. Se forma un polígono de 5 lados *RPCDQ*.
c) Doblamos de nuevo, haciendo coincidir *D* con *C* y *Q* con *P*. Se forma un nuevo trapecio rectángulo *RPCS*.

Después de estos pliegues, hacemos un corte perpendicular a SC por su punto medio T y queda el trapecio rectángulo $RUTS$. Calcula el área de la figura que aparece al desplegar el último trapecio $RUTS$.

Problema 3

Se tienen tres cajas, una azul, una blanca y una roja, y 8 bolitas. Cada una de las bolitas tiene escrito un número del 1 al 8, sin repeticiones. Se distribuyen las 8 bolitas en las tres cajas, de modo que haya por lo menos 2 bolitas en cada caja. Luego, en cada caja, se suman todos los números escritos en las bolitas que contiene. Los tres resultados se denominan suma azul, suma blanca y suma roja. Halla todas las distribuciones tales que la suma roja sea igual al doble de la suma azul, y la suma roja menos la suma blanca sea igual a la suma blanca menos la suma azul.

Problema 4

Utilizando exclusivamente números primos, se forma un conjunto con las siguientes condiciones:

a) Cualquier número primo de una cifra puede estar en el conjunto
b) Para que un número primo de más de una cifra esté en el conjunto, deben de estar en el conjunto el número que resulta de suprimirle sólo su primera cifra y también el número que resulta de suprimirle sólo su última cifra.

Escribe, de los conjuntos que cumplen estas condiciones, el que tiene mayor cantidad de elementos. Justifica por qué no puede haber uno con mayor cantidad de elementos. (Recuerda que el número 1 no es primo)

Problema 5

En un tablero de 8 casillas en fila hay inicialmente una ficha en cada casilla. Una jugada consiste en elegir dos fichas, y mover una de ellas una casilla hacia la derecha y la otra una casilla hacia la izquierda. Si después de 4 jugadas las 8 fichas están distribuidas en sólo 2 casillas, determina cuáles pueden ser esas casillas y cuántas fichas hay en cada una.

VII OLIMPIADA DE MAYO
MAYO 2001
Segundo nivel

Problema 1

En mi calculadora una de las teclas del 1 al 9 funciona mal: al apretarla aparece en la pantalla un dígito entre 1 y 9 que no es el que corresponde. Cuando traté de escribir el número 987654321, apareció en la pantalla un número divisible entre 11 y que deja resto 3 en la división por 9. ¿Cuál es la tecla descompuesta? ¿Cuál es el número que apareció en la pantalla?

Problema 2

En el trapecio $ABCD$, el lado DA es perpendicular a las bases AB y CD. La base AB mide 20 y el lado BC mide 65. Sea P el punto del lado BC tal que BP mide 45, y sea M el punto medio de DA. Calcula la medida del segmento PM.

Problema 3

En un tablero de 3 filas y 555 columnas, se colorean de rojo 3 casillas, una en cada una de las tres filas. Si se escriben en las casillas, ordenadamente por filas, de izquierda a derecha, los números de 1 a 1665 (en la primera fila, de 1 a 555, en la segunda, de 556 a 1110, y en la tercera de 1111 a 1665), hay tres números que quedan escritos en casillas rojas. Si se escriben en las casillas, ordenadamente por columnas, de arriba hacia abajo, los números del 1 a 1665 (en la primera columna, de 1 a 3; en la segunda de 4 a 6, ... , y en la última de 1663 a 1665), hay tres números que quedan escritos en casillas rojas. Indica cuáles son las casillas que hay que colorear de rojo para que sólo haya tres números rojos. Muestra todas las posibilidades.

Problema 4

Alrededor de un círculo se ubican 10 monedas de 1cm de radio de modo que cada moneda sea tangente al círculo y a sus dos monedas vecinas. Demuestra que la suma de las áreas de las diez monedas es el doble del área del círculo.

Problema 5

En la pizarra están escritos los números naturales desde 1 hasta 2001 inclusive. Hay que borrar algunos números de modo que entre los que quedan sin borrar sea imposible elegir dos números distintos tales que el resultado de su multiplicación sea igual a alguno de los números que quedan sin borrar. ¿Cuál es la mínima cantidad de números que se deben borrar? Para dicha cantidad, pon un ejemplo que muestre qué números se borran. Justifica por qué, si se borran menos números, no se tiene la propiedad deseada.

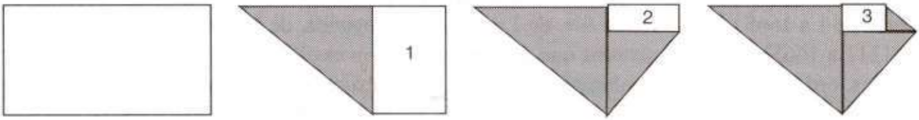
VIII OLIMPIADA DE MAYO
MAYO 2002
Primer nivel

Problema 1

Un grupo de hombres, algunos de ellos acompañados por su esposa, gastaron 1000 euros en un hotel. Cada hombre gastó 19 euros y cada mujer 13 euros.
Determina cuántas mujeres y cuántos hombres había.

Problema 2

Una hoja rectangular de papel (blanca de un lado y gris del otro) fue doblada tres veces, como lo muestra la figura:



El rectángulo 1, que quedó de color blanco después del primer doblez, tiene 20 cm más de perímetro que el rectángulo 2, que quedó blanco después del segundo doblez, y éste a su vez tiene 16 cm más de perímetro que el rectángulo 3, que quedó blanco después del tercer doblez. Determina el área de la hoja.

Problema 3

Mustafá compró una gran alfombra. El vendedor midió la alfombra con una regla que supuestamente medía un metro. Como resultó de 30 metros de largo por 20 metros de ancho, le cobró 12000 rupias. Cuando Mustafá llegó a su casa midió nuevamente la alfombra y se dio cuenta que el vendedor le había cobrado 9408 rupias de más. ¿Cuántos centímetros mide la regla que usó el vendedor?

Problema 4

En un banco sólo el director conoce la combinación de la caja fuerte, que es un número de cinco dígitos. Para respaldar esta combinación se da a cada uno de los diez empleados del banco un número de cinco dígitos. Cada uno de estos números de respaldo tiene en una de las cinco posiciones el mismo dígito que la combinación y en las otras cuatro posiciones un dígito diferente del que tiene en ese lugar la combinación. Los números de respaldo son:
07344, 14098, 27356, 36429, 45374, 52207, 63822, 70558, 85237, 97665
¿Cuál es la combinación de la caja fuerte?

Problema 5

Halla el máximo número de cajitas de $3 \times 5 \times 7$ que se pueden colocar dentro de una caja de $11 \times 35 \times 39$. Para el número hallado, indica cómo ubicarías esa cantidad de cajitas dentro de la caja.

VIII OLIMPIADA DE MAYO
MAYO 2002
Segundo nivel

Problema 1

Utilizando cubitos blancos de lado 1 se armó un prisma (sin huecos). Se pintaron de negro las caras del prisma. Se sabe que los cubitos que quedaron con exactamente cuatro caras blancas son 20 en total. Determina cuáles pueden ser las dimensiones del prisma. Da todas las posibilidades.

Problema 2

Sea k un entero positivo dado, $k \geq 10$. Dada una lista de diez números, la operación permitida es: elegir k números de la lista y sumarle 1 a cada uno de ellos. Se obtiene así una nueva lista de diez números. Si inicialmente se tiene la lista 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, determina los valores de k para los que es posible, mediante una secuencia de operaciones permitidas, obtener una nueva lista que tenga los diez números iguales. En cada caso, indica la secuencia.

Problema 3

En un triángulo ABC, rectángulo en A e isósceles, sea D un punto del lado AC ($D \neq A$ y $D \neq C$) y sea E el punto de la prolongación del lado BA tal que el triángulo ADE es isósceles. Si P es el punto medio del segmento BD, R es el punto medio del segmento CE y Q es el punto donde se cortan las rectas ED y BC, demuestra que el cuadrilátero $ARQP$ es un cuadrado.

Problema 4

Los vértices de un polígono regular de 2002 lados están numerados de 1 a 2002, en sentido horario. Dado un entero n, $1 \leq n \leq 2002$, se colorea de azul el vértice n, luego, siguiendo el sentido horario, se cuentan n vértices comenzando en el siguiente de n, y se colorea de azul el número n. Y así sucesivamente, a partir del número que sigue al último vértice que se ha coloreado, se cuentan n vértices, coloreados o sin colorear, y se colorea de azul el número n. Cuando el vértice que toca colorear es azul, el proceso se detiene. Denotamos $P(n)$ al conjunto de vértices azules que se obtienen con este procedimiento cuando se comienza por el vértice n. Por ejemplo, $P(364)$ está formado por los vértices 364, 728, 1092, 1456, 1820, 182, 546, 910, 1274, 1638 y 2002.

Determina todos los enteros n, $1 \leq n \leq 2002$, tales que $P(n)$ tiene exactamente 14 vértices.

Problema 5

Dados x e y enteros positivos, consideramos una cuadrícula de x x y, que tiene coloreados de rojo los $(x+1)\cdot(y+1)$ puntos que son vértices de cuadraditos. Inicialmente hay una hormiga en cada uno de los puntos rojos. En un instante dado, todas las hormigas comienzan a caminar por las líneas de la cuadrícula, y todas lo hacen con la misma velocidad. Cada vez que llegan a un punto rojo, giran 90° en alguna dirección.

Determina todos los valores de x e y para los cuales es posible que las hormigas sigan moviéndose indefinidamente de manera que en ningún momento haya dos o más hormigas en un mismo punto rojo. (No interesan las posibles coincidencias en puntos de las líneas de la cuadrícula que no sean rojos)

VIII OLIMPIADA DE MAYO
SOLUCIONES PRIMER NIVEL

Problema 1

Supongamos que n hombres van solos y m hombres con su esposa; como los hombres solos gastaron 19 • y los que van con su esposa gastaron juntos 32 •, se tiene $19\,n + 32\,m = 1000$.
Como 32 y 1000 son múltiplos de 8, n debe ser múltiplo de 8. Además, $19n \leq 1000$, luego $n < 53$. En la siguiente tabla vemos:

n	$1000 - 19n = 32m$	m
8	848	no es entero
16	696	no es entero
24	544	17
32	392	no es entero
40	240	no es entero
48	88	no es entero

Entonces $n = 24$ y $m = 17$. Así, había 41 hombres y 17 mujeres.

Otra solución:

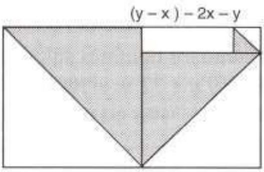
Como cada mujer paga 13 • y cada hombre 19 •, podemos escribir $13\,m + 19h = 1000$.
(m es el número de mujeres, h es el de hombres y $m \leq h$)
Por tanteo organizado se puede obtener que si $h \leq 31$ entonces no se verifica que $m<h$.

h	$1000 - 19h = 13m$	m
32	392	no es entero
33	373	no es entero
34	354	no es entero
35	335	no es entero
36	316	no es entero
37	297	no es entero
38	278	no es entero
39	259	no es entero
40	240	no es entero
41	221	17

Otra estrategia para tantear puede surgir de considerar listados de los múltiplos de 13 y 19 y buscar parejas que sumen 1000.

Problema 2

Solución 1.



Perímetro del rectángulo 3:

$P_3 = 2(2y - 3x + 2x - y) = 2(y - x)$

Perímetro del rectángulo 2:

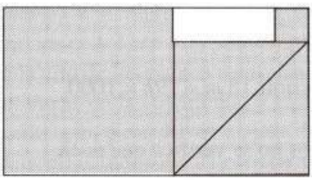
$P_2 = 2(2x - y + y - x) = 2x$

Perímetro del rectángulo 1:

$P_1 = 2(y - x + x) = 2y.$

Entonces:

$\begin{cases} 2x + 20 = 2y \\ 2y - 2x + 16 = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = -10 \\ -2x + y = -8 \end{cases} \Rightarrow x = 18$; $y = 28$, luego el área de la hoja es $18 \cdot 28 = 504$ cm^2.



Solución 2

Por surgir de dobleces, tenemos la hoja dividida en un rectángulo blanco (el 3 del enunciado), y los tres cuadrados de la figura: uno grande (a la izquierda), uno mediano (en la esquina inferior derecha) y uno pequeño (en la esquina superior derecha). Al pasar del rectángulo 1 al 2, como los lados horizontales no se modifican y el perímetro disminuye en 20, los lados verticales disminuyen cada uno en 10. Entonces el cuadrado mediano tiene lado 10.

Del mismo modo, al pasar del rectángulo 2 al 3, como los lados verticales no se modifican y el perímetro disminuye en 16, cada lado horizontal disminuye en 8. Por lo tanto, el cuadrado pequeño tiene lado 8.

El lado del cuadrado grande coincide con el lado menor de la hoja y es igual a la suma del lado del cuadrado mediano más el lado del cuadrado pequeño: $10 + 8 = 18$.

El lado mayor de la hoja es igual a la suma del lado del cuadrado grande más el lado del cuadrado mediano: $18+10=28$. Entonces el área de la hoja es $18 \cdot 28=504$ cm^2.

Problema 3

En teoría la superficie de la alfombra vendida era $20 \cdot 36 = 600$ m^2, luego el precio del metro cuadrado es de 120.000 : 2 = 200 rupias.

Si la medida de la regla que usó el vendedor es x, en realidad la alfombra mide 30x de largo y 20x de ancho. Como le cobró 9.408 rupias de más, de la ecuación: $(600 - 600x^2) \cdot 200 = 9408$ se obtiene

$$x^2 = \frac{120000 - 9408}{120000} = 0{,}9216 \text{ m}^2 = 9216 \text{ cm}^2,\ x = 96 \text{ cm.}$$

Problema 4

Sólo en uno de los diez números el primer dígito es correcto. En los nueve restantes, el dígito correcto ocupa una de las otras cuatro posiciones. Por lo tanto, debe haber por lo menos tres números que tengan el dígito correcto en una misma posición, pues hay nueve números para distribuir en cuatro posiciones.

Únicamente el 7 en la segunda posición o el 3 en la tercera se han utilizado tres veces. No pueden estar ambos dígitos en esas posiciones, porque entonces 2**73**56 o 0**73**44 tendrían dos dígitos correctos.

Concluimos entonces:

- En la primera posición sólo uno de los números tiene el dígito correcto.
- Hay sólo una posición en la que tres de los números tienen el dígito correcto.
- En cada una de las tres posiciones restantes hay exactamente dos números que tienen un dígito correcto.
- El segundo dígito puede ser el 7 (usado tres veces) o el 5 (usado dos veces). Si fuese el 5, el tercer dígito sería el 3, que es el único que se usa tres veces. Pero esto es imposible, porque entonces 4**53**74 tendría dos dígitos correctos.

Por lo tanto, el segundo dígito es 7 y el tercero debe ser 2, porque es el único usado dos veces en esta posición.

En quinto lugar pueden ir el 4, el 7 o el 8. No puede ser 4, pues 0**7**34**4** tendría dos dígitos correctos y tampoco puede ser 7, pues 52**2**0**7** tendría dos dígitos correctos. Así que el dígito que ocupa el quinto lugar debe ser 8.

En cuarto lugar pueden aparecer un 5 o un 2. Descartamos el 5, porque 2**7**3**5**6 tendría dos dígitos correctos, así que en cuarto lugar hay un 2.

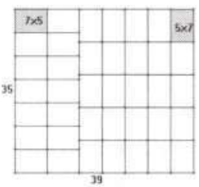
El único número que no tiene 7 en segundo lugar, ni 2 en el tercer lugar, ni 2 en cuarto lugar, ni 8 en quinto lugar es el 45373; por lo tanto el dígito del primer lugar tiene que ser el 4.

Por lo tanto **el número de la combinación es el 47228.**

Problema 5

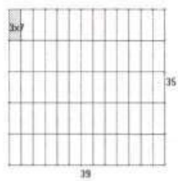
El volumen de la caja es 11·35·39 y el de cada cajita es 3·5·7, luego se pueden colocar a lo sumo $\frac{11 \cdot 35 \cdot 39}{3 \cdot 5 \cdot 7}$ cajitas.

Veamos que es posible colocar 143 cajitas dentro de la caja:



En un rectángulo de 35 x 39 se pueden colocar sin solapamientos 39 rectángulos de 5 x 7 (como se indica en la figura de la izquierda). Entonces, con dos capas de 39 cajitas de 3 x 5 x 7 se llena la caja de base 35 x 39 hasta la altura 6, y queda libre un espacio de 5 x 35 x 39.

En un rectángulo de 35 x 39 se colocan sin solapamientos 65 rectángulos de 7 x 3 (como se indica en la figura de la derecha). Entonces, con una capa de 65 cajitas de 3 x 5 x 7 se completa la altura 5 que quedaba libre en la caja.



De este modo se colocan en la caja **78 + 65 = 143** cajitas y no queda ningún espacio vacío.

VIII OLIMPIADA DE MAYO
SOLUCIONES SEGUNDO NIVEL

Problema 1

Sean m, n y k con $m \leq n \leq k$ las longitudes de las aristas del prisma. Entonces k es mayor que 2 pues $m \cdot n \cdot k > 20$.

Es imposible que sea $m = n = 1$, porque en un prisma de $1 \times 1 \times k$ no quedan cubitos que tengan cuatro caras blancas.

Si $m = 1$ y $k \geq n \geq 2$ los cubitos con cuatro caras blancas exactamente son todos menos los que conforman las aristas del prisma, y tenemos $(n-2)(k-2) = 20 = 2^2 \times 5$. Las posibilidades son:

$n-2$	$k-2$	n	k
1	20	3	22
2	10	4	12
4	5	6	7

Si $m = 1$, las dimensiones del prisma pueden ser 1 x 3 x 32, 1 x 4 x 12 y 1 x 6 x 7.

Si $m \geq 2$ los cubitos que tienen exactamente 4 caras blancas son los que conforman las aristas del prisma, salvo los 8 de las esquinas, y tenemos $4(m-2) + 4(n-2) + 4(k-2) = 20$.

Entonces $4(m + n + k - 6) = 20$, es decir, $m + n + k = 11$. Las posibilidades para obtener 11 como valor de la suma con tres sumandos mayores o iguales que 2 son:

m	n	k
2	2	7
2	3	6
2	4	5
3	3	5
3	4	4

Finalmente, los posibles prismas son 8:

1 x 3 x 22 , 1 x 4 x 12, 1 x 6 x 7, 2 x 2 x 7, 2 x 3 x 6, 2 x 4 x 5, 3 x 3 x 5 y 3 x 4 x 4.

Problema 2

Supongamos que es posible conseguir una lista de diez números iguales a a mediante una secuencia de pasos. Como después de cada movimiento la suma de los números de la lista aumenta en k, resulta que $10a = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) + kb = 55 + kb$.

Como $10a$ es par y 55 es impar, k y b tienen que ser ambos impares.

Los valores posibles de k son:

- **$k = 1$:** en 45 pasos podemos conseguir que todos los números tomen el valor 10.

- **$k = 5$** : en 9 pasos podemos conseguir que todos los números tomen el valor 10. Hay que elegir el primer número de la lista todas las veces, y nunca el valor 10. Elegimos cuatro veces los cinco primeros números de la lista y llegamos a **5 6 7 8 9 6 7 8 9 10.** En cada una de las tres operaciones siguientes elegimos los cinco números más pequeños de la lista y obtenemos:

6788978 8 8 9 10 → 7 8 9 8 9 8 9 8 9 10 → 8 9 9 9 9 9 9 9 9 10

9 10 10 10 10 9 9 9 9 10 → 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10

- **$k = 3$:** $10 \cdot 10 = 55 + 15 \cdot 3$. En quince pasos podemos conseguir que todos los números tomen el valor 10. Nunca elegiremos el valor 10. Quedan nueve números, que agruparemos en tres grupos de tres. Con las primeras elecciones, conseguimos que las tres ternas sean iguales a 7, 8, 9. Después, eligiendo un número en cada una de ellas, las transformamos en 10, 10, 10:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6 veces									
3 veces									
tenemos	7	8	9	7	8	9	7	8	9
3 veces									
2 veces									
1 vez									
Llegamos a	10	10	10	10	10	10	10	10	10

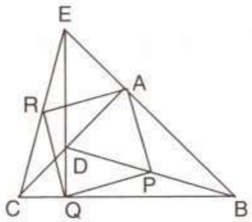
- **$k = 7$:** b tiene que ser un múltiplo impar de 5, mayor que 9. Así, $10 \cdot 16 = 55 + 7 \cdot 15 = 160$, y se puede conseguir que todos los números tomen el valor 16 en 15 pasos. Hay que elegir siempre el primer número de cada lista (15 veces). En la tabla siguiente se muestra como elegir grupos de 6 entre los 9 restantes. Como en el caso anterior, conseguimos tres ternas iguales, y luego se lleva cada una de ellas a 16 eligiendo dos números en cada terna:

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6 veces									
3 veces									
tenemos	11	12	13	11	12	13	11	12	13
2 veces									
1 vez									
tenemos	14	14	14	14	14	14	14	14	14
1 vez									
1 vez									
1 vez									
Llegamos a	16	16	16	16	16	16	16	16	16

- ***k* = 9:** cada elección equivale a elegir el número que no se usará. Para llegar a tener todos los números iguales en un número mínimo de pasos, habrá que usar el primer número de la lista siempre, es decir, se deja de usar 0 veces; el 2 se deja de usar 1 vez, el 3 dos veces y así sucesivamente. Por tanto, serán necesarios al menos $1 + 2 + 3 + ... + 9 = 45$ pasos para conseguir que todos los números sean iguales a 46. En la tabla siguiente está marcado el número que NO se usa: se eligen los ocho restantes junto con el 1.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9 veces									
8 veces									
7 veces									
6 veces									
5 veces									
4 veces									
3 veces									
2 veces									
1 vez									
Llegamos a	46	46	46	46	46	46	46	46	46

Problema 3



Solución 1

Como el triángulo *DAE* es rectángulo en A e isósceles, $\angle DAE = 45^{\circ}$.

Por lo tanto los triángulos *BQD* y *BDA* son rectángulos, con hipotenusa común *DB*, y el cuadrilátero *ABDQ* es cíclico. (los pares de ángulos opuestos suman 180°). Su circunferencia circunscrita tiene centro en *P*; por lo tanto *PA*=*PQ*=radio, y $\angle QPA = 90^{\circ}$, porque es el ángulo central que abarca el mismo ángulo que el inscrito $QBA = 45^{\circ}$.

También es rectángulo el triángulo *CAE*, y el triángulo *CQE*, ambos de hipotenusa *CE*, y el cuadrilátero *ECQA* es cíclico, siendo *R* el centro de su circunferencia circunscrita. Luego $RA = RQ$, y son perpendiculares, al ser $\angle QRA$ el ángulo central correspondiente a $QEA = 45^{\circ}$.

Por último, los triángulos *QPA* y *QRA* son ambos rectángulos isósceles con hipotenusa común *QA*, luego el cuadrilátero *QPAR* es un cuadrado.

Solución 2

Como $EA = AD$, $AC = BC$ y $\angle EAC = \angle BAD = 90^{\circ}$,, los triángulos *BAD* y *CAE* son iguales y $CE = BD$

El triángulo *CAE* es rectángulo en *A* y *R* es el punto medio de la hipotenusa: $RA = RE = RC = \dfrac{CE}{2}$

El triángulo *BAD* es rectángulo y *P* es el punto medio de la hipotenusa: $PA = PB = PD = \dfrac{DB}{2}$

Entonces $RA = PA$

Además, $\angle PBA = \angle PAB = \alpha = \angle RCA = \angle RAC$.

Entonces, $\angle PAB = \alpha$, $\angle DAB = 90^{\circ}$ $\angle DAP = 90^{\circ} - \alpha$. Como también $\angle DAR = \alpha$, tenemos que $\angle PAR = \angle DAP + \angle DAR = 90^{\circ} - \alpha + \alpha = 90^{\circ}$.

Por otra parte, $\angle ADE = 45^{\circ} = \angle QDC$ y $\angle DQC = 45^{\circ}$, por lo que el triángulo *DQC* es rectángulo en *Q* y el triángulo *EQC* es rectángulo en *Q*, siendo *R* el punto medio de la hipotenusa. Así resulta que $RE = RQ = RC = \dfrac{RE}{2}$.

Como el triángulo *BDQ* es rectángulo en *Q* y *P* es el punto medio de su hipotenusa, . Así, *ARQP* es un cuadrilátero con todos sus lados iguales y que tiene un ángulo recto: es un cuadrado.

Problema 4

Al colorear los vértices del polígono de n en n, resultan coloreados exactamente 14 vértices si y sólo si en el paso quince se cae por primera vez en un vértice coloreado.

Este vértice sobre el que se recae por primera vez debe ser necesariamente el vértice n: si el primer vértice sobre el que se recayera (vértice q) no fuera el primer vértice coloreado (vértice n), en el vértice que se obtiene contando n en sentido antihorario a partir de q también se caería dos veces, una vez al colorear el punto q por primera vez (ya que q no es el primer vértice coloreado del proceso) y otra, antes de colorear el vértice q por segunda vez; por tanto el vértice q no sería el primer vértice sobre el que se recae.

En el paso quince se recae por primera vez sobre el vértice n cuando en el paso catorce se cae por primera vez en el vértice 2002. Esto equivale a pedir que m.c.m(n,2002) = $14n$; o sea, $14n$ debe ser múltiplo de 2002 y $p \cdot n$ no puede ser múltiplo de 2002 para

$p = 1,2,3, \ldots ,13$.

Si $14n = 2002k$, entonces $n = 143k$, y como $1 \leq n \leq 2002$, resulta que $1 \leq n \leq 14$

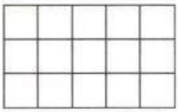
Decir que m.c.m.(n,2002) = $14n$ equivale a que k es impar y no es múltiplo de 7. (si k fuera par, entonces $7n = 2002 \cdot \frac{k}{2}$ sería un múltiplo común menor que $14n$ y si k fuese múltiplo de 7 entonces $2002 \cdot \frac{k}{7} = 2n$ sería un múltiplo común menor que $14n$.

Los valores válidos de n se obtienen en la tabla siguiente:

k	n
1	143
3	429
5	715
9	1287
11	1573
13	1859

Problema 5

Si x e y son ambos impares, el movimiento es posible. Si consideramos los cuadraditos colocados en filas y columnas impares, todo punto rojo es vértice de alguno de estos cuadraditos. En cada uno de ellos, las cuatro hormigas que están en sus vértices recorren eternamente el perímetro del cuadradito en el sentido de las agujas del reloj.

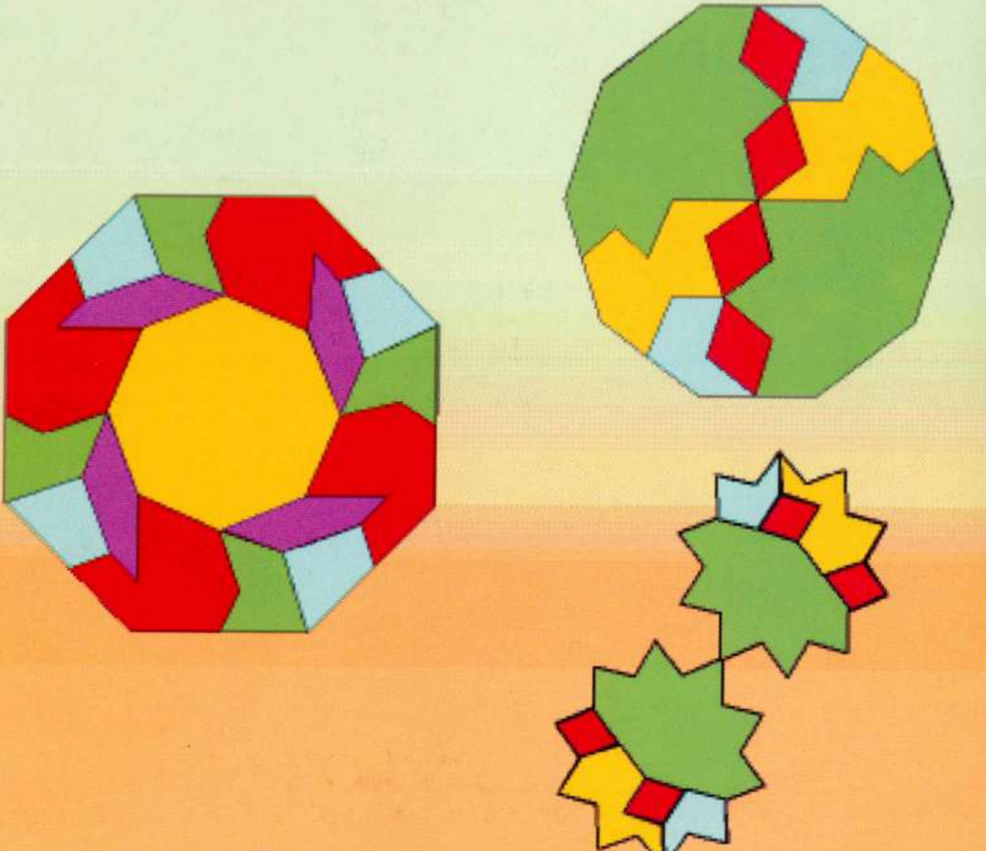


Veamos que en cualquier otro caso el movimiento es imposible. Recoloreamos todos los puntos de la siguiente manera: en las filas impares recoloreamos alternadamente de verde y amarillo, comenzando con verde, de izquierda a derecha.

En las filas pares coloreamos alternadamente de negro y blanco, comenzando con negro, de izquierda a derecha.

$$x+1\left\{\begin{array}{l} VAVAVAVA\ldots \\ NBNBNBNB\ldots \\ VAVAVAVA\ldots \\ NBNBNBNB\ldots \end{array}\right.$$
$$\xrightarrow[y+1]{\qquad\qquad}$$

Sean v, a, n y b el número de puntos verdes, amarillos, negros y blancos, respectivamente. Observamos que si x es par o y es par se tiene $v > n$ o $v > a$, pues el número de filas impares es mayor que el de pares, o el número de columnas impares es mayor que el de pares.
Además $n \geq b$ y $a \geq b$. Por lo tanto, $v > n \geq b$ o $v > a \geq b$ y en ambos casos $v > b$.
Una hormiga que hace su primer movimiento en dirección horizontal debe hacer un segundo movimiento vertical, por lo que si sale de un punto verde, pasa a uno amarillo y luego a uno blanco. Una hormiga que empieza a moverse verticalmente debe hacer en segundo lugar un movimiento horizontal, luego si sale de un punto verde, pasa a uno negro y después a uno blanco. Es decir, todas las hormigas que empiezan su paseo en puntos verdes, al cabo de dos movimientos están en puntos blancos. Como hay más puntos verdes que blancos, al finalizar el segundo movimiento habrá al menos dos hormigas en un mismo punto blanco.
Esto demuestra que si los números x e y no son ambos impares, entonces a lo sumo en dos pasos habrá dos hormigas en un mismo punto rojo de la coloración inicial.



Colaboran:

Consejeria
de Educación

sm

ANAYA

VIII Concurso de Primavera de Matemáticas 2004

Comunidad de Madrid

Comité organizador del Concurso de Primavera

Juan Jesús Donaire Moreno
Jesús García Gual
Joaquín Hernández Gómez
Alfredo Martínez Sanz
Fernando Moya Molina
Merche Sánchez Benito
Javier Soler Areta
Luis Ferrero de Pablo
María Gaspar Alonso-Vega
Francisco López Álvarez
Esteban Serrano Marugán
Víctor Manuel Sánchez González
José María Sordo Juanena

En el interior de las personas reales
habitan muchos seres imaginarios
(Graham Greene)

Un año más, puntuales a la cita con una de nuestras aficiones, podemos recontar en este libro algo de lo que ocurrió en la convocatoria pasada, en la que unos, actores, y otros, preparadores y animadores, fuisteis los protagonistas . Cada vez más cerca del infinito, pues entramos en el concurso nº 8, y a igual distancia de conseguir la cuarta hora oficial de Matemáticas en los cursos de 3º y 4º de la ESO, esta primavera de los números y las formas resurge de su semilla.

Este año, este libro, queremos dedicárselo, demasiado tarde, a nuestro amigo Jesús Esquinas, profesor del Departamento de Matemática Aplicada de la Facultad de Matemáticas de la U.C.M. Su muerte inesperada nos ha sorprendido a todos y se ha ido sin tener nuestro reconocimiento público.

Persona afable, bondadosa e inteligente, nos regaló su bien más preciado, su tiempo, para apoyarnos en esta aventura, no sólo con su aliento sino también con su esfuerzo, haciendo todo lo que estuvo en su mano para llegar a todas las instituciones y conseguir que este proyecto saliera adelante. Con sus conversaciones también nos enseñó, sin proponérselo, **a pensar** rehuyendo todo dogmatismo.

Su vida fue un ejemplo en el que se hicieron realidad los versos de Pablo Milanés: " *La vida no vale nada si no es para merecer que otros puedan tener lo que uno disfruta y ama*"

Muchas gracias Jesús.

Gracias también a la Facultad de Matemáticas de la U.C.M, a la Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid y a los grupos editoriales ANAYA y S.M. por su continuado apoyo.

VII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE : Día 26 de febrero de 2003

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

*Escribe ahora los siguientes datos:

Apellidos	Nombre	
Colegio	**Curso**	**Año de nacimiento**

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **RODEA LA LETRA CORRESPONDIENTE A LA RESPUESTA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y RODEA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Ediciones S.M. y Grupo ANAYA

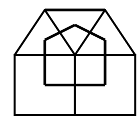
1.- El número que hay que escribir en el recuadro para que se cumpla la igualdad siguiente
$444 + 444 + 444 = (3 \times 400) + (3 \times \square)$ es:
A) 38; B) 40; C) 42; D) 44; E) 46.

2.- Si hoy es miércoles, dentro de 10 días será:
A) Viernes; B) Sábado; C) Domingo; D) Lunes; E) Martes.

3.- El mayor número menor que 100 que es múltiplo de 8 es:
A) 88; B) 96; C) 98; D) 99; E) 104.

4.- ¿ Cuántos números de dos cifras hay que sean menores que 50?
A) 50; B) 49; C) 40; D) 39; E) 38.

5.- El pentágono de la figura tiene sus vértices en centros de triángulos equiláteros y en centros de cuadrados.
Los ángulos mayores del pentágono miden:



A) 90º; B) 100º; C) 105º; D) 120º; E) 150º.

6.- Si Antonio tiene doble número de sellos que Beatriz, entre los dos pueden tener:
A) 1214; B) 1318; C) 491; D) 967; E) 1029.

7.- Si elijo tres números diferentes, uno de cada uno de estos conjuntos {6, 7, 8}, {2, 5, 8}, {4, 6, 8}, la mayor suma que puedo obtener con ellos es:
A) 24; B) 21; C) 20; D) 19; E) 18.

8.- Sumo todos los números enteros desde 1001 hasta 2003 y a esa suma le resto la suma de todos los enteros desde 1 hasta 1003, es decir, calculo
$(1001 + 1002 + \ldots + 2002 + 2003) - (1 + 2 + 3 + \ldots + 1002 + 1003)$
El resultado es igual a $1003 \times \square$ donde el número que aparece en el recuadro es:
A) 999; B) 1000; C) 1001; D) 1002; E) 2002.

9.- La suma de las cifras del mayor número capicúa de tres cifras, que sea múltiplo de 6 es:
A) 26; B) 25; C) 24; D) 23; E) 22.

10.- Al dividir un número entre 1027, resulta 3 de cociente y 1 de resto. ¿De qué número se trata?
A) 3092; B) 3191; C) 3181; D) 3182; E) 3082.

11.- Todos los números que son divisibles por 16, tienen que ser divisibles por los números siguientes salvo el:
A) 8; B) 6; C) 4; D) 2; E) 1.

12.- Un kilogramo de café cuesta 9,6 euros , un litro de leche 0,60 euros y un kilogramo de azúcar 1 euro. ¿A qué precio sale una taza de café con leche con 12,5 gramos de café, 15 centilitros de leche y 10 gramos de azúcar?
A) 0,50 €; B) 0,24 €; C) 0,22 €; D) 0,18 €; E) 0,15 €.

13.- El perímetro de un cuadrado es doble que el de otro. Si el lado del cuadrado grande mide 6 cm, el área del cuadrado pequeño es:
A) 9 cm^2; B) 18 cm^2; C) 36 cm^2; D) 60 cm^2; E) 72 cm^2.

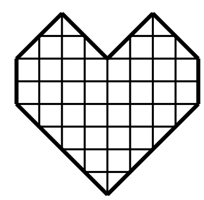
14.- En un quiosco de prensa al final de la mañana se ha vendido la mitad de los periódicos. Por la tarde se vendieron la mitad de los que quedaban y se quedaron 40 periódicos sin vender. ¿Cuántos periódicos había en el quiosco al comenzar el día?
A) 120; B) 160; C) 200; D) 240; E) 280.

15.- Un rectángulo es triple de largo que de ancho. Si sus lados vienen dados con números enteros, su perímetro puede ser:
A) 63; B) 65; C) 67; D) 70; E) 72.

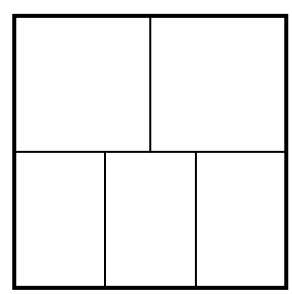
16.- Alicia y Pedro van viajando en un tren muy largo. Alicia se sube en el vagón número 17 empezando a contar por la cabeza y Pedro en el 34 empezando a contar por la cola. Si resulta que van en el mismo vagón, ¿cuántos vagones tiene el tren?
A) 48; B) 49; C) 50; D) 51; E) 52.

17.- Encima de una mesa hay cuadrados y triángulos, con un total de 17 vértices. ¿Cuántos triángulos hay?
A) 1; B) 2; C) 3; D) 4; E) 5.

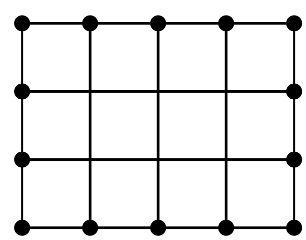
18.- Beatriz ha hecho un corazón de chocolate como el de la figura. Si cada cuadradito contiene 10 g de chocolate, ¿cuál es el peso total del corazón?
A) 340 g; B) 360 g; C) 380 g; D) 400 g; E) 420 g.



19.- Cinco amigos colocan sus toallas de baño sobre la playa formando un gran cuadrado como indica la figura. Alicia y Beatriz tienen toallas cuadradas iguales, cada una de 720 cm de perímetro, mientras que las toallas de Carlos, Diana y Emilio son rectangulares e iguales. ¿Cuál es el perímetro de la toalla de Emilio?
A) 600 cm; B) 560 cm; C) 440 cm; D) 360 cm; E) 300 cm.



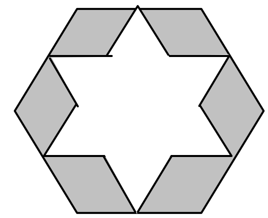
20.- En la cuadrícula de la figura, de 12 cuadraditos, hay 14 vértices sobre los lados exteriores y 6 sobre en el interior. ¿Cuántos cuadraditos tendrá una cuadrícula que tiene 32 vértices en el interior y 28 sobre los lados exteriores?
A) 40; B) 45; C) 54; D) 60; E) 120.



21.- He tecleado un número en la calculadora. Si lo duplico, al resultado le sumo 9 y al número obtenido lo divido por 3, se obtiene el número 11. ¿Cuál era el primer número?
A) 8; B) 3; C) 7; D) 12; E) 4.

22.- Si el área del hexágono exterior de la figura es 3 cm^2, el área de la estrella interior, en mm^2, es:

A) 10; B) 15; C) 100; D) 150; E) 200.

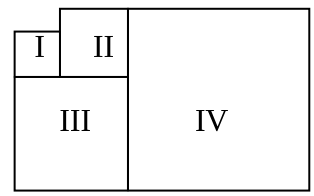


23.- Un campo rectangular de 80 m de longitud, tiene 3200 m^2 de área. ¿Cuál es la longitud de otro campo rectangular en el que el área y la anchura son la mitad del área y la anchura del primer campo?

A) 20 m; B) 40 m; C) 60 m; D) 80 m; E) 100 m.

24.- Las figuras I, II, III y IV son cuadrados. Si el perímetro del cuadrado I es 16 cm y el del cuadrado II 24 cm, ¿cuál es el perímetro del cuadrado IV?

A) 56; B) 60; C) 64; D) 72; E) 80.



25.- Nos ponemos a escribir la lista de cifras 12321232123212321 .... y paramos cuando hayamos escrito 2003 cifras. ¿Cuáles son las tres últimas cifras que hemos escrito?

A) 232; B) 123; C) 323; D) 212; E) 321

VII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE : Día 26 de febrero de 2003

NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

*Escribe ahora los siguientes datos:

Apellidos	Nombre	
Colegio o Instituto	**Curso**	**Año de nacimiento**

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **RODEA LA LETRA CORRESPONDIENTE A LA RESPUESTA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y RODEA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Ediciones S.M. y Grupo ANAYA

1.- En el dibujo que te mostramos, el valor de x es:

A) 120; B) 100; C) 140; D) 150; E) 130.

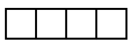
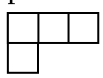
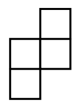
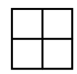
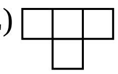
2.- $10^3 + 10^2 + 10 + 1$ es igual a:

A) 1001; B) 1010; C) 1011; D) 1110; E) 1111.

3.- 1,1 x 0,7 es igual a:

A) 77; B) 7,7; C) 0,77; D) 0,707; E) 7,07.

4.- Cada una de las figuras que te mostramos está formada por 4 cuadrados de igual área, ¿cuál de ellas tiene un perímetro distinto al de las otras?

A)  B)  C)  D)  E) 

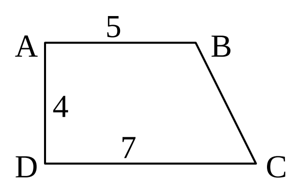
5.- ¿Qué número de los siguientes debe utilizarse dentro del cuadradito para estar seguros de que el valor de $\frac{\Box}{8}$ esté entre 6 y 7 ?

A) 36; B) 40; C) 45; D) 50; E) 60.

6.- ¿Qué número está justamente en medio de $\frac{1}{6}$ *y* $\frac{1}{10}$?

A) $\frac{1}{8}$; B) $\frac{7}{60}$; C) $\frac{2}{15}$; D) $\frac{2}{60}$; E) $\frac{1}{12}$.

7.- En el dibujo de la figura, los ángulos A y D son rectos.



¿Cuál es el área del cuadrilátero ABCD?

A) 20; B) 22; C) 24; D) 26; E) 28.

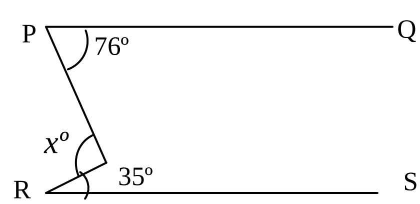
8.- Una caja pesa 242 kg cuando está llena y 188 kg cuando está llena hasta la mitad. ¿Cuántos kg pesa cuando está vacía?

A) 94; B) 268; C) 134; D) 54; E) 108.

9.- ¿Cuál de los siguientes números es el más próximo a $\frac{53{,}1 \times 0{,}046}{0{,}0021}$?

A) 1; B) 100; C) 1000; D) 10000; E) 100000.

10.- Si PQ es paralela a RS, x es igual a:



A) 111; B) 41; C) 91; D) 121; E) 131.

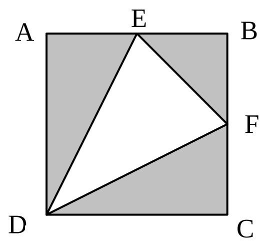
11.- De 30 veces que lancé una moneda, obtuve 12 caras; así pues mi porcentaje de caras fue el 40 %. He vuelto a lanzar 10 veces más y he subido mi porcentaje al 50 %. ¿Cuántas caras he obtenido en las 10 últimas tiradas?

A) 3; B) 4; C) 6; D) 8; E) 10.

12.- Corriendo a una velocidad de 10 km/h, he recorrido cierta distancia en 6 minutos. ¿A qué velocidad media debería correr para cubrir la misma distancia en 8 minutos?

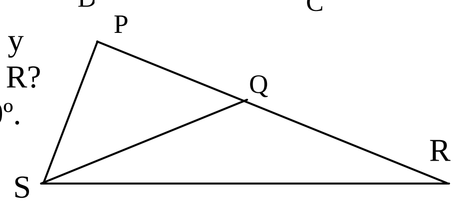
A) 7,5 km/h; B) 7,75 km/h; C) 8 km/h; D) 8,25 km/h; E) 8,5 km/h.

13.- Si ABCD es un cuadrado y E y F son los puntos medios de los lados AB y BC respectivamente, ¿qué fracción del cuadrado ocupa la zona sombreada?



A) $\frac{1}{2}$; B) $\frac{2}{3}$; C) $\frac{3}{4}$; D) $\frac{5}{8}$; E) $\frac{1}{4}$.

14.- En el dibujo que te mostramos PS = PQ, QS = QR y el ángulo en P es 80º. ¿Cuál es el valor del ángulo en R?

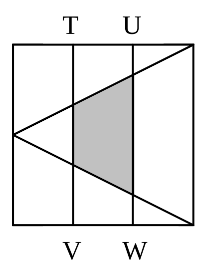


A) 10º; B) 15º; C) 20º; D) 25º; E) 30º.

15.- En una librería hay menos de 300 libros. Si los agrupo en paquetes de 12, me sobran 2 libros. Si los agrupo en paquetes de 9, también me sobran 2 libros. Y si los agrupo en paquetes de 7 libros, no me sobra ninguno. El número de libros de esa librería es:

A) menor que 50; B) Entre 50 y 100; C) Entre 100 y 150;
D) Entre 150 y 200; E) Nada de lo anterior.

16.- Si el cuadrado tiene 30 cm^2 de área y los puntos T, U, V y W dividen a los lados correspondientes en partes iguales, el área de la zona sombreada, en cm^2, es:

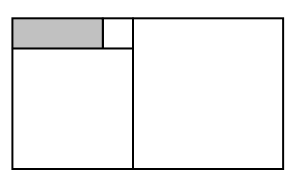


A) 2,5; B) 2; C) 3; D) 6; E) 5.

17.- ¿Cuál de los siguientes números no es $\frac{3}{4}$?

A) $\frac{3+3}{4+4}$; B) $\frac{3\times 2}{4\times 2}$; C) $\frac{3:2}{4:2}$; D) $\frac{3^2}{4^2}$; E) $\frac{15}{20}$.

18.- En el rectángulo de la figura de 9 cm x 5 cm, hay tres cuadrados y un rectángulo sombreado, ¿cuál es el área del rectángulo sombreado?

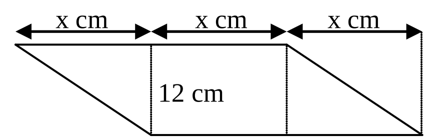


A) 4 cm^2; B) 3 cm^2; C) 2 cm^2;

D) 1,5 cm^2; E) 3,5 cm^2.

19.- El paralelogramo de la figura tiene 408 cm^2 de área y sus dimensiones son las que se indican. El valor de x es:

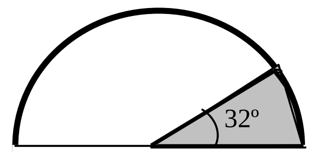
A) 8; B) 7; C) 12; D) 18; E) 17.



20.- En la suma $8a7 + 7a6 + 4a8 + 9a3 + 8a4 = 3928$, el valor de la cifra "$a$" es:

A) 3; B) 4; C) 5; D) 6; E) 7.

21.- En el diagrama de la figura se ha representado el resultado obtenido por el partido "ESO" en un congreso de 225 diputados. ¿Cuántos diputados obtuvo este partido?



A) 32; B) 40; C) 38; D) 26; E) 34.

22.- ¿Cuáles son las últimas cinco cifras de la suma $1 + 11 + 111 + ... + \overset{(2003\ \text{cifras})}{11...............111}$?

B) 11013; B) 54323; C) 12123; D) 21213; E) 01013.

23.- En un triángulo ABC, la longitud de cada lado en cm, viene dada por un número entero. Si el lado AB es 14 cm más largo que el lado AC y el BC 30 cm más largo que el AC, el mínimo valor posible para expresar en cm el perímetro del triángulo ABC es

A) 44; B) 47; C) 91; D) 94; E) 95.

24.- Alicia tira al aire una moneda y Pedro tira dos. ¿Cuál es la probabilidad de que Alicia obtenga el mismo número de caras que Pedro?

A) $\frac{1}{4}$; B) $\frac{3}{8}$; C) $\frac{1}{2}$; D) $\frac{2}{3}$; E) $\frac{3}{4}$.

25.- Si la media de cinco enteros positivos distintos es 15 y la mediana 18, ¿cuál es el valor máximo que puede tomar alguno de ellos?

A) 19; B) 24; C) 32; D) 35; E) 40.

VII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE : Día 26 de febrero de 2003

NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

*Escribe ahora los siguientes datos:

Apellidos	Nombre	
Colegio o Instituto	**Curso**	**Año de nacimiento**

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **RODEA LA LETRA CORRESPONDIENTE A LA RESPUESTA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y RODEA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

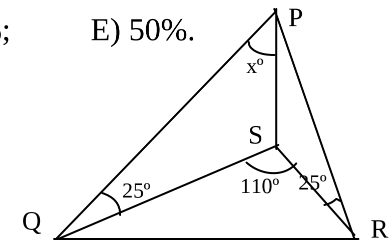
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Ediciones S.M. y Grupo ANAYA

1.- Un coche que costaba 18000 € está rebajado, costando ahora 13500 €. ¿Qué porcentaje de descuento se ha hecho sobre el precio original?

A) 33%; B) 45%; C) 25%; D) 40%; E) 50%.

2.- En el triángulo PQR, S es un punto interior tal que SP = SR. Si el valor de algunos de los ángulos es el indicado en la figura, el valor de *x* es:

A) 5; B) 15; C) 25; D) 35; E) 45.

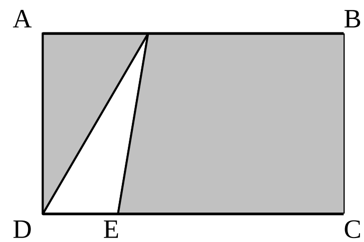


3.- Tres personas reciben una cantidad de dinero directamente proporcional a los números 6, 3 y 2. Si la que menos recibe, recibe 300 €, la cantidad total que se ha repartido es:

A) 1500 €; B) 1350 €; C) 1650 €; D) 3000 €; E) 3300 €.

4.- El rectángulo ABCD tiene dimensiones 11 y 8 cm Si DE = 4 cm, el área de la zona sombreada, expresada en cm^2 , es:

A) 44; B) 56; C) 72; D) 48; E) 32.



5.- Con los números 1, 2, 3 y 4 puedo formar 256 números de 4 cifras (por ejemplo, 3214, 1111, 2234 son algunos). ¿Cuánto vale la suma de los 256 números?

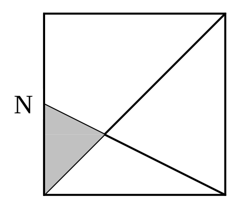
A) 71440; B) 711040; C) 704110; D) 700410; E) 741040.

6.- Cada día de entrenamiento, Antonio da un determinado número de vueltas a una pista de atletismo. Cuando había dado unas cuantas, llevaba el 20% del total y cuando dio una vuelta más, llevaba el 25% del total. ¿Cuántas vueltas da Antonio a la pista de atletismo cada día?

A) 20; B) 30; C) 40; D) 50; E) 60.

7.- Si el cuadrado tiene 36 cm^2 de área y el punto N es el punto medio del lado, el área de la zona sombreada expresada en cm^2 es:

A) 4; B) 4,5; C) 3,6; D) 3; E) 5.



8.- En un cierto momento de un viaje, el conductor observa que el cuentakilómetros marca el número capicúa 35953 km y 75 minutos después el cuentakilómetros marca el capicúa siguiente. ¿Cuál fue la velocidad media, en km/h, del coche durante esos 75 minutos?

A) 88; B) 110; C) 99; D) 73,5; E) 84.

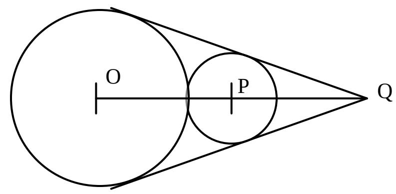
9.- Un día en la frutería, 7 melones costaban lo mismo que 9 plátanos y 8 naranjas, mientras que 5 melones costaban lo que 6 plátanos y 6 naranjas. Ese día, el precio de un melón era lo mismo que el de:

A) 2 naranjas; B) 1 plátano y 2 naranjas; C) 3 plátanos y 1 naranja;
D) 1 plátano y 1 naranja; E) 4 plátanos.

10.- Un número es divisible por 24 cuando es divisible por:
A) Por 2 y por 3; B) Por 4 y por 6; C) Por 8 y por 3;
D) Por 12 y por 2; E) Por 12 y por 3.

11.- En una competición los 5 participantes son Antonio, Benito, Carolina, Diana y Emilio. En la clasificación final observamos que el lugar que ocupa Emilio viene dado por un número impar. Benito le saca a Antonio el doble de lugares que Carolina le saca a Diana. De las siguientes afirmaciones hay solamente una que es necesariamente verdadera, ¿cuál es?
A) Emilio quedó en primer lugar; B) Benito quedó en segundo lugar;
C) Diana quedó en tercer lugar; D) Carolina quedó en cuarto lugar;
E) Antonio quedó en quinto lugar.

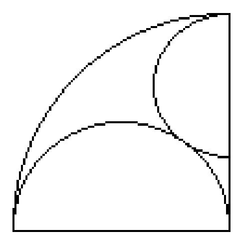
12.- Dos circunferencias de radios 40 y 20 cm son tangentes exteriores, como se muestra en la figura. Prolongamos el segmento que une los centros O y P hasta el punto Q que es el punto de intersección de las tangentes exteriores comunes a ambas. ¿Cuál es la longitud de PQ?



A) 60; B) 65; C) 67,5; D) 70; E) 75.

13.- Los números de dos o más cifras en los que leídas éstas de izquierda a derecha son cada vez mayores, se conocen como "números crecientes". Por ejemplo, 125, 14, 239,.. son números crecientes pero 255, 74 ó 198 no lo son. Supón que haces una lista de los primeros números crecientes y los ordenas de menor a mayor. ¿Cuál de ellos ocupa el lugar 100 en esa lista?
A) 389; B) 356; C) 269; D) 345; E) 258.

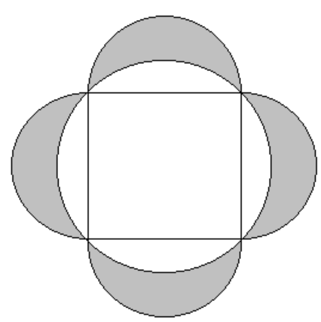
14.- El diámetro del semicírculo grande y el radio del cuadrante de la figura son iguales y miden 2 cm cada uno.
¿Cuál es en cm, el radio del semicírculo pequeño?



A) $\frac{2}{\pi}$; B) $\frac{7}{10}$; C) $\frac{2}{3}$; D) $\frac{\pi}{5}$; E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

15.- Tenemos 350 mililitros de zumo de naranja que contiene un 50% de naranja y queremos añadirle agua para que el zumo resultante contenga solamente un 30% de naranja. De los siguientes números, el más próximo a la cantidad de agua que debemos echar, expresada en mililitros, es:
A) 230; B) 200; C) 220; D) 400; E) 420.

16.- En una circunferencia hay inscrito un cuadrado de lado "a" y sobre sus lados hemos dibujado semicircunferencias como indica la figura.
¿Cuál es el área de la zona sombreada?

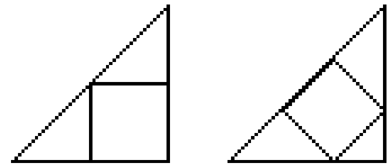


A) $\frac{\pi a^2}{4}$; B) $\frac{\pi a^2}{2}$; C) $\frac{a^2}{8}$; D) a^2; E) $\frac{a^2}{2}$

17.- Un avión desciende al aterrizar con una inclinación del 12%, es decir, por cada 100 m que avanza en horizontal, desciende 12 m. Si vuela a 9 km de altura, ¿a cuántos km (en horizontal) de la toma de tierra debe iniciar el descenso?

A) 50; B) 60: C) 75; D) 80; E) 90.

18.- Los dos triángulos rectángulos isósceles de la figura son iguales. Si la longitud del lado del cuadrado inscrito en la figura de la izquierda es 21 cm, ¿cuál es, en cm, la longitud del lado del cuadrado de la derecha?



A) 18; B) 21; C) $\frac{21\sqrt{2}}{2}$; D) $14\sqrt{3}$; E) $14\sqrt{2}$.

19.- Si x, y, z son números positivos tales que $xy = 24$, $xz = 48$, $yz = 72$, la suma $x + y + z$ es igual a:

A) 18; B) 19; C) 20; D) 22; E) 24.

20.- Una recta que pasa por los puntos (m, -9) y (7, m) tiene pendiente m. ¿Cuánto vale m?

A) 1; B) 2; C) 3; D) 4; E) 5.

21.- Si $3^a = 4$, $4^b = 5$, $5^c = 6$, $6^d = 7$, $7^e = 8$ y $8^f = 9$, ¿cuánto vale el producto *abcdef*?

A) 1; B) 2; C) $\sqrt{6}$; D) 3; E) $\frac{10}{3}$.

22.- El perímetro de un triángulo rectángulo es 40 cm y la suma de los cuadrados de sus lados es 578 cm^2. ¿Cuál es , en cm, la longitud del lado más corto?

A) 6; B) *7;* C) 8; D) 9; E) 10.

23.- Un cuadrado tiene perímetro "p" y área "A" expresados en m y m^2 respectivamente. Si A = 2p, el valor de p es:

A) 24; B) 32; C) 36; D) 48; E) 54.

24.- Si la longitud de cada lado de un triángulo se aumenta en un 20%, el área aumenta un:

A) 40%; B) 44%; C) 48%; D) 52%; E) 60%.

25.- Lanzamos tres dados al aire, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los números aparecidos en dos de ellos, coincida con el del otro dado?

A) $\frac{5}{36}$; B) $\frac{1}{6}$; C) $\frac{7}{36}$; D) $\frac{2}{9}$; E) $\frac{5}{24}$

VII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE : Día 26 de febrero de 2003

NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

*Escribe ahora los siguientes datos:

Apellidos	Nombre	
Colegio o Instituto	**Curso**	**Año de nacimiento**

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **RODEA LA LETRA CORRESPONDIENTE A LA RESPUESTA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y RODEA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

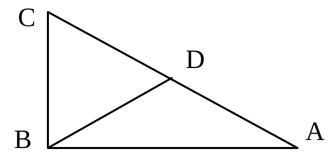
Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Ediciones S.M. y Grupo ANAYA

1.- Una recta que pasa por los puntos (m, -9) y (7, m) tiene pendiente m. ¿Cuánto vale m?

A) 1; B) 2; C) 3; D) 4; E) 5.



2.- En un triángulo rectángulo ABC se toma un punto D sobre la hipotenusa AC y resulta que el triángulo BCD tiene todos sus lados iguales a 1. ¿Cuánto mide AB?

A) 1; B) $\frac{3}{2}$; C) $\sqrt{2}$; D) $\sqrt{3}$; E) 2.

3.- En una prueba del VI Concurso de Primavera realizada en cierto centro, la puntuación media de las chicas que se presentaron fue de 83 puntos y la puntuación media de los chicos que se presentaron fue de 71 puntos. Si la media total de todos los participantes de ese centro fue de 80 puntos, ¿qué porcentaje de los participantes eran chicas?

A) 60%; B) 65%; C) 70%; D) 75%; E) 80%.

4.- Si $3^a = 4$, $4^b = 5$, $5^c = 6$, $6^d = 7$, $7^e = 8$ y $8^f = 9$, ¿cuánto vale el producto *abcdef*?

A) 1; B) 2; C) $\sqrt{6}$; D) 3; E) $\frac{10}{3}$

5.- El perímetro de un triángulo rectángulo es 40 cm y la suma de los cuadrados de sus lados 578 cm^2.¿Cuál es la longitud del lado más corto?

A) 6; B) 7; C) 8; D) 9; E) 10.

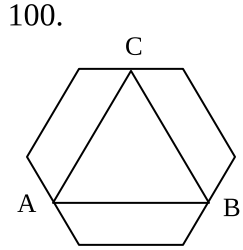
6.- Si f: $\mathcal{R} \to \mathcal{R}$ es una función para la que el número 2 está tanto en el dominio como en el recorrido y verifica que $f(f(x))\cdot(1+ f(x)) = - f(x)$ $\forall x \in D$ (dominio), ¿cuánto vale $f(2)$?

A) -1; B) $\frac{-3}{4}$; C) $\frac{-2}{3}$; D) $\frac{-1}{4}$; E) 0.

7.- Si *log* representa el logaritmo decimal (base 10), la suma

$$\log\frac{1}{2} + \log\frac{2}{3} + \log\frac{3}{4} + ... + \log\frac{98}{99} + \log\frac{99}{100}$$ es igual a:

A) -1; B) 0; C) 1; D) -2; E) 100.



8.- Si el perímetro del hexágono regular es de 12 cm, el área del triángulo equilátero ABC es en cm^2:

A) $3\sqrt{3}$; B) $6\sqrt{3}$; C) 6; D) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$; E) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

9.- De las siguientes afirmaciones, ¿cuáles son verdaderas?

- Existe un número primo que es par.
- El número $2^{65}+1$ es primo.
- Existen enteros distintos *m* y *n* tales que $m^2 = n^3$.
- Algunas ecuaciones de 2º grado, con coeficientes enteros, no tienen soluciones reales.
- La ecuación cúbica $x^3 + x^2 + 1 = 0$ tiene una única solución real.

A) 1; B) 2; C) 3; D) 4; E) 5.

10.- Si el número complejo z tiene de módulo 1 y argumento $\dfrac{\pi}{2003}$, la expresión

$z^{2003} + \dfrac{1}{z^{2003}}$ es igual a:

A) -2; B) -1; C) 0; D) 1; E) 2.

11.- El conjunto de los números "a" para los que la desigualdad $ax^2 - 2x + a < 0$ se verifica sea cual fuere el número real x, es:

A) $a < -2$; B) $a < -2$ ó $a > 2$; C) $a < -1$; D) $a < 0$; E) $a < -1$ ó $a > 1$

12.- $\dfrac{5}{6^{-2} \times 8^{\frac{1}{3}}}$ es igual a:

A) 60; B) 70; C) 80; D) 90; E) 100.

13.- El perímetro de un cuadrado, expresado en cm, es el número "p" y su área, expresada en cm^2, es el número "A". Si $A = 2p$, ¿cuál es el valor de p?

A) 24; B) 32; C) 36; D) 48; E) 54.

14.- Si $x = 11^o$, el valor de $(sen\ x + cos\ x)^2 - sen\ 2x$ es:

A) $\dfrac{1}{2}$; B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; C) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ D) 1; E) 0.

15.- La tangente del argumento de cualquiera de las raíces cuadradas del complejo $3+ 4i$ es:

A) -1; B) 2; C) 1; D) $\dfrac{1}{2}$; E) $\dfrac{1}{4}$

16.- Si la parábola $y = x^2 + 8x + k$ tiene su vértice en el eje de abscisas, el valor de k es:

A) 0; B) 4; C) 8; D) 16; E) 24.

17.- Sabiendo que $9^{-x} = 7$, ¿cuál es el valor de 27^{2x+1} ?

A) $\dfrac{27}{7\sqrt{7}}$; B) $189\sqrt{7}$; C) $\dfrac{343}{27}$; D) $\dfrac{7\sqrt{7}}{27}$; E) $\dfrac{27}{343}$

18.- Si x e y son números reales tales que $(x^2 - y^2)(x^2 - 2xy + y^2) = 3$ con $x - y = 1$, el valor de xy es:

A) 2; B) $1+\sqrt{2}$; C) $1-\sqrt{2}$; D) 1; E) 0.

19.- Cada una de las afirmaciones siguientes puede ser verdadera o falsa.

1.Las afirmaciones 3 y 4 son ambas verdaderas.
2.Las afirmaciones 4 y 5 no son ambas falsas.
3.La afirmación 1 es verdadera.
4.La afirmación 3 es falsa.
5.Las afirmaciones 1 y 3 son ambas falsas.

¿Cuántas afirmaciones de estas cinco son verdaderas?

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4.

20.- Hay un teorema, teorema de Wilson, que asegura que si n es un número primo, entonces n es un divisor de $(n - 1)! + 1$. Con la ayuda de este teorema puedes asegurar que el número $12! \times 6! + 12! + 6! + 1$ tiene un divisor d que verifica:

A) $9000 < d < 9100$; B) $9100 < d < 9200$; C) $9200 < d < 9300$;
D) $9300 < d < 9400$; E) $9400 < d < 9500$.

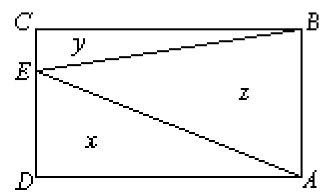
21.- Lanzamos tres dados al aire. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números aparecidos en dos de ellos, coincida con el del otro dado?

A) $\frac{5}{36}$; B) $\frac{1}{6}$; C) $\frac{7}{36}$; D) $\frac{2}{9}$; E) $\frac{5}{24}$.

22.- Antonio conducía su coche a velocidad constante. A las 14 horas estaba a XYZ km de su casa, donde X, Y, Z son dígitos tales que $X \geq 1$ e $Y = 0$. A las 14 horas 18 minutos estaba a ZX km de casa y a las 15 horas a XZ km de casa. ¿A qué hora llegó a casa?

A) 15 h 10 min; B) 15 h 12 min; C) 15 h 24 min;
D) 15 h 30 min; E) 15 h 48 min.

23.- *ABCD* es un rectángulo. El punto E es uno cualquiera del lado *DC*. Llamemos "x" al área del triángulo *AED*, "y" al área del triángulo *BCE* y "z" al área del triángulo *ABE*. Si $y^2 = xz$, el valor del cociente $\frac{DE}{EC}$ es:



A) $\frac{3}{5}$; B) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; C) $\frac{2}{3}$; D) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

24.- Si f es una función que verifica $f(xy) = \frac{f(x)}{y}$ para cualesquiera números positivos x e y y $f(500) = 3$, ¿cuál es el valor de $f(600)$?

A) 1; B) 2; C) $\frac{5}{2}$; D) 3; E) $\frac{18}{5}$.

25.- Si ordenamos en orden creciente los números *sen(1), sen(2)* y *sen(3)* cuando los ángulos vienen medidos en radianes, obtenemos:

A) *sen(1) < sen(2) < sen(3)*; B) *sen(3) < sen(2) < sen(1)*;
C) *sen(1) < sen(3) < sen(2)*; D) sen(2) < *sen(1) < sen(3)*;
E) *sen(3) < sen(1) < sen(2).*

.

VII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE : Día 5 de abril de 2003

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

*Escribe ahora los siguientes datos:

Apellidos	Nombre	
Colegio	**Curso**	**Año de nacimiento**

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA LA LETRA CORRESPONDIENTE A LA RESPUESTA QUE CONSIDERES CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Ediciones S.M. y Grupo ANAYA

1.- El número que debería aparecer en el recuadro para que se cumpla la siguiente igualdad
$111 - 11 - 1 = (777 - 77 - 7) : \square$, es:
A) 7; B) 8; C) 9; D) 10; E) 11.

2.- El producto de tres números, dos de ellos pares y el otro impar, es siempre:
A) Impar; B) Mayor que 10; C) Par; D) Primo; E) Múltiplo de 6.

3.- La suma 19 centenas + 8 decenas + 17 unidades es:
A) 1987; B) 1996; C) 1997; D) 2007; E) 2717.

4.- El perímetro de un cuadrado es doble que el de otro. Si el lado del cuadrado grande mide 12 cm, el área del cuadrado pequeño, en cm^2, es:
A) 36; B) 18; C) 81; D) 72; E) 9.

5.- ¿Cuánto debo pagar, en euros, por una llamada telefónica de 5 minutos, si el primer minuto cuesta 1 euro y cada minuto adicional 75 céntimos de euro?
A) 3,25; B) 3,75; C) 4; D) 4,25; E) 5.

6.- En mi colegio hay 120 niños entre 5º y 6º de primaria. Dos de cada tres tienen el pelo negro. ¿Cuántos niños de 5º y 6º de primaria de mi colegio no tienen el pelo negro?
A) 30; B) 40; C) 60; D) 80; E) 100.

7.- Al escribir en fila todos los números enteros del 1 al 1000, observo que hay cinco consecutivos cuya suma es 600. ¿Cuál es el más pequeño de estos cinco números?
A) 596; B) 120; C) 118; D) 116; E) 119.

8.- Antonio sumó todos los números impares desde el 1 al 2003 y Beatriz sumó todos los números pares desde el 2 al 2004. La suma de Beatriz supera a la de Antonio en:
A) 1000; B) 1001; C) 1002; D) 1003; E) 1004.

9.- ¿Cuánto mide el mayor ángulo de un triángulo rectángulo?
A) 45º; B) 60º; C) 90º; D) 180º; E) Depende del triángulo.

10.- El producto de un número de tres cifras por otro de 2, ¿cuántas cifras tiene como máximo?
A) 3; B) 4; C) 5; D) 6; E) 7.

11.- El mayor múltiplo de 7 menor que 200 es:
A) 187; B) 189; C) 194; D) 196; E) 197.

12.- Una día se puso a nevar y en una hora la capa de nieve llegó a 60 cm de espesor. Si hubiera nevado al mismo ritmo durante 100 minutos, ¿a qué altura habría llegado la capa de nieve?
A) 90 cm; B) 100 cm; C) 110 cm; D) 120 cm; E) 130 cm.

13.- ¿En cuántos cuadraditos de 2 cm de lado puede dividirse un rectángulo de 8 cm de largo por 4 cm de ancho?
A) 2; B) 4; C) 6; D) 8; E) 10.

14.- Si 3 plumas cuestan lo mismo que 7 lapiceros, 42 lapiceros costarían lo mismo que ¿cuántas plumas?
A) 6; B) 18; C) 21; D) 28; E) 98.

15.- Si la suma de dos números enteros es el doble de la diferencia de estos números, la suma no puede ser:

A) 124; B) 222; C) 444; D) 888; E) 1000.

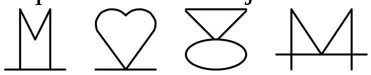
16.- San Isidro cae este año (2003) en jueves. ¿Cuál será el primer año después de éste, que volverá a caer en jueves?

A) 2007; B) 2008; C) 2009; D) 2010; E) 2020.

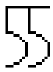
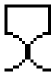
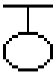
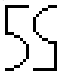
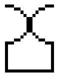
17.- Un mapa de carreteras está hecho a escala 1:400.000. Si en el mapa la distancia entre dos pueblos es de 5 cm, ¿cuál es la distancia real en km?

A) 15; B) 20; C) 200; D) 25; E) 250.

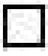
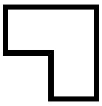
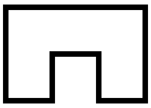
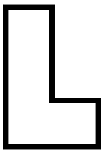
18.- Aquí tienes el dibujo de las cuatro cifras 1, 2, 3 y 4 junto a su imagen en un espejo.

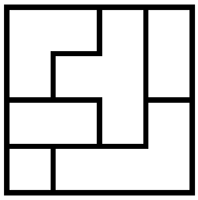


¿Cuál será el dibujo de la cifra "cinco"?

A) ; B) ; C) ; D) ; E) .

19.- Uno de los trozos siguientes no proviene de la figura. ¿Cuál es?

A) ; B) ; C) ; D) ; E) 



20.- Aquí tienes, desordenadas, las fechas de cumpleaños de Antonio, Beatriz, Carlos y Darío: 1 Marzo, 20 Julio, 17 Mayo y 20 Marzo. Beatriz y Carlos nacieron el mismo mes, Antonio y Carlos cumplen años el mismo día. ¿Quién nació el 17 de Mayo?

A) Antonio; B) Beatriz; C) Carlos; D) Darío; E) No se puede saber.

21.- Emilio sale de casa a las 8 horas 55 minutos y llega al colegio a las 9 h 17 min. Su compañera Fátima llega al colegio a las 9 h 25 min, pero vive mucho más cerca del colegio que Emilio y tarda 12 minutos menos que él en el trayecto de casa al colegio. ¿A qué hora sale Fátima de su casa?

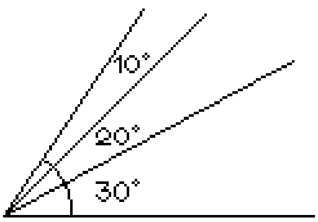
A) 8 h 43 min; B) 8 h 59 min; C) 9 h 7 min; D) 9 h 13 min; E) 9 h 15 min.

22.- El torno que marca el número de visitantes que hay en la puerta del Museo de la Ciencia, señala en cierto instante 1879564, que como puedes observar, es un número que tiene todas sus cifras distintas. ¿Cuántos visitantes tienen que entrar como mínimo para que se vuelva a producir esta circunstancia?

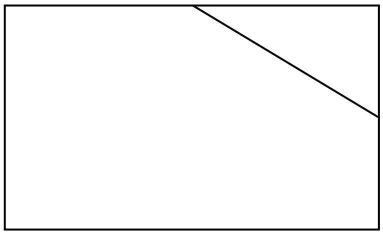
A) 1000000; B) 323; C) 321; D) 38; E) 312.

23.- ¿Cuántos ángulos agudos, no nulos y de medidas diferentes, puedes ver como máximo, en esta figura?

A) 3; B) 4; C) 5; D) 6; E) 7.



24.- El área de un rectángulo es 1. Quitamos una esquina del rectángulo uniendo los puntos medios de dos lados consecutivos. ¿Cuál es el área del triángulo que le quitamos?



A) $\frac{1}{3}$; B) $\frac{1}{4}$; C) $\frac{2}{5}$; D) $\frac{3}{8}$; E) $\frac{1}{8}$.

25.- Alba, Benito, Carolina y Diana tienen cada uno un animal; uno de ellos tiene un gato, otro un perro, otro un pez y otro un canario. Benito tiene un animal con pelo, Diana uno de cuatro patas, Carolina tiene un pájaro y a Alba y a Benito no les gustan los gatos. ¿Cuál es la frase falsa?

A) Alba tiene un pez; B) Benito tiene un perro; C) Carolina tiene un canario;
D) Diana tiene un gato; E) Diana tiene un perro.

VII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE : Día 5 de abril de 2003

NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

*Escribe ahora los siguientes datos:

Apellidos	Nombre	
Colegio o Instituto	**Curso**	**Año de nacimiento**

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA LA LETRA CORRESPONDIENTE A LA RESPUESTA QUE CONSIDERES CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Ediciones S.M. y Grupo ANAYA

.

1.- Como sabes, el volumen (o capacidad) de las maletas se suele medir en litros. Tengo una maleta que mide 70 cm x 50 cm x 30 cm. ¿Cuántos litros tiene de volumen?

A) 10,5; B) 105; C) 1050; D) 10500; E) 105000.

2.- Supón que el dólar australiano está a 55 céntimos de euro. Un turista australiano en Madrid compra un artículo que vale 100 euros y paga con un billete de 200 dólares australianos. ¿Cuántos euros le devolverán?

A) 5; B) 10; C) 15; D) 20; E) 25.

3.- De los 30 estudiantes de una clase, 20 se lavan los dientes después de cada comida, 18 van una vez al año al dentista y 9 hacen ambas cosas. ¿Cuántos no toman ninguna de estas medidas?

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4.

4.- Mi reloj digital marca cada día las horas desde las $\boxed{00:00}$ hasta las $\boxed{23:59}$. ¿Cuántas veces al día marcará un número capicúa, como por ejemplo, $\boxed{02:20}$ o $\boxed{23:32}$?

A) 12; B) 16; C) 18; D) 23; E) 24.

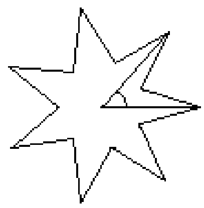
5.- Tengo muchas monedas de 2 euros, de 1 euro y de 50 céntimos de euro. ¿De cuántas formas puedo llegar a pagar 10 euros?

A) 21; B) 36; C) 30; D) 33; E) 35.

6.- ¿Cuántos números enteros puedo escribir en el cuadradito para que el resultado que obtenga esté comprendido entre 4 y 16? $2 + 3 \times \square$

A) 2; B) 3; C) 4; D) 5; E) 6.

7.- La estrella de la figura tiene 7 puntas y el ángulo formado por las rectas que van desde el centro hasta dos puntas consecutivas cualesquiera es siempre el mismo. ¿Cuánto mide en grados este ángulo?

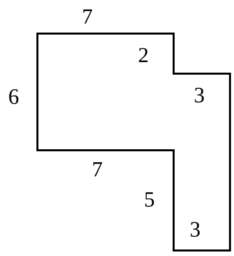


A) 50; B) $50 + \frac{3}{7}$; C) $51 + \frac{3}{7}$; D) 60; E) $60 + \frac{3}{7}$.

8.- Alicia ahorra cada semana los $\frac{3}{4}$ de su paga. Si consigue ahorrar 312 euros al año (recuerda: un año son 52 semanas), ¿cuál es la paga semanal de Alicia, en euros?

A) 2; B) 4,5; C) 7,5; D) 8; E) 10.

9.- En la figura adjunta, todos los ángulos son rectos y todas las medidas vienen en metros. ¿Cuál es, en m^2, el área de la figura?



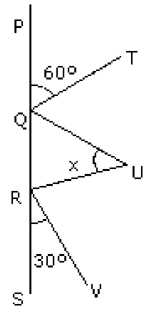
A) 69; B) 71; C) 61; D) 62; E) 70.

10.- En la última evaluación estudié Sociales el triple de horas que Naturales, pero las Matemáticas las estudié 7,5 veces más que Naturales. ¿Cuántas veces más estudié Matemáticas que Sociales?

A) 2,5; B) 22,5; C) 10,5; D) 3; E) 4,5.

11.- ¿Cuál de los siguientes números 5, 6, 7, 8, 9 hay que poner en el denominador de la fracción $\frac{19}{\square}$ para que sea lo más próxima posible a $\frac{5}{2}$?

A) 5; B) 6; C) 7; D) 8; E) 9.



12.- En la figura adjunta, el ángulo PQT (con vértice en Q) es de 60º, el ángulo SRV es de 30º, UQ es la bisectriz del ángulo TQR y UR es la bisectriz del ángulo QRV. ¿Cuánto mide el ángulo x?

A) 65º; B) 45º; C) 50º; D) 60º; E) 75º.

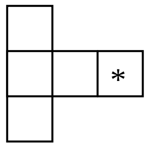
13.- Escribiendo un 1 al principio y otro 1 al final de un número, éste aumenta en 14789. ¿Cuál es la suma de las cifras del número original?

A) 11; B) 10; C) 9; D) 8; E) 7 .

14.- En la siguiente resta, ¿qué letra es la que tiene mayor valor?

$$\begin{array}{r} a\;4\;b\;7\;c \\ -\;5\;d\;8\;e\;6 \\ \hline 2\;8\;4\;9\;9 \end{array}$$

A) a; B) b; C) c; D) d; E) e.



15.- En los tres cuadraditos de la línea horizontal escribimos una potencia de 2 de tres cifras y en los de la vertical, una potencia de 5, también de tres cifras. ¿Cuál es la única cifra que puede aparecer en el cuadradito de la derecha señalado con * ?

A) 0; B) 2; C) 4; D) 6; E) 8.

16.- Ana y Sara fueron una vez igual de altas. Desde entonces, Sara ha crecido el 20% mientras que Ana ha crecido la mitad de centímetros que Sara. Si Sara tiene ahora 156 cm de altura, ¿cuántos cm mide Ana actualmente?

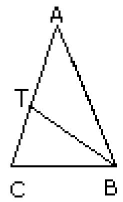
A) 130; B) 140; C) 148; D) 150; E) 143.

17.- ¿Cuántos números enteros hay entre $\frac{5}{3}$ y 2π?

A) 2; B) 3; C) 4; D) 5; E) Infinitos.

18.- El número 64 tiene la propiedad de ser divisible por la cifra de sus unidades. ¿Cuántos números enteros comprendidos entre 10 y 50 tienen esta propiedad?

A) 15; B) 16; C) 17; D) 18; E) 20.

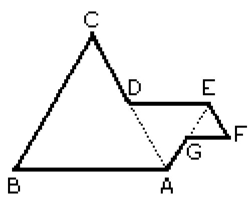


19.- En el triángulo ABC, los ángulos B y C son iguales. Si el ángulo A es de 36º y BT es bisectriz del ángulo B, ¿cuánto mide el ángulo CTB (de vértice en T)?

A) 36º; B) 54º; C) 72º; D) 90º; E) 108º.

20.- ¿Cuál es la cifra de las unidades de $19^{99} + 99^{99}$?

A) 0; B) 1; C) 2; D) 8; E) 9.



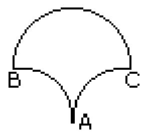
21.- Los triángulos ABC, ADE y EFG son equiláteros. Los puntos D y G son los puntos medios de AC y AE respectivamente. Si AB = 4 cm, ¿cuál es, en cm, el perímetro de la figura ABCDEFG?

A) 12; B) 13; C) 15; D) 18; E) 21.

22.- Para dar un paseo de 1000 m en su jardín rectangular, Pedro tiene que recorrer 25 veces su lado mayor o dar 10 vueltas completas alrededor del jardín. ¿Cuál es el área, en m^2, del jardín de Pedro?

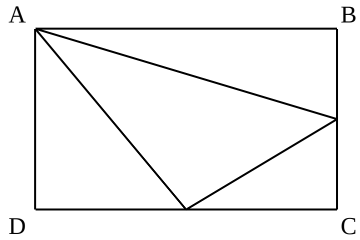
B) 40; B) 200; C) 400; D) 500; E) 1000.

23.- La figura adjunta está formada por tres arcos de radio 5 cm. Los arcos AB y AC son cuartos de circunferencia y BC es una semicircunferencia. ¿Cuál es el área, en cm^2, de esta figura ?



A) 25; B) 10 + 5π; C) 50; D) 50 + 5π; E) 25π.

24.- El rectángulo ABCD de la figura tiene de área 72 cm^2. Si uno el punto A con los puntos medios de BC y CD para formar un triángulo, ¿cuál es, en cm^2, el área de este triángulo?



A) 21; B) 27; C) 30; D) 36; E)40.

25.- Lanzamos dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea múltiplo de 5?

A) $\frac{1}{36}$; B) $\frac{1}{18}$; C) $\frac{1}{6}$; D) $\frac{11}{36}$; E) $\frac{1}{3}$.

VII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE : Día 5 de abril de 2003

NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

*Escribe ahora los siguientes datos:

Apellidos	Nombre	
Colegio o Instituto	**Curso**	**Año de nacimiento**

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA LA LETRA CORRESPONDIENTE A LA RESPUESTA QUE CONSIDERES CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Ediciones S.M. y Grupo ANAYA

.

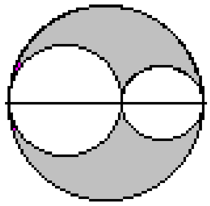
1.- ¿Cuánto vale el cociente $\dfrac{2^{2001}\times 3^{2003}}{6^{2002}}$?

A) $\dfrac{1}{6}$; B) $\dfrac{1}{3}$; C) $\dfrac{1}{2}$; D) $\dfrac{2}{3}$; E) $\dfrac{3}{2}$.

2.- La media aritmética de los nueve números del conjunto {9, 99, 999, 9999, ..., 999999999} es un número M de nueve cifras, todas distintas. ¿Cuál es la cifra que no está en M?

A) 0; B) 2; C) 4; D) 6; E) 8.

3.- Los círculos de radios 2 y 3 son tangentes exteriores entre sí y tangentes interiores al círculo grande, como muestra la figura. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



A) 3π; B) 4π; C) 6π; D) 9π; E) 12π.

4.- ¿Para cuántos enteros positivos ***"n"*** resulta que $n^2 - 3n + 2$ es un número primo?

A) Ninguno; B) Uno; C) Dos; D) Infinitos; E) Una cantidad finita mayor que dos.

5.- Sea ***"n"*** un número entero positivo, tal que, $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{n}$ es un entero. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones no es verdadera?

A) 2 divide a n; B) 3 divide a n; C) 6 divide a n; D) 7 divide a n; E) $n > 84$.

6.- En cierto año, el mes de julio tiene 5 lunes. De los siguientes días de la semana, ¿cuál es seguro que no aparece 5 veces en el mes de agosto de ese mismo año?

A) Miércoles; B) Jueves; C) Viernes; D) Sábado; E) Domingo.

7.- Con las letras de la palabra "NADIE" podemos formar 120 palabras (o agrupaciones de cinco letras) utilizando todas sus letras. Si se ordenan alfabéticamente las 120, ¿qué lugar ocupa la palabra NADIE en esa relación?

A) 97; B) 98; C) 99; D) 100; E) 101.

8.- La ecuación $x^2 + ax + b = 0$ tiene soluciones a y b que son números distintos de cero. El par (a, b) es:

A) (-2, 1); B) (-1, 2); C) (1, -2); D) (2, -1); E) (4, 4).

9.- Si el producto de tres números enteros consecutivos, ninguno nulo, es 8 veces su suma, ¿cuál es la suma de sus cuadrados?

A) 50; B) 77; C) 110; D) 149; E) 194.

10.- ¿Para qué valor de "k", la ecuación $\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{x-k}{x-6}$ no tiene solución?

A) 1; B) 2; C) 3; D) 4; E) 5.

11.- ¿Para qué valor o valores de x se verifica la igualdad $8xy - 12y + 2x - 3 = 0$ para todos los valores de y ?

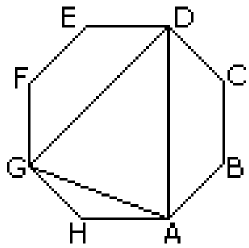
A) $\dfrac{2}{3}$; B) $\dfrac{3}{2}y - \dfrac{1}{4}$; C) $-\dfrac{2}{3}y - \dfrac{1}{4}$; D) $\dfrac{3}{2}$; E) $-\dfrac{3}{2}y - \dfrac{1}{4}$.

12.- El número $25^{64} \times 64^{25}$ es el cuadrado de un número entero positivo N. ¿Cuál es la suma de las cifras de N?
A) 7; B) 14; C) 21; D) 28; E) 35.

13.- Los enteros positivos A, B, A – B y A + B son todos primos. La suma de los cuatro es:
A) Par; B) Divisible por 3; C) Divisible por 5; D) Divisible por 7; E) Primo .

14.- ¿Para cuántos enteros positivos “***n***” es $\frac{n}{20-n}$ el cuadrado de un número entero?
A) 1; B) 2; C) 3; D) 4; E) 10.

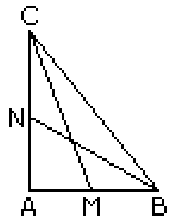
15.- Un octógono regular ABCDEFGH tiene de lado 2 cm.
El área, en cm^2, del triángulo ADG es:
A) $4+2\sqrt{2}$; B) $6+\sqrt{2}$; C) $4+3\sqrt{2}$;
D) $3+4\sqrt{2}$; E) $8+\sqrt{2}$.



16.- En una progresión aritmética, la suma de los 100 primeros términos es 100 y la suma de los 100 siguientes, desde a_{101} hasta a_{200}, es 200. ¿Cuál es la diferencia de la progresión?
A) 0,0001; B) 0,001; C) 0,01; D) 0,1; E) 1.

17.- El jardín de Antonio es doble que el de Benito y triple que el de Carlos. Los tres empiezan a la vez a cortar la hierba, cada uno en su jardín. Carlos va a la mitad de rápido que Benito y la tercera parte de rápido que Antonio. ¿Quién acabó el primero?
A) Antonio; B) Benito; C) Carlos;
D) Antonio y Carlos acabaron los primeros y a la vez; E) Acabaron los tres a la vez.

18.- ABC es un triángulo rectángulo en A. M y N son los puntos medios de los catetos AB y AC respectivamente. Si BN = 19 y CM = 22, la longitud de la hipotenusa BC es:
A) 24; B) 26; C) 28; D) 30; E) 32.



19.- El profesor le pidió a Sara que restara 3 de cierto número y luego dividiera el resultado entre 9. En vez de hacer eso, Sara le restó 9 al número y dividió el resultado entre 3, obteniendo 43. ¿Qué habría obtenido si hubiera hecho lo que le dijeron?
A) 15; B) 34; C) 43; D) 51; E) 138.

20.- Si un arco de 45º de una circunferencia $\mathcal{C}_1$ tiene la misma longitud que un arco de 30º de otra circunferencia $\mathcal{C}_2$, el cociente entre el radio de la circunferencia $\mathcal{C}_1$ y el radio de la circunferencia $\mathcal{C}_2$ es:
A) $\frac{4}{9}$; B) $\frac{2}{3}$; C) $\frac{5}{6}$; D) $\frac{3}{2}$; E) $\frac{9}{4}$.

21.- Si A, B y C son números para los que 1001C – 2002A = 4004 y 1001B + 3003A = 5005, la media aritmética de ellos es:
A) 1; B) 3; C) 6; D) 9; E) No se puede determinar.

22.- ¿Cuál es la suma de las soluciones de la ecuación $(2x+3)(x-4)+(2x+3)(x-6)=0$?

A) $\frac{7}{2}$; B) 4; C) 5; D) 7; E) 13.

23.- Si los lados de un triángulo miden 15, 20 y 25 cm, la longitud de la altura más pequeña del triángulo, expresada en cm, es:

A) 6; B) 12; C) 12,5; D) 13; E) 15.

24.- Las dos raíces de la ecuación $x^2 - 63x + k = 0$ son números primos. El número de posibles valores de $\boldsymbol{k}$ es:

A) 0; B) 1; C) 2; D) 4; E) Más de 4.

25.- Pedro elige al azar dos números del conjunto {1, 2, 3 , 4, 5} y Quino elige uno del conjunto {1, 2, 3, ..., 10}. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de Quino sea mayor que la suma de los que eligió Pedro?

A) $\frac{2}{5}$; B) $\frac{9}{20}$; C) $\frac{1}{2}$; D) $\frac{11}{20}$; E) $\frac{24}{25}$.

VII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE : Día 5 de abril de 2003

NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

*Escribe ahora los siguientes datos:

Apellidos	Nombre	
Colegio o Instituto	**Curso**	**Año de nacimiento**

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA LA LETRA CORRESPONDIENTE A LA RESPUESTA QUE CONSIDERES CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Ediciones S.M. y Grupo ANAYA

.

1.- Con las letras de la palabra "NADIE" podemos formar 120 palabras (o agrupaciones de cinco letras) utilizando todas sus letras. Si se ordenan alfabéticamente las 120, ¿qué lugar ocupa la palabra NADIE en esa relación?
A) 97; B) 98; C) 99; D) 100; E) 101.

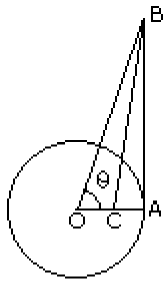
2.- .- ¿Para cuántos enteros positivos "***n***", es $\frac{n}{20-n}$ el cuadrado de un número entero?
A) 1; B) 2; C) 3; D) 4; E) 10.

3.- Un octógono regular ABCDEFGH tiene de lado 2 cm. El área, en cm^2, del triángulo ADG es:
A) $4+2\sqrt{2}$; B) $6+\sqrt{2}$; C) $4+3\sqrt{2}$; D) $3+4\sqrt{2}$; E) $8+\sqrt{2}$.

4.- Pedro elige al azar dos números del conjunto {1, 2,3 , 4, 5} y Guillermo elige uno del conjunto {1, 2, 3, ..., 10}. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de Guillermo sea mayor que la suma de los que eligió Pedro?
A) $\frac{2}{5}$; B) $\frac{9}{20}$; C) $\frac{1}{2}$; D) $\frac{11}{20}$; E) $\frac{24}{25}$.

5.- Si ***x, y, z*** son números positivos que verifican $x+\frac{1}{y}=4$, $y+\frac{1}{z}=1$, $z+\frac{1}{x}=\frac{7}{3}$, entonces el producto de los tres números ***xyz*** es igual a:
A) $\frac{2}{3}$; B) 1; C) $\frac{4}{3}$; D) 2; E) $\frac{7}{3}$.

6.- En la circunferencia de la figura, de centro O y radio 1, BA es tangente en A a la circunferencia. Si BC es bisectriz del ángulo B, entonces OC es igual a:
A) $\sec^2\theta - tg\theta$; B) $\frac{1}{2}$; C) $\frac{\cos^2\theta}{1+sen\theta}$; D) $\frac{1}{1+sen\theta}$; E) $\frac{sen\theta}{\cos^2\theta}$.



7.- Cada uno de los miembros de la familia de Luis tomó un día de desayuno café con leche, todos igual cantidad, aunque la proporción de café y leche variaba en cada taza. Si Luis tomó un cuarto del total de la leche y un sexto del total del café, ¿cuántos miembros hay en la familia de Luis?
A) 3; B) 4; C) 5; D) 6; E) 7.

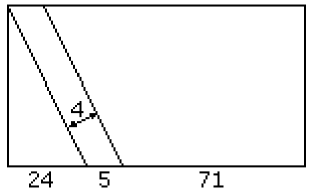
8.- Al copiar una multiplicación de dos números, David escribió un factor 54 en lugar de 45, siendo la respuesta 198 unidades mayor que la que tendría que haber obtenido. ¿Cuál era la respuesta correcta a esa multiplicación?
A) 990; B) 1188; C) 405; D) 945; E) 1200.

9.- $\sqrt{2}\sqrt{2\sqrt{2}}$ es igual a:
A) $3\sqrt{2}$; B) $2\sqrt[4]{2}$; C) 2; D) $\sqrt[3]{2}$; E) $\sqrt{6}$.

10.- En una clase de 25 estudiantes, el número de chicas inmigrantes excede en 6 al número de chicos inmigrantes. Si elegimos dos estudiantes al azar, la probabilidad de obtener un chico y una chica inmigrantes es $\frac{4}{75}$. ¿Cuántos estudiantes de la clase son inmigrantes?
A) 14; B) 13; C) 12; D) 11; E) 10.

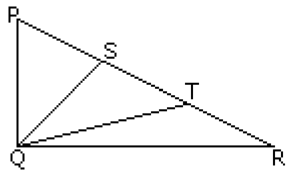
11.- Un coche de 3 m de longitud que viaja a 110 km/h adelanta a un camión de 17 m de longitud que va a 100 km/h. ¿Cuántos segundos tarda el coche en hacer el adelantamiento?
A) 0,5; B) 2; C) 4,1; D) 5,6; E) 7,2.

12.- Una carretera de 4 m de ancha atraviesa como indica la figura una plantación de girasoles que era de forma rectangular. ¿Cuántos m^2 de plantación se han perdido como consecuencia de la existencia de la carretera?



A) 120; B) 150; C) 160; D) 200; E) 250.

13.- En el triángulo rectángulo, PQR la hipotenusa PR está dividida en tres trozos iguales por los puntos S y T. Si $QS^2 + QT^2 = k \cdot PR^2$, el valor de k es:



A) $\frac{5}{9}$; B) $\frac{2}{3}$; C) $\frac{1}{2}$; D) 2; E) $\frac{1}{4}$.

14.- La parte real del complejo $1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + (1 + i)^3 + (1 + i)^4 + (1 + i)^5$ es:
A) 0; B) 1; C) $4\sqrt{2}$; D) 28; E) $-2\sqrt{2}$.

15.- Si *log* representa el logaritmo decimal (base 10), el valor de
$log(2!) - log(3!) + log(4!) - .... - log(9!) + log(10!)$ es:
A) 1; B) $log2 - log3 + log4 -...- log9 + log10$; C) $log(5!)$;
D) $5log2 + log(5!)$; E) $2log5 + 5log2$.

16.- Las soluciones (x, y) del sistema $\begin{cases} y = x^2 - 5x + 3 \\ x = y^2 - 5y + 3 \end{cases}$ verifican que $x - y = 0$ ó que $x + y$ es igual a:
A) 6; B) 4; C) 8; D) -1; E) -2.

17.- Un año es Año Santo Compostelano si el 25 de julio cae en domingo. ¿Cuántos años podrán pasar, como mínimo, entre dos Años Santos Compostelanos consecutivos?
A) 5; B) 6; C) 7; D) 11; E) 12.

18.- Si el resto de la división de un polinomio $P(x)$ entre $(x - 1)$ es 2 y entre $(x + 1)$ es 4, el resto de la división de $P(x)$ entre $(x^2 - 1)$ es:
A) 6; B) $2x + 4$; C) $2x - 4$; D) $-x + 3$; E) $x^2 + 2x - 4$.

19.- Si x e y son números diferentes tales que $2003 + x = y^2$ y $2003 + y = x^2$, el valor del producto $\boldsymbol{xy}$ es:
A) -2001; B) -2002; C) -1001; D) -1; E) 2000.

20.- Si ; es solución de la ecuación $x^4 + x^2 - 1 = 0$, el valor de $;^6 + 2\,;^4$ es:
A) 1; B) 2; C) 3; D) 4; E) 5.

21.- El valor de $\boldsymbol{x}$ en la ecuación $\log_4 \sqrt{x^{4/3}} + 3\log_x(16x) = 7$ es:
A) 16; B) 27; C) 64; D) 81; E) 343.

22.- De los siguientes números, ¿cuál es el más próximo a $\sqrt{101}-10$?

A) $\frac{1}{16}$; B) $\frac{1}{18}$; C) $\frac{1}{20}$; D) $\frac{1}{22}$; E) $\frac{1}{24}$.

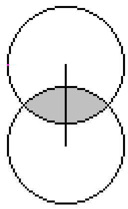
23.- Después de las cinco de la mañana, ¿cuánto tiempo, expresado en horas, debe pasar para que la aguja de los minutos y la de las horas de un reloj formen entre sí, por primera vez, un ángulo recto?

A) $\frac{1}{5}$; B) $\frac{2}{11}$; C) $\frac{5}{22}$; D) $\frac{4}{23}$; E) $\frac{7}{30}$.

24.- Si escribo 2003 en la forma 1 – 2 + 3 – 4 + 5 – 6 + ... + (n – 2) – (n – 1) + n, la suma de los dígitos (o cifras) de n es:

A) 7; B) 8; C) 9; D) 10; E) 11.

25.- Los centros de dos círculos iguales de radio 6 distan entre sí $6\sqrt{3}$.
¿Cuál es el área de la región común a ambos?



A) $2\pi-\sqrt{3}$; B) $6\pi-4\sqrt{3}$; C) $6\pi-12\sqrt{3}$;
D) $12\pi-18\sqrt{3}$; E) $12\pi-24\sqrt{3}$.

VII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

TABLA DE SOLUCIONES (1ª Fase, 26-2-2003)

	Nivel I	**Nivel II**	**Nivel III**	**Nivel IV**
1	D	C	C	C
2	B	E	D	D
3	B	C	C	D
4	C	D	C	B
5	D	D	B	C
6	E	C	A	C
7	B	C	D	D
8	B	C	A	E
9	C	C	A	D
10	E	A	C	A
11	B	D	E	E
12	C	A	A	D
13	A	D	A	B
14	B	D	C	D
15	E	D	A	D
16	C	E	D	D
17	C	D	C	E
18	D	B	E	A
19	A	E	D	D
20	B	D	C	D
21	D	B	B	E
22	D	C	C	B
23	D	E	B	B
24	C	B	B	C
25	B	D	E	E

TABLA DE SOLUCIONES (2ª Fase)

NIV	I	NIV	II	NIV	III	NIV	IV
1	A	1	B	1	E	1	B
2	C	2	B	2	A	2	C
3	C	3	B	3	E	3	C
4	A	4	B	4	B	4	A
5	C	5	B	5	E	5	B
6	B	6	C	6	E	6	D
7	C	7	C	7	B	7	C
8	C	8	D	8	C	8	A
9	C	9	A	9	B	9	B
10	C	10	A	10	E	10	E
11	D	11	D	11	D	11	E
12	B	12	B	12	B	12	C
13	D	13	B	13	E	13	A
14	B	14	A	14	C	14	D
15	B	15	D	15	C	15	D
16	B	16	E	16	C	16	B
17	B	17	D	17	B	17	A
18	C	18	C	18	B	18	D
19	D	19	C	19	A	19	B
20	D	20	D	20	B	20	A
21	E	21	C	21	B	21	C
22	D	22	C	22	A	22	C
23	C	23	C	23	B	23	B
24	E	24	B	24	B	24	C
25	E	25	D	25	A	25	D

II CONCURSO DE PRIMAVERA. NIVEL I (5º-6º Primaria). 1ª FASE. 26-02-03.

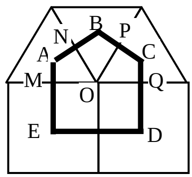
1. (D) 444 + 444 + 444 = 3 x 444 = 3 x (400 + 44) = (3 x 400) + (3 x 44).

2. (B) Al cabo de una semana (7 días) será miércoles y tres días después será sábado.

3. (B) Si divido 100 entre 8 obtengo 12 de cociente y 4 de resto, por lo tanto el mayor múltiplo de 8 menor de 100 es 100 – 4 = 96 ya que 96 = 12 x 8.

4. (C) En cada decena hay 10 y hay 4 decenas con números de dos cifras menores que 50, luego habrá 40.

5. (D) Los cuadriláteros OMAN, ONBP y OPCQ son iguales, luego los ángulos de vértices A, B y C son iguales (que son los mayores del pentágono).
En el cuadrilátero OMAN hay dos ángulos rectos de vértices M y N y un ángulo de 60º de vértice O. Como entre todos suman 360º el de vértice A medirá 120º.



6. (E) Entre los dos tienen el triple de sellos que Beatriz, luego el número total será múltiplo de 3. La única solución posible de las dadas es 1029 porque 1 + 0 + 2 + 9 = 12 es múltiplo de 3.

7. (B) Como tienen que ser diferentes y el mayor posible es 8, la mayor suma será 7 + 8 + 6 = 21.

8. (B) (1001 + 1002 + ….. + 2002 + 2003) – (1 + 2 + …. + 1002 + 1003) agrupando

convenientemente resulta

(1001 – 1) + (1002 – 2) + ... + (2002 – 1002) + (2003 – 1003) =

= 1000 + 1000 + ... + 1000 + 1000 un total de 1003 veces, por lo tanto la suma será 1003 x 1000.

9. (C) Si es múltiplo de 6 tiene que serlo de 2 y de 3, luego acabará y empezará por la mayor cifra par posible, es decir 8. Como también tiene que ser múltiplo de 3 la suma de sus cifras será múltiplo de 3. Por lo tanto la respuesta será 888.

10. (E) El dividendo es igual al divisor x cociente + resto. Por lo tanto

N = 1027 x 3 + 1 = 3082.

11. (B) Como $16 = 2^4$ y 6 = 2 x 3 tiene un divisor (el 3) que no tiene el 16, hay números como el 32 que son divisibles por 16 y no por 6.

12. (C) Cambiamos de unidades 12,5 g = 0,0125 kg 15 cl = 0,15 l 10 g = 0,01 kg

calculamos el precio: 0,0125 x 9,6 + 0,15 x 0,60 + 0,01 x 1 = 0,22 €.

13. (A) Si el perímetro es doble, el lado será doble. Cada lado del cuadrado pequeño mide 6 : 2 = 3 cm, luego el área del cuadrado pequeño será $3^2 = 9$ cm^2.

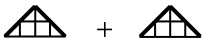
14. (B) Quedaba por vender la cuarta parte de los periódicos y son 40, luego el total será 4 x 40 = 160.

15. (E) Ancho + largo = 4 veces el ancho. Por lo tanto el perímetro será 8 veces el ancho, de donde se deduce que el perímetro será múltiplo de 8. La única respuesta posible de las dadas es 72.

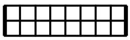
16. (C) El vagón en el que viajan Alicia y Pedro tiene 16 vagones delante y 33 detrás, por lo tanto el tren tiene 16 + 1 + 33 = 50 vagones.

17. (C) El número de vértices tiene que ser la suma de un múltiplo de 4 y otro de 3. La única descomposición posible es 17 = 8 + 9, por lo tanto se deduce que hay 2 cuadrados y 3 triángulos.

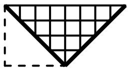
18. (D) Descomponiendo convenientemente el corazón y contando los medios cuadrados se calcula fácilmente el número de éstos.



4 + 4 = 8 cuadrados



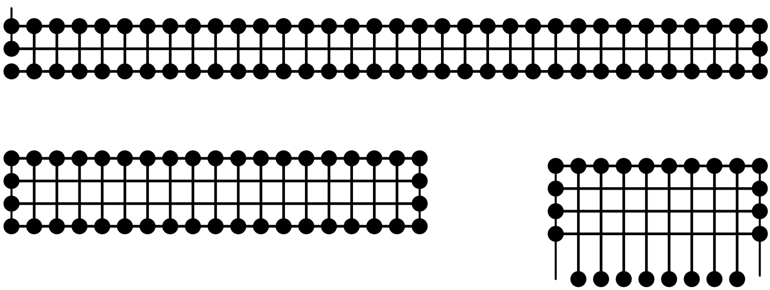
2 x 8 = 16 cuadrados



4 x 4 = 16 cuadrados. En total 8 + 16 + 16 = 40
El peso será 40 x 10 = 400 gramos.

19. (A) 720 : 4 = 180 cm el lado de la toalla de Alicia y de Beatriz. El lado más largo de la toalla de Emilio es por lo tanto de 180 cm. Como tres veces el ancho equivalen a dos largos resulta que (2 x 180) : 3 = 120 cm mide el lado menor de la toalla de Emilio. El perímetro será (120 + 180) x 2 = 600 cm.

20. (B) Los vértices del interior forman un rectángulo. Como el número 32 sólo admite las descomposiciones de dos factores siguientes 1 x 32, 2 x 16 y 4 x 8, resultan las siguientes posibilidades:
Interior 1 x 32 Exterior 2 x 32 + 3 + 3 = 70 vértices
Interior 2 x 16 Exterior 2 x 16 + 4 + 4 = 40 vértices
Interior 4 x 8 Exterior 2 x 8 + 6 + 6 = 28 vértices que es la solución buscada. Por lo tanto el número de cuadraditos tiene que ser, como se observa en las figuras siguientes 5 x 9 = 45.



21. (D) Si deshago las operaciones (utilizando las operaciones “inversas”) obtendré el número inicial (11 x 3 - 9) : 2 = 12.

22. (D) Descomponiendo en rombos el hexágono, se observa fácilmente que la estrella ocupa la mitad del hexágono, luego su área será 1,5 cm^2 = 150 mm^2.

23. (E)

Anchura del primer campo	3200 : 80 = 40 m
Área del segundo campo	3200 : 2 = 1600 m^2
Anchura del segundo campo	40 : 2 = 20 m
Longitud del segundo campo	1600 : 20 = 80 m.

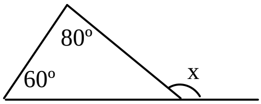
24. (C)

Lado del cuadrado I	16 : 4 = 4 cm
Lado del cuadrado II	24 : 4 = 6 cm
Lado del cuadrado III	4 + 6 = 10 cm
Lado del cuadrado IV	10 + 6 = 16 cm
Perímetro del cuadrado IV	16 x 4 = 64 cm.

25. (B) Se observa el periodo de 4 cifras 1232. Dividimos 2003 entre 4 y resulta 500 de cociente y 3 de resto. Conclusión, hay 500 veces el periodo y luego las tres primeras cifras del periodo siguiente, es decir 123.
1232 1232 1232 1232 1232 1232 1232 1232.............. 1232 123.

VII CONCURSO DE PRIMAVERA. 2º NIVEL (1º-2º ESO). 1ª FASE. DÍA 26-02-03.

1. (C) El tercer ángulo del triángulo es suplementario de x y a la vez suplementario de la suma de ángulos 60º + 80º, y por tanto x es igual a 140º.



2. (E) 1000 + 100 + 10 + 1 = 1111.

3. (C) 11 x 7 = 77 ; 1,1 x 0,7 = 0,77.

4. (D) Un vistazo descubre enseguida que la forma más compacta es la que tiene menos perímetro.

5. (D) Buscamos un número que esté entre 8 x 6 y 8 x 7.

6. (C) $$\frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{10}}{2}=\frac{\frac{5+3}{30}}{2}=\frac{\frac{8}{30}}{2}=\frac{\frac{4}{15}}{2}=\frac{2}{15}$$

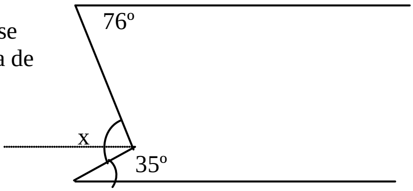
7. (C) La figura es un trapecio rectángulo: Área = $\frac{B+b}{2}\cdot h=\frac{7+5}{2}\cdot 4=24$.

8. (C) $$\begin{cases} \text{Pcaja} + \text{Pcontenido} = 242 \text{ kg} \\ \text{Pcaja} + \dfrac{\text{Pcontenido}}{2} = 188 \text{ kg} \end{cases}$$; y restando obtenemos

$\frac{\text{Pcontenido}}{2}$ = 54 kg, y por tanto Pcaja = 188 – 54 = 134 kg.

9. (C) $\dfrac{53{,}1 \times 0{,}046}{0{,}0021} = \dfrac{531 \times 46}{21}$; 46 entre 21 está entre 2 y 3, luego nuestra operación está entre 1062 y 1593, por tanto de los dados el número más cercano es 1000.

10. (A) Basta trazar una línea auxiliar para darse cuenta de que x se compone de la suma de de 35º y 76º.

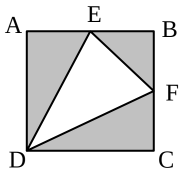


11. (D) He lanzado la moneda 40 veces y he obtenido 50% de caras, es decir 20. Como ya había sacado 12 caras en los primeros treinta lanzamientos, en los últimos diez he sacado 8.

12. (A) $\dfrac{10}{60}$ km/min = $\dfrac{d}{6}$ km/min , luego d = 1 km

$\dfrac{1}{8}$ km/min = $\dfrac{60}{8}$ km/h = 7,5 km/h **.**

13. (D) Los triángulos AED y CFD ocupan cada uno una cuarta parte del cuadrado, y el EBF una octava. Luego la zona sombreada ocupa $\dfrac{2}{4} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{5}{8}$ del cuadrado.

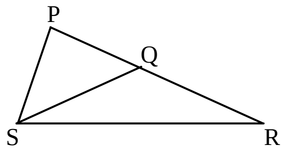


14. (D) Por ser isósceles el triángulo SPQ "sobre SQ"

tenemos que $< PQS = \dfrac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ$;

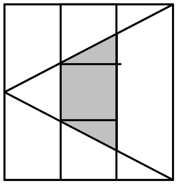
< SQR es su suplementario, es decir 130º, y así al ser también SQR isósceles

"sobre SR" $R = \dfrac{180^\circ - 130^\circ}{2} = 25^\circ$.



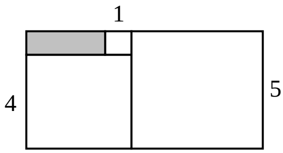
15. (D) El número de libros n verifica ser múltiplo de 7 y además n – 2 es múltiplo de 12 y de 9, es decir de 36. Así partiendo de 2 avanzamos de 36 en 36 hasta obtener un múltiplo de siete: 2, 38, 74, 110, 146, 182.

16. (E) La figura sombreada puede ser descompuesta en un cuadradito central que tiene 1/9 del área del cuadrado de partida y dos triángulos que reorganizados cubren la mitad del cuadradito central. Así el área es $\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$ de la del cuadrado.

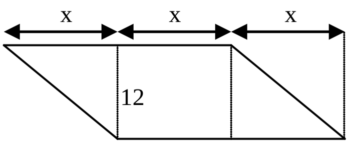


17. (D) $\frac{3^2}{4^2}=\frac{9}{16}$ es una fracción irreducible distinta de $\frac{3}{4}$.

18. (B) El cuadrado más grande es 5 x 5
El cuadrado mediano es 4 x 4.
El cuadrado pequeño es 1 x 1.
Y el área sombreada 3 x 1.



19. (E) La figura es un paralelogramo de área $12 \cdot 2x = 24x = 408$, de donde $x = \frac{408}{24} = 17cm$.



20. (D) 8 *a* 7 + 7 *a* 6 + 4 *a* 8 + 9 *a* 3 + 8 *a* 4 = 3 9 2 8
La suma de las unidades es 7 + 6 + 8 + 3 + 4 = 28 (luego llevamos dos unidades a las decenas. La suma de las decenas es 5*a* . La suma de las centenas es 8 + 7 + 4 + 9 + 8 = 36. Como la suma total es 3928, 5*a* +2 debe acabar en 2 y llevar tres unidades a las centenas, es decir 5*a* +2 = 32, luego *a* = 6.

21. (B) $\frac{32}{180} = \frac{x}{225}$; $x = \frac{32 \cdot 45}{36} = \frac{32 \cdot 5}{4} = 8 \cdot 5 = 40$.

22. (C) En la columna de las unidades tenemos que sumar 2003 unos.
En la columna de las decenas tenemos que sumar 2002 unos
En la columna de las centenas 2001 unos.
En la columna de los millares 2000 unos.
En la columna de las decenas de millar 1999 unos.
Luego las cinco últimas cifras de la operación serán las cinco últimas de la suma:

$$\begin{array}{r} 2003 \\ 20020 \\ 200100 \\ 2000000 \\ +\ \underline{19990000} \\ ....12123 \end{array}$$

23. (E) AB = 14 + AC.
BC = 30 + AC.
Así AC es el lado menor y debe ser mayor que BC – AB = 16. Por tener que ser entero debe al menos valer 17, con lo que el perímetro mínimo es:
17 + 31 + 47 = 95.

24. (B) O bien Alicia saca cara (probabilidad 1/2) y Pedro una cara (probabilidad 1/2) o bien Alicia saca cruz (probabilidad 1/2) y Pedro dos cruces (probabilidad 1/4).

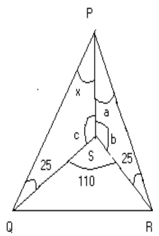
Luego la probabilidad pedida es $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

25. (D) Si la mediana es 18 los dos datos menores que la mediana son como poco 1 y 2. 18 es el tercer dato y 19 como mínimo el cuarto. Como la suma de los cinco es $5 \cdot 15 = 75$, el dato mayor a lo más será 75 – (1 + 2 + 18 + 19) = 75 – 40 = 35.

VII CONCURSO DE PRIMAVERA. NIVEL III (3º-4º de ESO). 1ª FASE. 26-02-03.

1. (C) El coche ha sido rebajado $18.000 - 13.500 = 4.500$ euros, lo que supone un porcentaje respecto al precio original de $\frac{4.500 \times 100}{18.000} = 25\%$.

2. (D) En el triángulo isósceles PSR . como SP = SR, tenemos que a = 25º, y como sus ángulos suman 180º, ***b + 25º + 25º = 180º*** $\Rightarrow$ ***b = 130º***. La suma de los tres ángulos en S debe ser 360º, así que ***c + 110º + 130º = 360º*** $\Rightarrow$ ***c = 120º***. Ya podemos calcular ***x*** trabajando en el triángulo PQR: ***x + 25º + 120º = 180º*** $\Rightarrow$ ***x = 35º***.



3. (C) Se ha dividido cierta cantidad en 11 (6 + 3 + 2 = 11) partes iguales y la que menos ha recibido (300 €), ha recibido 2 partes del total. Lo que indica que cada parte son 150 €, que multiplicados por las 11 partes totales supone 150 **x** 11 = 1650 €.

4. (C) Restaremos al área del rectángulo, el área del triángulo no sombreado.
El área del rectángulo es *base* x *altura* = *8* x *11* = *88* cm^2; y el área del triángulo es $\frac{base \times altura}{2} = \frac{4 \times 8}{2} = 16 cm^2$. Por lo tanto, el área de la zona sombreada será: 88 – 16 = 72 cm^2 .

5. (B) Al haber 256 números vemos que cada cifra (1,2,3,4) aparece 256 : 4 = 64 veces en cada lugar, es decir, en la cifra de las unidades hay 64 unos, 64 doses, 64 treses y 64 cuatros. Por tanto, si coloco los 256 números, uno debajo de otro para sumarlos, observo que la suma de las unidades es:

$1\times 64+2\times 64+3\times 64+4\times 64=(1+2+3+4)\times 64=10\times 64=640.$ Y lo mismo ocurre con las decenas, centenas y millares.

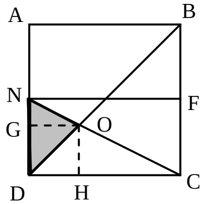
	640 unidades
640 decenas **x** 10 =	6.400 unidades
640 centenas **x** 100 =	64.000 unidades
640 millares **x** 1000 =	640.000 unidades
TOTAL	711.040 unidades.

6. (A) Llamaremos ***x*** a las vueltas que llevaba dadas en ese momento, e ***y*** al total de las vueltas que queremos calcular. Entonces, podemos formar este sistema:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x}{y}=20\%=0{,}2\\[2mm] \dfrac{x+1}{y}=25\%=0{,}25\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}x=0{,}2y\\ x+1=0{,}25y\end{array}\right\}\Rightarrow 0{,}2y+1=0{,}25y\Rightarrow 1=0{,}05y\Rightarrow y=\frac{1}{0{,}05}=20$$

Y ya está, Antonio da cada día 20 vueltas.

7. (D) Añadimos unas pocas líneas al dibujo y vemos que nos piden calcular el área ***x*** del triángulo NOD. Lo primero que debemos observar es que OG y OH miden lo mismo, ya que son perpendiculares que parten de un punto O de la diagonal de un cuadrado. Así, el área del



triángulo DOC será doble que la del NOD, ya que tienen la misma altura y la base DC, del grande, es doble que la base ND, del pequeño. Por tanto, el área de DOC será 2***x***. Como NC es una diagonal del rectángulo DNFC, el área del triángulo NFC será igual al área del NCD, es decir ***x + 2x = 3x***. Por otra parte, como N es el punto medio de AD, vemos que el área del rectángulo ABFN debe ser igual al del

NFCD, es decir ***x + 2x + 3x = 6x***. Conclusión, el área del cuadrado original es: ***x + 2x + 3x + 6x = 12x = 36*** cm^2 y ya podemos contestar: ***x =*** 36 : 12 = 3 cm^2 .

8. (A) El siguiente capicúa a 35.953 deberá empezar por 36 y será el 36.063. Lo que indica que han pasado 36.063 – 35953 = 110 km. Como los ha recorrido en 75 minutos, la velocidad media será:

$$\frac{110\ km}{75\ \text{min}} = \frac{110 \times 0{,}8\ km}{75 \times 0{,}8\ \text{min}} = \frac{88\ km}{60\ \text{min}} = 88\ km/h.$$

9. (A) Llamando ***m*** al precio de un melón, ***p*** al precio de un plátano y ***n*** al de una naranja, podemos traducir los datos mediante dos ecuaciones:

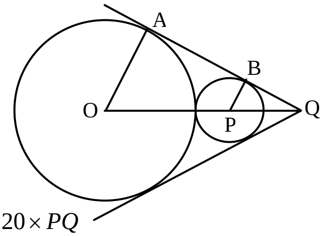
$\left.\begin{array}{l} 7m = 9p + 8n \\ 5m = 6p + 6n \end{array}\right\}$ y para saber a qué equivale un melón, multiplicaré la segunda ecuación por 3, la primera por 2 y las restaré:

$\left.\begin{array}{l} (\times 2) \to 14m = 18p + 16n \\ (\times 3) \to 15m = 18p + 18n \end{array}\right\}$ y restando la segunda ecuación menos la primera obtenemos que: ***m = 2n***, es decir, un melón vale lo mismo que 2 naranjas.

10. (C) Tendremos que buscar entre las opciones que nos ofrecen un par de números cuyo mínimo común múltiplo sea 24. Es claro que ***mcm***(8, 3) = 24, es decir, un número es divisible por 24 cuando lo es por 8 y por 3.

11. (E) Si C le sacase a D un puesto, entonces, según los datos, B le sacaría a A dos puestos, y esto sólo puede ocurrir de dos maneras: 1C, 2D, 3B, 5A ó 1B, 3A, 4C, 5D, pero ninguna de estas opciones es válida ya que no deja puesto para E que debe estar en un lugar impar.

Si C le sacase a D dos puestos, entonces B debe sacar a A 4 puestos lo cual se consigue sólo de esta forma: 1B, 2C, 4D, 5A y queda el tercer puesto para E: 1B, 2C, 3E, 4D, 5A. Y ya podemos contestar que la única afirmación necesariamente verdadera es que Antonio quedó en último lugar.



12. (A) Utilizaremos el teorema de Tales ya que tenemos dos paralelas (OA y PB) cortadas por dos secantes (AQ y OQ):

$$\frac{OA}{PB}=\frac{OQ}{PQ}\Rightarrow\frac{40}{20}=\frac{40+20+PQ}{PQ}\Rightarrow$$

$$40\times PQ=20\times(60+PQ)\Rightarrow 40\times PQ=1200+20\times PQ$$

y ya está: $20\times PQ=1200\Rightarrow PQ=60$ cm.

13. (A) Empecemos con mucho orden sin olvidarnos de ningún número creciente.

De dos cifras: Empezando por 1 están: 12, 13, ..., 18, 19, es decir 8 números crecientes. Empezando por 2 hay: 23, 24, ..., 29, o sea 7 números crecientes. Y así seguiríamos hasta el último número creciente de dos cifras, el 89. En total, tenemos que hay 8 +7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36 números crecientes de dos cifras.

De tres cifras ya es fácil fijándonos en los de dos cifras.

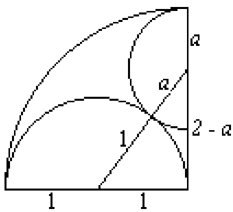
Empezando por 1, tendríamos 123, 124,..., 134, 135,... 189, es decir, los mismos que los de dos cifras menos los que empezaban por el 1, es decir:

7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28 números crecientes de tres cifras que empiezan por 1

Empezando por el 2, serían 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21 y empezando por el 3 tendríamos 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15.

Hasta ahora tenemos justamente 36 + 28 + 21 + 15 = 100 números crecientes, de los cuales el último ha sido el último de los de 3 cifras que empezaba por 3, es decir, el 389.

14. (C) Como otros muchos problemas de geometría, la luz se hace si trazamos alguna figura auxiliar. En nuestro caso,



basta con trazar el segmento que une los dos centros de las semicircunferencias tangentes. Llamando ***a*** al radio que debemos calcular, observamos que se forma un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 y 2 – ***a***, y la hipotenusa mide 1 + ***a***. Ayudándonos del teorema de Pitágoras, ya tenemos la ecuación que nos resolverá el problema:

$$1^2+(2-a)^2=(1+a)^2\Rightarrow 1+4+a^2-4a=1+a^2+2a\Rightarrow 4=6a\Rightarrow a=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\text{ cm.}$$

15. (A) La cantidad que tenemos de zumo de naranja es 50 % de 350 = 175 ml. Llamamos ***x*** a la cantidad de agua que debemos añadir y, según el enunciado, se cumple que:

$\dfrac{175}{350+x}=30\%=\dfrac{30}{100}\rightarrow 1750=1050+3x\rightarrow x=\dfrac{700}{3}\cong 233{,}33$ ml. Por lo tanto, la opción que más se acerca es 230 ml.

16. (D) Cada una de las zonas sombreadas tiene un área que es igual a:

$$\frac{1}{2}\left(\textit{círculo de radio}\,\frac{a}{2}\right)-\frac{1}{4}\left(\textit{círculo de radio la diagonal}-\textit{cuadrado}\right).$$

Calculemos estas áreas por partes:

Círculo de radio $\dfrac{a}{2}$; $\quad C_1=\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=\dfrac{\pi a^2}{4}$

Diagonal del cuadrado: $d^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=\dfrac{a^2}{2}$

Círculo de radio la diagonal: $\quad C_2=\pi d^2=\dfrac{\pi a^2}{2}$

Cuadrado: $A=a^2$.

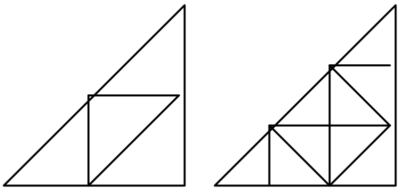
Así pues, el área de cada zona sombreada será:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi a^2}{4}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{\pi a^2}{2}-a^2\right)=\frac{\pi a^2-\left(\pi a^2-2a^2\right)}{8}=\frac{2a^2}{8}=\frac{a^2}{4},$$

y como hay cuatro zonas sombreadas, multiplicamos por cuatro y concluimos que el área de la zona sombreada total es: $4\times\frac{a^2}{4}=a^2$.

17. (C) Si cada tramo de 12 m de descenso supone un alejamiento de 100 m en horizontal, para descender 9.000 m recorre 9.000 : 12 = 750 tramos, lo que supone alejarse un total de $750\times 100=75.000$ m, es decir, 75 km.

18. (E) Trazando algunas líneas auxiliares vemos:



En el triángulo de la izquierda tenemos 4 triangulitos iguales (cada dos de ellos forman un cuadrado de lado 21 cm), lo que nos dice que el área del triángulo grande es $2 \times 21^2 = 882$ cm^2.

En el triángulo de la derecha obtenemos 9 triangulitos iguales, por tanto cada uno de ellos tiene un área igual a 882 : 9 = 98 cm^2, y como el cuadrado que aquí aparece tiene 4 de esos triangulitos, el área de dicho cuadrado será 4 x 98 = 392 cm^2; y por consiguiente, la longitud del lado de ese cuadrado será $\sqrt{392}=\sqrt{2^3\cdot 7^2}=14\sqrt{2}$ cm.

19. (D) Vamos a resolver el sistema que aparece:

$$\left.\begin{array}{l} xy = 24 \\ xz = 48 \\ yz = 72 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{24}{y} \\ x = \dfrac{48}{z} \\ yz = 72 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{24}{y} = \dfrac{48}{z} \\ yz = 72 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{24z}{48} \\ y = \dfrac{72}{z} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{24z}{48} = \frac{72}{z} \Rightarrow z^2 = 144 \Rightarrow z = 12$$

Y las demás incógnitas valen: $x = \frac{48}{z} = \frac{48}{12} = 4$ e $y = \frac{72}{z} = \frac{72}{12} = 6.$ Por tanto, la suma pedida será $x + y + z = 4 + 6 + 12 = 22$.

Otra forma de resolverlo es:

$$\left.\begin{array}{l} xy = 24 \\ xz = 48 \end{array}\right\} \Rightarrow z = 2y \quad \left.\begin{array}{l} yz = 72 \\ z = 2y \end{array}\right\} \Rightarrow 2y^2 = 72 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 6 \\ z = 12 \\ x = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow x + y + z = 22.$$

20. (C) La pendiente de una recta es la variación de la segunda coordenada dividida entre la variación de la primera coordenada. En nuestro caso, la pendiente es $\frac{m-(-9)}{7-m} = \frac{m+9}{7-m}$, y como nos aseguran que dicha pendiente es *m*, ya tenemos la ecuación que nos resolverá el problema:

$$\frac{m+9}{7-m} = m \Rightarrow m + 9 = 7m - m^2 \Rightarrow m^2 - 6m + 9 = 0 \Rightarrow m = 3.$$

21. (B) Vamos a buscar alguna igualdad que relaciones todas las letras que entran en juego. $3^a = 4$, elevando a *b* los dos miembros, $\left(3^a\right)^b = 4^b = 5$, elevando a *c* los dos miembros, $\left((3^a)^b\right)^c = 5^c = 6$, y continuando así, elevando a *d*, *e*, y *f*, obtenemos que $(((((3^a)^b)^c)^d)^e)^f = 9$, es decir, $3^{abcdef} = 9$, lo que nos asegura que el exponente debe ser 2 y por tanto *abcdef* = 2.

22. (C) Llamemos a y b a los catetos y c a la hipotenusa de dicho triángulo rectángulo.

Con los datos podemos formar este sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=40 \\ a^2+b^2+c^2=578 \\ (T.\ de\ Pitág.)\ a^2+b^2=c^2 \end{array}\right\} \Rightarrow c^2+c^2=578 \Rightarrow 2c^2=578 \Rightarrow c=\sqrt{289}=17$$

Por tanto, si sustituimos el valor de c en las ecuaciones anteriores, vemos que los catetos deben cumplir:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=23 \\ a^2+b^2=289 \end{array}\right\}$$ y en vez de resolver este sistema, podemos ir comprobando las

cinco opciones que nos ofrece la respuesta y quedarnos con la única que cumpla las dos igualdades. Por ejemplo, la respuesta A nos dice que a = 6 y, por tanto, b = 17, que claramente no vale (un cateto y la hipotenusa no pueden tener igual longitud). La B es $a=7 \Rightarrow b=16$ que tampoco es válida porque $7^2+16^2=305$. La C sí es correcta ya que cumple la condición del teorema de Pitágoras:

$a=8 \Rightarrow b=15 \Rightarrow 8^2+15^2=289$.

23. (B) Si el lado del cuadrado mide x, entonces su perímetro es $p=4x$, y su área es $A=x^2$. Como $A=2p$, tenemos que:

$x^2=2\cdot 4x \Rightarrow x^2-8x=0 \Rightarrow x(x-8)=0 \Rightarrow x=8$ m (la solución $x=0$ no tiene sentido). El perímetro del cuadrado será $p=4x=4\times 8=32$ m.

24. (B) Estos problemas en los que intervienen porcentajes pueden resolverse dando valores concretos e interpretando el resultado en porcentajes. Además sabemos que la razón entre las áreas es el cuadrado de la razón de semejanza.

Supongamos un triángulo de lado 10, al aumentar un 20%, pasaría a tener un lado de 12. Y sus áreas variarían en proporción de $10^2 = 100$ a $12^2 = 144$, es decir, las áreas aumentan un 44%.

25. (E) Estudiemos todos los casos favorables suponiendo que debe coincidir el primer dado con la suma de los otros dos:

Si en el primero sale 1 (probabilidad 1/6), no se puede cumplir lo pedido. (este caso es desfavorable).

Si sale un 2 (probabilidad 1/6), en los otros debe salir (1,1) que tiene probabilidad 1/36.

Si sale un 3 (probabilidad 1/6), en los otros debe salir (1,2) ó (2,1) que tiene probabilidad 2/36.

Si sale un 4 (probabilidad 1/6), en los otros debe salir (1,3), (2,2) ó (3,1) que tiene probabilidad 3/36.

Y siguiendo con el resto llegaríamos a una probabilidad de

$\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1+2+3+4+5}{36}\right)=\frac{15}{6\cdot 36}=\frac{5}{72}$ y este resultado hay que multiplicarlo por 3 ya que el dado suma podría ser el primero, el segundo o el tercero, y la respuesta es entonces: $\frac{3\times 5}{72}=\frac{5}{24}$.

VII Concurso de Primavera de Matemáticas 1ª Fase. Nivel IV (1º y 2º de Bachillerato)

1. (C) Como la pendiente es $m=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\Rightarrow m=\dfrac{m+9}{m-7}\Rightarrow m^2-6m+9=0\Rightarrow m=3.$

2. (D**)** Si BCD es equilátero, el ángulo $\hat{C}$ = 60º. Como $tg\,\hat{C}=\dfrac{AB}{BC}$, BC = 1 y $tg\,60^{\circ}=\sqrt{3}\Rightarrow AB=\sqrt{3}\cdot$

3. (D) 83 x + 71(100 – x) = 80×100 $\Rightarrow$ 12x = 900 $\Rightarrow$ x = 75%.

4. (B) $3^a=4$; $4^b=5$; $5^c=6$; $6^d=7$; $7^e=8$; $8^f=9$ $\Rightarrow\left(7^e\right)^f=9$, y continuando las sustituciones se llega a $\left(\left(\left(\left(\left(3^a\right)^b\right)^c\right)^d\right)^e\right)^f=9\Rightarrow$ a·b·c·d·e·f = 2.

5. (C) Considerando los datos y el teorema de Pitágoras se tiene el sistema:

$$\left.\begin{array}{c}a+b+c=40\\ a^2+b^2+c^2=578\\ a^2=b^2+c^2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}a+b+c=40\\ 2a^2=578\\ a^2=b^2+c^2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}a+b+c=40\\ a=17\\ a^2=b^2+c^2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c}b+c=23\\ b^2+c^2=289\end{array}\right\}\Rightarrow c^2-23c+120=0\Rightarrow\begin{cases}c=15\\ c=8.\end{cases}$$

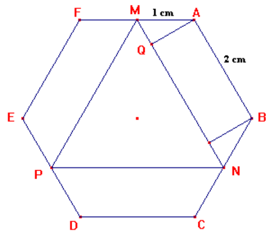
6. (C) Como 2 es del recorrido, existe un número x tal que f(x) = 2 . Como para todo x se cumple que $f\left(f\left(x\right)\right)\cdot\left(1+f\left(x\right)\right)=-f\left(x\right)$, cuando f(x) = 2 se tiene:

f(2) · (1+2) = – 2, y por tanto, f(2) = $\dfrac{-2}{3}$.

7. (D) $\lg\frac{1}{2}+\lg\frac{2}{3}+\lg\frac{3}{4}+...+\lg\frac{98}{99}+\lg\frac{99}{100}=\lg\left(\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4}...\frac{98}{99}\frac{99}{100}\right)=\lg\frac{1}{100}=-2.$

VII Concurso de Primavera de Resolución de Problemas Soluciones 1ª Fase

8. (E) Si el perímetro del hexágono es 12 cm, el lado es 2 cm; y el lado del triángulo equilátero es 3 cm.
En efecto, en la figura, al trazar la perpendicular desde el vértice A hasta el lado MN, se forma un triángulo rectángulo AQM cuya hipotenusa AM mide 1 cm y cuyo ángulo MAQ mide 30º. Por tanto el lado MQ mide 0.5 cm y el lado MN = 3 cm. El área del triángulo MNP vale $\frac{9\sqrt{3}}{4}$.



9. (D) La primera es cierta: 2 es primo y par.
La segunda es falsa: $2^{65} + 1$ es múltiplo de 3, ya que 2^{65} da resto 2 al dividirlo entre 3, como ocurre con todas las potencias de 2 de exponente impar. (*)
La tercera es cierta: $8^2 = 4^3$
La cuarta es cierta: $x^2 + 1 = 0$ no tiene soluciones reales
La quinta es cierta: $y = x^3 + x^2 + 1$ corta al eje OX una y solamente una vez, entre las abscisas –2 y –1 (se puede ver estudiando su monotonía y teniendo en cuenta que su mínimo relativo está en (0, 1)).
(*)Esta afirmación se basa en el teorema del factor y del resto, puesto que si n es impar $x^n + 1$ es divisible entre x + 1 y para x = 2 resulta que $2^n + 1$ es divisible entre 2 + 1 = 3.

10.(A) Si $z = 1_{\frac{\pi}{2003}}$ entonces $z^{2003} = 1_{\pi} = -1$ y $\frac{1}{z^{2003}} = \frac{1}{-1} = -1$, por lo tanto

$$z^{2003} + \frac{1}{z^{2003}} = (-1) + (-1) = -2.$$

11. (C) Para que $(ax^2 - 2x + a)$ sea menor que 0 para cualquier valor de x, no debe tener raíces reales (el discriminante debe ser negativo) y el coeficiente del término de segundo grado, a, debe ser negativo. Por tanto

$$\left.\begin{array}{r} a < 0 \\ 4 - 4a^2 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a < 0 \\ a^2 > 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a < -1.$$

12. (D) $\dfrac{5}{6^{-2}8^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{5\times 6^2}{\sqrt[3]{8}}=\dfrac{5\times 36}{2}=90.$

13. (B) Llamando l al lado del cuadrado se tiene: $\left.\begin{matrix} 4l = \mathrm{p} \\ l^2 = \mathrm{A} \end{matrix}\right\}$ Como A = 2p $\Rightarrow$ $l^2 = 8l$

$\Rightarrow$ l = 8 y p = 32 cm.

14. (D) $(\mathrm{sen\,x}+\cos \mathrm{x})^2 - \mathrm{sen\,2x}$ = $\mathrm{sen}^2\mathrm{x} + \cos^2\mathrm{x}$ + 2senx·cosx– 2senx·cosx = 1, independientemente del valor de x.

15. (D) El argumento del complejo 3 + 4i es doble del argumento de cualquiera de sus dos raíces cuadradas. Por tanto, la relación entre sus tangentes viene dada por la expresión de la tangente del ángulo doble. Si llamamos t a la tangente del argumento de una cualquiera de las raíces cuadradas de 3 + 4i tenemos:

$$\frac{4}{3}=\frac{2t}{1-t^2} \Rightarrow 2t^2+3t-2=0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{1}{2} \\ t_2 = -2 \end{cases}$$

Como 3 + 4i está en el primer cuadrante, sus raíces cuadradas tienen argumentos con tangente positiva, por lo que rechazamos la solución negativa.

16. (D) Si la parábola y = x^2 + 8x + k tiene el vértice en el eje de abscisas, su ecuación corresponde a un trinomio cuadrado perfecto, y k = 16.

17. (E) Como $9^{-x} = 7 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2}\lg_3(7)$. El valor de 27^{2x+1} es igual que 27×27^{2x}, es decir: $27\times 27^{-\log_3 7} = 27\times 3^{-3\log_3 7} = 27\times 3^{\log_3 7^{-3}} = 27\times 7^{-3} = \dfrac{27}{343}$.

18. (A) Si x – y = 1, entonces de $(x^2 - y^2)(x^2 - 2xy + y^2) = 3$ se deduce que x + y = 3. Resolviendo el sistema $\begin{cases} \mathrm{x}-\mathrm{y}=1 \\ \mathrm{x}+\mathrm{y}=3 \end{cases}$ se obtiene x = 2 e y = 1. De modo que xy = 2.

19. (D) Las afirmaciones 1, 3 y 4 se contradicen mutuamente. Si 1 fuese verdadera también deberían serlo 3 y 4, que es contradictorio. Luego 1 es falsa. Y entonces

3 también es falsa, lo que hace que 4 sea verdadera. Las afirmaciones 2 y 5 son verdaderas. Por tanto hay tres verdaderas.

20. (D) Como 12!×6! + 12! + 6! + 1 = (12! + 1)(6! + 1), y según el teorema de Wilson 12! + 1 es divisible por 13, (12! + 1)(6! + 1) es divisible por 13×721 que está comprendido entre 9300 y 9400.

21. (E) Las combinaciones de los tres dados en las que los puntos de uno coinciden con la suma de los puntos de los otros dos son: 112, 123,134, 224, 145, 235, 156, 246 y 336. Pero cada una de estas combinaciones se puede presentar tantas veces como permutaciones haya en cada combinación. Teniendo en cuenta que si hay dos números iguales el número de permutaciones de cada combinación es 3 y si no se repite ningún número es 6, el número total de casos favorables es: 3 + 6 + 6 + 3 + 6 + 6 + 6 + 6 + 3 = 45. Como el número de casos igualmente posibles es 216, la probabilidad es $p = \frac{45}{216} = \frac{5}{24}$.

22. (B) Como la velocidad es constante:

$$v = \frac{\Delta e}{t} = \frac{100x + z - (10z + x)}{18} = \frac{10z + x - (10x + z)}{42}$$

$$\frac{99x - 9z}{18} = \frac{9z - 9x}{42} \Rightarrow \frac{11x - z}{3} = \frac{z - x}{7} \Rightarrow 77x - 7z = 3z - 3x \Rightarrow 80x = 10z \Rightarrow$$

$8x = z \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ z = 8 \end{cases}$ .A las 14 h estaba a 108 Km. de su casa y viajaba a 1,5 km/min

Por tanto tardó 72 minutos en recorrer la distancia y llegó a las 15h 12 min.

23. (B) $x = \frac{DE \times AD}{2}$, $y = \frac{EC \times AD}{2}$, $z = \frac{(DE + EC) \times AD}{2}$. Como $y^2 = xz$, tenemos:

$$\frac{EC^2 \times AD^2}{4} = \frac{DE \times AD}{2} \cdot \frac{(DE + EC) \times AD}{2} \Rightarrow EC^2 = DE \times (DE + EC) \Rightarrow$$

$$EC^2 = DE^2 + DE \times EC \Rightarrow 1 = \left(\frac{DE}{EC}\right)^2 + \frac{DE}{EC} \Rightarrow \left(\frac{DE}{EC}\right)^2 + \frac{DE}{EC} - 1 = 0 \Rightarrow$$

$\frac{DE}{EC} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2} = \frac{\pm\sqrt{5} - 1}{2}$. Como la solución negativa no tiene significado:

$$\frac{DE}{EC} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

24. (C) Si $f(xy) = \dfrac{f(x)}{y} \Rightarrow f(500) = \dfrac{f(100)}{5}$**.** Y como dan el dato de que f(500) = 3, se obtiene que f(100) = 15. Por tanto $f(600) = \dfrac{f(100)}{6} = \dfrac{15}{6} = \dfrac{5}{2}$.

25. (E) Como $1 < \dfrac{\pi}{3}$ y el coseno es decreciente en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, sabemos que:

$\cos 1 > \cos \dfrac{\pi}{3} = 0.5$. Por lo tanto $2\cos 1 > 1$ y $2\operatorname{sen}1 \cdot \cos 1 > \operatorname{sen} 1$. Es decir, $\operatorname{sen}2 > \operatorname{sen}1 > 0$. Como $\operatorname{sen} 3 < 0$ se tiene que $\operatorname{sen}3 < \operatorname{sen}1 < \operatorname{sen}2$.

VII CONCURSO DE PRIMAVERA NIVEL I (5º-6º Primaria). 2ª FASE. 5-04-03.

1. (A) Mediante la propiedad distributiva de la división respecto de la suma o resta
$(777 – 77 – 7) : \boxed{7} = (777 : 7) – (77 : 7) – (7 : 7) = 111 – 11 – 1$.

2. (C) Es siempre PAR y para más información múltiplo de 4, ya que multiplicamos dos números múltiplos de 2.
Impar nunca.
Mayor que 10 no siempre. $2 \times 4 \times 1 = 8 < 10$
Primo evidentemente no, ya que es producto de tres números.
Múltiplo de 6 sólo si alguno de ellos es múltiplo de 3.

3. (C) $1900 + 80 + 17 = 1997$.

4. (A) Si el perímetro del cuadrado grande es el doble, entonces el lado del cuadrado grande será el doble del lado cuadrado pequeño.
Lado del cuadrado pequeño $12 : 2 = 6$ cm
Área del cuadrado pequeño $6 \times 6 = 36$ cm^2.

5. (C) 1 € + 4 x 0,75 € = 1 € + 3 € = 4 euros.

6. (B) Uno de cada tres no tiene el pelo negro, es decir $120 : 3 = 40$ niños.

7. (C) Como son consecutivos, el del centro no sólo es la mediana, es también la media.
$600 : 5 = 120$ Los números son: 118, 119, 120, 121, 122. Luego el menor es 118.

8. (C) En total hay 1002 números pares y 1002 números impares. Los restamos uno a uno y se obtiene:
$(2 + 4 + 6 + ... + 2004) – (1 + 3 + 5 + ... + 2003) = 1 + 1 + 1 + ... + 1 = 1002$.

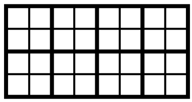
9. (C) Entre los tres ángulos suman 180º, como hay un ángulo recto que mide 90º, entre los otros dos sumarán 90º, luego el mayor de ellos es el ángulo recto que mide 90º.

10. (C) El máximo producto sería 999 x 99 un poco menor que 1000 x 100 = 100000 que tiene 6 cifras. Por lo tanto sin necesidad de efectuar el producto, sabemos que 999 x 99 tiene 5 cifras.

11. (D) Dividimos 200 entre 7 y se obtiene 28 de cociente y 4 de resto, por lo tanto si restamos 200 – 4 = 196 nos dará un múltiplo de 7 que es el mayor posible.

12. (B) Si en 60 minutos se forma una capa de 60 cm, significa que cada minuto aumenta 1 cm, por lo tanto en 100 minutos la capa llegará a 100 cm.

13. (D) 8 : 2 = 4 cuadraditos de largo
4 : 2 = 2 cuadraditos de ancho
En total habrá 4 x 2 = 8 cuadraditos.



14. (B) 42 lapiceros es 6 veces 7 lapiceros, luego equivale a 6 veces 3 plumas, es decir, 18 plumas.

15. (B) Si la suma es doble de la diferencia, la suma es par.
Si la suma es par, los números son o los dos pares o los dos impares. En cualquiera de las dos posibilidades, la diferencia es par.
Como la suma es el doble de la diferencia, es el doble de un número par, por lo tanto es múltiplo de 4 y no podrá ser 222 que no es múltiplo de 4.

16. (B) Como 365 = 7 x 52 + 1, los años no bisiestos tienen 52 semanas y un día y los bisiestos 52 semanas y 2 días. Los años no bisiestos la festividad de San Isidro avanzará un día de la semana y los bisiestos avanzará 2 días. Son bisiestos los años, 2004, 2008, 2012, etc., por lo tanto:

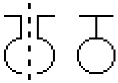
2003	jueves
2004	sábado
2005	domingo
2006	lunes
2007	martes
2008	jueves

El año buscado es el 2008.

VII Concurso de Primavera de Resolución de Problemas   Soluciones 2ª Fase

17. (B) En el mapa 1 cm representa 400.000 cm = 4.000 m = 4 km reales, luego 5 cm representan 5 x 4 = 20 km.

18. (C) La figura que corresponde a la cifra "cinco" evidentemente es la C, como puede observarse al juntar el 5 con su imagen especular por el lado izquierdo.



19. (D) El trozo que corresponde a la respuesta D, no está en la figura dada.

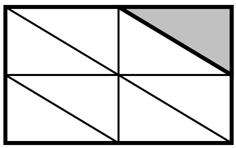
20. (D) Beatriz y Carlos nacieron en Marzo (en el mismo mes)
Antonio y Carlos cumplen años el día 20 (en el mismo día)
El 17 de Mayo no nacieron ni Beatriz ni Carlos ni Antonio, luego nació Darío.

21. (E) Emilio tarda 22 minutos. Fátima tardará 22 – 12 = 10 minutos, luego sale de casa a las 9 h 15 min.

22. (D) Desde el 1879564 hasta el 1879599 siempre se repite alguna de las cifras 5, 6, 7, 8 ó 9. Por lo tanto el primer número que no tiene cifras repetidas es el 1879602. Restando ambos números se obtiene 1879602 – 1879564 = 38.

23. (C) Los ángulos distintos son: 10º, 20º, 30º, 20º + 30º = 50º, 10º + 20º + 30º = 60º. En total se pueden ver 5 ángulos agudos distintos.

24. (E) Aunque no se sabe la medida de los lados del triángulo, puede determinarse su área teniendo en cuenta la partición de la figura, en la que se observa que el triángulo es la octava parte del rectángulo.



25. (E) Carolina tiene un pájaro y como a Alba y a Benito no les gustan los gatos, uno de ellos tendrá un perro y el otro un pez. Como Benito tiene un animal con pelo, tendrá un perro y por lo tanto Alba tendrá un pez. Se concluye que la única frase falsa es la E "Diana tiene un perro".

VII CONCURSO DE PRIMAVERA NIVEL II (1º-2º ESO). 2ª FASE. DÍA 5-04-03.

1. **(B)** 70 x 50 x 30 =105000 cm^3 =105 dm^3 = 105 l.

2. **(B)** 200 x 0,55 = 110 € ; 110 – 100 = 10 €.

3. **(B)** Se lavan o van al dentista = 20 +18 – 9 = 29 estudiantes. Hay 1 que no hace ninguna de las dos cosas.

4. **(B)** 00:00; 01:10; 02:20, ... , 05:50; (6 capicúas empezando por 0)
10:01; 11:11; 12:21; ..... , 15:51; (6 capicúas empezando por 1)
20:02; 21:12; 22:22; 23:32; (4 capicúas empezando por 2).

5. **(B)** Una vez decidido el número de monedas de dos euros y el de un euro a emplear, el número de monedas de 0,50 es obligado. Bastará pues contar las formas de pagar con monedas de 2 y un euro una cantidad menor o igual que 10 €

2 €	5	4	3	2	1	0
1 €	0	0, 1 o 2	0,1,2,3, o 4	0,1,2, ..., o 6	0,1,2, ..., o 8	0,1,2, ..., o 10

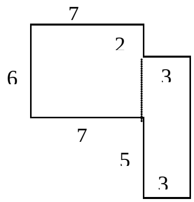
Es decir de 1 + 3 + 5 + 7 + 9 +11 =36 formas.

6. **(C)** Tantos como múltiplos de 3 hay entre 2 y 14, es decir cuatro.

7. **(C)** El ángulo mide en grados: $\frac{360}{7} = 51 + \frac{3}{7}$.

8. **(D)** 312 € son los $\frac{3}{4}$ de su paga anual, luego 104 es $\frac{1}{4}$, y por tanto su paga anual es de 416 €. Dividiendo entre 52 obtenemos su paga semanal: 8 €.

9. Trazando una línea auxiliar vemos que la figura se compone de dos rectángulos de lados 6 y 7, y 3 y 6-2+5, luego su área es 6x7 +3x9 =69 m^2.

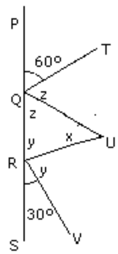


10. (A)

$$\frac{S}{N} = \frac{3}{1} \; ; \quad \frac{M}{N} = \frac{7,5}{1} \; ; \quad \frac{M}{N} : \frac{S}{N} = \frac{7,5}{3} = 2,5 = \frac{M}{S}.$$

11. (D) $\frac{5}{2} = 2,5$. Primero buscamos que las fracciones estén entre 2 y 3. Tanteando los denominadores 7, 8 y 9 la respuesta es 8.

12. (B) Poniendo nombres a los ángulos creados por las bisectrices tenemos:



2y+30º = 180º $\Rightarrow$ y = 75º
2z +60º = 180º $\Rightarrow$ z = 60º
x + y + z = 180º $\Rightarrow$ x = 45º.

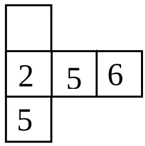
13. (B) Por construcción el nuevo número tiene dos cifras más que el primero y además al restarle éste sigue teniendo dos cifras más. Así si ha aumentado en 14789 nuestro número de partida era de tres cifras abc. Basta plantear la suma: para hallar que c = 2, b = 3, a =5.

$$\begin{array}{r} 1\,4\,7\,8\,9 \\ +\quad a\,b\,c \\ \hline 1\,a\,b\,c\,1 \end{array}$$

14. (A) Como en el problema anterior es preferible ver la operación como una suma. Así es más fácil deducir que: c = 5; e = 7; b = 3; d = 5; a = 8.

$$\begin{array}{r} 2\,8\,4\,9\,9 \\ +\;5\,d\,8\,e\,6 \\ \hline a\,4\,b\,7\,c \end{array}$$

15. (D) Las únicas potencias de 5 de tres cifras son 125 y 625. En ambas la cifra central es un 2. Potencias de 2 de tres cifras que empiecen por 2 sólo hay una: 256.



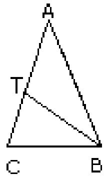
16. (E) El 120% de lo que medía Sara es 156 cm. Luego lo que medía es $\frac{156 \cdot 100}{120} = 130$ cm . Ana ha crecido la mitad de Sara, es decir un 10%, luego su estatura actual es 130 + 13 = 143 cm.

17. (E) Entre dos números distintos siempre hay infinitos números. Por ejemplo entre $\frac{5}{3}$ y $2\boldsymbol{\pi}$ están: 2; 2,1; 2,11; 2,111; ....

18. (C) $ab = 10\,a + b$. Si ab es divisible por b, entonces lo es también $ab - b = 10\,a$.

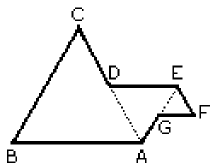
Si a =1, b tiene que ser divisor de 10. Puede ser 1, 2 ó 5.
Si a =2, b tiene que ser divisor de 20. Puede ser 1, 2, 4 ó 5
Si a =3, b tiene que ser divisor de 30. Puede ser 1, 2, 3, 5 ó 6
Si a = 4, b tiene que ser divisor de 40. Puede ser 1, 2, 4, 5 ó 8.

19. (C) Si A =36º, B + C =180º - 36º = 144º , pero como son iguales, B = 72º. <TBA es la mitad de B, 36º, y así <ATB = 180º - 36º -36º =108º, luego <CTB que es su suplementario mide 72º. El triángulo CTB es semejante al ABC.



20. (D) Por la forma en que se suman enteros (y de ahí también en la multiplicación) empezando por la derecha, las terminaciones de estas operaciones sólo dependen de las terminaciones de los operandos. Así $19^{99} + 99^{99}$ acaba en lo mismo que, $9^{99} + 9^{99}$ pero las potencias de 9 sólo acaban en 1 o en 9, dependiendo de la paridad del exponente. Así la terminación de la operación es la de 9 +9, por tanto 8.

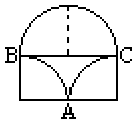
21. (C) Los triángulos de la figura tienen lados respectivos: 4, 2 y 1 cm. El perímetro pedido tiene dos lado de cada triángulo salvo del pequeño, que tiene tres. Así el perímetro es 2x4 + 2x2 + 3x1 = 15 cm .



VII Concurso de Primavera de Resolución de Problemas Soluciones 2ª Fase

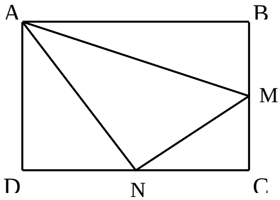
22. (C) El jardín tiene dimensiones a y b. Por un lado 25a =1000, es decir a = 40 m. Por otro lado , $10\cdot(2a+2b)=1000$, es decir $(2a+2b)=100$, y $a + b$ = 50, luego b = 10 m y el área es 400m^2**.**

23. (C) El trazado de líneas auxiliares nos muestra como la figura puede ser troceada en tres piezas que reorganizadas completan un rectángulo de lados 5 y 10 cm, luego su área es 50 cm^2**.**



24. (B) Pongamos letras M y N a los puntos medios.
El triángulo ADN es la cuarta parte del rectángulo.
El triángulo AMB es también la cuarta parte.
El triángulo MCN es la octava parte.

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$, y por tanto el triángulo AMN es $\frac{3}{8}$ del rectángulo, es decir su área es: $\frac{3}{8}\cdot 72 = 27\text{ cm}^2$.



25. (D) Para que el producto de los números sea múltiplo de 5, uno de ellos debe ser múltiplo de 5. De los 36 casos posibles (hay que tener en cuenta el orden para que sean equiprobables) once son favorables: 6 casos en que en el primer dado sale un 5, más seis casos en que en el segundo dado sale un 5, menos el caso 5-5 que lo hemos contado dos veces.

VII CONCURSO DE PRIMAVERA NIVEL III (3º-4º de ESO). 2ª FASE. 5-04-03.

1. (E) Basta con aprovechar adecuadamente las propiedades de las operaciones con potencias: $\dfrac{2^{2001}\times 3^{2003}}{6^{2002}}=\dfrac{2^{2001}\times 3^{2001}\times 3^{2}}{2^{2002}\times 3^{2002}}=\dfrac{3^{2}}{2\times 3}=\dfrac{3}{2}$.

2. (A) Una forma de resolver este problema consiste en ir haciendo todas las operaciones necesarias con cuidado de no equivocarse: sumar los nueve números y dividir dicha suma entre nueve.

Veamos cómo podemos realizar esa suma de los nueve números:

9+99+999+...+999.999.999 = (10-1) + (100-1) + (1.000-1) + (1.000.000.000-1) =

= (10 + 100 + 1.000 +...+ 1.000.000.000) – (1+1+1+...+1) = 1.111.111.110 – 9 =

= 1.111.111.101. Si la dividimos entre 9 obtenemos la media:

M = 1.111.111.101 : 9 = 123.456.789, es decir, la cifra que no está en M es 0.

También se podía hacer la media así:

$$\frac{9+99+999+...+999.999.999}{9}=1+11+111+...+111.111.111=123.456.789.$$

3. (E) El área pedida, A, es el área del círculo exterior (cuyo diámetro es 10, y por tanto, su radio es 5) menos las áreas de los dos círculos interiores.

$A=\pi\cdot 5^{2}-\pi\cdot 3^{2}-\pi\cdot 2^{2}=(25-9-4)\pi=12\pi$.

4. (B) Observamos que $n^{2}-3n+2=(n-2)\cdot(n-1)$, es decir, es el producto de dos números consecutivos y por tanto, dicho producto será siempre par. Y el único par que es primo es el 2. Así que la expresión sólo será un número primo cuando sea igual a 2: $n^{2}-3n+2=(n-2)\cdot(n-1)=2\Rightarrow n=3$, que es el único entero positivo que hace prima la expresión.

5. (E) Realizando la suma, tenemos:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{n}=\frac{21n+14n+6n+42}{42n}=\frac{41n+42}{42n}$ y para que esta expresión sea un número entero N, *n* debe cumplir que:

$$\frac{41n+42}{42n}=N \Rightarrow 41n+42=42Nn \Rightarrow 42=n(42N-41) \Rightarrow n=\frac{42}{42N-41}$$

y observamos que para $N=1 \rightarrow n=42$ y que para $N>1 \rightarrow n$ no es un número entero. Así pues *n* debe ser 42 y la afirmación falsa es $n>84$.

6. (E) Tanto julio como agosto tienen 31 días (recuerda el método de los nudillos). Para que julio tenga 5 lunes debe suceder que sea lunes el 1, el 2 o el 3 de julio. Hagamos una tabla para el mes de julio y otra para agosto con todos los casos favorables:

Julio				**Agosto**		
1	**2**	**3**		**1**	**2**	**3**
L	M	X		J	V	S
D	L	M		X	J	V
S	D	L		M	X	J
29	**30**	**31**		**29**	**30**	**31**
L	M	X		J	V	S
D	L	M		X	J	V
S	D	L		M	X	J

Es decir, sólo podrían aparecer 5 veces en agosto los M, X, J, V y S. Por tanto la respuesta es que el Domingo es seguro que no se repetirá 5 veces en el mes de agosto.

7. (B) Al ordenarlas alfabéticamente vemos que con la A empiezan 24 $(120:5=24)$ palabras, con la D otras 24, con la E, 24 y con la I, 24, es decir, ya llevamos 96 palabras. Y empezando con la N tenemos NADEI (lugar 97) y la siguiente alfabéticamente ya es NADIE, que ocupa el lugar 98.

8. (C) Este problema se puede atacar comprobando las cinco posibles soluciones, sustituyendo *a* y *b* por sus valores y resolviendo la ecuación correspondiente. Otra forma sería utilizando la fórmula $x^2 - Sx + P = 0$, donde S representa a la suma de las soluciones y P al producto de las soluciones. En nuestro caso (las soluciones son $x_1 = a,\ x_2 = b$) tendríamos: $x^2 + ax + b = 0$ y por tanto $S = -a = a + b$ y $P = b = a \cdot b$, es decir, *a* y *b* tienen que satisfacer:

$\left.\begin{array}{l} a = -(a+b) \\ b = a \cdot b \end{array}\right\}$ y el único par que las satisface es $a = 1$, $b = -2$.

9. (B) Si los tres números consecutivos son, $x - 1$, x, $x + 1$, entonces el enunciado se traduce en esta ecuación: $(x-1)\cdot x \cdot (x+1) = 8 \cdot (x - 1 + x + x + 1)$ y al operar obtenemos: $x^3 - x = 24x$ y dividiendo los dos miembros por *x* (obsérvese que $x \neq 0$ porque si *x* fuese nulo, los números serían –1,0,1 que no cumplen lo pedido) tenemos que $x^2 - 1 = 24$ con dos posibles soluciones $x = +5$ y $x = -5$. En el primer caso hablaríamos de 4, 5, 6, y en el segundo de -6, -5, -4 que elevados al cuadrado y sumados dan el mismo resultado: $4^2 + 5^2 + 6^2 = (-6)^2 + (-5)^2 + (-4)^2 = 77$.

10.(E) Desarrollemos la ecuación para resolverla:

$$\frac{x-1}{x-2} = \frac{x-k}{x-6} \Rightarrow (x-1)(x-6) = (x-2)(x-k) \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = x^2 - kx - 2x + 2k$$

y agrupando las *x* obtenemos que:

$6-2k=5x-kx \Rightarrow 6-2k=x(5-k) \Rightarrow \frac{6-2k}{5-k}=x$ que no tendrá solución cuando el denominador sea cero, es decir, cuando $k = 5$.

11.(D) Es bastante similar al problema anterior. Se trata de resolver una ecuación cuya incógnita es la *y*:

$8xy-12y+2x-3=0 \Rightarrow y(8x-12)=3-2x$ y para que esta igualdad sea siempre cierta sin depender del valor de la *y*, entonces, ambos miembros deben ser cero:

$$\left.\begin{array}{l} 8x-12=0 \Rightarrow x=\frac{12}{8}=\frac{3}{2} \\ 3-2x=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \end{array}\right\}$$ o sea, la solución es $x=\frac{3}{2}$.

12.(B) Vamos a intentar arreglar el número que nos dan ayudándonos de las propiedades de las potencias:

$25^{64}\times 64^{25}=(5^2)^{64}\times(2^6)^{25}=5^{128}\times 2^{150}=(5^{64}\times 2^{75})^2$. Por tanto el número N del que tenemos que hallar la suma de sus cifras es:

$N=5^{64}\times 2^{75}=5^{64}\times 2^{64}\times 2^{11}=(5\times 2)^{64}\times 2^{11}=10^{64}\times 2048$ y es claro que la suma de las cifras de este número es 2 + 4 + 8 = 14.

13.(E) Para que al sumar dos primos obtengamos otro primo es imposible que los dos primos sean impares ya que *impar + impar = par*. Así pues, uno de los primos debe ser 2, y debe serlo el más pequeño: B. Tenemos la siguiente situación:

A – B = A - 2	A - 1	A	A + 1	A + B = A + 2
primo (impar)	par	primo (impar)	par	primo (impar)

De esos tres impares que aparecen, a la fuerza, uno de ellos tiene ser múltiplo de 3. Y sólo hay un primo que es múltiplo de 3: el propio 3. Y debe ser

$A-B=3 \rightarrow A-2=3 \rightarrow A=5$. Y ya hemos terminado:

$A=5,\ B=2 \rightarrow A-B=3,\ A+B=7$, todos ellos primos y su suma vale:

2 + 3 + 5 + 7 = 17 que a su vez sigue siendo primo, que es la respuesta correcta.

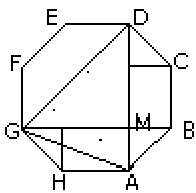
14.(C) Como $n > 0$ y el cociente también debe ser positivo, entonces, el denominador también debe ser positivo: $20 - n > 0 \Rightarrow n < 20$. Y por otra parte, para que el cociente $\frac{n}{20-n}$ sea un número entero, el numerador debe ser mayor o igual que el denominador: $n \geq 20 - n \Rightarrow 2n \geq 20 \Rightarrow n \geq 10$. Y juntando estas dos condiciones tenemos que $10 \leq n < 20$, es decir, n puede valer 10, 11, 12, ..., 19 ó 20. Podemos ir probando estos once valores y observar en cuáles de ellos se cumple que $\frac{n}{20-n}$ es un cuadrado. Si lo hacemos, encontraremos tres valores:

$$n = 10 \Rightarrow \frac{n}{20-n} = \frac{10}{20-10} = \frac{10}{10} = 1 = 1^2$$

$$n = 16 \Rightarrow \frac{n}{20-n} = \frac{16}{20-16} = \frac{16}{4} = 4 = 2^2$$

$$n = 18 \Rightarrow \frac{n}{20-n} = \frac{18}{20-18} = \frac{18}{2} = 9 = 3^2.$$

15.(C) Como en otros tantos problemas de geometría, basta con trazar algunos segmentos auxiliares.



Calculemos la base AD y la altura GM del triángulo ADG. Primero hay que hallar cuánto mide AM. En el triángulo isósceles rectángulo AMB, la hipotenusa vale 2, y entonces: $2AM^2 = 4 \Rightarrow AM = \sqrt{2}$. De esta manera, la base mide $AD = 2 + 2\sqrt{2}$ y la altura $GM = 2 + \sqrt{2}$. Y el área del triángulo ADG será: $\frac{(2+2\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{2} = \frac{8+6\sqrt{2}}{2} = 4 + 3\sqrt{2}$ cm^2.

16.(C) Hay que recordar las dos fórmulas más importantes de las progresiones aritméticas:

La suma: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ y el término n-ésimo: $a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$ siendo d la diferencia de la progresión, que, por cierto, es lo que tenemos que calcular en este problema.

Sabiendo que la suma de los 100 primeros términos es 100 podemos razonar que:

$$S_{100} = \frac{a_1 + a_{100}}{2} \cdot 100 = 100 \Rightarrow a_1 + a_1 + d \cdot (100-1) = 2 \Rightarrow 2a_1 + 99d = 2$$

Y de forma similar, sabiendo que los 200 primeros términos suman 300, (100+200)

$$S_{200} = \frac{a_1 + a_{200}}{2} \cdot 200 = 300 \Rightarrow a_1 + a_1 + d \cdot (200-1) = 3 \Rightarrow 2a_1 + 199d = 3$$

Y ya tenemos el sistema que nos permitirá calcular *d*:

$\left.\begin{array}{l} 2a_1 + 99d = 2 \\ 2a_1 + 199d = 3 \end{array}\right\}$ y si restamos la segunda ecuación menos la primera, vemos que:

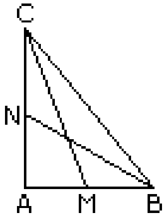
$100d = 1 \Rightarrow d = 0{,}01 \cdot$

17.(B) Sabiendo que $tiempo = \frac{espacio}{velocidad}$ vamos a resolver el problema.

Si llamamos *x* al tamaño del jardín de B, entonces, 2*x* será el de A y $\frac{2x}{3}$ el de C.

Si llamamos *y* a la velocidad que lleva B, entonces, $\frac{y}{2}$ es la velocidad de C y $\frac{3y}{2}$ la de A. Por tanto, A tardará $\frac{2x}{\frac{3y}{2}} = \frac{4x}{3y} = \frac{4}{3} \cdot \frac{x}{y}$, B tardará $\frac{x}{y}$ y C tardará $\frac{\frac{2x}{3}}{\frac{y}{2}} = \frac{4x}{3y} = \frac{4}{3} \cdot \frac{x}{y}$, es decir, Benito es el que menos tiempo emplea en cortar la hierba de su jardín.

18.(B) Evidentemente, emplearemos el teorema de Pitágoras ya que trabajamos con triángulos rectángulos. Primero calcularemos los dos catetos y luego la hipotenusa que nos piden. Llamaremos b = AC y c = AB:



Según Pitágoras, en el triángulo BAN se cumple que

$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2 = 19^2$, y en el triángulo CAM se cumple que

$b^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = 22^2$. Arreglando un poco estas dos ecuaciones,

formamos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{matrix} b^2 + 4c^2 = 1444 \\ 4b^2 + c^2 = 1936 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{1^a \cdot 4} \left.\begin{matrix} 4b^2 + 16c^2 = 5776 \\ 4b^2 + c^2 = 1936 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{1^a - 2^a} 15c^2 = 3840 \Rightarrow c = \sqrt{256}$$

que al sustituirlo en la 1ª ecuación nos da $b = \sqrt{420}$.

Y ya podemos calcular la hipotenusa BC del triángulo grande ABC:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = c^2 + b^2 = 256 + 420 = 676 \Rightarrow BC = \sqrt{676} = 26.$

19.(A) Si llamamos x al número que pensó Sara, entonces Sara hizo $\frac{x-9}{3} = 43$ lo que nos asegura que x = 138. Y Sara debió hacer $\frac{x-3}{9}$, es decir $\frac{138-3}{9} = \frac{135}{9} = 15.$

20.(B) Sea r_1 el radio de la circunferencia C_1, y r_2 el radio de la circunferencia C_2. Un arco de 45º en C_1 tiene una longitud de $\frac{45º \cdot 2\pi \cdot r_1}{360º}$, y un arco de 30º en C_2 tiene una longitud de $\frac{30º \cdot 2\pi \cdot r_2}{360º}$. Y como ambos arcos son de la misma longitud:

$$\frac{45º \cdot 2\pi \cdot r_1}{360º} = \frac{30º \cdot 2\pi \cdot r_2}{360º} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}\ .$$

VII Concurso de Primavera de Resolución de Problemas Soluciones 2ª Fase

21.(B) Para hallar la media debemos calcular la suma A + B + C. Si sumamos miembro a miembro las dos igualdades (1.001C – 2.002A = 4.004) y (1.001B + 3.003A = 5.005) observamos que: 1.001C – 2.002A + 1.001B + 3.003A = 4.004 + 5.005 que al operar se transforma en: 1.001A + 1.001B + 1.001C = 9.009 y al dividir toda la igualdad entre 1.001 queda así: A + B + C = 9 y por tanto la media de esos números será $\frac{A+B+C}{3} = \frac{9}{3} = 3$.

22.(A) La ecuación se reduce si sacamos el factor común (2x + 3). Veamos:

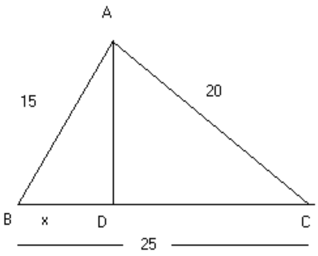
$$(2x+3)(x-4)+(2x+3)(x-6)=0 \Rightarrow (2x+3)(x-4+x-6)=0 \Rightarrow$$

$$(2x+3)(2x-10)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x+3=0 \Rightarrow x_1 = \frac{-3}{2} \\ 2x-10=0 \Rightarrow x_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-3}{2}+5=\frac{7}{2}$$

Otra forma sería operando en la ecuación y se obtiene $4x^2 - 14x - 30 = 0$.

Como la suma de las soluciones de la ecuación de segundo grado es $S = \frac{-b}{a}$ resulta que $x_1 + x_2 = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$.

23.(B) Dicho triángulo es rectángulo (sus lados son de longitud triple que el clásico 3,4,5) ya que $15^2 + 20^2 = 25^2$, con su hipotenusa de 25 cm y los catetos de 15 cm y 20 cm. Nos piden hallar la altura más pequeña, es decir la altura sobre la hipotenusa. Llamamos x = BD: Por el Teorema del Cateto tenemos que: $15^2 = x \cdot 25 \Rightarrow x = 9$ cm y ahora, en el triángulo rectángulo ADB calculamos el cateto $AD = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{144} = 12$ cm.



24.(B) Llamemos a y b a las soluciones de nuestra ecuación $x^2 - 63x + k = 0$.

Valiéndonos de la fórmula $x^2 - Sx + P = 0$, donde S representa a la suma de las soluciones y P al producto de las soluciones, vemos que $a + b = 63$ y que $a \cdot b = k$. Ahora hay que buscar dos números primos (a y b) que sumen 63. Y sólo hay dos casos ($a = 2$, $b = 61$ y $a = 61$, $b = 2$) porque cualquier otra pareja de números primos estaría formada por dos números impares que al sumarlos siempre dará un número par. Así pues k sólo puede tener un valor: $2 \cdot 61 = 61 \cdot 2 = 122$.

25.(A) Las posibilidades de elección de parejas de Pedro son 10:

(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(2,3);(2,4);(2,5);(3,4);(3,5);(4,5)

y por tanto cada una de ellas tiene probabilidad $\frac{1}{10}$ de ocurrir. Y ahora hay que estudiar una por una para encontrar en qué casos el número de Quino es mayor que la suma de Pedro. Para la primera pareja de Pedro, (1,2), que suma 3, hay 7 casos favorables de 10 para Quino: 4,5,6,7,8,9 y 10. Para la segunda pareja, que suma 4, habría 6 casos favorables, y así, estudiando todos los casos favorables, vemos que la probabilidad pedida es: $\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{7}{10}+\frac{6}{10}+\frac{5}{10}+\frac{4}{10}+\frac{5}{10}+\frac{4}{10}+\frac{3}{10}+\frac{3}{10}+\frac{2}{10}+\frac{1}{10}\right)$

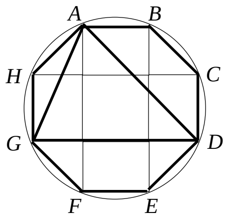
lo que supone un total de $\frac{1}{10}\cdot\frac{40}{10}=\frac{2}{5}$.

VII CONCURSO DE PRIMAVERA NIVEL IV (1ºy 2º Bach.) 2ª FASE. 5-04-03.

1. (B) Estudiemos cuántas palabras estarán alfabéticamente delante de NADIE: Todas aquellas que empiecen por A, D, E ó I que suponen un total de $4 \cdot 24 = 96$ estarán delante. También lo estarán algunas que empiecen por N. ¿Cuáles? Solamente la palabra N A D E I. Así pues, habrá 97 palabras delante de NADIE por lo que ella ocupará el lugar nº 98 y la respuesta será B.

2. (C) El número entero positivo n debe ser menor que 20, pues en caso contrario $\frac{n}{20-n}$ sería negativo y no podría ser un cuadrado. Como, por otra parte, $20 - n \geq 1$, se deduce que $\frac{n}{20-n} < 20$ con lo que bastará observar los cuadrados perfectos menores que 20 y ver a cuáles de ellos le corresponde un valor entero para n.
En principio, pues, $\frac{n}{20-n}$ podría ser 1, 4, 9 ó 16.
Si $\frac{n}{20-n}=1 \Rightarrow n=10$. Para $\frac{n}{20-n}=4 \Rightarrow n=16$. En $\frac{n}{20-n}=9 \Rightarrow n=18$ y con $\frac{n}{20-n}=16$, resulta que $n = 320 - 16n$, con lo que n no sería entero, Así pues, n sólo puede formar los valores 10, 16 y 18, es decir, tres, por lo que la respuesta es C.

3. (C) Como cada ángulo del octógono regular es de 135º (¡compruébalo!), en la figura se observa que el octógono se puede descomponer en un cuadrado central de lado 2, cuatro triángulos rectángulos isósceles de hipotenusa 2 y catetos, por tanto, $\sqrt{2}$ y cuatro rectángulos de lados 2 y $\sqrt{2}$. Así pues, el triángulo ADG tiene por base $GD = 2\sqrt{2} + 2$ y altura $AH = \sqrt{2} + 2$ por lo que su área será $\frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}+2\right)\left(\sqrt{2}+2\right) = 4 + 3\sqrt{2}$ y la respuesta es C.



4. (A) Pedro puede elegir 7 sumas diferentes (de 3 a 9) aunque las sumas 5, 6 y 7 las puede elegir de dos maneras diferentes cada una. Escribiendo, pues las diez sumas posibles de Pedro como 3, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 9, tenemos inmediatamente calculada la probabilidad de cada una de ellas, es decir:

p (suma 3) = p (suma 4) = p (suma 8) = p (suma 9) = $\frac{1}{10}$ mientras que p (suma 5) = p (suma 6) = p (suma 7) = $\frac{2}{10}$.

Guillermo gana a Pedro en los siguientes casos:

Pedro: *K* donde *K* puede ser 3, 4, 5, 6, 7, 8 ó 9,

Guillermo: Mayor que *K*

es decir la probabilidad de que Guillermo gane a Pedro será:

$$P = \frac{1}{10}\cdot\frac{7}{10}+\frac{1}{10}\cdot\frac{6}{10}+\frac{2}{10}\cdot\frac{5}{10}+\frac{2}{10}\cdot\frac{4}{10}+\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{10}+\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{10}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$$

y la respuesta será A.

5. (B) Naturalmente carece de sentido intentar hallar previamente x, y y z resolviendo el sistema dado. Por la simetría que se observa, un posible enfoque podría ser multiplicar estas igualdades, lo que nos llevaría a:

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{z}\right)\left(z+\frac{1}{x}\right)=\frac{28}{3}$$ que nos conduce a

$$xyz + y + x + \frac{1}{z} + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xyz} = \frac{28}{3}$$

Como los sumandos centrales (exceptuando los dos extremos) son precisamente la suma de los términos de la izquierda en las ecuaciones dadas, su valor será:

$4+1+\frac{7}{3}=\frac{22}{3}$, por lo que $xyz+\frac{1}{xyz}=\frac{28}{3}-\frac{22}{3}=2$ de donde $xyz = 1$ y la respuesta es B.

6. (D) Llamemos x a OC, así $CA = 1 - x$ y al ser BC bisectriz de B, sabemos que $\frac{OB}{OC}=\frac{AB}{CA}$, es decir: $\frac{OB}{x}=\frac{AB}{1-x}$. Como $AB = \operatorname{tg}\theta$ y $\operatorname{sen}\theta = \frac{AB}{OB}$, sigue que $OB = \sec\theta$, de donde $\frac{\sec\theta}{x}=\frac{\operatorname{tg}\theta}{1-x}$ lo que, multiplicando en ambos términos por $\cos\theta$, nos lleva a $\frac{1}{x}=\frac{\operatorname{sen}\theta}{1-x}$, es decir, $1 - x = x\operatorname{sen}\theta \Rightarrow x = \frac{1}{1+\operatorname{sen}\theta}$ y la respuesta es D.

7. (C) Llamando C y L a las cantidades de café y leche que consumieron entre todos y n al número de miembros de la familia, podemos escribir que:

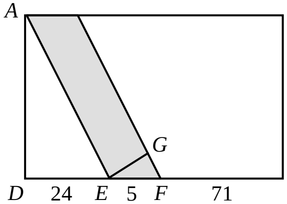
$n\left(\frac{C}{6}+\frac{L}{4}\right)=C+L$ ya que nos dicen que todos tomaron igual cantidad de líquido.
Así pues $n\,(2C+3L) = 12C + 12L$.
n debe ser mayor que 4 pues $4\,(2C + 3L) = 8C + 12L < 12C + 12L$
n debe ser menor que 6 pues $6\,(2C + 3L) = 12C + 18L > 12C + 12L$.
Así pues, $n = 5$ y la respuesta es C.

8. (A) Llamando x al factor que David escribió correctamente, tenemos que: 54
$x - 198 = 45x$, por lo que $x = 22$ y el resultado correcto sería $45 \cdot 22 = 990$ con lo que la respuesta es A.

9. (B) $\sqrt{2}\sqrt{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{8}}=\sqrt{2}\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2^2}\sqrt[4]{2^3}=\sqrt[4]{2^5}=2\sqrt[4]{2}$ siendo B la respuesta.

10. (E) Llamando x al número de chicos inmigrantes, el número de chicas inmigrantes será $x + 6$. Al elegir dos estudiantes estamos en las condiciones del problema si el primero es chico inmigrante y el segundo chica inmigrante o si el primero es chica inmigrante y el segundo chico inmigrante. Así pues $\frac{x}{25}\cdot\frac{x+6}{24}+\frac{x+6}{25}\frac{x}{24}=\frac{4}{75}$,
de donde $x\,(x + 6) = 16$ y $x = 2$ con lo que el número de inmigrantes en esa clase será $2 + (2 + 6) = 10$ y la respuesta es E.

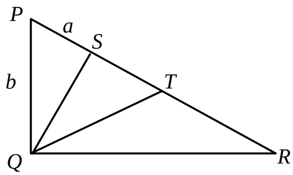
11. (E) El coche comienza el adelantamiento cuando su parte delantera está a la misma altura que la parte trasera del camión y lo termina cuando su parte trasera está a la misma altura que la parte delantera del camión, es decir que el espacio en el que está adelantando es de $17 + 3 = 20$ m.
Como en cada hora hace $110 - 100 = 10$ km más que el camión, en cada segundo hará $\frac{10000}{3600}$ metros más que el camión por lo que para hacer 20 metros, tardará
$20 : \frac{10000}{3600} = 7{,}2$ segundos y la respuesta será E.



12. (C) Lo que nos piden es hallar el área del paralelogramo rayado. De él conocemos su altura, 4 m, pero desconocemos la base AE. Ahora bien, los triángulos $\overset{\Delta}{ADE}$ y $\overset{\Delta}{EFG}$ son semejantes (¿por qué?), por lo que, al ser $GF = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$,

podemos escribir $\frac{AE}{5} = \frac{24}{3}$, con lo que $AE = 40$ m. Así pues el área pedida será $40 \cdot 4 = 160$ m^2, la respuesta será C y el dato de 71 m es innecesario..

13. (A) Llamando a a PS, b a PQ y aplicando el teorema del coseno a los triángulos $\overset{\Delta}{PQS}$ y $\overset{\Delta}{PQT}$, como cos $P = \frac{b}{3a}$, podemos escribir:



$$QS^2 = a^2 + b^2 - 2ab\frac{b}{3a} \quad .$$

$$QT^2 = 4a^2 + b^2 - 4ab\frac{b}{3a}$$

Así pues, $QS^2 + QT^2 = 5a^2$ y como $PR^2 = (3a)^2 = 9a^2$, se sigue que si $QS^2 + QT^2 = kPR^2$ es porque $k = \frac{5}{9}$ y la respuesta es A.

14. (D) Es cómodo trabajar de entrada en forma binómica pues $(1 + i)^2 = 2i$, por lo que $(1 + i)^3 = -2 + 2i$, $(1 + i)^4 = 4i^2 = -4$ y $(1 + i)^5 = -4 - 4i$.
Así pues, la suma del enunciado será $1 + (1 + i) + 2i + (-2 + 2i) - 4 - 4 - 4i = -8 + i$ y la parte real de este número complejo es -8, siendo la respuesta D.

15. (D) Al observar los signos podemos poner que la expresión que nos dan es: $\log \frac{10!\,8!\,6!\,4!\,2!}{9!\,7!\,5!\,3!}$, es decir, $\log(10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2)$ resultado que parece no encontrarse entre las respuestas. Ahora bien, $\log(10\cdot8\cdot6\cdot4\cdot2) = \log[(2\cdot5)\cdot(2\cdot4)\cdot(2\cdot3)\cdot(2\cdot2)\cdot2] = \log(2^5\cdot5!) = \log(2^5) + \log(5!) = 5\log2 + \log(5!)$ y la respuesta es D.

16. (B) Las soluciones (x, y) de ese sistema deben verificar la ecuación obtenida restando ambas ecuaciones, es decir, la ecuación:
$y - x = x^2 - y^2 - 5(x - y) \Rightarrow x^2 - y^2 - 5(x - y) + x - y = 0$, lo que es lo mismo,
$(x + y)(x - y) - 5(x - y) + x - y = 0 \Rightarrow (x - y)(x + y - 5 + 1) = (x - y)(x + y - 4) = 0$
con lo que $x + y = 4$ y la respuesta es B.

17. (A) Como al pasar un año, el 25 de Julio se desplaza un día a la semana si el año siguiente no es bisiesto y dos días sí lo es, el caso más favorable para que dos años Santos Compostelanos estén lo más próximo posible es que si este año, N, ha sido Año Santo, el próximo $N + 1$ sea bisiesto, con lo que el 25 de Julio caerá así:
$N \to$ Domingo; $N + 1 \to$ Martes; $N + 2 \to$ Miércoles; $N + 3 \to$ Jueves;

$N + 4 \to$ Viernes; $N + 5 \to$ Domingo, pues si $N + 1$ es bisiesto, $N + 5$ también y habrán pasado 5 años y la respuesta será A.

18. (D) Es resto de la división pedida será un polinomio constante o de grado 1, es decir, un polinomio de la forma $R(x) = ax + b$.
Así pues, $P(x) = (x^2 - 1)Q(x) + (ax + b)$, por lo que $P(1) = a + b$ y $P(-1) = -a + b$.
Pero los números $P(1)$ y $P(-1)$ los conozco pues son los restos de la división de $P(x)$ entre $(x - 1)$ y $(x + 1)$ respectivamente, o sea, 2 y 4 con lo que $a + b = 2$, $-a + b = 4$ que me lleva a $b = 3$, $a = -1$ siendo, pues, el resto pedido el polinomio $R(x) = -x + 3$ y la respuesta es D.

19. (B) De $2003 + x = y^2$, $2003 + y = x^2$, obtenemos, restando, $x - y = y^2 - x^2$, por lo que $x - y = (y - x)(y + x)$ y como x e y son diferentes, podemos eliminar el factor $x - y$ llegando a $x + y = -1$.
Sumando ahora las dos ecuaciones originales, tenemos que $4006 + (x + y) = x^2 + y^2$, es decir, $x^2 + y^2 = 4005$. Como, por otra parte, $(x + y)^2 = 1 = x^2 + y^2 + 2xy$, sigue que $1 = 4005 + 2xy$ por lo que $xy = -2002$ y la respuesta es B.

20. (A) Sabemos que $\alpha^4 + \alpha^2 = 1$ y nos piden el valor de $\alpha^6 + 2\alpha^4$.
$\alpha^6 + 2\alpha^4 = \alpha^2(\alpha^4 + 2\alpha^2) = \alpha^2(\alpha^4 + \alpha^2 + \alpha^2) = \alpha^2(1 + \alpha^2) = \alpha^2 + \alpha^4 = 1$ y la respuesta es A.

21. (C) La ecuación dada la podemos poner como: $\frac{2}{3}\log_4 x + 3\,[2\log_x 4 + 1] = 7$.

Si $\log_4 x = a$, entonces $4^a = x$, por lo que $4 = x^{\frac{1}{a}}$, o sea, $\log_x 4 = \frac{1}{a}$.

Así pues, podemos escribir $\frac{2}{3}a + 3\left[\frac{2}{a} + 1\right] = 7$, es decir: $\frac{2a}{3} + \frac{6}{a} = 4$

que nos lleva a $2a^2 + 18 = 12a$, $a^2 - 6a + 9 = 0$ con lo que $a = 3$ y $\log_4 x = 3$, de donde $x = 4^3 = 64$ y la respuesta es C.

22. (C) $\sqrt{101} - 10 = \frac{\left(\sqrt{101} - 10\right)\left(\sqrt{101} + 10\right)}{\sqrt{101} + 10} = \frac{1}{\sqrt{101} + 10}$ Por otra parte, podemos poner

$\frac{1}{\sqrt{121} + 10} < \frac{1}{\sqrt{101} + 10} < \frac{1}{\sqrt{100} + 10}$, es decir: $\frac{1}{21} < \sqrt{101} - 10 < \frac{1}{20}$.

Una vez vista esta acotación ya podemos descartar las respuestas $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{18}$ y $\frac{1}{24}$.

Parece tentador descartar también la respuesta $\frac{1}{22}$ pero, en principio, $\sqrt{101}-10$ podía estar lo suficientemente próximo a $\frac{1}{21}$ como para que estuviera más cerca de $\frac{1}{22}$ que de $\frac{1}{20}$. (Observa que $\frac{1}{21}$ está más cerca de $\frac{1}{22}$ que de $\frac{1}{20}$).

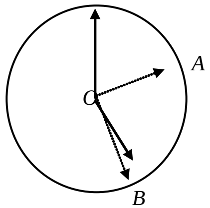
Así pues, veamos el punto medio del intervalo $\left(\frac{1}{22}, \frac{1}{20}\right)$ y analicemos la posición de $\sqrt{101}-10$ respecto de este punto.

Punto medio de $\left(\frac{1}{22}, \frac{1}{20}\right)$: $\frac{\frac{1}{22}+\frac{1}{20}}{2}=\frac{21}{440}$.

Veamos quién es mayor: $\sqrt{101}-10$ ó $\frac{21}{440}$, es decir $\sqrt{100+1}$ ó $10+\frac{21}{440}$, 0 sea, 101 ó 100 + $\frac{210}{220}+\left(\frac{21}{440}\right)^2$, es decir 1 ó $\frac{21}{22}+\left(\frac{21}{440}\right)^2$.

$\left(\frac{21}{440}\right)^2=\frac{441}{193600}$ y $\frac{21}{22}+\frac{441}{193600}<\frac{21}{22}+\frac{1}{22}=1$. Así pues $\sqrt{101}-10$ > $\frac{21}{440}$ por lo que $\sqrt{101}-10$ estará más cerca de $\frac{1}{20}$ que de $\frac{1}{22}$ y la respuesta es C.

23. (A) A las 5 de la mañana, las agujas del reloj forman un ángulo de 150º. Como la aguja de las horas recorre 30º en 60 minutos y la de los minutos 360º en ese tiempo, al cabo de *t* minutos recorrerán $\frac{t^{\circ}}{2}$ y 6*t*º respectivamente.

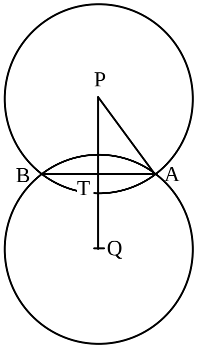


Nos piden calcular *t* para que el ángulo *AOB* sea de 90º. Así pues, $\frac{t}{2}$ + 150 – 6*t* = 90, que nos conduce a *t* = $\frac{120}{11}$ minutos, es decir, $\frac{2}{11}$ horas y la respuesta es B.

24. (C) Observamos por los signos que *n* es impar. Agrupando los *n* – 1 números anteriores por parejas (observa que *n* – 1 debe ser par), resultan $\frac{n-1}{2}$ parejas, cada una suma

-1, por lo que $-\dfrac{n-1}{2}+n=2003$, de donde $n = 4005$ y la suma de sus cifras será 9, con lo que la respuesta es C.

25. (D) Nos dice que $PQ = 6\sqrt{3}$, es decir, $PT = 3\sqrt{3}$ y como el radio PA es 6, en el triángulo PTA tenemos $\cos\hat{P}=\dfrac{PT}{PA}=\dfrac{3\sqrt{3}}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\hat{P}=30^{\text{o}}\Rightarrow B\hat{P}A=60^{\text{o}}$



y el triángulo $\overset{\Delta}{BPA}$ es equilátero.
Así pues, el área del segmento de cuerda AB será:
$\dfrac{\pi\cdot 6^2}{6}-\dfrac{1}{2}6\cdot 3\sqrt{3}$, es decir, $6\pi - 9\sqrt{3}$ por lo que el área pedida será el doble, es decir: $12\pi - 18\sqrt{3}$ y la respuesta será D.

Participantes y relación de ganadores del VII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

De un total de 287 centros inscritos, el número de participantes en la 1ª Fase fue cercano a 20.000, de los cuales pasaron a la 2ª Fase o Fase Final que se celebró en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid 1900, distribuidos así:

5º de Primaria	111	1º de E.S.O.	236
6º de Primaria	305	2º de E.S.O.	439
Total Nivel I	**416**	**Total Nivel II**	**675**
3º de E.S.O.	295	1º de Bachillerato	138
4º de E.S.O.	239	2º de Bachillerato	137
Total Nivel III	**534**	**Total Nivel IV**	**275**

NIVEL I

1. Daniel Sánchez Seijo (6º Primaria) Colegio Gredos San Diego
2. Carlos Alberto Ruiz Domínguez (5º Primaria) Colegio San Viator
3. Simón Carlos Kocher (6º Primaria) Colegio Alemán
   Sergio Vilches Expósito (6º Primaria) CP Julio Cortázar (Getafe)

NIVEL II

1. Álvaro Arbiza Calpena (2º ESO) Colegio Ntra. Sra. de las Maravillas
   Manuel López Sheriff (2º ESO) Colegio Brains
   Salvador Viso Garrote (2º ESO) Colegio Ntra. Sra. de las Maravillas
2. Diego Izquierdo Arseguet (1º ESO) Liceo Francés

NIVEL III

1. José Antonio Pérez Martín (4º ESO) Colegio Institución La Salle
2. Iván López Martínez (3º ESO) Liceo Consul
3. Elisa Lorenzo García (4º ESO) IES Fortuny

NIVEL IV

1. Daniel de la Barrera Mayoral (1º Bach.) Col. La Inmaculada (Getafe)
2. Alejandro Cruz Robledillo (2º Bach.) Colegio Santa María del Pilar
3. Ramiro José López Colino (2º Bach.) Colegio Valdeluz
   Worrawit Pattaranit (2º Bach.) IES Ramiro de Maeztu

III Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

22 de noviembre de 2003

PRUEBA POR EQUIPOS (45 minutos)

1.- Un cucurucho en forma de cono de 8 cm de diámetro está lleno de helado y rematado por una semiesfera de dicho helado. Si la cantidad de helado que hay dentro del cucurucho es la misma que la de la semiesfera que rebosa, calcula la altura del cucurucho.

2.- Un famoso matemático escribió en 1864:

"En algún momento de mi vida, hace algunos años, el cuadrado de mi edad coincidió con ese año"

¿En qué año nació?

3.- Llamamos primos "trillizos" a aquellas ternas de primos (a, b, c) con $b – a = 2$ y $c – b = 2$. ¿Cuántas ternas de primos trillizos hay? Justifica la respuesta.

4.- Como sabes, el hockey sobre hielo es un deporte de mucho contacto. En un partido extraordinariamente violento, el 85 % de los jugadores perdió un diente, el 80 % se rompió un dedo, el 75 % se torció un tobillo y el 70 % resultó con algún ojo morado. ¿Cuál es el menor porcentaje posible de jugadores que sufrió simultáneamente estas cuatro lesiones?

5.- En una circunferencia de radio 2 cm, inscribimos un triángulo equilátero y en otra circunferencia del mismo radio inscribimos un rectángulo que tiene la misma área que el triángulo. Calcula las dimensiones del rectángulo.

6.- Se dice que un rectángulo es un "rectángulo de plata" si al cortarle dos cuadrados iguales y de lado igual al lado menor del rectángulo, como indica la figura 1, lo que queda es un rectángulo semejante al original. Encuentra la "razón de plata", es decir, el cociente entre el lado mayor y el lado menor de un rectángulo de plata.

7.- Sea la sucesión 1; 0,2; 0,04; 0,008, ... en la que cada término se obtiene multiplicando por 2 al anterior y desplazando la coma un lugar a la izquierda. Calcula la suma de todos los términos.

8.- Tres lados consecutivos del cuadrilátero circunscrito a la circunferencia de la figura 2, miden 3, 4 y 7 cm. Calcula la longitud del cuarto lado.

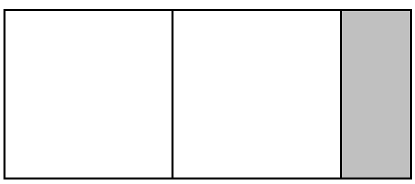


Figura 1

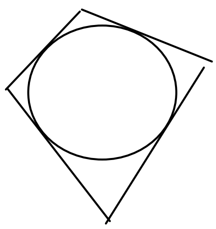


Figura 2

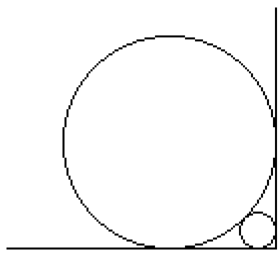


Figura 3

9.- Las dos circunferencias de la figura 3 son tangentes entre sí y tangentes a dos rectas perpendiculares. Si el radio de la mayor es 1, ¿cuál es el radio de la menor?

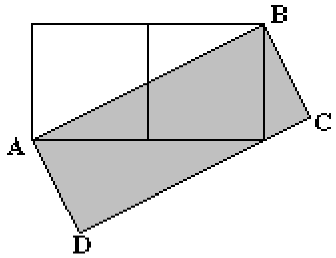
10.- Calcula 3^A si $A = \dfrac{(\lg_3 1 - \lg_3 4)(\lg_3 9 - \lg_3 2)}{(\lg_3 1 - \lg_3 9)(\lg_3 8 - \lg_3 4)}$

III Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

22 de noviembre de 2003

PRUEBA INDIVIDUAL Primer ciclo de E.S.O. (90 minutos)

1. Cada uno de los dos cuadrados de la figura tiene de lado 1 cm. ¿Cuál es el área del rectángulo ABCD?

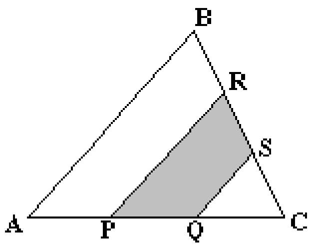


2. Los enteros positivos 30, 72 y N tienen la propiedad de que el producto de cualesquiera dos de ellos es múltiplo del tercero. ¿Cuál es el menor valor posible para N?

3. Los pesos de todas las parejas posibles formadas con cinco estudiantes de 1º de E.S.O. son: 90 kg, 92 kg, 93 kg, 94 kg, 95 kg, 96 kg, 97 kg, 98 kg, 100 kg y 101 kg. ¿Cuánto pesan en total los cinco estudiantes?

4. En una región de Canadá los dos idiomas oficiales son inglés y francés. Cualquier ciudadano de la región sabe hablar al menos uno de los dos; unos hablan sólo inglés, otros hablan sólo francés y otros hablan los dos idiomas. Si el 85 % de los habitantes de esa región hablan inglés, y el 75 % hablan francés, ¿qué porcentaje de los habitantes de esa región sabe hablar los dos idiomas?

5. El triángulo ABC de la figura tiene área 1 m^2. Los puntos P, Q, R y S verifican que AP = PQ = QC y BR = RS = SC. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



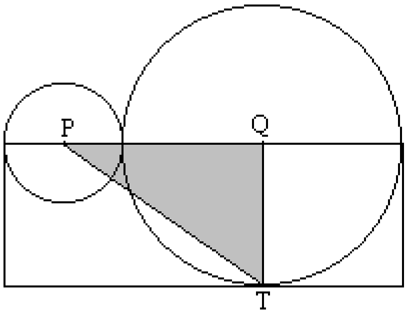
III Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

22 de noviembre de 2003

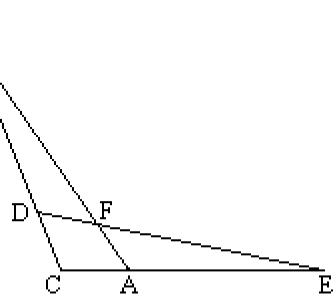
PRUEBA INDIVIDUAL Segundo ciclo de E.S.O. (90 minutos)

1. En un congreso hay hombres y mujeres. Abandonan 15 mujeres el congreso y entonces quedan 2 hombres por cada mujer. A continuación abandonan el congreso 45 hombres y quedan entonces 5 mujeres por cada hombre. ¿Cuántas personas participaban inicialmente en el congreso?

2. Las circunferencias de la figura de centros P y Q y radios diferentes, son tangentes entre sí y una de ellas es tangente además al rectángulo ABCD en un punto T. Si el área del rectángulo es 37 m^2, ¿cuál es el área del triángulo rectángulo PQT?



3. Los triángulos ABC y DEC son iguales. Si DC = AC = 1 y CB = CE = 4, ¿cuál es el cociente entre el área del cuadrilátero CDFA y el área del triángulo ABC?



4. Determina el menor entero positivo N tal que el producto 3999 x N termine en 888.

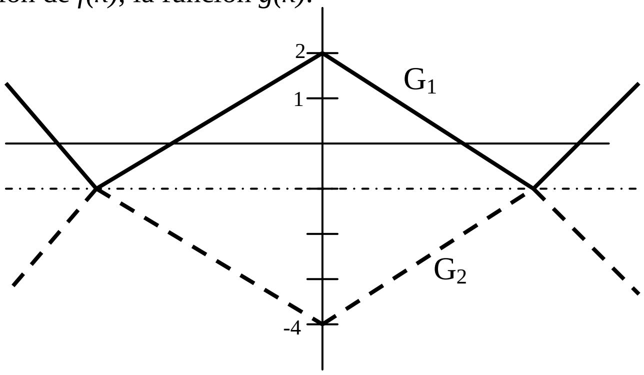
5. Obtén razonadamente y sin calculadora $\sqrt{2003\times 2001\times 1999\times 1997+16}$

III Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

22 de noviembre de 2003

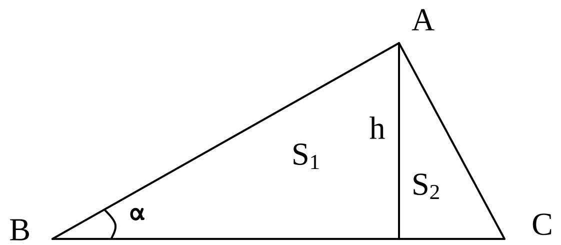
PRUEBA INDIVIDUAL Bachillerato (90 minutos)

1. Si G_1 es la gráfica de la función *f(x)* y G_2 la gráfica de otra función *g(x)*, obtén en términos de *f(x)*, es decir, expresa en función de *f(x)*, la función *g(x)*.

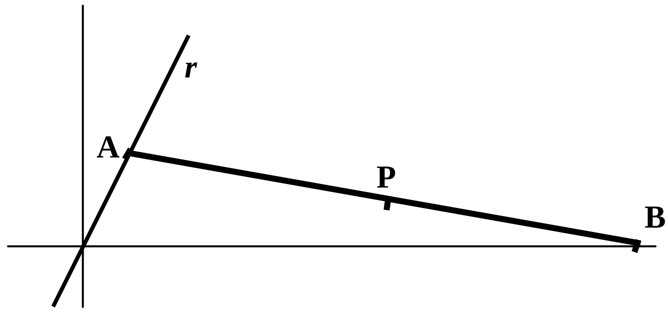


2. En una ciudad hay una epidemia de gripe, estando cada una de las personas de esa ciudad sana o enferma. Si una persona está hoy sana, la probabilidad de que mañana siga sana es del 95 % y si está enferma, la probabilidad de que mañana siga enferma es del 55 %. Si hoy está enferma el 20 % de la población, ¿qué porcentaje de la población se espera que mañana esté enferma?

3. En el triángulo rectángulo de la figura, *"h"* es la altura trazada sobre la hipotenusa. Si llamamos S_1 y S_2 a las áreas de los dos triángulos que dicha altura determina sobre el triángulo inicial, calcula el cociente $\frac{S_2}{S_1}$ en función de α.



4. En un sistema de coordenadas cartesianas se considera la recta ***r*** de ecuación $y = 2x$ y el punto P(9,2) que es el punto medio del segmento AB. Si el punto A pertenece a la recta ***r*** y el punto B está sobre el eje de abscisas, calcula la longitud del segmento AB.



5. En un recipiente hay 21 litros de una disolución que contiene el 18 % de alcohol. Sacamos unos cuantos litros del recipiente y los sustituimos por la misma cantidad de litros de otra disolución con un 90 % de alcohol, resultando una disolución con un 42 % de alcohol. ¿Cuántos litros habíamos sacado?

III Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

22 de noviembre de 2003

PRUEBA POR RELEVOS (45 minutos)

1er Ciclo de ESO.-

1A.- Si el número de 5 cifras 5 D D D D es divisible por 6, calcula el valor de **D**.
Pasa la respuesta a tu compañero de Bachillerato.

1B.- Sea "T" la respuesta del problema 2B. Calcula cuántos múltiplos de 10, positivos y menores que 6T son suma de cuatro enteros consecutivos.
Pasa la respuesta a tu compañero de Bachillerato.

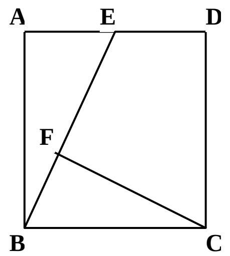
1C.- Sea "T" la respuesta del problema 2C. La diagonal de un cuadrado mide T cm. Calcula el área de un octógono regular de perímetro igual al de ese cuadrado.

III Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

22 de noviembre de 2003

<u>PRUEBA POR RELEVOS</u> (45 minutos)

2º Ciclo de ESO.-



2A.- Sea "T" la respuesta del problema 3A. En la figura adjunta ABCD es un cuadrado de $\frac{T}{17}$ cm de lado. E es el punto medio de AD y CF es perpendicular a BE. ¿Cuál es el área del cuadrilátero CDEF?

2B.- Una función *f* definida para los enteros positivos verifica que *f(m) + f(n) = f(m·n)* cualesquiera que sean los números enteros positivos *m* y n. Si *f(2)* = 8 y *f(3)* = 10, calcula *f(12).*
Pasa la respuesta a tu compañero de primer ciclo.

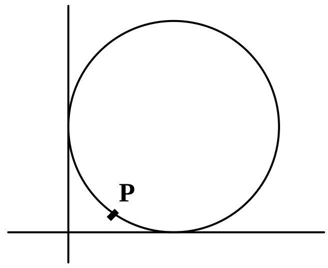
2C.- Sea "T" la respuesta del problema 3C. En un triángulo rectángulo ABC las bisectrices de los ángulos agudos B y C se cortan en P. La distancia entre P y la hipotenusa es T + 1. Calcula la distancia entre P y el vértice del ángulo recto A.
Pasa la respuesta a tu compañero de primer ciclo.

III Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

22 de noviembre de 2003

PRUEBA POR RELEVOS (45 minutos)

Bachillerato.-



3A .- Sea "T" la respuesta del problema 1A. La circunferencia del dibujo es tangente a los ejes de coordenadas. El punto P de la circunferencia dista T unidades de un eje y $\frac{9}{2}T$ unidades del otro. Calcula el radio de la circunferencia
Pasa la respuesta a tu compañero de 2º ciclo.

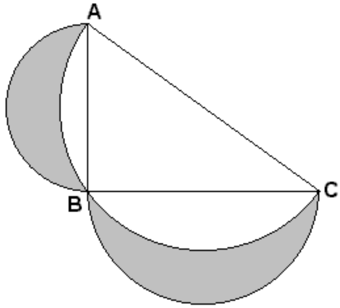
3B .- Sea "T" la respuesta del problema 1B. ¿Cuál es el valor más pequeño de la expresión $\boldsymbol{a^2 + Ta}$ donde ***"a"*** puede ser cualquier número real?

3C .- Considera la función $f(x) = (x + a)^3 + b^2$. Calcula el número de parejas (a, b) que cumplen $f(0) = 1$ y $f(1) = 2$.
Pasa la respuesta a tu compañero de 2º ciclo.

XXI Concurso "Puig Adam" de Resolución de Problemas
6 de junio de 2003

PRIMER NIVEL

Problema 1.



En la figura, el triángulo ABC es rectángulo en B. Hemos trazado exteriormente a cada cateto una semicircunferencia que lo tiene como diámetro. El tercer arco es la semicircunferencia de diámetro AC. Si el área del triángulo ABC es S, ¿cuál es el área de la región sombreada?

Problema 2.

¿Cuál es el menor número mayor que 1 cuya representación decimal difiere de la representación decimal de su inverso solamente en la colocación de la coma?

Problema 3.

Se toman dos números cualesquiera que suman 1. Se halla el cuadrado del mayor, y se le suma el menor. Por otra parte, se halla el cuadrado del menor y se le suma el mayor. ¿Cuál de los dos resultados es mayor?

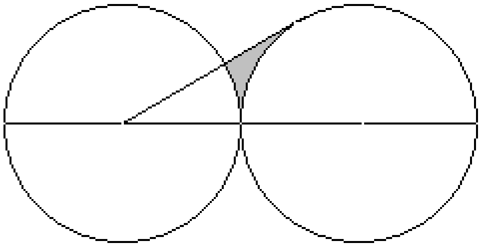
Problema 4.

En los dados, los puntos de las caras opuestas suman siempre 7. Con ocho dados iguales se puede componer un cubo de arista doble a la de cada dado. ¿Cuál es el máximo número de puntos que puede exhibir en total en sus seis caras el cubo así formado? ¿Se puede conseguir formar un cubo que exhiba en cada cara un número impar de puntos? ¿Y un cubo que exhiba en cada una de sus seis cara s precisamente 14 puntos? ¿Cómo?

SEGUNDO NIVEL

Problema 1.

Se tienen dos circunferencias iguales, tangentes exteriormente como se indica en la figura. Desde el centro de una de ellas, se traza un segmento tangente a la otra. Si la longitud de este segmento es 12 cm, calcúlese el área de la región sombreada.



Problema 2.

En la pizarra se han escrito números consecutivos 1, 2, 3, ... , n; pero el mayor no lo vemos. Al borrar uno de ellos, resulta que la media aritmética de los restantes es $\frac{45}{4}$ ¿Qué número se ha borrado?

Problema 3.

Sea ABC un triángulo rectángulo en A, y sean M y N dos puntos interiores a ABC. Demostrar que $CM^2 + MN^2 + NB^2 \leq CB^2$.

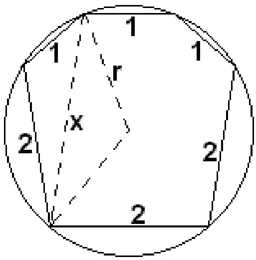
Problema 4.

Sea a un número natural fijado. Demostrar que para cada natural n existen dos potencias de a tales que su diferencia es un múltiplo de n.

TERCER NIVEL

Problema 1.

Calcular el área de un círculo en el que las longitudes de los lados consecutivos de un hexágono inscrito son: 1, 1, 1, 2, 2, 2.



Problema 2.

Sean la progresión aritmética de término general $a_n = 2002 + 4(n - 1)$ y la progresión geométrica de término general $a_n = 2\cdot(3)^{n-1}$. Se pide:

1º. Probar que tienen infinitos términos comunes.
2º. Hallar el primer término común.
3º. Escribir la forma general de la sucesión de términos comunes.

Problema 3.

En el triángulo equilátero ABC, de lado a, se trazan las circunferencias que tienen sus centros en los vértices y son tangentes al lado opuesto. Hay tres puntos de intersección de estas circunferencias en el interior de ABC que son vértices de otro triángulo equilátero. Calcular la longitud del lado de éste.

Problema 4.

¿Hay alguna potencia de 2 que se pueda obtener como suma de dos números naturales consecutivos?

IXª OLIMPIADA de MAYO
Mayo de 2003

Primer Nivel

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

PROBLEMA 1
Pedro escribe todos los números de cuatro cifras distintas que se pueden armar con los dígitos *a* ,*b*, *c*, *d* que cumplen las siguientes condiciones:

$$a \neq 0;\ b = a + 2;\ c = b + 2;\ d = c + 2\,.$$

Calcula la suma de todos los números que escribió Pedro.

PROBLEMA 2
El triángulo *ABC* es rectángulo en *A* y *R* es el punto medio de la hipotenusa *BC*. Sobre el cateto mayor *AB* se marca el punto *P* tal que *CP*=*BP* y sobre el segmento *BP* se marca el punto *Q* tal que el triángulo *PQR* es equilátero. Si el área del triángulo *ABC* es *27*, calcula el área del triángulo *PQR*

PROBLEMA 3
Determina el menor número entero positivo que termina en 56, es múltiplo de 56 y tiene la suma de sus dígitos igual a 56.

PROBLEMA 4

Celia elige un número n y escribe la lista de los números naturales desde 1 hasta n: $1,2,3,4, \ldots , n-1,n.$

En cada paso, cambia la lista: copia el primer número al final y borra los dos primeros.

Después de $n-1$ pasos quedará escrito un único número.

Por ejemplo, para n=6, los cinco pasos son:

$$1,2,3,4,5,6 \rightarrow 3,4,5,6,1 \rightarrow 5,6,1,3 \rightarrow 1,3,5 \rightarrow 5,1 \rightarrow 5$$

y queda escrito el número *5*.

Celia eligió un número entre 1000 y 3000 y después de n-1 pasos quedó escrito el número *1*.

Determina todos los valores de n que pudo haber elegido Celia.

Justifica por qué esos valores sirven, y los demás no.

PROBLEMA 5

Se tiene un tablero cuadriculado de 4×4. Definimos *separación* entre dos casillas como el menor número de movidas que debe emplear un caballo de ajedrez para ir de una casilla a la otra (utilizando movimientos del caballo). Tres casillas A,B,C forman un *trío bueno* si las tres separaciones entre A y B, entre A y C y entre B y C son iguales. Determina el número de tríos buenos que se pueden formar en el tablero.

ACLARACIÓN: En cada movida el caballo se desplaza 2 casillas en dirección horizontal más una casilla en dirección vertical o se desplaza 2 casillas en dirección vertical más una casilla en dirección horizontal.

Segundo Nivel

PROBLEMA 1

Se eligen cuatro dígitos a, b, c, d distintos entre sí y distintos de cero y se escribe la lista de todos los números de cuatro cifras que se obtienen intercambiando de lugar los dígitos a, b, c, d.

¿Qué dígitos hay que elegir para que la lista tenga la mayor cantidad posible de números de cuatro cifras que sean múltiplos de 36?

PROBLEMA 2
Sea *ABCD* un rectángulo de lados *AB*=4 y *BC*=3. La perpendicular a la diagonal *BD* trazada por *A* corta a *BD* en el punto *H*. Denotamos *M* al punto medio de *BH* y *N* al punto medio de *CD*. Calcula la medida del segmento *MN*.

PROBLEMA 3
Halla todos los pares de números enteros positivos (a,b) tales que $8b+1$ es múltiplo de a y $8a+1$ es múltiplo de b.

PROBLEMA 4
Beto marcó 2003 puntos verdes en el plano, de manera que todos los triángulos con sus tres vértices verdes tienen área menor que 1.
Demuestra que los 2003 puntos verdes están contenidos en un triángulo *T* de área menor que 4.

PROBLEMA 5
Una hormiga está en una arista de un cubo de lado 8, debiendo realizar un recorrido por la superficie del cubo y regresar al punto de partida. Su camino debe contener puntos interiores de las seis caras del cubo y debe visitar sólo una vez cada cara del cubo. Halla la longitud del camino más corto que puede realizar la hormiga y justifica por qué es el camino más corto.

Consejería
de Educación

sm

ANAYA

IX CONCURSO PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS 2005

Comunidad de Madrid

Comité organizador del Concurso de Primavera

Juan Jesús Donaire Moreno
Luis Ferrero de Pablo
Jesús García Gual
María Gaspar Alonso-Vega
Joaquín Hernández Gómez
Francisco López Álvarez
Alfredo Martínez Sanz
Fernando Moya Molina
Merche Sánchez Benito
Víctor Manuel Sánchez González
Esteban Serrano Marugán
Javier Soler Areta
José María Sordo Juanena

Amor, oculta maravilla:
ser flor, fruto y al fin
... semilla.

A Miguel de Guzmán (1936 – 2004)
amigo, compañero y maestro.

Presentación

Ya está aquí la prueba del nueve (IX Concurso de Primavera de Problemas de Matemáticas) para constatar un año más el trabajo bien hecho de alumnos, padres y profesores que vuelven a encender sus candelas en este concierto de voluntades. Sumando esfuerzos, restando dificultades, multiplicando conocimientos y dividiendo tareas, potenciamos la comunidad escolar y afianzamos sus raíces.

Seguimos en π *i e .*

Comité Organizador

Nuestro agradecimiento por el apoyo logístico y financiación a la Facultad de Matemáticas de la U.C.M. y al Área de Formación del Profesorado dentro de la Dirección General de Ordenación Académica de la Consejería de Educación, y, por el apoyo económico para los premios, a las editoriales Grupo ANAYA y Ediciones S.M, así como al grupo empresarial El Corte Inglés.

VIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE : Día 3 de marzo de 2004

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

*Escribe ahora los siguientes datos:

Apellidos	Nombre	
Colegio	**Curso**	**Año de nacimiento**

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **RODEA LA LETRA CORRESPONDIENTE A LA RESPUESTA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y RODEA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Ediciones S.M. y Grupo ANAYA

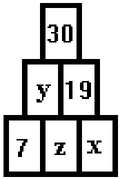
1.- Cuando redondeo el número 249973 a la centena más cercana, ¿cuántas cifras de ese número cambio?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5.

2.- ¿Cuál es la raíz cuadrada del número cuyo cuadrado es 16?

A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 10.

3.- El número de un rectángulo que no está en la base se obtiene sumando los números de los dos rectángulos inmediatamente inferiores. ¿Cuánto vale x - z?



A) 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11.

4.- ¿Qué porcentaje de 6 kg son 300 gramos?

A) 2 % **B)** 5 % **C)** 50 % **D)** 80 % **E)** 90 %.

5.- Si un ángulo de un triángulo es 40º, ¿cuál es la media de los otros dos?

A)70º **B)** 140º **C)** 160º **D)** 170º **E)** 180º.

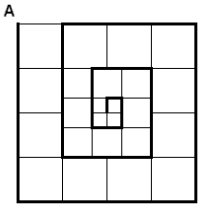
6.- Si voy en bicicleta a 12 km/h, ¿a cuántos metros por minuto voy?

A) 20 **B)** 72 **C)** 200 **D)** 720 **E)** 1200.

7.- Si el número de tres cifras 6*ab* verifica que $6ab - ba6 = cd7$, entonces $c + d$ es igual a:

A) 5 **B)** 6 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 11.

8.- La siguiente figura está compuesta de cuadrados, los más pequeños de lado 1 dm ¿Cuánto mide en dm la espiral del dibujo que va desde A al centro de la figura?



A) 78 **B)** 80 **C)** 81 **D)** 82 **E)** 83.

9.- ¿En cuánto rebasa la suma de los 10000 primeros números positivos pares a la suma de los 10000 primeros positivos impares?

A) 1 **B)** 5000 **C)** 9999 **D)** 10000 **E)** 20000.

10.- El menor número de tres cifras consecutivas (abc), a < b < c, que es múltiplo de 8, es también múltiplo de:

A) 7 **B)** 11 **C)** 13 **D)** 17 **E)** 19 .

11.- ¿Cuál es el mayor número que divide exactamente a 6^3 y a 4^5?

A) 8 **B)** 12 **C)** 16 **D)** 136 **E)** 216.

12.- ¿De cuántas maneras (sin importar el orden de los sumandos) se puede obtener 50 como suma de dos primos?

A) una **B)** dos **C)** tres **D)** cuatro **E)** cinco.

13.- Si dos números enteros positivos suman 12, su cociente no puede ser:

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{1}{5}$ **E)** $\frac{1}{11}$.

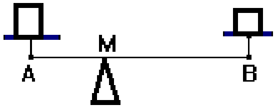
14.- La edad media de 5 osos es 120 meses. ¿Cuál es, en años, la suma de sus edades?

A) 10 B) 24 **C)** 50 **D)** 120 **E)** 140.

15.- Un helicóptero puede volar 90 minutos con un tanque lleno de combustible. ¿Cuántos tanques harán falta para que vuele 6 horas?

A) 3 **B)** 4 **C)** 15 **D)** 20 **E)** 60.

16.- Para que la balanza de la figura de pie móvil esté en equilibrio sabiendo que la pesa de la izquierda pesa el triple que la de la derecha, la relación de distancias AB:AM debe ser:



A) 2:1 **B)** 3:1 **C)** 3:2 **D)** 4:1 **E)** 5:2.

17.- La suma de los veinte primeros números enteros positivos consecutivos es 210. Entonces la suma de los primeros cuarenta números enteros positivos es

A) 420 **B)** 610 **C)** 820 **D)** 840 **E)** 4200.

18.- En una reunión de 125 personas, 45 han nacido en Madrid. Su porcentaje es el:

A) 30 % **B)** 36 % **C)** 40 % **D)** 45 % **E)** 48 %.

19.- 1001:11 = 91; 100001: 11 = 9091; 10000001:11 =909091. Entonces la suma de las cifras del número obtenido al dividir $10^{15}+1$ entre 11 es:

A) 55 **B)** 59 **C)** 64 **D)** 73 **E)** 100.

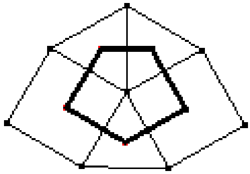
20.- Una fotocopiadora hace 9000 fotocopias en una hora y otra 3000. Puestas en funcionamiento las dos a la vez, ¿cuántos segundos tardarán en sacar 1000 fotocopias?

A) 100 **B)** 200 **C)** 300 **D)** 450 **E)** 600.

21.- ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un polígono de nueve lados?

A) 360º **B)** 720º **C)** 1200º **D)** 1260º **E)** 1360º.

22.- El pentágono de la figura tiene como vértices los centros de los cuadrados y triángulos equiláteros. ¿Cuánto mide su ángulo interior mayor?



A) 100º **B)** 105º **C)** 120º **D)** 135º

E) 150º.

23.- Alicia quiere hacer 300 km del Camino de Santiago. Planea hacer 18 km diarios y llegar a Santiago el día del Santo (25 de julio). ¿Qué día de julio debe ponerse en marcha?

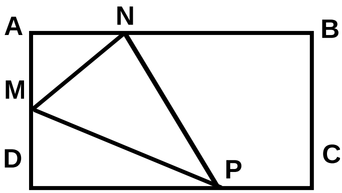
A) 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11.

24.- En una tienda nos venden compactos y comics a precio fijo cada producto y exacto en euros. Si 5 comics y 2 compactos cuestan menos de 15 euros, y 3 comics y 4 compactos más de 12 euros, ¿cuál de las siguientes afirmaciones tiene que ser cierta?

A) Cuestan más los compactos
B) Cuestan más los comics
C) Un compacto cuesta menos de 3 euros
D) Un comic y un compacto cuestan 4 euros
E) Si no cuestan lo mismo, al menos hay dos euros de diferencia.

25.- En el rectángulo ABCD, M es el punto medio de AD y AB:AN = 3:1, DC:PC = 3:1. Si el área del rectángulo es 24 dm^2, el área del triángulo MNP es en dm^2:

A) 4 **B)** 6 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10.



VIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE : Día 3 de marzo de 2004

NIVEL II (1º y 2º de ESO)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

*Escribe ahora los siguientes datos:

Apellidos	Nombre	
Colegio	**Curso**	**Año de nacimiento**

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **RODEA LA LETRA CORRESPONDIENTE A LA RESPUESTA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y RODEA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:
Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Ediciones S.M. y Grupo ANAYA

1.- $\dfrac{0,004}{80} =$

A) 0,0002 **B)** 0,00002 **C)** 500 **D)** 0,00005 **E)** 0,0005.

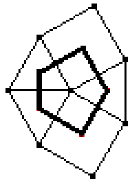
2.- ¿Cuál de estos números es cuadrado perfecto?

A) $11 \times 22 \times 33 \times 44$ **B)** $11\times 22 \times 88 \times 99$ **C)** $11 \times 33 \times 55 \times 77$

D) $22 \times 44 \times 66 \times 88$ **E)** $33 \times 44 \times 55 \times 66$.

3.- Colocando un 1 al final de un número, su valor aumenta en 13789. ¿Cuál es la suma de las cifras del número original?

A) 11 **B)** 10 **C)** 9 **D)** 8 **E)** 7.



4.- El pentágono de la figura tiene como vértices los centros de los cuadrados y triángulos equiláteros. ¿Cuánto mide su ángulo interior mayor?

A) 100º **B)** 105º **C)** 120º **D)** 135º **E)**150º.

5.- ¿Cuál es el primer año después de 2004 que sea el producto de 3 enteros consecutivos?

A) 2005 **B)** 2040 **C)** 2046 **D)** 2052 **E)** 2184.

6.- Con 36 cubitos iguales hacemos un prisma. ¿Cuántos prismas distintos se pueden hacer?

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9.

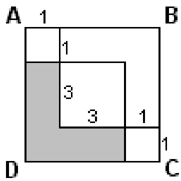
7.- ¿De cuántas formas puedo repartir 12 caramelos entre Alicia, Beatriz y Carlos si a cada uno de ellos le tengo que dar por lo menos 3?

A) 9 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 12.

8.- De los 36 estudiantes de una clase, 26 aprobaron el último control de Matemáticas. De los restantes, los tres quintos obtuvieron un 4 y el resto un 3. Si repartes todos estos datos en un círculo, ¿cuántos grados debes asignar al sector de los que obtuvieron un 3?

A) 30º **B)** 40º **C)** 50º **D)** 60º **E)** 70º.

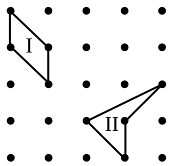
9.- La figura *ABCD* es un cuadrado. Dentro de él, hemos dibujado las figuras que ves. ¿Cuál es el área de la figura sombreada?



A) 7 **B)** 10 **C)** 12,5 **D)** 14 **E)** 15.

10.- Considera los dos cuadriláteros de la figura cuyos vértices son los puntos de la cuadrícula que te mostramos. ¿Cuál de las afirmaciones siguientes es verdadera?

A) El área del cuadrilátero I es mayor que el área del cuadrilátero II
B) El área del cuadrilátero I es menor que el área del cuadrilátero II
C) Los dos cuadriláteros tienen la misma área y el mismo perímetro
D) Los dos cuadriláteros tienen la misma área, pero el perímetro del I es mayor que el del II
E) Los dos cuadriláteros tienen la misma área, pero el perímetro del I es menor que el del II.



11.- El menor número positivo por el que hay que multiplicar 18 para que nos dé un cubo perfecto está comprendido entre:

A) 1 y 5 **B)** 6 y 10 **C)** 11 y 15 **D)** 16 y 20 **E)** 21 y 25.

12.- La media de 4 números es k. Si añadimos el número 40, la media de los cinco números ahora es 14. ¿Cuánto vale k?

A) 6 **B)** 6,5 **C)** 7 **D)** 7,5 **E)** 8.

13.- Dividimos un rectángulo en rectángulos más pequeños como indica el dibujo que no está hecho a escala. Si las áreas de los pequeños son las indicadas, x debe ser:

1		x
2	3	
	4	16

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8
E) 9.

14.- Si el cuadrado inscrito a una circunferencia tiene área 12 cm^2 el cuadrado circunscrito tiene área en cm^2:

A) 48 **B)** 24 **C)** 12 **D)** 6 **E)** 4.

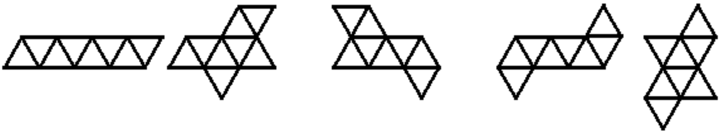
15.- ¿Cuántos números hay de tres cifras $a5b$ que sean múltiplos de 12?

A) ocho **B)** seis **C)** cinco **D)** cuatro **E)** dos.

16.- En la primera quincena de julio un artículo se rebaja un 10 %. En la segunda el precio nuevo se rebaja otro 10 %. ¿Cuál ha sido la rebaja acumulada sobre el precio original?

A) 9 % **B)** 10 % **C)** 19 % **D)** 20 % **E)** 21 %.

17.- ¿Cuál de los siguientes no es un desarrollo del octaedro?



A) **B)** **C)** **D)** **E)**

18.- Cogemos un cubo de arista 1 dm y en cada una de sus caras pegamos un cubo de igual tamaño. La cruz espacial así formada tiene de superficie en dm^2:

A) 42 **B)** 36 **C)** 35 **D)** 30 **E)** 27.

19.- El mínimo común múltiplo de 3000, 40000, 2500000, 9000000 es:

A) 45000000 **B)** 9000000 **C)** 90000000

D) 300000000 **E)** 75000000.

20.- Si el circuncentro de un triángulo está en uno de los lados del triángulo, éste es necesariamente:

A) acutángulo **B)** escaleno **C)** rectángulo

D) equilátero **E)** obtusángulo.

21.- Al dividir un número entre otro, el cociente sale 18 y el resto de la división es 24. Si divido el mismo número entre el doble del otro, obtengo un cociente c, y un resto r, que son:

A) $c = 9$, $r = 24$ **B)** $c = 9$, $r = 12$ **C)** $c = 18$, $r = 24$

D) $c = 18$, $r = 12$ **E)** $c = 36$, $r = 12$.

22.- Si un triángulo equilátero inscrito a una circunferencia tiene área 4 dm^2, un triángulo equilátero circunscrito a esa misma circunferencia tiene en dm^2 área igual a:

A) 6 **B)** 8 **C)** 12 **D)** 16 **E)** 24.

23.- En una tienda nos venden compactos y comics a precio fijo cada producto y exacto en euros. Si 5 comics y 2 compactos cuestan menos de 15 euros, y 3 comics y 4 compactos más de 12 euros, ¿cuál de las siguientes afirmaciones tiene que ser cierta?

A) Cuestan más los compactos **B)** Cuestan más los comics

C) Un compacto cuesta menos de 3 euros

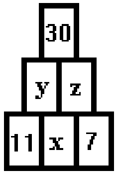
D) Un comic y un compacto cuestan 4 euros

E) Si no cuestan lo mismo, al menos hay dos euros de diferencia.

24.- Alicia quiere hacer 300 km del Camino de Santiago. Planea hacer 18 km al día. Daniel quiere hacer el mismo camino, pero en su caso de vuelta y haciendo 24 km diarios. Si ambos salen el 1 de julio, ¿en qué día de julio se darán el "croque" de los peregrinos?

A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)**12.

25.- El número de un rectángulo que no está en la base se obtiene sumando los números de los dos rectángulos inmediatamente inferiores. ¿Cuánto vale y - z?



A) 5 **B)** 4 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 1.

VIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE : Día 3 de marzo de 2004

NIVEL III (3º y 4º de ESO)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

*Escribe ahora los siguientes datos:

Apellidos	Nombre	
Colegio	**Curso**	**Año de nacimiento**

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **RODEA LA LETRA CORRESPONDIENTE A LA RESPUESTA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y RODEA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:
Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Ediciones S.M. y Grupo ANAYA

1.- Al dividir un número entre 7 obtenemos un resto de 2. ¿Qué resto obtendremos si añadimos 2004 a dicho número y lo dividimos entre 7?

A) 5 **B)** 4 **C)** 2 **D)** 0 **E)** 6.

2.- ¿Cuántos capicúas de tres cifras son múltiplos de 11?

A) ocho **B)** nueve **C)** diez **D)** doce **E)** noventa.

3.- $2,\widehat{1} - 1,\widehat{2} =$

A) 1 **B)** $0,\widehat{9}$ **C)** 0,9 **D)** $0,\widehat{8}$ **E)** 0,8.

4.- El mínimo común múltiplo de 3×10^3, 4×10^4, 25×10^5, 9×10^6, es:

A) 45×10^6 **B)** 75×10^6 **C)** 9×10^7 **D)** 18×10^7 **E)** 108×10^7.

5.- Se usan dos dados con formas de tetraedro regular, numeradas sus caras del 1 al 4. ¿Cuál es la probabilidad de obtener suma cinco en una tirada?

A) $\frac{1}{8}$ **B)** $\frac{1}{6}$ **C)** $\frac{1}{5}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{1}{3}$.

6.- Si el polinomio $4x^2 - 48x + c$ tiene sus dos raíces enteras, la mayor de ellas tiene que ser como mucho:

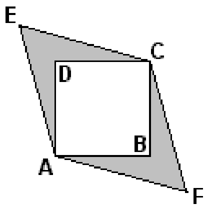
A) 1 **B)** 4 **C)** 12 **D)** 24 **E)** puede ser cualquier entero.

7.- Una fotocopiadora tarda en sacar m fotocopias una hora y otra para sacar el mismo número de fotocopias tarda una hora y media. ¿Cuántos minutos tardarán las dos juntas en sacar ese número m de fotocopias?

A) 20 **B)** 24 **C)** 30 **D)** 36 **E)** 40.

8.- El número *m* verifica que cada pareja de los números 24, 42 y *m* tiene el mismo máximo común divisor y cada pareja de los números 6, 15 y *m* tiene el mismo mínimo común múltiplo. ¿Quién es *m*?

A) 10 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 36 **E)** 30.



9.- Calcula el área de la zona sombreada sabiendo que *ABCD* es un cuadrado de lado 1 y los triángulos *ACE* y *ACF* son equiláteros.

A) $\sqrt{3}$ **B)** $2\sqrt{3}-1$ **C)** $\sqrt{3}+1$ **D)** $\sqrt{3}-1$ **E)** 2.

10.- Un cono y un cilindro comparten la base circular y tienen la misma altura. Si el cono tiene de volumen 12 dm^3, el volumen del cilindro es en dm^3:

A) 24 **B)** 24π **C)** 36 **D)** 36π **E)** 48.

11.- ¿Cuál es el mayor n tal que 9^n es un divisor del producto de los primeros cincuenta enteros positivos?

A) 8 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** 16.

12.- Si $a > 0$ es irracional, ¿cuál de los siguientes números es siempre irracional?

A) a^2 **B)** $a^2 - a$ **C)** $\frac{1}{a^2}$ **D)** $a \cdot \sqrt{2}$ **E)** $\sqrt{a}$.

13.- $\sqrt[3]{123456789}$ es un número comprendido entre:

A) 400 y 500 **B)** 500 y 600 **C)** 1000 y 2000

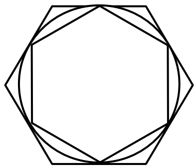
D) 2000 y 3000 **E)** 4000 y 5000.

14.- Si $a \times c < 0$, entonces $ax^4 + bx^2 + c = 0$ tiene:

A) dos raíces iguales **B)** dos raíces opuestas **C)** no tiene raíces

D) cuatro raíces distintas **E)** dos pares de raíces opuestas.

15.- La proporción entre las áreas de un hexágono regular inscrito y uno circunscrito a una misma circunferencia es:



A) 3 : 4 **B)** 4 : 5 **C)** 5 : 6 **D)** $2\sqrt{3} : 4$

E) 3 : 5.

16.- En una tienda nos venden compactos y comics a precio fijo cada producto y exacto en euros. Si 5 comics y 2 compactos cuestan menos de 15 euros, y 3 comics y 4 compactos más de 12 euros., ¿Cuál de las siguientes afirmaciones tiene que ser cierta?

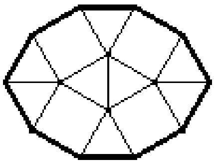
A) Cuestan más los compactos **B)** Cuestan más los comics

C) Un compacto cuesta menos de 3 euros

D) Un comic y un compacto cuestan 4 euros

E) Si no cuestan lo mismo, al menos hay dos euros de diferencia.

17.- El decágono de la figura tiene de arista 1 dm. Su área en dm^2 es:



A) 10 **B)** 9 **C)** $4 + 2\sqrt{3}$

D) $4 \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right)$ **E)** $\frac{4\sqrt{3} + 4}{3}$.

18.- Pedro se dirige a Santiago de Compostela que está a 300 km, caminando 24 km al día. Quiere llegar el 25 de julio (fiesta del Santo) y coincidir ese día allí con

Celia que hace una marcha de 18 km diarios. Si han salido el mismo día, ¿a cuántos km como máximo estaba Celia de Santiago?

A) 216 **B)** 220 **C)** 228 **D)** 234 **E)** 250.

19.- En cierta competición, se entregan premios en metálico a los clasificados en los tres primeros lugares. La cantidad total a entregar se divide en dos partes que están en la proporción 5:4, donde la parte mayor corresponde al primero y la otra se vuelve a dividir en dos partes en la misma razón 5:4 siendo ahora la mayor para el segundo y la pequeña para el tercero. Si el tercer clasificado recibe 290 euros menos que el primero, ¿cuántos euros recibió el segundo?

A) 100 **B)** 200 **C)** 300 **D)** 400 **E)** 500.

20.- A las tres de la tarde, el ángulo entre las agujas de un reloj es 90º. ¿Qué ángulo formarán 10 minutos más tarde?

A) 45º **B)** 30º **C)** 35º **D)** 17,5º **E)** 70º.

21.- Un triángulo rectángulo isósceles tiene 4 cm^2 de área. Su perímetro, en cm, es:

A) $4+3\sqrt{2}$ **B)** $2\left(1+2\sqrt{2}\right)$ **C)** 8 **D)** $4+2\sqrt{2}$
E) $4\left(1+\sqrt{2}\right)$.

22.- Considera la siguiente afirmación:
"Sea m un entero positivo. Si m no es primo, entonces $m-2$ tampoco es primo".
Esta afirmación es falsa, como puede demostrarse dando a m el valor:

A) 9 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 16 **E)** 23.

23.- Dados 4 números, elegimos tres, calculamos su media y a la media de esos tres le sumamos el cuarto número. Como ves, esto lo podemos hacer de cuatro formas, dejando cada vez uno de los números sin elegir. Si obtenemos como resultados 17, 21, 23 y 29, ¿cuál es el mayor de los cuatro números que teníamos?

A) 12 **B)** 15 **C)** 21 **D)** 24 **E)** 29.

24.- ¿De cuántas formas puedo repartir 12 caramelos entre Alicia, Beatriz y Carlos si a cada uno de ellos le tengo que dar por lo menos 3?

A) 9 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 12.

25.- ¿Cuántas parejas de enteros (a, b) donde a y b no tienen por qué ser positivos, verifican la ecuación $\frac{1}{10}=\frac{1}{a}+\frac{b}{5}$?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4.

VIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE : Día 3 de marzo de 2004

NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

*Escribe ahora los siguientes datos:

Apellidos	Nombre	
Colegio	**Curso**	**Año de nacimiento**

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **RODEA LA LETRA CORRESPONDIENTE A LA RESPUESTA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y RODEA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Ediciones S.M. y Grupo ANAYA

1.- Si $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos raíces distintas, entonces $ax^6 + bx^3 + c = 0$ tiene:

A) dos raíces iguales **B)** dos raíces opuestas **C)** dos raíces distintas

D) cuatro raíces distintas **E)** tres pares de raíces opuestas.

2.- Un cono y un cilindro comparten la base circular y la generatriz del primero es igual a la altura del segundo. La proporción entre sus áreas laterales es:

A) 1 : 1 **B)** 1 : 2 **C)** 1 : 3 **D)** 2 : 3 **E)** 3 : 4.

3.- $\dfrac{0{,}\overparen{02}}{0{,}0\overparen{2}} =$

A) 0,01 **B)** $0{,}\overparen{01}$ **C)** 1,1 **D)** $0{,}\overparen{10}$ **E)** $0{,}\overparen{90}$.

4.- Si m y n son números enteros distintos, de la expresión $n^3 \cdot m - n \cdot m^3$ sólo podemos asegurar que es múltiplo de:

A) dos **B)** tres **C)** cuatro **D)** seis **E)** doce.

5.- $\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{17}+\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{17}-\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{17}+\sqrt{10}\right)\left(-\sqrt{5}+\sqrt{17}+\sqrt{10}\right)} =$:

A) 5 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 14 **E)** 17.

6.- ¿Cuántos números *abc*, con $c \neq 0$, hay de tres cifras tales que *abc – cba = de7* ?

A) 60 **B)** 50 **C)** 45 **D)** 42 **E)** 30.

7.- En un triángulo rectángulo de lados enteros consideramos como segmentos: la altura sobre la hipotenusa, la mediana sobre la hipotenusa, el radio de la circunferencia circunscrita y el radio de la circunferencia inscrita. ¿Cuántas de esas medidas son racionales?

A) todas **B)** ninguna**C)** tres **D)** dos **E)** una.

8.- Dado un triángulo *ABC* de perímetro 2*p* y radio inscrito *r* y circunscrito *R*, ¿cuál de estas fórmulas no es una fórmula del área?

A) $\dfrac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$ **B)** $\dfrac{a \cdot b \cdot \cos\hat{C}}{2}$ **C)** $\dfrac{a \cdot b \cdot c}{4R}$

D) $p \cdot r$ **E)** $\sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$.

9.- Las parábolas $y = ax^2 - 4x + 5,$ y $y = bx^2 - 8x + 7$ tienen el mismo vértice. La ordenada de éste es:

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4.

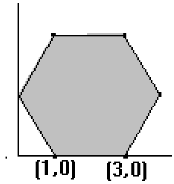
10.- ¿Cuál es la menor superficie total en dm^2 que puede tener una caja de cartón (ortoedro) de lados enteros en dm y volumen 40 dm^3 ?

A) 162 **B)** 106 **C)** 76 **D)** 53 **E)** 44.

11.- ¿Cuál es el valor mínimo de la función $f(x)=|2x+2|-|x-1|+|3x-6|$?

A) 0 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 7.

12.- El valor máximo de x+y en la región definida por el hexágono regular completo es:



A) $3+2\sqrt{3}$ **B)** $2+3\sqrt{3}$ **C)** $4+\sqrt{3}$

D) $2+2\sqrt{3}$ **E)** $3+3\sqrt{3}$.

13.- La mayor inclinación de la función f (x) = x + senx en uno de sus puntos es:

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** $\frac{\pi}{2}$.

14.- El valor absoluto de la parte real de las raíces cuadradas del número complejo 21 + 20i es:

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5.

15.- En una tienda nos venden compactos y comics a precio fijo cada producto y exacto en euros. Si 5 comics y 2 compactos cuestan menos de 15 euros, y 3 comics y 4 compactos más de 12 euros, ¿cuál de las siguientes afirmaciones tiene que ser cierta?

A) Cuestan más los compactos **B)** Cuestan más los comics

C) Un compacto cuesta menos de 3 euros

D) Un comic y un compacto cuestan 4 euros

E) Si no cuestan lo mismo, al menos hay dos euros de diferencia.

16.- La función inversa (respecto a la composición) de $y=\frac{5x+3}{x-2}$ es:

A) $y=\frac{2x+3}{x-5}$ **B)** $y=\frac{3x+2}{5x-1}$ **C)** $y=\frac{x-5}{2x+3}$

D) $y=\frac{2x-5}{x+3}$ **E)** $y=\frac{5x-3}{x-2}$.

17.- El determinante $\begin{vmatrix} x & 3 & 5 \\ 3 & x & 5 \\ 3 & 5 & x \end{vmatrix}$ es igual a:

A) $x^3 + 3x^2 + 5x + 10$ **B)** x (x – 3) (x – 5) **C)** 0

D) $x^2 - 8x + 10$ **E)** (x + 8) (x – 3) (x – 5).

8.- El punto de inflexión de la cúbica $y=x^3+3x^2+2x+1$ tiene ordenada y igual a:

A) 0 **B)** 4 **C)** -1 **D)** 2 **E)** 1.

19.- Una asíntota de $f(x)=\sqrt{4x^2+8x-1}$ es:

A) $y=4x+2$ **B)** $y=4x-2$ **C)** $y=2x-2$

D) $y=2x+2$ **E)** $y=2x-4$.

20.- El valor máximo de 16xy cuando x + 4y = 5 es:

A) 8 **B)** 12 **C)** 16 **D)** 20 **E)** 25.

21.- Si log 2 = 0,301030 y log 3 = 0,477121 (los logaritmos son decimales), el valor de x para que $3^{x+3} = 135$ es aproximadamente:

A) 5 **B)** 1,47 **C)** 1,67 **D)** 1,78 **E)** 1,63.

22.- Sean a, b y c enteros mayores que 10^6 y tales que a y b son consecutivos y $c = a\cdot b$. Si $D = a^2 + b^2 + c^2$, el número $\sqrt{D}$ verifica:

A) Siempre es un entero par **B)** Algunas veces es un entero impar, otras no

C) Siempre es un entero impar **D)** Algunas veces es irracional, otras no

E) Siempre es irracional.

23.- Si una recta que pasa por (–a, 0) determina en el segundo cuadrante un triángulo de área T, la ecuación de la recta es:

A) $2Tx + a^2y + 2aT = 0$ **B)** $2Tx - a^2y + 2aT = 0$ **C)** $2Tx + a^2y - 2aT = 0$

D) $2Tx - a^2y - 2aT = 0$ **E)** Nada de lo anterior.

24.- Los puntos A y B se mueven uniformemente a lo largo de dos rectas perpendiculares que se cortan en el punto O. Cuando A está en O, B está a 500 cm de O. 2 minutos más tarde equidistan de O y 8 minutos después de que equidisten, vuelven a equidistar de O. ¿Cuál es el cociente entre la velocidad de A y la de B?

A) $\frac{4}{5}$ **B)** $\frac{5}{6}$ **C)** $\frac{2}{3}$ **D)** $\frac{5}{8}$ **E)** $\frac{1}{2}$.

25.- Si el número θ verifica $0 < \theta < \pi$ y el complejo z cumple la igualdad $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$, entonces, para cada entero positivo n, resulta que $z^n + \frac{1}{z^n}$ es igual a:

A) $2\cos\theta$ **B)** $2^n\cos\theta$ **C)** $2\cos^n\theta$ **D)** $2\cos n\theta$ **E)** $2^n\cos^n\theta$.

VIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE Día 24 de abril de 2004

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ (☒) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid

Ediciones S.M. y Grupo ANAYA

1.- De los siguientes números, ¿cuál es el mayor?

A) 2+0+0+4 **B)** $2 \times 0 \times 0 \times 4$ **C)** $(2+0) \times (0+4)$

D) $20 \times 0 \times 4$ **E)** $(2 \times 0)+(0 \times 4)$.

2.- Jaime tiene 4 lápices de colores (azul, verde, amarillo y rojo). Dibuja dragones utilizando para cada uno un color y siempre los dibuja en el mismo orden: el primero azul, el segundo verde, el tercero amarillo, el cuarto rojo, el quinto otra vez azul y así sucesivamente. ¿De qué color será el dragón número 33 que pintó?

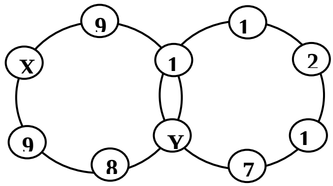
A) Azul **B)** Verde **C)** Amarillo **D)** Rojo **E)** No se sabe.

3.- ¿Cuántos números enteros hay que estén comprendidos entre 2,09 y 15,3?
A) 13 **B)** 14 **C)** 11 **D)** 12 **E)** Infinitos.

4.- Si tengo 9 billetes de 100 €, 9 billetes de 10 € y 10 monedas de 1 €, ¿cuántos euros tengo?

A) 1000 **B)** 991 **C)** 9910 **D)** 9901 **E)** 99010.

5.- La suma de los seis números situados en cada uno de los anillos es 55. ¿Qué número tiene que haber donde está la X?



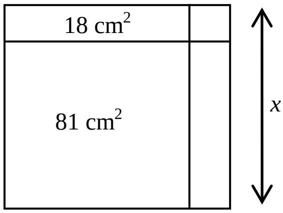
A) 9 **B)** 10 **C)** 13

D) 16 **E)** 17.

6.- ¿Cuál es el menor número entero positivo que se puede dividir exactamente entre 2, 3 y 4?

A) 1 **B)** 6 **C)** 12 **D)** 24 **E)** 36.

7.- El cuadrado de lado *x* de la figura, lo hemos dividido en dos cuadrados y dos rectángulos. ¿Cuánto mide "*x*"?

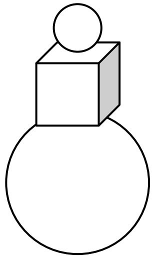


A) 9 cm **B)** 2 cm **C)** 7 cm

D) 11 cm **E)** 10 cm.

8.- A Beatriz le gusta sumar las cifras que aparecen en su reloj digital; por ejemplo, cuando son las 21:17, ella obtiene 2+1+1+7=11. ¿Qué número es el mayor que puede obtener con estas sumas?

A) 24 **B)** 36 **C)** 19 **D)** 25 **E)** 20.

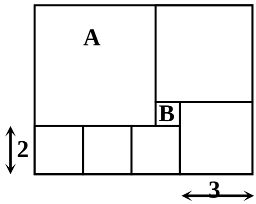


9.- Tenemos una torre formada por dos esferas y un cubo como indica la figura. La esfera de la base tiene un radio de 6 dm y el radio de la esfera pequeña es tres veces menor. La altura del cubo es 2 dm más que el diámetro de la esfera pequeña.¿Cuál es la altura de la torre?

A) 14 dm **B)** 20 dm **C)** 22 dm **D)** 24 dm **E)** 28 dm.

10.- Al sumar dos números diferentes escogidos entre 1, 2, 3, 4 y 5, ¿cuántos resultados distintos se pueden obtener?

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9.



11.- La figura que ves está formada por 7 cuadrados. A es el mayor y B el más pequeño. ¿Cuántos cuadrados del tamaño del B caben en el cuadrado A?

A) 16 **B)** 25 **C)** 36 **D)** 49

E) La figura es imposible.

12.- ¿Cuánto vale la fracción $\frac{2004+2004+2004+2004+2004}{2004+2004}$?

A) 2004 **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** 3 **D)** $\frac{5}{2}$ **E)** 6012.

13.- Pedro tiene 20 bolas de distintos colores: amarillas, verdes, azules y rojas. 17 no son verdes, 5 son rojas y 12 no son amarillas. ¿Cuántas bolas azules tiene Pedro?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 8 **E)** 15.

14.- En mi colegio se acaba de plantear una votación sobre el cambio de uniforme. De los 1516 votos sobre SÍ o NO, hubo 1162 más votos de los que dijeron SÍ que de los que dijeron NO. ¿Cuántos estudiantes votaron NO?

A) 344 **B)** 254 **C)** 177 **D)** 172 **E)** 127.

15.- Cuando escribo la fecha en el formato día / mes / año, observo que el 10 / 02 / 2001 y el 20 / 02 / 2002 eran capicúas, es decir, se leían igual al revés. ¿Cuál es la suma de las cifras de la fecha capicúa anterior al año 2000 y más cercana a ese año?

A) 26 **B)** 32 **C)** 16 **D)** 28 **E)** 30.

16.- El martes pasado 20 / 04 / 2004 a las 20 horas 4 minutos, me preguntaron:
- ¿Qué hora y día será dentro de 2004 minutos?
Si respondí correctamente, ¿cuál fue mi respuesta?

A) 05:10 del 22 / 04 / 2004 **B)** 05:28 del 22 / 04 / 2004

C) 20:37 del 22 / 04 / 2004 **D)** 20:28 del 21 / 04 / 2004 **E)** Nada de lo anterior.

17.- ¿Cuántos números enteros comprendidos entre 100 y 999 verifican que el producto de la cifra de sus unidades por la cifra de sus decenas, coincide con la cifra de sus centenas?

A) 18 **B)** 19 **C)** 21 **D)** 23 **E)** 25.

18.- Un rectángulo de dimensiones 1 cm y 9 cm tiene el mismo perímetro que un cuadrado de área:

A) 9 cm^2 **B)** 20 cm^2 **C)** 25 cm^2 **D)** 64 cm^2 **E)** 81 cm^2.

19.- Diez números consecutivos suman 95. ¿Cuál es el mayor de ellos?

A) 19 **B)** 15 **C)** 14 **D)** 10 **E)** 18.

20.- Los seis estudiantes de la lista adjunta son dos grupos de tres hermanos cada grupo. Cada uno tiene los ojos azules o marrones y el pelo negro o rubio. Los que son hermanos tienen al menos una de esas dos características en común. ¿Quiénes son los dos hermanos de Beatriz?

NOMBRE	COLOR DE OJOS	COLOR DEL PELO
Alicia	Azul	Negro
Beatriz	Marrón	Rubio
Carolina	Marrón	Negro
Darío	Azul	Rubio
Emilio	Azul	Negro
Fernando	Azul	Rubio

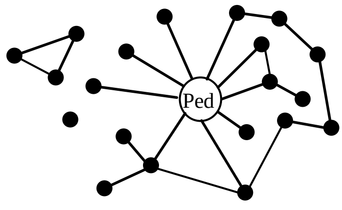
A) Carolina y Darío **B)** Alicia y Fernando **C)** Alicia y Darío

D) Carolina y Emilio **E)** Darío y Fernando.

21.- Estoy pensando en tres números enteros diferentes, todos menores que 10. ¿Cuál de los números siguientes no puede ser su suma?

A) 6 **B)** 15 **C)** 20 **D)** 24 **E)** 25.

22.- Cada uno de los puntos del diagrama representa un estudiante de la clase de Pedro. Aquellos que son amigos entre sí están conectados por un segmento. Para su cumpleaños, Pedro invita solamente a sus amigos y a aquellos que son amigos de al menos uno de sus amigos. ¿Cuántos estudiantes no fueron invitados al cumpleaños de Pedro?



A) 1 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7.

23.- Si seis gallinas ponen 100 huevos en 8 días, ¿cuántas gallinas harán falta para poner 200 huevos en 4 días?

A) 8 **B)** 12 **C)** 24 **D)** 36 **E)** 48.

24.- El área de un cuadrado de 4 cm de lado se expresa con el mismo número que su perímetro. ¿En cuál de los siguientes rectángulos ocurre lo mismo?

A) 3×4 **B)** 3×5 **C)** $3{,}5 \times 6$ **D)** $2{,}5 \times 10$ **E)** 3×10.

25.- Como sabes, una diagonal de un polígono es un segmento cuyos extremos son dos vértices no consecutivos del polígono, mientras que los lados, tienen como extremos dos vértices consecutivos. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de 12 lados?

A) 12 **B)** 24 **C)** 36 **D)** 40 **E)** 54.

VIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE Día 24 de abril de 2004

NIVEL II (1º y 2º de ESO)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ (☒) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA.**
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

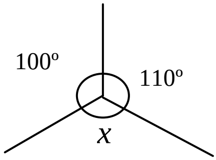
Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid

Ediciones S.M. y Grupo ANAYA

1.- ¿Cuál es la medida, en grados, del ángulo x?

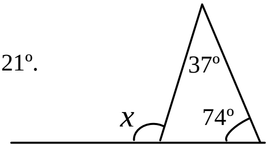


A) 120º **B)** 130º **C)** 140º **D)** 150º **E)** 160º.

2.- ¿Qué número de los siguientes es igual a 50?

A) $15 + 10 \times 2$ **B)** $\frac{100}{5}$ **C)** $2 \times (5 \times 10)$ **D)** $\frac{20+80}{10}$ **E)** $\frac{4(27-2)}{2}$.

3.- La medida del ángulo x de la figura es:



A) 74º **B)** 107º **C)** 111º **D)** 101º **E)** 121º.

4.- $\frac{20{,}04}{200{,}4}$ es igual a:

A) 0,01 **B)** 0,1 **C)** 1 **D)** 10 **E)**100.

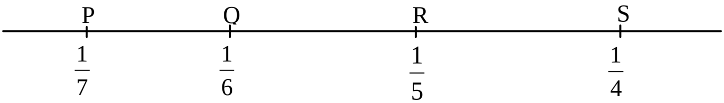
5.- Si $\frac{1}{4}$ de un número es 6, entonces los $\frac{3}{8}$ de ese número es:

A) 6 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 12 **E)** 15.

6.- Si dos lados de un triángulo miden 5 y 7 cm, el tercer lado no puede ser:

A) 11 cm **B)** 10 cm **C)** 6 cm **D)** 3 cm **E)** 1 cm.

7.- Sobre la recta que te mostramos, ¿dónde colocarías el número 0,12?



A) A la derecha de S **B)** Entre R y S **C)** Entre Q y R

D) Entre P y Q **E)** A la izquierda de P.

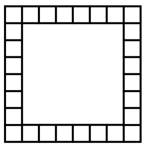
8.- Para hacer los 54 km que me separan de El Escorial tardo 45 minutos. ¿Qué velocidad media, en km/h, consigo en el recorrido?

A) 72 **B)** 60 **C)** 48 **D)** 75 **E)** 84.

9.- ¿Qué cifra ocupa el lugar 2004 después de la coma, en la expresión decimal de $\frac{3}{7}$?

A) 2 **B)** 8 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 1.

10.- Un cuadrado de 6 dm de lado lo rodeamos con cuadraditos de 1 dm de lado y resultan 28 cuadraditos como puedes observar en la figura.



¿Cuántos cuadraditos saldrían si el cuadrado grande en lugar de tener 6 dm de lado, tuviera 60 dm de lado?

A) 240 **B)** 244 **C)** 248 **D)** 264 **E)** 280.

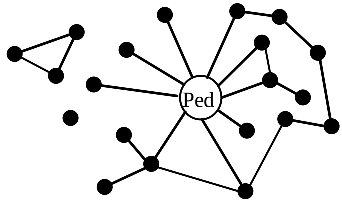
11.- Los seis estudiantes de la lista adjunta son dos grupos de tres hermanos cada grupo. Cada uno tiene los ojos azules o marrones y el pelo negro o rubio. Los que son hermanos tienen al menos una de esas dos características en común. ¿Quiénes son los dos hermanos de Beatriz?

	ALICIA	BEATRIZ	CAROLINA	DARÍO	EMILIO	FERNANDO
Ojos	Azul	Marrón	Marrón	Azul	Azul	Azul
Pelo	Negro	Rubio	Negro	Rubio	Negro	Rubio

A) Carolina y Darío **B)** Alicia y Fernando **C)** Alicia y Darío

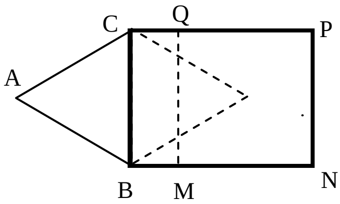
D) Carolina y Emilio **E)** Darío y Fernando.

12.- Cada uno de los puntos del diagrama, representa un estudiante de la clase de Pedro. Aquellos que son amigos entre sí están conectados por un segmento. Para su cumpleaños, Pedro invita solamente a sus amigos y a aquellos que son amigos de al menos uno de sus amigos. ¿Cuántos estudiantes no fueron invitados al cumpleaños de Pedro?



A) 1 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7.

13.- El área del triángulo equilátero ABC de la figura es $\sqrt{3}$. Si doblamos la figura por el segmento BC, el vértice A coincide con el centro del cuadrado MNPQ. ¿Cuál es el área del cuadrado MNPQ?



A) $3\sqrt{3}$ **B)** $\frac{5}{2}\sqrt{3}$ **C)** $2\sqrt{3}$

D) $2(\sqrt{3}+1)$ **E)** 4.

14.- Si n es un entero y $\frac{n}{24}$ está entre $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{4}$, n es igual a

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9.

15.- Si S es la suma de los restos de las divisiones de los números 1200, 1201, 1202, 1203, 1204 y 1205 entre 6, ¿cuál es el resto de la división de S entre 6?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 5.

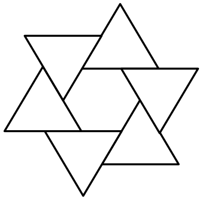
16.- En mi colegio se acaba de plantear una votación sobre el cambio de uniforme. De los 1516 votos sobre SÍ o NO, hubo 1162 más votos de los que dijeron SÍ que de los que dijeron NO. ¿Cuántos estudiantes votaron NO?

A) 344 **B)** 254 **C)** 177 **D)** 172 **E)** 127.

17.- Cuando escribo la fecha en el formato día / mes / año, observo que el 10 / 02 / 2001 y el 20 / 02 / 2002 eran capicúas, es decir, se leían igual al revés. ¿Cuál es la suma de las cifras de la fecha capicúa anterior al año 2000 y más cercana a ese año?

A) 26 **B)** 32 **C)** 16 **D)** 28 **E)** 30.

18.- El lado de cada uno de los triángulos equiláteros de la figura es el doble del lado del hexágono regular del centro. ¿Qué fracción del área total de los seis triángulos, representa el área del hexágono?



A) $\frac{1}{6}$ **B)** $\frac{1}{12}$ **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{2}{3}$.

19.- ¿Cuántos enteros positivos menores que 10.000 verifican que el producto de sus cifras es 84?

A) 24 **B)** 30 **C)** 42 **D)** 72 **E)** 84.

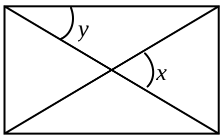
20.- En un concurso de televisión, un participante ha ganado 24.193 €. El presentador le propone redondear la suma. Para ganar la máxima cantidad de dinero, el concursante debe redondear:

A) A la decena más próxima **B)** A la centena más próxima
C) A la unidad de millar más próxima **D)** A la decena de millar más próxima
E) Todos los redondeos anteriores dan lo mismo.

21.- Cortamos por una recta una cuadrícula de 4 x 4 casillas. ¿Por el interior de cuántas casillas como máximo puede pasar esa recta?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8.

22.- ¿Qué relación hay entre los ángulos x e y de la figura?

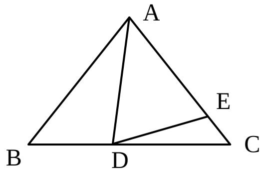


A) $x < y$ **B)** $x = y$ **C)** $2x = 3y$ **D)** $x = 2y$ **E)** $x = 3y$.

23.- El martes pasado 20 / 04 / 2004 a las 20 horas 4 minutos, me preguntaron:
- ¿Qué hora y día será dentro de 2004 minutos?
Si respondí correctamente, ¿cuál fue mi respuesta?

A) 05:10 del 22 / 04 / 2004 **B)** 05:28 del 22 / 04 / 2004

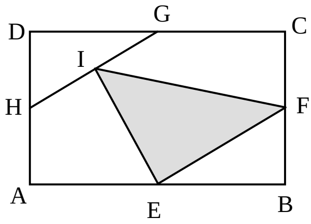
C) 20:37 del 22 / 04 / 2004 **D)** 20:28 del 21 / 04 / 2004 **E)** Nada de lo anterior.



24.- En el triángulo isósceles ABC de la figura, AB = AC y AD = AE y el ángulo $\angle BAD$ = 30º. ¿Cuánto mide el ángulo $\angle EDC$?

A) 10º **B)** 15º **C)** 20º

D) 25º **E)** 30º.



25.- En el rectángulo ABCD, los puntos E,F,G y H son los puntos medios de los lados. Si I es el punto medio del segmento GH, ¿qué fracción del área del rectángulo ABCD representa el área del triángulo EFI?

A) $\frac{5}{16}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{1}{5}$ **D)** $\frac{1}{6}$

E) $\frac{3}{8}$.

VIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE : Día 24 de abril de 2004

NIVEL III (3º y 4º de ESO)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ (☒) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA.**
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

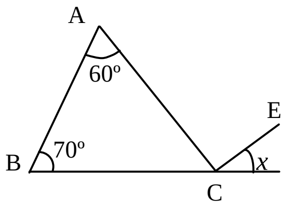
CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid

Ediciones S.M. y Grupo ANAYA



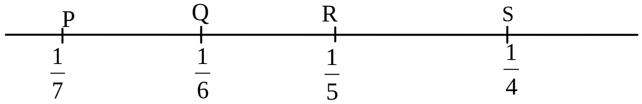
1.- Si las rectas AC y CE son perpendiculares, ¿cuánto mide el ángulo *x*?

A) 70º **B)** 60º **C)** 50º **D)** 40º **E)** 30º.

2.- Si dos lados de un triángulo miden 5 y 7 cm, el tercer lado no puede ser:

A) 11 cm **B)** 10 cm **C)** 6 cm **D)** 3 cm **E)** 1 cm.

3.- Sobre la recta que te mostramos, ¿dónde colocarías el número 0,12?



A) A la derecha de S **B)** Entre R y S **C)** Entre Q y R

D) Entre P y Q **E)** A la izquierda de P.

4.- Uno de los siguientes números nunca puede ser un entero par, sea cual fuere el valor del entero *n*. ¿Cuál es?

A) $2n$ **B)** $3n + 2$ **C)** $4n + 1$ **D)** $2(n - 1)$ **E)** $2(n + 1)^2$.

5.- Para hacer los 54 km que me separan de El Escorial tardo 45 minutos. ¿Qué velocidad media, en km/h, consigo en el recorrido?

A) 72 **B)** 60 **C)** 48 **D)** 75 **E)** 84.

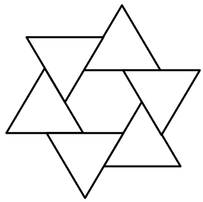
6.- Una lámina de cristal absorbe el 20 % de la luz roja que le llega, es decir, deja pasar el 80 %. ¿Cuántas láminas de cristal debo colocar como mínimo, una encima de otra, para que pase como mucho la mitad de la luz roja que les llegue?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7.

7.- ¿Qué cifra ocupa el lugar 2004 después de la coma, en la expresión decimal de $\frac{3}{7}$?

A) 2 **B)** 8 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 1.

8.- El lado de cada uno de los triángulos equiláteros de la figura es el doble del lado del hexágono regular del centro. ¿Qué fracción del área total de los seis triángulos, representa el área del hexágono?

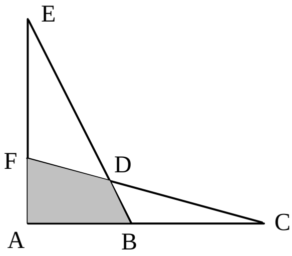


A) $\frac{1}{6}$ **B)** $\frac{1}{12}$ **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{2}{3}$.

9.- Cuando invertimos las cifras de un número de dos cifras, ninguna de ellas cero, obtenemos un número que es 36 unidades menor que el número original. ¿Cuál puede ser la suma de las cifras de ese número?

A) 4 **B)** 5 **C)** 12 **D)** 15 **E)** 18.

10.- En la figura adjunta, donde EA es perpendicular a AC, sabemos la medida de los siguientes segmentos: AB = 8 AC = 18 AE = 16 y AF = 6. ¿Cuál es el área del cuadrilátero ABDF sombreado?



A) 38 **B)** 24 □ **C)** 42 **D)** 20

E) 34.

11.- Uno de los números siguientes es 2^{100}. ¿Cuál?

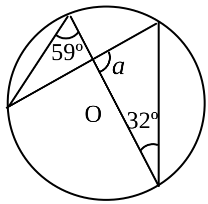
A) $4^5 \times 2^{10}$ **B)** La mitad de 2^{101} **C)** $16^5 \times 2^5$ **D)** $(2^3)^{97}$ **E)** $2^2 + 2^{98}$.

12.- El número de dos cifras (ab) es divisible por 7. Representamos por (ba) el número obtenido al permutar las cifras. De los siguientes números, I: $5b + a$ II: $3a + b$ III: (ba) + a, ¿cuáles son también divisibles por 7?

A) Solamente I y II **B)** Solamente II **C)** Solamente III

D) Los tres **E)** Solamente I y III.

13.- En el dibujo de la figura, que no está hecho a escala, O es el centro de la circunferencia. Cuánto mide el ángulo a?

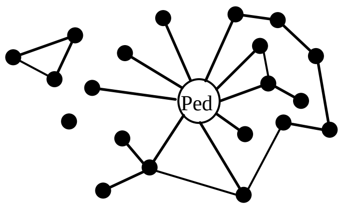


A) 89º **B)** 90º **C)** 91º **D)** 92º **E)** 93º.

14.- ¿Qué ángulo forman las agujas del reloj a las 4:20?

A) 0º **B)** 5º **C)** 8º **D)** 10º **E)** 12º.

15.- Cada uno de los puntos del diagrama, representa un estudiante de la clase de Pedro. Aquellos que son amigos entre sí están conectados por un segmento. Para su cumpleaños, Pedro invita solamente a sus amigos y a aquellos que son amigos de al menos uno de sus amigos. ¿Cuántos estudiantes no fueron invitados al cumpleaños de Pedro?



A) 1 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7.

16.- La probabilidad de que un entero del conjunto {1, 2, 3, ... , 100} sea divisible por 2 pero no sea divisible por 3 es:

A) $\frac{1}{6}$ **B)** $\frac{33}{100}$ **C)** $\frac{17}{50}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{18}{25}$.

17.- ¿Cuál es la suma de los inversos de las soluciones de la ecuación $\frac{2003}{2004}x+1+\frac{1}{x}=0$?

A) -1 **B)** $\frac{-2003}{2004}$ **C)** $\frac{2003}{2004}$ **D)** 0 **E)** 1.

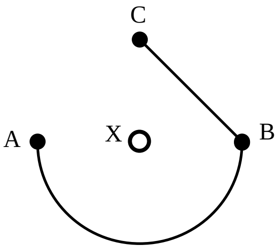
18.- Sea n un número de 5 cifras y q y r el cociente y el resto, respectivamente, de la división de n entre 100. ¿Para cuántos valores de n es $q+r$ divisible entre 11?

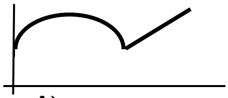
A) 8180 **B)** 8181 **C)** 8182 **D)** 9000 **E)** 9090.

19.- ¿Cuántos enteros comprendidos entre 1000 y 2000 son múltiplos de 15, 20 y 25?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5.

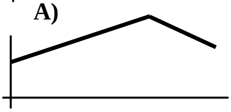
20.- Un barco navega del punto A hasta el punto B, describiendo una semicircunferencia centrada en una isla X. Luego navega en línea recta desde B a C. ¿Cuál de las siguientes gráficas muestra la distancia del barco a la isla, según la distancia recorrida?



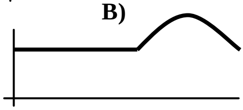


A)

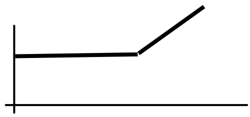
B)



C)



D)



E).

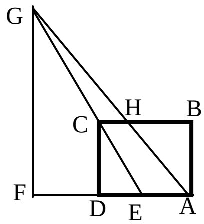
21.- Tenemos 5 cartas rojas numeradas del 1 al 5 y 4 cartas azules numeradas del 3 al 6. Las ponemos en fila sobre la mesa de forma que los colores se alternen y que el número de cualquier carta roja sea un divisor de los números de las cartas azules que tiene a ambos lados o a un solo lado si la carta roja es un extremo de la fila. ¿Cuánto vale la suma de los números de las tres cartas centrales?:

A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12.

22.- Si n es el mayor número que es producto de tres primos distintos, d, e, y $10d + e$ donde d y e son primos de una sola cifra, ¿cuánto vale la suma de las cifras de n?

A) 12 **B)** 15 **C)** 18 **D)** 21 **E)** 24.

23.- En el rectángulo ABCD con AB = 8 y BC = 9, tomamos los puntos H y E en los lados BC y DA respectivamente, siendo BH = 6 y DE = 4. Las rectas AH y EC se cortan en G y GF es perpendicular al lado AD. ¿Cuál es la longitud del segmento GF?

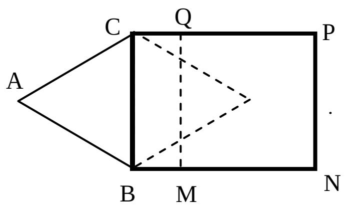


A) 16 **B)** 20 **C)** 24 **D)** 28 **E)** 30.

24.- $9^{20} + 9^{20} + 9^{20}$ es igual a:

A) 27^{20} **B)** 3^{66} **C)** 9^{60} **D)** 3^{41} **E)** 3^{120}.

25.- El área del triángulo equilátero ABC de la figura es $\sqrt{3}$. Si doblamos la figura por el segmento BC, el vértice A coincide con el centro del cuadrado MNPQ. ¿Cuál es el área del rectángulo BNPC?



A) $3\sqrt{3}$ **B)** $\frac{5}{2}\sqrt{3}$ **C)** $6(\sqrt{3}-1)$

D) $2(\sqrt{3}+1)$ **E)** 6.

VIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE : Día 24 de abril de 2004

NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ ($\boxed{\times}$) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA.**
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

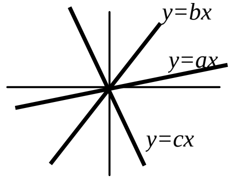
COLABORAN:

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Ediciones S.M. y Grupo ANAYA

1- Si dos lados de un triángulo miden 5 y 7 cm, el tercer lado no puede ser:

A) 11 cm **B)** 10 cm **C)** 6 cm **D)** 3 cm **E)** 1 cm.

2.- Para las tres rectas que se muestran en la figura, ¿qué desigualdades de las siguientes son verdaderas?



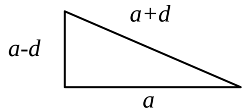
A) c < a < b **B)** b < c < a **C)** a < c < b

D) c < b < a **E)** a < b < c.

3.- $9^{20} + 9^{20} + 9^{20}$ es igual a:

A) 27^{20} **B)** 3^{66} **C)** 9^{60} **D)** 3^{41} **E)** 3^{120}.

4.- En el triángulo rectángulo de la figura el valor de d en función de a es:

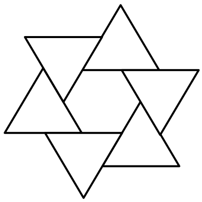


A) $\frac{3}{4}a$ **B)** $\frac{a}{2}$ **C)** $\frac{a}{3}$ **D)** $\frac{a}{4}$ **E)** $\frac{2}{3}a$.

5.- Si $\frac{4x-y}{4x+2y} = \frac{2}{5}$ entonces $\frac{4x+y}{4x-2y}$ es igual a:

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5.

6.- El lado de cada uno de los triángulos equiláteros de la figura es el doble del lado del hexágono regular del centro. ¿Qué fracción del área total de los seis triángulos, representa el área del hexágono?

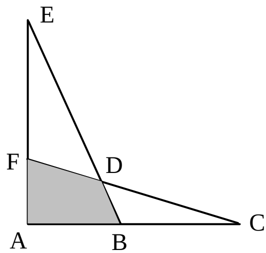


A) $\frac{1}{6}$ **B)** $\frac{1}{12}$ **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{2}{3}$.

7.- El menor entero positivo n para el que 10^n-1 es múltiplo de 63 es:

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8.

8.- En la figura adjunta, donde EA es perpendicular a AC, sabemos la medida de los siguientes segmentos: AB = 8 AC = 18 AE = 16 y AF = 6. ¿Cuál es el área del cuadrilátero ABDF sombreado?



A) 38 **B)** 24 □ **C)** 42 **D)** 20 **E)** 34.

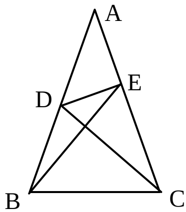
9.- Decimos que un número es "de libro" si es igual a la suma de un número de dos cifras diferentes y del número que se obtiene invirtiendo estas dos cifras. Por ejemplo: 143 es un número "de libro" porque 143 = 58 + 85. ¿Cuántos números "de libro" son cuadrados perfectos?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4.

10.- Sea n un número entero positivo impar. El mayor entero positivo k tal que $n^{12} - n^8 - n^4 + 1$ es divisible por 2^k sea cual fuere el impar n es:

A) 6 **B)** 7 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 12.

11.- En el triángulo ABC, los ángulos $\angle ABC = \angle ACB = 70^{o}$. Si D y E son puntos en AB y AC, respectivamente, tales que $\angle CBE = 55^{o}$ y $\angle BCD = 40^{o}$, el valor del ángulo $\angle ADE$ es:



A) 20º **B)** 25º **C)** 30º **D)** 35º **E)** 40º.

12.- ¿ Cuántos enteros menores que 10.000 verifican que el producto de sus cifras es 84?

A) 24 **B)** 30 **C)** 42 **D)** 72 **E)** 84.

13.- ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $\sqrt[3]{2x+14} - \sqrt[3]{2x-14} = \sqrt[3]{4}$?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 0.

14.- Sean d y e las soluciones de la ecuación $2x^2 + 3x + 5 = 0$.
¿Cuánto vale $(d - 1)(e - 1)$?

A) $-\frac{5}{2}$ **B)** 0 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 6.

15.- ¿Cuál es la probabilidad de que un divisor positivo de 60, elegido al azar, sea menor que 7?

A) $\frac{1}{10}$ **B)** $\frac{1}{6}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** $\frac{1}{2}$.

16.- Elegimos al azar un punto (x, y) del rectángulo de vértices (0, 0), (4, 0), (4, 1) y (0, 1). ¿Cuál es la probabilidad de que x sea menor que y?

A) $\frac{1}{8}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{3}{8}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{3}{4}$.

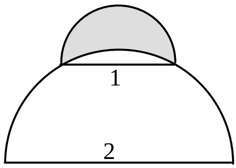
17.- La suma de tres números es 20. El primero es 4 veces la suma de los otros dos y el segundo es 7 veces el tercero. ¿Cuál es el producto de los tres?

A) 28 **B)** 40 **C)** 100 **D)** 400 **E)** 800.

18.- El perímetro de un triángulo equilátero coincide numéricamente con el área de su círculo circunscrito. ¿Cuánto mide el radio del círculo?

A) $\frac{3\sqrt{2}}{\pi}$ **B)** $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ **C)** $\sqrt{3}$ **D)** $\frac{6}{\pi}$ **E)** $\sqrt{3}\pi$.

19.- Un semicírculo de diámetro 1 está sobre otro de diámetro 2, como indica la figura. ¿Cuál es el área del trozo del semicírculo pequeño que está por encima del grande?



A) $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$ **B)** $\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{12}$ **C)** $\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{24}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{24}$ **E)** $\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{12}$.

20.- La parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ se refleja sobre el eje de abscisas. Desplazamos la parábola 5 unidades a la derecha y su reflejada 5 unidades a la izquierda, obteniendo así las gráficas de dos parábolas, $y = f(x)$, $y = g(x)$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones verifica la gráfica de $y = (f+g)(x)$?

A) Es una parábola tangente al eje de abscisas
B) Una recta paralela al eje OX
C) Una parábola no tangente al eje de abscisas
D) Una recta no paralela al eje OX
E) Es la gráfica de una cúbica.

21.- **Si** $a \geq b > 1$ el mayor valor posible de $\lg_a \frac{a}{b} + \lg_b \frac{b}{a}$ es:

A) -2 **B)** 0 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4.

22.- Sea a un número positivo. Considera el conjunto S de todos los puntos del plano cuyas coordenadas *(x, y)* satisfacen las condiciones siguientes

1) $\frac{a}{2} \leq x \leq 2a$ 2) $\frac{a}{2} \leq y \leq 2a$ 3) $x + y \geq a$ 4) $x + a \geq y$ 5) $y + a \geq x$

La frontera de S es un polígono de:

A) 3 lados **B)** 4 lados **C)** 5 lados **D)** 6 lados **E)** 7 lados.

23.- La suma de los cuadrados de todos los números reales que satisfacen la ecuación $x^{256} - 256^{32} = 0$ es:

A) 8 **B)** 128 **C)** 512 **D)** 65.536 **E)** 2×256^{32}.

24.- El menor entero k para el que la ecuación $2x(kx-4)-x^2+6=0$ no tiene raíces reales es:

A) -1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5.

25.- ¿Para cuántos enteros n se verifica que $(n+i)^4$ es un número entero?
Recuerda: i es la unidad imaginaria $i^2 = -1$

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4.

VIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (1ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**E**	1	**D**	1	**B**	1	**C**
2	**A**	2	**B**	2	**A**	2	**B**
3	**E**	3	**A**	3	**D**	3	**E**
4	**B**	4	**C**	4	**A**	4	**D**
5	**A**	5	**E**	5	**D**	5	**D**
6	**C**	6	**D**	6	**E**	6	**A**
7	**E**	7	**D**	7	**D**	7	**A**
8	**B**	8	**B**	8	**E**	8	**B**
9	**D**	9	**A**	9	**D**	9	**E**
10	**E**	10	**E**	10	**C**	10	**C**
11	**A**	11	**C**	11	**C**	11	**D**
12	**D**	12	**D**	12	**E**	12	**A**
13	**C**	13	**B**	13	**A**	13	**B**
14	**C**	14	**B**	14	**B**	14	**E**
15	**B**	15	**B**	15	**A**	15	**E**
16	**C**	16	**C**	16	**E**	16	**A**
17	**C**	17	**A**	17	**C**	17	**E**
18	**B**	18	**D**	18	**D**	18	**E**
19	**C**	19	**A**	19	**B**	19	**D**
20	**C**	20	**C**	20	**C**	20	**E**
21	**D**	21	**A**	21	**E**	21	**B**
22	**C**	22	**D**	22	**A**	22	**C**
23	**C**	23	**E**	23	**C**	23	**B**
24	**C**	24	**A**	24	**D**	24	**C**
25	**B**	25	**B**	25	**E**	25	**D**

TABLA DE SOLUCIONES (2ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**C**	1	**D**	1	**D**	1	**E**
2	**A**	2	**E**	2	**E**	2	**A**
3	**A**	3	**C**	3	**E**	3	**D**
4	**A**	4	**B**	4	**C**	4	**D**
5	**B**	5	**C**	5	**A**	5	**D**
6	**C**	6	**E**	6	**B**	6	**D**
7	**D**	7	**E**	7	**E**	7	**C**
8	**A**	8	**A**	8	**D**	8	**E**
9	**C**	9	**E**	9	**C**	9	**B**
10	**C**	10	**B**	10	**E**	10	**C**
11	**B**	11	**E**	11	**B**	11	**D**
12	**D**	12	**D**	12	**D**	12	**D**
13	**B**	13	**E**	13	**A**	13	**B**
14	**C**	14	**A**	14	**D**	14	**D**
15	**A**	15	**D**	15	**D**	15	**E**
16	**B**	16	**C**	16	**C**	16	**A**
17	**D**	17	**A**	17	**A**	17	**A**
18	**C**	18	**D**	18	**B**	18	**B**
19	**C**	19	**D**	19	**C**	19	**C**
20	**E**	20	**B**	20	**B**	20	**D**
21	**E**	21	**D**	21	**E**	21	**B**
22	**D**	22	**D**	22	**A**	22	**D**
23	**C**	23	**B**	23	**B**	23	**A**
24	**D**	24	**B**	24	**D**	24	**B**
25	**E**	25	**B**	25	**D**	25	**D**

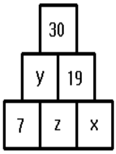
VIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase 1[er] Nivel

1. (E) Al redondear se obtiene el número 25000, por lo tanto cambio cinco cifras.

2. (A) El número cuyo cuadrado es 16 es 4, luego su raíz cuadrada es 2.

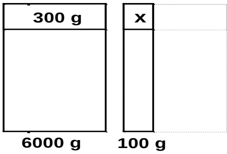
3. (E) Como el número de cada rectángulo es igual a la suma de los números de los dos rectángulos inmediatamente inferiores, podemos escribir:



30 = y + 19, luego y = 30 – 19 = 11
y = 7 + z , 11 = 7 + z, luego z = 11 – 7 = 4
19 = z + x, 19 = 4 + x, luego x = 19 – 4 = 15

Por lo que x – z = 15 – 4 = 11.

4. (B) Cambiamos las unidades a gramos y nos ayudamos con el esquema, donde x representa el porcentaje pedido. Basta ahora plantear la siguiente proporción:



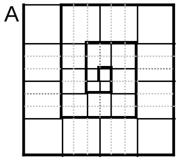
$\frac{300g}{6000g} = \frac{x}{100g}$ de donde $x = \frac{300 \times 100}{6000} = 5g$
luego el porcentaje es el 5 %.

5. (A) Sea el triángulo ABC. Si C = 40º entonces
A + B = 180º – 40º = 140º y la media es: $\frac{A+B}{2} = \frac{140^{\circ}}{2} = 70^{\circ}$

6. (C) Cambiando los km a metros y las horas a minutos vemos que recorro 12000 metros en 60 minutos, por lo tanto en un minuto recorreré 12000 m/60 = 200 m, es decir, voy a 200 metros por minuto.

7. (E) Efectuamos la resta $\begin{array}{r} 6\ a\ b \\ -b\ a\ 6 \\ \hline c\ d\ 7 \end{array}$ Encontramos que *b* debe ser necesariamente un 3 (tenemos que restar 6 de 13), por lo que a continuación tenemos que restar al número *a* su inmediatamente superior, lo que implica que *d* sea la cifra 9. Por último hay que restar 6 - 4, lo que hace *c* = 2 y *c* + *d* = 11 .

8. (B) Basta sumar la medida de cada uno de los 13 lados de la espiral. Si observamos la figura y comenzamos desde A, obtenemos:
12 + 12 + 12 + 9 + 9 + 6 + 6 + 4 + 4 + 2 +2 + 1 +1 = 80 dm.



9. (D) Los 10 000 primeros números positivos pares se obtienen sumando 1 a cada uno de los 10 000 primeros positivos impares, por lo tanto la suma de los 10 000 pares rebasará en 10 000 a la suma de los respectivos impares.

10. (E) Comprobamos que el menor de esos números (123, 234, 345,...) que es múltiplo de 8 es 456. Descomponiendo en factores primos obtenemos: $456 = 2^3 \times 3 \times 19$, por lo tanto es también múltiplo de 19.

11. (A) Se pide encontrar el máximo común divisor de los números 6^3 y 4^5 , pero como $6^3 = (2\times 3)^3 = 2^3 \times 3^3$ y $4^5 = (2^2)^5 = 2^{10}$, vemos que el mayor número que divide exactamente a los dos (el m.c.d.) es $2^3 = 8$.

12. (D) Construyendo una tabla con los números primos menores que 50 es fácil encontrar que sólo existen cuatro formas de obtener 50 como suma de dos primos, correspondiendo éstas a los números enlazados por los cuatro segmentos de la figura.

2	3	5	7	11	13	17	19
23	29	31	37	41	43	47	

13. (C) Todas las posibilidades son: $\frac{1}{11}$, $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $\frac{5}{7}$.

14. (C) Cambiando de unidad tenemos que 120 meses son igual a $\frac{120}{12} = 10$ años. Si las edades de los cinco osos son respectivamente A, B, C, D, E, entonces la edad media de los 5 es $\frac{A+B+C+D+E}{5} = 10$, de donde $A+B+C+D+E = 50$.

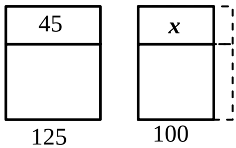
15. (B) Cambiando de unidad tenemos que 6 horas son igual a $6 \cdot 60 = 360$ minutos. Como gasta un tanque cada 90 minutos, para volar 360 minutos necesitará $\frac{360}{90} = 4$ tanques.

16. (C) La ley de la palanca nos dice que $1\overline{MB} = 3\overline{AM}$ y de la figura se deduce que $\overline{MB} = \overline{AB} - \overline{AM}$. Sustituyendo en la primera igualdad tenemos $\overline{AB} - \overline{AM} = 3\overline{AM}$, lo que implica $\overline{AB} = 4\overline{AM}$ y por lo tanto, $\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{4}{1}$.

17. (C) Sabiendo que 1 + 2 + … + 19 + 20 = 210 tenemos:
(1 + 2 + … + 19 + 20) + (21 + 22 + … + 39 + 40) =
= 210 + (20+1) + (20+2) + … + (20+19) + (20+20) =
= 210 + 20·20 + (1+2+…+19+20) = 210 + 400 + 210 = 820.

18. (B) Ayudándonos con la figura, en la que x representa el porcentaje pedido, planteamos la proporción:

$\frac{45}{125} = \frac{x}{100}$ de donde $x = \frac{45 \cdot 100}{125} = 36$



19. (C) Reescribiendo los dividendos como potencias de 10 más 1, podemos ver fácilmente la regla de formación de los cocientes; un número de nueves igual al exponente de 10 menos 1, un uno y el resto de las cifras ceros.

$(10^3 + 1) : 11 = 91$ (3-1):2 nueves y un uno.

$(10^5 + 1) : 11 = 9091$ (5-1):2 nueves, un uno y un cero.

$(10^7 + 1) : 11 = 909091$ (7-1):2 nueves, un uno y las demás cifras ceros.

Continuando con la regla de formación llegaríamos a:

$(10^{15} + 1) : 11 = 909090909091$ (15-1):2 nueves, un uno y el resto de las cifras ceros.

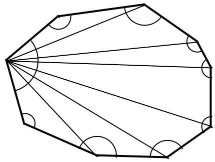
Por lo tanto la suma de las cifras es $\frac{15-1}{2} \times 9 + 1 = 64$.

20. (C) Entre las dos hacen $9000 + 3000 = 12000$ fotocopias en 3600 segundos, luego hacen $\frac{12000}{3600} = \frac{10}{3}$ fotocopias por segundo, por lo tanto, en sacar 1000 fotocopias tardarán

$$\frac{1000}{\frac{10}{3}} = 300 \text{ segundos.}$$

(de forma directa: si hacen 12000 f en 3600 s para hacer 1000 f se necesitarán....)

21. (D) Observando la figura se ve que la suma de los ángulos interiores es igual a la suma de de los ángulos de los 7 triángulos en que las diagonales dibujadas desde un único vértice dividen al polígono. Por lo tanto la suma de los ángulos interiores es igual a $7 \times 180^{\circ} = 1260^{\circ}$
(Aunque se ha empleado un polígono convexo, esta no es una condición necesaria)



22. (C) Dos de los cinco ángulos son rectos y los otros tres son iguales, estos están determinados por segmentos perpendiculares a lados de triángulos equiláteros, por lo tanto miden 60º o 120º. En este caso 120º.

23. (C) Necesita 300:18 = 16.666... días, luego tiene que hacer el recorrido en 17 días incluyendo el día 25, por lo tanto debemos restar 16 a 25.
Conclusión: debe salir el día 9.

24. (C) Partamos de que un compacto cueste x € y un cómic y €. Entonces las condiciones del problema nos llevan a plantear el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 5y + 2x < 15 \\ 3y + 4x > 12 \end{cases}$$

De la primera inecuación deducimos que $y < 3$, es decir $y = 1$ o $y = 2$.

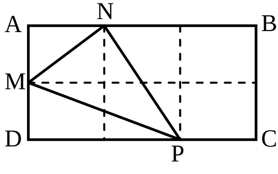
$$\text{Caso } y = 1 \begin{cases} 5 + 2x < 15 \Rightarrow 2x < 10 \Rightarrow x < 5 \\ 3 + 4x > 12 \Rightarrow 4x > 9 \Rightarrow x > \dfrac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow x = 3 \text{ ó } x = 4$$

En este caso "no cuestan lo mismo y al menos hay dos euros de diferencia"

$$\text{Caso } y = 2 \begin{cases} 10 + 2x < 15 \Rightarrow 2x < 5 \Rightarrow x < \dfrac{5}{2} \\ 6 + 4x > 12 \Rightarrow 4x > 6 \Rightarrow x > \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow x = 2$$

En este caso cuestan lo mismo.
Conclusión: "si no cuestan lo mismo, al menos hay dos euros de diferencia".

25. (B) Cada pequeño rectángulo tiene un área de $24 : 6 = 4\, dm^2$
El área del triángulo ANM es $4 : 2 = 2\, dm^2$
El área del triángulo DMP es $8 : 2 = 4\, dm^2$
El área del trapecio ANPD es $24 : 2 = 12\, dm^2$
El área del triángulo MNP es $24 - 2 - 4 - 12 = 6\, dm^2$



VIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase 2º Nivel

1. (D) $\dfrac{0,004}{80}=\dfrac{4}{80000}=\dfrac{1}{20000}=\dfrac{0,5}{10000}=0,00005$

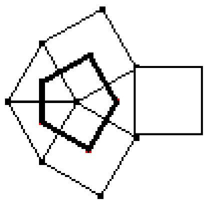
2. (B) Un número descompuesto en factores primos es cuadrado si los exponentes de sus factores primos son todos pares. Así:

$11\times22\times88\times99=11\times2\times11\times8\times11\times9\times11=11^4\times2^4\times3^2$ es cuadrado perfecto.

3. (A) $\begin{array}{r} a\,b\,c\,d\,1 \\ -\quad a\,b\,c\,d \\ \hline 1\,3\,7\,8\,9 \end{array}$, o lo que nos resulta más fácil de calcular: $\begin{array}{r} a\,b\,c\,d \\ +\ \ 1\,3\,7\,8\,9 \\ \hline a\,b\,c\,d\,1 \end{array}$, de

donde se obtiene que $d=2,\ \ c=3,\ \ b=5,\ \ a=1$

4. (C) Dos ángulos del pentágono (los menores) son claramente de 90º y los otros tres, que tienen sus lados perpendiculares a los lados de un ángulo de 60º, miden 120º ya que son obtusos.
Si queremos ver directamente este hecho, teniendo en cuenta que de los tres ángulos restantes dos son iguales y juntos deben sumar dos rectos, basta con añadir un cuadrado a la figura para observar que por simetría el tercero mide 120º.



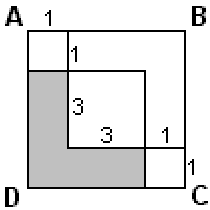
5. (E) Si $n\times(n+1)\times(n+2)$ debe superar y estar cerca de 2004, entonces $n+1$ debe ser parecido a la raíz cúbica de 2004, que está entre 11 y 12. ($12^3=1728$; $13^3=2197$).
Tanteamos los productos: $11\times12\times13=1716$; $12\times13\times14=2184$ y obtenemos la respuesta.
(Nada impide hacer el problema desde el principio por tanteo razonable, e incluso descartar resultados por divisibilidad).

6. (D) Ese prisma debe ser rectangular y recto, o sea en forma de caja de zapatos. Así su volumen será el producto de sus tres dimensiones. ¿De cuántas maneras podemos descomponer $36 = 2^2\times3^2$ en producto de tres naturales? Ordenamos por tamaño de factores:
$36\times1\times1$, $18\times2\times1$, $12\times3\times1$, $9\times4\times1$, $9\times2\times2$, $6\times6\times1$, $6\times3\times2$, $4\times3\times3$.

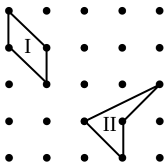
7. (D) Como cada uno tiene que tener tres caramelos me quedan tres por repartir. ¿Cómo descomponer 3 en suma de tres naturales de todas las formas posibles?
$0 + 0 + 3$ (tres formas cambiando el orden de los sumandos), $0 + 1 + 2$ (6 formas cambiando el orden de los sumandos) y $1 + 1 + 1$.

8. (B) 26 aprobaron, luego 10 suspendieron. Los $\frac{3}{5}$ de 10 son seis que obtuvieron un cuatro y así los cuatro restantes sacaron un 3. Estos últimos son $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$ del total y en un círculo le corresponderían $\frac{1}{9}$ de 360º, es decir 40º.

9. (A) El área sombreada es una diferencia de cuadrados, uno de lado cuatro y otro de lado tres, luego su área es $16 - 9 = 7$.



10.(E) Las áreas de los dos polígonos son iguales pues se pueden dividir ambos en dos triángulos de igual área cada uno (todos tienen una unidad de cuadrícula de base y una de altura). En cuanto al perímetro podemos ver que los lados del cuadrilátero I son dos "aristas" de la cuadrícula y dos diagonales, mientras que el II tiene dos diagonales, una arista y un lado oblicuo evidentemente más largo que una arista.



11.(C) $18 = 2\times3^2$, luego para obtener el menor múltiplo suyo que sea cubo perfecto, hay que añadirle multiplicando dos doses y un tres (hay que multiplicarlo por 12).

12.(D) Si la media de cuatro números es k, su suma es $4k$. Si al añadirle 40 la media de los cinco números es 14, la suma de los cinco es $70 = 4k + 40$, de ahí $k = 7{,}5$.

13.(B) Tenemos las siguientes relaciones:

	a	b	c
d	1		x
e	2	3	
f		4	16

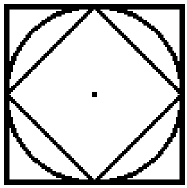
$a\times d=1 \quad c\times d=x$

$a\times e=2 \quad b\times e=3$

$b\times f=4 \quad c\times f=16$

Como quiero hallar $c\times d$, multiplico los productos que tienen los factores c y d, y luego divido para quitar las letras que me sobran por los productos que no han aparecido que las contienen, quedándome nuevas letras abajo. Multiplico por el producto que queda por intervenir y obtengo mi objetivo:

$$c\times d=\frac{c\times f\times a\times d\times b\times e}{b\times f\times a\times e}=\frac{16\times 1\times 3}{4\times 2}=6.$$

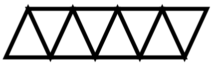


14.(B) El dibujo del cuadrado inscrito apoyado en los puntos medios del cuadrado circunscrito nos revela de repente la relación de áreas.

15.(B) Para ser múltiplo de 12 hay que serlo de 3 y de 4. Por la regla de divisibilidad por 4, la terminación del número debe ser 52 o 56. Por la regla de divisibilidad por 3 podemos tener los números: 252, 552 y 852, o 156, 456 y 756.

16.(C) Al final hemos pagado el 90 % del 90 % es decir el $\frac{90}{100}\times\frac{90}{100}=\frac{81}{100}=81\,\%$, luego la rebaja fue del 19%.

17.(A) Con la tira no podemos formar un octaedro. Al intentarlo la tira se nos enrolla formando un tetraedro de dos capas.



18.(D) De cada cubo que hemos pegado al original quedan al aire 5 caras. Luego la superficie de la cruz griega espacial tiene 30 caras. Su superficie es $30\times 1\ \text{dm}^2$ **.**

19.(A) $3000 = 3\times10^3 = 3\times2^3\times5^3$

$40\,000 = 4\times10^4 = 2^2\times2^4\times5^4 = 2^6\times5^4$

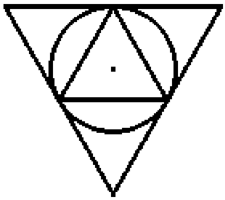
$2\,500\,000 = 25\times10^5 = 5^2\times2^5\times5^5 = 2^5\times5^7$

$9\,000\,000 = 9\times10^6 = 3^2\times2^6\times5^6$

el m.c.m. es $2^6\times5^7\times3^2 = 45\,000\,000$

20.(C) El circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita y el radio de ésta es la distancia del circuncentro a un vértice. Si cae en un lado ese segmento mide dos radios y por tanto es un diámetro. Así el ángulo del tercer vértice, inscrito en la circunferencia abarca media circunferencia y es por tanto recto.

21.(A) Dividendo = divisor × cociente más resto. D = d × 18 + 24, de donde D = (2 × d) × 9 + 24. La división entera es única, luego la última igualdad dice que al dividir D por (2 × d) sale cociente 9 y resto 24 (siempre que 24 sea un resto, es decir menor que 2 × d, lo que podemos asegurar porque 24 era menor que d).

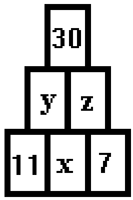


22.(D) Como en el problema 14 el dibujar el triángulo inscrito con los vértices en los puntos medios del circunscrito nos revela la relación de áreas.

23.(E) Podemos intentar resolver el problema por exclusión. Una ojeada nos dice que una posible solución sería que comics y compactos costaran 2 € cada uno. Eso excluye las soluciones A) y B). ¿Podría un compacto costar 3 € ? En ese caso, por la primera condición, los comics valdrían 1 €, y eso es compatible con la segunda condición. Luego C) no tiene por qué ser cierto. Hasta ahora las dos soluciones encontradas verifican D) y E). ¿Y costar un compacto 4 € ?. Podría ser, los compactos 4 € y los comics 1 €. Sólo nos queda E) y ya no hay más soluciones (salvo que los comics nos los regalen, lo cual no parece que se contemple en el enunciado, pero incluso en ese caso se cumpliría E)).

24.(A) Cada día que transcurre se acercan 42 km. Como entre los dos hasta el lugar de encuentro tienen que hacer 300 km, se encontrarán en el octavo día ya que 300 = 7 × 42 + 6, es decir el 8 de julio.

25.(B) 30 = y + z ;
y = 11 + x ;
z = x + 7 ;
Sumando primeros y segundos miembros y eliminando la suma y + z que aparece en los dos nos queda: 30 =18 + 2x, luego eso nos permite calcular x = 6, y en cadena z = 13, y = 17, por lo que y – z = 4.



VIII Concurso de Primavera de Matemáticas
1ª fase (3 de marzo de 2004) Nivel III (3º y 4º de ESO)

1. (B) Todos conocemos la importante relación de la división entera: $Dividendo = divisor \times cociente + resto$, que nos ayudará a resolver el problema. Si llamamos *n* al número en cuestión, sabemos que: $n = 7a + 2$, y al dividir 2004 entre 7 obtenemos que: $2004 = 7 \times 286 + 2$. Sumemos ahora 2004 al número dado y estudiemos qué ocurre:
$n + 2004 = 7a + 2 + 7 \times 286 + 2 = 7(a + 286) + 2 + 2 = 7(a + 286) + 4$, es decir, que el resto es 4 (la suma de los dos restos).
Hay que advertir que si la suma de los restos hubiese sido mayor o igual que 7, deberíamos haber restado 7 a dicha suma ya que nunca puede ser el resto 7 o más que 7.

2. (A) Recordemos primero que una regla para saber si un número era múltiplo de 11 es: "La suma de las cifras que ocupan lugar par menos la suma de las cifras que ocupan lugar impar, es 0 o múltiplo de 11". Además, como el número debe ser capicúa, la cifra de las centenas debe ser igual a la cifra de las unidades. Vamos con orden y encontramos todos los capicúas pedidos:
121 242 363 484 616 737 858 979 que hacen un total de ocho.

3. (D) Lo mejor es escribir esos números periódicos en forma de fracción. ¿Recuerdas cómo se hacía?
$2,\widehat{1} = \frac{21-2}{9} = \frac{19}{9}$ $1,\widehat{2} = \frac{12-1}{9}$
y ahora basta con restar esas fracciones: $\frac{19}{9} - \frac{11}{9} = \frac{8}{9} = 0,\widehat{8}$.

4. (A) Habrá que terminar de descomponer dichos números y calcular su *mcm* con cuidado. Como 10 = 2 × 5, los cálculos se facilitan bastante:
$3 \times 10^3 = 2^3 \times 3 \times 5^3$ $4 \times 10^4 = 2^6 \times 5^4$
$25 \times 10^5 = 2^5 \times 5^7$ $9 \times 10^6 = 2^6 \times 3^2 \times 5^6$
El *mcm* de dichos números será: $2^6 \times 3^2 \times 5^7 = 3^2 \times 5 \times 10^6 = 45 \times 10^6$

5. (D) Los casos posibles son 16 (4 por cada dado, hacen un total de $4 \times 4 = 16$), y de estos casos posibles los favorables son: (1,4) (2,3) (3,2) (4,1), es decir 4. Por tanto la probabilidad pedida es $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

6. (E) Recuerda que las raíces de un polinomio *P(x)* son los valores de *x* para los que se hace cero dicho polinomio, en otras palabras, son las soluciones de la ecuación $P(x)=0$. Resolvamos dicha ecuación con la archifamosa fórmula:

$$4x^2-48x+c=0 \rightarrow x=\frac{48\pm\sqrt{48^2-4\times4\times c}}{2\times4}=\frac{48\pm\sqrt{(16\times3)^2-16c}}{8}=$$

$$=\frac{48\pm\sqrt{16\times(144-c)}}{8}=\frac{48\pm4\sqrt{144-c}}{8}=6\pm\frac{\sqrt{144-c}}{2}$$ y sabemos que estos dos valores deben ser enteros, por tanto $\sqrt{144-c}$ debe ser entero y múltiplo de 2, y por tanto 144 – *c* debe ser el cuadrado de un número par. Y si pensamos un poco, vemos que eligiendo *c* negativo de manera adecuada, podemos conseguir soluciones tan grandes como queramos.

Un ejemplo para entenderlo mejor. Elijo un número par y lo elevo al cuadrado, por ejemplo $66^2=4356$, entonces busco c tal que $144-c=4356 \Rightarrow c=-4212$ y consigo dos soluciones enteras, y como esto puedo hacerlo para el cuadrado que quiera, pues la respuesta a este interesante problema es la E: puede ser cualquier número entero.

7. (D) ¿A que este problema recuerda al de los grifos que llenan una bañera? Claro, es el mismo. Había que calcular lo que llena cada grifo por unidad de tiempo…

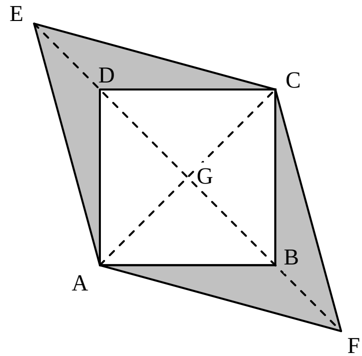
Como nos piden minutos, pasaremos las horas a minutos:

La primera fotocopiadora saca *m* fotocopias en 60 min, por tanto en 1 minuto saca $\frac{m}{60}$ fotocopias; y la segunda saca *m* fotocopias en 90 min, lo que indica que saca $\frac{m}{90}$ fotocopias en 1 minuto. Así pues, las dos juntas en 1 minuto sacan $\frac{m}{60}+\frac{m}{90}=\frac{3m+2m}{180}=\frac{5m}{180}=\frac{m}{36}$ fotocopias que es precisamente $\frac{1}{36}$ de las *m* fotocopias que necesitamos sacar. Por tanto para obtener m fotocopias tardarán 36 minutos.

8. (E) Siempre que te encuentres con un problema de *Mcd* y de *mcm*, ya sabes que es conveniente descomponer en factores primos:

$24=2^3\times3$ y $42=2\times3\times7$, entonces $Mcd(24,42)=2\times3$, por tanto *m* debe ser de la forma: $m=2\times3\times p$ siempre que $p\neq7$ para que todas las parejas tengan el mismo *Mcd*.

Por otra parte, 6 = 2 × 3 y 15 = 3 × 5, $mcm(6,15)=2\times3\times5$ y esto ya nos obliga a que *m* sea el número $m=2\times3\times5=30$



9. (D) Trazando el segmento *EF* y la diagonal *AC* del cuadrado, veremos todo más claro. El área que nos piden se obtiene al restar el área de esos dos triángulos iguales menos el área del cuadrado. El área del cuadrado es obviamente $1 \times 1 = 1$. El área del triángulo nos costará más: el lado *x* del triángulo es la diagonal del cuadrado que, con el teorema de Pitágoras, es fácil de hallar: $x^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$. Ahora tenemos que hallar la altura del triángulo equilátero, de nuevo ayudándonos del teorema de Pitágoras. Fijándonos en el triángulo rectángulo *AGF*, observamos que la hipotenusa es $AF = \sqrt{2}$ porque es un lado del triángulo equilátero; el cateto menor es la mitad, $AG = \frac{\sqrt{2}}{2}$ porque la altura de un triángulo equilátero coincide con la mediatriz; y el otro cateto es la altura *FG = y* que queremos hallar:

$$hip^2 = cat^2 + cat^2 \to \sqrt{2}^2 = y^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \to 2 = y^2 + \frac{1}{2} \to y^2 = \frac{3}{2} \to y = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

El área de cada uno de los dos triángulos equiláteros será:

$$Área = \frac{base \times altura}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3/2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

El área pedida vendrá del área de los dos triángulos menos el área del cuadrado:

$$2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \sqrt{3} - 1 .$$

10.(C) En el siglo V a.C. un matemático griego llamado Demócrito demostró que el volumen de un cilindro es el triple del volumen de un cono que tenga la misma base y la misma altura que el cilindro. (Lo mismo ocurre con el prisma y la pirámide). Así pues, según este resultado, el volumen del cilindro será el triple de 12, es decir 36 dm^3.

¿Y si no nos acordamos de esta propiedad? Tendremos que recordar las fórmulas del volumen de esos dos cuerpos:

$V_{cilindro} = \pi\ r^2\ h$ $\qquad$ $V_{cono} = \frac{\pi\ r^2\ h}{3}$ (*r* es el radio de la base y *h* la altura)

que es lo que ya decía Demócrito, el volumen del cono es justo la tercera parte del volumen del cilindro.

11. (C) Como $9^n = (3^2)^n = 3^{2n}$**,** vamos a averiguar cuántas veces aparece el factor 3 al multiplicar los primeros cincuenta números enteros positivos. Para ello buscaremos todos los múltiplos de 3 que hay en dichos números, pero ¡cuidado!, si también son múltiplos de 9 habrá que tener en cuenta que tienen más de un factor 3, así que los estudiaremos por separado:
50 : 3 = 16,666…, es decir hay 16 múltiplos de 3 en los primeros cincuenta enteros positivos.
50 : 9 = 5,555…, es decir hay 5 múltiplos de 9. Por tanto hay 16-5 = 11 múltiplos de 3 que no son múltiplos de 9, es decir ya tenemos seguro once treses en dicho producto.
Y ahora, lo mejor es estudiar uno a uno los múltiplos de 9 para ver cuántos treses tienen:

$9 = 3^2 \rightarrow$ tiene 2 treses $18 = 2 \cdot 3^2 \rightarrow$ tiene 2 treses

$27 = 3^3 \rightarrow$ tiene 3 treses $36 = 2^2 \times 3^2 \rightarrow$ tiene 2 treses

$45 = 3^2 \times 5 \rightarrow$ tiene 2 treses

Ya hemos terminado de contar los treses, en total hay 11+2+2+3+2+2 = 22, concluyendo, el producto de los cincuenta primeros enteros positivos será de la forma $3^{22} \times p$ donde p no es múltiplo de 3, o dicho de otra forma sólo tiene 22 treses, ni uno más, ni uno menos.
Y como la pregunta se refería a potencias de 9, vemos que:
$3^{22} = (3^2)^{11} = 9^{11}$, y la respuesta es 11.

12. (E) Recuerda que los números irracionales son los que no se pueden escribir en forma de fracción. Los irracionales más utilizados y conocidos son: π, e, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, el número áureo $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, …
Estudiemos las cinco opciones una a una, poniendo contraejemplos para desechar las incorrectas:
La A no vale ya que, por ejemplo, $a = \sqrt{5}$ es irracional y sin embargo $a^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$ es racional.
La B es más difícil de ver pero tal vez recuerdes una curiosa propiedad del número áureo $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ que aseguraba que $\phi^2 - \phi = 1$ y por tanto la B) tampoco vale. Aprovechemos para demostrar la propiedad dicha:

$$\phi^2 - \phi = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+5+2\sqrt{5}-2-2\sqrt{5}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

La C no es válida ya que, por ejemplo, $a = \sqrt{3}$ es irracional y en cambio $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{3}$ sí es racional.

La D tampoco sirve ya que $a = \sqrt{8}$ es irracional y $a \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$ es racional.

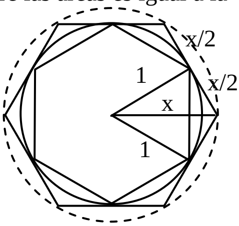
La respuesta correcta es la E.

13. (A) Elevaremos al cubo los extremos inferiores de las cinco posibles respuestas y veremos qué ocurre. Con un poco de vista vemos que:
$500^3 = 125000000$ que ya es mayor que 123456789, así pues las opciones B, C, D y E ya no son válidas. Asegurémonos de que la correcta es A:
$400^3 = 64000000 < 123456789 < 500^3 = 125000000$

14. (B) Ya sabemos que para resolver las ecuaciones bicuadradas hacemos el cambio $x^2 = t$ (por tanto $x^4 = t^2$ y $x = \sqrt{t}$) y transformamos la ecuación en otra de segundo grado (con incógnita *t*) que sabemos resolver con la fórmula. Es decir pasamos de $ax^4 + bx^2 + c = 0$ a la ecuación de segundo grado $at^2 + bt + c = 0$ cuyas soluciones son: $t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$ y como $a \times c$ es negativo, entonces $-4ac$ es positivo y por tanto, el discriminante ($b^2 - 4ac$) también es positivo (ya que es del tipo $b^2 + n$, con *n* positivo). Lo cual quiere decir que su raíz cuadrada, $\sqrt{b^2 - 4ac}$, existe y toma dos valores, el positivo (+) y el negativo (-). Y ahora observa que $\sqrt{b^2 - 4ac} > b$ ya que la raíz cuadrada de $b^2 + n$ es claramente mayor que *b*. Así pues, *t* tendrá dos valores, uno positivo y el otro negativo.
Pero recuerda que queremos encontrar *x* y sabíamos que $x = \sqrt{t}$, así pues el valor de *t* negativo no nos da ningún valor para *x* ya que la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real. Y para el valor positivo de *t*, obtendremos dos valores de *x*, uno con “más” y el otro con “menos”, ya que la raíz cuadrada de un positivo toma dos valores que son opuestos.
Así pues, la respuesta correcta es la B: dos raíces opuestas.

15. (A) Primero dibujamos la circunferencia exterior (la que circunscribe al hexágono mayor) para aclararnos. Podemos suponer que el radio de la circunferencia pequeña es 1 para facilitar cálculos. Ya sabemos que el lado de un hexágono mide lo mismo que el radio de la circunferencia en la que está inscrito (¿sabrías demostrarlo?).

Lo que haremos será calcular cuánto vale el lado del hexágono grande. Y con esto nos bastará porque también sabemos que la proporción entre las áreas es igual a la proporción entre los cuadrados de sus lados.



Así pues, el lado del hexágono pequeño vale 1 (igual que el radio de la pequeña). Llamando x al lado del hexágono mayor podemos aplicar el teorema de Pitágoras (porque siempre se cumple que la tangente y el radio que va al punto de tangencia son perpendiculares):

$$1^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 \rightarrow 1 + \frac{x^2}{4} = x^2 \rightarrow 1 = \frac{3x^2}{4} \rightarrow x = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Y ya está, la proporción entre sus áreas será la proporción entre los cuadrados de sus lados (el del inscrito y el del circunscrito) es $1^2 : \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{4}$

16. (E) Llamando x al precio de un cómic e y al precio de un compacto, podemos traducir las condiciones en dos inecuaciones:

$5x + 2y < 15$ (1ª inecuación)

$3x + 4y > 12$ (2ª inecuación)

Fijándonos en la 1ª inecuación vemos que x sólo puede tomar los valores 1 y 2 (a partir de 3 no vale porque ya no sería menor que 15). Razonando igual vemos que y sólo puede tomar los valores 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7.

Podemos formar una tabla de doble entrada con todos los posibles precios y eliminaremos los que no satisfagan alguna de las dos inecuaciones:

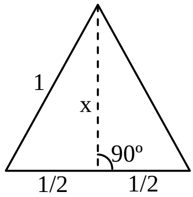
		Precio en euros de un comic	
		1	2
Precio en euros de un compacto	1	No cumple la 2ª	No cumple la 2ª
	2	No cumple la 2ª	Es válida
	3	Es válida	No cumple la 1ª
	4	Es válida	No cumple la 1ª
	5	No cumple la 1ª	No cumple la 1ª
	6	No cumple la 1ª	No cumple la1ª
	7	No cumple la 1ª	No cumple la 1ª

Así que sólo hay tres posibilidades:

Posibilidad 1	Posibilidad 2	Posibilidad 3
Precio compacto = 2 Precio cómic = 2	Precio compacto = 3 Precio cómic = 1	Precio compacto = 4 Precio cómic = 1

Analizando las cinco posibles respuestas concluimos que:
A) no es correcta porque pudiera ser que un comic y un compacto valieran lo mismo (Posibilidad 2).
B) no es correcta porque pudiera ser que un comic y un compacto valieran lo mismo (Posibilidad 2).
C) no es correcta porque pudiera ser que un compacto costase 4 euros (Posibilidad 3).
D) no es correcta porque pudiera ser que un compacto más un cómic costasen 5 euros (Posibilidad 3)
E) Esta sí se cumple: si no es la posibilidad 1, la diferencia es 2 ó 3 euros.

17.(C) Dicho decágono está compuesto por cuadraditos y triángulos equiláteros. Sumaremos todas sus áreas y el problema quedará resuelto. Como el área de cada cuadradito es 1 × 1 = 1 dm^2, la única pequeña dificultad consiste en calcular el área de un triángulo equilátero de lado 1 dm. Vamos con ello:



Primero necesitamos saber qué altura tiene un triángulo equilátero de lado 1, para ello trazamos la altura que cae perpendicularmente sobre la base y ya viene Pitágoras en nuestra ayuda:

$$hip^2 = cat^2 + cat^2 \rightarrow 1^2 = x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow x^2 = \frac{3}{4} \rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ dm}$$

El cateto menor vale $\frac{1}{2}$ porque, al ser equilátero, la altura coincide con la mediatriz. (Recuerda que para poder emplear el Teorema de Pitágoras es imprescindible que el triángulo sea rectángulo… y si no hay ese ansiado ángulo recto, habrá que conseguirlo trazando líneas auxiliares)
De esta forma, el área de cada triangulito será:

$$Área = \frac{base \times altura}{2} = \frac{1 \times \sqrt{3}/2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Y ya contestamos, el área pedida será la suma de las áreas de 4 cuadraditos más 8 triangulitos:

$$Área = 4 \times 1 + 8 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = 4 + 2\sqrt{3} \text{ dm}^2.$$

18. (D) Sabemos que el espacio, la velocidad y el tiempo se relacionan de esta manera: $e = v \times t \Rightarrow t = \frac{e}{v}$ Calculemos ahora cuánto tiempo tarda Pedro en llegar a

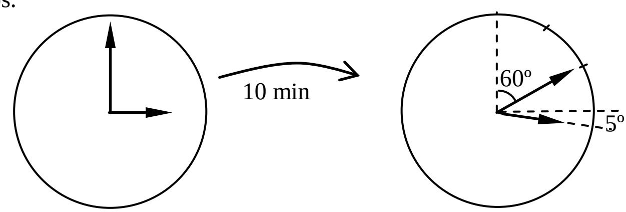
Santiago: $t=\frac{e}{v}=\frac{300\,km}{24\,km/d}=12{,}5$ días. Y ahora, atención, esto quiere decir que emplea 13 días (12 completos y la mitad del siguiente). Por tanto, Celia podrá tardar como mucho 13 días para coincidir con Pedro el mismo día (el 25 de julio). Así pues, Celia se encontrará como mucho a esta distancia de Santiago: $e=v\times t=18\,km/d\times 13d=234$ km.

19. (B) Repartir en proporción 5:4 significa que uno se lleva 5 partes y el otro 4, es decir, es como si dividiéramos en 9 partes y uno tomase 5 y el otro 4. A la cantidad total a repartir le llamamos $9x$ para facilitar operaciones. De esta manera, el primero recibe $5x$ y quedan $4x$ para repartir entre el segundo y el tercero.
Estas $4x$ se vuelven a dividir en proporción 5:4, es decir, el segundo se llevará $\frac{5\times 4x}{9}$ y el tercero $\frac{4\times 4x}{9}$. Y ya podemos formar la ecuación que nos resolverá el problema:

$$\frac{4\times 4x}{9}=5x-290\Rightarrow 16x=45x-2610\Rightarrow 29x=2610\Rightarrow x=90$$

Por tanto el segundo recibe $\frac{5\times 4x}{9}=\frac{5\times 4\times 90}{9}=200$ euros.

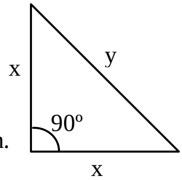
20. (C) Estudiemos los ángulos que recorren el minutero y la aguja de las horas cuando pasan 10 minutos.



El minutero recorre $\frac{360^{\circ}}{60}=6^{\circ}$ por minuto, por tanto en 10 minutos avanza 60º.
La aguja de las horas recorre 30º cada por cada hora (60 minutos), en consecuencia, barre $\frac{30^{\circ}}{6}=5^{\circ}$ en 10 minutos. Y mirando un reloj o el dibujo, se ve claro que las agujas forman ahora un ángulo de 35º ya que el ángulo que queda entre el minutero y la marca de las tres es de 30º.

21. (E) En los triángulos rectángulos podemos elegir un cateto como base y el otro como altura ya que los catetos forman un ángulo de 90º.

Además, en este caso los catetos miden lo mismo por ser isósceles. Llamando x a la longitud de los catetos tenemos que:



$$\acute{A}rea = 4 = \frac{base \times altura}{2} = \frac{x \times x}{2} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \sqrt{8} \text{ cm.}$$

Ya sólo queda hallar la hipotenusa (y) ayudándonos del teorema de Pitágoras:

$$(\sqrt{8})^2 + (\sqrt{8})^2 = y^2 \Rightarrow 16 = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{16} = 4 \text{ cm.}$$

Así pues el perímetro será la suma de estas tres longitudes:

$$4 + \sqrt{8} + \sqrt{8} = 4 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4 + 4\sqrt{2} = 4(1 + \sqrt{2}) \text{ cm.}$$

22. (A) Como la hipótesis es “si m no es primo”, debemos rechazar las opciones C y E ya que 13 y 23 sí son primos. Estudiemos las restantes: “… entonces m-2 tampoco es primo”:
A: 9 no es primo y 9 – 2 = 7 sí es primo.
B: 12 no es primo y 12 – 2 = 10 tampoco es primo.
D: 16 no es primo y 16 – 2 = 14 tampoco es primo.
Por tanto, A es falsa y es nuestra respuesta buscada.

23. (C) Llamamos a, b, c y d a los números desconocidos y traducimos las pistas al lenguaje algebraico, obteniendo un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a+b+c}{3} + d = 17 \\ \frac{a+b+d}{3} + c = 21 \\ \frac{a+c+d}{3} + b = 23 \\ \frac{b+c+d}{3} + a = 29 \end{array}\right\}$$ lo arreglamos un poquito y ya no nos asustará tanto:

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c+3d = 51 \\ a+b+3c+d = 63 \\ a+3b+c+d = 69 \\ 3a+b+c+d = 87 \end{array}\right\}$$ y lo resolvemos con el método de reducción.

Eliminaremos la incógnita d de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{l} E_4 - E_3 \\ E_4 - E_2 \\ 3E_4 - E_1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2a - 2b = 18 \\ 2a - 2c = 24 \\ 8a + 2b + 2c = 210 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} a - b = 9 \\ a - c = 12 \\ 4a + b + c = 105 \end{array}\right\}$$ y ya es facilísimo…

despejamos b y c en las dos primeras ecuaciones y sustituimos en la última. La solución es $a = 21$, $b = 12$, $c = 9$, $d = 3$.
El mayor de los cuatro números es 21.

24. (D) Si a cada uno le tengo que dar por lo menos 3 caramelos, esto hace un total de 9 caramelos (3 para cada uno) y, por tanto, ya solo me quedan 3 caramelos para repartir. Veamos de cuántas formas puedo repartir 3 caramelos entre tres personas. Con cuidado y siguiendo un orden, encontramos las siguientes maneras de hacer el reparto:

A: (3 +)	0	0	0	0	1	1	1	2	2	3
B: (3 +)	0	1	2	3	0	1	2	0	1	0
C: (3 +)	3	2	1	0	2	1	0	1	0	0

Hay diez maneras.

25. (E) Estudiemos la relación que hay entre a y b:

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{a} + \frac{b}{5} \Rightarrow \frac{a}{10a} = \frac{10}{10a} + \frac{2ab}{10a} \Rightarrow a = 10 + 2ab \Rightarrow a - 2ab = 10 \Rightarrow a(1-2b) = 10$$

Como a y b son enteros, estudiemos las posibles parejas para que el producto de a y $(1 - 2b)$ sea 10. Y calculemos b en los casos que sea posible:

a	$1 - 2b$	b	
1	10	$\frac{-9}{2}$	**No** vale
-1	-10	$\frac{11}{2}$	**No** vale
2	5	-2	**Sí** vale
-2	-5	3	**Sí** vale
5	2	$\frac{-1}{2}$	**No** vale
-5	-2	$\frac{1}{2}$	**No** vale
10	1	0	**Sí** vale
-10	-1	1	**Sí** vale

Así pues, obtenemos 4 parejas enteras válidas para (a, b): (2,-2); (-2,3); (10,0) y (-10, 1).

VIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase 4º Nivel

1. (C) En la ecuación $ax^6 + bx^3 + c = 0$, obtenemos para $x^3 = t$ las dos raíces distintas que tiene la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Así pues al hacer la raíz cúbica a cada una de ellas obtenemos dos raíces reales distintas para x por lo que la solución es C.

2.(B) Llamando r al radio de la base común, g a la generatriz del cono y g a la altura del cilindro, tenemos que: Área lateral cono = πrg; Área lateral cilindro = $2\pi rg$; por lo que la proporción es $\frac{1}{2}$ y la respuesta es B.

3.(E) Escribiendo la fracción generatriz del numerador y la del denominador, tenemos que $0,\widehat{02} = \frac{2}{99}$ y $0,0\hat{2} = \frac{2}{90}$ por lo que el cociente pedido es $\frac{90}{99} = 0,\widehat{90}$ que corresponde a la respuesta E.

4.(D) El número $n^3m - nm^3$, es decir $nm(n^2 - m^2) = nm(n + m)(n - m)$ tiene al menos 1 factor par ya que si tanto n como m son impares resultaría que tendría dos factores pares: $n + m$ y $n - m$, así que al menos es múltiplo de 2. Pero como si ni m ni n son múltiplos de 3, ambos tienen que dar o bien el mismo resto o bien restos 1 y 2 al dividirlos entre 3, resulta que o bien $n - m$ o bien $n + m$ son múltiplos de 3 por lo que nuestro número será múltiplo de 6. El resultado obviamente no es mejorable como muestra el caso $n = 2$, $m = 1$.

5.(D) Escribiendo el tercer factor como $\sqrt{10} + \left(\sqrt{5} - \sqrt{17}\right)$, el cuarto como $\sqrt{10} - \left(\sqrt{5} - \sqrt{17}\right)$ y agrupando los dos primeros y los dos últimos, tenemos que el número pedido es $A = \sqrt{\left(\left(\sqrt{5} + \sqrt{17}\right)^2 - 10\right)\left(10 - \left(\sqrt{5} - \sqrt{17}\right)^2\right)} =$

$= \sqrt{\left(12 + 2\sqrt{85}\right)\left(-12 + 2\sqrt{85}\right)} = \sqrt{4 \times 85 - 12^2} = \sqrt{4(85 - 6^2)} = \sqrt{4 \times 49} = 14 \cdot$

6.(A) El número $abc - cba = 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 99(a - c)$. Si queremos que $99(a - c)$ acabe en 7, $a - c$ debe ser 3 y esta diferencia se obtiene para 6 parejas (a, c) pues nos dicen que $c \neq 0$, en concreto: c de 1 a 6 y a de 1 a 9. Como cada pareja puede ir acompañada por cualquier dígito b, sigue que la cantidad de números abc que verifique la condición pedida es $6 \times 10 = 60$ y la respuesta es A.

7.(A) Si llamamos b y c a los catetos y a la hipotenusa, tenemos que $bc = ha \Rightarrow$

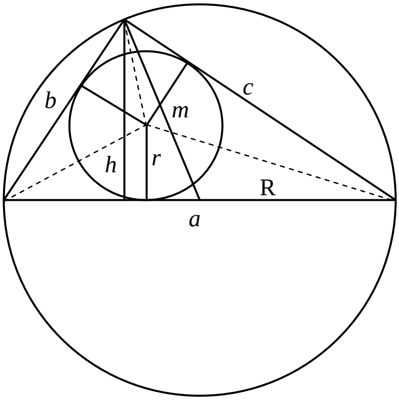
$h = \dfrac{bc}{a}$, racional.

$m = \dfrac{a}{2}$, racional.

$R = \dfrac{a}{2}$, racional.

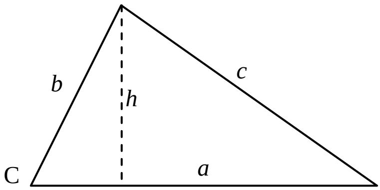
$$\frac{ar + br + cr}{2} = A = \frac{bc}{2} \Rightarrow$$

$r = \dfrac{bc}{a+b+c}$, racional.



Así pues todas estas medidas son racionales y la respuesta es A.

8.(B) Si escribimos el área en función de dos lados y el ángulo formado, como pretende la opción B, resulta que ésta es $\frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \hat{C}$ y no lo que dice dicha opción, luego la respuesta es B.



9.(E) La primera parábola es

$y = a\left(x^2 - \dfrac{4}{a}x + \dfrac{5}{a}\right) = a\left[\left(x - \dfrac{2}{a}\right)^2 - \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{5}{a}\right]$ por lo que su vértice será el punto de abscisa $\dfrac{2}{a}$ y ordenada $a\left(-\dfrac{4}{a^2} + \dfrac{5}{a}\right) = \dfrac{-4}{a} + 5$.

La segunda tiene como ecuación $y =$ $y = b\left(x^2 - \dfrac{8}{b}x + \dfrac{7}{b}\right) = b\left[\left(x - \dfrac{4}{b}\right)^2 - \dfrac{16}{b^2} + \dfrac{7}{b}\right]$

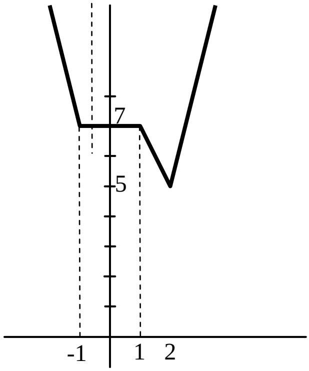
de donde se deduce que su vértice tiene de abscisa $\dfrac{4}{b}$ y ordenada $-\dfrac{16}{b} + 7$.

Como ambos vértices son el mismo punto, sigue que $\dfrac{2}{a} = \dfrac{4}{b}$ y $-\dfrac{4}{a} + 5 = -\dfrac{16}{b} + 7$.

Así pues $a = 2$ y $b = 4$, siendo entonces E la respuesta.

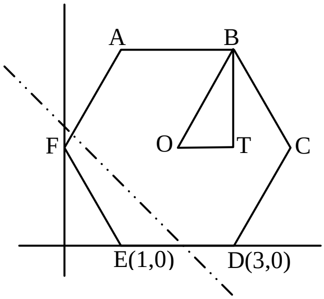
10. (C) Las posibles descomposiciones de 40 en producto de 3 enteros positivos nos lleva a $40 = 40 \times 1 \times 1 = 20 \times 2 \times 1 = 10 \times 4 \times 1 = 5 \times 4 \times 2 = 5 \times 8 \times 1$ por lo que la caja más parecida al cubo, que sería la de menor superficie, es la de dimensiones 5,4 y 2 que tiene por área total $2\,(5 \times 4 + 5 \times 2 + 4 \times 2) = 2 \times 38 = 76$ dm^2 siendo la respuesta C.

11. (D) La función dada la podemos poner en la forma $f\,(x) = 2\,|x + 1| - |x - 1| + 3\,|x - 2|$ y parece razonable pensar que el valor mínimo se va a alcanzar cuando el sumando que más aporte, $3\,|x - 2|$, no aporte nada, es decir, en $x = 2$ valor al que corresponde $f\,(2) = 5$. En cualquier caso una confirmación de esta conjetura viene dada por el hecho de que funciones de este tipo tienen que alcanzar sus máximos o mínimos absolutos, si existen, en los puntos que anulen algún sumando, pues fuera de esos puntos son segmentos rectilíneos o semirrectas en las que para cualquier supuesto mínimo hay uno menor.



Así pues, como $f\,(-1) = 7$ y $f\,(1) = 7$ el mínimo se alcanza en $f\,(2) = 5$ y la respuesta es D.

12. (A) Barriendo la región con las rectas $x + y = k$, observamos que el valor máximo para k se alcanza en el vértice B pues la arista BC está más vertical que las rectas $x + y = k$. Para calcular la ordenada de B, basta observar el triángulo rectángulo OBT de la figura del que deducimos que $tg\,60^{o} = \sqrt{3} = \dfrac{BT}{OT} = \dfrac{BT}{1}$ por lo que $BT = \sqrt{3}$ y el punto B tendrá de coordenadas $(3,\, 2\sqrt{3})$ siendo entonces, $x + y = 3 + 2\sqrt{3}$ y la respuesta A.



13. (B) La inclinación pedida viene dada por la función $f'(x) = 1 + \cos x$ que es máxima cuando $\cos x = 1$ siendo la pendiente de la tangente en ese caso igual a $1 + 1 = 2$ y la respuesta B.

14. (E) $\sqrt{21+20i} = a + bi$ con $a^2 - b^2 = 21$ y $2ab = 20$, es decir, $(a + b)\,(a - b) = 21$, $ab = 10$ por lo que $a = \pm 5$ y $b = \pm 2$ siendo pues la respuesta 5, E.

15. (E) Llamado c al precio de un comic y d al de un compacto, tenemos que

$$\left.\begin{array}{l}5c+2d<15\\3c+4d>12\end{array}\right\}$$ Por la primera ecuación, c debe ser 1 ó 2.

Si $c = 1$, $\begin{array}{l}2d<10\\4d>9\end{array}$ por lo que $2 < d < 5$, así que $d = 3$ ó 4

Si $c = 2$, $\begin{array}{l}2d<5\\4d>6\end{array}$ por lo que $2 \le d < 3$, de donde $d = 2$.

Así pues, o cuesta lo mismo o hay una diferencia de al menos 2 euros y la respuesta es E.

16. (A) Despejando x en función de y, obtenemos $y\,(x - 2) = 5x + 3$, de donde $x\,(y - 5) = 3 + 2y$ por lo que $x = \dfrac{3+2y}{y-5}$ y la función inversa de la dada será, pues, la función $y = \dfrac{3+2x}{x-5}$, es decir, la respuesta es A.

17. (E) Si $x = 3$, el determinante vale 0 pues las dos primeras filas serán iguales. Si $x = 5$, el determinante también vale 0 pues las dos últimas filas serán iguales, y, finalmente, si $x = -8$ resulta que $C_3 = -C_1 - C_2$, así que también valdrá 0, por lo que 5, 3 y -8 anulan dicho determinante, que será, entonces, igual a $(x + 8)\,(x - 3)\,(x - 5)$ siendo E la respuesta.

18. (E) Como toda cúbica tiene un punto de inflexión, la abscisa de éste anulará la segunda derivada, por lo que, al ser $y'' = 6x + 6$, ésta se anula en $x = -1$, siendo entonces la ordenada de dicho punto $(-1)^3 + 3(-1)^2 + 2(-1) + 1 = 1$ y la respuesta es E.

19. (D) Esta curva no tiene asíntotas verticales ni horizontales, de donde sigue que la asíntota buscada será oblicua, $y = mx + n$ siendo

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\text{lím}_{x\to\infty}\sqrt{\frac{4x^2+8x-1}{x^2}}=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+8x-1}-2x)=\text{lím}_{x\to\infty}\frac{4x^2+8x-1-4x^2}{\sqrt{4x^2+8x-1}+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{8x-1}{\sqrt{4x^2+8x-1}+2x}=$$

$$=\text{lím}_{x\to\infty}\frac{8-\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{8}{x}-\frac{1}{x^2}}+2}=2$$ y la respuesta será D.

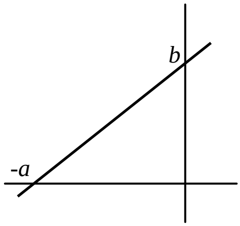
20. (E) Como $x = 5 - 4y$, hay que hallar el máximo de $16y\,(5 - 4y) = 80y - 64y^2 = f\,(y)$. Al tratarse de una parábola enfocada hacia arriba, el máximo es la ordenada de su vértice, siendo la abscisa el número y tal que $f\,'(y) = 80 - 128y = 0$, es decir $y = \frac{5}{8}$, por lo que el valor pedido es $80 \times \frac{5}{8} - 64 \times \frac{25}{64} = 25$ y la respuesta es E.

21. (B) Si $3^{x+3} = 135$, entonces $27 \times 3^x = 135$, es decir, $x \times \log 3 = \log 5$, de donde $x = \frac{1 - \log 2}{\log 3}$ que es aproximadamente $\frac{0{,}70}{0{,}48} = 1{,}46$ por lo que la respuesta es B.

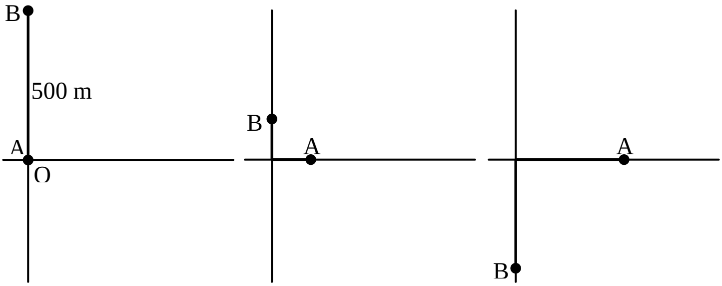
22. (C) Se trata de los números a, $a + 1$, y $a\,(a + 1)$ por lo que

$D = a^2 + (a + 1)^2 + a^2\,(a + 1)^2$ y como $a^2 + (a + 1)^2 = 2a\,(a + 1) + 1$, resulta que $D = 1 + 2a(a+1) + [a(a+1)]^2$, es decir $D = (a(a+1)+1)^2$ con lo que $\sqrt{D}$ es, siempre el número $a\,(a + 1) + 1$ que, sea cual fuere el entero a, es un número impar, siendo entonces la respuesta C.

23. (B) Si el área del triángulo de la figura es T, el número positivo b viene dado por $ab = 2T$, es decir, $b = \frac{2T}{a}$ con lo que la recta dada será $\frac{-x}{a} + \frac{ya}{2T} = 1$, es decir, $a^2y - 2Tx = 2aT$ o lo que es lo mismo $2Tx - a^2y + 2aT = 0$ y la respuesta es B.



24. (C) Llamando V_A y V_B a las velocidades de A y B respectivamente, podemos escribir que $500 - 2V_B = 2V_A$ y que $10V_B - 500 = 10V_A$. Así pues $V_A + V_B = 250$ y $V_B - V_A = 50$ de donde $V_B = 150$, $V_A = 100$ y el cociente pedido es: $\frac{100}{150} = \frac{2}{3}$, siendo la respuesta C.



25. (D) Si $z = r$ (cos $\theta + i$ sen θ), entonces $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\left(\cos(-\theta) + i \text{ sen } (-\theta)\right)$, es decir, $\frac{1}{r}$ (cos $\theta - i$ sen θ) por lo que $z + \frac{1}{z} = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + \left(r - \frac{1}{r}\right) i sen\theta$ que será igual a 2 cos θ sólo si $r = 1$, pues sen $\theta \neq 0$ ya que $0 < \theta < \pi$.

Así pues, $z^n = \cos n\theta + i$ sen $n\theta$ y $\frac{1}{z^n} = \cos n\theta - i$ sen $n\theta$, con lo que la suma pedida será igual a 2 cos $n\theta$ y la respuesta será D.

VIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase 1er Nivel

1. (C) Excepto la respuesta A, que es 6, el resto de respuestas valen 0. El mayor valor es 8.

2. (A) El azul es el color que corresponde a todos los "múltiplos de cuatro más uno".

3. (A) Hay trece números enteros comprendidos entre 2,09 y 15,3 (15 – 3 + 1).

4. (A) $9 \times 100 + 9 \times 10 + 10 \times 1 = 900 + 90 + 10 = 1000$

5. (B) $Y = 55 - 11 - 14 - 2 - 13 - 7 = 8$. $X = 55 - 2 \times 9 - 2 \times 8 - 11 = 10$

6. (C) 12 es el mínimo común múltiplo de 2, 3 y 4

7. (D) El lado del cuadrado mediano es 9 y la altura del rectángulo es 18 : 9 = 2. El lado del cuadrado grande es 9 + 2 = 11

8. (A) La máxima suma, que es 24, corresponde a las 19:59.

9. (C) El diámetro de la esfera de la base es 12 dm, el de la esfera pequeña es 4 dm, y el lado del cubo es 6 dm. En total 22 dm.

10. (C) Aunque hay diez posibles sumas de dos sumandos diferentes, tres de ellas tienen el resultado repetido. Por tanto hay sólo 7 resultados.

11. (B) El cuadrado A tiene lado 5, mientras que el B tiene lado 1. En el cuadrado A caben 25 cuadrados como el B.

12. (D) $\dfrac{2004+2004+2004+2004+2004}{2004+2004} = \dfrac{5 \times 2004}{2 \times 2004} = \dfrac{5}{2}$

13. (B) Si 17 no son verdes, hay 3 verdes; además hay 5 rojas, y como 12 no son amarillas, debe haber 4 azules y 8 amarillas.

14. (C) (1516 – 1162) : 2 = 177

15. (A) La fecha capicúa anterior a 2000 y más próxima a dicho año es 29 / 11 / 1192.

16. (B) 2004 minutos son 1 día, 9 horas y 24 minutos. Desde el 20/04/2004 a las 20 horas 04 minutos cuando transcurran 2004 minutos serán las 05:28 del 22/04/2004.

17. (D) 17 corresponden a productos de $1\times z$ ($z = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$) dos de cada uno excepto con $z = 1$ que sólo hay uno. Hay otros 6 que corresponden a:
2×3 (son 2); 2×4 (son otros 2); 2×2 (uno) y 3×3 (uno).

18. (C) El rectángulo tiene perímetro 20 cm. Si el cuadrado tiene el mismo perímetro, su lado es 5 cm, y su área es 25 cm^2.

19. (C) Si los diez números consecutivos suman 95, los dos centrales suman 95 : 5 = 19, por lo que son 9 y 10. El mayor es 14 y el menor 5.

20. (E) Alicia y Emilio no pueden ser hermanos de Beatriz. Por otro lado, Carolina y Darío no pueden ser hermanos entre sí, ni lo pueden ser Carolina y Fernando. Si Carolina fuera hermana de Beatriz, no lo serían ni Darío ni Fernando, ni Alicia ni Emilio. Y entonces habría cuatro hermanos y no tres. Por eso Carolina no puede ser hermana de Beatriz, y los hermanos de Beatriz son Darío y Fernando.

21. (E) La máxima suma de tres números diferentes menores que 10 es $9 + 8 + 7 = 24$.

22. (D) Aparte del niño aislado y los tres que hacen piña, hay dos que no son amigos de un amigo directo de Pedro

23. (C) Como el número de huevos es el doble y el tiempo que se requiere es la mitad, el número de gallinas necesario es el cuádruplo, es decir, 24 gallinas

24. (D) El área del rectángulo es $2{,}5 \times 10 = 25$, y su perímetro es $2{,}5 \times 2 + 10 \times 2 = 25$

25. (E) El número de diagonales es $\frac{12\times 11}{2} - 12 = 66 - 12 = 54$.

VIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase 2º Nivel

1. (D) El ángulo x suma con los otros dos 360º, luego su valor es 360º - (100º + 110º) = =150º.

2. (E) $\dfrac{4\cdot(27-2)}{2}=2\cdot 25=50$

3. (C) El tercer ángulo del triángulo es suplementario de la suma de los otros dos ángulos y también de x, luego $x=37^{o}+74^{o}$.

4. (B) Quitamos las comas y así $\dfrac{20,04}{200,4}=\dfrac{2004}{20040}=\dfrac{1}{10}=0,1$

5. (C) Si la cuarta parte de un número es 6, éste es 24. Así sus tres octavas partes son $\dfrac{3}{8}\cdot 24=3\cdot 3=9$

6. (E) Ningún lado del triángulo puede ser mayor o igual que la suma de los otros dos ni consecuentemente menor o igual que la diferencia, luego en el problema el tercer lado debe estar entre 2 y 12 cm.

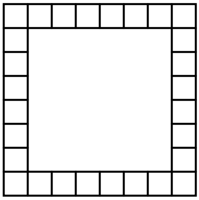
7. (E) $\dfrac{1}{7}=0,14....$; luego 0, 12 está a la izquierda de P.

8. (A) La velocidad media es el cociente entre el espacio recorrido (54 km) y el tiempo empleado (45 min), luego es:

$$\frac{54}{45}\text{ km/min}=\frac{54\cdot 60}{45}\text{ km/h}=6\cdot 12\text{ km/h}=72\text{ km/h}$$

9. (E) La expresión decimal de $\frac{3}{7}$ es 0,4285714285714…, luego el periodo tiene seis cifras. Si dividimos 2004 entre 6, el resto es cero, y así la cifra que ocupa el lugar 2004 después de la coma es la sexta del periodo: 1.

10.(B) Podemos razonar que en cada lado de un cuadrado de 6 dm descansan seis cuadraditos exteriores. Para completar el marco de cuadraditos hay que añadir los cuatro cuadraditos esquinas. Así un cuadrado de 60 dm tendrá un marco de $4 \cdot 60 + 4 = 244$ cuadraditos.



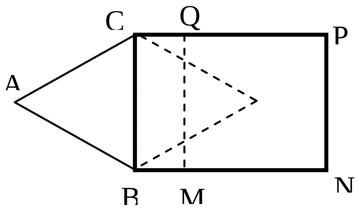
11.(E)

	ALICIA	BEATRIZ	CAROLINA	DARÍO	EMILIO	FERNANDO
Color de ojos	Azul	Marrón	Marrón	Azul	Azul	Azul
Color de pelo	Negro	Rubio	Negro	Rubio	Negro	Rubio

Beatriz sólo puede tener por hermanos los que tengan los ojos marrones o el pelo rubio. Ello descarta a Alicia y a Emilio. Por otro lado Carolina no puede ser hermana de Darío ni de Fernando pues no tienen ninguno de los dos rasgos comunes con ellos. Luego para separarlos en dos grupos de tres, los hermanos de Beatriz son Darío y Fernando.

12.(D) No serán invitados los puntos aislados de Pedro en el diagrama, es decir aquellos puntos (4) desde los cuales no podemos llegar a Pedro siguiendo las aristas del dibujo, y tampoco los que estén a “distancia” de Pedro mayor de dos aristas (2) Así los no invitados son 6.

13.(E) Si el área del triángulo equilátero es $\sqrt{3}$, su lado al cuadrado, l^2, vale 4 ya que el área del equilátero es $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$. Pero l^2 es el área del cuadrado pedida.



14.(A) Si $\frac{n}{24}$ está entre $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{4}$, $\frac{n}{24}$ está entre $\frac{4}{24}$ y $\frac{6}{24}$, luego como n es entero debe ser 5.

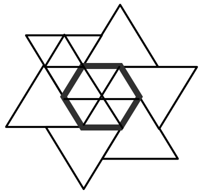
15.(D) Los restos de las divisiones entre 6 de seis números seguidos son todas distintas y deben ser en un determinado orden los cinco restos posibles: 0, 1, 2, 3, 4 y 5. De aquí que S sea 15. El resto de dividir 15 entre 6 es 3.

16.(C) Algebraicamente debemos resolver el sistema $\begin{cases} s+n & =1516 \\ s-n & =1162 \end{cases}$. Restando ambas ecuaciones tenemos que 2 n = 354, luego n = 177.

Si no disponemos de esos conocimientos algebraicos, podemos razonar que la diferencia de *síes* y de *noes*, 1516 – 1162 = 354, cuenta tanto a aquéllos que dijeron *no*, como al mismo número de los que dijeron *sí*, y por tanto el número de los que dijeron *no* es la mitad de 354.

17.(A) Sea ab /cd /dcba la fecha capicúa anterior más cercana al año 2000. “dc” nos indicará el siglo y nos interesa que sea lo más parecido a 20 por defecto, pero “cd” debe ser un mes, por lo que dc = 11 (realmente sólo compite con 01 y 10). Determinado “dc” debemos buscar el valor mayor para “ba” teniendo que ser "ab" un día del mes y la solución es ba =92. Así la suma de la fecha capicúa pedida es 2 (a + b + c + d) = 2 . 13 = 26.

18.(D) La división del hexágono central y de los triángulos en triangulitos iguales nos da la relación de las áreas pedidas: 6 : 24 = 1 : 4



19.(D) Como $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, el 7 debe entrar en todos los números. Seamos ordenados:

- Números de menos de tres cifras no son posibles ya que no es posible obtener 84 como producto de dos números menores que 10.
- Números de tres cifras. Pueden ser con las cifras 4, 3 y 7 en cualquier orden (seis números) o con las cifras 2, 6 y 7 (otros seis números).
- Números de cuatro cifras.

  Haciendo entrar un 1, tenemos números con las cifras 1, 4, 3 y 7 (24 números), y números con las cifras 1, 2, 6 y 7 (otros 24).

  Si no entra la cifra 1, entonces las cuatro deben ser 2, 2, 3, 7. Si fueran distintas podríamos empezar por cualquiera de ellas. Una vez elegida la primera, podríamos colocar tres en segunda posición , luego dos y por último una (así hemos hecho las cuentas anteriores) y tendríamos 24 números, pero como no distinguimos los dos doses (por ejemplo el **2**372 y el 237**2** son el mismo número) sólo tenemos la mitad, 12.

  Así en total hemos contado 6 + 6 + 24 + 24 + 12 = 72

20.(B) Mejores aproximaciones de 24.193

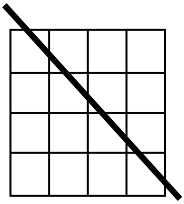
A las decenas: 24190

A las centenas: 24200

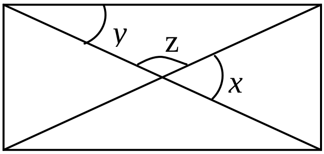
A los millares: 24000

A las decenas de millar 20000

21.(D) El segmento dibujado pasa por el interior de siete cuadrículas. Pasa por la 1ª y 2ª casilla de la primera fila; por la 2ª y 3ª casilla de la segunda fila; por la 3ª y 4ª de la tercera fila; y por la 4ª de la casilla de la cuarta fila. No podría pasar por 8, ya que entonces debería hacerlo por dos de cada fila y no podría ir aumentando (o disminuyendo) la posición de las casillas en cada fila.

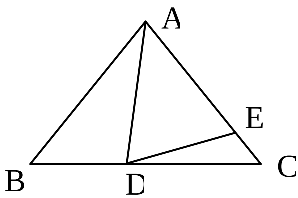


22.(D) z es suplementario de x y también suplementario de $y+y$ luego $x=2y$.



23.(B) 2004 min **=** 33 h 24 min = 1 día 9h 24 min, que sumados a 20 h 4 min nos da 2 días 5 h 28 min, luego nos sitúa en las 05:28 del 22 / 04 /2004.

24.(B) La idea es que $\angle DCE = \angle BCA$, y que por eso pertenece a dos triángulos que se conectan a través del triángulo A. Así tenemos que:



(1) $\angle EDC = 180^{\circ} - \angle DCE - \angle CED$

(2) $\angle CED = 180^{\circ} - \angle DEA$

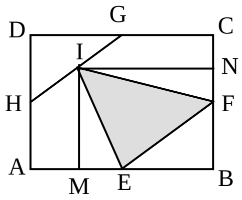
(3) $2 \cdot \angle DEA = 180^{\circ} - \angle EAD$

(4) $\angle EAD + 30^{\circ} = 180^{\circ} - 2 \cdot \angle DCE$.

Despejamos en (4) $\angle EAD = 150^{\circ} - 2 \cdot \angle DCE$ y sustituimos en (3)

$2 \cdot \angle DEA = 180^{\circ} - (150^{\circ} - 2 \cdot \angle DCE)$, de donde $\angle DEA = 15^{\circ} + \angle DCE$.

Sustituyendo esta última igualdad en (2) obtenemos: $\angle CED = 180^{\circ} - (15^{\circ} + \angle DCE) = 165^{\circ} - \angle DCE$ y llevando este resultado a (1) queda: $\angle EDC = 180^{\circ} - \angle DCE - (165^{\circ} - \angle DCE) = 15^{\circ}$.



25.(B) Metemos el triángulo sombreado dentro del rectángulo IMBN, cuyos lados están en proporción de 3 a 4 respecto a los del rectángulo ABCD, y así la relación de áreas es de 9 a 16. La proporción de área del triángulo sombreado en IMBN es

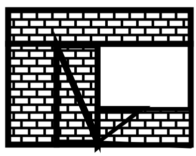
$$1 - \left(\frac{1}{2} \cdot \left(1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \right) = \frac{4}{9}$$

(quitamos al total, rectángulo, las proporciones de las áreas de los tres rectángulos no sombreados).

Para obtener la proporción de área del triángulo sombreado respecto al rectángulo ABCD multiplicamos las proporciones intermedias: $\frac{9}{16} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{4}$.

Observación: En estos problemas de proporciones las medidas de partida son indiferentes. Así podemos suponer que el rectángulo ABCD tiene lados que miden 4 y 4, y ello simplifica notablemente el cálculo del área sombreada. La respuesta es el cociente entre esa área y 16.

Una solución más geométrica y sencilla es convertir la figura a medir (o su complementaria en rectángulos:



Es fácil transformar la figura complementaria del triángulo sombreado en esa figura de ladrillos. El rectángulo blanco equivale al triángulo sombreado. Su área es un cuarto del total.

VIII Concurso de Primavera de Matemáticas

2ª fase (24 de abril de 2004) Nivel III (3º y 4º de ESO)

1. (D) En el triángulo ABC, está claro que el ángulo $B\hat{C}A$ mide 50º, y como $A\hat{C}E$ es recto, concluimos que el ángulo buscado mide $x = 180º – 50º – 90º = 40º$.

2. (E) Hay que recordar que en cualquier triángulo la suma de dos lados debe ser siempre mayor que el tercero. En particular: la suma de los dos lados menores de un triángulo debe ser mayor que el tercero. Así pues, bastará con sumar las longitudes menores y comprobar que el resultado supera al tercer lado:
A) $5+7>11$, B) $5+7>10$, C) $5+6>7$, D) $3+5>7$, E) $1+5<7$.
Por tanto, es la respuesta E la que no cumple la condición: el tercer lado no puede medir 1 cm.

3. (E) Lo más directo es calcular, con tres decimales, los valores de los puntos P, Q, R y S. Basta con dividir cuidadosamente:

$$P = \frac{1}{7} = 0{,}142... \quad Q = \frac{1}{6} = 0{,}166... \quad R = \frac{1}{5} = 0{,}2 \quad S = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Y ya se ve claro que el número 0,12 es menor que todos los anteriores, así pues lo debemos colocar a la izquierda de P.

4. (C) Los números pares son los múltiplos de 2, por tanto son de la forma $2k$, siendo k cualquier número entero. Estudiemos cada una de las cinco opciones:
A) $2n$ es evidentemente par.
B) $3n+2 = 2n+2+n = 2(n+1)+n$ que será par sólo si n es par.
C) Como $4n$ es siempre par, entonces $4n + 1$ será impar ya que el número siguiente a un par es siempre un impar.
D) $2(n – 1)$ es múltiplo de 2 y por tanto, par.
E) $2(n+1)^2$ es múltiplo de 2 y por tanto, par.
La respuesta es C).

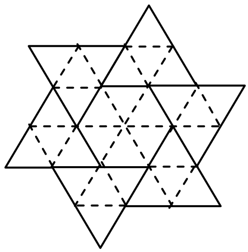
5. (A) Debemos pasar los minutos a horas y expresar la velocidad en km/h.
Como 45 minutos son tres cuartos (3/4) de hora:

$$velocidad = \frac{espacio}{tiempo} = \frac{54\,km}{45 \text{ min}} = \frac{54\ km}{3/4\ h} = \frac{54 \cdot 4\ km}{3\ h} = \frac{216\ km}{3\ h} = 72\ km/h$$

6. (B) Si llamamos x a la cantidad inicial de luz roja, vemos que con una lámina pasaría el 80% de x, es decir $\frac{80}{100}x = 0{,}8x$. Y ya se observa el procedimiento, cada lámina que se coloca es como multiplicar por 0,8.
Con dos láminas pasaría (0,8×0,8) x = 0,64 x.
Con tres láminas: (0,8×0,64) x = 0,512 x.
Con cuatro láminas: (0,8×0,512) x = 0,4096 x, que ya supone menos de la mitad (menos de 0,5) de la luz roja inicial x. Así que la respuesta es 4 láminas.

7. (E) Dividiremos con esmero 3 entre 7 y observaremos qué pauta siguen sus decimales: $\frac{3}{7} = 0{,}4285714285714...$, es decir que los decimales se van repitiendo según un ciclo de seis números: 428571 428571 428571 …. Por tanto, si un lugar es múltiplo de 6 estará ocupado por el decimal 1; el siguiente lugar, múltiplo de 6 más 1, estará ocupado por un 4; el siguiente, múltiplo de 6 más 2, tendrá el decimal 2; el siguiente, múltiplo de 6 más 3, tendrá el 8; etc…
¿Cómo averiguar qué decimal ocupa un determinado lugar? Muy sencillo, habrá que dividir el lugar entre 6 (ya que los decimales se repiten de 6 en 6) y fijarse en el resto que nos da la clave.
Resulta que al dividir 2004 entre 6, obtenemos 334 de cociente y 0 de resto (2004 es múltiplo de 6), lo que nos asegura que en el lugar 2004 hay un 1.

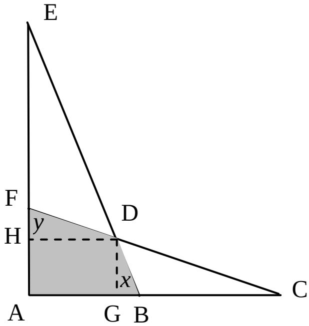
8. (D) En problemas de este tipo es muy útil intentar descomponer toda la figura completa en otras figuras más pequeñas e iguales entre sí. Por la forma de la figura, parece que debemos buscar triángulos equiláteros sin más que prolongar algunas líneas y unir algunos vértices. De esta manera vemos que cada triángulo grande contiene 4 triangulillos y que el hexágono interior contiene 6 triangulillos. Así pues los 6 triángulos tienen 24 triangulillos por sólo 6 del hexágono, lo que representa $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ del área.



9. (C) Ya sabes que, por ejemplo, el valor del número 58 es 5×10+8=50+8=58. De la misma manera el valor de un número genérico cuya cifra de las decenas es a y la de las unidades es b es: $(ab) = 10a + b$, y si invertimos sus cifras sería: $(ba) = 10b + a$. Las condiciones del enunciado nos aseguran que la diferencia de ellos es 36: $10a + b - (10b + a) = 9a - 9b = 9(a - b) = 36 \Rightarrow a - b = 4$, es decir la cifra de las decenas es 4 unidades mayor que la cifra de las unidades. Las

posibilidades que hay (recuerda que ninguna cifra puede ser 0) son: 51, 62, 73, 84 y 95. Y al sumar sus cifras obtenemos respectivamente: 6, 8, 10, 12 y 14.
La respuesta es 12.

10. (E) Si desde el punto *D* trazamos *DG* perpendicular a *AC*, y *DH* perpendicular a *AE*, vemos que si calculamos las longitudes de *DG* y de *DH* Podremos hallar el área del cuadrilátero *ABDF*. Para manejarnos mejor llamamos $x = BG$ e $y = FH$.



Además, ahora se ve claro que se han formado triángulos rectángulos semejantes y podemos jugar con la proporcionalidad de sus lados.
El triángulo *EAB* es semejante al *DGB*, por tanto: $\frac{EA}{AB} = \frac{DG}{GB} \Rightarrow \frac{16}{8} = \frac{6-y}{x}$

El triángulo *CAF* es semejante al *DHF*, por tanto: $\frac{CA}{AF} = \frac{DH}{HF} \Rightarrow \frac{18}{6} = \frac{8-x}{y}$

Y ya podemos calcular *x* e *y* resolviendo el sencillísimo sistema obtenido:

$$\left.\begin{array}{l} 2x = 6-y \\ 3y = 8-x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2 \end{array}\right\}$$

El área del cuadrilátero *ABDF* será la suma de las áreas de los triángulos *DGB* y *DHF* y el rectángulo *AGDH*:

$$\acute{A}rea\ de\ DGB = \frac{x(6-y)}{2} = \frac{2\times 4}{2} = 4$$

$$\acute{A}rea\ de\ DHF = \frac{y(8-x)}{2} = \frac{2\times 6}{2} = 6$$

$$\acute{A}rea\ de\ AGDH = (8-x)(6-y) = 6\times 4 = 24$$

Respondemos: el área del cuadrilátero *ABDF* es 4 + 6 + 24 = 34.

11.(B) Manejando correctamente las propiedades de las potencias vamos a buscar quién es 2^{100} desarrollando las cinco opciones:

A) $4^5 \times 2^{10} = (2^2)^5 \times 2^{10} = 2^{10} \times 2^{10} = 2^{20}$

B) La mitad de 2^{101} es: $\frac{2^{101}}{2} = 2^{101-1} = 2^{100}$. ¡Esta es la respuesta! Aunque seguiremos comprobando las opciones que quedan para quedarnos más tranquilos.

C) $16^5 \times 2^5 = (2^4)^5 \times 2^5 = 2^{20} \times 2^5 = 2^{25}$

D) $(2^3)^{97} = 2^{3\cdot 97} = 2^{291}$

E) Aquí no se pueden aplicar propiedades de potencias. Basta ver que $2^2 \times 2^{98} = 2^{100}$, por tanto $2^2 + 2^{98} \neq 2^{100}$.

12. (D) Interesante problema que parece imposible de atacar pero… ya vas a ver. El primer paso para resolver un problema siempre es el mismo: ponerse a resolverlo. Recuerda que $(ab) = 10a + b$. El dato del problema es que el número (ab) es divisible por 7 (o sea, es múltiplo de 7), es decir que $10a + b = 7p$, donde *p* es un número natural.

Fíjate que en $10a + b = 7p$ podemos despejar *b*; $b = 7p - 10a$. Escribamos los tres números en función de *a* y *p*:

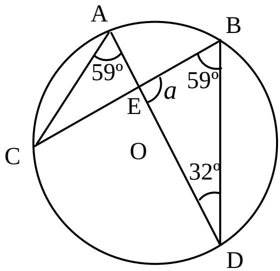
I: $5b + a = 5(7p - 10a) + a = 35p - 50a + a = 35p - 49a = 7(5p - 7a)$ ¡múltiplo de 7!

II: $3a + b = 3a + 7p - 10a = 7p - 7a = 7(p - a)$ ¡múltiplo de 7!

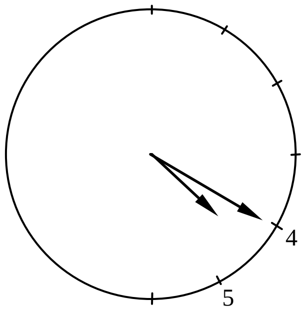
III: $(ba) + a = 10b + a + a = 10b + 2a = 10(7p - 10a) + 2a = 70p - 100a + 2a =$
$= 70p - 98a = 7(10p - 14a)$ ¡múltiplo de 7!

Hay que reconocerlo: bonito problema. Los tres números son también divisibles por 7.

13. (A) Recordando las propiedades de los ángulos inscritos en una circunferencia, sabemos que los ángulos *A* y *B* son iguales ya que abarcan el mismo arco *CD*. Así que *A* = *B* = 59º. Por tanto, trabajando en el triángulo *EDB* vemos que
a = 180º - 59º - 32º = 89º.



14. (D) Este es un problema clásico de la matemática. Seguro que madres, padres y abuelos lo recuerdan. Lo primero es hacer un dibujo del reloj con sus dos agujas, la de las horas y el minutero. Como en la esfera (en realidad es una círculo) del reloj hay 12 horas, está claro que el ángulo entre dos horas consecutivas es de $\frac{360º}{12} = 30º$. Y ahora viene la clave: cada vez que el minutero avanza 60 minutos (o sea, una vuelta), la manecilla de las horas recorre 30º (fíjate: la mitad de 60º).



Es decir, si el minutero avanza n minutos, la manecilla de las horas barre un ángulo de $\frac{n}{2}$ grados. A las 4:20, el minutero está en la hora 4 (que coincide con los 20 minutos), pero la manecilla de las horas se ha desplazado $\frac{20}{2} = 10^{\circ}$.

15. (D) La figura que aparece en el problema se llama grafo (un conjunto de puntos conectados o no por segmentos) y su estudio matemático se llama teoría de grafos. Es claro que si no hay camino posible entre los compañeros y Pedro, esto indica que no fueron invitados ya que no son amigos: en esta situación están los tres chicos que solo se relacionan entre ellos y otro más que no se relaciona con nadie. Ya llevamos cuatro. También habrá que descartar a los conectados con Pedro pero alejados por más de un punto: en esta situación hay dos más. Lo que hacen un total de seis compañeros no invitados al cumpleaños de Pedro.

16. (C) Es evidente que del 1 al 100 hay 50 ($\frac{100}{2} = 50$) números divisibles por 2 y a éstos 50 debemos quitar los que sean divisibles entre 3 ($\frac{50}{3} = 16,\widehat{6}$) que son 16. Por tanto, del 1 al 100 hay 50 – 17 = 34 números divisibles por 2 pero no por 3. La probabilidad encontrar uno de estos será $\frac{34}{100} = \frac{17}{50}$.

17. (A) Primero transformaremos la ecuación en otra equivalente pero sin denominadores

$$\frac{2003x}{2004} + 1 + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{2003x \cdot x}{2004x} + \frac{2004x}{2004x} + \frac{2004}{2004x} = 0 \Rightarrow 2003x^2 + 2004x + 2004 = 0$$

Sabemos que la suma y el producto de las soluciones de la ecuación de 2º grado son $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ $\quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

En nuestro caso $x_1 + x_2 = \frac{-2004}{2003}$ $\quad x_1 \cdot x_2 = \frac{2004}{2003}$, la suma de las inversas de las soluciones será: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-2004}{2003} : \frac{2004}{2003} = -1$

18. (B) Lo primero es recordar la relación que hay entre los elementos de una división entera: $Dividendo = divisor \times cociente + resto$. Que aplicada a los datos de nuestro problema sería: $n = 100q + r$.
Como queremos estudiar $q + r$, si restamos $99q$ en la igualdad anterior tendremos que: $n - 99q = q + r$ y la pregunta es ¿cuándo es $n - 99q$ divisible entre 11?

Como $99q$ ya es divisible entre 11, entonces $n - 99q$ será divisible entre 11 cuando n sea divisible entre 11. Así pues, el problema se reduce a encontrar los múltiplos de 11 de 5 cifras, es decir, los múltiplos de 11 comprendidos entre 10000 y 99999.
El primer múltiplo de 11 es 11910 (= 11×910) y el último es 99990 (=11×9090).
Por tanto hay 9090 – 910 + 1 = 8181 múltiplos de 11 de cinco cifras.

19. (C) Los números que a la vez son múltiplos de 15, 20 y 25, serán los múltiplos del mínimo común múltiplo de esos tres números. Calculémoslo:

$$\left.\begin{array}{rcr} 15 & = & 3\times 5 \\ 20 & = & 2^2\times 5 \\ 25 & = & 5^2 \end{array}\right\} mcm(15,20,25) = 2^2\times 3\times 5^2 = 300$$

Basta pues con encontrar los múltiplos de 300 comprendidos entre 1000 y 2000:
300, 600, 900, 1200, 1500, 1800, 2100. Hay tres: 1200, 1500 y 1800.

20. (B) En el primer tramo, cuando el barco va desde *A* hasta *B* (una semicircunferencia), la distancia a la isla *X* (es el centro de la semicircunferencia) se mantiene constante, lo que en la gráfica se traduce como un segmento horizontal al eje de abscisas. Por tanto, ya podemos descartar las respuestas A y C. En el segundo tramo, cuando el barco navega desde *B* hasta *C* (un segmento), primero se va acercando a la isla (hasta llegar a la mitad del segmento *BC*) y luego (en la segunda mitad) se va alejando hasta llegar a *C*. Lo cual deja claro que la respuesta correcta es la B: primero constante (gráfica horizontal), luego se acerca (gráfica decreciente) y vuelve a alejarse (gráfica creciente).

21. (E) Representaremos las cinco cartas rojas como: 1, 2, 3, 4, 5. Y las cuatro azules subrayándolas: $\underline{3}$, $\underline{4}$, $\underline{5}$, $\underline{6}$. Como hay que colocar todas las cartas alternando sus colores es obligado que las dos cartas de los extremos sean rojas ya que hay más rojas que azules.
Pensemos qué dos cartas rojas habrá en los extremos: aquellas que sólo tengan un divisor de entre las azules. Y éstas serán las cartas 4 y 5 que sólo tienen como divisores la $\underline{4}$ y la $\underline{5}$ respectivamente.

5	$\underline{5}$						$\underline{4}$	4

Y ahora poco a poco: a la derecha de la $\underline{5}$ sólo puede estar la 1 (1 es divisor de $\underline{5}$); y a la izquierda de $\underline{4}$ sólo podemos colocar a 2 que es divisor:

5	$\underline{5}$	1				2	$\underline{4}$	4

Y fíjate sólo faltan por colocar las tres cartas centrales que son: 3, 3 y 6 que suman 12. Al final quedarían así:

5	5	1	3	3	6	2	4	4

22. (A) Los números primos de una sola cifra son 2, 3, 5 y 7. (Buen momento para volver a recordar que el número 1 no es primo). Como son pocos casos, los estudiaremos todos para encontrar la respuesta. Podemos construir una tabla de doble entrada (las filas para los valores de d y las columnas para los valores de e) y en su interior colocaremos el resultado de $10d + e$. (Por ejemplo, para $d = 3$ y $e = 5$, obtenemos $10d + e = 10\times 3 + 5 = 35$. Observa que los cálculos son sencillísimos ya que la cifra de las decenas es d y la de las unidades es e). A continuación hay que investigar cuáles de los números $10d + e$ son primos.

	$e = 2$	$e = 3$	$e = 5$	$e = 7$
$d = 2$	22 (no primo)	23	25 (no primo)	27 (no primo)
$d = 3$	32 (no primo)	33 (no primo)	35 (no primo)	37
$d = 5$	52 (no primo)	53	55 (no primo)	57 (no primo)
$d = 7$	72 (no primo)	73	75 (no primo)	77 (no primo)

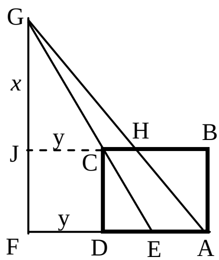
Nos quedan cuatro casos. Hacemos el producto $d\times e\times(10d+e) = n$ y así encontramos el mayor valor posible n:

$2\times 3\times 23 = 138$ $\quad 3\times 7\times 37 = 777$ $\quad 5\times 3\times 53 = 795$ $\quad 7\times 3\times 73 = 1533$

El mayor es 1533 cuyas cifras suman $1 + 5 + 3 + 3 = 12$.

23. (B) Parece que, al haber paralelas cortadas por secantes, podríamos emplear el teorema de Tales. Prolongamos BC hasta que corte a GF en el punto J. Para facilitar los cálculos, llamaremos $x = GJ$ e $y = JC = FD$, y según los datos del enunciado también sabemos que:

$JF = 8$, $DE = 4$, $CH = 9 - 6 = 3$.



Los triángulos GJC y GFE son semejantes, así que sus lados son proporcionales:

$$\frac{GJ}{JC} = \frac{GF}{FE} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{x+8}{y+4}$$

Lo mismo pasa con los triángulos GJH y GFA, son semejantes, así que:

$$\frac{GJ}{JH} = \frac{GF}{FA} \Rightarrow \frac{x}{y+3} = \frac{x+8}{y+9}$$

y ya tenemos las dos ecuaciones necesarias para calcular x e y.

Es fácil ver que podemos despejar $\dfrac{x}{x+8}$ en las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x}{x+8}=\dfrac{y}{y+4}\\[2mm] \dfrac{x}{x+8}=\dfrac{y+3}{y+9}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{y}{y+4}=\frac{y+3}{y+9}\Rightarrow y^2+9y=y^2+7y+12\Rightarrow 2y=12\Rightarrow y=6$$

Y sustituyendo en la primera ecuación calcularemos x:

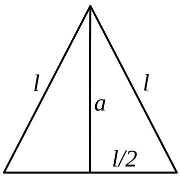
$$\frac{x}{x+8}=\frac{6}{6+4}\Rightarrow 10x=6x+48\Rightarrow 4x=48\Rightarrow x=12$$

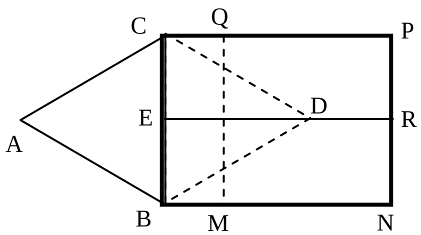
Y ya podemos contestar a la pregunta: $GF = GJ + JF = x + 8 = 12 + 8 = 20$.

24. (D) Observando la pregunta y las posibles respuestas, una buena manera de trabajar puede ser intentar escribir todas las cantidades que aparecen en función de una misma base. La base va a ser 3, ya que es divisor de 9 y 27:

$$9^{20}+9^{20}+9^{20}=3{\cdot}9^{20}=3{\cdot}(3^2)^{20}=3{\cdot}3^{40}=3^{41}$$

25. (D) Lo más importante: no hay que asustarse ante este problema. Si vamos paso a paso se verá que no es tan difícil como parece. Como nos piden al área de un rectángulo, tendremos que calcular su base y su altura.





La altura *BC* del rectángulo coincide con el lado del triángulo equilátero que podemos calcular de esta manera: llamamos *l* al lado del triángulo equilátero y ayudándonos del teorema de Pitágoras vamos a calcular su altura *a*.
(Ya sabes que en un triángulo equilátero la altura cae justamente sobre la mitad de la base)

$$a^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2=l^2\Rightarrow a^2+\frac{l^2}{4}=l^2\Rightarrow 4a^2+l^2=4l^2\Rightarrow 4a^2=3l^2\Rightarrow a^2=\frac{3}{4}l^2$$

y extrayendo la raíz cuadrada ya tenemos que la altura vale $a=\dfrac{l}{2}\sqrt{3}$.

Y como sabemos que el área del triángulo es $\sqrt{3}$, ya podemos hallar su lado:

$Área = \dfrac{base \cdot altura}{2} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{l \cdot \frac{l}{2}\sqrt{3}}{2} = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow l^2 = 4 \Rightarrow l = 2$, ¿véis como poco a poco va saliendo?

Ahora trazamos *ED* perpendicular a *BC* y prolongamos hasta encontrar el punto *R*. La base del rectángulo es *BN* que es igual a *ED* + *DR*, muy fácil de calcular:

ED es la altura del triángulo: $ED = a = \dfrac{l}{2}\sqrt{3} = \dfrac{2}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}$.

DR es la mitad del lado del cuadrado (ya que el problema decía que *D* coincidía justo en el centro del cuadrado), es decir, la mitad del lado del triángulo, *DR* = 1

Y ya casi terminamos: *BN* = *ED* + *DR* = $1+\sqrt{3}$

El área del rectángulo será el producto de su base por su altura:

$Área = BN \times BC = (1+\sqrt{3}) \times 2$ Y se acabó. Enhorabuena.

VIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase 4º Nivel

1. (E) Al ser la diferencia de dos lados cualesquiera menor que el tercero, este no podrá medir 1 cm, por lo que la respuesta es E.

2.(A) La recta de menor pendiente es $y = cx$, pues tiene pendiente negativa y la de mayor pendiente es $y = bx$, por lo que se verificará $c < a < b$, siendo entonces la respuesta A.

3.(D) $9^{20} + 9^{20} + 9^{20} = 3 \cdot 9^{20} = 3 \cdot 3^{40} = 3^{41}$ y la respuesta es D.

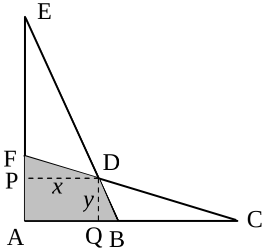
4.(D) Como $(a + d)^2 = a^2 + (a - d)^2$, sigue que $2\,ad = a^2 - 2ad$, siendo entonces $d = \frac{a}{4}$.

5.(D) De la información dada resulta que $20x - 5y = 8x + 4y$, es decir $4x = 3y$, por lo que $\frac{4x+y}{4x-2y} = \frac{4y}{y} = 4$ y la respuesta es D.

6.(D) Dividiendo el hexágono en 6 triángulos iguales, cada uno de los triángulos estará formado por 4 de éstos. Luego la fracción pedida será $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ y la respuesta D.

7.(C) Como $10^n - 1$ es múltiplo de 9 para cualquier entero positivo n, bastará hallar el menor entero positivo n para el que $10^n - 1$ sea múltiplo de 7 y lo más cómodo es ir dividiendo 99 … 9 entre 7 hasta obtener un resto 4 (pues en el paso siguiente obtendríamos resto cero) y eso tiene lugar para 99999 por lo que habría un 9 más, es decir, la respuesta será 6, que corresponde a C.

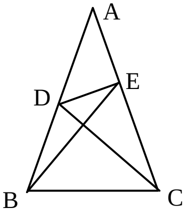
8.(E) Trazando desde D perpendiculares a AE y AC, siendo P y Q los pies de las mismas, podemos llamar x e y como se indica en la figura y la semejanza de los triángulos así formados nos lleva a escribir $\frac{y}{8-x} = \frac{16}{8}$; $\frac{6-y}{x} = \frac{6}{18}$ de donde $x = 6$ $y = 4$ y el área pedida será $6 \times 4 + \frac{(8-6)\times 4}{2} + \frac{(6-4)\times 6}{2} = 34$ y la respuesta es E.



9.(B) Un número es "de libro" si es de la forma $(10a+ b) + (10b + a)$ con $a \neq b$. Así pues estos números son de la forma $11(a + b)$ con lo que al ser a y b dígitos la única posibilidad para que $11(a +b)$ sea cuadrado perfecto es que $a + b$ sea igual a 11, por lo que el único número de libro es 121 y la respuesta es B.

10. (C) El número $n^{12} - n^8 - n^4 + 1$ lo podemos poner como $n^8(n^4 - 1) - (n^4 - 1) = (n^4 - 1)(n^8 - 1) = (n^4 - 1)^2 (n^4 + 1) = (n + 1)^2 (n - 1)^2 (n^2 + 1)^2 (n^4 + 1)$.
Si n es impar, en $n^2 + 1$ hay 1 factor 2 y en $n^4 + 1$ otro factor 2. Pero al ser n impar, $n + 1$ y $n - 1$ son ambos pares consecutivos, luego uno de ellos es múltiplo de 4. Recopilando todos los factores 2 que hemos encontrado, tenemos $2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 = 9$, por lo que nuestro número es divisible por 2^9 y la repuesta es C.

11. (D) El ángulo $C\hat{D}B = 180^o - (70^o + 40^o) = 70^o$ por lo que $CD = BC$. El ángulo $C\hat{E}B = 180^o - (55^o + 70^o) = 55^o$ por lo que $BC = EC$. Así pues, el triángulo CDE es isósceles y como el ángulo desigual $D\hat{C}E = 30^o$, el ángulo $C\hat{D}E = 75^o$ con lo que el ángulo pedido $A\hat{D}E = 180^o - (75^o + 70^o) = 35^o$ y la respuesta es D.



12. (D) $84 = 2^2 \times 3 \times 7$, así que habrá que agrupar estos factores, siendo dígitos los productos, de todas las formas posibles, teniendo en cuenta que los números podrán ser de 4 o de 3 dígitos.
$2 \times 2 \times 3 \times 7 = 1 \times 2 \times 6 \times 7 = 4 \times 3 \times 7 \times 1 = 4 \times 3 \times 7 = 2 \times 6 \times 7$.

Con la primera agrupación obtenemos $PR_4^2 = 12$ números, con la 2ª y 3ª, 24 con cada una y con las dos últimas obtenemos 6 números con cada una. Así pues, la respuesta es $12 + 2 \times 24 + 2 \times 6 = 72$ y la opción elegida es D.

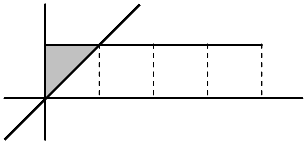
13. (B) La gráfica de la función $y = \sqrt[3]{2x - 14}$ está siempre por debajo de la de $y = \sqrt[3]{2x + 14}$, pero para valores de x alejados del origen tienden a juntarse. Así pues la gráfica de $y = \sqrt[3]{2x - 14} + \sqrt[3]{4}$ que está por debajo de la de $y = \sqrt[3]{2x + 14}$ en valores de x relativamente cercanos al origen, la rebasará para valores de x alejados, con lo que el número de puntos de corte de las gráficas de $y = \sqrt[3]{2x + 14}$ e $y = \sqrt[3]{2x - 14} + \sqrt[3]{4}$ es 2 y la respuesta B.

14. (D) Como $(d - 1)(e - 1) = de - (d + e) + 1$ y d y e son soluciones de la ecuación $2x^2 + 3x + 5 = 0$, sigue que $d + e = -\frac{3}{2}$ y $d\,e = \frac{5}{2}$, por lo que

$(d - 1)(e - 1) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} + 1 = 5$, siendo D la respuesta correcta.

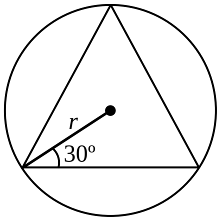
15. (E) El número 60 tiene por divisores positivos los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60, en total 12, de los cuales hay 6 menores que 7 por lo que la probabilidad pedida será $\frac{1}{2}$ y la respuesta E.

16. (A) El punto (x, y) verificará $x < y$ sólo si está en la zona rayada, y como el área de ésta es $\frac{1}{2}$ y el área del rectángulo es 4, la probabilidad pedida es $\frac{1}{8}$ y la respuesta será A.

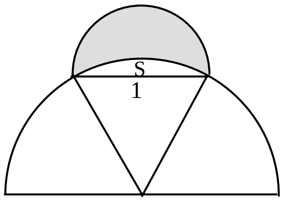


17. (A) Llamando x, y, z a los números, podemos escribir que $x + y + z = 20$, $x = 4\,(y + z)$, $y = 7z$, de donde $4y + 4z + y + z = 20$, es decir $y + z = 4$ y como $y = 7z$, sigue que $z = \frac{1}{2}$, $y = \frac{7}{2}$ y $x = 16$ por lo que su producto es 28 y la respuesta es A.

18. (B) Llamando r al radio del círculo, tenemos que el lado del triángulo es $2r\frac{\sqrt{3}}{2}$, por lo que el perímetro del mismo es $3r\sqrt{3}$ y al ser πr^2 el área del círculo y verificarse que $3r\sqrt{3} = \pi r^2$, resultará que $r = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$, siendo la respuesta B.



19. (C) Bastará hallar el área del segmento S de la figura y restarla a $\frac{1}{2}\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Trazando los radios del semicírculo grande que van a los extremos de la cuerda que delimita el segmento, observamos que se forma un triángulo en el que todos sus lados miden 1 por lo que el ángulo del sector correspondiente es 60º y el área de $S = \frac{1}{6}\pi \times 1^2 - \frac{1^2\sqrt{3}}{4}$. Así pues el área pedida será $\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{24}$, por lo que la respuesta será C.

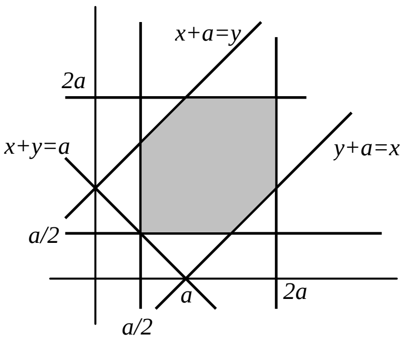


20. (D) La curva $y = f(x)$, al reflejarse sobre el eje de abscisa se convierte en la $y = -f(x)$; si $y = f(x)$ se desplaza 5 unidades a la derecha, se convierte en la $y = f(x - 5)$ y si $y = -f(x)$ se desplaza 5 unidades a la izquierda, se convierta en la $y = -f(x + 5)$. Así pues, en nuestro caso tenemos:
$y = ax^2 + bx + c \;\rightarrow\; y = -ax^2 - bx - c$; $f(x) = a\,(x - 5)^2 + b\,(x - 5) + c$,
$g(x) = -a\,(x + 5)^2 - b\,(x + 5) - c$ por lo que
$f(x) + g(x) = a\,(x - 5)^2 - a\,(x + 5)^2 + b\,(x - 5) - b\,(x + 5) + c - c = -20ax - 10b$
que, al ser $a \neq 0$, responde a la ecuación de una recta no paralela a ningún eje por lo que la respuesta es D.

21. (B) Puesto que $\log_a \frac{a}{b} + \log_b \frac{b}{a} = 1 - \log_a b + 1 - \log_b a = 2 - (\log_a b + \log_b a)$, el mayor valor posible para dicha expresión se alcanzará cuando $\log_a b + \log_b a$ sea lo menor posible y puesto que si $\log_a b = r$, es $a^r = b$, es decir $a = b^{\frac{1}{r}}$, o sea, $\log_b a = \frac{1}{r}$, todo lo que hay que hacer es minimizar la expresión $r + \frac{1}{r}$ siendo $r > 0$ pues $b > 1$ y $a \geq b$. Inspeccionando $r + \frac{1}{r}$ vemos que parece que siempre es mayor o igual que 2, siendo dicha conjetura muy fácil de probar pues

$r + \frac{1}{r} \geq 2 \Leftrightarrow r^2 + 1 \geq 2r \Leftrightarrow r^2 - 2r + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (r - 1)^2 \geq 0$. Así pues, el mayor valor para $\log_a\left(\frac{a}{b}\right) + \log_b\left(\frac{b}{a}\right)$ será $2 - 2 = 0$ y la respuesta será B.

22. (D) El conjunto S es el de la figura, que se trata de un hexágono por lo que la respuesta es D.



23. (A) Si $x^{256} - 256^{32} = 0$, como $256 = 2^8$, resulta que $x^{256} = 2^{256}$ y las únicas soluciones reales de esta ecuación son 2 y -2 por lo que la suma de sus cuadrados será 8 y la respuesta A.

24. (B) Escribimos la ecuación como $2kx^2 - 8x - x^2 + 6 = 0$, es decir $(2k–1)\,x^2 - 8x + 6 = 0$ que no tendrá raíces reales cuando $8^2 - 4 \times 6\,(2k - 1) < 0$, es decir $\frac{64}{24} < 2k - 1$ y el menor entero k tal que $\frac{8}{3} + 1 < 2k$, ó $\frac{11}{6} < k$ es el 2, por lo que la respuesta será B.

25. (D) La forma más cómoda de ver el problema es escribir en forma binómica $(n + i)^4$, es decir $(n^2 - 1 + 2ni)^2$, o sea, $(n^2 - 1)^2 - 4n^2 + 4n\,(n^2 - 1)\,i$ que para que sea un número entero es condición necesaria que su parte imaginaria valga 0, es decir $n = 0, 1, -1$, que al ser valores enteros hacen que sea entero $(n^2 - 1)^2 - 4n^2$, por lo que la respuesta es 3, es decir, D.

Participantes y relación de ganadores del
VIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Superada ya la barrera de los 20 000 participantes en la 1ª fase de un total de unos 300 centros, se inscribieron para tomar parte en la 2ª fase **2215** estudiantes de 5ª y 6ª de Primaria, E.S.O. y Bachillerato, de los cuales se presentaron 1861 el día de la prueba.
La distribución por niveles así como algunos datos de interés figuran en la siguiente tabla.

	NIVEL 1		NIVEL 2		NIVEL 3		NIVEL 4	
	5 P	6P	1º ESO	2º ESO	3º ESO	4º ESO	1º B	2º B
Participantes	119	323	228	390	263	273	146	113
(Inscritos)	442 (498)		618 (733)		536 (643)		259 (341)	
Nº de centros	109		182		152		99	
Media	69,58		75,35		73,3		66,6	
Punt. máxima	120		120		125		103	
Nº de partic. con más de 90 puntos	77	17 %	92	15 %	92	17 %	12	4,63 %

Los ganadores fueron:

NIVEL I

1. Alberto Merchante González (6º Primaria) CP Joaquín Costa. Madrid
2. Pablo Boiselda Álvarez (5º Primaria) Colegio Alemán. Madrid
3. Javier Sansa Oliván (6º Primaria) Colegio Alemán. Madrid

NIVEL II

1. Alfonso Gómez-Jordana Mañas (1º ESO) Colegio Everest. Pozuelo de Alarcón
2. Rubén Jiménez Benito (1º ESO) IES José Hierro. Getafe
3. Rodrigo Bellot Rodríguez (2º ESO) Colegio Retamar. Pozuelo de Alarcón.
   Diego Izquierdo Arseguet (2º ESO) Liceo Francés. Madrid
   Pablo Rubio García (2º ESO) Colegio Zola. Las Rozas

NIVEL III

1. Ding Ru (4º ESO) IES Ramiro de Maeztu. Madrid
2. Miguel Montero Muñoz (3º ESO) Colegio Fray Luis de León. Madrid
3. Carlos Riquelme Ruiz (4º ESO) Colegio San José del Parque. Madrid

NIVEL IV

1. Elisa Romero García (1º Bach.) IES Fortuny. Madrid
2. José Antonio Pérez Martín (1º Bach.) Colegio Institución La Salle. Madrid
3. Beatriz García García (1ª Bach.) IES Mirasierra. Madrid

IV Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

20 de noviembre de 2004

PRUEBA POR EQUIPOS (45 minutos)

1.- A un número de 3 cifras le damos la vuelta, es decir, intercambiamos las cifras de las unidades y la de las centenas, resultando un número mayor, que multiplicado por el original, da 65125. ¿Cuál era el número original?

2.- El periodo de vida de una ballena es cuatro veces el de una cigüeña, la cual vive 85 años más que un conejillo de indias, que vive 6 años menos que un buey, el cual vive 9 años menos que un caballo, que vive 12 años más que un pollo, que vive 282 años menos que un elefante, que vive 283 años más que un perro, que vive 2 años más que un gato, que vive 135 años menos que una carpa, que vive el doble de un camello, que vive 1014 años menos que el total de los periodos de vida de todos estos animales. ¿Cuánto vive un caballo?

3.- Si el resto de las divisiones de 1059, 1417, y 2312 entre el entero *"d "*, mayor que 1, es siempre el mismo, calcula d.

4.- Encuentra todos los números enteros m y n tales que $mn(m-n) = 45045$.

5.- ¿Cuántos números hay que sean cuadrados perfectos y divisores de 7200?

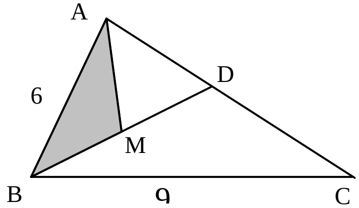
6.- Al intentar resolver la inecuación $\frac{4}{x-2} > 5$, copié mal el enunciado del problema y en lugar de 5 escribí otro entero positivo. Si mi respuesta a la inecuación fue $2 < x < 4$, ¿cuál fue el entero positivo que puse en lugar de 5 en el enunciado?

7.- Calcular la probabilidad de que al tirar 3 dados idénticos (con caras de 1 a 6) se obtengan 3 enteros consecutivos.

8.- Determina todas las listas de 5 números que formen a la vez progresión aritmética y progresión geométrica.

9.- Si las raíces de la ecuación $x^2 + px + q = 0$ son los cubos de las raíces de la ecuación $x^2 + mx + n = 0$, expresa p y q en términos de m y n.

10.- En el triángulo ABC de área 20, AB = 6, BC = 9, BD es la bisectriz del ángulo $\hat{B}$ y M es el punto medio del segmento BD. Calcula el área del triángulo ABM



IV Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

20 de noviembre de 2004

PRUEBA INDIVIDUAL Primer ciclo de E.S.O. (90 minutos)

1. En el cuadrado de la figura 1, de 100 cm de lado, el punto O es el centro del mismo y el área de la zona sombreada es la quinta parte del área del cuadrado. Calcular la longitud del segmento DE.

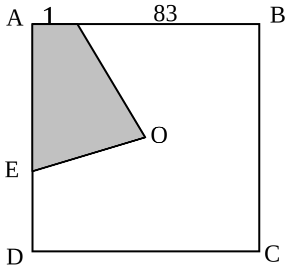


Figura 1

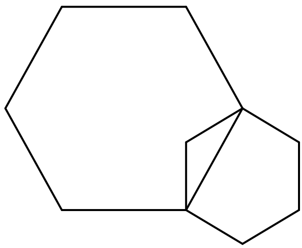
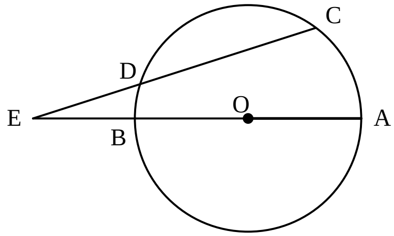


Figura 2

2. Los hexágonos de la figura 2 son regulares. Calcula el cociente entre el área del hexágono pequeño y el área del grande.

3. Las secantes CDE y EBA a la circunferencia de la figura, centrada en O, la cortan de forma que AB es un diámetro y CD una cuerda de dicha circunferencia. Si AB = 2 DE y el ángulo AEC es de 18º, calcula la medida del ángulo COA.
(Recuerda: el vértice en la letra del medio)



4. ¿ Cuál es el mayor divisor de $2^{14} - 1$ distinto de él mismo?

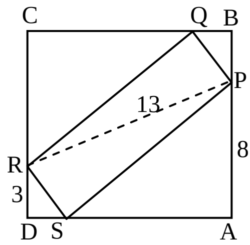
5. Calcula la suma de los 120 números de 5 cifras, no repetidas, que se pueden formar con las cifras 1, 2, 3, 4 y 5.

IV Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

20 de noviembre de 2004

PRUEBA INDIVIDUAL Segundo ciclo de E.S.O. (90 minutos)

1. El rectángulo PQRS está inscrito en el rectángulo ABCD como se indica en la figura (que no está hecha a escala). Si DR = 3, RP = 13 y PA = 8, calcula el área del rectángulo ABCD

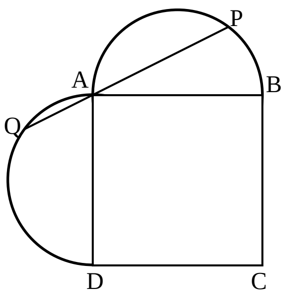


2. A ambas orillas de un río de 40 metros de ancho hay dos palmeras, una frente a la otra. La altura de las palmeras son 8 y 12 metros. En la parte más alta de cada palmera se encuentran sendos pájaros que súbitamente descubren un pez en la superficie del agua entre las dos palmeras. Los pájaros se lanzan a la vez y con la misma velocidad, alcanzando el pez al mismo tiempo. ¿A qué distancia del pié de la palmera más alta apareció el pez?

3. Si $x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 - 5x - 9 = 0$ y $x \neq -1$, calcula $(x + 1)^4$

4. Hay un único valor real de *x* para el que la mediana y la media aritmética de los cinco números 4, 2, 16, 6 y *x* son iguales. Calcula ese valor.

5. En el cuadrado ABCD de la figura hemos trazado dos semicircunferencias exteriores, una con diámetro AB y otra con diámetro AD. El punto A divide al segmento PQ en dos segmentos de longitudes 7 y 23. Calcula la longitud de la diagonal del cuadrado



IV Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

20 de noviembre de 2004

PRUEBA INDIVIDUAL **Bachillerato** (90 minutos)

1. Halla todos los números racionales m tales que $m+\dfrac{1}{m}$ sea entero.

2. Elegimos un número de 6 cifras de entre los formados utilizando los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 una vez cada uno. ¿Cuál es la probabilidad de que un trozo de ese número sea 456?

3. Si x, y, z son números distintos y las ternas (x, y, z) y (x^3, y^3, z^3) forman progresión aritmética, calcula el número y.

4. Un triángulo isósceles de lados 5, 5 y 6, está inscrito en una circunferencia. Calcula el radio de ésta.

5. En una progresión aritmética creciente, la diferencia es un número entero. Si el tercer término a_3 es 4 y para un cierto n es $a_{n-2} = 9$, calcula $a_n + 2n$.

IV Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

20 de noviembre de 2004

PRUEBA POR RELEVOS (45 minutos)

1er Ciclo de ESO.-

1A.- La circunferencia de la figura 1, tangente a dos lados del cuadrado de lado 9, tiene de radio 2. Expresa el área sombreada como $T + Q\pi$ donde T y Q son números enteros y pásale el número T a tu compañero de Bachillerato. (Atención: La esquinita de la parte superior derecha no está sombreada):

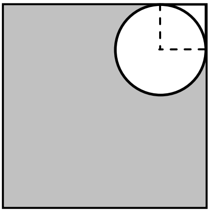


Figura 1

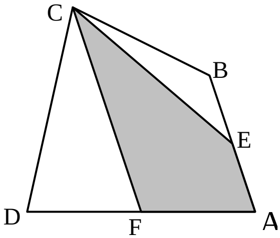


Figura 2

1B.- Sea "T" la respuesta del problema 2B. En la figura 2 que te mostramos, E es el punto medio de AB y F el punto medio de AD. Si el área del cuadrilátero FAEC es T unidades cuadradas, calcula el área del cuadrilátero ABCD y pásale la respuesta a tu compañero de Bachillerato.

1C.- Sea "T" la respuesta del problema 2C. Un número entero de T cifras, en el que las dos cifras de los extremos son iguales, llamémoslas A, y todas las demás también son iguales entre sí, llamémoslas B, es múltiplo de 7. Calcula el mayor valor posible para A + B.

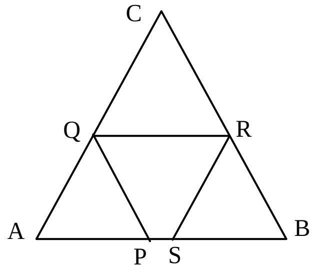
IV Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

20 de noviembre de 2004

PRUEBA POR RELEVOS (45 minutos)

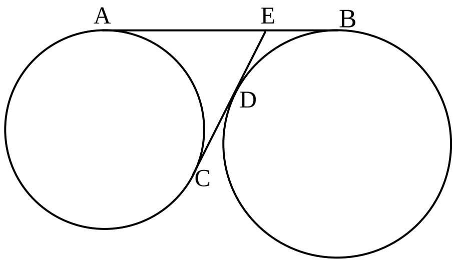
2º Ciclo de ESO.-

2A.- Sea "T" la respuesta del problema 3A. En la figura adjunta el triángulo ABC es equilátero, de lado 20. PQ es paralela a BC, RS es paralela a AC y QR es paralela a AB. Si SR + RQ + QP = $\frac{T}{7}$, calcula PS.



2B.- Encuentra el mayor entero x tal que $\sqrt[5]{x^2} - \sqrt[5]{x} = 2$ y pásale la respuesta a tu compañero de primer ciclo.

2C.- Sea "T" la respuesta del problema 3C. Las rectas AB y CE son tangentes comunes a las dos circunferencias de la figura. Si AB = T y AE = 2 EB, calcula CD y pásale la respuesta a tu compañero de primer ciclo.



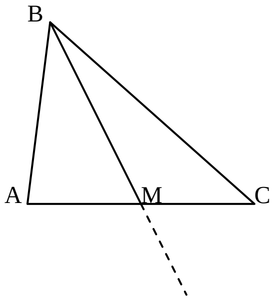
IV Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

20 de noviembre de 2004

PRUEBA POR RELEVOS (45 minutos)

Bachillerato.-

3A .- Sea "T" la respuesta del problema 1A. En el triángulo ABC de la figura, la mediana BM = 29. La perpendicular desde C a la prolongación de BM corta a ésta en R. Si CR = $\frac{T}{11}$, calcula el área del triángulo ABC y pásale la respuesta a tu compañero de 2º ciclo.



3B .- Sea "T" la respuesta del problema 1B y $n = \frac{T}{32}$. Calcula el número positivo x tal que $x^{\log_{19} 89} = 89^n$

3C .- Partiendo de su casa , un hombre camina en línea recta 9 km al Este, luego 7 km al norte, después 3 km al Este y finalmente x km al Sur, encontrándose entonces a 13 km de su casa. Si se considera el terreno totalmente plano, calcula todos los valores posibles de x y pásale el mayor a tu compañero de 2º ciclo.

XXII Concurso "Puig Adam" de Resolución de Problemas
5 de junio de 2003

PRIMER NIVEL

Problema 1.

La planta de un castillo tiene la forma de un cuadrilátero, PQRS, donde PQ = 40m, QR = 45 m SP = SR = 20 m, y el ángulo $P\hat{S}R = 90º$. Un vigilante debe dar un paseo alrededor del castillo, manteniéndose siempre a 2 m de la pared, es decir, del punto más cercano de la pared. El vigilante empieza su paseo en un punto de esas características, da la vuelta en sentido antihorario y llega a ese punto. ¿Cuántos metros recorre durante el paseo?

Problema 2.

Deducir para qué valores de $\boldsymbol{x}$ el trinomio $2x^2 - 3x - 5$ es el cuadrado de un número primo.

Problema 3.

Sean tres círculos tangentes uno a otro, y también tangentes a dos rectas. Si el radio del pequeño es 32 m, y el del mayor 72 m, obtener el radio del mediano.

Problema 4.

Los números naturales a y b son menores que 2000 y la fracción $\frac{a+2004b}{b+2004a}$ es simplificable. Hallar el mayor número primo que es factor común del numerador y del denominador.

SEGUNDO NIVEL

Problema 1.

Un triángulo ABC tiene área 48. Sea P el punto medio de la mediana AM y N el punto medio del lado AB. Si los segmentos MN y PB se cortan en T, calcula el área del triángulo MTB.

Problema 2.

Los números naturales del 1 al 27 se escriben formando una retícula espacial en forma de cubo de tres números cada arista, de modo que la suma de cualesquiera tres números alineados sea la misma. Se pide:

a) ¿Qué número es esa suma?
b) ¿Qué número ocupa la posición central?

Problema 3.

Prueba que la suma de las alturas de un triángulo es como mínimo $9r$ siendo r el radio de la circunferencia inscrita.

Problema 4.

Probar que $S_n = n^3 + 5n$ es siempre múltiplo de 6 para cualquier valor de n natural.

TERCER NIVEL

Problema 1.

De entre todos los números reales x, y que verifican que:

$x^2 + y^2 - 4x + 4y + 7 = 0$ encuentra el mayor cociente $\frac{y}{x}$.

Problema 2.

En el conjunto de los números naturales, incluido el cero, se permite hacer estas dos operaciones:

Operación A: multiplicar por 2;

Operación B: restar 3 (con minuendos mayores que 2).

¿Se puede alcanzar cualquier natural, n, a partir de cualquier otro, m?
Estudiar qué números son alcanzables a partir de uno dado, n.
Ensayar: de 21 a 36; de 9 a 31; de 8 a 34; de 10 a 22.

Problema 3.

Demostrar que el radio del círculo inscrito a un triángulo pitagórico (triángulo rectángulo de catetos e hipotenusa enteros) viene dado por un número entero.

Problema 4.

El natural n es mayor que 3 y no múltiplo de 3. Buscar si existe un n de ese tipo tal que la fracción $\frac{2n-3}{n(n-3)}$ sea irreducible. Buscar un n para que la fracción sea decimal.

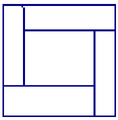
Xª OLIMPIADA de MAYO
Primer Nivel
Mayo de 2004

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

PROBLEMA 1

Javier multiplica cuatro dígitos, no necesariamente distintos, y obtiene un número terminado en 7. Determina cuánto puede valer la suma de los cuatro dígitos que multiplicó Javier. Da todas las posibilidades.

PROBLEMA 2



En el interior de un cuadrado de 11X11, Pablo dibujó un rectángulo y prolongando sus lados dividió el cuadrado en 5 rectángulos, como muestra la figura.
Sofía hizo lo mismo, pero además logró que las longitudes de los lados de los 5 rectángulos sean números enteros entre 1 y 10, todos distintos.
Muestra una figura como la que hizo Sofía.

PROBLEMA 3

En cada casilla de un tablero de 5X5 está escrito 1 ó -1. En cada *paso* se reemplaza el número de cada una de las 25 casillas por el resultado de la multiplicación de los números de todas sus casillas vecinas.
Inicialmente se tiene el tablero de la figura.

1	1	-1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Muestra como queda el tablero al cabo de 2004 pasos
ACLARACIÓN: dos casillas son vecinas si tienen un lado en común.

PROBLEMA 4

En un cuadrado *ABCD* de diagonales *AC* y *BD*, llamamos *O* al centro del cuadrado. Se construye un cuadrado *PQRS* de lados paralelos a los del *ABCD* con *P* en el segmento *AO*, *Q* en el segmento *BO*, *R* en el segmento *CO*, *S* en el segmento *DO*.

Si área($ABCD$) = 2·área($PQRS$) y M es el punto medio del lado AB, calcula la medida del ángulo AMP. (No vale medir)

PROBLEMA 5

Se tienen 90 tarjetas y en cada una están escritos dos dígitos distintos: 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 12, y así siguiendo hasta 98.
Un conjunto de tarjetas es *correcto* si no contiene ninguna tarjeta que tenga el primer dígito igual al segundo dígito de otra tarjeta del conjunto.
Llamamos *valor* de un conjunto de tarjetas a la suma de los números escritos en cada tarjeta. Por ejemplo, las cuatro tarjetas 04, 35, 78 y 98 forman un conjunto correcto y su valor es 215, pues 04+35+78+98 = 215.
Encuentra un conjunto correcto que tenga el mayor valor posible. Explica por qué es imposible lograr un conjunto correcto de mayor valor.

X^a OLIMPIADA de MAYO
Segundo Nivel
Mayo de 2004

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
<u>Justifica cada una de tus respuestas.</u>
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

PROBLEMA 1

Julián escribe cinco números enteros positivos, no necesariamente distintos, tales que su producto sea igual a su suma. ¿Cuáles pueden ser los números que escribe Julián?

PROBLEMA 2

La mamá de Pepito quiere preparar n paquetes de 3 caramelos para regalar en la fiesta de cumpleaños, y para ello comprará caramelos surtidos de 3 sabores distintos. Puede comprar cualquier número de caramelos, pero no puede elegir cuántos son de cada sabor. Ella quiere poner en cada paquete un caramelo de cada sabor, y si esto no es posible usará sólo caramelos de un sabor y todos los paquetes tendrán 3 caramelos de ese sabor. Determina el menor número de caramelos que debe comprar para poder armar los n paquetes. Explica por qué si compra menos caramelos no tiene la certeza de poder armar los paquetes como quiere.

PROBLEMA 3

Disponemos de una mesa de billar de 8 metros de largo y 2 metros de ancho, con una única bola en su centro. La lanzamos en línea recta y, tras recorrer 29 metros, se detiene en una esquina de la mesa. ¿Cuántas veces ha rebotado la bola contra los bordes de la mesa?
Nota: cuando la bola rebota contra un borde de la mesa los dos ángulos que forma su trayectoria con el borde de la mesa son iguales.

PROBLEMA 4

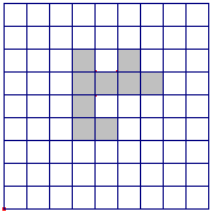
Halla todos los números naturales x, y, z que verifican simultáneamente

$$x \cdot y \cdot z = 4104 \qquad x + y + z = 77$$

PROBLEMA 5

Sobre un tablero de 9x9, dividido en casillas de 1x1 , se colocan, sin superposiciones y sin sobresalirse del tablero, piezas de la forma  .
Cada pieza cubre exactamente tres casillas.

(a) A partir del tablero vacío, ¿cuál es la máxima cantidad de piezas que se pueden colocar?
(b) A partir del tablero con 3 piezas ya colocadas como muestra la figura siguiente, ¿cuál es la máxima cantidad de piezas que se pueden colocar?



Relación de ganadores en la "X Olimpiada de mayo 2004"

Primer nivel

Apellidos y nombre	Centro	Premio
Jiménez Benito, Rubén	IES José Hierro	Oro
Sánchez Salvador, José Luis	CP Miguel de Cervantes (Tres Cantos)	Plata
Herradón Cueto, Moisés	Colegio Brains	PLata
Sánchez Díaz, Jesús María	Colegio Vedruna	Bronce
Barrio Rey, Miguel del	IES Parque de Lisboa	Bronce
Stocks Godínez, Cristina	Colegio Highlands	Bronce
Fernández Alcázar, Andrés	Colegio SEK - Ciudalcampo	Bronce
Rego García, Iago	IES Joan Miró	Mención
Rico Rico, Vicent	IES La Crevetta (Onil, Alicante)	Mención
Berenguer Verdú, Ricardo	CP San Jaime (Alicante)	Mención

Segundo Nivel

Apellidos y nombre	Centro	Premio
Izquierdo Arseguet, Diego	Liceo Francés	Oro
Seror García, Fernando	Colegio San Javier	Plata
Alfaya Sánchez, David	IES José Saramago	PLata
Mateos González, Alvaro	Liceo Francés	Bronce
Furstenheim Milerud, Gabriel	Ntra Sra de la Sabiduría	Bronce
Rodríguez Amana , Oscar	IES S Juan Bautista	Bronce
Bellot Rodríguez, Rodrigo	Retamar	Bronce
Rodríguez Reina, Andrés	Sek - Ciudalcampo	Mención
Fernández del Castillo, Alejandro	Sek - Ciudalcampo	Mención
Rodrigo Rey, Cristina	IES Cardenal Herrera Oria	Mención

CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN
Comunidad de Madrid

X Concurso de Primavera de MATEMÁTICAS 2006

Comunidad de Madrid

Comité organizador del Concurso de Primavera

Juan Jesús Donaire Moreno	*Luis Ferrero de Pablo*
Jesús García Gual	*María Gaspar Alonso-Vega*
Joaquín Hernández Gómez	*Francisco López Álvarez*
Alfredo Martínez Sanz	*María Moreno Warleta*
Fernando Moya Molina	*Merche Sánchez Benito*
Víctor Manuel Sánchez González	*Esteban Serrano Marugán José*
Javier Soler Areta	*María Sordo Juanena*

Límite
“Qué oscuro el borde de la luz
donde ya nada
reaparece”

José Ángel Valente

Presentación

Y al final llegó el diez, ni antes ni después, en esta cuenta hacia delante. Ya salió Aquiles en pos de la voluntariosa tortuga olvidando ambos quién ganó la última carrera. ¡Infinitos a la mar!, que aquí estamos para presentar nuestro concurso al esfuerzo de saber y disfrutar.

¡Viaja con nosotros!

Comité Organizador

Nuestro agradecimiento por el apoyo logístico y financiación a la Facultad de Matemáticas de la U.C.M., al Área de Formación del Profesorado dentro de la Dirección General de Ordenación Académica de la Consejería de Educación y al Consejo Social de la U.C.M., y por el apoyo económico para los premios, a las editoriales **Grupo Anaya y Ediciones SM**, así como al grupo empresarial **El Corte Inglés**

IX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE : Día 2 de marzo de 2005

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ ($\boxed{\times}$) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Ediciones S.M., Grupo ANAYA y El Corte Inglés

1.- Una centena y una decena equivalen a:

A)10 decenas **B)** 2 centenas **C)** 101 decenas **D)** 11 decenas **E)** 2 decenas.

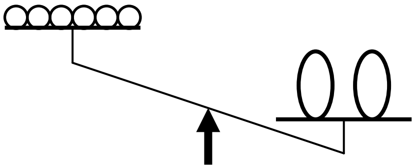
2.- El producto $101 \times 102 \times 103 \times 104 \times 105 \times 106 \times 107 \times 108 \times 109$ acaba en:

A) 20 **B)** 40 **C)** 50 **D)** 60 **E)** 80.

3.- 201: 3 = 67; 2001: 3 = 667; 20001: 3 =6667; … Así la suma de las cifras del número obtenido al dividir doscientos mil millones uno entre 3 es:

A) 61 **B)** 67 **C)** 73 **D)** 79 **E)** 85.

4.- En un platillo de una balanza hay 6 manzanas y en el otro 2 melones y, como ves, pesan más los melones. Si al añadir un melón al platillo de las manzanas, resulta que están en equilibrio, un melón pesa lo mismo que…



A) 2 manzanas **B)** 3 manzanas **C)** 4 manzanas **D)** 5 manzanas **E)** 6 manzanas.

5.- Con 64 cubitos formamos un cubo más grande. ¿Cuántos de los cubitos tienen alguna cara visible?

A) 56 **B)** 52 **C)** 48 **D)** 36 **E)** 24.

6.- Si el lado de un cuadrado mide 7 cm, el de otro, cuya área es doble, medirá aproximadamente:

A) 3 cm **B)** 10 cm **C)** 14 cm **D)** 49 cm **E)** 70 cm.

7.- Si un rectángulo es doble de largo que de ancho y sus dimensiones en cm, vienen dadas en números enteros, su perímetro no puede ser:

A) 30 cm **B)** 42 cm **C)** 44 cm **D)** 60 cm **E)** 72 cm.

8.- Aquí tienes, desordenados, los cumpleaños de Antonio, Beatriz, Carlos y Diana: 1 de Marzo, 17 de Mayo, 20 de Julio y 20 de Marzo. Beatriz y Carlos nacieron el mismo mes, Antonio y Carlos nacieron el mismo día del mes. ¿Quién nació el 17 de Mayo?

A) Antonio **B)** Beatriz **C)** Carlos **D)** Diana **E)** Es imposible saberlo.

9.- Si la suma de los números pares desde el 2 hasta el 200 es 10100, entonces la suma de los impares desde el 1 hasta el 199 es:

A) 10000 **B)** 9900 **C)** 9700 **D)** 5500 **E)** 5050.

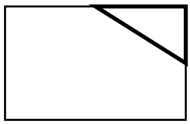
10.- María sale de casa a las 7:55 para llegar al colegio a las 8:17. Su compañera Luisa llega al colegio a las 8:25. Si Luisa tarda 12 minutos menos que María en ir al colegio, ¿a qué hora sale de casa?

A) 7:43 **B)** 7:59 **C)** 8:07 **D)** 8:13 **E)** 8:15.

11.- Escribimos la lista de cifras 12321232123212321… hasta que escribamos 2005 cifras. ¿Cuáles son las tres últimas?

A) 123 **B)** 232 **C)** 321 **D)** 212 **E)** Nada de lo anterior.

12.- El área del rectángulo de la figura es 1. Si dos vértices del triángulo que hemos dibujado son puntos medios de los lados del rectángulo, ¿cuál es el área del triángulo?



A) $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{2}{5}$ **D)** $\frac{3}{8}$ **E)** $\frac{1}{8}$.

13.- ¿Cuántos números de tres cifras *abc* verifican que *abc* + *cba* = 1292?

A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 9.

14.- $77 - (33 + 44) = (77 - 66) - \square$. ¿Qué número debe haber en el cuadradito?

A) 44 **B)** 33 **C)** 22 **D)** 11 **E)** 0.

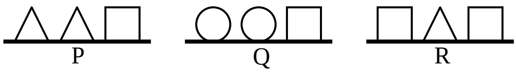
15.- ¿Qué tanto por ciento de 6 kg son 300 gramos?

A) 2 **B)** 5 **C)** 50 **D)** 500 **E)** 5000.

16.- Un juego consiste en contar todos los números del 1 al 100 saltándote aquellos que son múltiplos de 3 o acaban en 3. ¿Cuántos números te tienes que saltar?

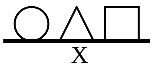
A) 30 **B)** 33 **C)** 36 **D)** 39 **E)** 43.

17.- Los platos *P*, *Q* y *R* está ordenados por orden creciente de peso, es decir, de menor a mayor peso,



así pues $P < Q < R$. Queremos intercalar el plato *X* de forma que se siga manteniendo el orden creciente.

¿Dónde debemos colocar el plato *X*?



A) Entre *P* y *Q* **B)** Entre *Q* y *R* **C)** Delante de *P*

D) Detrás de *R* **E)** *X* y *R* tienen el mismo peso.

18.- Cinco niños se pesan dos a dos de todas las formas posibles, resultando las 10 pesadas siguientes: 90, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 100 y 101 kg. ¿Cuánto pesan los cinco niños juntos?

A) 225 kg **B)** 230 kg **C)** 239 kg **D)** 475 kg **E)** 956 kg.

19.- Dos números enteros positivos están en proporción $\frac{1}{5}$. Su suma entonces no puede ser:

A) 32 **B)** 30 **C)** 24 **D)** 12 **E)** 60.

20.- Uno de los ángulos iguales de un triángulo isósceles mide 80º. ¿Cuánto mide el ángulo desigual?

A) 100º **B)** 40º **C)** 20º **D)** 10º **E)** 8º.

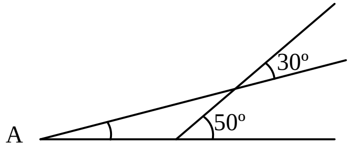
21.- Si el cociente entre las áreas de dos cuadrados es 16, el cociente entre sus perímetros es:

A) 16 **B)** 8 **C)** 4 **D)** 2 **E)** Nada de lo anterior.

22.- ¿Cuánto mide el ángulo *A* de la figura?

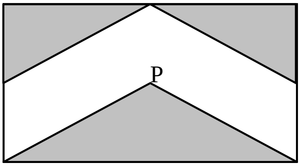
A) 15º **B)** 20º **C)** 25º

D) 30º **E)** 35º.

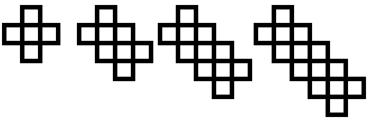


23.- Si el punto P es el centro del rectángulo, entonces el área de la zona sombreada es:

A) Un cuarto del total **B)** Un tercio del total
C) La mitad del total **D)** Dos tercios del total
E) Tres cuartos del total.



24.- En esta serie de tableros, ¿cuántos cuadraditos tiene el tablero que ocupa el décimo lugar?



A) 50 **B)** 38 **C)** 32 **D)** 30 **E)** 29.

25.- ¿Cuántos números hay de dos cifras en los que la cifra de las decenas es mayor que la de las unidades?

A) 40 **B)** 44 **C)** 45 **D)** 46 **E)** 49.

IX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE : Día 2 de marzo de 2005

NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ (☒) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA.**
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Ediciones S.M., Grupo ANAYA y El Corte Inglés

1.- Un grupo de niños están jugando con sus bicicletas y triciclos en la puerta de la casa de Beatriz. Beatriz cuenta 7 niños y 19 ruedas. ¿Cuántos triciclos hay?

A) 2 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7.

2.- Si consideramos la Tierra como una esfera perfecta y el metro fuera la diezmillonésima parte del cuadrante terrestre, el radio de la Tierra estaría en km entre:

A) 5750 y 6000 **B)** 6000 y 6250 **C)** 6250 y 6500

D) 6500 y 6750 **E)** 12750 y 13000.

3.- Antonio y Blanca hacen cuatro tests de puntuación máxima 100 puntos cada uno, en los que Antonio obtiene 78 puntos de media. Blanca obtuvo 10 puntos más que Antonio en el primer test, 10 puntos menos que Antonio en el segundo y 20 puntos más que Antonio tanto en el tercero como en el cuarto. ¿Cuál fue la diferencia en la media de los cuatro tests entre Blanca y Antonio?

A) 10 **B)** 15 **C)** 20 **D)** 25 **E)** 40.

4.- Cuando tiras un dado de seis caras, numeradas del 1 al 6, no puedes ver la cara sobre la que se apoya. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de los números de las otras cinco caras sea divisible por 6?

A) $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{2}{3}$ **D)** $\frac{5}{6}$ **E)** 1.

5.- Alicia, Beatriz, Carlos y Darío van en un coche con 4 plazas, dos delante y dos detrás, siendo Beatriz y Carlos los únicos que saben conducir. ¿De cuántas formas posibles pueden colocarse?

A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 12 **E)** 24.

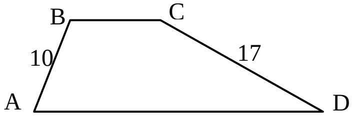
6.- ¿Cuántos enteros entre 999 y 2001 son múltiplos de 15, 20 y 25?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5.

7.- ¿Qué ángulo, en grados, forman las agujas del reloj a las 4 horas y 20 minutos?

A) 0 **B)** 5 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 12.

8.- El área del trapecio *ABCD* es 164 cm^2. Su altura mide 8 cm, $AB = 10$ cm y $CD = 17$cm. ¿Cuántos cm mide *BC*?

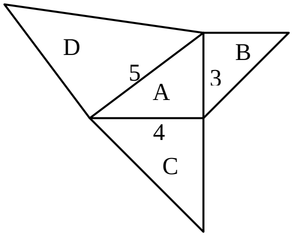


A) 9 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 15 **E)** 20.

9.- Al lanzar una moneda 4 veces, ¿cuál es la probabilidad de que el número de caras sea mayor o igual que el de cruces?

A) $\frac{5}{16}$ **B)** $\frac{3}{8}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{5}{8}$ **E)** $\frac{11}{16}$.

10.- A partir de un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5, construimos triángulos rectángulos e isósceles como indica la figura. Si *A*, *B*, *C*, *D* representan el área de cada uno de esos triángulos, ¿qué afirmación de las siguientes es verdadera?



A) $B + D = A + C$ **B)** $A + B = D$

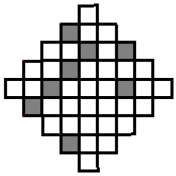
C) $3B + 4C = 5D$ **D)** $B + A = \frac{1}{2}(C + D)$

E) $B + C = D$.

11.- En una reunión, una de cada tres mujeres y dos de cada cinco hombres son fumadores, y hay igual número de hombres que de mujeres. La proporción de personas fumadoras es:

A) 3 de 8 **B)** 11 de 30 **C)** 40 % **D)** 1/3 **E)** 36%.

12.- ¿Cuál es el menor número de casillas que hay que ensombrecer para que la figura tenga un eje de simetría?



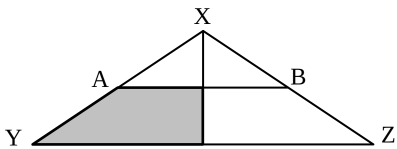
A) cuatro **B)** seis **C)** cinco

D) siete **E)** tres.

13.- En una encuesta cuatro de cada cinco personas responden que les gusta el cine, una de cada cuatro que les gusta el teatro, y sólo al 10% les gusta el cine y el teatro. ¿A qué proporción no les gusta ninguno de los dos espectáculos?

A) $\frac{1}{15}$ **B)** $\frac{4}{75}$ **C)** 1 % **D)** 5% **E)** $\frac{1}{12}$.

14.- El triángulo *XYZ* es isósceles de lado desigual *YZ* y de área 8 cm^2. Si *A* y *B* son los puntos medios de los lados iguales, ¿cuál es el área, en cm^2, de la región sombreada?



A) 1,5 **B)** 2 **C)** 2,5 **D)** 3 **E)** 3,5.

15.- Un automovilista hace un trayecto de A a B a una media de 60 km/h y un trayecto de B a C a una media de 90 km/h. Si la velocidad media del recorrido de A a C ha sido de 75 km/h, y tardó 5 horas en hacerlo, la distancia de A a B es de:

A) 180 km **B)** 175 km **C)** 165 km **D)** 150 km **E)** 120 km.

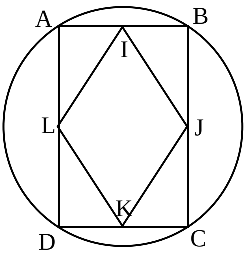
16.- Se tiran dos dados de cuatro caras numeradas del 1 al 4. ¿Cuál es la probabilidad de suma 5?

A) $\frac{2}{7}$ **B)** $\frac{1}{5}$ **C)** 40 % **D)** 25% **E)** $\frac{3}{8}$.

17.- Si el salario medio de las mujeres es el 20% inferior al de los hombres, ¿en qué porcentaje es superior el salario medio de los hombres al de las mujeres?

A) 25 % **B)** 80 % **C)** 120 % **D)** 20 % **E)** 24 %.

18.- En una circunferencia de 3 cm de radio inscribimos un rectángulo *ABCD*. Si *I*, *J*, *K* y *L* son los puntos medios de sus lados, ¿cuál es, en cm, el perímetro del rombo *IJKL*?



A) 8 **B)** 10 **C)** 12

D) 14 **E)** Depende del rectángulo.

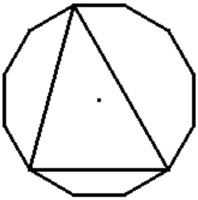
19.- Si desarrollamos el número $4^5 \times 5^{13}$, cuántas cifras tendrá?

A) 12 **B)** 13 **C)** 16 **D)** 17 **E)** 18.

20.- ¿Cuál de los siguientes números es impar sea el que sea el número entero *n*?

A) $2005n$ **B)** $n + 2005$ **C)** n^2 **D)** $n + 2004$ **E)** $2n + 2005$.

21.- En el dodecágono regular de la figura hemos inscrito un triángulo uniendo esos tres vértices. La diferencia entre el ángulo mayor y el menor del triángulo es:



A) 15º **B)** 18º **C)** 25º **D)** 30º

E) 45º.

22.- Para ir de mi casa al colegio voy corriendo a 5 m por segundo y vuelvo también corriendo, a 4 m por segundo. Si en ir y venir tardo 15 minutos, ¿a qué distancia está mi casa del colegio?

A) 4,05 km **B)** 1,8 km **C)** 4 km **D)** 2 km **E)** No se puede determinar.

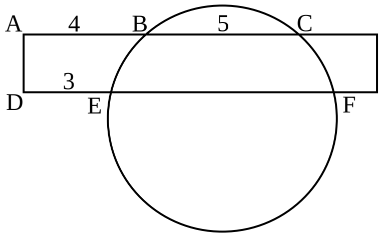
23.- El número x dista de 2 más de 3 y dista de 6 menos de 5. Entonces:

A) $-1 < x < 11$ **B)** $7 < x < 9$ **C)** $5 < x < 9$ **D)** $5 < x < 11$ **E)** $3 < x < 6$.

24.- El punto *P* está en el exterior de una circunferencia. Como mucho, ¿cuántos puntos de la circunferencia están a 3 cm de *P*?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** Es imposible resolverlo con esa información.

25.- Un rectángulo corta a una circunferencia como se muestra en la figura. *AB* = 4 cm, *BC* = 5 cm, *DE* = 3 cm. ¿Cuántos cm mide *EF*?



A) 6 **B)** 7 **C)** $\frac{20}{3}$

D) 8 **E)** 9.

IX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE : Día 2 de marzo de 2005

NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ ($\boxed{\times}$) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

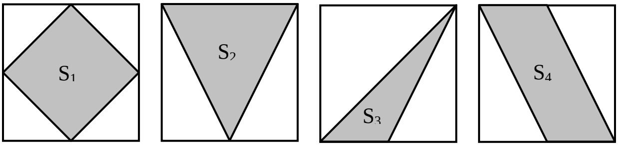
CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Ediciones S.M., Grupo ANAYA y El Corte Inglés

1.- Aquí tienes cuatro cuadrados iguales. Marcamos los puntos medios de los lados y en cada cuadrado sombreamos una determinada superficie. Si llamamos S_1, S_2, S_3 y S_4, a las áreas de las correspondientes superficies, ¿qué afirmación es verdadera?



A) $S_3 < S_4 < S_1$ y $S_1 = S_2$ **B)** $S_3 < S_1$ y $S_1 = S_2 = S_4$ **C)** $S_4 < S_3 < S_1 < S_2$

D) $S_3 < S_1 < S_2$ y $S_1 = S_4$ **E)** $S_3 < S_4 < S_1 < S_2$.

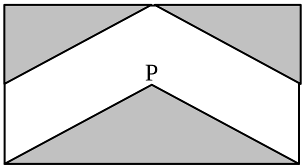
2.- En un triángulo obtusángulo isósceles, el circuncentro define un rombo con los tres vértices del triángulo. ¿Cuánto mide el ángulo obtuso?

A) 100º **B)** 105º **C)** 120º **D)** 135º **E)** 150º.

3.- Si el ortocentro de un triángulo está sobre uno de sus lados, el triángulo es:

A) acutángulo **B)** isósceles **C)** rectángulo
D) escaleno **E)** obtusángulo.

4.- Si el punto P es el centro del rectángulo, entonces el área de la zona sombreada es:

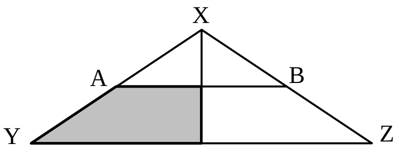


A) Un cuarto del total **B)** Un tercio del total

C) La mitad del total **D)** Dos tercios del total

E) Tres cuartos del total.

5.- El triángulo *XYZ* es isósceles de lado desigual *YZ* y de área 8 cm^2. Si *A* y *B* son los puntos medios de los lados iguales, ¿cuál es el área, en cm^2, de la región sombreada?



A) 1,5 **B)** 2 **C)** 2,5 **D)** 3 **E)** 3,5.

6.- Al lanzar una moneda 4 veces, ¿cuál es la probabilidad de que el número de caras sea mayor o igual que el de cruces?

A) $\frac{5}{16}$ **B)** $\frac{3}{8}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{5}{8}$ **E)** $\frac{11}{16}$.

7.- Un conductor sale con su coche desde el punto *A*; recorre 10 km hacia el norte, luego 10 hacia el Este, después 6 km hacia el Sur, más tarde 2 km hacia el Oeste, 8 km hacia el Norte, 4 km hacia el Oeste y finalmente 9 km hacia el Sur hasta finalizar su viaje en el punto *B*. ¿A qué distancia estará el punto *B* del punto *A*?

A) 0 km **B)** 1 km **C)** $\sqrt{5}$ km **D)** 5 km **E)** $10\sqrt{2}$ km.

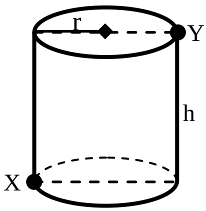
8.- En una reunión, una de cada tres mujeres y dos de cada cinco hombres son fumadores, y hay doble número de hombres que de mujeres. La proporción de personas fumadoras es:

A) 3 de 8 **B)** 11 de 30 **C)** 40 % **D)** 17 de 45 **E)** 36%.

9.- Al tirar dos dados de seis caras numeradas del uno al seis, ¿cuál es la probabilidad de que haya una diferencia de tres puntos entre los resultados?

A) 1 : 6 **B)** 1 : 2 **C)** 1 : 4 **D)** 1 : 9 **E)** 1 : 12.

10.- Una hormiga se desplaza desde el punto *X* al punto *Y* sobre la superficie de un cilindro siguiendo el camino más corto posible. Si $r = 1$ y $h = 6$, ¿cuál es la distancia recorrida por la hormiga?

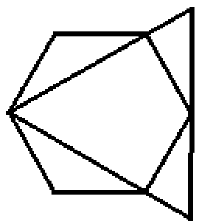


A) 7 **B)** 8 **C)** $2\sqrt{10}$ **D)** $\sqrt{\pi^2+36}$
E) $\sqrt{\pi^2+9}$.

11.- Un viaje espacial sale de la Tierra hacia un planeta situado a 2^{20} km. Después de hacer un cuarto del trayecto, la nave pierde el contacto por radio con la Tierra, recuperándolo cuando está a 2^{19} km de ella. ¿Cuántos km recorrió la nave sin contacto por radio?

A) 2^8 km **B)** 2^9 km **C)** 2^{10} km **D)** 2^{18} km **E)** 2^{19} km.

12.- Si el área del hexágono regular de la figura es 18 m^2 , el área del triángulo equilátero, en m^2, es:

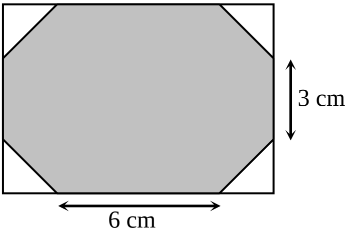


A) 16 **B)** 18 **C)** $9\sqrt{6}$ **D)** $12\sqrt{3}$
E) $8\sqrt{3}$.

13.- Si el polinomio $x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene las raíces 2, 3 y 5, entonces *b* es:

A) 10 **B)** 30 **C)** 31 **D)** -30 **E)** -10.

14.- Al cortar de las 4 esquinas de un naipe rectangular 4 triángulos rectángulos isósceles iguales, como indica la figura, obtenemos un octógono de 62 cm^2 de área. ¿Cuánto mide la superficie que hemos quitado?



A) 16 cm^2 **B)** 12 cm^2

C) 8 cm^2 **D)** 6 cm^2

E) Faltan datos para poder resolver el problema.

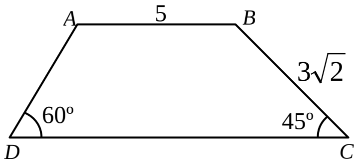
15.- Si $8^{668} + 2^{2005} + 4^{1003} = 7 \times 16^x$, entonces *x* es igual a:

A) 499 **B)** 500 **C)** 501 **D)** 502 **E)** Nada de lo anterior.

16.- La cifra de las unidades de $3^{1001} \times 7^{1002} \times 13^{1003}$ es:

A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9.

17.- La figura *ABCD* es un trapecio con los datos que se indican en la figura. ¿Cuál es la longitud de la base *DC*?



A) $7 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$ **B)** 8 **C)** $\frac{19}{2}$

D) $8 + \sqrt{3}$ **E)** $8 + 3\sqrt{3}$.

18.- ¿Cuál es el mayor entero *n* para el que $n^{200} < 5^{300}$?

A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12.

19.- El número x dista de 2 menos de 3 y dista de 6 más de 5. Entonces:

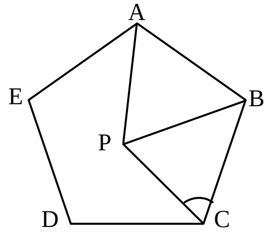
A) $-1 < x < 0$ **B)** $1 < x < 11$ **C)** $-1 < x < 11$ **D)** $-1 < x < 1$ **E)** $5 < x < 6$.

20.- Las soluciones (x, y) del sistema $\begin{cases} y = x^2 - 5x + 1 \\ x = y^2 - 5y + 1 \end{cases}$ verifican que $x - y = 0$, o que $x + y$ es igual a:

A) 6 **B)** 5 **C)** 4 **D)** 1 **E)** 0.

21.- En la figura que te mostramos, *ABCDE* es un pentágono regular y *APB* un triángulo equilátero. ¿Cuál es el valor del ángulo $B\hat{C}P$?

A) 64º **B)** 65º **C)** 66º **D)** 67º **E)** 68º.



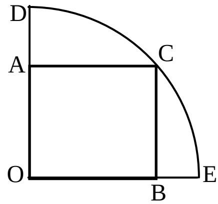
22.- En una reunión hay un cierto número de personas. Curiosamente la media de edad de esas personas coincide con el número de personas que hay. Entra entonces en la habitación una persona de 29 años y vuelve a coincidir la edad media de las que hay con el número de personas. ¿Cuántas personas había en la habitación al principio?

A) 14 **B)** 15 **C)** 16 **D)** 17 **E)** 18.

23.- En el cuadrante de círculo *OED* hay inscrito un rectángulo *OBCA* como se indica en la figura. Si *OE* = 10, ¿cuánto mide la diagonal *AB*?

A) 13 **B)** 8 **C)** 10 **D)** $\sqrt{130}$

E) Faltan datos para poder resolverlo.



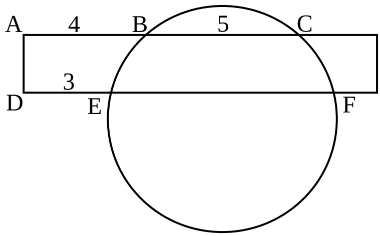
24.- ¿Cuál es el valor de $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2005} \times \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2005}$?

A) $\frac{5^{2005}+1}{4}$ **B)** $\frac{5^{2005}-1}{4}$ **C)** 4^{2005} **D)** 0 **E)** 1.

25.- Un rectángulo corta a una circunferencia como se muestra en la figura.
Si *AB* = 4 cm, *BC* = 5 cm y *DE* = 3 cm, ¿cuántos cm mide *EF*?

A) 6 **B)** 7 **C)** $\frac{20}{3}$

D) 8 **E)** 9.



IX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE : Día 2 de marzo de 2005

NIVEL IV (Bachillerato)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ (☒) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Ediciones S.M., Grupo ANAYA y El Corte Inglés

1.- El triángulo *ABC* tiene un ángulo recto en *C*. Si sen $A = \frac{2}{3}$, entonces tg *B* es igual a:

A) $-\frac{3}{5}$ **B)** $\frac{\sqrt{5}}{3}$ **C)** $\frac{2}{\sqrt{5}}$ **D)** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **E)** $\frac{5}{3}$.

2.- Sea $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Si $x^2 \neq 1$, $f(-x)$ es igual a:

A) $\frac{1}{f(x)}$ **B)** $-f(x)$ **C)** $\frac{1}{f(-x)}$ **D)** $-f(-x)$ **E)** $f(x)$.

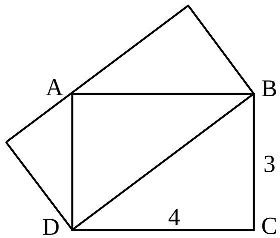
3.- En una ciudad, el cociente entre el número de mujeres y el de hombres es $\frac{11}{10}$. Si la media de las edades de las mujeres es 34 años y la media de las edades de los hombres es 32 años, la media de las edades de toda la población, en años, es:

A) $\frac{329}{10}$ **B)** $\frac{692}{21}$ **C)** 33 **D)** $\frac{694}{21}$ **E)** $\frac{331}{10}$.

4.- Al simplificar sen $(x - y)$ cos y + cos $(x - y)$ sen y obtenemos:

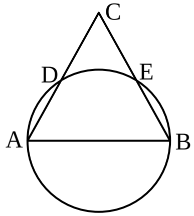
A) 1 **B)** sen x **C)** cos x **D)** sen x cos $2y$ **E)** cos x cos $2y$.

5.- ¿Cuál es el área, en m^2, del rectángulo que tiene como lado la diagonal BD del rectángulo de lados 3 y 4 m, y que tiene el vértice A en su perímetro?



A) 10 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 15 **E)** 20.

6.- El segmento *AB* es diámetro de una circunferencia de radio 1 y lado del triángulo equilátero *ABC*. Esta circunferencia corta a los lados *AC* y *BC* en los puntos *D* y *E* respectivamente. ¿Cuál es la longitud de *AE*?

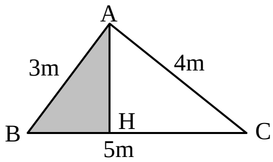


A) $\frac{3}{2}$ **B)** $\frac{5}{3}$ **C)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D)** $\sqrt{3}$ **E)** $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

7.- En una urna hay 3 bolas, numeradas 1, 2 y 3. Hacemos tres extracciones, con devolución, y apuntando en cada caso el número de la bola extraída. Si la suma de los números apuntados es 6, ¿cuál es la probabilidad de que hayamos sacado las tres veces la bola número 2?

A) $\frac{1}{27}$ **B)** $\frac{1}{8}$ **C)** $\frac{1}{7}$ **D)** $\frac{1}{6}$ **E)** $\frac{1}{3}$.

8.- El área del triángulo ABH expresada, en m^2, es:



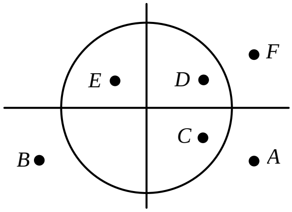
A) 1,8 **B)** 2,16 **C)** 2,25

D) 2,5 **E)** 3,24 .

9.- Si $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{10} = S$ entonces $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{21}$ suma:

A) $2S$ **B)** $(aS)^2$ **C)** $(1+aS)^2$ **D)** $S(1+a^{11})$ **E)** $a^{10}(1+S)$.

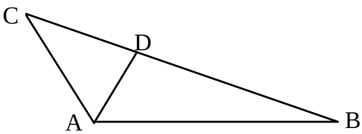
10.- El diagrama de la derecha muestra los afijos de varios números en el plano complejo. La circunferencia está centrada en el origen y tiene radio 1. Uno de estos números es el inverso de *F*. ¿Cuál?



A) *A* **B)** *B* **C)** *C* **D)** *D*

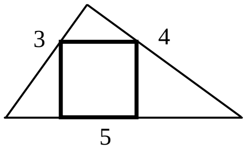
E) *E*.

11.- El punto *D* está en el lado *CB* del triángulo *ABC*. Si los ángulos $C\hat{A}D$ y $D\hat{A}B$ son ambos de 60º y $AC = 3$ y $AB = 6$, la longitud de *AD* es:



A) 2 **B)** 2,5 **C)** 3

D) 3,5 **E)** 4.



12.- En un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5, inscribimos un cuadrado como se ve en la figura. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?

A) $\frac{25}{12}$ **B)** $\frac{60}{37}$ **C)** $\frac{30}{13}$ **D)** 2 **E)** $\frac{37}{12}$.

13.- ¿Cuánto vale el producto de todas las soluciones reales de la ecuación $x^{\log_{10} x} = 10$?

A) 1 **B)** –1 **C)** 10 **D)** $\frac{1}{10}$ **E)** Nada de lo anterior.

14.- Siendo log el logaritmo en base diez y tomando log 2 = 0,30, ¿cuál es el valor de $\log \sqrt[3]{0,25}$?

A) - 0,60 **B)** - 0,45 **C)** – 0,35 **D)** – 0,25 **E)** – 0,20.

15.- Un cuadrado y un triángulo equilátero tienen el mismo perímetro. Si *A* es el área del círculo circunscrito al cuadrado y *B* el área del círculo circunscrito al triángulo, $\frac{A}{B}$ es igual a:

A) $\frac{9}{16}$ **B)** $\frac{3}{4}$ **C)** $\frac{27}{32}$ **D)** $\frac{3\sqrt{6}}{8}$ **E)** 1.

16.- La gráfica de la función $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ corta al eje horizontal en cinco puntos distintos, uno de los cuales es (0, 0). ¿Cuál de los siguientes coeficientes no puede ser cero?

A) *a* **B)** *b* **C)** *c* **D)** *d* **E)** *e*.

17.- Sea *S* el conjunto de las permutaciones de 1, 2, 3, 4, 5 para las que el primer término no es 1. Elegimos al azar una de las permutaciones de *S*, y la probabilidad de que el segundo término sea 2 es $\frac{a}{b}$, fracción irreducible. ¿Cuánto vale $a + b$?

A) 5 **B)** 6 **C)** 11 **D)** 16 **E)** 19.

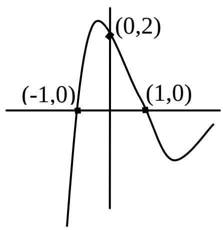
18.- Si $\log (xy^3) = 1$ y $\log (x^2y) = 1$, ¿cuánto vale $\log (xy)$?

A) $-\frac{1}{2}$ **B)** 0 **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{3}{5}$ **E)** 1.

19.- Aquí te mostramos un trozo de la gráfica de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. ¿Cuánto vale *b*?

A) –4 **B)** –2 **C)** 0 **D)** 2

E) 4.



20.- La circunferencia concéntrica con $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$ que pasa por (1, 1) tiene radio:

A) 5 **B)** 10 **C)** $\sqrt{13}$ **D)** $\sqrt{20}$ **E)** $\sqrt{17}$.

21.- ¿Cuántos enteros satisfacen la ecuación $(x^2 - x - 1)^{x+2} = 1$?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** Nada de lo anterior.

22.- La recta simétrica de $2x + 3y = 1$ respecto de $y = -x$ es:

A) $2x - 3y = 1$ **B)** $3x + 2y = 1$ **C)** $3x - 2y = 1$ **D)** $3x + 2y = -1$ **E)** $-3x + 2y = 1$.

23.- Si x e y son los números complejos dados por $x = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones no es verdadera?

A) $x^5 + y^5 = -1$ **B)** $x^7 + y^7 = -1$ **C)** $x^9 + y^9 = -1$ **D)** $x^{11} + y^{11} = -1$ **E)** $x^{13} + y^{13} = -1$.

24.- Sean p, q y r números primos. De los siguientes números, ¿cuál es el menor cubo perfecto que es múltiplo de $n = pq^2r^4$?

A) $p^8q^8r^8$ **B)** $(pq^2r^2)^3$ **C)** $(p^2q^2r^2)^3$ **D)** $(pqr^2)^3$ **E)** $4p^3q^3r^3$.

25.- Si $z = \text{sen } 20^\circ + i \cos 20^\circ$, entonces z^3 es igual a:

A) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ **B)** 1_{120° **C)** 1_{210° **D)** $\text{sen } 60^\circ + i \cos 60^\circ$ **E)** $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$.

IX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE : Día 23 de abril de 2005

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ ($\boxed{\times}$) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Ediciones S.M., Grupo ANAYA y El Corte Inglés

1.- El número de aristas de un prisma octogonal es:

A)16 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 24 **E)** 30.

2.- ¿Cuántos números de tres cifras tienen las tres cifras diferentes?

A) 621 **B)** 640 **C)** 648 **D)** 684 **E)** 720.

3.- Para seleccionar a los ganadores en un festival de canciones, cada una de las canciones la cantan cuatro de los participantes. Los cuatro primeros participantes cantaron la canción 1, los cuatro siguientes cantaron la canción 2, los cuatro siguientes la 3 y así sucesivamente. ¿Qué canción cantó el participante número 73?

A) 18 **B)** 19 **C)** 20 **D)** 23 **E)** 25.

4.- Si 350 g de patatas fritas cuestan 0,84 €, el precio en euros del kilogramo es:

A) 2,10 **B)** 2,20 **C)** 2,24 **D)** 2,36 **E)** 2,40.

5.- La edad que tiene hoy Juan, sumada con la edad que tenía hace 5 años, es igual a 21 años. ¿Qué edad tendrá Juan dentro de 5 años?

A) 16 **B)** 17 **C)** 18 **D)** 19 **E)** 20.

6.- Rodeamos un euro por 6 monedas de un euro tangentes a él y el conjunto de las siete monedas lo volvemos a rodear por una cadena de euros tangentes a las seis anteriores. ¿Cuántas monedas habrá en total?

A) 13 **B)** 15 **C)** 16 **D)** 18 **E)** 19.

7.- Si la suma de dos números primos es también un número primo, uno de los dos primos tiene que ser:

A) 2 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 11.

8.- Dani y Alicia tienen que rotular una lista de números del 1 al 100. En el tiempo que Dani rotula una cifra, Alicia ha rotulado dos. Si Dani empieza rotulando los impares y Alicia los pares (ambos de forma ordenada y empezando por la decenas en los número de dos cifras), ¿qué cifra acabará de rotular Dani cuando Alicia termine con el número 24?

A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9.

9.- El 25 % de 8 es igual al 50 % de:

A) 128 **B)** 64 **C)** 32 **D)** 16 **E)** 4.

10.- El producto $2 \times 5 \times 0{,}2 \times 0{,}5 \times 0{,}04 \times 0{,}25$ es igual a:

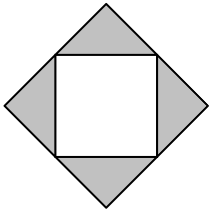
A) 0,0001 **B)** 0,001 **C)** 0,01 **D)** 0,1 **E)** 1.

11.- La suma de 6 números enteros consecutivos nunca puede ser:

A) 15 **B)** 45 **C)** 39 **D)** 75 **E)** 85.

12.- Alicia dice: *"Yo nunca miento"*; Beatriz dice: *"Alicia no está mintiendo"*; Carlos dice: *"Beatriz está mintiendo"* y Diana dice: *"Carlos no está mintiendo"*. Si Beatriz está mintiendo, ¿cuántos de los otros tres tienen que estar mintiendo?

A) Ninguno **B)** Uno **C)**Dos **D)** Los tres **E)** No hay datos suficientes para poder asegurarlo.



13.- Los lados de un cuadrado son las hipotenusas de cuatro triángulos rectángulos isósceles iguales, como se muestra en la figura. Si el área del cuadrado es 18, ¿cuál es el área de la región sombreada?

A) 36 **B)** 27 **C)** 18 **D)** 9 **E)** 6.

14.- Pedro, Quino y Roberto están pensando en un número cada uno. La suma de cada una de las tres parejas posibles de números es 2003, 2004, 2005. ¿Cuál es la suma de los tres números?

A) 3006 **B)** 3005 **C)** 3004 **D)** 3003 **E)** 3002.

15.- Sea la suma: 1 + 12 + 123 + 1234 + 12345 + 123456. ¿Cuántas cifras distintas tiene el resultado?

A) tres **B)** cuatro **C)** cinco **D)** seis **E)** siete.

16.- Si $4355 \times 4356 = P$, entonces 4356×4357 es igual a:

A) $P + 4355$ **B)** $P + 4356$ **C)** $P + 8710$ **D)** $P + 8711$ **E)** $P + 8712$.

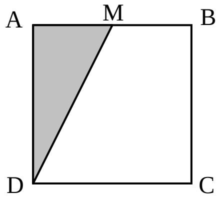
17.- En un cuadrilátero sus dos diagonales son iguales y se cortan en su punto medio. Necesariamente se trata de un:

A) Trapecio **B)** Rombo **C)** Cuadrado **D)** Rectángulo **E)** Paralelogramo.

18.- ¿Qué proporción es 15 de 120?

A) 8,5 % **B)** $\frac{3}{16}$ **C)** 1: 4 **D)** 12,5 % **E)** 15,2 %.

19.- En el cuadrado ABCD, M es el punto medio del lado AB. Si el área de la parte sombreada es 7 cm^2, ¿cuál es, en cm^2, el área del cuadrado?



A) 36 **B)** 28 **C)** 25 **D)** 21

E) 14.

20.- La edad media de los 11 jugadores de un equipo de fútbol es 22 años. En el transcurso de un partido, expulsan a uno de ellos, resultando que la edad media de los 10 restantes es ahora 21 años. ¿Qué edad tiene el jugador expulsado?

A) 21 **B)** 22 **C)** 23 **D)** 32 **E)** 33.

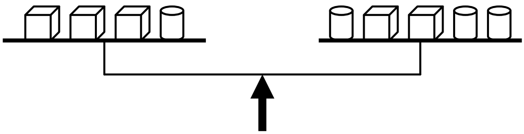
21.- Escribimos todos los números enteros del 1 al 400 en orden, sin dejar espacios, así: 12345678910111213 … 398399400. ¿Cuántas veces aparece el trozo "123" (en ese orden)?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** Nada de lo anterior.

22.- En una reunión, cada uno de los asistentes dio la mano a otros tres. Si el número de apretones de mano fue 24, ¿cuántas personas había?

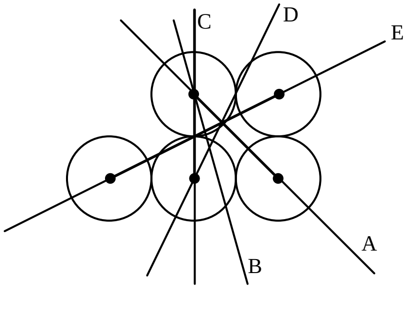
A) 8 **B)** 12 **C)** 16 **D)** 24 **E)** 36.

23.- El peso total de todos los objetos de estos dos platillos de esta balanza, que está equilibrada, es 420 g. ¿Cuánto pesa cada cubo?



A) 30 g **B)** 42 g **C)** 45,5 g **D)** 52,5 g **E)** 60 g.

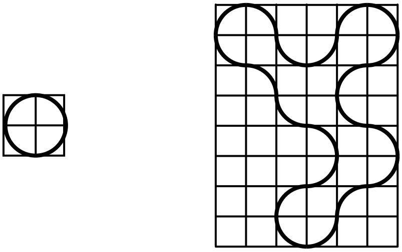
24.- Aquí tienes 5 círculos tangentes, todos del mismo radio. ¿Qué recta de las cinco divide la superficie ocupada por los círculos en dos trozos de igual área?



A) A **B)** B **C)** C

D) D **E)** E.

25.- Tomando como unidad la longitud de la circunferencia pequeña, ¿cuál es la longitud de la curva que te mostramos?



A) 4 **B)** 4,5 **C)** 4,75 **D)** 5 **E)** 6.

IX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE : Día 23 de abril de 2005

NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

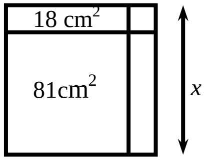
* **MARCA CON UNA CRUZ ($\boxed{\times}$) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

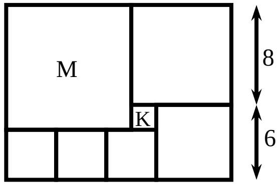
COLABORAN:

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Ediciones S.M., Grupo ANAYA y El Corte Inglés



1.- ¿Cuál es la longitud x del lado del cuadrado grande?

A) 9 cm **B)** 2 cm **C)** 7 cm **D)** 10 cm **E)** 11 cm.



2.- El rectángulo que observas está formado por 7 cuadrados de los cuales, como ves, hay tres iguales. M es el mayor y K el más pequeño. ¿Cuántos cuadrados como K caben en el M?

A) 16 **B)** 25 **C)** 36

D) 48 **E)** La figura es imposible.

3.- 201: 3 = 67; 2001: 3 = 667; 20001: 3 =6667; … Así al dividir $2\times10^{12}+1$ entre 3, la suma de las cifras del número obtenido es:

A) 61 **B)** 67 **C)** 73 **D)** 79 **E)** 85.

4.- Con 64 cubitos formamos un cubo más grande. ¿Cuántas caras de los cubitos no son ahora visibles?

A) 125 **B)** 222 **C)** 256 **D)** 288 **E)** 320.

5.- El primer primo mayor que 200 acaba en:

A) uno **B)** tres **C)** cinco **D)** siete **E)** nueve.

6.- El camino desde la casa de Alicia a la de su amiga Sara tiene 57 árboles. Un día que Alicia va a ver a Sara, marca con un lazo rojo (empezando por el primero) un árbol sí y uno no. A la vuelta, marca (empezando también por el primero) uno sí y dos no. Como es lógico, en algún árbol quedarán dos lazos, pero, ¿cuántos no tendrán ninguno?

A) 15 **B)** 16 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 19.

7.- Por sus lados, un triángulo puede ser equilátero, isósceles o escaleno. Por sus ángulos, puede ser acutángulo, rectángulo u obtusángulo: Al combinar las dos clasificaciones, ¿cuántos casos son posibles?:

A) cinco **B)** seis **C)** siete **D)** ocho **E)** nueve.

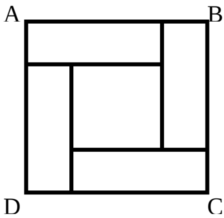
8.- El producto $2 \times 5 \times 0{,}2 \times 0{,}5 \times (0{,}2)^2 \times (0{,}5)^2$ es igual a:

A) $(0{,}1)^4$ **B)** $(0{,}1)^3$ **C)** $(0{,}1)^2$ **D)** 0,1 **E)** 1 .

9.- El máximo común divisor de 4224 y 2424 es:

A) 12 **B)** 24 **C)** 42 **D)** 48 **E)** 72.

10.- El cuadrado ABCD está formado por un cuadrado interior bordeado por cuatro rectángulos iguales, como se aprecia en la figura. Si el perímetro de cada uno de los rectángulos es 40 cm, ¿cuál es el área, en cm^2, del cuadrado ABCD?



A) 400 **B)** 200 **C)** 160 **D)** 100 **E)** 80.

11.- Si el resto de dividir el número de dos cifras ab entre 11 es 4, el resto de dividir $abab$ entre 11 es:

A) 8 **B)** 4 **C)** 2 **D)** 1 **E)** 0.

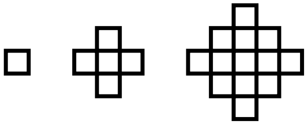
12.- El perímetro de un círculo mide en metros lo mismo que su área en m^2. Así su radio, en metros, mide:

A) 4 **B)** π **C)** 2 **D)** $\sqrt{2}$ **E)** 1.

13.- Del 1 al 100, la cadena más larga de números consecutivos compuestos (que no son primos), ¿cuántos números tiene?

A) 8 **B)** 7 **C)** 6 **D)** 5 **E)** 4.

14.- En esta serie de tableros, ¿cuántos cuadraditos tiene el tablero que ocupa el sexto lugar?



A) 41 **B)** 49 **C)** 61 **D)** 64 **E)** 85.

15.- Sumamos los diez primeros números formados exclusivamente por unos, es decir: 1 + 11 + 111 + 1111 + ... + 1111111111. ¿Cuántas cifras distintas tiene el resultado?

A) dos **B)** cinco **C)** ocho **D)** nueve **E)** diez.

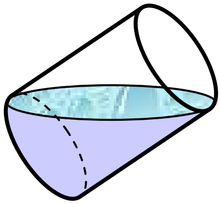
16.- Si $4355 \times 4357 = P$, entonces 4356×4356 es igual a:

A) $P + 1$ **B)** P **C)** $P - 1$ **D)** $P + 4356$ **E)** $P + 8712$.

17.- En una fotocopiadora nos cobran 5 céntimos de euro por cada una de las diez primeras fotocopias, 4 céntimos por cada fotocopia de la once a la cien y 3 céntimos por cada fotocopia de la 101 en adelante. Si saco 220 fotocopias el precio medio de la fotocopia, en céntimos, es:

A) 3,2 **B)** 3,25 **C)** 3,4 **D)** 3,5 **E)** 3,75.

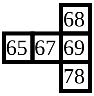
18.- El vaso cilíndrico del dibujo contiene agua. Si la altura del vaso es 14 cm, ¿cuál será, en cm, la altura alcanzada por el agua cuando el vaso está vertical?

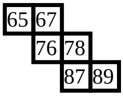


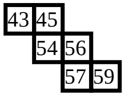
A) 5,5 **B)** 6 **C)** 6,5 **D)** 7
E) 8.

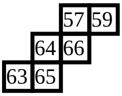
19.- Pedro escribe, en cierto orden y en 5 columnas, todos los números enteros desde el 0 hasta el 109 como te mostramos. Uno de los siguientes trozos de cuadrícula no aparece en la cuadrícula de Pedro. ¿Cuál?

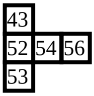
0	2	4	6	8
1	3	5	7	9
10	12	14	16	18
11	13	15	17	19
20	22	24	26	28
21				

A)


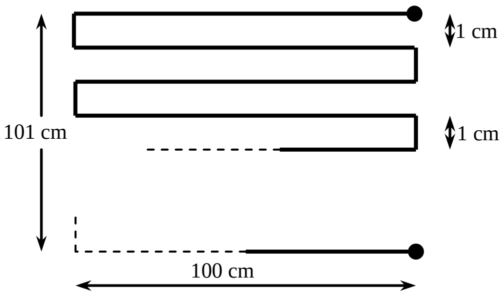
B)


C)


D)


E)


20.- ¿Cuál es la longitud del camino que va desde F a G?



A) 10301 cm **B)** 10201 cm

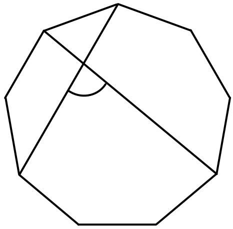
C) 909 cm **D)** 10100 cm

E) 9900 cm.

21.- Si el volumen de un cilindro de radio 1 dm es de π dm^3, entonces su área lateral, en dm^2, es:

A) 1 **B)** 2π **C)** $\frac{\pi}{2}$ **D)** 2 **E)** $\frac{1}{2}$.

22.- ¿Cuánto mide el ángulo de la figura, interior a un polígono regular de nueve lados?

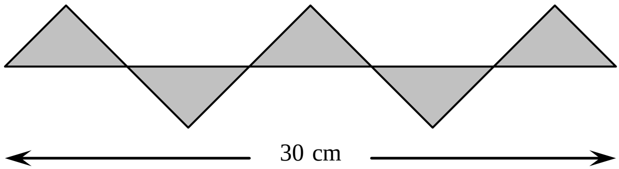


A) 80º **B)** 75º **C)** 70º **D)** 65º **E)** 60º.

23.- $99 = 11 \times 9$; $1001 = 11 \times 9$; $9999 = 11 \times 909$; $100001 = 11 \times 9091$; $999999 = 11 \times 90909$ y así sucesivamente. ¿Cuánto suman las cifras del número obtenido al dividir $(10^{12} - 1)$ entre 11?

A) 108 **B)** 109 **C)** 72 **D)** 54 **E)** 55.

24.- La figura que te mostramos está compuesta por 5 triángulos rectángulos isósceles idénticos. ¿Cuál es, en cm^2, la suma de sus áreas?



A) 20 **B)** 25 **C)** 35 **D)** 45 **E)** 50.

25.- Seis puntos A, B, C, D, E y F están alineados en ese orden. Si AD = CF y BD = DF, entonces obligatoriamente:

A) AB = BC **B)** BC = DE **C)** BD = EF **D)** AB = CD **E)** CD = EF.

IX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE : Día 23 de abril de 2005

NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ (☒) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Ediciones S.M., Grupo ANAYA y El Corte Inglés

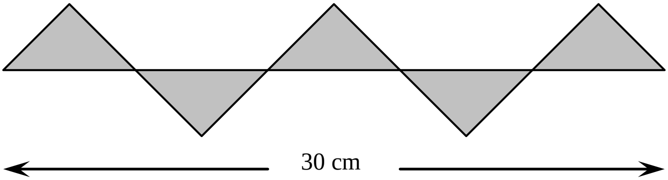
1.- El mayor número de cuatro cifras distintas, múltiplo de 11, lo es también de:

A) ocho **B)** nueve **C)** trece **D)** diecisiete **E)** quince.

2.- 99 = 11 × 9; 1001 = 11 × 9; 9999 = 11 × 909; 100001 = 11 × 9091; 999999 = 11 × 90909 y así sucesivamente. ¿Cuánto suman las cifras del número obtenido al dividir $(10^{12} - 1)$ entre 11?

A) 108 **B)** 109 **C)** 72 **D)** 54 **E)** 55.

3.- La figura que te mostramos está compuesta por 5 triángulos rectángulos isósceles idénticos. ¿Cuál es, en cm^2, la suma de sus áreas?



A) 20 **B)** 25 **C)** 35 **D)** 45 **E)** 50.

4.- Si $x > y > 0$, entonces $\dfrac{x^y \cdot y^x}{y^y \cdot x^x}$ es igual a:

A) $(x-y)^{y/x}$ **B)** $\left(\dfrac{y}{x}\right)^{x-y}$ **C)** 1 **D)** $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{y+x}$ **E)** $(x-y)^{x/y}$.

5.- El cociente entre *a* y *b* es $\dfrac{4}{3}$; entre *c* y *d* es $\dfrac{3}{2}$ y entre *d* y *b*, $\dfrac{1}{6}$. ¿Cuál es el cociente entre *a* y *c*?

A) $\dfrac{1}{3}$ **B)** $\dfrac{16}{3}$ **C)** $\dfrac{20}{3}$ **D)** $\dfrac{27}{4}$ **E)** 12.

6.- ¿Para cuántos enteros positivos *k*, se verifica que la ecuación $kx - 12 = 3k$, de incógnita *x*, tiene solución entera?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7.

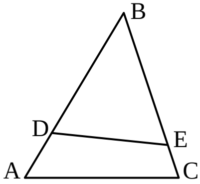
7.- La suma $0,\widehat{1} + 0,\widehat{2} + 0,\widehat{3} + \dots\dots + 0,\widehat{9}$ es igual a:

A) 5 **B)** $5,\widehat{5}$ **C)** $1,\widehat{8}$ **D)** 2 **E)** $11,\widehat{1}$.

8.- En un cuadrilátero los ángulos están en progresión geométrica de razón 2. ¿Cuál es la diferencia entre el ángulo mayor y el menor?.

A) 168º **B)** 150º **C)** 135º **D)** 120º **E)** 90º.

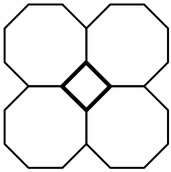
9.- En el triángulo ABC de la figura, el ángulo Â mide 55º. Si BD = BE y el ángulo $B\hat{D}E$ mide 65º, ¿cuánto mide el ángulo Ĉ?



A) 60º **B)** 65º **C)** 70º **D)** 75º

E) 80º.

10.- Rodeamos un polígono regular de *"m"* lados por *m* polígonos regulares de *"n"* lados cada uno, sin que haya huecos ni superposiciones. (En la figura que te mostramos, $m = 4$ y $n = 8$). ¿Cuánto vale n si $m = 10$?

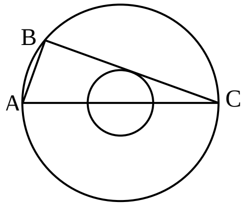


A) 5 **B)** 6 **C)** 14 **D)** 20 **E)** 26.

11.- El resto de dividir $10^8 + 1$ entre 11 es:

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4.

12.- Los radios de dos circunferencias concéntricas están en la razón 1 a 3. Si AC es un diámetro de la circunferencia grande, BC una cuerda de la grande tangente a la pequeña y AB = 12, el radio de la circunferencia grande es:



A) 13 **B)** 18 **C)** 21 **D)** 24

E) 26.

13.- Definimos la operación "☺" como $x☺y = 4x - 3y + xy$ para cualesquiera números reales x e y. ¿Para cuántos números reales y, se verifica que $3☺y = 12$?

A) 0 **B)** 1 **C)** 3 **D)** 4 **E)** más de 4.

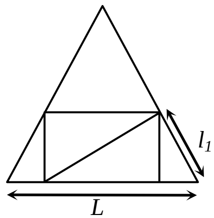
14.- El valor de $\sqrt{\dfrac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}}$ es:

A) $\sqrt{2}$ **B)** 16 **C)** 32 **D)** $\sqrt[3]{12^2}$ **E)** 512,5.

15.- Utilizamos el símbolo R_k para designar a aquellos enteros formados exclusivamente por k unos. Así pues, $R_3 = 111$ y $R_5 = 11111$.
Cuando dividimos R_{24} entre R_4 el cociente $Q = \frac{R_{24}}{R_4}$ es un número entero formado exclusivamente por unos y ceros. ¿Cuántos ceros tiene Q?

A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 15.

16.- El triángulo equilátero de la figura de lado L, está dividido en cinco piezas que se pueden reagrupar formando tres triángulos equiláteros más pequeños, de diferente tamaño y de lados l_1, l_2, y l_3 $(l_1 < l_2 < l_3)$. La proporción, $\frac{l_1}{L}$, entre el lado del equilátero más pequeño, l_1 y el lado del de partida, L, es:



: **A)** 2:5 **B)** 1:3 **C)** 1:4 **D)** 3:10

E) 4:9.

17.- En una fotocopiadora nos cobran 5 céntimos de euro por cada una de las diez primeras fotocopias, 4 céntimos por cada fotocopia de la once a la cien y 3 céntimos por cada fotocopia de la 101 en adelante. ¿Cuántas fotocopias debemos hacer para que el precio medio nos salga a 3,5 céntimos?

A) 120 **B)** 150 **C)** 180 **D)** 200 **E)** 220.

18.- ¿Cuántos capicúas de tres cifras son cuadrados perfectos?

A) ninguno **B)** uno **C)** dos **D)** tres **E)** cuatro.

19.- El segmento de extremos (-5, 0) y (25, 0) es el diámetro de una circunferencia. Si el punto (x, 15) pertenece a la circunferencia, ¿cuánto vale x?

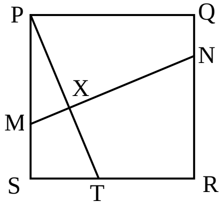
A) 10 **B)** 12,5 **C)** 15 **D)** 17,5 **E)** 20.

20.- A Pifio le han propuesto que multiplique un número por 6 y luego sume 24 al resultado, pero como es muy distraído en lugar de multiplicar, divide entre 6 y en vez de sumar, resta 24. Si después de tantas pifias obtiene 16, ¿qué habría obtenido si hubiera hecho las cosas bien?

A) Menos de 400 **B)** Entre 400 y 800 **C)** Entre 800 y 1200

D) Entre 1200 y 1600 **E)** Más de 1600.

21.- El polígono PQRS de la figura, es un cuadrado de lado 12. Si los segmentos PT y MN son perpendiculares y se cortan en un punto X de tal forma que: ST = 5 y MX = 4, entonces la longitud de XN es:



A) 8,5 **B)** 9 **C)** 9,5 **D)** $7\sqrt{2}$ **E)** 10.

22.- Si el ángulo Â es el cuádruple de Ĉ y el complementario de Ĉ es el cuádruple del complementario de Â, el ángulo Ĉ es igual a

A) 10º **B)** 12º **C)** 15º **D)** 18º **E)** 22º 30'.

23.- Sean x e y dos números reales distintos y designamos por M(x, y) al mayor de los dos y m(x, y) al menor de ellos. Si $a < b < c < d < e$, entonces $M[M(a, m(b,c)); m(d, m(a,e))]$ es:

A) a **B)** b **C)** c **D)** d **E)** e.

24.- Un rectángulo de lados 8 y $2\sqrt{2}$ tiene el mismo centro que un círculo de radio 2. ¿Cuánto vale el área de la región común a ambos?

A) 2π **B)** 2π + 2 **C)** 4π - 4 **D)** 2π + 4 **E)** 4π - 2.

25.- ¿En cuántos casos es falsa la siguiente afirmación?
"Si N es un número entero positivo impar, cuyas cifras suman 4 y ninguna es 0, entonces es primo"

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4.

IX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE : Día 23 de abril de 2005

NIVEL IV (Bachillerato)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ ($\boxed{\times}$) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Ediciones S.M., Grupo ANAYA y El Corte Inglés

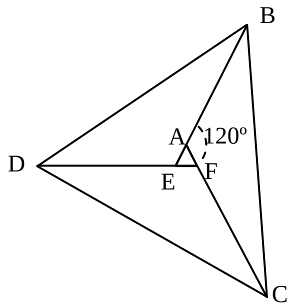
1.- Dado un cubo de lado 1 m, formamos un triángulo equilátero tomando como vértices los extremos de la diagonal de una cara y otro de los extremos de la diagonal no paralela de la cara opuesta. ¿Cuál es, en m^2, el área de ese triángulo?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **C)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **D)** $\sqrt{3}$ **E)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2.- El valor de *cotg 10º + tg 5º* es igual que

A) *cosec 5º* **B)** *cosec 10º* **C)** *sec 5º* **D)** *sec 10º* **E)** *sen 15º*.

3.- El triángulo ABC de lados correspondientes *a*, *b* y *c* tiene un ángulo en A de 120º. Por ello podemos obtener girando, el triángulo equilátero BCD formado por tres triángulos como el de partida y un triángulo equilátero pequeño interior AEF. El área de este triángulo equilátero AEF es:



A) $\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$ **B)** $\frac{a^2-b^2-c^2}{\sqrt{3}}$

C) $\frac{\sqrt{3}}{4}(b-c)^2$ **D)** $\frac{\sqrt{3}}{12}\left[a^2-\left(b^2-c^2\right)\right]$

E) $a^2-b^2-c^2+bc$.

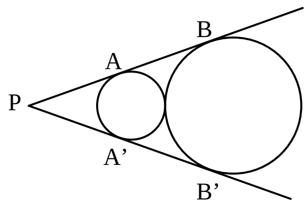
4.- El resultado de las operaciones $\left[\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+...+\binom{10}{2}\right]\times 6+10$, es:

A) 1000 **B)** 900 **C)** 888 **D)** 876 **E)** 625.

5.- Los ángulos de un trapecio están en progresión aritmética. Si el más pequeño es 75º el mayor será:

A) 95º **B)** 100º **C)** 105º **D)** 110º **E)** 115º.

6.- Las dos circunferencias de la figura son tangentes exteriores y las rectas PAB y PA’B’ las tangentes comunes a ambas. Si PA = AB = 4, el área del círculo pequeño es:



A) 1,44π **B)** 2π **C)** 2,56π

D) $\sqrt{8}\,\pi$ **E)** 4π.

7.- ¿Cuál de estos números es el mayor?

A) $\sqrt{\sqrt[3]{5\times 6}}$ **B)** $\sqrt{6\times\sqrt[3]{5}}$ **C)** $\sqrt{5\times\sqrt[3]{6}}$ **D)** $\sqrt[3]{5\times\sqrt{6}}$ **E)** $\sqrt[3]{6\times\sqrt{5}}$.

8.- ¿Cuál de las siguientes rectas es tangente a $y = x^2 - 3x + 1$?

A) $y = x + 1$ **B)** $y = 2x + 3$ **C)** $y = 3x - 8$ **D)** $y = -3x$ **E)** $y = 3x - 1$.

9.- En un plano tomamos dos puntos A y B que distan entre sí 5 unidades. ¿Cuántas rectas de ese plano distan 2 unidades de A y 2 de B?

A) 0 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** Infinitas.

10.- En un triángulo MNP, el baricentro es G (1, 6) y el punto medio T, del lado NP, tiene coordenadas (3, 5). ¿Cuáles son las coordenadas de M?

A) (-3, 8) **B)** (-1, 7) **C)** (7, 3) **D)** $(2, \frac{11}{2})$ **E)** (2, -1).

11.- Un triángulo cuyos lados vienen dados por números enteros tiene de perímetro 8. ¿Cuál es el área?

A) $2\sqrt{2}$ **B)** $\frac{16}{9}\sqrt{3}$ **C)** $2\sqrt{3}$ **D)** 4 **E)** $4\sqrt{2}$.

12.- Sea a > 0, si $a^{0,30} = 2$ y $a^{0,48} = 3$, entonces $a^{0,66}$ sería igual a:

A) 4,5 **B)** 6 **C)** 8,1 **D)** 5 **E)** 8.

13.- ¿Cuál de los siguientes puntos pertenece a una de las bisectrices de las rectas $r: 3x + 4y = 5$ y $s: y = 0$?

A) (1, 1) **B)** (0, 0) **C)** (1, 2) **D)** (2, 1) **E)** (2, -1).

14.- La suma $1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + (1+i)^4 + (1+i)^5$ es igual a:

A) $1_{270^{o}}$ **B)** $8i$ **C)** $-8 + i$ **D)** $8 - i$ **E)** $\frac{7}{i}$.

15.- ¿Cuántas cifras distintas tiene el resultado de la siguiente suma?

1 + 12 + 123 + 1234 + 12345 + 123456 + 1234567 + 12345678 + 123456789

A) nueve **B)** ocho **C)** siete **D)** seis **E)** cinco.

16.- Si $1^2+3^2+5^2+......+99^2=S$, ¿cuánto suma $2^2+4^2+6^2+.....+100^2$?

A) S + 2550 **B)** 2S **C)** 4S **D)** S + 5050 **E)** S + 5075.

17.- ¿Cuántos números de tres cifras *abc* verifican que ellos y *cba* son cuadrados perfectos?

A) siete **B)** seis **C)** cinco **D)** cuatro **E)** tres.

18.- En un triángulo *ABC*, *a* = 8, *b* = 5, y $\cos\hat{C}=\frac{3}{5}$. El área es:

A) 16 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 21 **E)** 25.

19.- Sabiendo que $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ y que α está en el primer cuadrante, el sen 4α es:

A) $\frac{48}{625}$ **B)** $\frac{60}{625}$ **C)** $\frac{196}{625}$ **D)** 1 **E)** $\frac{336}{625}$.

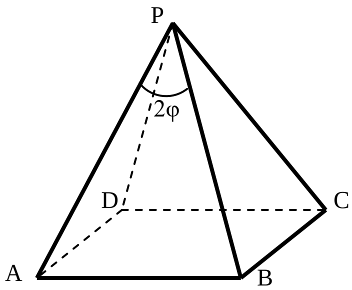
20.- Tenemos cuatro números enteros y si los sumamos de tres en tres obtenemos los siguientes resultados: 180, 197, 208 y 222. ¿Cuál es el mayor de los cuatro números?

A) 77 **B)** 83 **C)** 89 **D)** 95 **E)** 96.

21.- Considera una pirámide PABCD cuya base ABCD es un cuadrado y el vértice P equidista de los puntos A, B, C y D. Si AB = 1 y el ángulo $A\hat{P}B=2\varphi$, el volumen de la pirámide es:

A) $\frac{sen\varphi}{6}$ **B)** $\frac{\cot g\varphi}{3}$ **C)** $\frac{1}{sen\varphi}$

D) $\frac{1-sen(2\varphi)}{3}$ **E)** $\frac{\sqrt{\cos(2\varphi)}}{6\,sen\varphi}$.



22.- Para cada entero positivo *n*, sea *S(n)* la suma de sus dígitos. ¿Cuántos enteros positivos *n* verifican que *n* + *S(n)* = 2005?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4.

23.- Si $x,y > 0$ y se verifica que $\log_y(x) + \log_x(y) = \dfrac{10}{3}$ y $x \cdot y = 144$, entonces $\dfrac{x+y}{2}$ es igual a:

A) $12\sqrt{2}$ **B)** $13\sqrt{3}$ **C)** 24 **D)** 30 **E)** 36.

24.- Sea $f(x) = x^2 + 6x + 1$ y T el conjunto de los puntos (x, y) tales que $f(x) + f(y) \leq 0$ y $f(x) - f(y) \leq 0$. El entero más próximo al valor del área del recinto determinado por el conjunto T, es:

A) 21 **B)** 22 **C)** 23 **D)** 24 **E)** 25.

25.- ¿Cuántos pares ordenados de números reales (a, b) verifican que $(a + bi)^{2005} = a - bi$?

A) 0 **B)** 2 **C)** 1001 **D)** 2005 **E)** 2007.

IX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

TABLA DE SOLUCIONES (1ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**D**	1	**C**	1	**B**	1	**D**
2	**E**	2	**C**	2	**C**	2	**A**
3	**B**	3	**A**	3	**C**	3	**D**
4	**E**	4	**E**	4	**C**	4	**B**
5	**A**	5	**D**	5	**D**	5	**B**
6	**B**	6	**C**	6	**E**	6	**D**
7	**C**	7	**D**	7	**D**	7	**C**
8	**D**	8	**B**	8	**D**	8	**B**
9	**A**	9	**E**	9	**A**	9	**D**
10	**E**	10	**E**	10	**D**	10	**C**
11	**C**	11	**B**	11	**D**	11	**A**
12	**E**	12	**E**	12	**A**	12	**B**
13	**D**	13	**D**	13	**C**	13	**A**
14	**D**	14	**D**	14	**C**	14	**E**
15	**B**	15	**D**	15	**C**	15	**C**
16	**D**	16	**D**	16	**E**	16	**D**
17	**A**	17	**A**	17	**D**	17	**E**
18	**C**	18	**C**	18	**D**	18	**D**
19	**A**	19	**B**	19	**D**	19	**B**
20	**C**	20	**E**	20	**C**	20	**E**
21	**C**	21	**D**	21	**C**	21	**C**
22	**B**	22	**D**	22	**A**	22	**D**
23	**C**	23	**D**	23	**C**	23	**C**
24	**C**	24	**B**	24	**E**	24	**D**
25	**C**	25	**B**	25	**B**	25	**C**

IX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

TABLA DE SOLUCIONES (2ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**D**	1	**E**	1	**C**	1	**E**
2	**C**	2	**B**	2	**D**	2	**B**
3	**B**	3	**C**	3	**D**	3	**C**
4	**E**	4	**D**	4	**B**	4	**A**
5	**C**	5	**A**	5	**B**	5	**C**
6	**E**	6	**E**	6	**D**	6	**B**
7	**A**	7	**C**	7	**A**	7	**B**
8	**A**	8	**C**	8	**A**	8	**C**
9	**E**	9	**B**	9	**D**	9	**D**
10	**C**	10	**A**	10	**A**	10	**A**
11	**E**	11	**A**	11	**C**	11	**A**
12	**B**	12	**C**	12	**B**	12	**A**
13	**C**	13	**B**	13	**E**	13	**D**
14	**A**	14	**C**	14	**B**	14	**C**
15	**A**	15	**D**	15	**E**	15	**C**
16	**E**	16	**A**	16	**A**	16	**D**
17	**D**	17	**D**	17	**E**	17	**A**
18	**D**	18	**D**	18	**D**	18	**A**
19	**B**	19	**B**	19	**A**	19	**E**
20	**D**	20	**A**	20	**D**	20	**C**
21	**D**	21	**B**	21	**B**	21	**E**
22	**C**	22	**A**	22	**D**	22	**B**
23	**E**	23	**D**	23	**B**	23	**B**
24	**D**	24	**D**	24	**D**	24	**E**
25	**D**	25	**D**	25	**C**	25	**E**

IX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase 1er Nivel

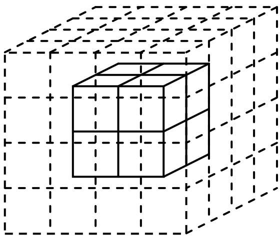
1. (D) Una centena = 10 decenas. Por lo tanto:
una centena y una decena son 10 + 1 = 11 decenas.

2. (E) Para determinar las dos últimas cifras del producto, unidades y decenas, basta con obtener todos los productos de unidades por unidades y unidades por decenas. Pero decenas, ¡no hay ninguna! Por lo tanto hallaremos:
$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 362\,880$ y el resultado acaba en 80.
A pesar de que hemos calculado el producto completo de estas cifras, no era necesario pues bastaría con ir haciendo el producto con las dos últimas cifras de los resultados que vayamos obteniendo.

3. (B) Si observamos los resultados de las divisiones, nos damos cuenta de que en cada cociente hay un 7 y tantas veces el 6 como ceros tenga el dividendo.
200 000 000 001 : 3 = 66 666 666 667. Por lo tanto la suma de sus cifras será:
$6 \times 10 + 7 = 67$.

4. (E) Al equilibrarse al añadir al platillo de las manzanas un melón, quiere decir que:
6 manzanas + 1 melón pesan lo mismo que 1 melón + 1 melón. Está claro que las 6 manzanas pesan lo mismo que un melón.
(En todo el problema hemos supuesto que todos los melones serán iguales y pesarán lo mismo).

5. (A) Aunque podríamos ir contando los cubitos visibles de cada cara, teniendo mucho cuidado de no contar dos o tres veces los cubitos de las aristas o de los vértices del cubo grande, es bastante más sencillo descontar los cubitos interiores que son, como puede observarse en la figura, $2 \times 2 \times 2 = 8$.
En total habrá $64 - 8 = 56$ cubitos visibles.



6. (B) Si el lado mide 7 cm su área será 49 cm^2.
Un cuadrado de doble área tendrá 98 cm^2 que aproximadamente corresponde a un cuadrado de lado 10 cm, ya que $10^2 = 100$ muy próximo a 98, mucho más que si fuera $9^2 = 81$.

7. (C) Si designamos con la letra "a" a la medida del ancho del rectángulo, entonces mediría de largo "$2a$" y el perímetro sería $a + a + 2a + 2a = 6a$ que es un múltiplo de 6. Por lo tanto nunca podría ser 44.

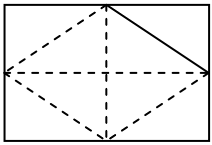
8. (D) Beatriz y Carlos nacieron en el mismo mes, Marzo, Antonio y Carlos nacieron en el mismo día, 20 de Julio y 20 de Marzo, por lo tanto Diana no nació ni el día 20 ni en el mes de Marzo. Fue Diana quien nació el 17 de Mayo.

9. (A) Desde el 1 hasta el 200 hay 100 números impares y 100 números pares.
Sabemos que $2 + 4 + 6 + \dots + 200 = 10\,100$ y queremos saber la suma de los 100 primeros impares.
$1 + 3 + 5 + \dots + 199 = (2-1) + (4-1) + (6-1) + \dots + (200-1) =$
$= (2 + 4 + 6 + \dots + 200) - (1 + 1 + 1 + \dots + 1) = 10\,100 - 100 = 10\,000.$

10.(E) María tarda 22 minutos en llegar al colegio (5 hasta las 8:00 + 17 hasta las 8:17). Luisa tarda 12 minutos menos, es decir, tarda 22 – 12 = 10 minutos. Por lo tanto si llega al colegio a las 8:25 quiere decir que sale de casa a las 8:15.

11.(C) Observamos que en esta lista de cifras se van repitiendo grupos de 4 cifras.
(1232)(1232)(1232)… Al llegar a la cifra que ocupa el lugar 2004, habremos escrito 501 grupos de 4 cifras ya que $2004 = 501 \times 4$ luego la siguiente cifra es un 1, la primera cifra del siguiente grupo de 4.
(1232)(1232)(1232)… (1232)(1---) Las tres últimas cifras son 321.

12.(E) Se observa fácilmente que el triángulo es $\frac{1}{8}$ del rectángulo al hacer una descomposición adecuada del rectángulo en 8 triángulos iguales.



13.(D) La suma de $a + c$ tiene que acabar en 2 y ser al menos 10 puesto que el resultado de la suma $abc + cba$ tiene 4 cifras y acaba en 2. La cifra b tiene que ser un 4 necesariamente, ya que $b + b = 8$ (no puede ser un 9 porque 9 + 9 = 18 y nos llevaríamos 1, con lo que la cifra siguiente sería un 3). En conclusión, las posibilidades son: a = 3, c = 9; a = 4, c = 8; a = 5, c = 7; a = 6, c = 6; a = 7, c = 5; a = 8, c = 4 y a = 9, c = 3. En total 7 casos. 349, 448, 547, 646, 745, 844 y 943.

14.(D) $77 - (33 + 44) = 77 - 77 = 0$, por lo tanto, para que $(77 - 66) - \square = 0$, como $77 - 66 = 11$ en el cuadradito tiene que haber un 11.

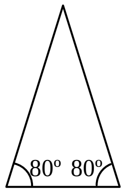
15.(B) 6 kg = 6 000 g. Hemos de encontrar un porcentaje "*c*" para que se verifique la relación: $\frac{6000}{300} = \frac{100}{c}$ y como $\frac{6000}{300} = 20$ se deduce que $c = 5$ ya que $\frac{100}{5} = 20$.

16.(D) Hay 33 múltiplos de 3 (100 : 3 = 33,3…). Hay 10 números que acaban en 3, pero 4 de ellos (3, 33, 63 y 93) son múltiplos de 3.
Luego tenemos que saltarnos 33 + (10 – 4) = 39 números.

17.(A) △△□ < ○○□ quiere decir que △ < ○ de donde se puede deducir que:
△△ < ○△ < ○○ y de aquí se concluye que:
$\underbrace{\triangle\triangle\square}_{P} < \underbrace{\bigcirc\triangle\square}_{X} < \underbrace{\bigcirc\bigcirc\square}_{Q}$

18.(C) Cada niño se ha pesado 4 veces, una vez con cada uno de sus compañeros. Por lo tanto 90 + 92 + 93 + 94 + 95 + 96 + 97 + 98 + 100 + 101 = 956 es 4 veces el peso de los cinco niños. 956 : 4 = 239 kg es el peso de los cinco niños.

19.(A) Al estar en proporción 1 a 5, si uno fuera n el otro sería 5n y la suma por lo tanto 6n que es múltiplo de 6. De las posibles soluciones, únicamente el 32 no es múltiplo de 6.



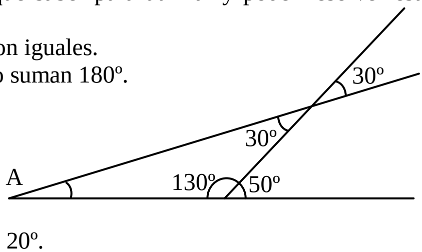
20.(C) La suma de los ángulos de un triángulo es 180º por lo que la medida del ángulo desigual será:
180º - (80º + 80º) = 180º - 160º = 20º.

21.(C) Llamaremos "*L*" al lado del cuadrado mayor, "*A*" a su área y "*P*" a su perímetro. Igualmente llamaremos "*l*" al lado del cuadrado menor, "*a*" a su área y "*p*" a su perímetro. Sabemos que:
$A = L^2 \quad a = l^2 \quad P = 4L$ y $p = 4l$.

Con los datos del problema tenemos: $\frac{A}{a} = \frac{L^2}{l^2} = \left(\frac{L}{l}\right)^2 = 16 \Rightarrow \frac{L}{l} = 4$

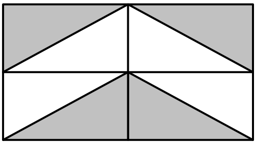
El cociente entre sus perímetros será: $\frac{P}{p} = \frac{4L}{4l} = \frac{L}{l} = 4.$

22.(B) Las cuestiones teóricas que tenemos que saber para utilizar y poder resolver este problema son:
- Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.
- Los ángulos interiores de un triángulo suman 180º.
- Un ángulo llano mide 180º.



En la figura ya hemos marcado la medida de dos ángulos interiores del triángulo, el que falta será:
Â = 180º - (130º + 30º) = 180º - 160º = 20º.

23.(C) Es un problema análogo al 12. Basta con trazar unos cuantos segmentos para observar que la zona sombreada son 4 triángulos de los 8 que forman el rectángulo, luego su área es la mitad del total.



24.(C) Basta continuar con la sucesión que se obtiene con el número de cuadraditos de cada tablero. Es fácil observar que este número de cuadraditos va aumentando de 3 en 3.

5	8	11	14	17	20	23	26	29	32
1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º

El décimo tablero tendría 32 cuadraditos.

Si no queremos formar toda la sucesión de números hasta llegar al deseado, podríamos razonar así:
Para llegar al término 10º de la sucesión, tenemos que sumar 9 veces 3 cuadraditos, por lo tanto el décimo sería: $5 + 9 \times 3 = 5 + 27 = 32$.

25.(C) Construimos la siguiente tabla para observar las posibilidades que hay.

Cifra decenas	Cifras unidades	Casos posibles
1	0	1
2	0, 1	2
3	0, 1, 2	3
…	…	…
9	0, 1, 2, …, 8	9

Si observamos la tabla anterior es fácil deducir que el número de casos posibles es la suma de todos, es decir:
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$.

IX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase 2º Nivel

1. (C) Si llamamos ***x*** al número de bicicletas e ***y*** al de triciclos, podemos escribir:

$$\left.\begin{aligned} x + \ \ y &= 7 \\ 2x + 3y &= 19 \end{aligned}\right\} \quad \text{De aquí se obtiene } y = 5.$$

También se puede llegar a este resultado con el siguiente razonamiento:
"Si todos tuvieran bicicletas habría tan sólo 7 × 2 = 14 ruedas. Como hay 19, cinco más, éstas son las que corresponden a los 5 triciclos que tiene que haber".

2. (C) $1\ m = \dfrac{\text{cuadrante terrestre}}{10\ 000\ 000} \quad \Rightarrow$ cuadrante = 10 000 000 *m* = 10 000 *km*

$$\text{cuadrante} = \frac{2\pi\ r}{4} = 10\,000\ ;\ \frac{\pi\ r}{2} = 10\,000\ ;\ \pi\ r = 20\,000$$

$$r = \frac{20\,000}{\pi} = \frac{20\,000}{3{,}14} = 6\,369\ km$$

(al hacer la división, es suficiente con obtener las dos primeras cifras para poder elegir la opción correcta).

3. (A) Antonio: $\bar{x} = \dfrac{a+b+c+d}{4}$

Blanca:

$$\bar{y} = \frac{(a+10)+(b-10)+(c+20)+(d+20)}{4} =$$

$$= \frac{a+b+c+d+40}{4} = \frac{a+b+c+d}{4} + \frac{40}{4} = \frac{a+b+c+d}{4} + 10 = \bar{x} + 10$$

Luego, $\bar{y} - \bar{x} = 10$.

4. (E)

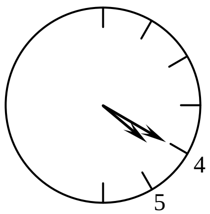
<u>Cara no visible</u>	<u>Producto de las otras 5 caras</u>
1	2 × 3 × 4 × 5 × 6 (múltiplo de 6)
2	1 × 3 × 4 × 5 × 6 ″
3	1 × 2 × 4 × 5 × 6 ″
4	1 × 2 × 3 × 5 × 6 ″
5	1 × 2 × 3 × 4 × 6 ″
6	1 × 2 × 3 × 4 × 5 ″

p (producto de las otras 5 caras sea divisible por 6) $= \frac{6}{6} = 1.$

5. (D) Si la conductora es Beatriz, la plaza del "copiloto" puede ser ocupada de 3 formas, la plaza de atrás (izquierda, por ejemplo) de 2 y la de atrás (derecha) de 1. Luego se pueden colocar de $3 \times 2 \times 1 = 6$ formas.
Razonando de idéntica forma con Carlos como conductor, se obtienen otras 6 formas. Luego en total se pueden colocar de 12 formas.

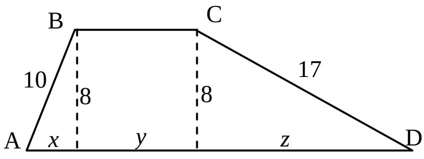
6. (C) $15 = 3 \times 5$; $20 = 2^2 \times 5$; $25 = 5^2$
m.c.m (15, 20, 25) $= 5^2 \times 3 \times 2^2 = 300 \Rightarrow$ Los múltiplos de 15, 20 y 25 tienen que ser múltiplos de 300.
999 : 300 = 3´...
$300 \times 4 = 1200$
$300 \times 5 = 1500$
$300 \times 6 = 1800$
$\cancel{300 \times 7 = 2100}$
Luego hay 3 números enteros entre 999 y 2001 múltiplos de 15, 20 y 25.

7. (D)



A las 4 horas 20 minutos, la aguja que marca los minutos estará en el 4 (IIII según otros relojes); la aguja que marca las horas se encontrará desplazada a la derecha del 4. ¿Cuánto? $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ del desplazamiento que hará esta aguja al pasar de 4 a 5 (que expresado en grados sería $\frac{360^{o}}{12} = 30^{o}$). Luego, $\frac{1}{3}$ de 30º = 10º.

8. (B) Aplicando el teorema de Pitágoras:



$10^2 = x^2 + 8^2$; $100 = x^2 + 64$
$x^2 = 100 - 64 = 36$; $x = \sqrt{36} = 6$

$17^2 = z^2 + 8^2$; $289 = z^2 + 64$
$z^2 = 289 - 64 = 225$; $z = \sqrt{225} = 15$

Área del trapecio ABCD (se ha descompuesto en dos triángulos y un rectángulo):

$$S = \frac{6 \times 8}{2} + y \times 8 + \frac{15 \times 8}{2} = 164$$

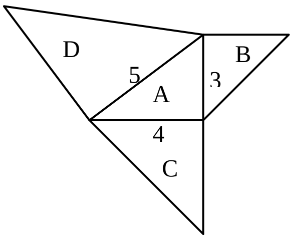
Operando: $24 + 8y + 60 = 164$; $8y = 164 - 84 = 80$; $y = \frac{80}{8} = 10 = BC.$

9. (E) p (nº de caras $\geq$ nº de cruces) $= \dfrac{5+6}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = \dfrac{11}{16}$

Para ver el número de casos favorables se hace el diagrama en árbol cuyos resultados se recogen en la siguiente tabla; en ella se observa que hay 5 resultados favorables a que el número de caras sea mayor que el de cruces, y 6 a que sea igual.

C C C C	C C C +	C C + +	C + + +	+ + + +
	C C + C	C + C +	+ C + +	
	C + C C	C + + C	+ + C +	
	+ C C C	+ C C +	+ + + C	
		+ C + C		
		+ + C C		

10.(E) Cálculo de las áreas de cada uno de los triángulos:



$A = \dfrac{4 \times 3}{2} = 6$; $B = \dfrac{3 \times 3}{2} = 4{,}5$

$C = \dfrac{4 \times 4}{2} = 8$; $D = \dfrac{5 \times 5}{2} = 12{,}5$

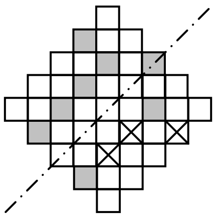
Sustituyendo estos valores en cada una de las afirmaciones, se comprueba que la correcta es la E, ya que B + C = D.

11.(B)

$$\text{Proporción de personas fumadoras} = \frac{\text{nº de personas fumadoras}}{\text{nº total de personas}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}M + \frac{2}{5}H}{M+H} = \frac{\frac{1}{3}M + \frac{2}{5}M}{M+M} = \frac{M\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right)}{2M} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{2}{5}}{2} = \frac{\frac{5+6}{15}}{2} = \frac{11}{15} : 2 = \frac{11}{30}$$

12.(E) En la figura se observa que este número es tres.



13.(D) Si tomamos un total de 100 personas y dibujamos el correspondiente diagrama de Venn:

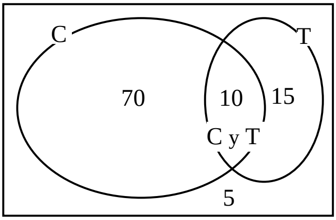
Cine y Teatro: 10

Cine: $\frac{4}{5} \times 100 = 80 \quad (10 + 70)$

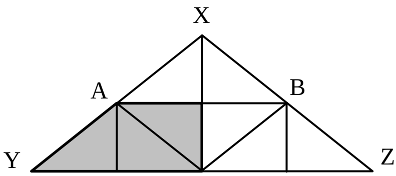
Teatro: $\frac{1}{4} \times 100 = 25 \quad (10 + 15)$

Ni Cine ni Teatro:

100 – (70+15+10) =100 – 95 =5 $\Rightarrow$ 5 %.



14.(D) El triángulo XYZ se puede descomponer en 8 triángulos iguales como se muestra en la figura; el área de cada uno de ellos es $\frac{8}{8} = 1\ cm^2$. La región sombreada se compone de 3 de estos triángulos, luego su área es $3\ cm^2$.



15.(D) Si llamamos x al tiempo que tarda de A a B, e y al que tarda de B a C, podemos escribir:

$$\text{velocidad media de A a C} = \frac{AC}{5} = \frac{AB + BC}{5} = \frac{60x + 90y}{5} = 75$$

$$\Rightarrow 12x + 18y = 75$$

Formamos el sistema $\left.\begin{aligned} 12x + 18y &= 75 \\ x + y &= 5 \end{aligned}\right\}$ De aquí se obtiene $x = \frac{15}{6}$

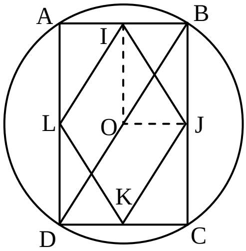
Luego $AB = 60 \times \frac{15}{6} = 150\ km.$

16.(D) $S_5 = \{(1,4), (4,1), (2,3), (3,2)\}$

$$p\,(\text{suma} = 5) = \frac{4}{4 \times 4} = \frac{1}{4} \Rightarrow 25\,\%.$$

17.(A) Supongamos que el salario medio de los hombres es 100 €; entonces el de las mujeres será 80 €.
Por tanto, el porcentaje en que será superior el salario medio de los hombres respecto al de las mujeres es:

$$\frac{100-80}{80}\times 100 = \frac{20}{80}\times 100 = \frac{1}{4}\times 100 = 0{,}25\times 100 = 25\%.$$



18.(C) Para que $\hat{C}$ (ángulo inscrito) sea recto, ha de abarcar media circunferencia
$\Rightarrow$ DB = 2 r $\Rightarrow$ OB = r = I J
Por tanto, el perímetro del rombo es 4 r = 4 × 3 = 12 *cm*.

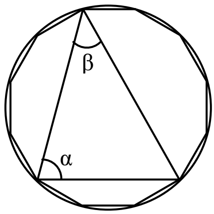
19.(B) Aplicando las propiedades de las potencias:

$$4^5 \times 5^{13} = \left(2^2\right)^5 \times 5^{13} = 2^{10} \times 5^{10} \times 5^3 =$$

$$= \left(2\times 5\right)^{10} \times 5^3 = 10^{10} \times 5^3 = 125 \times 10^{10} \Rightarrow 3+10 = 13 \text{ cifras.}$$

20.(E) Analicemos las distintas opciones:
A) 2005n $\neq$ impar si n es par
B) n + 2005 $\neq$ impar si n es impar
C) n^2 $\neq$ impar si n es par
D) n + 2004 $\neq$ impar si n es par
E) 2n + 2005 = impar (ya que 2n es par para cualquier valor del entero n).

21.(D) El valor de un ángulo inscrito es igual a la mitad del arco que abarcan sus lados.
En la figura:



$$\alpha = \text{ángulo mayor} = \frac{5\times\frac{360^{\circ}}{12}}{2} = \frac{5\times 30^{\circ}}{2} = 75^{\circ}$$

$$\beta = \text{ángulo menor} = \frac{3\times\frac{360^{\circ}}{12}}{2} = \frac{3\times 30^{\circ}}{2} = 45^{\circ}$$

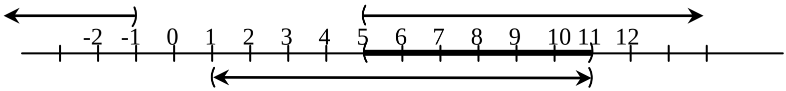
Luego $\alpha - \beta = 75^{\circ} - 45^{\circ} = 30^{\circ}$.

22.(D) Si llamo t_1 al tiempo (en segundos) que tardo en ir de mi casa al colegio, y t_2 al que tardo a la vuelta, puedo escribir:

$$\left.\begin{array}{r} 5t_1 = 4t_2 \\ t_1 + t_2 = 15 \times 60 = 900 \end{array}\right\}$$ De aquí se obtiene $t_1 = 400$

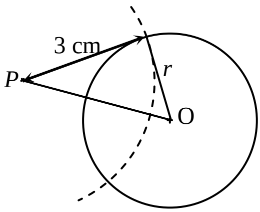
Por tanto, la distancia es $5\,t_1 = 5 \times 400 = 2\,000\ m = 2\ km$.

23.(D)



En la parte superior se han representado los números que distan de 2 más de 3; en la parte inferior, los que distan de 6 menos de 5; en grueso, los que cumplen las dos condiciones anteriores a la vez.
De aquí se concluye que la respuesta correcta es la D, o sea $5 < x < 11$.

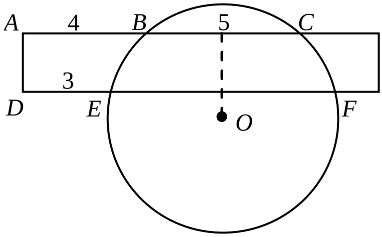
24.(B) De la figura se desprende que la respuesta es 2. (Para ello OP ha de ser mayor que el radio y menor de r + 3 cm).



25.(B) Llamemos x a EF.

De la figura se observa: $4 + \frac{5}{2} = 3 + \frac{x}{2}$

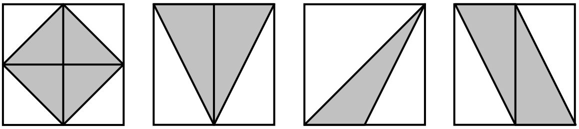
De aquí: $8 + 5 = 6 + x$; $x = 13 - 6 = 7$.



IX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

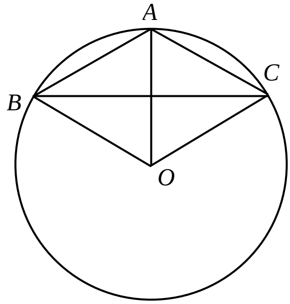
Soluciones 1ª Fase 3^er^ Nivel

1. (B) Una sencilla manera de comparar áreas es dividir las figuras de manera adecuada. Fíjate cómo hemos dividido las figuras S_1, S_2 y S_4: mirando con ojos de geómetra se ve claramente que estas tres superficies sombreadas tienen como área la mitad de la del cuadrado, es decir $S_1 = S_2 = S_4$. Y es obvio que el área de S_3 es menor que la mitad del cuadrado. Terminamos: $S_1 = S_2 = S_4$ y $S_3 < S_1$.



S_1 S_2 S_3 S_4

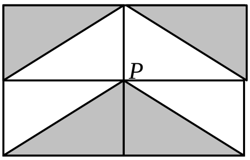
2. (C) Recuerda que el circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita (que pasa por los tres vértices del triángulo). Vamos a dibujar lo que dice el problema. Sea *ABC* el triángulo isósceles; *A* el ángulo obtuso (mayor de 90º) y, por tanto, también es el ángulo desigual ya que un triángulo no puede tener dos ángulos mayores de 90º; y sea *O* el circuncentro. Observemos qué ocurre en el triángulo *OAC*:



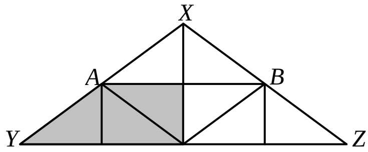
$AC = OC$ por ser lados de un rombo. $OC = OA$ por ser radios de la circunferencia circunscrita. Es decir, el triángulo *OAC* es equilátero y entonces sus ángulos miden 60º. Como $B\hat{A}C$ es el doble de $O\hat{A}C = 60º$ ya que *AO* es una diagonal del rombo, entonces $B\hat{A}C = 120º$.

3. (C) Si dos alturas coinciden en un lado, esto significa que esos lados deben ser perpendiculares. Es más, el ortocentro será el vértice formado por los catetos.

4. (C) Como en otros tantos problemas de comparación de áreas, si dividimos adecuadamente la figura a estudiar, todo nos será mucho más fácil. Como *P* es el centro del rectángulo, si trazamos por él paralelas a los lados, observamos que el área de la zona sombreada es justo la mitad del total.



5. (D) Como A y B son puntos medios de los lados XY y XZ, y además $XY = XZ$, podemos hacer la siguiente partición. Se ve claramente que si el área del triángulo es $8\ \text{cm}^2$, entonces el área de la región sombreada es $3\ \text{cm}^2$.



6. (E) Como los sucesos son equiprobables podemos aplicar la Regla de Laplace:

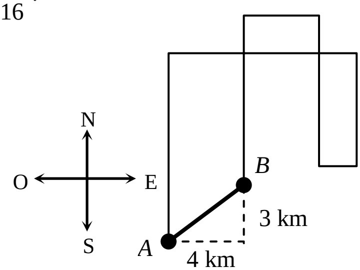
$$p(A) = \frac{card(A)}{card(E)} = \frac{n^{o}\,de\ casos\ \ favorables}{n^{o}\ de\ casos\ \ posibles}$$

Estudiemos todos los casos, en total, 2 × 2 × 2 × 2 = 16

(1) cccc	(2) cccx	(3) ccxc	(4) ccxx	(5) cxcc	(6) cxcx	(7) cxxc	(8) cxxx
(9) xccc	(10) xccx	(11) xcxc	(12) xcxx	(13) xxcc	(14) xxcx	(15) xxxc	(16) xxxx

De estos 16 casos posibles, los favorables (número de caras mayor o igual que número de cruces) son los casos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11 y 13. Es decir, 11 casos favorables. Así pues la probabilidad pedida es $\frac{11}{16}$.

7.(D) Basta con seguir cuidadosamente las indicaciones del trayecto. Con una hoja cuadriculada, si sigues todos los pasos correctamente, llegarás a la situación final del dibujo. Para hallar la distancia AB podemos utilizar el Teorema de Pitágoras y concluimos que $AB = 5$ km .



8. (D) Cuando nos tenemos que enfrentar a problemas de proporciones, una buena manera de atacarlos es trabajar con cantidades concretas. Eso sí, hay que elegir con tino estas cantidades. Podríamos suponer, por ejemplo, que las mujeres son 100 y los hombres 200 pero no es muy acertado ya que las mujeres fumadoras serían $33,\widehat{3}$. Como nos hablan de "una de cada tres" y de "dos de cada cinco", parece interesante tomar 15 = 3 × 5 como referencia. Así, supongamos que las mujeres son 15 y los hombres, el doble, es decir 30. (También podríamos haber elegido, por ejemplo, 30 para las mujeres y 60 para los hombres). Por tanto, de las 15 mujeres, habrá 5 mujeres fumadoras (1 de cada 3) y de los 30 hombres, habrá 12 hombres fumadores (2 de cada 5). Ahora construimos la siguiente tabla con los datos:

	Mujeres	Hombres	Total
Fumadores	5	12	
No fumadores			
Total	15	30	

La completamos razonadamente y obtenemos que:

	Mujeres	Hombres	Total
Fumadores	5	12	17
No fumadores	10	18	28
Total	15	30	45

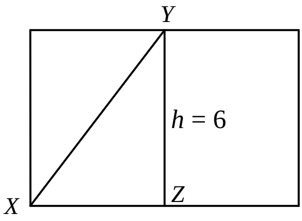
Es decir, hay 17 personas fumadoras de un total de 45.
(Si hubiéramos tomado 30 mujeres y 60 hombres, nos habría salido que fuman 34 de un total de 90 que es lo mismo que 17 de 45).

9. (A) Como los sucesos son equiprobables podemos aplicar nuevamente la Regla de Laplace como en el problema 6.
Los casos posibles son $6 \times 6 = 36$ y ahora sólo falta encontrar los casos favorables, cayendo en la cuenta de que no es lo mismo que un resultado salga en el primer dado que en el segundo (imagina que los dados son de diferente color). Los casos que tienen una diferencia de tres puntos son:

(1,4) (2,5) (3,6) (4,1) (5,2) (6,3)

es decir, 6 casos favorables. La probabilidad será $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

10. (D) Lo más sencillo es trabajar en el plano, para eso vamos a cortar el cilindro por la generatriz que pasa por X y lo desarrollamos. Nos queda un rectángulo (las dos bases del cilindro no hace falta dibujarlas):



Observa que XZ es media circunferencia de la base que tenía radio1:

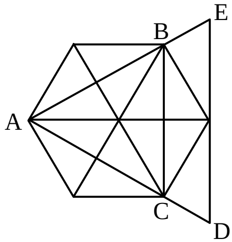
$$XZ = \frac{2\pi r}{2} = \frac{2\pi \times 1}{2} = \pi$$

Nosotros queremos calcular XY (observa que al enrollarse el rectángulo, XY se convierte en un trozo de hélice). Como el triángulo XYZ es rectángulo, podemos emplear el teorema de Pitágoras (XY es la hipotenusa):

$$XY^2 = XZ^2 + YZ^2 = \pi^2 + 6^2 \Rightarrow XY = \sqrt{\pi^2 + 36}.$$

11. (D) Un problema de potencias. Un cuarto del trayecto total es $\frac{2^{20}}{4}=\frac{2^{20}}{2^2}=2^{18}$ que es el punto donde perdió el contacto y luego lo recupera en 2^{19}. Si restamos, ya sabremos los km que estuvo la nave sin contacto:

$2^{19}-2^{18}=$ (¡cuidado con hacer barbaridades!, recuerda que para sumar y restar potencias de la misma base no hay fórmulas especiales, sólo podemos sacar factor común) $=2^{18}(2-1)=2^{18}$ km.



12. (A) Observa que el área del triángulo equilátero *ABC* es justo la mitad que la del hexágono, es decir $9\ \mathrm{m}^2$. Ahora, lo que vamos a hacer es comparar los triángulos equiláteros *ABC* y *AED*.

Observa que la altura del triángulo pequeño es $1{,}5=\frac{3}{2}$ lados del hexágono. Y la altura del triángulo grande mide 2 lados del hexágono. Así que pasamos de $\frac{3}{2}$ a 2, por tanto la razón de semejanza es $\frac{4}{3}$ ya que $\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}=2$.

Y como la razón de las áreas es el cuadrado de la razón de semejanza:

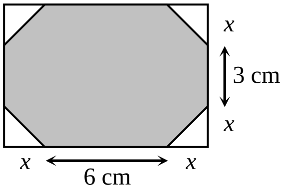
Área de *AED* = $\left(\frac{4}{3}\right)^2\times 9=16.$

13.(C) Como el coeficiente de x^3 es 1, sabemos que el polinomio dado se puede factorizar de la forma: $(x-1^{\text{a}}\text{ raíz})\cdot(x-2^{\text{a}}\text{ raíz})\cdot(x-3^{\text{a}}\text{ raíz})$, por tanto:

$x^3+ax^2+bx+c=(x-2)(x-3)(x-5)$ y ya solo falta desarrollar un poco este producto para encontrar cuál es el coeficiente *b* de *x*:

$(x-2)(x-3)(x-5)=(x^2-5x+6)(x-5)$ y no hace falta calcularlo completo, sólo nos interesan los términos que contengan *x*:

$(-5x)(-5)+6x=25x+6x=31x$, por tanto $b=31$.



14. (C) Empezaremos por llamar *x* a los catetos de los triangulitos isósceles que hemos recortado del naipe. Y construiremos una ecuación que traduzca los datos del problema, es decir:

(Área del naipe) – (Área de los 4 triangulitos) = 62

$(6+2x)\times(3+2x)-4\times\frac{x^2}{2}=62$ que se transforma en una sencilla ecuación de segundo grado: $x^2+9x-22=0$, cuyas soluciones son $x=-11$ y $x=2$. Obviamente, la solución negativa no tiene sentido, así que los catetos de los triangulitos miden 2 cm y el área recortada ha sido:

$$4\times\frac{x^2}{2}=4\times\frac{2^2}{2}=8\ \text{cm}^2.$$

15. (C) Vamos a escribir la suma que queremos evaluar empleando sumandos de la misma base que, obviamente, será 2. Es importante usar bien las propiedades de las potencias:

$$8^{668}+2^{2005}+4^{1003}=(2^3)^{668}+2^{2005}+(2^2)^{1003}=2^{2004}+2^{2005}+2^{2006}$$

y ahora sacamos factor común 2^{2004} y la suma será igual a:

$2^{2004}(1+2+2^2)=7\times 2^{2004}$ e igualando a la expresión que decía el problema, ya podemos calcular la x que buscábamos:

$$7\times 2^{2004}=7\times 16^x\rightarrow 2^{2004}=16^x=(2^4)^x=2^{4x}\rightarrow 2004=4x\rightarrow x=501.$$

16. (E) Estos problemas se basan en que la última cifra de las sucesivas potencias de un número siempre sigue un patrón periódico que se repite y que depende de la última cifra de la base.

Así, por ejemplo, las potencias de los números que acaban en 3 siguen este patrón (sólo escribimos la última cifra, que es la que nos interesa) :

$$3^1=3\rightarrow 3^2=9\rightarrow 3^3=...7\rightarrow 3^4=...1\rightarrow 3^5=...3\rightarrow 3^6=...9\rightarrow 3^7=...7\rightarrow 3^8=...1$$

Es decir, siguen esta regla: 3971 3971 3971… se repite en bloques de cuatro cifras, por tanto, para calcular esa última cifra habrá que calcular el resto de dividir el exponente entre 4.

Vayamos a nuestro problema:

$3^{1001}\times 7^{1002}\times 13^{1003}=$ (lo arreglamos un poco buscando el mismo exponente) =

$$=3^{1001}\times 7^{1001}\times 7\times 13^{1001}\times 13^2=(3\times 7\times 13)^{1001}\times 7\times 13^2=273^{1001}\times 7\times 13^2$$

Estudiamos estos 3 factores:

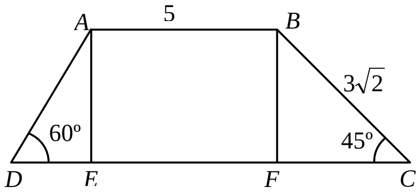
La última cifra de 273^{1001} es 3 ya que 1001:4 = 250 y resto igual a 1 (es decir, termina en la 1ª cifra del bloque, que es un 3. Si, por ejemplo, el resto hubiese sido 2, le correspondería la cifra 9)

La última cifra de 7 es 7.

La última cifra de 13^2 es 9.

Por tanto, la última cifra que andamos buscando será la última cifra de $3\times 7\times 9$ que es un 9.

17.(D) Como en la mayoría de los problemas geométricos habrá que dibujar algunas líneas auxiliares y todo se verá más claro. En nuestro caso trazaremos las alturas *AE* y *BF*.



Observa ahora que $DC = DE + EF + FC$, así que cuando calculemos *DE* y *FC* ya habremos resuelto el problema.

Empecemos por calcular *FC*. Observa que el triángulo *BFC* es rectángulo e isósceles ya que su ángulo en *B* vale también 45º, por tanto podemos llamar $x = FC = BF$, que se puede hallar usando el Teorema de Pitágoras:

$$BC^2 = BF^2 + FC^2 \Rightarrow \left(3\sqrt{2}\right)^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow 18 = 2x^2 \Rightarrow x = 3 = FC = BF$$

Para calcular *DE* trabajamos en el triángulo *AED*. Fíjate, como *AED* es la "mitad" de un triángulo equilátero, sabemos que *DE* es la mitad de *DA*. Así, si llamamos $y = DE$, entonces $DA = 2y$ y, aplicando de nuevo Pitágoras en *AED*:

$$AD^2 = DE^2 + AE^2 \Rightarrow (2y)^2 = y^2 + BF^2 \Rightarrow 4y^2 = y^2 + 3^2 \Rightarrow 3y^2 = 9 \Rightarrow y = \sqrt{3}$$

Y ya lo tenemos: $DC = DE + EF + FC = \sqrt{3} + 5 + 3 = 8 + \sqrt{3}$.

18. (D) Como tenemos exponentes tan altos vamos a intentar rebajarlos un poco para ser más ágiles. Lo mejor es tomar raíces en los dos miembros; en nuestro caso, calcularemos la raíz 100-ésima:

$n^{200} < 5^{300} \Rightarrow \sqrt[100]{n^{200}} < \sqrt[100]{5^{300}} \Rightarrow n^2 < 5^3 \Rightarrow n^2 < 125$ y esto ya parece muy sencillo.

Si $n = 10 \rightarrow 10^2 = 100 < 125$

Si $n = 11 \rightarrow 11^2 = 121 < 125$

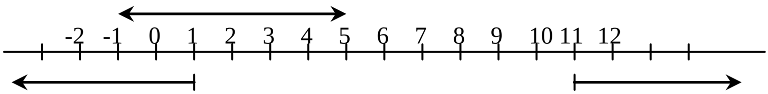
Si $n = 12 \rightarrow 12^2 = 144 > 125$, es decir para $n = 12$ nos pasamos.

Por tanto la respuesta es $n = 11$.

19. (D) Lo mejor va a ser dibujar los dos requisitos sobre la recta real y la zona común a ambos será la solución.

Los números que distan de 2 menos de 3 los dibujaremos por encima del eje.

Los números que distan de 6 más de 5 los dibujaremos por debajo del eje.



Los números *x* que satisfacen ambas condiciones son los comprendidos entre -1 y 1, es decir, $-1 < x < 1$.

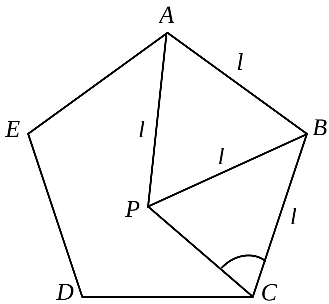
20. (C) Vamos a resolver el sistema. Si lo hacemos por sustitución nos saldría una ecuación de 4º grado bastante complicada, así que, un poquito de imaginación y ¡neuronas a la obra!

$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 5x + 1 \\ x = y^2 - 5y + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y + 5x = x^2 + 1 \\ x + 5y = y^2 + 1 \end{array}\right\}$ ahora restamos la primera ecuación menos la segunda y nos queda:

$$4x - 4y = x^2 - y^2 \Rightarrow 4(x-y) = (x+y)(x-y) \Rightarrow 4(x-y) - (x+y)(x-y) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x-y)(4-(x+y)) = 0$ Y entonces, o bien $x - y = 0$ (que es la condición que dice el problema), o bien $4 - (x+y) = 0 \Rightarrow x + y = 4$.

21.(C) Lo primero que hay que saber es cuánto mide cada ángulo de un pentágono regular. Fíjate, el ángulo central vale $\dfrac{360º}{5} = 72º$, por tanto cada ángulo del pentágono regular valdrá $180º - 72º = 108º$.



Como *APB* es equilátero, cada uno de sus tres ángulos mide 60º y como $A\hat{B}C = 108º$, entonces, $C\hat{B}P = 108º - 60º = 48º$.
Observamos ahora que el triángulo *PBC* es isósceles ya que tiene dos lados que miden lo mismo que el lado del pentágono $PB = CB = l$ y por tanto, los ángulos $B\hat{P}C$ y $B\hat{C}P$ son iguales. Sumamos los ángulos de *BPC* y:

$$B\hat{P}C + B\hat{C}P + C\hat{B}P = 180º \Rightarrow 2B\hat{C}P + 48º = 180º \Rightarrow B\hat{C}P = 66º.$$

22. (A) Ya sabes que la $\text{media de edad} = \dfrac{\text{suma total de edades}}{\text{número de personas}}$ y, por tanto:

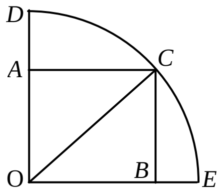
$$\text{suma total de edades} = (\text{media de edad}) \times (\text{número de personas})\ .$$

Sea $x = \text{media de edad} = \text{número de personas}$, sólo nos queda traducir la nueva situación que se produce cuando llega la persona de 29 años:

$\dfrac{\text{suma total de edades}}{\text{número de personas}} = \text{media de edad} \Rightarrow \dfrac{x \cdot x + 29}{x+1} = x + 1$ que si operamos convenientemente vemos que no es más que una sencilla ecuación de primer grado cuya solución es $x = 14$.

23.(C) Fíjate qué interesante problema. A priori parece que habrá que utilizar ecuaciones, el Teorema de Pitágoras o, incluso, algo de trigonometría. Pero no es necesario: como *OBCA* es un rectángulo, sus dos diagonales son iguales, así que en vez de hallar *AB*, vamos a hallar la otra diagonal *OC*.

Pero… ¡*OC* es el radio de la circunferencia! Ya está, $AB = OC = OE = 10$.



24. (E) No hay que asustarse, fíjate que

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2005} \times \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2005} = \left(\frac{(\sqrt{5}+1)\times(\sqrt{5}-1)}{4}\right) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{5}^2-1}{4}\right)^{2005} = \left(\frac{4}{4}\right)^{2005} = 1^{2005} = 1.$$

25. (B) Qué problema tan bonito para terminar con la 1ª Fase. Nos encontramos con un reto de esos que tanto gustan a los amantes de la matemática. Observando el dibujo parece que habrá que formar triángulos y buscar semejanzas o, tal vez, unir puntos con el centro de la circunferencia… pero no, es mucho más fácil si sabemos añadir justo lo necesario: dos pequeños segmentos.

Desde *B* y *C* trazamos perpendiculares a *EF* y observa:

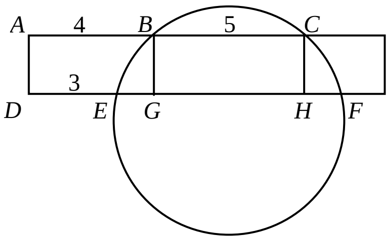
$EG = 4 - 3 = 1$

$GH = 5$

$HF = 1$ por simetría con *EG*

Y ya está:

$EF = EG + GH + HF = 1 + 5 + 1 = 7$ cm.



IX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase 4º Nivel

1.(D) Si C = 90º, los ángulos A y B son complementarios, de modo que $sen\hat{A} = \cos\hat{B} = \frac{2}{3}$ y como $1 + tg^2\hat{B} = \frac{1}{\cos^2\hat{B}}$ de ahí se deduce que $tg\hat{B} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\hat{B}} - 1} = \sqrt{\frac{9}{4} - 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

2.(A) Si $x^2 \neq 1$, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ existe y toma valor distinto de 0. En ese caso,

$$f(-x) = \frac{-x+1}{-x-1} = \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{f(x)}.$$

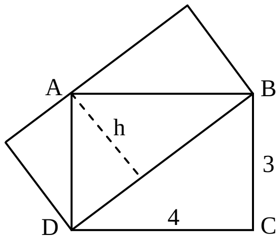
3.(D) Llamando x al número de mujeres e y al número de hombres, se tiene que $\frac{x}{y} = \frac{11}{10}$ o lo que es lo mismo $\frac{x}{11} = \frac{y}{10}$. Aplicando las propiedades de las proporciones deducimos que $\frac{x}{11} = \frac{y}{10} = \frac{x+y}{21}$ de donde obtenemos: $\frac{x}{x+y} = \frac{11}{21}$ e $\frac{y}{x+y} = \frac{10}{21}$.

La media de edad del total de la población se calcula haciendo la media ponderada de las medias de las partes siendo sus pesos las proporciones en la población de cada parte. Así:

$$\overline{X}_{población} = \overline{X}_{mujeres} \times P_{mujeres} + \overline{X}_{hombres} \times P_{hombres} = 34 \times \frac{11}{21} + 32 \times \frac{10}{21} = \frac{694}{21}.$$

4.(B) sen(x-y)·cosy + cos(x-y)·seny = sen [(x-y) + y] = sen x.

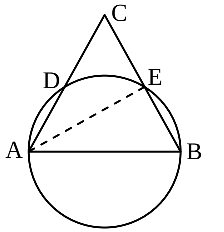
5.(B) Las dimensiones del rectángulo pedido son la hipotenusa del triángulo rectángulo ABD y la altura sobre la hipotenusa del mismo. Recordando que la altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo vale $h = \frac{b \times c}{a}$, el área pedida es



$$S = \frac{b \times c}{a} \times a = b \times c = 12\ m^2.$$

Otro modo de razonar es el siguiente:

Los dos rectángulos dibujados son equivalentes, ya que la suma de los triángulos rectángulos construidos sobre los catetos del triángulo ABD coincide con el triángulo rectángulo construido sobre la hipotenusa (generalización del teorema de Pitágoras). Puesto que el área del rectángulo original es 12, el área del otro rectángulo también es 12.



6.(D) El triángulo ABE es rectángulo en E, y el ángulo ABE mide 60º. Así, BE = r = 1, y AB = 2r = 2,

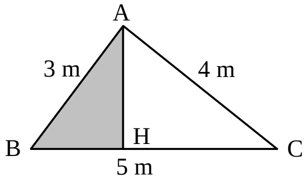
$AE = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

7.(C) El número total de posibilidades en las que la suma vale 6 es 7, ya que hay seis posibilidades diferentes con los números 1 + 2 + 3, y una posibilidad más con los números 2 + 2 + 2. Por lo tanto la probabilidad pedida es $\frac{1}{7}$.

8.(B) El triángulo ABC es rectángulo, ya que $3^2 + 4^2 = 5^2$.

La altura del triángulo mide

$$h = \frac{b \times c}{a} = \frac{12}{5} = 2{,}4\ \text{m}$$



Aplicando el teorema del cateto, la proyección del cateto AB sobre la hipotenusa es

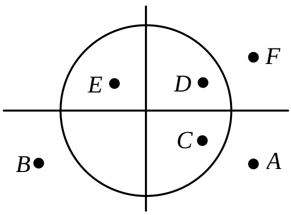
$$BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{9}{5} = 1{,}8$$

El área del triángulo vale: $S = \frac{2{,}4 \times 1{,}8}{2} = 2{,}16\ \text{m}^2$.

9.(D) Si $1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^{10} = S$, entonces

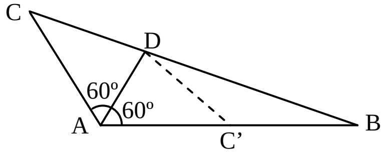
$$1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^{21} = 1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^{10} + a^{11} + a^{12} + a^{13} + ... + a^{21} =$$
$$= S + a^{11} + a^{12} + a^{13} + ... + a^{21} = S + a^{11} \times \left(1 + a + a^2 + ... + a^{10}\right) =$$
$$= S + a^{11} \times S = S\left(1 + a^{11}\right).$$

10.(C) Sea z = r_α el complejo cuyo afijo es F. El inverso de z es $z^{-1} = \left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha}$, de modo que su afijo debe ser un punto del cuarto



cuadrante. Además, al ser F un punto exterior al círculo de radio 1, su módulo es r > 1, y $\frac{1}{r} < 1$. Por tanto el afijo del inverso de z es C.

11.(A) En la figura el triángulo ADC' es simétrico de ADC respecto de AD. Por tanto, el área de ACD es la tercera parte del área de ABC:



$$S_{ADC} = \frac{1}{3}S_{\mathrm{ABC}} \Rightarrow$$

$$\frac{3\times AD\times sen60^{o}}{2} = \frac{1}{3}\left(\frac{6\times 3\times sen120^{o}}{2}\right)$$

$\Longrightarrow$ AD = 2.

También se podría llegar al mismo resultado teniendo en cuenta que:

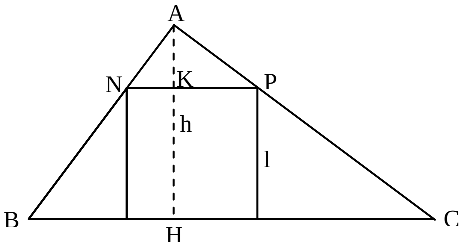
$$S_{ABC} = S_{ACD} + S_{ADB} \Rightarrow \frac{1}{2}\left(3\times 6\times sen120^{o}\right) = \frac{1}{2}\left(3\times AD\times sen60^{o}\right) + \frac{1}{2}\left(6\times AD\times sen60^{o}\right)$$

$$\Rightarrow 18\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\times AD\times\frac{\sqrt{3}}{2} + 6\times AD\times\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 18 = 9\times AD \Rightarrow AD = 2.$$

12.(B) Los triángulos ABC y ANP son semejantes, de modo que $\frac{BC}{AH} = \frac{NP}{AK}$ llamando $a = BC \quad b = AC \quad c = AB$

$h = AH \quad l = KH$ podemos escribir:

$\frac{a}{h} = \frac{l}{h-l}$ y de aquí se obtiene:



$ah - al = hl \Rightarrow ah = al + hl = (a+h)l \Rightarrow l = \frac{ah}{a+h}$. Como la altura del triángulo mide $h = \frac{bc}{a} = \frac{12}{5}$, el lado del cuadrado inscrito en el triángulo mide:

$$l = \frac{\frac{12}{5}\times 5}{\frac{12}{5}+5} = \frac{12}{\frac{37}{5}} = \frac{60}{37}\ .$$

Para construir la figura, obsérvese que $l = \dfrac{h}{1+\frac{h}{a}} = \dfrac{h^2}{h+\frac{h^2}{a}}$. Esta expresión indica que el lado del cuadrado inscrito es el inverso del segmento $h+\dfrac{h^2}{a}$ respecto del círculo de radio *h*. A su vez $\dfrac{h^2}{a}$ es el inverso de *a* respecto del mismo círculo.

13.(A) La ecuación $x^{\log_{10} x} = 10$ se puede escribir $\log_{10} x = \log_x 10$. Y cambiando la base:

$$\log_{10} x = \frac{\log_{10} 10}{\log_{10} x} = \frac{1}{\log_{10} x} \quad \Rightarrow \quad (\log_{10} x)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \log_{10} x = 1 \Rightarrow x = 10 \\ \log_{10} x = -1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{10} \end{cases}$$

El producto de las soluciones de la ecuación, por tanto, vale 1.

14.(E) $\log\sqrt[3]{0{,}25} = \frac{1}{3}\log\frac{1}{4} = -\frac{2}{3}\log 2 = -\frac{2}{3}\times 0{,}30 = -0{,}20.$

15.(C) Si los dos polígonos tienen el mismo perímetro, entonces $3l_T = 4l_C$. Los radios de los círculos circunscritos a los polígonos verifican respectivamente: $R_T^2 = \dfrac{l_T^2}{3}$ y $R_C^2 = \dfrac{l_C^2}{2}$. El cociente de las áreas de los círculos circunscritos al cuadrado y al triángulo vale:

$$\frac{A}{B} = \frac{\pi R_C^2}{\pi R_T^2} = \frac{R_C^2}{R_T^2} = \frac{\frac{l_C^2}{2}}{\frac{l_T^2}{3}} = \frac{3l_C^2}{2l_T^2} = \frac{3\left(\frac{3l_T}{4}\right)^2}{2l_T^2} = \frac{27l_T^2}{32l_T^2} = \frac{27}{32}.$$

16.(D) Como la gráfica de $y = f(x)$ pasa por el origen, el término independiente, e, debe valer 0. Sacando factor común *x*, tenemos $f(x) = x\,(x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d)$. Como las cinco raíces de f(x) son distintas, el polinomio del paréntesis no puede tener otra raíz x = 0, de modo que su término independiente no puede ser 0.

17.(E) El número de permutaciones de 5 elementos que no tienen un elemento concreto en primera posición es 5! – 4! = 120 – 24 = 96. Entre éstas, el número de las que tienen otro elemento concreto en segunda posición es 3×1×3×2×1 = 18. La probabilidad de que el segundo elemento sea un 2 entre todas las permutaciones de

1, 2, 3, 4 y 5 en las que el 1 no es el primer elemento es: $p = \frac{18}{96} = \frac{3}{16}$. La suma de los elementos de la fracción irreducible correspondiente a p, por tanto, es 19.

18.(D) Con los datos del problema tenemos un sistema de dos ecuaciones logarítmicas con dos incógnitas. Aplicando las propiedades de los logaritmos, podemos escribir: $\begin{cases} \log x + 3\log y = 1 \\ 2\log x + \log y = 1 \end{cases}$ **.** Multiplicamos la primera ecuación por 2 y restamos miembro a miembro:

$$\left.\begin{array}{r} 2\log x + 6\log y = 2 \\ 2\log x + \log y = 1 \end{array}\right\} \quad 5\log y = 1 \quad \Rightarrow \quad \log y = \frac{1}{5}; \quad \log x = \frac{2}{5}$$

$$\log(xy) = \log x + \log y = \frac{3}{5}.$$

19.(B) Puesto que *f(x)* es una función polinómica de tercer grado, sabemos que tiene tres raíces (reales o complejas). A la vista de la gráfica se observan dos de las tres raíces del polinomio, que son $x = 1$ y $x = -1$. Sabiendo que si una función polinómica admite una raíz compleja, debe admitir también su conjugada, la tercera raíz que desconocemos debe ser necesariamente real. Supongamos que es r. Entonces *f(x)* se puede escribir factorizada de la forma

$$f(x) = a\,(x + 1)(x - 1)(x - r) = a\,(x^3 - rx^2 - x + r) = ax^3 - arx^2 - ax + ar.$$

Se observa que los coeficientes de los términos de 2º grado e independiente son opuestos. Pero como la gráfica de *f(x)* pasa por el punto (0, 2), el término independiente vale 2, y el coeficiente del término de 2º grado, entonces, vale – 2.

Se llegaría a la misma conclusión planteando un sistema con las tres condiciones dadas por los puntos de la gráfica.

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(1) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 2 \\ a + b + c + d = 0 \\ -a + b - c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 2 \\ 2b + 2d = 0 \end{cases} \Rightarrow b = -2.$$

20.(E) La ecuación de la circunferencia dada se puede escribir, completando cuadrados, de la forma:

$$x^2 - 4\text{x} + 4 + y^2 + 6\text{y} + 9 = 4 + 9 \;\Rightarrow\; (\text{x - }2)^2 + (y + 3)^2 = 13$$

Toda circunferencia concéntrica con la anterior tiene su ecuación de la forma $(x-2)^2+(y+3)^2 = R^2$. De modo que la que pasa por P(1, 1), debe cumplir: $(1-2)^2+(1+3)^2 = R^2 \Rightarrow R=\sqrt{17}$.

21.(C) Las soluciones enteras de la ecuación $(x^2-x-1)^{x+2}=1$ corresponden a una de estas tres posibilidades:

a) El exponente vale 0: $x+2=0 \Rightarrow x=-2$.

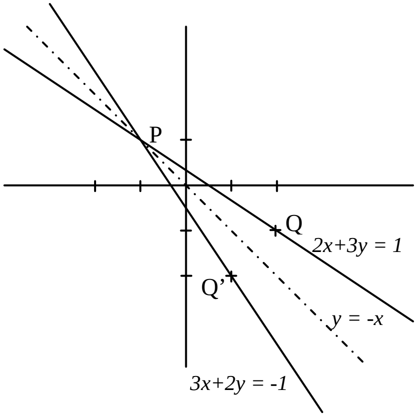
b) La base vale 1: $x^2-x-1=1 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases}$

c) La base es – 1 y el exponente es par:

$$\begin{cases} x^2-x-1=-1 \\ x+2=2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-x=0 \\ x+2=2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{matrix} x=0 \\ x+2=2k \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=0 \\ \left.\begin{matrix} x=1 \\ x+2=2k \end{matrix}\right\} \Rightarrow \textit{No es posible} \end{cases}$$

Por lo tanto tiene cuatro soluciones.

22.(D) La recta 2x + 3y = 1 pasa por los puntos P(-1, 1) y Q(2, -1). Su simétrica respecto de la recta y = -x pasa por el mismo punto P, donde se cortan las tres rectas, y por el simétrico de Q respecto de y = -x, que es Q'(1, -2).



La ecuación de la recta que pasa por P(-1, 1) y Q'(1, -2) es

$$\frac{x+1}{1+1}=\frac{y-1}{-2-1} \Rightarrow$$

$$-3x-3=2y-2 \Rightarrow 3x+2y=-1.$$

23.(C) Si escribimos los complejos en forma polar:

$$x = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = 1_{\frac{2\pi}{3}} \quad ; \qquad y = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = 1_{\frac{4\pi}{3}}$$

$$x^9 + y^9 = 1^9_{\frac{2\pi\times 9}{3}} + 1^9_{\frac{4\pi\times 9}{3}} = 1_{6\pi} + 1_{12\pi} = 1+1 = 2 \neq -1.$$

24.(D) El menor cubo perfecto que es múltiplo de $n = pq^2r^4$, siendo p, q y r números enteros primos es $p^3q^3r^6 = (pqr^2)^3$.

25.(C) Recordando que ángulos complementarios tienen cambiados el seno por el coseno y viceversa (lo dice su propio nombre: **co**-seno = seno del **co**mplementario), el complejo z = sen20º + i cos20º, en forma trigonométrica es z = cos70º + i sen70º
Por tanto $z^3 = (\cos 70^{\circ} + i\,\text{sen}70^{\circ})^3 = \cos 210^{\circ} + i\ \text{sen}210^{\circ} = 1_{210^{\circ}}$.

IX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase 1er Nivel

1. (D) Contando las aristas de las dos bases octogonales tenemos 16. A estas hay que sumar además 8 aristas laterales. En total 24 aristas.

2. (C) Estos números son de la forma abc, donde a puede elegirse de 9 formas (todas las cifras menos el 0). Una vez hecho esto, b puede ser elegido de 9 formas distintas (ahora podemos elegir el 0) y, por fin, la cifra c debe ser elegida entre las 8 cifras que no hemos empleado. Por lo tanto podemos formar $9\times 9\times 8 = 648$ números de tres cifras que tengan las tres cifras diferentes.

3. (B) Dividiendo 73 entre 4 obtenemos $73 = 4\times 18 + 1 = 72 + 1$, es decir, los 72 primeros participantes han cantado las dieciocho primeras canciones, luego el participante número 73 cantó la canción 19.

4. (E) Un gramo costará $\frac{0{,}84}{350}$ €, por lo que 1 kg = 1000 g costará

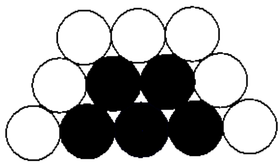
$$\frac{0{,}84}{350}\times 1000 = 2{,}40 \text{ €}\cdot$$

5. (C) Supongamos que hoy, Juan, tiene x años, por lo que hace 5 años tenía x-5 años. Como la suma de estas dos edades es 21 tenemos:

$$x + (x-5) = 21 \Rightarrow 2x - 5 = 21 \Rightarrow 2x = 26 \Rightarrow x = 13$$

Por lo tanto, dentro de 5 años tendrá 18.

6. (E) Basta imaginar que estamos "apilando" las monedas como en la figura; ponemos 5 en la base, una menos, es decir 4, en la fila de encima y 3 en la siguiente. Completando con las dos filas que habría que añadir debajo, tenemos un total de (5+4+3)+(4+3) = 19 monedas.



7. (A) Si la suma es un número primo, entonces es también impar. Pero mediante la suma de dos números sólo podemos obtener impar si uno de ellos es par y el otro impar. Dado que, según el enunciado, los dos son primos, el citado número par es necesariamente el 2.

8. (A) Cuando Alicia termina de rotular el número 24, es fácil ver que ha rotulado **20** cifras; 4 cifras del 2 al 8, más 16 cifras del 10 al 24. Como Dani rotula a la mitad de velocidad que Alicia, en ese instante habrá rotulado **10** cifras; 5 del 1 al 9, más 5 del 11 al 15. Pero en esa lista de impares, y comenzando por las decenas, corresponde a rotular la cifra 1 del número 15.

9. (E) El 25% de 8 es su cuarta parte, es decir 2, que a su vez es el 50% de 4.

10.(C)

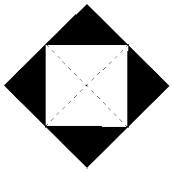
$$2\times 5\times 0{,}2\times 0{,}5\times 0{,}04\times 0{,}25 = 2\times 5\times \frac{2}{10}\times\frac{5}{10}\times\frac{4}{100}\times\frac{25}{100} =$$

$$= \frac{(2\times 5)\times(2\times 5)\times(4\times 25)}{10\times 10\times 100\times 100} = \frac{10\times 10\times 100}{10\times 10\times 100\times 100} = \frac{1}{100} = 0{,}01.$$

11.(E) Sean los seis números $n,\ n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4,\ n+5$. Sumándolos obtenemos: $n+n+1+n+2+n+3+n+4+n+5 = 6n+1+2+3+4+5 = 6n+15,$ que es múltiplo de 3. El único número, de los dados, que no es múltiplo de 3, es 85.

12.(B) Que Beatriz mienta implica que Alicia y Carlos dicen la verdad, pero si Carlos dice la verdad, entonces Diana tampoco miente. Conclusión: sólo miente Beatriz.

13.(C) Dividiendo el cuadrado grande en cuatro cuadrados iguales, como indica la figura, comprobamos que cada uno de estos últimos está dividido en dos triángulos rectángulos isósceles iguales. De ello se deduce que el área de la región sombreada es la mitad que la del cuadrado grande, esto es, 18:2 = 9.



14.(A) Si llamamos S a la suma de los tres números, entonces $2003+2004+2005\ (=6012)$ será igual a $2S$, ya que cada uno de los números pensados por Pedro, Quino y Roberto aparece dos veces en la anterior suma $(2003+2004+2005)$. Por lo tanto, $2S$ = 6012 y S =3006.

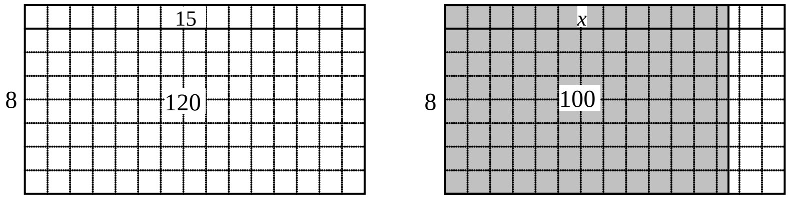
15.(A) La suma es 137171, luego tiene tres cifras distintas; 1, 3 y 7.

16.(E) Escribiendo 4357 como 4355 + 2 podemos poner:
$4356\times 4357 = 4356\times(4355+2) = 4356\times 4355 + 4356\times 2$
Pero como $4355\times 4356 = P,$ tenemos: $4356\times 4355 + 4356\times 2 = P + 8712.$

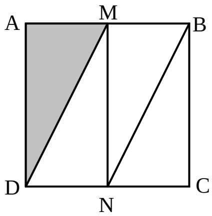
17.(D) Entre todos los cuadriláteros, esas condiciones sólo las cumplen el cuadrado y el rectángulo. Considerando que un cuadrado es un rectángulo cuyos lados son iguales, concluimos que ese cuadrilátero necesariamente es un rectángulo.

18.(D) Ayudándonos con la figura, en la que x representa el porcentaje pedido, planteamos la relación:

$\frac{15}{120} = \frac{x}{100}$ de donde $x = \frac{15 \times 100}{120} = 12{,}5.$



19.(B) Dividiendo el cuadrado en cuatro triángulos "iguales" con ayuda del punto medio N, del lado CD, queda claro que el área del cuadrado es cuatro veces mayor que el área de la parte sombreada, es decir, 28 cm^2.



20.(D) Sea S la suma de las edades de los 10 jugadores que quedan en el campo. Dado que la edad media de estos 10 jugadores es 21 años, tenemos:

$$\frac{S}{10} = 21 \Rightarrow S = 210$$

Llamando X a la edad del jugador expulsado y sabiendo que la edad media de los 11 jugadores es 22, podemos escribir:

$$\frac{210 + x}{11} = 22 \Rightarrow 210 + x = 242 \Rightarrow x = 242 - 210 = 32.$$

21.(D) Entre los 10 primeros números solamente se encuentra el trozo "**123**" uniendo los tres primeros números.

Entre el 10 y el 100 sólo existen las dos posibilidades mostradas en la tabla, donde se han señalado las decenas y las unidades. Es fácil ver que en ninguno de los dos casos es posible asignar cifras en los huecos en blanco de forma que las parejas de cada fila sean números consecutivos. No hay ningún trozo **123**".

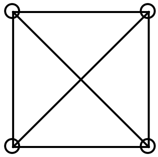
D	U	D	U
1	**2**	**3**	
	1	**2**	**3**

Entre el 100 y el 400 hay las cuatro "configuraciones" posibles señaladas en negrita, pero es fácil comprobar que estas sólo arrojan las tres soluciones completadas en la tabla con cifras normales (no negritas).

Conclusión: el trozo "**123**" aparece 4 veces.

C	D	U	C	D	U
1	**2**	**3**	1	2	4
3	**1**	**2**	**3**	1	3
2	3	**1**	**2**	**3**	2
			1	**2**	**3**

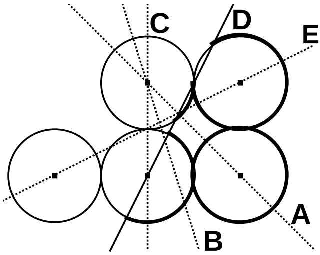
22.(C) Es inmediato que el número mínimo de asistentes para que cada uno pueda dar la mano a otros tres, es cuatro. Además, entre ellos se producen exactamente seis apretones de mano, como se comprueba con facilidad con ayuda del diagrama adjunto. En él cada segmento representa un apretón de manos. Dado que esas cuatro personas ya no pueden dar la mano a nadie más, el número de personas tendrá que ser múltiplo de 4 y el de apretones de mano múltiplo de 6.



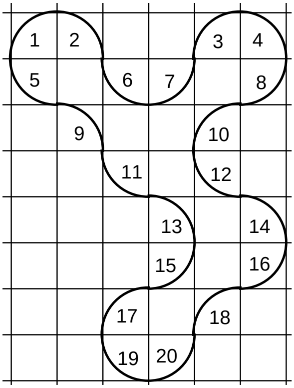
Como nos dicen que se dan 24 apretones, hay $\frac{24}{6}=4$ grupos de 4 personas cada uno, es decir, 16 personas en total.

23.(E) Comparando los dos platillos se observa que 1 cubo pesa lo mismo que dos cilindros. Por lo tanto como hay 5 cubos y 4 cilindros, pesarán lo mismo que 7 cubos y como el peso total es 420 g, significa que cada cubo pesa 420:7 = 60 g.

24.(D) Con ayuda de la figura es fácil calcular que la recta D divide la superficie ocupada por los círculos dejando a cada lado exactamente un área igual a la de dos círculos y medio; la recta D corta a las dos circunferencias superiores en su punto de tangencia y ambas son simétricas respecto al punto de tangencia, en consecuencia, los dos pequeños sectores circulares, determinados por la recta D con esos círculos tienen igual superficie, lo que termina de "equilibrar" las dos áreas.

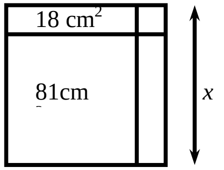


25.(D) Cada cuadradito que contenga parte de la curva contiene $\frac{1}{4}$ de circunferencia pequeña, o lo que es lo mismo, $\frac{1}{4}$ de unidad de longitud. Como la curva pasa por 20 cuadraditos, esta tiene una longitud igual a $20\times\frac{1}{4}=5$.

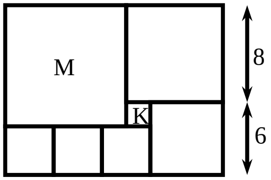


IX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase 2º Nivel



1. (E) El cuadrado de área 81 cm^2 tiene 9 cm de lado y así el rectángulo de encima (de área 18) tiene 2cm de ancho. Por tanto el lado del cuadrado grande mide 11 cm.



2. (B) Mirando el dibujo se observa que el lado de K mide (8 – 6), y por tanto el lado de M mide (8 + 2). Puesto que su lado es 5 veces el de K, su área lo será 25 veces.

3. (C) 201: 3 = 67; 2001: 3 = 667; 20001: 3 =6667; …
Es fácil observar que todos los cocientes tienen un siete y además tantos seises como ceros el dividendo, por tanto si el dividendo tiene 11 ceros el cociente tendrá 11 seises y un 7 (2×10^{12} tiene doce ceros pero once si le sumamos un uno). La suma de sus cifras será 66 + 7.

4. (D) Al formar con 64 cubitos un cubo mayor tendremos que el lado de éste será cuatro veces el de los pequeños, y así cada cara del grande estará formada por 16 caras de los cubitos. Serán pues visibles $6 \times 16 = 96$ caras frente a las $6 \times 64 = 384$ iniciales. Luego ahora habrá 384 – 96 = 288 ocultas.

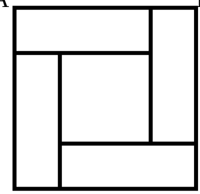
5. (A) El primero que escapa a las reglas fáciles de divisibilidad es 203, pero hete aquí que el taimado 7 lo divide. Al igual que 201, 207 es múltiplo de 3, y 205 es denunciado por su terminación. El un poco más sospechoso 209 cumple la cuca regla del 11. El nuevo sospechoso pasa a ser 211 que no es divisible por 7, ni por 11 ni por 13, pero además al dividirlo por 13 el cociente es menor que el siguiente primo (17). ¡Habemus primo!

6. (E) Numerando los árboles desde la casa de Alicia a la ida ha puesto lazos en los impares, y a la vuelta lo ha hecho en los números 57, 54, 51, ... , es decir en los múltiplos de 3. Quedarán sin lazo los pares que no sean múltiplo de 3. Del 1 al 57 hay 28 pares. Los múltiplos de 3 son el 6, 12, ... , y el 54 (nueve en total). Por tanto se quedaron sin lazo 19 árboles.

7. (C) Las posibles combinaciones son siete ya que el único condicionante es que los triángulos equiláteros son acutángulos.

8. (C) $2 \times 5 = 10$; $0,2 \times 0,5 = 0,10$; $(0,2)^2 \times (0,5)^2 = (0,2 \times 0,5)^2 = (0,1)^2 = 0,01$.
$10 \times 0,1 \times 0,01 = 0,010$.

9. (B) Cualquier divisor de dos números debe serlo de su diferencia (propiedad de sacar factor común a sumas y restas). Así los divisores comunes deberán serlo de $4224 - 2424 = 1800 = 18 \times 100 = 2 \times 3^2 \times 2^2 \times 5^2 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2$. Preguntamos al más pequeño (2424) si es divisible: por dos (es par); por 4 (24 es múltiplo de 4); por 8 (424 es múltiplo de 8); por 3 (2 + 4 + 2 + 4 es múltiplo de 3 pero no de 9); y por 5 (no). Luego el m.c.d. es $2^3 \times 3$. (Más rápido se visualiza si se descompone rápidamente 2424 como 24×101)



10.(A) Si llamamos x al lado grande de los rectángulos e y al pequeño, el perímetro de un rectángulo es $2x + 2y = 40$, mientras que el lado del cuadrado se expresa como $x + y$ que es entonces 20. Luego el área del cuadrado es 400 cm^2.

11.(A) $abab = ab00 + ab = ab \times 100 + ab = ab \times 99 + ab + ab$.
Al dividir el segundo miembro por 11, el primer sumando da resto cero (ya que 99 es múltiplo de 11), el segundo y el tercero dan resto cuatro con lo que el resto de la suma es ocho (0 + 4 + 4).

12.(C) Tenemos que $2\pi r = \pi r^2$, y simplificando $2 = r$.

13.(B) Si uno es capaz de viajar rápidamente por los primos menores que 100, la respuesta será la longitud de la cadena entre los dos consecutivos más distantes: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Vemos que la diferencia mayor entre dos primos consecutivos de la lista es 8 (97 – 89). Luego hay siete números compuestos entre ellos.

14.(C) Sin tener que dibujar el sexto elemento, uno puede darse cuenta de que las figuras están formadas por dos pirámides consecutivas de cuadraditos, o sea las sumas de sumas: (1) , (1 + 3) + (1) , (1 + 3 + 5) + (1 + 3), ... Así el sexto elemento es:
(1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11) + (1 + 3 + 5 + 7 + 9) = 36 + 25.
(Pero podemos darnos cuenta que cada uno de los elementos es la suma de dos cuadrados consecutivos: $1^2 + 0^2 = 1$; $2^2 + 1^2 = 5$; $3^2 + 2^2 = 13$;…)

15.(D) La suma en la columna de las unidades tendrá 10 unos, nueve en la de las decenas, ocho en la de las centenas, ... Así la suma acabará en cero y llevaremos una unidad a las decenas que sumaban nueve, luego al final también serán diez, acaba en 0 y llevamos una unidad a las centenas que sumaban ocho y ahora nueve. Ya no llevamos nunca hacia delante y por tanto la suma es 1234567900, que tiene nueve cifras distintas.

16.(A) 4356 × 4356 = (4355 + 1) × 4356 = 4355 × 4356 + 4356 =
= 4355 × (4357 – 1) + 4356 = 4355 × 4357 – 4355 + 4356 = *P* + 1.
(También 4355 × 4357 = (4356 – 1) × (4356 +1) = 4356^2 – 1 de donde se obtiene que 4356 × 4356 = 4355 × 4357 + 1 = *P* + 1).

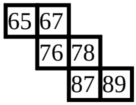
17.(D) No hay más que hacer una media agrupando los "artículos" por precios.

$$precio\ medio = \frac{precio\ total}{n^o\ de\ artículos} = \frac{10 \times 5 + 90 \times 4 + 120 \times 3}{220} = \frac{50 + 360 + 360}{220} =$$

$$= \frac{770}{220} = \frac{7}{2} = 3{,}5.$$

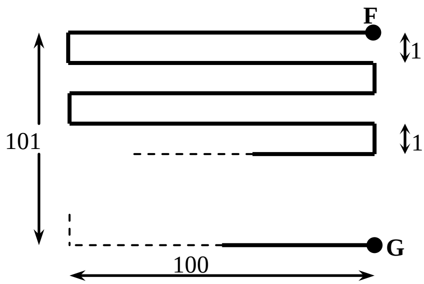
18.(D) Es bastante visual la simetría respecto a un plano de la figura, por lo que el cilindro está medio lleno (o medio vacío),así que si lo ponemos recto lo seguirá estando con lo que la altura del líquido será la mitad de la del recipiente.

19.(B) La colocación de los números en filas y columnas provoca numerosas pautas. En este caso en unas filas van los pares consecutivos y en la fila de abajo los impares de la misma decena. Ello hace que las terminaciones iguales pares y las terminaciones iguales impares estén en la misma columna, lo que no ocurre con la muestra **B)** (ver 67 y 87).



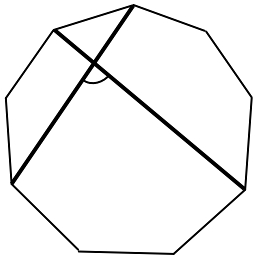
20.(A) El recorrido tiene 101 tramos "verticales" , 51 a la izquierda y 50 a la derecha. En cambio tiene 102 tramos horizontales (en darse cuenta de ello está el quid del problema, cuando desde F bajamos visualmente uno, ya hemos recorrido dos tramos horizontales,...). Por tanto el recorrido FG mide:

101 × 1 + 102 × 100 =10301.



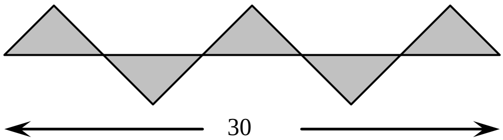
21.(B) Como el volumen de un cilindro es $\pi r^2 h$ y como en este caso es π dm^3 y el radio es 1 dm, se deduce que también la altura h es 1dm . Bastará recordar (o deducir) la fórmula del área lateral igual a $2\pi rh$ para obtener la respuesta.

22.(A) Al ser la figura un nonágono regular, podemos suponerla inscrita en una circunferencia donde el ángulo pedido sería interior, y por tanto mediría la semisuma de los arcos que abarca. Por una parte abarca un lado del nonágono (un arco de $\frac{360^{o}}{9} = 40^{o}$) y por la otra tres lados. La semisuma es 2 lados o dos arcos de 40º, por tanto el ángulo es de 80º.



23.(D) Observamos que los números formados por un número par de nueves al dividirlos por 11 dan números formados por nueves y ceros alternados. La relación entre los nueves del número inicial y el del cociente es de dos a uno. 10^{12} es un número con un uno y doce ceros. Si le restamos uno pasa a ser un número de doce nueves, luego al dividirlo por 11 saldrá un número con seis nueves y cinco ceros, y así la suma de sus cifras será 54.

24.(D)



Con estos triángulos rectángulos isósceles podemos formar dos cuadrados y medio. De estos cuadrados conocemos la longitud de la diagonal (30 : 5 = 6 cm). Luego mirando el cuadrado como rombo su área es $\frac{D \times d}{2} = \frac{6 \times 6}{2} = 18$. Dos veces y media son 45 cm^2**.**

25.(D) Aprovechando la ordenación de las letras podemos hacer una suma literal (con letras) y así:

$$\left.\begin{array}{c} AD = AB + BC + CD \\ CF = CD + DE + EF \\ BD = BC + CD \\ DF = DE + EF \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} AD = CF\text{, implica } AB + BC = DE + EF \\ BD = DF\text{, implica } BC + CD = DE + EF \end{array}\right\} AB + \cancel{BC} = \cancel{BC} + CD$$

IX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

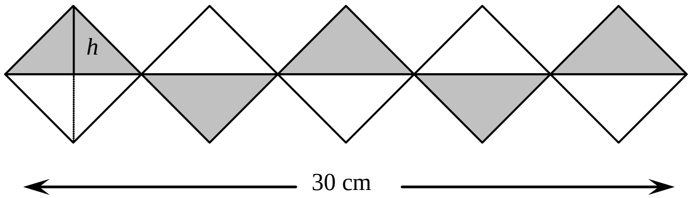
Soluciones 2ª Fase 3er Nivel

1.(C) Recuerda que los múltiplos de 11 cumplen la condición de que la suma de las cifras que ocupan posiciones pares, menos la suma de las cifras que ocupan posiciones impares es múltiplo de 11.
El mayor número con cifras distintas será 98*ab*. Buscamos *a* y *b* grandes y de modo tal que $(9 + a) – (8 + b)$ sea 0 ó 11. O lo que es lo mismo $1 + a – b = 0$ ó 11.
Los números más grandes y distintos de 9 y 8 que cumplen la condición son $a = 6$ y $b = 7$.
Así pues $9867 = 3 \times 11 \times 299$. Quedan eliminados A) pues no es par, B) pues sus cifras no suman 9, E) pues no acaba ni en 0 ni en 5. Probamos con C) y obtenemos $9867 = 3 \times 11 \times 13 \times 23$. Luego C es la respuesta correcta.

2.(D) $10^{12} – 1 = \underbrace{9\ldots\ldots9}_{\text{12 cifras}} = 11 \times 9\underbrace{090\ldots909}_{\text{11 cifras}}$

En total hay 6 nueves y 5 ceros. Así pues, la suma de las cifras es $9 \times 6 = 54$.

3.(D) Observa esta figura, como los triángulos son rectángulos e isósceles, se forman



cinco cuadrados. La diagonal de cada cuadrado mide 6 cm (30 : 5). Luego tenemos 5 triángulos de base 6 cm y altura 3 cm por ser la mitad de la diagonal. Así, el área de cada triángulo es $\frac{6\times3}{2} = 9$ y el área total es $5 \times 9 = 45$ cm^2.

4.(B) Haciendo algunas transformaciones algebraicas y usando las propiedades de potencias obtenemos:

$$\frac{x^y\, y^x}{y^y\, x^x} = \left(\frac{x}{y}\right)^y \times \left(\frac{y}{x}\right)^x = \left(\frac{y}{x}\right)^{-y} \times \left(\frac{y}{x}\right)^x = \left(\frac{y}{x}\right)^{x-y}$$

5.(B) Sabemos que $\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$; $\frac{c}{d}=\frac{3}{2}$; $\frac{d}{b}=\frac{1}{6}$.

Multiplicando los cocientes hábilmente obtenemos:

$$\frac{a}{c}=\frac{a}{b}\times\frac{b}{d}\times\frac{d}{c}=\frac{4}{3}\times\frac{6}{1}\times\frac{2}{3}=\frac{16}{3}.$$

6.(D) Despejando x obtenemos que $x=\frac{3k+12}{k}=3+\frac{12}{k}$ debe ser un número entero. Luego k ha de ser un divisor de 12. Los divisores positivos de 12 son: 1, 2, 3, 4, 6 y 12, así que hay 6 posibilidades.

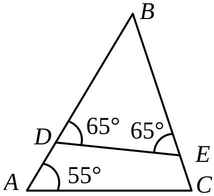
7.(A) Escribimos los números periódicos en forma de fracción y sumamos:

$0{,}\widehat{1}=\frac{1}{9}$; $0{,}\widehat{2}=\frac{2}{9}$; $0{,}\widehat{3}=\frac{3}{9}$; etc.

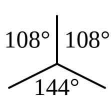
Obtenemos $\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{3}{9}+\frac{4}{9}+\frac{5}{9}+\frac{6}{9}+\frac{7}{9}+\frac{8}{9}+\frac{9}{9}=\frac{45}{9}=5.$

8.(A) Recuerda que en una progresión geométrica de razón 2, un término se obtiene del anterior multiplicando por 2. Si llamamos a al ángulo menor, los cuatro ángulos del cuadrilátero son: a, $2a$, $4a$ y $8a$ y, al ser los ángulos de un cuadrilátero, deben sumar 360º. Planteemos una ecuación: $a + 2a + 4a + 8a = 360º \Rightarrow 15a = 360º \Rightarrow a = 24º$ y por tanto $8a = 192º$ y la diferencia entre ambos es $192º – 24º = 168º$.

9.(D) El triángulo *BED* es isósceles de lados *BE* y *BD* iguales, luego los ángulos *BDE* y *BED* son iguales y ambos miden 65º. Los tres ángulos del triángulo *BDE* deben sumar 180º y así obtenemos que el ángulo *B* mide 50º (180º – 2 × 65º). Ahora, conociendo dos ángulos del triángulo *ABC*, es fácil obtener el tercero: $C = 180º – (55º + 50º) = 75°$.



10.(A) En geometría, cuando parece que no tenemos ningún dato, hay que fijarse en los ángulos, que son los que determinan las formas. En cada vértice del polígono de m lados coinciden dos polígonos iguales de n lados. Los tres ángulos que se forman en el vértice deben sumar 360º. Sumémoslos: Los ángulos interiores del polígono regular de 10 lados valen 144º (pues los ángulos centrales miden 36º) Con esto obtenemos la medida de los ángulos del polígono de n lados: $\frac{360º–144º}{2}=108º$.

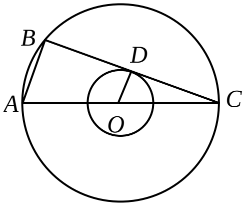


Ahora bien, ¿cuál es el polígono regular cuyos ángulos miden 108º? De nuevo miremos el ángulo central que debe medir $180º – 108º = 72º$ y como $360º = 72º × 5$, $n = 5$.

11.(C) Una buena forma de resolver este problema es dividiendo 100000001 entre 11. Obtendrás por cociente 9090909 y de resto 2.
Otra forma de pensar lo que vale el resto es la siguiente:

Siempre que n sea par 10^n -1 es múltiplo de 11, porque está formado por un número par de nueves. Por lo tanto $10^8 - 1 = 99999999$ es múltiplo de 11 (como cualquier número formado por un número par de cifras iguales, mira el criterio de divisibilidad del 11 en el problema 1) y $10^8 + 1 = (10^8 - 1) + 2$, el resto será 2.

12. (B) Observa que el triángulo ABC es rectángulo en B pues el ángulo inscrito que abarca un diámetro es recto. El triángulo ODC es rectángulo en D, pues recuerda que el radio y la tangente forman un ángulo recto. Como además tienen el mismo ángulo C los dos triángulos son semejantes. Llamando R al radio de la circunferencia grande,



$$AO = R,\ AC = 2R,\ OD = \frac{R}{3}.$$

Por semejanza sabemos que: $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{OD}{OC}$

Como $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{12}{2R} = \dfrac{6}{R}$ y $\dfrac{OD}{OC} = \dfrac{1}{3}$ tenemos que $\dfrac{6}{R} = \dfrac{1}{3}$ y por tanto $R = 18$.

13.(E) Veamos, **3**☺y = 4 × **3** – 3y + **3**y = 12 para cualquier valor de y, luego la respuesta correcta es E.

14.(B) Escribamos todas las bases como potencias de 2: $8 = 2^3$ y $4 = 2^2$. Usando propiedades de potencias de igual base y sacando factor común se obtiene:

$$\sqrt{\frac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}} = \sqrt{\frac{\left(2^3\right)^{10}+\left(2^2\right)^{10}}{\left(2^3\right)^4+\left(2^2\right)^{11}}} = \sqrt{\frac{2^{30}+2^{20}}{2^{12}+2^{22}}} = \sqrt{\frac{2^{20}\left(2^{10}+1\right)}{2^{12}\left(2^{10}+1\right)}} = \sqrt{\frac{2^{20}}{2^{12}}} = \sqrt{2^8} = 2^4 = 16.$$

15.(E) Este es otro problema que puedes resolver haciendo la división directamente:

$$Q = \frac{\overset{\leftarrow 24 \text{ unos} \rightarrow}{11..........11}}{1111} = 100010001000100010001.$$

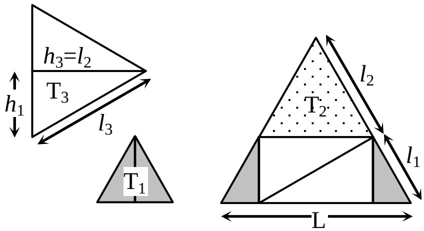
En total hay 15 ceros, 5 grupos de 3 ceros cada uno.
Es más interesante buscar una forma de resolverlo en general. Observa que
$R_8 = 1111\ 1111 = 1111 \times 10000 + 1111 = R_4 \times 10^4 + R_4 = R_4\ (10^4 + 1)$
$R_{12} = 11111111 \times 10000 + 1111 = R_8 \times 10^4 + R_4 = R_4\ (10^4 + 1) \times 10^4 + R_4$
Luego $R_{12} = R_4\ (10^8 + 10^4 + 1)$.
De igual modo: $R_{24} = R_{12}\ (10^{12} + 1) = R_4\ (10^8 + 10^4 + 1) \times (10^{12} + 1)$ y por tanto

$\frac{R_{24}}{R_4} = 10^{20} + 10^{16} + 10^{12} + 10^{8} + 10^{4} + 1$ que es un número de 21 cifras con 6 cifras iguales a 1 y el resto ceros. Así que el cociente tiene 21 – 6 = 15 ceros.

¿Sabrías calcular cuántos ceros tiene $\frac{R_{2005}}{R_5}$?

16.(A) Es útil recordar que la altura de un triángulo equilátero de lado L es $\frac{\sqrt{3}}{2}L$. Para obtener este resultado debes aplicar el Teorema de Pitágoras ya sea en triángulo de lados L o en uno de lados 1 y utilizar después que todos los triángulos equiláteros son semejantes.

Hemos dividido la figura en tres triángulos T_1, T_2 y T_3 de lados l_1, l_2 y l_3 y alturas h_1, h_2 y h_3 respectivamente.



Observa que :

$$\frac{l_3}{2} = h_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} l_1 \Rightarrow l_3 = \sqrt{3}\, l_1$$

(Por ser la altura de T_1)

y $l_2 = h_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} l_3$ (Por ser la altura de T_3). Entonces $l_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}\, l_1\right) = \frac{3}{2} l_1$.

Como $l_1 + l_2 = L \Rightarrow l_1 + \frac{3}{2} l_1 = L \Rightarrow \frac{5}{2} l_1 = L \Rightarrow \frac{l_1}{L} = \frac{2}{5}$.

17.(E) Llamemos x al número de fotocopias que vamos a realizar. Observa que x es mayor que 100. Si el precio medio por fotocopia es de 0,035 euros al realizar x, entonces estas cantidades deben ser iguales:

$$0{,}035\, x = 0{,}05 \times 10 + 0{,}04 \times 90 + 0{,}03 \times (x - 100)$$

Resolviendo con cuidado la ecuación obtenemos: $x = 220$.

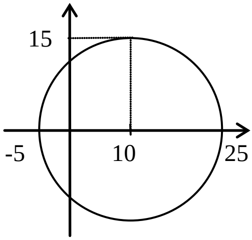
18.(D) Podríamos probar elevando al cuadrado todos los números entre 10 y 31 (32^2 ya tiene 4 cifras) pero no es necesario trabajar tanto.

Observa que los cuadrados perfectos sólo pueden acabar en 0, 1, 4, 5, 6 y 9 ya que: 0^2 = **0**, 1^2 = **1**, 2^2 = **4**, 3^2 = **9**, 4^2 = 1**6**, 5^2 = 2**5**, 6^2 = 3**6**, 7^2 = 4**9**, 8^2 =6**4** y 9^2 = 8**1**.

De modo que sólo hay que buscar capicúas que sean cuadrados perfectos entre los siguientes números:

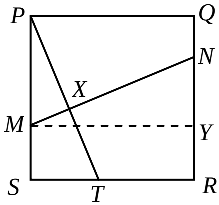
101 – 111 – 121 … 191 Probamos con 11 y 19 ; **11^2 = 121** y 19^2 = 361
404 – 414 – 424 … 494 Probamos con 22 y 28; **22^2 = 484** y 28^2 se pasa seguro.
505 – 515 – 525 … 595 Probamos con 25; 25^2 = 625, nada.
606 – 616 – 626 … 696 Probamos con 24 y 26; 24^2 = 576 y **26^2 = 676**

909 – 919 – 929 … 999 Probamos con 23 y 27; 23^2 es muy pequeño y $27^2 = 729$
Así que hemos encontrado tres cuadrados perfectos entre los capicúas de tres cifras.



19.(A) El centro de la circunferencia es el punto medio del segmento, luego sus coordenadas son (10, 0) y el radio de la circunferencia es 15. Queremos que la distancia del punto (*x*, 15) al centro (10, 0) sea igual que la distancia del centro al punto (25, 0). Debe cumplirse $(x-10)^2+15^2=(25-10)^2$, luego $x = 10$.

20.(D) Deshagamos el entuerto de Pifio haciéndole a 16 lo contrario de lo que hizo él. Primero sumemos 24 (16 + 24 = 40) y ahora multipliquemos por 6 (40 × 6 = 240). De modo que el número inicial era 240. Hagamos ahora lo que debería haber hecho Pifio: 240 × 6 + 24 = 1440 + 24 = 1464 que está entre 1 200 y 1 600.

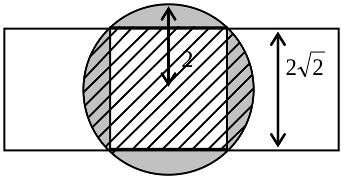


21.(B) Trazamos la paralela a *SR* por *M* y llamamos *Y* al punto de intersección de esta recta con *QR*. Observa que los triángulos rectángulos *PST* y *NMY* son iguales pues tienen sus ángulos iguales y los lados correspondientes *PS* y *MY* miden ambos 12 cm. *XN* es 4 cm menor que la hipotenusa del triángulo rectángulo *NMY*. Como *NY* = *ST* = 5, aplicando el Teorema de Pitágoras tenemos que
$MN^2 = 5^2 + 12^2$ y por tanto *MN* = 13 y *XN* = 13 – 4 = 9 cm.

22.(D) Planteando un sistemita tenemos $A = 4C$ y $90º – C = 4 × (90º – A)$. Sustituyendo en la segunda ecuación *A* por 4*C* obtenemos $90º – C = 4 × (90º – 4C)$.
Por tanto $C = 18º$.

23.(C) Este problema puede parecerte complicado, pero en realidad es de lo más sencillo. Sólo hay que entender lo que nos dicen. Vayamos despacito y por partes:
Si queremos calcular $M\left[M\left(a,m(b,c)\right);m\left(d,m(a,e)\right)\right]$ comencemos calculando *m*(*b*,*c*) que, según nos dicen, consiste simplemente en elegir el menor de entre esos dos números. Así pues *m*(*b*,*c*)= *b* pues b < c. De igual forma calculamos *m*(*a*,*e*) = *a*.
Ahora sustituimos estos valores en la expresión de arriba.
La cosa va quedando así: $M\left[M\left(a,m(b,c)\right);m\left(d,m(a,e)\right)\right]$ = *M*[*M*(*a*,*b*), *m*(*d*,*a*)].
Calculamos ahora *M*(*a*,*b*) = *b* (pues debo elegir el mayor de los dos) y *m*(*d*,*a*) = *a*.
Sustituyendo de nuevo tenemos: *M*[*M*(*a*,*b*), *m*(*d*,*a*)] = *M*(*b*,*a*) = *b*.

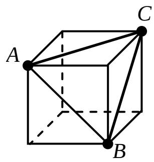
24.(D) Debemos calcular el área rayada. Dentro de la figura formamos un cuadrado de lado $2\sqrt{2}$. Obtenemos así 4 segmentos circulares iguales. El área buscada es el área del cuadrado más el área de dos de esos segmentos circulares. El área de los cuatro segmentos circulares es la diferencia entre el área del círculo y el área del cuadrado $\pi \times 2^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 4\pi - 8$. Luego el área de dos es la mitad $\frac{4\pi - 8}{2} = 2\pi - 4$. Sumándole el área del cuadrado obtenemos el área buscada: $8 + \left(2\pi - 4\right) = 2\pi + 4$.



25.(C) Escribamos todos los números que cumplan esa condición y veamos cuáles son primos. Si la suma de las cifras debe ser 4 y el número debe ser impar y no contener el 0, sólo podemos usar las cifras 1, 2 y 3 y los números son:
13, 31, ~~22~~, ~~112~~, 121, 211, 1111. Tachamos 22 y 112 porque son pares. Del resto, tanto 121 como 1111 son múltiplos de 11. Los otros tres números sí son primos. Luego la afirmación es falsa en dos casos.

IX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase 4º Nivel

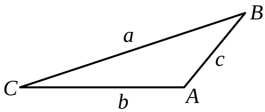


1. (E) El triángulo en cuestión es un triángulo equilátero de lado la longitud de la diagonal de cada cara, es decir, $\sqrt{2}$, por lo que su área será $\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2 \times \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y la respuesta es E.

2. (B) Como cotg $\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$, tenemos que calcular $\cot g10^o + tg5^o = \frac{\cos 10^o}{\operatorname{sen} 10^o} + \frac{\operatorname{sen} 5^o}{\cos 5^o} =$

$= \frac{\cos 10^o \cos 5^o + \operatorname{sen} 10^o \operatorname{sen} 5^o}{\operatorname{sen} 10^o \cos 5^o} = \frac{\cos(10^o - 5^o)}{\operatorname{sen} 10^o \cos 5^o} = \frac{\cos 5^o}{\operatorname{sen} 10^o \cos 5^o}$ = cosec 10º, siendo B la respuesta.

3. (C) El área del triángulo equilátero *AEF* la podemos obtener restándole al área del triángulo equilátero *DBC* el triple del área del triángulo *ABC*.



$BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 120^o = b^2 + c^2 + bc$.

Así que Área $\overset{\Delta}{DBC} = (b^2 + c^2 + bc)\,\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Área $\overset{\Delta}{ABC} = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} 60^o = bc\,\frac{\sqrt{3}}{4}$

Así pues, el área pedida será $(b^2 + c^2 + bc)\frac{\sqrt{3}}{4} - 3bc\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}(b^2 + c^2 - 2bc) =$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}(b-c)^2$ y la respuesta es C.

4. (A) Una manera cómoda de calcular esta operación es observar que la expresión entre corchetes es la suma de la tercera línea inclinada del triángulo de Pascal, es decir, la suma de los números triangulares 1 + 3 + 6 + 10 + … + 45. Como aparece multiplicada por 6, podemos multiplicar en primer lugar por 2, o sea, calcular 2 + 6 + 12 + 20 + … + 90, es decir, 1 × 2 + 2 × 3 + 3 × 4 + … + 9 × 10 y el resultado multiplicarlo por 3.

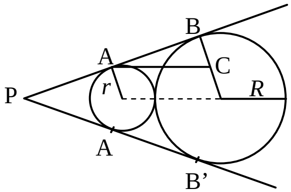
Para calcular esta suma, agrupamos de dos en dos y tenemos

2 × 4 + 4 × 8 + 6 × 12 + 8 × 16 + 90 que es 112 + 128 + 90 = 330.

El resultado final será, pues, 330 × 3 + 10 = 1000 y la respuesta A.

5. (C) Como los ángulos de cualquier cuadrilátero suman 360º, podemos escribir, llamando 75º + 3d al ángulo mayor, que $\frac{75º+75º+3d}{2}\times 4 = 360º$, de donde 300º + 6$d$ = 360º y d = 10º, por lo que el ángulo mayor es 105º, siendo entonces la respuesta C.

6. (B)



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ABC, podemos escribir que $4^2 + (R - r)^2 = (R + r)^2$, es decir, $Rr = 4$.

Por otra parte, como $PB = 2PA$, sigue, por semejanza de triángulos, que $R = 2r$, con lo que, con la igualdad anterior, concluimos que $r = \sqrt{2}$ y el área del círculo pequeño será $\pi\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2\pi$ y la respuesta B.

7. (B) Escribiendo los radicandos como $\sqrt[3]{5\times 6}$, $\sqrt[3]{6^3\times 5}$, $\sqrt{5^2\times 6}$ y $\sqrt{6^2\times 5}$ y al tratarse en todos los casos de raíces sextas, basta comparar los números 5×6, $6^3 \times 5$, $5^2 \times 6$ y $6^2 \times 5$, en los que evidentemente el mayor es el segundo y la respuesta B.

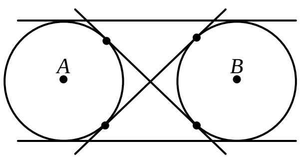
8. (C) Al ser la derivada de la función $y' = 2x - 3$, la abscisa del punto de tangencia vendrá dada por la solución de la ecuación obtenida igualando la derivada a cada una de las pendientes.

$$\begin{cases} 2x-3=1 \Rightarrow x=2 \\ 2x-3=2 \Rightarrow x=\frac{5}{2} \\ 2x-3=3 \Rightarrow x=3 \\ 2x-3=-3 \Rightarrow x=0 \\ 2x-3=3 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

o sea, la abscisa del punto de tangencia será 2, $\frac{5}{2}$, 3, 0 ó 3.

Así pues, el punto de tangencia será (2, 3), $\left(\frac{5}{2}, 8\right)$, (3, 1), (0, 0) ó (3,8). Como el único punto de estos que verifica la ecuación de la curva es (3, 1), la recta tangente es la tercera, o sea, la respuesta es C.

9. (D)



Las rectas que disten 2 unidades del punto A serían tangentes a la circunferencia de centro A y radio 2.

Análoga condición verificarán las rectas que disten 2 unidades del punto *B*. Así pues, la respuesta al problema será el número de tangentes comunes a estas dos circunferencias que, como no se cortan, pues *A* y *B* distan más de 2 + 2 unidades, la respuesta será 4, es decir, D.

10. (A) Como el baricentro divide a cada mediana en dos segmentos de razón 2 a 1, podemos escribir que $\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{GT}$, o sea, $(1–m_1,\ 6–m_2) = 2\times(2,\ –1)$ siendo $M = (m_1,\ m_2)$. Así pues, $1 – m_1 = 4$, $6 – m_2 = –2$ y $M = (–3, 8)$ por lo que la respuesta es A.

11. (A) De todas las descomposiciones posibles de 8 en suma de 3 enteros positivos, la única válida como lados de un triángulo es (2, 3, 3). (Recordar que cada lado debe ser menor que la suma de los otros dos). Así pues el triángulo en cuestión es isósceles y la altura sobre el lado desigual medirá $\sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8}$, por lo que su área será $\frac{1}{2}\times 2\sqrt{8} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, siendo entonces A la respuesta.

12. (A) Como 0,66 = 2 × 0,48 – 0,30, sería $a^{0,66} = a^{2\times 0,48-0,30} = \frac{\left(a^{0,48}\right)^2}{a^{0,30}} = \frac{3^2}{2} = 4,5$ y la respuesta sería A.

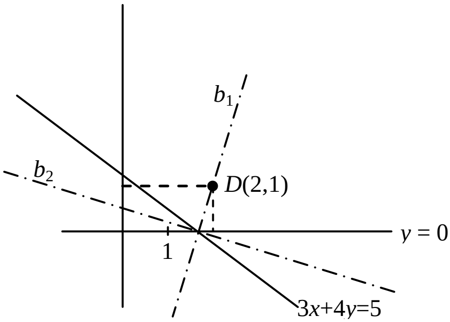
Nota importante: lo que pretendíamos con este problema es que el estudiante viera una relación entre 0´66, 0´48 y 0´30 y aplicara propiedades de las potencias.

Como podéis observar, pensamos en *a* = 10 y los exponentes serían $\log_{10} 2$ y $\log_{10} 3$ redondeados a la centésima. Cuando el problema estaba ya puesto -y las copias hechas- nuestros amigos de La Rioja -que celebran el concurso conjuntamente con nosotros- nos hicieron notar que nuestro redondeo nos había llevado al caos: no hay ningún número real ***a*** que verifique esas condiciones, ni 10 ni ningún otro. Ellos quitaron el problema, pero nosotros no tuvimos tiempo. Sirvan estas líneas de disculpa para aquellos estudiantes y profesores de la Comunidad de Madrid que hubieran detectado la anomalía, así como de reconocimiento a la competencia de nuestros amigos riojanos.

13. (D) Un simple dibujo nos dice que el único candidato posible a ser respuesta del problema es D (2, 1).

Quien no se fíe de los dibujos, puede calcular la distancia de cada uno de esos puntos a la recta $3x + 4y - 5 = 0$ y observar que solamente en el caso D vale igual que el valor absoluto de la ordenada del punto, que es la distancia a la otra recta: $y = 0$.

$$d(D,r) = \frac{|3\times 2 + 4\times 1 - 5|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{5}{5} = 1.$$



14. (C) Se trata de la suma de los cinco primeros términos de una progresión geométrica de primer término 1, último término $(1 + i)^5$ y razón $1 + i$, es decir: $S = \frac{(1+i)^6 - 1}{1+i-1} = -\left((1+i)^6 - 1\right)i$. Como $(1 + i)^6 = \left(\sqrt{2}_{45^o}\right)^6 = 8_{270^o} = -8i$, la suma será $-i\,(-8i - 1) = -8 + i$ y la respuesta C.

15. (C) Una forma cómoda de resolver el problema es viendo que las unidades de la suma son $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$, por lo que automáticamente sabemos la cantidad de unidades de las diversas órdenes (restar 9, 8, 7, etc.). Así pues, nuestra suma es: $45 + 36\times 10 + 28\times 10^2 + 21\times 10^3 + 15\times 10^4 + 10\times 10^5 + 6\times 10^6 + 3\times 10^7 + 1\times 10^8$, suma muy fácil de calcular escribiendo en columna que resulta ser 137174205 que es un número con 7 cifras distintas, por lo que la respuesta es C.

16. (D) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots. + 99^2 = S$
$2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + 100^2 = T$.
Restando tenemos: $(2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + \ldots + (100^2 - 99^2) = T - S$,
es decir: $(1 + 2) + (3 + 4) + \ldots + (99 + 100) = T - S$ por lo que

$$T = S + [1 + 2 + \ldots + 100] = S + \frac{101}{2} \times 100 = S + 5050$$ y la respuesta es D.

17. (A) *abc* debe ser un número de 3 cifras, por lo que $a \neq 0$. Como queremos que tanto *abc* como *cba* sean cuadrados perfectos, ni c ni a puede ser 2, 3, 7, 8, que son las cifras en las que nunca puede acabar un cuadrado. Si $a = 1$, c podría ser, en principio, 1, 4, 5, 6, 9. Como en la primera centena hay cuatro cuadrados, 121, 144, 169, 196 de los cuales los tres primeros también lo son leídos al revés, ya llevamos 3. En la centena de los 400, hay dos cuadrados, $441 = 21^2$ y $484 = 22^2$. Ambos leídos al revés también son cuadrados, dos más. En la centena de los 500, los únicos cuadrados son $23^2 = 529$ y $24^2 = 576$. Ninguno es un cuadrado leído al revés. En la centena de los 600, hay dos cuadrados, el $625 = 25^2$ y el $676 = 26^2$, de los cuales al leer al revés sólo es cuadrado el capicúa 676. Finalmente en la centena de los 900, es un cuadrado el $961 = 31^2$, curioso número pues leído al revés es el cuadrado de 13, que es 31 leído al revés, igual que le pasa al 441. En total nos han salido 3 + 2 + 1 + 1 = 7, con lo que la respuesta es A.

18. (A) $S = \frac{1}{2} ab\, sen\hat{C} = \frac{1}{2} ab\sqrt{1-\cos^2 \hat{C}} = \frac{1}{2}\times 8\times 6\times \sqrt{1-\frac{9}{25}} = 16$, siendo entonces la respuesta A.

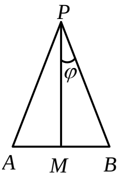
19. (E) sen 4α = 2 sen 2α cos 2α = 4 sen α cos α ($\cos^2\alpha$ – sen $^2\alpha$)

Como α es del primer cuadrante y su coseno es $\frac{4}{5}$, su seno será $\frac{3}{5}$ y la respuesta a nuestro problema será $4\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}\times\left(\frac{16}{25}-\frac{9}{25}\right) = \frac{48}{25}\times\frac{7}{25} = \frac{336}{625}$

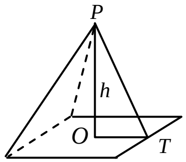
es decir E.

20. (C) Llamando $a \le b \le c \le d$ a los 4 números y sumando todas estas cantidades, tenemos que 3 ($a + b + c + d$) = 807, por lo que $a + b + c + d = 269$ y $d = 269 - (a + b + c) = 269 - 180 = 89$, que corresponde a la respuesta C.

21. (E) Se trata de una pirámide regular cuya apotema PM la podemos calcular cómodamente



$$\text{tg } \varphi = \frac{MB}{PM} \Rightarrow PM = \frac{MB}{\text{tg}\varphi} = \frac{1}{2\text{tg}\varphi}.$$



Dibujando la altura h, observamos que $h^2 + OT^2 = PT^2$, es decir:

$h^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4\text{tg}^2\varphi}$, de donde $h^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\text{tg}^2\varphi} - 1\right)$, o sea,

$$h = \frac{1}{2\text{tg}\varphi}\sqrt{1-\text{tg}^2\varphi} = \frac{1}{2tg\varphi}\sqrt{\frac{\cos^2\varphi - sen^2\varphi}{\cos^2\varphi}} = \frac{\sqrt{\cos 2\varphi}}{2sen\varphi}$$

Así pues, el volumen será $\frac{1}{3} \times 1 \times h = \frac{\sqrt{\cos 2\varphi}}{6\text{sen}\varphi}$ y la respuesta es E.

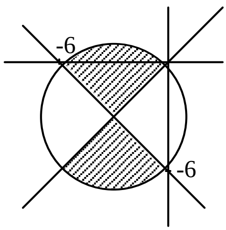
22. (B) Es evidente que n debe ser un número de 4 cifras pues el mayor de 3 cifras, que corresponde al que mayor suma tiene de sus cifras, 999, verifica:
$n + S(n) < 2005$. Por otra parte, $n < 2000$ pues 2000 y 2001 no verifican la ecuación y los demás hasta 2004 obviamente tampoco. Además, como la mayor

suma de los dígitos en los números $1000 < n < 2000$ se da en 1999 y es 28, n debe ser mayor que $2005 - 28 = 1977$. Si $n = 1978$, entonces $n + S(n) = 2003$, por lo que $n = 1979$ verificará la ecuación.
En la decena de los $198u$, tenemos que $198u + 1 + 9 + 8 + u = 198\times 10 + 18 + 2u$, es decir, un número par, y, por tanto, no igual a 2005.
Finalmente en la decena de los $199u$, la suma de sus cifras es mayor o igual que 19, por lo que $199u + S(199u) \geq 2009 > 2005$, es decir, hay un solo número con esa propiedad y la respuesta es B.

23. (B) Si $\lg_x y = a$, entonces $x^a = y \Rightarrow x \;\; y^{\frac{1}{a}} \Rightarrow \lg_{\mathrm{y}} x = \dfrac{1}{a}$.

Así pues, de la igualdad dada, sabemos que $a + \dfrac{1}{a} = \dfrac{10}{3} \Rightarrow a = 3$ (supongamos $x < y$). Tenemos, pues, que $\lg_x y = 3 \Rightarrow x^3 = y$. Como $xy = 144$, resulta $x^4 = 144$ y como $x > 0$, es $x = \sqrt{12}$, es decir $y = \sqrt{12^3}$, por lo que $\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{\sqrt{12}+\sqrt{12^3}}{2} =$ $\dfrac{\sqrt{12}}{2}(1+12) = 13\sqrt{3}$, es decir, respuesta B.

24. (E) Por las condiciones dadas, tenemos que
$f(x) + f(y) = x^2 + 6x + 1 + y^2 + 6y + 1 = (x + 3)^2 + (y + 3)^2 - 16 \leq 0$. Además
$f(x) - f(y) = x^2 - y^2 - 6(x - y) = (x - y)(x + y - 6) \leq 0$. Así pues, al ser T el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen simultáneamente las dos desigualdades dadas, tenemos que T es la intersección de los conjuntos



$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x + 3)^2 + (y + 3)^2 \leq 16\} \quad \text{y}$$

$$B = \left\{ (x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \begin{matrix} x-y\geq 0 \\ \text{y} \\ x+y+6\leq 0 \end{matrix} \quad \text{ó} \quad \begin{matrix} x-y\leq 0 \\ \text{y} \\ x+y+6\geq 0 \end{matrix} \right\}$$

donde A es el interior de un círculo y B una región del plano determinado por rectas perpendiculares.

Al dibujar el conjunto T nos encontramos con que T está formado por dos cuartos de círculo de radio 4 por lo que su área será $\dfrac{1}{2}\pi \times 4^2 = 8\pi \approx 25{,}13$ con lo que la respuesta será E.

25. (E) Sea $a + bi = z$, nos dicen que $z^{2005} = \overline{z}$, y por tanto $|z|^{2005} = |z|$, o sea, $|z|\left(|z|^{2004} - 1\right) = 0$ $\Rightarrow |z| = 0$ ó $|z| = 1$. De la igualdad $|z| = 0$, obtenemos que $z = 0$ y si $|z| = 1$, como $z^{2005} = \overline{z}$, tenemos que $z^{2006} = \overline{z} \times z = |z|^2 = 1$, es decir, de la igualdad $z^{2006} = 1$ obtenemos las 2006 soluciones de la unidad que, junto a la $z = 0$, obtenida antes, nos dan 2007 soluciones, por lo que la respuesta es E.

Participantes y relación de ganadores del IX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

	NIVEL 1		NIVEL 2		NIVEL 3		NIVEL 4	
	5º P	6º P	1º ESO	2º ESO	3º ESO	4º ESO	1º B	2º B
nº de estudiantes	131	316	229	375	225	291	161	140
inscritos	139	319	272	438	285	369	226	191
total real / inscritos	447 (458)		604 (710)		516 (654)		301	417
media	58,84		68,2		63		59,8	
puntuación máxima	110		125		113		104	
nº de estudiantes con más de 90 puntos	14 (3%)		53 (9%)		32 (6%)		7 (2%)	
nº de estudiantes con menos de 50 puntos	132 (30%)		77 (13%)		118 (23%)		69 (23%)	
nº de centros	101		188		172		129	

Total real se refiere al número de estudiantes del nivel correspondiente que realizaron la prueba. Entre paréntesis figura el número de estudiantes inscritos en ese nivel.

Los ganadores fueron:

NIVEL I

1. Daniel Henry Mantilla (6º Primaria) Liceo Francés. Madrid
2. Diego Peña Castillo (5º Primaria) Colegio Amor Misericordioso. Madrid
3. José Luis Contreras Santos (6º Primaria) Colegio Santa María del Yermo. Madrid

NIVEL II

1. Moisés Herradón Cueto (1º ESO) Colegio Brains. Madrid
2. David Cerdán Hernández (2º ESO) Colegio Ntra Sra de las Maravillas. Madrid
3. Rubén Jiménez Benito (1º ESO) IES José Hierro. Getafe

NIVEL III

1. Francisco Plata Moraleda (4º ESO) IES Jaime Ferrán Clúa. Madrid
2. Diego Izquierdo Arseguet (3º ESO) Liceo Francés. Madrid
3. Arsenio Ruiz Vega (4º ESO) Colegio San José del Parque. Madrid

NIVEL IV

1. Elisa Lorenzo García (2º Bchto) IES Fortuny. Madrid
2. Hugo Fernández Hervás (1º Bchto) IES San Juan Bautista. Madrid
3. Carlos Pardo Martín (2º Bchto) Colegio Retamar. Madrid

V Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

19 de noviembre de 2005

PRUEBA POR EQUIPOS (45 minutos)

1.- En una gran caja hay dentro 10 cajas más pequeñas. Cada una de estas 10 cajas pequeñas está o bien vacía o bien llena con otras 10 cajas más pequeñitas que no tienen nada dentro. En total, de todas las cajas que tenemos, hay 6 que tienen cajas dentro. ¿Cuántas cajas estarán vacías?

2.- Calcula cuántos pares ordenados (x, y) tienen la propiedad de que x e y son números de dos cifras cada uno, $x < y$, y además $x \cdot y$ es un número de 3 cifras todas iguales.

3.- ¿Cuántos enteros positivos menores que 2005 son múltiplos de 3 ó de 4 pero no de 5?

4.- El punto A(4,0) es vértice de un hexágono regular ABCDEF (en sentido antihorario) de lado 8 y cuyo interior está totalmente contenido en el primer cuadrante. ¿Cuáles serán las coordenadas del vértice D?

5.- En la sucesión 1, 3, 2, -1, -3, -2, … cada término, a partir de los dos primeros, se define como la diferencia entre los dos anteriores, $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$. Calcula la suma de los 100 primeros términos de la sucesión.

6.- Resuelve el sistema $\left.\begin{array}{rcl} 16^x - 16^y & = & 192 \\ 4^x - 4^y & = & 8 \end{array}\right\}$

7.- Algunos de los puntos reticulares de la recta de ecuación $7x + 11y = 770$ están en el primer cuadrante. Calcula la media aritmética de las abscisas (coordenada x) de esos puntos.
(Recuerda**:** Un punto se dice "reticular" si sus coordenadas son números enteros)

8.- Calcula la suma: $i^{0!} + i^{1!} + i^{2!} + \ldots + i^{100!}$ (Recuerda: i es la unidad imaginaria y verifica $i^2 = -1$).

9.- La medida de los tres lados de un triángulo, expresada en cm, son tres números consecutivos y el área del triángulo es 84 cm^2. Halla la medida de cada lado del triángulo.

10.- Si $A = \left(\frac{1}{3}\right)^{1000} + \left(\frac{2}{3}\right)^{1000}$ y $B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{1000} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{1000}$, determina razonadamente, ¿cuál de las dos expresiones es mayor, A o B?

V Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

19 de noviembre de 2005

<u>PRUEBA INDIVIDUAL</u> Primer ciclo de E.S.O. (90 minutos)

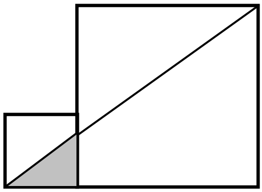
1. ¿Qué número es mayor: 8^{10}, 9^9 ó 10^8?

2. Dos pasajeros de un avión llevan, entre los dos, 135 kg de equipaje. El primero paga 13,5 € por su exceso de equipaje y el segundo 27 € por el exceso en el suyo. Si el total del equipaje perteneciera a una sola persona pagaría 81 € por el exceso de equipaje. ¿Cuántos kg de equipaje son permitidos a cada persona sin tener que pagar nada adicional?

3. Escribimos en una fila 12 enteros positivos. Si el que ocupa el 4º lugar es el 4 y el que ocupa el 12º lugar es el 12 y además sabemos que la suma de tres números consecutivos cualesquiera de la fila es 333, escribe la fila completa.

4. Partimos un trapecio con una recta paralela a las bases y a igual distancia de ambas, dividiendo el trapecio dado en otros dos trapecios. Si el área de uno de éstos es doble que la del otro, ¿cuál es el cociente entre las longitudes de las bases del trapecio original?

5. Los dos cuadrados de la figura tienen los lados que miden 2 cm y 5 cm respectivamente. ¿Cuál es el área de la zona sombreada?



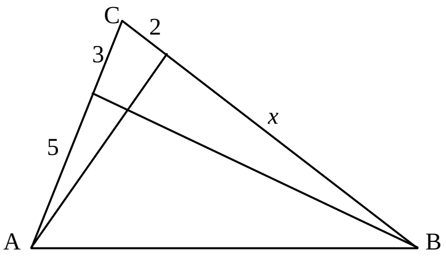
V Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

19 de noviembre de 2005

<u>PRUEBA INDIVIDUAL</u> Segundo ciclo de E.S.O. (90 minutos)

1.- Un cilindro recto, con diámetro de la base igual a la altura, está inscrito en un cono recto de diámetro de la base 10 y altura 12, de manera que coinciden los ejes del cilindro y del cono. ¿Cuál es el radio del cilindro?

2.- Desde los vértices A y B de un triángulo acutángulo trazamos las dos alturas que determinan en los lados opuestos segmentos de longitudes 5, 3, 2 y x como se muestra en la figura. Calcula x.



3.- Si $m + n = 3$ y $m^2 + n^2 = 6$, calcula $m^3 + n^3$.

4.- Si del conjunto de todos los números capicúa de 3 cifras elegimos uno al azr, ¿cuál es la probabilidad de que sea múltiplo de 11?

5.- Los precios de una pluma, un libro y una cartera suman en total 100 €. La cartera cuesta más que dos plumas y tres plumas cuestan más que cuatro libros. Si tres libros cuestan más que una cartera y todos los precios son una cantidad entera de euros, ¿cuánto cuesta cada cosa?

V Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

19 de noviembre de 2005

<u>PRUEBA INDIVIDUAL</u> Bachillerato (90 minutos)

1. Calcula el valor de la incógnita x en el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl}(\log_{25} 3)x + (\log_2 7)y &=& \log_5 27\\ (\log_7 8)x + (\log_3 5)y &=& \log_{49} 2\end{array}\right\}.$$

2. Si $f(x) = |3x-1|$, calcula todos los valores de x para los que $f(f(x)) = x$.

3. Las pendientes de dos rectas que pasan por el origen son p y q con $p > q > 0$. Si la recta $y = x$ es bisectriz del ángulo que forman esas dos rectas y $p+q=\sqrt{13}$, calcula $p-q$.

4. Calcula el área encerrada por la gráfica de $y^3 - x\cdot y^2 - 3y^2 = 4x^2\cdot y - 4x^3 - 12x^2$.

5. Tres enteros positivos distintos están en progresión aritmética. Si dividimos la suma de sus cubos entre su suma, el cociente es 81. Calcúlalos.

V Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

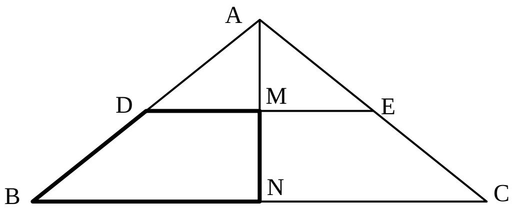
19 de noviembre de 2005

PRUEBA POR RELEVOS (45 minutos)

1^er^ Ciclo de ESO.-

1A.- En una librería hay una oferta curiosa: *"Si compra dos libros le vendemos otro por tan solo* 1 €*"*
Si el precio normal (sin oferta) de todos los libros es el mismo y por 45 € me he llevado 9 libros, ¿cuál es el precio normal de cada libro?.
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1B.- Sea "T" la respuesta del problema 2B. El área del triángulo isósceles ABC de la figura es $\frac{800}{T}$.
Si D y E son puntos medios de los lados AB y AC, calcula el área del trapecio DMNB.
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)



1C.- Sea "T" la respuesta del problema 2C. Un ciclista subiendo un puerto tarda $\frac{4T}{25}$ minutos en cada kilómetro y al bajar (por la misma carretera) hace 1 km en cada minuto. ¿Cuál ha sido la velocidad media en el viaje completo de ida y vuelta?
(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala)

V Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

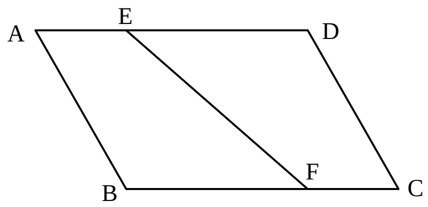
19 de noviembre de 2005

PRUEBA POR RELEVOS (45 minutos)

2º Ciclo de ESO.-

2A.- Sea “T” la respuesta del problema 3A. En el paralelogramo ABCD, los puntos E y F verifican que AE = FC. Si EF = 3T y el perímetro del cuadrilátero ABFE es 40, calcula el perímetro del paralelogramo ABCD.

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala)



2B.- Calcula el producto de todas las soluciones de la ecuación

$$\left(\frac{2x+3}{3x+2}\right)^2 + \left(\frac{2x+3}{3x+2}\right) = 0$$

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1er ciclo)

2C.- Sea "T" la respuesta del problema 3C. En un trapecio rectángulo se verifica que la suma de las bases es igual a la longitud del lado oblicuo a ambas. Si la altura del trapecio es T, calcula el producto de la longitud de las bases.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1er ciclo)

V Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

19 de noviembre de 2005

PRUEBA POR RELEVOS (45 minutos)

Bachillerato.-

3A .- Sea "T" la respuesta del problema 1A. Para cada número real k, representamos por $[k]$ la parte entera de k, es decir, el mayor entero $\leq k$. Calcula el área de la región del plano formada por los puntos de coordenadas (x, y) tales que $[x]^2 + [y]^2 = \frac{T}{7}$.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 2º ciclo)

3B .- Sea "T" la respuesta del problema 1B. Encuentra el producto del par ordenado de números reales (x, y) que satisface el sistema $\left.\begin{array}{rcl} x^3 + y^3 & = & 2T \\ x^2y + y^2x & = & T \end{array}\right\}$

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala)

3C .- Si x es un entero positivo y $x(x+1)(x+2)(x+3) + 1 = 131^2$, ¿cuál es el valor de x?

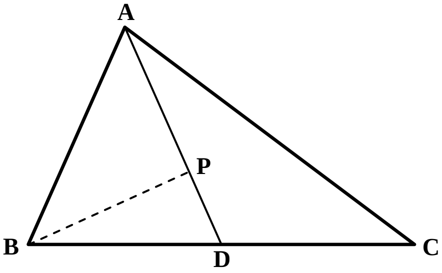
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 2º ciclo)

XXIII Concurso "Puig Adam" de Resolución de Problemas
11 de junio de 2005

PRIMER NIVEL

Problema 1.

En la mediana AD del triángulo ABC de la figura, señalamos un punto P. Si la longitud de AD es x, la de AP es y, y el área del triángulo ABC es z, escribe el área del triángulo BPD en términos de *x*, *y*, *z*.



Problema 2.

Hallar cinco enteros consecutivos tales que la suma de los cuadrados de los tres primeros coincida con la suma de los cuadrados de los dos últimos.

Problema 3.

En un concurso de cinco problemas, cada problema se puntuó con un número entero de 0 a 5. La moda de mis puntuaciones en cada problema ha sido 1 punto más alta que la mediana, que a su vez ha sido 1 punto más alta que la media. ¿Qué puntuación he obtenido en cada problema?

Problema 4.

Unos padres hablan con su hijo. El padre le dice al hijo: "*Bien, Martín, nuestras tres edades suman ahora 72 años. Como yo soy seis veces más viejo de lo que tú eres ahora, puede decirse que cuando sea el doble que tú, nuestras edades sumadas serán el doble de lo que son ahora*". ¿Qué edad tiene la madre?

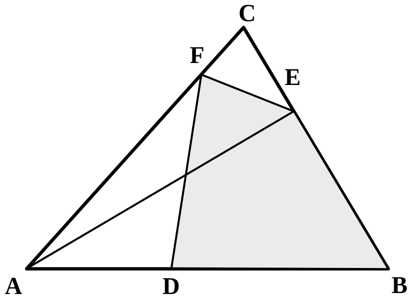
SEGUNDO NIVEL

Problema 1.

Hallar tres números naturales en progresión aritmética de diferencia 2, tales que la suma de sus cuadrados sea un número de cuatro cifras iguales.

Problema 2.

El triángulo ABC de la figura tiene área 10. Los puntos D, E y F, distintos de los vértices A, B y C, están en los lados AB, BC y CA respectivamente, siendo AD = 2 y DB = 3. Si el triángulo ABE y el cuadrilátero DBEF tienen la misma área, ¿cuánto vale esa área?



Problema 3.

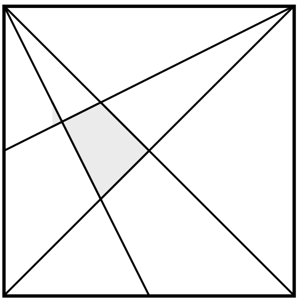
Un capitán tiene tres compañías: una de suizos, otra de zuavos y otra de sajones. Si asaltan una fortaleza, les promete una recompensa de 901 escudos con la condición de que cada soldado de la compañía que suba primero recibirá un escudo, repartiendo los demás a partes iguales entre los restantes de la siguiente manera:

- Si llegan primero los suizos, los otros soldados recibirán medio escudo.
- Si llegan primero los zuavos, los demás soldados recibirán un tercio de escudo.
- Si llegan primero los sajones, los demás reciben un cuarto de escudo.

¿Cuántos hombres componen cada compañía? (Euler, siglo XVIII)

Problema 4.

Si el cuadrado de la figura tiene de lado 2, calcula el área sombreada sabiendo que los extremos de los segmentos que llegan a cada lado son vértices del cuadrado o puntos medios de sus lados.



TERCER NIVEL

Problema 1.

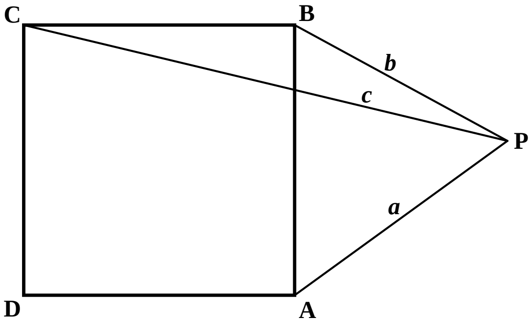
Sean z_1 y z_2 números complejos tales que la suma de sus cuadrados es 7 y la de sus cubos es 10. ¿Cuáles son todos los valores que puede tomar $z_1 + z_2$?

Problema 2.

En un cuadrado de vértices ABCD se elige un punto interior P de forma que dista 1, 2 y 3 respectivamente de los vértices A, B y C. ¿Cuánto vale el ángulo APB?

Problema 3.

En el plano del cuadrado ABCD de lado 1, tomados los vértices A, B, C y D como indica la figura, se encuentra el punto P. Si las distancias de P a A, B y C son, respectivamente, *a, b* y *c,* con $a^2 + b^2 = c^2$, ¿cuál es la máxima distancia posible de P a D?



Problema 4.

Sea $p(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ un polinomio con coeficientes racionales y tal que la diferencia entre dos de sus raíces es un número racional. Demostrar que si alguna raíz de *p(x)* es racional, entonces lo son todas.

XIª OLIMPIADA de MAYO
Primer Nivel
Mayo de 2005

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

PROBLEMA 1

En la pizarra había seis figuras: un círculo, un triángulo, un cuadrado, un trapecio, un pentágono y un hexágono, pintadas de seis colores: azul, blanco, rojo, amarillo, verde y marrón. Cada figura tenía un solo color y todas las figuras eran de colores distintos. Al día siguiente se preguntó de qué color era cada figura.
Pablo respondió: "el círculo era rojo, el triángulo era azul, el cuadrado era blanco, el trapecio era verde, el pentágono era marrón y el hexágono era amarillo".
Sofía respondió: "el círculo era amarillo, el triángulo era verde, el cuadrado era rojo, el trapecio era azul, el pentágono era marrón y el hexágono era blanco".
Pablo se equivocó tres veces y Sofía dos veces, y se sabe que el pentágono era marrón.
Determina si es posible saber con certeza cuál era el color de cada una de las figuras.

PROBLEMA 2

Un número entero se llama *autodivi* si es divisible entre un número de dos cifras formado por sus dos últimos dígitos (decenas y unidades). Por ejemplo, 78013 es autodivi pues es divisible entre 13, 8517 es autodivi pues es divisible entre 17.
Halla seis números enteros consecutivos que sean autodivi y que tengan las cifras de las unidades, de las decenas y de las centenas distintas de 0.

PROBLEMA 3

Un segmento AB de longitud 100 está dividido en 100 segmentitos de longitud 1 mediante 99 puntos intermedios. Al extremo A se le asigna el 0 y al extremo B, el 1.
Gustavo asigna a cada uno de los 99 puntos intermedios un 0 ó un 1, a su elección, y luego colorea cada segmento de longitud 1 de azul o de rojo, respetando la siguiente regla:
Son rojos los segmentos que tienen el mismo número en sus extremos y son azules los segmentos que tienen diferentes números en sus extremos.
Determina si Gustavo puede asignar los 0 y los 1 de modo de obtener exactamente 30 segmentos azules. ¿Y 35 segmentos azules? (En cada caso, si la respuesta es sí, muestra una distribución de los 0 y los 1, y si la respuesta es no, explica el porqué)

PROBLEMA 4

Se tienen dos figuras de papel: un triángulo equilátero y un rectángulo. La altura del rectángulo es igual a la altura del triángulo y la base del rectángulo es igual a la base del triángulo. Divide el triángulo en tres partes y el rectángulo en dos, mediante cortes rectos, de modo que con los cinco pedazos se pueda armar, sin huecos ni superposiciones, un triángulo equilátero. Para armar la figura, cada parte se puede girar y / o dar la vuelta. (Justifica que el triángulo armado es equilátero)

PROBLEMA 5

a) En cada casilla de un tablero 7×7 se escribe uno de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6 ó 7 de manera que cada número esté escrito en siete casillas distintas. ¿Será posible que en ninguna fila y en ninguna columna queden escritos números consecutivos?
b) En cada casilla de un tablero 5×5 se escribe uno de los números 1, 2, 3, 4 ó 5 de manera que cada número esté escrito en cinco casillas distintas. ¿Será posible que en ninguna fila y en ninguna columna queden escritos números consecutivos?

XIª OLIMPIADA de MAYO
Segundo Nivel
Mayo de 2005

Olimpíada de Mayo
Competencia Juvenil Iberoamericana de Matemática

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

PROBLEMA 1

Determina el menor número de tres cifras que sea el producto de dos números de dos cifras, de modo que las siete cifras de estos tres números sean todas diferentes.

PROBLEMA 2

Gonzalo escribe en la pizarra cuatro números elegidos entre 0,1,2,3 ó 4. Puede repetir números.
Nicolás realiza repetidas veces la siguiente operación: cambia uno de los números, a su elección, por el resto de dividir entre 5 el producto de otros dos números de la pizarra, a su elección.
El objetivo de Nicolás es lograr que los cuatro números sean iguales. Determina si Gonzalo puede elegir los cuatro números iniciales de modo que a Nicolás le sea imposible lograr su objetivo.

PROBLEMA 3

En el triángulo isósceles ABC, con $AB = AC$, M es el punto medio de BC, sea M el punto medio de BC. El punto D en el lado BC es tal que $\angle BAD = \frac{1}{6}\angle BAC$. Además la recta perpendicular a AD por C corta a AD en N de modo que $DN = DM$. Calcula los ángulos del triángulo ABC

PROBLEMA 4

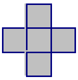
En un baile hay 12 hombres, numerados del 1 al 12, y 12 mujeres, numeradas del 1 al 12. A cada hombre se le asigna además un "amigo secreto" entre los otros 11. Todos bailaron todas las piezas. En la primera pieza cada hombre bailó con la mujer que tiene su mismo número. A partir de allí, cada hombre bailó la nueva pieza con la mujer que había bailado la pieza anterior con su amigo secreto.
En la tercera pieza las parejas fueron:

Hombres	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Mujeres	5	11	2	12	8	10	9	4	6	3	7	1

Halla el número del amigo secreto de cada hombre.

PROBLEMA 5

Sobre un tablero de 9 × 9 se ha posado la nave enemiga que cubre exactamente 5 casillas del tablero, así:



La nave es invisible.
Cada misil defensivo cubre exactamente una casilla, y destruye a la nave si impacta en una de las 5 casillas que ésta ocupa.
Determina el número mínimo de casillas que se necesitan para destruir con certeza a la nave enemiga.

Relación de ganadores en la "XI Olimpiada de mayo 2005"

Primer nivel

Apellidos y nombre	Centro	Premio
Fernández Alcázar, Andrés	Colegio SEK - Ciudalcampo	Oro
Sánchez Díaz, Jesús María	Colegio Vedruna	Plata
Peña Castillo, Diego	Colegio Amor Misericordioso	Plata
González Bertolín, Marcos	IES Mirasierra	Bronce
Esteban de la Iglesia, Lorenzo	Colegio Fray Luis de León	Bronce
Blázquez García, Rodrigo	IES Gran Capitán	Bronce
Stocks Godínez, Cristina	Colegio Highlands	Bronce
Solanet Mayou, Fernando	Colegio Highlands	Mención
Sánchez Salvador, José Luis	CP Miguel de Cervantes (Collado Villalba)	Mención
Herradón Cueto, Moisés	Colegio Brains	Mención

Segundo Nivel

Apellidos y nombre	Centro	Premio
Bellot Rodríguez, Rodrigo	Retamar	Oro
Jiménez Benito, Rubén	IES José Hierro (Getafe)	Plata
Ibarra Eztala, Héctor	Colegio SEK - Ciudalcampo	Plata
González Ortega, Jorge	Colegio Base	Bronce
Rego García, Iago	IES Joan Miró (San Sebastián de los Reyes)	Bronce
Valerio Alonso, Adrián	Colegio Sagrado Corazón	Bronce
Rodríguez Reina, Andrés	Colegio SEK - Ciudalcampo	Bronce
Michelena Machado, Florencio	IES Parque Aluche	Mención
Domínguez Lucas, Víctor	IES Jorge Guillén (Alcorcón)	Mención
Rodríguez Amaro , Óscar	IES San Juan Bautista	Mención

SOLUCIONES XIª OLIMPIADA de MAYO (2005)

Primer Nivel

Problema 1

En la pizarra había seis figuras: un círculo, un triángulo, un cuadrado, un trapecio, un pentágono y un hexágono, pintadas de seis colores: azul, blanco, rojo, amarillo, verde y marrón. Cada figura tenía un solo color y todas las figuras eran de colores distintos. Al día siguiente se preguntó de qué color era cada figura.

Pablo respondió: "el círculo era rojo, el triángulo era azul, el cuadrado era blanco, el trapecio era verde, el pentágono era marrón y el hexágono era amarillo".

Sofía respondió: "el círculo era amarillo, el triángulo era verde, el cuadrado era rojo, el trapecio era azul, el pentágono era marrón y el hexágono era blanco".

Pablo se equivocó tres veces y Sofía dos veces, y se sabe que el pentágono era marrón.

Determina si es posible saber con certeza cuál era el color de cada una de las figuras.

Solución

Los alumnos tienen 7 respuestas correctas entre los dos. Sólo tienen en común el pentágono marrón, lo que es correcto. Para las otras 5 figuras tienen 5 respuestas correctas, así que uno y sólo uno acertó el color de cada figura.

Si el círculo no es amarillo tiene que ser rojo, y el cuadrado no puede ser rojo. Entonces el cuadrado es blanco, y el hexágono no puede ser blanco. En ese caso Sofía se equivocó en tres colores.

Luego el círculo debe ser amarillo, de donde el hexágono no es amarillo, así que es blanco, y el cuadrado debe ser rojo y no blanco. Pablo tiene así tres respuestas incorrectas y las demás deben estar bien.

Los aciertos de Pablo son, además del pentágono: el triángulo azul, el trapecio verde.

Los aciertos de Sofía, además del pentágono, son: el círculo es amarillo, el cuadrado es rojo y el hexágono es blanco.

Puede también llegarse a la solución a través de un análisis de la tabla de asignación de colores por Pablo y Sofía.

Problema 2

Un número entero se llama *autodivi* si es divisible entre un número de dos cifras formado por sus dos últimos dígitos (decenas y unidades). Por ejemplo, 78013 es autodivi pues es divisible entre 13, 8517 es autodivi pues es divisible entre 17.

Halla seis números enteros consecutivos que sean autodivi y que tengan las cifras de las unidades, de las decenas y de las centenas distintas de 0.

Solución

Sean A,B,C,D,E y F seis números autodivi consecutivos, y a,b,c,d,e,f, respectivamente, los números de dos cifras que se forman con sus dos últimas cifras. Entonces:

$A - a = B - b = C - c = D - d = E - e = F - f = N$, y N termina en 00

Como a divide a A, también divide a $A - a = N$, y análogamente b,c,d,e y f dividen a N.
Recíprocamente, si N es un múltiplo de seis enteros consecutivos de dos cifras cada uno, ninguna de ellas igual a 0, terminado en 00, los seis números que se obtienen al sumar N con cada uno de los números de dos cifras son seis números consecutivos autodivi.
Para resolver el problema consideramos por ejemplo los seis números de dos cifras 11,12,13,14,15 y 16 , hallamos un múltiplo de los seis números terminado en 00: calculamos el mínimo común múltiplo de de los números: $2^4 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 = 240240$ y multiplicamos este número por 5, obteniendo 1201200.
Los seis números consecutivos autodivi son 1201211, 1201212, 1201213, 1201214, 1201215 y 1201216

Problema 3

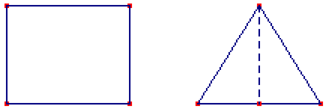
Un segmento AB de longitud 100 está dividido en 100 segmentitos de longitud 1 mediante 99 puntos intermedios. Al extremo A se le asigna el 0 y al extremo B, el 1.
Gustavo asigna a cada uno de los 99 puntos intermedios un 0 ó un 1, a su elección, y luego colorea cada segmento de longitud 1 de azul o de rojo, respetando la siguiente regla:
Son rojos los segmentos que tienen el mismo número en sus extremos y son azules los segmentos que tienen diferentes números en sus extremos.
Determina si Gustavo puede asignar los 0 y los 1 de modo de obtener exactamente 30 segmentos azules. ¿Y 35 segmentos azules? (En cada caso, si la respuesta es sí, muestra una distribución de los 0 y los 1, y si la respuesta es no, explica el porqué)

Solución

Supongamos que Gustavo hizo la asignación de números, coloreó los segmentos de acuerdo con las reglas que establece el problema y obtuvo 30 segmentos azules.
Nos movemos desde A hacia B y vamos numerando sucesivamente los segmentos azules que nos encontremos: 1,2,3,4,5 etcétera. Como en A hay un 0, el primer segmento azul que nos encontremos tendrá un 0 en su extremo más próximo a A y un 1 en su otro extremo. En consecuencia, el segundo segmento azul que nos encontremos tendrá un 1 en su extremo más próximo a A y un 0 en el otro. Y así siguiendo, los extremos azules 1,3,5,… comienzan con 0 y terminan con 1, y los segmentos azules 2,4,6,….comienzan con 1 y terminan con 0. El segmento azul número 30 comienza con 1 y termina con 0. Este extremo no es B, pues B tiene un 1. Como no hay más segmentos azules, y el último tiene su extremo más alejado de A con 0, todos los puntos de la subdivisión que siguen deben tener 0, lo que se contradice con que en B haya un 1. Por tanto, es imposible que haya 30 segmentos azules.
Veamos que es posible lograr una coloración con 35 segmentos azules exactamente.
Numeramos los 99 puntos de la subdivisión desde A hacia B de 1 a 99 (A y B no se numeran). Ponemos 1 en los puntos 1,3,5,7,….35 (los impares de1 a 35). Ponemos 0 en 2,4,6,…,34 (los pares de 2 a 34), y ponemos 1 a todos los números desde 36 a 99.
Quedan azules (A,1), (1,2), (2,3),…,(34,35) y rojos (35,36), (36,37), …, (99,B).

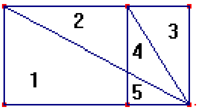
Problema 4

Se tienen dos figuras de papel: un triángulo equilátero y un rectángulo. La altura del rectángulo es igual a la altura del triángulo y la base del rectángulo es igual a la base del triángulo. Divide el triángulo en tres partes y el rectángulo en dos, mediante cortes rectos, de modo que con los cinco pedazos se pueda armar, sin huecos ni superposiciones, un triángulo equilátero. Para armar la figura, cada parte se puede girar y/o dar la vuelta. (Justifica que el triángulo armado es equilátero)

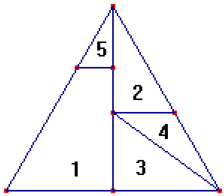


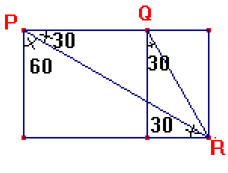
Solución

Cortamos el triángulo en dos partes y las colocamos junto al rectángulo, formando así un rectángulo mayor, cuya base es una vez y media el lado del triángulo.



Cortamos este rectángulo a lo largo de una diagonal y con las dos mitades armamos un triángulo isósceles.





Veamos que el triángulo formado por las cinco partes es equilátero:

Sea a el lado del triángulo inicial. Al cortarlo por la mitad los ángulos de las dos partes son de 90º, 60º, y 30º.

Si P, Q y *R* son los marcados en la figura, el triángulo *PQR* es isósceles, pues tiene *PQ* = *QR* = *a*, y como el ángulo *PQR* es 90º + 30º = 120º, tenemos que los ángulos *QPR* y *QRP* miden ambos 30º. Con esta información determinamos todos los ángulos que se marcan en la figura, y los ángulos del triángulo (en principio isósceles) formado con las cinco partes son de 60º. Por lo tanto, es equilátero.

Otra solución

Si a es el lado del triángulo inicial, los lados del rectángulo son a y $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

El rectángulo mayor tiene base $\frac{3}{2}a$ y altura $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

La diagonal del rectángulo mayor es $\sqrt{\left(\frac{3}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}=\sqrt{3}a=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$, luego el triángulo formado por las cinco partes es equilátero, pues sus lados son iguales.

Problema 5

a) En cada casilla de un tablero 7 × 7 se escribe uno de los números 1,2,3,4,5,6 ó 7 de manera que cada número esté escrito en siete casillas distintas. ¿Será posible que en ninguna fila y en ninguna columna queden escritos números consecutivos?
b) En cada casilla de un tablero 5 × 5 se escribe uno de los números 1,2,3,4 ó 5 de manera que cada número esté escrito en cinco casillas distintas. ¿Será posible que en ninguna fila y en ninguna columna queden escritos números consecutivos?

Solución

a) Si es posible, por ejemplo:

1	1	1	1	4	4	6
1	3	3	3	6	6	6
3	3	3	3	6	6	6
5	5	5	5	2	2	2
7	5	5	5	2	2	2
7	7	7	7	4	4	2
1	1	7	7	4	4	4

b) Supongamos que sea posible ubicar estos números en el tablero.
Las 5 casillas que llevan escrito el número 2 son parte de al menos 5 líneas (filas o columnas) pues en 4 líneas pueden colocarse a lo sumo 4 números. En efecto, las 4 líneas son tres en un sentido y cuatro en otro o 2 en cada sentido. En el primer caso se pueden colocar 1×3 = 3 números y en el segundo 2×2 = 4 números.
Por lo tanto, las casillas que llevan escrito el número 1 y las que llevan escrito el número 3 solo pueden ir ubicadas en las otras 5 líneas. Ahora bien, en 5 líneas se pueden colocar 1×4 = 4 números si entre las líneas hay 4 en un sentido y una en el otro y 2×3 = 6 números si las líneas son 3 de un sentido y 2 del otro (y ningún

número si las 5 líneas son del mismo sentido). Entonces en las otras 5 líneas pueden colocarse a lo más 6 números. Por lo tanto, no hay casillas suficientes para ubicar los 10 números que son consecutivos con el 2.

Otra solución

Razonamos sobre el 2 y sus vecinos, el 1 y el 3. Lo mismo podría razonarse con el 3 o el 4 y sus vecinos, el 2 y el 4 o el 3 y el 5.

Diremos que al ubicar un 2 en una casilla del tablero su fila y su columna quedan anuladas para el 1 y el 3.

Si los 5 doses se escriben en 5 filas diferentes, todas las filas quedan anuladas para el 1 y el 3, y es imposible ubicarlos.

Si se escriben en 4 filas diferentes, se necesitan por lo menos 2 columnas; quedan sin anular para el 1 y el 3 una fila y a lo sumo 3 columnas, es decir, a lo sumo 3 casillas, y es imposible ubicar en ellas los diez 1 y 3.

Si los doses se escriben en 3 filas diferentes, se necesitan por lo menos 2 columnas; quedan sin anular 2 filas y a lo sumo 3 columnas, es decir, a lo sumo $2 \times 3 = 6$ casillas, en las que es imposible colocar 10 números.

Si los doses se escriben en 2 filas diferentes, se necesitan por lo menos 3 columnas; quedan sin anular 3 filas y a lo sumo 2 columnas, es decir, a lo sumo $2 \times 3 = 6$ casillas.

Si los doses se escriben en una sola fila, se necesitan 5 columnas; todas las columnas quedan anuladas para el 1 y el 3, y es imposible ubicarlos.

Por lo tanto, es imposible rellenar el tablero 5×5 de modo que no haya números consecutivos en ninguna fila y en ninguna columna, pues es imposible colocar los 5 doses de manera que no haya alguno de los 1 o alguno de los 3 en la misma línea – fila o columna – que un 2.

Segundo Nivel

Problema 1

Determina el menor número de tres cifras que sea el producto de dos números de dos cifras, de modo que las siete cifras de estos tres números sean todas diferentes.

Solución

Sean $x<y$ los dos números de 2 dígitos. El dígito de las centenas de $z = x \cdot y$ es mayor o igual que el producto de los dígitos de las decenas de x e y. Como son 3 números distintos (decenas de x, decenas de y y centenas de $x \cdot y = z$) , el dígito de las centenas de z es mayor o igual que 3.

Si el dígito de las centenas de z es 3, entonces el de las decenas de y es 2 y el de las decenas de x es 1. El menor valor de los dígitos de las unidades de x e y es 4. Como son distintos,

$x = 14 + a$, $y = 24 + b$, con a distinto de b y $a + b$ mayor o igual que 1.
Si $a + b = 1$, es $a = 0$ y $b = 1$ ó $a = 1$ y $b = 0$, y obtenemos 14×25 = 350 ó 15×24 = 360
El primero se descarta, porque se repite el 5 en y y en $z = x{\cdot}y$
Si $a + b \geq 2$,

$$(14+a)(24+b) = 14{\cdot}24 + a{\cdot}24 + b{\cdot}14 + ab \geq 14{\cdot}24 + (a+b){\cdot}14 \geq 14{\cdot}24 + 2{\cdot}14 = 364$$

Luego el mínimo de z es 360, y se alcanza para $x = 15$, $y = 24$.

Problema 2
Gonzalo escribe en la pizarra cuatro números elegidos entre 0,1,2,3 ó 4. Puede repetir números.
Nicolás realiza repetidas veces la siguiente operación: cambia uno de los números, a su elección, por el resto de dividir entre 5 el producto de otros dos números de la pizarra, a su elección.
El objetivo de Nicolás es lograr que los cuatro números sean iguales. Determina si Gonzalo puede elegir los cuatro números iniciales de modo que a Nicolás le sea imposible lograr su objetivo.

Solución
No importa que números ponga Gonzalo, Nicolás siempre puede lograr su objetivo.
Si Gonzalo pone algún 0, Nicolás cambia cada uno de los otros números por 0, pues cada vez elegir uno de los números que multiplica igual a 0.
Si $a \neq 0$, entonces a^4 tiene resto 1 en la división por 5.
(basta comprobarlo para a = 1,2,3,4)
Si Gonzalo no pone ningún 0, Nicolás puede hacer lo siguiente:

$$a,b,c,d \to a,b,ab,d \to a,b,ab,ab \to a,(ab)^2,ab,ab \to a,(ab)^2,ab,(ab)^3 \to a,(ab)^4,ab,(ab)^3$$

Esta última es $a,1,ab,(ab)^3$; entonces continúa: $a,1,ab,(ab)^3 \to (ab)^4,1,ab,(ab)^3$.
Esta última es $1,1,ab,(ab)^3$; entonces hace $1,1,ab,(ab)^3 \to 1,1,ab,1 \to 1,1,1,1$.

Otra solución:
Nicolás siempre gana.
Si entre los números hay algún 0, a lo sumo en 3 pasos se consiguen 4 ceros: $0,b,c,d \to 0,b,c,0 \to 0,b,0,0 \to 0,0,0,0$
Si al menos dos de los cuatro números son 1, a lo sumo en 2 pasos obtiene 4 unos:

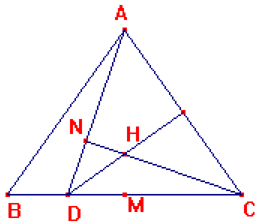
$$a,b,1,1 \to a,1,1,1 \to 1,1,1,1$$

Si entre los números iniciales no hay ceros y no hay 2 unos, hay al menos tres números que son 2, 3 ó 4. Primero supongamos que hay al menos un 2. Si además hay un 3, Nicolás puede hacer: $2,3,c,d \to 2,3,c,1 \to 2,3,1,1 \to \ldots \to 1,1,1,1$.
Si no hay ningún 3 pero hay un 4, como 2×4 = 8 = 5×1+3, podemos conseguir un 2 y un 3, con lo que llegaríamos a cuatro unos. Finalmente, si no hay ni 3 ni 4 hay al menos otro 2. Pero entonces puede hacer $2,2,c,d \to 2,2,4,d$, caso que ya está resuelto.

Quedan por ver los casos en los que hay al menos 3 números elegidos entre 3 y 4.
Si hay un 3 y un 4: $3,4,c,d \rightarrow 3,4,2,d$, ya resuelto.
Si todos son 3, como 3×3 = 9 = 5×1 + 4, llega a tener un 3 y un 4.
Por último, si hay tres 4, como 4×4 = 16 = 5×3 + 1 puede poner un 1, y termina.

Problema 3
En el triángulo isósceles *ABC*, con *AB* = *AC*, *M* es el punto medio de *BC*, sea *M* el punto medio de *BC*. El punto *D* en el lado *BC* es tal que $\angle BAD = \frac{1}{6}\angle BAC.$ Además la recta perpendicular a *AD* por *C* corta a *AD* en *N* de modo que *DN* = *DM*. Calcula los ángulos del triángulo *ABC*.

Solución



Llamando $\alpha = \angle BAD,$ entonces $\angle DAC = 5\alpha$ ·
El punto de intersección de *AM* y *CN* es el ortocentro *H* del triángulo *ADC*, por lo tanto *DH* es perpendicular a *AC*. Por otra parte, los triángulos *DMH* y *DHN* tienen *DM* = *DN* y comparten *DH*; entonces *MH* = *HN*, de donde *H* pertenece a la bisectriz del ángulo *CDA*. Luego *DH* es bisectriz y altura, lo que implica que el triángulo *ADC* es isósceles, con *AD* = *CD*. En consecuencia, $\angle DCA = \angle DAC = 5\alpha$ ·
Finalmente, en el triángulo *ABC* tenemos *A* + *B* + *C* = 180, o sea $6\alpha + 5\alpha + 5\alpha = 180$.
De aquí resulta que $\alpha = \frac{180}{16}$ y $A = \frac{135}{2} = 67^o30',\quad B = C = \frac{225}{4} = 56^o15'.$

Problema 4
En un baile hay 12 hombres, numerados del 1 al 12, y 12 mujeres, numeradas del 1 al 12. A cada hombre se le asigna además un “amigo secreto” entre los otros 11. Todos bailaron todas las piezas. En la primera pieza cada hombre bailó con la mujer que tiene su mismo número. A partir de allí, cada hombre bailó la nueva pieza con la mujer que había bailado la pieza anterior con su amigo secreto.
En la tercera pieza las parejas fueron:

Hombres	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Mujeres	5	11	2	12	8	10	9	4	6	3	7	1

Halla el número del amigo secreto de cada hombre.

Solución

Imaginemos que de cada hombre sale una flecha que apunta hacia su amigo secreto. Como todos bailan todas las piezas, a cada hombre le llega una flecha y sólo una (cada uno es el amigo secreto de exactamente otro hombre). Además, si a partir de un hombre *h* recorremos el camino que indican las flechas, en algún momento el camino se cierra (pues son 12 hombres en total y no infinitos) y la primera repetición debe ser *h*, porque a cada hombre le llega una sola flecha. Vemos así que con esta construcción el conjunto de los hombres queda dividido en ciclos disjuntos.

Sea *a* el amigo secreto del hombre 1. Como el hombre 1 baila la tercera pieza con la mujer 5, ésta bailó la segunda pieza con el hombre *a* y la primera pieza con el hombre 5. Entonces el amigo secreto del hombre *a* es 5. Del mismo modo, si *b* es el amigo secreto de 5, entonces el amigo secreto de *b* es 8; si *c* es el amigo secreto de 8, entonces el amigo secreto de *c* es 4; si *d* es el amigo secreto de 4, entonces 12 es el amigo secreto de *d* y si *e* es el amigo secreto de 12, entonces el amigo secreto de *e* es 1. El ciclo del hombre 1 es: $1 \to a \to 5 \to b \to 8 \to c \to 4 \to d \to 12 \to e \to 1 \to a$.....

Esta secuencia indica ordenadamente las parejas de baile del hombre 1. Las impares las baila con las mujeres 1,5, 8, 4, 12, 1,… y todo se repite cada 5 piezas impares.

Análogamente, a partir del hombre 2 hacemos el ciclo de amigos secretos:

$$2 \to f \to 11 \to g \to 7 \to h \to 9 \to i \to 6 \to j \to 10 \to k \to 3 \to l \to 2...$$

Y concluimos que en las piezas impares el hombre 2 baila con las mujeres 2, 11, 7, 9, 6, 10, 3, 2,… y que todo se repite cada 7 piezas impares.

Ninguna de las mujeres del ciclo del hombre 2 puede estar en el ciclo del hombre 1, porque tendrían que estar todas, y no se cerraría el ciclo cada 5 piezas impares. Entonces, en las piezas pares el hombre 1 baila con las mismas mujeres de las piezas impares, y recorre un ciclo de cinco mujeres 1 *a* 5 *b* 8 *c* 4 *d* 12 *e* 1 *a* …. Como el ciclo es de longitud 5, en la sexta pieza baila con la misma mujer con la que bailó la primera, es decir, $c = 1$, en la octava pieza con la que bailó la tercera, o sea $d = 5$. Y así siguiendo, baila con la misma mujer en la décima y en la quinta: $e = 8$; en la segunda y séptima: $a = 4$, y en la cuarta y novena: $b = 12$.

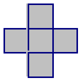
El ciclo del 1 es $1 \to 4 \to 5 \to 12 \to 8 \to 1$, y este es el ciclo que recorren los hombres 4, 5, 8 y 12, cada uno comenzando con la mujer de su mismo número.

Del mismo modo, las mujeres que bailan con el hombre 2 forman un ciclo de longitud 7 mujeres, y conocemos las que ocupan lugar impar: 2 *f* 11 *g* 7 *h* 9 *i* 6 *j* 10 *k* 3 *l* 2 *f*… Se obtiene $f = 6$, $g = 10$, $h = 3$, $i = 2$, $j = 11$, $k = 7$, y $l = 9$. El ciclo del 2 es $2 \to 6 \to 11 \to 10 \to 7 \to 3 \to 9 \to 2...$, y el mismo ciclo recorren los hombres 3, 6, 7, 9, 10 y 11, cada uno empezando por la mujer que lleva número igual al suyo.

Por construcción, cada flecha de un ciclo une a un hombre con su amigo secreto. Entonces la asignación de amigos secretos es:

Hombre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Amigo secreto	4	6	9	5	12	11	3	1	2	7	10	8

Problema 5
Sobre un tablero de 9 x 9 se ha posado la nave enemiga que cubre exactamente 5 casillas del tablero, así:

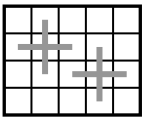


La nave es invisible.
Cada misil defensivo cubre exactamente una casilla, y destruye a la nave si impacta en una de las 5 casillas que ésta ocupa.
Determina el número mínimo de casillas que se necesitan para destruir con certeza a la nave enemiga.

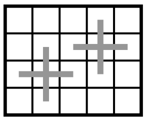
Solución
El siguiente diagrama muestra que 12 misiles son suficientes:

		X				X		
				X				
	X						X	
			X		X			
	X						X	
				X				
		X				X		

Veamos que es imposible asegurar la misión con 11 misiles. Dividimos el tablero en cuatro rectángulos 4 × 5 más la casilla central.
Si cada uno de esos rectángulos recibe 3 o más impactos, en el tablero hay 3×4 = 12 o más impactos.
Si alguno de los rectángulos tiene a lo sumo 2 impactos, entonces tiene exactamente 2, pues con un solo impacto es imposible cubrir todas las posiciones de la nave contenidas en ese rectángulo de 4 × 5. Como esos 2 misiles deben cubrir todas las posibles ubicaciones de la nave, en particular deben cubrir estas 2.

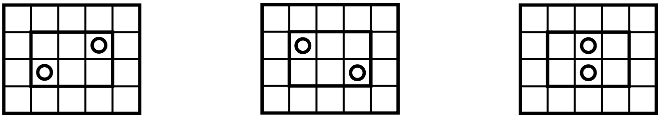


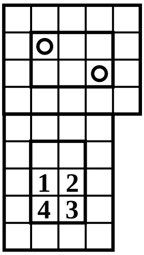
Y también estas 2.



Por lo tanto, ninguno de los misiles impacta en el borde del rectángulo, o sea, los dos impactan en el rectángulo central de 2 × 3. Si están en dos casillas que se tocan solo en un vértice o en dos casillas con un lado común que no sean los del medio, hay una posición de la nave que no está cubierta por los misiles.

Entonces los dos misiles impactan las casillas de dos vértices opuestos o las dos casillas del medio del rectángulo central de 2 × 3.





En cualquier caso, el rectángulo adyacente tiene 2 misiles en casillas del borde, para cubrir dos posiciones de la nave con 4 casillas en el rectángulo que recibió solo 2 misiles. Si hubiera solamente otro impacto en este segundo rectángulo de 4 × 5, debe estar en una de las casillas 1, 2, 3 o 4, pues en caso contrario quedaría un rectángulo de 3 × 3 sin cubrir. Por lo tanto, este segundo rectángulo de 4 × 5, vecino del que solo tiene 2 impactos, tiene al menos 4 impactos. Así, en medio tablero ya tenemos 6 misiles, y lo mismo se repite en la otra mitad.

Dirección General de Ordenación Académica
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN
Comunidad de Madrid

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE MATEMÁTICAS

sm

ANAYA

El Corte Inglés

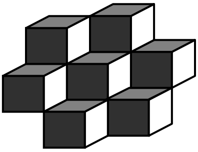
XI Concurso Primavera MATEMÁTICAS 2007

COMUNIDAD DE MADRID

Comité organizador del Concurso de Primavera

Juan Jesús Donaire Moreno
Jesús García Gual
Joaquín Hernández Gómez
Alfredo Martínez Sanz
Víctor Manuel Sánchez González
Javier Soler Areta
José María Sordo Juanena

Luis Ferrero de Pablo
María Gaspar Alonso-Vega
Francisco López Álvarez
María Moreno Warleta
Merche Sánchez Benito
Esteban Serrano Marugán



Toda mi obra ha sido un juego,
... pero un juego muy serio.

No quiero crecer,
en mí está el pequeñín de antaño.

M. C. Escher

Presentación

Once upon a time and so on, ... to 11.

Nos toca ya poner dos velas al Concurso de Primavera pero con valor posicional distinto. Once años ya desde nuestra botadura y cada año *once more*. Con el esfuerzo y afición de tantos remeros ya hemos cruzado con rumbo positivo el cabo de Buena Esperanza, pero será bueno recordar a los que no se embarcan con nosotros. Aunque más discreta, es la primera fase (la que se celebra en cada centro), la que queremos como escuela de remo.

De nuevo, ante una “nueva” ley de Educación, es el momento de pedir la cuarta hora de Matemáticas en todos los cursos de Secundaria, sin discriminaciones por la ubicación geográfica-social de los centros.

Comité Organizdor

Nuestro agradecimiento por el apoyo logístico y financiación a la Facultad de Matemáticas de la U.C.M. y al Área de Formación del Profesorado dentro de la Dir. Gral. de Ordenación Académica de la Consejería de Educación, al *Consejo Social de la U.C.M. y, por el apoyo económico para los premios, a las editoriales* ***Grupo ANAYA*** y ***Ediciones S.M***, así como al grupo empresarial ***El Corte Inglés.***

X CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE : Día 1 de marzo de 2006

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ ($\boxed{\times}$) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Ediciones S.M., Grupo ANAYA y El Corte Inglés

1.- La suma 9 + 99 + 999 + 9999 + 99999 + 999999 acaba en:

A) 1105 **B)** 1104 **C)** 1045 **D)** 1054 **E)** 1094.

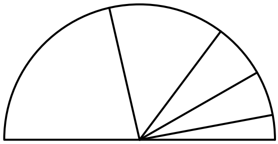
2.- El 1 de septiembre de 2005 fue jueves. ¿Qué día de la semana será el 1 de septiembre de 2025?

A) domingo **B)** lunes **C)** martes **D)** miércoles **E)** jueves.

3.- ¿Cuántos múltiplos de tres hay entre 200 y 700?

A) 300 **B)** 166 **C)** 167 **D)** 168 **E)** 234.

4.- En un parlamento de 270 diputados el partido MPM (Más Por Menos) cuenta con 18 escaños. ¿Cuántos grados del semicírculo parlamentario le corresponden?



A) 10º **B)** 12º **C)** 15º

D) 18º **E)** 24º.

5.- Cinco cuadernos y dos lápices cuestan 12 €. Dos cuadernos y cinco lápices cuestan 9 €. ¿Cuánto cuestan tres cuadernos y tres lápices?

A) 6 € **B)** 7 € **C)** 8 € **D)** 9 € **E)** 10 €.

6.- El producto de un número entero por sí mismo, siempre es divisible:

A) Por 1, pero no necesariamente por 2 **B)** Por 2, pero no necesariamente por 1

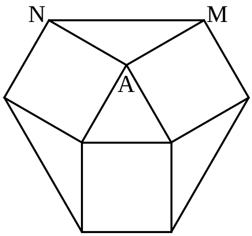
C) Por 3, pero no necesariamente por 2 **D)** Por 1 por 2 y por 3

E) Por 1 y por 2, pero no necesariamente por 3.

7.- Un número de dos cifras es "ascendente" si la cifra de las decenas es menor que la de las unidades. ¿Cuántos números ascendentes de dos cifras son pares?

A) 24 **B)** 22 **C)** 20 **D)** 18 **E)** 16.

8.- La figura de la derecha está formada a partir del triángulo equilátero interior y los cuadrados adosados a sus lados ¿Cuánto mide el ángulo AMN ?



A) 15º **B)** 18º **C)** 24º

D) 30º **E)** 36º.

9.- ¿Cuántos capicúas de tres cifras son pares?

A) 100 **B)** 90 **C)** 45 **D)** 40 **E)** 36.

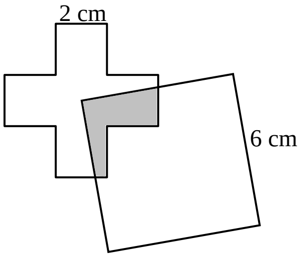
10.- ¿Cuál de estos números es el mayor?

A) $0{,}32 \times 0{,}05$ **B)** $0{,}008 \times 0{,}125$ **C)** $0{,}025 \times 0{,}8$ **D)** $0{,}1 \times 0{,}1$ **E)** $0{,}04 \times 0{,}4$.

11.- La suma de las longitudes de 4 diámetros y 3 radios de una circunferencia es 132 cm. ¿Cuántos centímetros mide el radio?

A) 44 **B)** 16,5 **C)** 13,2 **D)** 12 **E)** Un poco más de 18.

12.- El cuadrado de lado 6 cm tiene un vértice en el centro de una cruz griega (cruz de brazos iguales) de lado 2 cm. ¿Cuál es el área, en cm^2, de la zona sombreada?



A) 1 **B)** 4 **C)** 5

D) 6 **E)** 8.

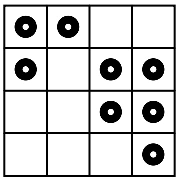
13.- ¿Cuántos números de dos cifras tienen al menos un cinco o la suma de sus dos cifras es diez?

A) 27 **B)** 26 **C)** 25 **D)** 24 **E)** 20.

14.- Hay que escribir seguidos los números del 1 al 99 (1234 ... 979899). Antonio empieza por el uno de la izquierda y Beatriz por el 9 de la derecha y así hasta encontrarse. ¿En qué número se encuentran si Antonio rotula dos números por cada uno de Beatriz?

A) 65 **B)** 66 **C)** 67 **D)** 68 **E)** 69.

15.- Ocho casillas de esta cuadrícula están ocupadas por puntos. Si queremos que haya exactamente dos puntos en cada fila y dos en cada columna, ¿cuál es el mínimo número de puntos que tenemos que mover?



A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3

E) 4.

16.- En una prueba de atletismo, en la que no hubo empates, Pedro obtuvo el 11º mejor resultado que también era el 11º peor resultado. ¿Cuántos participantes había en la prueba?

A) 12 **B)** 19 **C)** 21 **D)** 22 **E)** 23.

17.- La media de dos números es 2006. Si uno de ellos es el 1000, ¿cuál es el otro?

A) 1006 **B)** 3006 **C)** 2000 **D)** 1003 **E)** 3012.

18.- Los 26 niños de una clase de 5º hacen una visita a un museo y para cruzar una calle van de dos en dos. Estas parejas están numeradas del 1 al 13. Una pareja que esté numerada con un número impar está formada por una niña y un niño; y una pareja que esté numerada con un número par está formada por dos niños. ¿Cuántas niñas hay en esa clase?

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 13 **E)** 19.

19.- El número 1000 se puede obtener multiplicando únicamente doses y cincos. ¿Cuántos de cada?

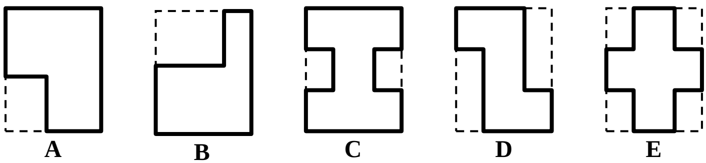
A) 4 doses y 4 cincos **B)** 2 doses y 5 cincos **C)** 3 doses y 3 cincos

D) 4 doses y 2 cincos **E)** 10 doses y 1 cinco.

20.- ¿Cuántos cuadrados de 8 cm de perímetro caben en un rectángulo de 20 cm de largo y 12 cm de ancho?

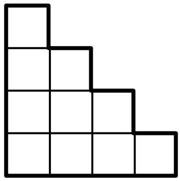
A) 8 **B)** 30 **C)** 32 **D)** 60 **E)** 120.

21.- Los cinco rectángulos que rodean a cada una de estas figuras son idénticos y una de las figuras tiene perímetro distinto a todas las demás. ¿Cuál?



A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E.

22.- Esta especie de escalera de cuatro peldaños está formada por 10 cuadraditos. ¿Cuántos peldaños tendría una escalera análoga que estuviera formada por 21 cuadraditos?



A) 5 **B)** 6 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 11.

23.- En la elección a delegado de una clase de 25 niños, hubo 25 votos para dos candidatos: Antonio y Beatriz. Si Beatriz obtuvo 1 voto más que el triple de los votos que obtuvo Antonio, el número de votos de Beatriz estuvo comprendido entre:

A) 9 y 12 **B)** 13 y 16 **C)** 17 y 20 **D)** 21 y 24 **E)** Más de 24.

24.- Un ángulo de un triángulo mide 20º. De los otros dos, uno es el cuádruple del otro. ¿Cuánto mide el ángulo mayor?

A) 100º **B)** 120º **C)** 124º **D)** 128º **E)** 130º.

25.- Si un corredor va a velocidad constante y hace 42 km en 2 horas y 20 minutos, ¿cuántos kilómetros hará en una hora?

A) 9 **B)** 12 **C)** 1 **D)** 18 **E)** 20.

X CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE : Día 1 de marzo de 2006

NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ ($\boxed{\times}$) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

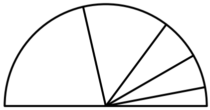
COLABORAN:

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Ediciones S.M., Grupo ANAYA y El Corte Inglés

1.- ¿Cuántos números capicúas, de cuatro cifras, son múltiplos de nueve?

A) 9 **B)** 10 **C)** 18 **D)** 19 **E)** 20.

2.- En un parlamento de 270 diputados el partido MPM (Más Por Menos) cuenta con 18 escaños. ¿Cuántos grados del semicírculo parlamentario le corresponden?



A) 10º **B)** 12º **C)** 15º **D)** 18º **E)** 24º.

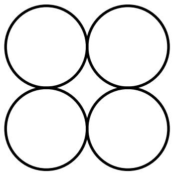
3.- Un número de dos cifras es "ascendente" si la cifra de las decenas es menor que la de las unidades. ¿Cuántos números ascendentes de dos cifras son múltiplos de 3?

A) 12 **B)** 11 **C)** 10 **D)** 9 **E)** 8.

4.- El mínimo común múltiplo de dos números es $2^3 \times 3 \times 5^2$ y el máximo común divisor es 2×5. El producto de los dos números es:

A) 3000 **B)** 6000 **C)** 12000 **D)** 15000 **E)** 18000.

5.- El área, en cm^2, del recinto comprendido entre las cuatro circunferencias de radio 1 cm de la figura es:



A) $\frac{\pi}{2}$ **B)** $\frac{\pi}{4}$ **C)** $4-\pi$ **D)** $4\pi-12$

E) $2\pi-4$.

6.- En una serie de 20 tiros a canasta, Juan ha tenido un 55 % de aciertos. Después de 5 tiros más, su porcentaje de aciertos ha subido al 56 %. ¿Cuántos intentos de los cinco últimos encestó?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5.

7.- La media aritmética de 5 números de una lista es 54. Si la media aritmética de los dos primeros es 48, ¿cuál es la media de los tres últimos?

A) 55 **B)** 56 **C)** 57 **D)** 58 **E)** 59.

8.- Alicia ha ayudado a su padre estas vacaciones a escribir unos problemas en el ordenador, trabajando una hora y cuarto el lunes, 50 minutos el martes, desde las 8:20 hasta las 10:45 el miércoles y media hora el viernes. Si su padre le pagó 3 euros la hora, ¿cuánto se ganó Alicia esa semana?

A) 8 € **B)** 9 € **C)** 10 € **D)** 12 € **E)** 15 €.

9.- Colocamos en fila los números 2, 4, 6, 9 y 12 según las siguientes reglas:
- El mayor no va el primero, pero es uno de los tres primeros.
- El más pequeño no es el último, pero es uno de los tres últimos.
- El mediano no está ni en el primer lugar ni en el último.

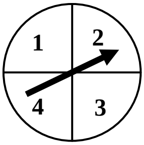
¿Cuál es la media de los dos de los extremos?

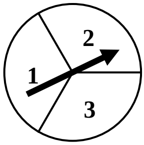
A) 3,5 **B)** 5 **C)** 6,5 **D)** 7,5 **E)** 8.

10.- El primer número primo después de 212 acaba en:

A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9.

11.- Giramos las dos ruletas de la figura en las que los números que aparecen en cada una tienen igual probabilidad de salir. Si hacemos el producto de los dos números que nos sale, ¿cuál es la probabilidad de que el producto obtenido sea par?





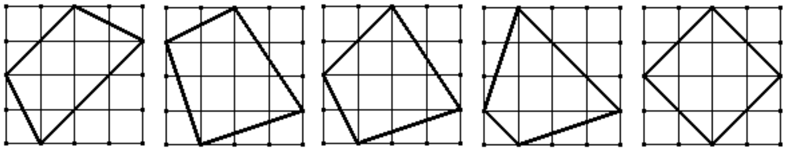
A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{3}{4}$.

12.- $\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\right)=$

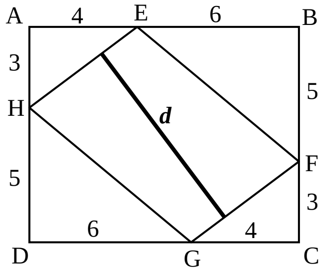
A) $\frac{15}{16}$ **B)** $-\frac{1}{32}$ **C)** 0 **D)** $\frac{1}{8}$ **E)** $\frac{1}{16}$.

13.- De los siguientes cuadriláteros inscritos en la misma cuadrícula, ¿cuál es el de mayor área?

A) **B)** **C)** **D)** **E)**



14.- En la figura que te mostramos, ABCD es un rectángulo y EFGH un paralelogramo. Utilizando las medidas que aparecen en la figura, ¿cuál es la longitud del segmento ***d***, perpendicular a HE y a FG?



A) 6,8 **B)** 7,1 **C)** 7,6

D) 7,8 **E)** 8,1.

15.- Sea a un número decimal positivo ($a > 0$) ¿Cuántas de las siguientes operaciones producen siempre un número mayor o igual que a?
1. Elevarlo al cuadrado 2. Hallar su inverso 3. Multiplicarlo por $(a + 1)$
4. Extraer su raíz cuadrada positiva 5. Multiplicarlo por $\left(a+\frac{1}{a}\right)$.

A) Ninguna **B)** Una **C)** Dos **D)** Tres **E)** Cuatro.

16.- 1728 es cubo perfecto. ¿Cuál es el menor número natural positivo que multiplicado por 1728 nos da un cuadrado perfecto?

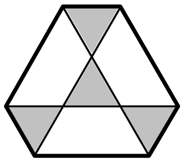
A) 2 **B)** 3 **C)** 6 **D)** 12 **E)** 18.

17.- Preguntado un número si era múltiplo de 2, de 3, de 4, de 5, de 6 y de 8, respondió cinco veces que sí y una que no. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es seguro falsa?

A) Es múltiplo de 24 **B)** Es múltiplo de 30 **C)** Es múltiplo de 40

D) Es múltiplo de 50 **E)** Es múltiplo de 60.

18.- Los cuatro triángulos equiláteros sombreados de la figura son iguales y el área de cada uno de ellos es 4 cm^2. ¿Cuál es, en cm^2, el área de la figura hexagonal?

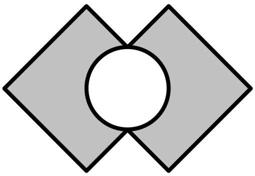


A) 36 **B)** 40 **C)** 44 **D)** 48 **E)** 52.

19.- ¿Cuántos números de cuatro cifras, de la forma $a72b$, son múltiplos de 12?

A) cinco **B)** seis **C)** ocho **D)** nueve **E)** diez.

20.- Dos cuadrados iguales, de lado 4, se cortan perpendicularmente en los puntos medios de los lados correspondientes, como indica la figura. Si el diámetro del círculo que ves es el segmento cuyos extremos son los pun-

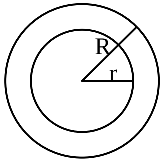


tos de corte de los cuadrados, ¿cuál es el área de la región sombreada?

A) $16 - 4\pi$ **B)** $16 - 2\pi$ **C)** $28 - 4\pi$ **D)** $28 - 2\pi$

E) $32 - 2\pi$.

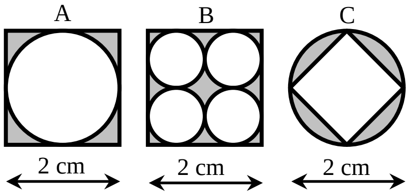
21.- Siendo R el radio mayor y r el menor de una corona circular, ¿cuál de las coronas circulares de estos radios tiene mayor área?



A) R = 4; r =3 **B)** R = 5; r = 4 **C)** R = 4; r =2

D) R = 6; r =5 **E)** R = 3; r =1.

22.- Las figuras que ves están compuestas por cuadrados y círculos. ¿En cuál de ellas es mayor el área sombreada?

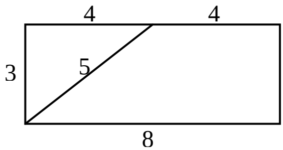


A) A **B)** B **C)** C

D) En A y B, que son iguales

E) En todas es la misma.

23.- Cortamos un rectángulo de lados 3 y 8 en dos piezas, como se observa en la figura, que las juntamos posteriormente formando un triángulo rectángulo. Uno de los lados del triángulo que resulta tiene longitud:

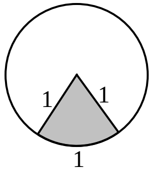


A) 6 **B)** 7 **C)** 9 **D)** 4 **E)** 5.

24.- Cinco coches realizan el mismo recorrido.
El coche **A** hace todo el recorrido a 60 km/h.
El coche **B** hace la mitad a 40 km/h y la otra mitad a 80 km/h.
El coche **C** hace dos tercios a 90 km/h y un tercio a 30 km/h.
El coche **D** hace un tercio a 90 km/h y dos tercios a 30 km/h.
El coche **E** hace un cuarto a 100 km/h y tres cuartos a 20 km/h.
¿Qué coche tardó menos?

A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E.

25.- Tanto el arco como los radios del sector circular sombreado de la figura miden 1 cm. ¿Cuál es su área (en cm^2)?



A) $\frac{1}{2}$ **B)** 1 **C)** $\frac{\pi}{6}$ **D)** $\frac{1}{\pi}$ **E)** $\frac{1}{6}$.

X CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE : Día 1 de marzo de 2006

NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ (☒) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Ediciones S.M., Grupo ANAYA y El Corte Inglés

1.- ¿Cuántos capicúas de tres cifras son múltiplos de 3?

A) 27 **B)** 30 **C)** 33 **D)** 33 **E)** 36.

2.- Juan utiliza parte del dinero que lleva para comprar varios CD, todos del mismo precio. Si con un quinto del dinero que tenía ha pagado un tercio del total de los CD que compró, ¿qué fracción del dinero que llevaba le quedará después de pagar todos los CD?

A) $\frac{1}{5}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{2}{5}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{4}{5}$.

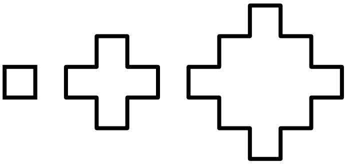
3.- En una reunión, la tercera parte de los asistentes tiene ojos verdes, el 80% cabello oscuro y el 20% ojos verdes y cabello oscuro. ¿Cuál es la proporción de los que no tienen ojos verdes ni cabello oscuro?

A) $\frac{1}{15}$ **B)** 10 % **C)** 15 % **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{3}{10}$.

4.- En un triángulo ABC se verifica que AC = BC = 7 y AB = 2. Si D es un punto de la prolongación del lado AB, con B entre A y D y tal que CD = 8, ¿cuánto mide BD?

A) 3 **B)** $2\sqrt{3}$ **C)** 4 **D)** 5 **E)** $4\sqrt{2}$.

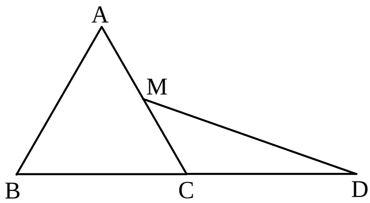
5.- En esta serie de polígonos "crucigrama" de lado 1 cm, ¿cuál es el perímetro del que tiene 61 cm^2 de área?



A) 30 cm **B)** 32 cm **C)** 34 cm

D) 40 cm **E)** 44 cm.

6.- El lado del triángulo equilátero ABC mide 2. Si M es el punto medio de AC y C el punto medio de BD, ¿cuál es el área del triángulo CDM?



A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B)** $\frac{3}{4}$ **C)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D) 1 **E)** $\sqrt{2}$.

7.- Si $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 25^2 = S$, entonces $2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + 50^2$ es igual a:

A) 2 S **B)** $(S + 1)^2$ **C)** 4 S **D)** S + 25 **E)** 2 S + 50.

8.- En el trapecio ABCD, de bases AB y DC, E es el punto medio de BC y F el punto medio de DA. Si el área del polígono ABEF es el doble del área del polígono FECD, ¿cuánto vale $\frac{AB}{DC}$?

A) 2 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 8.

9.- ¿Cuál de estos números es el mayor?

A) $4\sqrt{50}$ **B)** $7\sqrt{20}$ **C)** $5\sqrt{40}$ **D)** 31 **E)** $\sqrt{951}$.

10.- Si la parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ tiene su vértice en V(2, -1) y pasa por el punto P(1, 1), c es igual a:

A) 7 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 3.

11.- Pedro y Teresa están a 6 km de distancia, y se dirigen uno al encuentro del otro. Si las velocidades de Pedro y Teresa están en proporción de 2 a 3, ¿a qué distancia del punto de partida de Pedro se encontrarán?

A) 1,2 km **B)** 1,8 km **C)** 2 km **D)** 2,4 km **E)** 2,7 km.

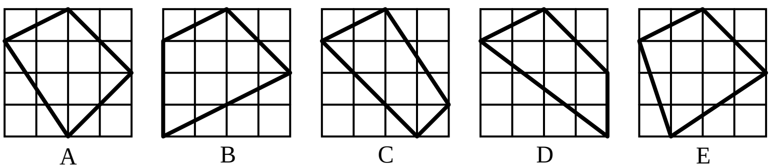
12.- Multiplicamos el producto de tres números positivos consecutivos por la suma de los tres. ¿Cuál es el mayor número que siempre divide al resultado?

A) 6 **B)** 9 **C)** 12 **D)** 18 **E)** 36.

13.- Tenemos dos dados con las caras numeradas de la siguiente forma: 1, 1, 2, 2, 3 y 3 uno de ellos y 4, 4, 5, 5, 6 y 6 el otro. Los lanzamos y sumamos los números obtenidos en la cara superior. ¿Cuál es la probabilidad de que esta suma sea impar?

A) $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{4}{9}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{5}{9}$ **E)** $\frac{2}{3}$.

14.- De los siguientes cuadriláteros inscritos en la misma cuadrícula, ¿cuál es el de mayor perímetro?



A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E.

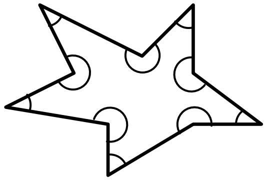
15.- Si $\begin{cases} a^2 + ab = 6 \\ b^2 + ab = 2 \end{cases}$, entonces $\dfrac{a}{b}$ es igual a:

A) 3 **B)** 8 **C)** $\dfrac{3}{4}$ **D)** 4 **E)** $\dfrac{1}{3}$.

16.- ¿Cuál de los siguientes números es el mayor?

A) $0{,}2^{3}$ **B)** $0{,}3^{2}$ **C)** 2^{-3} **D)** 3^{-2} **E)** $(-2)^{-3}$.

17.- ¿Cuánto suman los ángulos interiores de esta estrella pentagonal?



A) 1440º **B)** 1260º **C)** 1620º

D) 1080º **E)** 1800º.

18.- Si $1^2 + 11^2 + 21^2 + ... + 91^2 = S$, ¿cuánto suma $2^2 + 12^2 + 22^2 + ... + 92^2$?

A) $(S + 1)^2$ **B)** S +100 **C)** S + 910 **D)** S + 920 **E)** S + 930.

19.- La suma de todos los divisores primos de 5445 es: (El 1 no es primo!)

A) 25 **B)** 24 **C)** 22 **D)** 20 **E)** 19.

20.- Al girar con centro en G(1, 1) el punto P(4, -1) un ángulo de 90º obtenemos el punto:

A) (1, 4) **B)** (2, 3) **C)** (3, 4) **D)** (3, 3) **E)** (3, 2).

21.- El área del triángulo más pequeño, cuyos lados medidos en metros son números enteros, semejante al triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 m y cuya altura sobre la hipotenusa mide un número entero de metros es:

A) 150 m^2 **B)** 120 m^2 **C)** 180 m^2 **D)** 144 m^2 **E)** 210 m^2.

22.- Un número *abcd* de cuatro cifras es “ascendente” si $a < b < c < d$. ¿Cuántos números ascendentes de cuatro cifras son múltiplos de 11?

A) Ninguno **B)** Cuatro **C)** Seis **D)** Ocho **E)** Nueve.

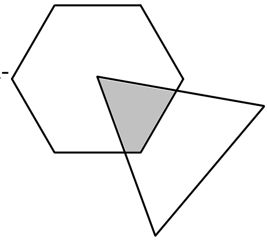
23.- El producto $\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{1}{10}\right)$ es igual a:

A) 1,1 **B)** 0,1 **C)** 0,9 **D)** $\frac{10}{11}$ **E)** $\frac{2}{5}$.

24.- ¿Cuál es el primer natural n para el que $(0{,}2)^n < 10^{-6}$?

A) 3 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9.

25.- Uno de los vértices de un triángulo equilátero de área 16 cm^2 es el centro de un hexágono regular de área 24 cm^2. ¿Cuál es, en cm^2, el área de la región sombreada?



A) 2 **B)** $\frac{8}{3}$ **C)** 3 **D)** 3,5 **E)** 4.

X CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE : Día 1 de marzo de 2006

NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ (☒) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

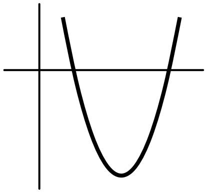
CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Ediciones S.M., Grupo ANAYA y El Corte Inglés

1.- La gráfica de la derecha corresponde a la parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$. Entonces



A) $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ **B)** $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$

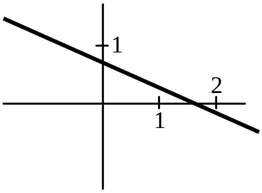
C) $a < 0$, b > 0, $c < 0$ **D)** $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$

E) $a > 0$, $b > 0$ $c < 0$.

2.- Sean $A = 2 \times 2005^{2006}$, $B = 2005^{2006}$, $C = 2004 \times 2005^{2005}$, $D = 2 \times 2005^{2005}$, $E = 2005^{2005}$ y $F = 2005^{2004}$. De los siguientes números, ¿cuál es el mayor?

A) $A - B$ **B)** $B - C$ **C)** $C - D$ **D)** $D - E$ **E)** $E - F$.

3- La gráfica de la figura es la de la recta $y = mx + n$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?



A) $m \cdot n < -1$ **B)** $-1 < m \cdot n < 0$ **C)** $m \cdot n = 0$

D) $0 < m \cdot n < 1$ **E)** $m \cdot n > 1$.

4.- Si $\begin{cases} a + b = 4 \\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 2 \end{cases}$, entonces $a^2 + b^2$ es igual a :

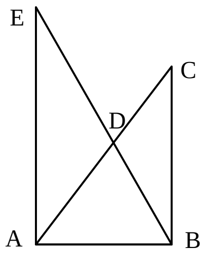
A) 12 **B)** 10 **C)** 8 **D)** 4 **E)** 2.

5.- La parábola simétrica de $y = x^2 - 6x + 13$ respecto a $x = 2$, es:

A) $y = x^2 - 2x + 13$ **B)** $y = x^2 + 4x + 8$ **C)** $y = x^2 - 2x + 5$

D) $y = x^2 + 4x + 13$ **E)** $y = x^2 + 6x + 13$.

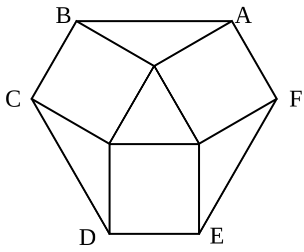
6.- En la figura que te mostramos, las rectas AE y BC son paralelas y perpendiculares a AB. Si AB = 4, BC = 6 y AE = 8, ¿cuál es la diferencia entre las áreas de los triángulos ADE y BDC?



A) 2 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 8 **E)** 9.

7.- Con centro en A(0, 1) giramos el punto P (2, 3) un ángulo de 60º. El punto resultante está en la recta:

A) $x + y = 3$ **B)** $x - y = 0$ **C)** $x + y = 2$ **D)** $x + y = \sqrt{3}$ **E)** $x - y = 2$.



8.- La figura de la derecha está formada a partir del triángulo equilátero interior y los cuadrados adosados a sus lados. Si el lado del triángulo equilátero mide 1 cm, ¿cuál es en cm^2 el área del hexágono ABCDEF?

A) $3+\sqrt{3}$ **B)** $3\sqrt{2}$ **C)** 4,5

D) $4\sqrt{3}$ **E)** 6.

9.- Entre todos los triángulos isósceles de perímetro 25 cm y cuyos lados tienen medida entera en centímetros, el de mayor superficie tiene un área, en cm^2, igual a:

A) $\frac{45\sqrt{7}}{4}$ **B)** $\frac{45\sqrt{11}}{4}$ **C)** $16\sqrt{3}$ **D)** $43\sqrt{91}$ **E)** $\frac{41\sqrt{7}}{4}$.

10.- La suma de 49 números enteros consecutivos es 7^5. ¿Cuál es su mediana?

A) 7 **B)** 7^2 **C)** 7^3 **D)** 7^4 **E)** 7^5.

11.- Sean los puntos A(0, 9) y B(0, 12). Los puntos A' y B' están en la recta $y = x$. Las rectas AA' y BB' se cortan en C(2, 8). ¿Cuál es la longitud del segmento A'B'?

A) 2 **B)** $2\sqrt{2}$ **C)** 3 **D)** $2+\sqrt{2}$ **E)** $3\sqrt{2}$.

12.- La suma $1^2+2^2+3^2+...+100^2$ termina en:

A) 10 **B)** 30 **C)** 50 **D)** 70 **E)** 81.

13.- Si la suma de la progresión geométrica decreciente ilimitada 1, $\cos^2\alpha$, $\cos^4\alpha$, $\cos^6\alpha$, … es igual a 5, ¿cuál es el valor de $\cos 2\alpha$?

A) $\frac{1}{5}$ **B)** $\frac{2}{5}$ **C)** $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **D)** $\frac{3}{5}$ **E)** $\frac{4}{5}$.

14.- Las circunferencias $x^2-4x+y^2-2y=0$ y $x^2+2x+y^2+2y=18$, se cortan en puntos de la recta:

A) $x + y = 3$ **B)** $2x - y = 6$ **C)** $3x - 4y = 2$ **D)** $x+y=\sqrt{3}$ **E)** $3x + 2y = 9$.

15.- En un monedero tenemos 2 monedas de un céntimo de euro, 2 de cinco, 2 de diez y 2 de veinte céntimos. Si sacamos simultáneamente dos monedas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la suma sea 20 o más céntimos?

A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{2}{5}$ **C)** $\frac{3}{7}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{2}{3}$.

16.- El conjunto $A = \{2x^2 - 12x + 20;\ x \in [1,4]\}$ es el intervalo:

A) [2, 10] **B)** [4, 10] **C)** [2, 4] **D)** [0, 10] **E)** [1, 16].

17.- El valor máximo del producto $x \cdot y$ en la región $A = \{(x,\ y) : x \geq 0;\ y \geq 0;\ x + 2y \leq 4\}$ es:

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** $\sqrt{5}$.

18.- ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $|x^2 - 6x + 5| = |x^2 - 3x + 1|$?

A) ninguna **B)** una **C)** dos **D)** tres **E)** cuatro.

19.- ¿Cuántas asíntotas tiene la curva de ecuación $y = \dfrac{x^5 + 3x - 1}{2x^4 - 1}$?

A) ninguna **B)** una **C)** dos **D)** tres **E)** cuatro.

20.- $\left(\dfrac{1 + \sqrt{3}\, i}{-1 + \sqrt{3}\, i} \right)^{10} =$

A) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ **B)** $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ **C)** $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ **D)** $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ **E)** $1 - \sqrt{3}\, i$.

21.- ¿Qué número es el mayor?

A) $\log_8 2$ **B)** $\log_{\frac{1}{2}} 8$ **C)** $\log_8 0{,}5$ **D)** $\log_8 \sqrt{2}$ **E)** $\log_4 \sqrt{8}$.

22.- Se tiran tres dados y se multiplican los resultados. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto sea 36?

A) $\frac{1}{12}$ **B)** $\frac{1}{15}$ **C)** $\frac{1}{18}$ **D)** $\frac{1}{24}$ **E)** $\frac{11}{216}$.

23.- ¿Cuál de estas rectas es tangente a la circunferencia $x^2 - 4x + y^2 - 2y = 5$?

A) $3x+4y = 12$ **B)** $2x + y = 15$ **C)** $x + 3y = 15$ **D)** $3x + y = 10$

E) $x - y = 1$.

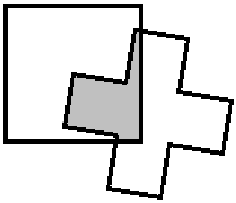
24.- El producto $9 \times 99 \times 999$ es igual a:

A) $10^6 - 10^5 + 10^4 - 10^3 + 10^2 - 10 + 1$ **B)** $10^6 - 10^5 - 10^4 - 10^3 + 10^2 + 10 - 1$

C) $10^6 - 10^5 - 10^4 + 10^2 + 10 - 1$ **D)** $10^6 - 10^5 - 10^4 - 10^3 - 10 + 1$

E) $10^6 - 10^5 - 10^4 - 10^3 + 10^2 + 1$.

25.- Un vértice de una cruz griega (cruz de brazos iguales) de lado 4 cm es el centro de un cuadrado de lado 10 cm. ¿Cuál es el área, en cm^2, de la región sombreada?



A) 25 **B)** $16\sqrt{2}$ **C)** 20

D) $16\sqrt{5}$ **E)** 16.

X CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE : Día 22 de abril de 2006

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ (☒) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
Ediciones S.M. - Grupo ANAYA - El Corte Inglés
Yalos Instruments, S.L. - SAS

1 Si por 6 peras me dan una trucha y un pan y por 4 panes me dan 3 peras, ¿cuántos panes me darán por una trucha?

A) 5 **B)** 6,5 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

2 En la siguiente suma cada símbolo representa un dígito diferente. Si ✋ = 7 y ★un número par, ¿cuál es el único valor posible para ☾.

	✋	☾	★
	✋	☾	★
☺	★	☼	❀

A) 0 **B)** 1 **C)** 2

D) 3 **E)** 4

3 2006 × 100 + 2006 =

A) 2006002006 **B)** 20052006 **C)** 2008006 **D)** 202606 **E)** 22066

4 Cinco amigos han medido el tiempo que tardan en dar una vuelta al patio del colegio. Después cada uno dice: Ana: "A mi velocidad, tardaría 12 minutos en dar tres vueltas". Belén: "Yo podría dar 16 vueltas en una hora". Carlos: "Yo en dar dos vueltas sólo tardaría 480 segundos". Diana: "Corriendo un día entero sin parar daría 380 vueltas". Esteban: "En dar media vuelta tardo 121 segundos" ¿Quién es el más rápido?

A) Ana **B)** Belén **C)** Carlos **D)** Diana **E)** Esteban

5 Si el 20 % de un número es 12, ¿cuál es el 30 % de ese mismo número?

A) 15 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 24 **E)** 30

6 Cinco chicos se sientan a jugar algunas partidas de damas. Si cada uno de los cinco juega una partida con cada uno de los demás, ¿cuál será el número total de partidas?

A) 5 **B)** 10 **C)** 15 **D)** 20 **E)** 25

7 Belén tiene 42 cubos de 1 cm de lado y con ellos, utilizando todos, ha construido un prisma rectangular cuya base tiene 18 cm de perímetro. ¿Cuál es la altura, en cm, del prisma?

A) 6 **B)** 5 **C)** 4 **D)** 3 **E)** 2

8 ¿Cuántos divisores tiene el número 2 × 3 × 5 × 7?

A) 4 **B)** 14 **C)** 16 **D)** 17 **E)** 210

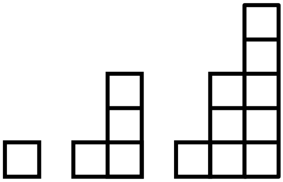
9 Ana se olvidó el número de su carné de biblioteca. Sólo recuerda que tiene seis cifras; que no hay ni “ceros”, ni “unos”, ni “doses”; y que las seis cifras están ordenadas de menor a mayor. ¿Cuántos números distintos hay que cumplen todas las condiciones?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

10 Observa la siguiente construcción. ¿Cuántos cuadrados serán necesarios para construir la figura que ocupa el lugar 20?

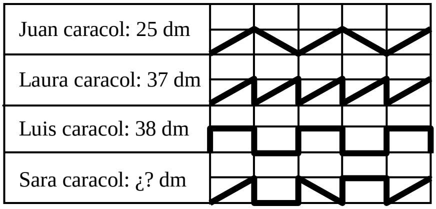
A) 800 **B)** 400 **C)** 200

D) 100 **E)** 40



1ª 2ª 3ª

11 Cuatro caracoles se pasean por un tablero formado por rectángulos idénticos. En la figura se muestra el recorrido de cada uno de ellos y sus longitudes. ¿Cuántos decímetros recorrió Sara caracol?



A) 27 **B)** 30

C) 35 **D)** 36 **E)** 40

12 Luisa, Joaquín, Esteban, Orlando y María van a hacer un viaje en coche. El coche tiene dos asientos delante (piloto y copiloto) y tres detrás (ventanilla izquierda, centro y ventanilla derecha). Si solamente Luisa y Orlando saben conducir, ¿de cuántas formas distintas pueden distribuirse dentro del coche?

A) 2 **B)** 10 **C)** 24 **D)** 48 **E)** 60

13 Julián visita a su abuela Rosario cada 5 días. La otra nieta de Rosario, Lucía, la visita cada 7 días. Rosario siempre hace croquetas cuando algún nieto la visita. Si el día 31 de diciembre de 2005 fueron los dos a visitarla, ¿cuántas veces tendrá que hacer croquetas para sus nietos en el año 2006?

A) 10 **B)** 115 **C)** 125 **D)** 76 **E)** 85

14 Lucas va a encontrarse con su novia Elisa el sábado a las 10 de la noche. Él llega puntual, pero espera a su novia mil horas. ¿Qué día de la semana era cuándo llegó Elisa?

A) Martes **B)** Miércoles **C)** Jueves **D)** Viernes **E)** Sábado

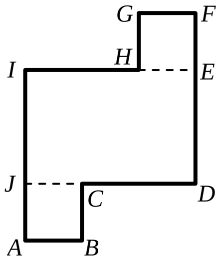
15

De los 120 alumnos que hay en mi curso, 30 aún no han visto la última película de Harry Potter. ¿Qué porcentaje de alumnos ha visto la película?

A) 60 % **B)** 90 % **C)** 30 % **D)** 25 % **E)** 75 %

16

El perímetro de esta figura es 154 cm. *ABCJ* y *EFGH* son cuadrados iguales. Los segmentos *JD* y *DF* miden lo mismo y el segmento *DE* es el doble del segmento *EF*. El perímetro del rectángulo *DEIJ*, en cm, es:



A) 154 **B)** 110 **C)** 132

D) 55 **E)** 66

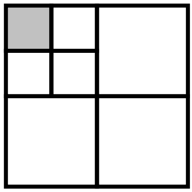
17

Sara tenía el doble de dinero que Manuel. Cuando Sara le dio a Manuel 42 euros, los dos quedaron con la misma cantidad de dinero. Si Sara y Manuel juntan su dinero, ¿cuánto tienen en total?

A) 63 **B)** 126 **C)** 252 **D)** 168 **E)** 84

18

Mario se encuentra un cuadrado gris de 2 cm de lado. Entonces, dibuja tres cuadrados iguales, formando un cuadrado más grande y va repitiendo este proceso. ¿Cuántas veces tendrá que dibujar tres cuadrados para obtener un cuadrado de perímetro 1 024 cm?



A) 8 **B)** 7 **C)** 6 **D)** 9
E) 10

19

Agustina, Benito y Camila fueron juntos a comprar un regalo de cumpleaños. Agustina llevaba 100 € y pagó el regalo. El regalo costó 84 €. Repartieron el gasto en partes iguales. Benito le dio su parte. Camila sólo le dio la mitad de su parte. ¿Cuántos euros le quedaron a Agustina?

A) 42 **B)** 16 **C)** 52 **D)** 56 **E)** 58

20

En un campeonato, cada equipo jugó 24 partidos. El equipo A no empató ningún partido y ganó 10 más de los que perdió. El equipo B no perdió ningún partido y empató 6 más de los que ganó. ¿Cuántos partidos más ganó el equipo A que el B?

A) 4 **B) 7** **C)** 8 **D)** 10 **E)** 12

21

Marta, Alicia e Inés leyeron un mismo libro de menos de 300 páginas. Marta leyó 7 páginas el primer día y el resto a 10 páginas por día. Alicia leyó 2 páginas el primer día y el resto a 11 páginas por día. Inés leyó 5 páginas el primer día y el resto a 9 páginas por día. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

A) 231 **B)** 68 **C)** 277 **D)** 299 **E)** 167

22

Mowgly normalmente va al río andando y vuelve a casa en elefante y tarda 40 minutos en ir y volver. Un día fue en elefante y también volvió en elefante y tardó sólo 32 minutos. ¿Cuántos minutos hubiera tardado si hubiera hecho ambos trayectos andando?

A) 24 **B)** 42 **C)** 46 **D)** 48 **E)** 50

23

El abuelo sugirió repartir las naranjas cosechadas en el huerto entre los miembros de su familia de tal modo que una persona recibiría 5 kilos, dos personas recibirían 4 kilos cada una, cuatro personas recibirían 2 kilos cada una, dos recibirían 1,5 kilos cada una y una persona no recibiría nada. Sin embargo, la abuela dijo que todos recibirían la misma cantidad de naranjas. ¿Cuántas personas salieron beneficiadas con la sugerencia de la abuela?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

24

Entre los tres miembros de la familia conejo se han comido 73 zanahorias en la última semana. El padre comió cinco zanahorias más que la madre. El hijo comió 12 zanahorias. ¿Cuántas zanahorias comió mamá conejo?

A) 27 **B)** 28 **C)** 31 **D)** 33 **E)** 56

25

En el dibujo hay 11 casillas. Colocamos el número 7 en la primera y el 6 en la novena. ¿Qué número debes colocar en la segunda casilla si quieres que la suma de tres números consecutivos cualesquiera sea igual a 21?

7								**6**		

A) 7 **B)** 8 **C)** 6 **D)** 10 **E)** 21

X CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE : Día 22 de abril de 2006

NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ (☒) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
Ediciones S.M. - Grupo ANAYA - El Corte Inglés
Yalos Instruments, S.L. - SAS

1 Ana, Beatriz y Celia son tres amigas de edades diferentes y sólo una de las tres afirmaciones siguientes es verdadera:

Beatriz es la mayor	Ana no es la mayor	Celia no es la más joven

Ordénalas por edades de mayor a menor.

A) Beatriz, Ana, Celia **B)** Ana, Beatriz, Celia **C)** Celia, Ana, Beatriz

D) Celia, Beatriz, Ana **E)** Ana, Celia, Beatriz

2 Dos jarras de 600 mililitros cada una contienen zumo de naranja. Una está llena la tercera parte y la otra los dos quintos. Añadimos agua a cada una hasta llenarlas completamente y, posteriormente, las vaciamos en una jarra grande. ¿Qué fracción del líquido de la jarra grande es zumo de naranja?

A) $\frac{1}{8}$ **B)** $\frac{3}{16}$ **C)** $\frac{11}{30}$ **D)** $\frac{11}{19}$ **E)** $\frac{11}{15}$

3 Entre tres amigos se reparten 6 lápices idénticos de manera que cada uno tiene al menos un lápiz. ¿Cuántos repartos distintos puede haber?

A) 1 **B)** 3 **C)** 6 **D)** 10 **E)** 12

4 Un número entero mayor que 2 da de resto 2 al dividirlo entre 3, 4, 5 y 6. El menor número con esas características está comprendido entre:

A) 40 y 49 **B)** 60 y 79 **C)** 100 y 129 **D)** 210 y 249 **E)** 320 y 369

5 Alicia, Blas, Carlos, Delia y Esteban juegan a tirar dos dardos cada uno a una diana en la que hay 10 zonas puntuadas de 1 a 10. Los diez dardos caen en zonas distintas y las puntuaciones totales obtenidas, sumando cada uno las puntuaciones de sus dos dardos, han sido: Alicia 16 puntos, Blas 4 puntos, Carlos 7 puntos, Delia 11 puntos y Esteban 17 puntos. ¿Quién colocó uno de sus dos dardos en la zona de 6 puntos?

A) Alicia **B)** Blas **C)** Carlos **D)** Delia **E)** Esteban

6 Los dos tercios de las personas que hay en una habitación están sentadas en los tres cuartos de las sillas que hay. El resto de la gente está de pie. Si hay 6 sillas vacías, ¿Cuántas personas hay en la habitación?

A) 12 **B)** 18 **C)** 24 **D)** 27 **E)** 36

7 En una fiesta hay solamente mujeres solteras y matrimonios (mujer-hombre). La probabilidad de que al escoger una mujer al azar esté soltera es $\frac{2}{5}$. ¿Qué fracción de personas de la fiesta son hombres?

A) $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{3}{8}$ **C)** $\frac{2}{5}$ **D)** $\frac{5}{12}$ **E)** $\frac{3}{5}$

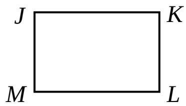
8 ¿Qué número d debe colocarse en el denominador de $\frac{19}{d}$ para que la fracción que resulte esté lo más cerca posible de $2+\frac{1}{2}$?

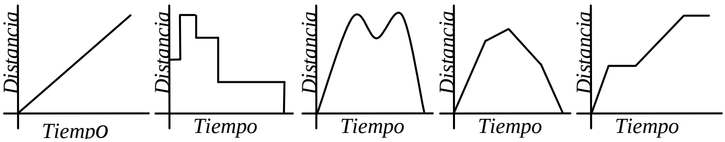
A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

9 En un concurso análogo a éste, que consistía en la resolución de 12 problemas, se otorgaban 8 puntos a cada solución correcta, 0 puntos a cada solución errónea y 3 puntos a cada solución en blanco. Si Marta obtuvo 35 puntos en esta prueba, ¿cuál fue el máximo número de respuestas erróneas que pudo haber tenido?

A) 1 **B)** 8 **C)** 11 **D)** 2 **E)** 7

10 María sale a correr desde la esquina *J* del campo rectangular *JKLM* yendo en este sentido: *J - K - L - M - J -…* ¿Qué gráfica de las siguientes representa la distancia en cada instante al punto de partida?





A) **B)** **C)** **D)** **E)**

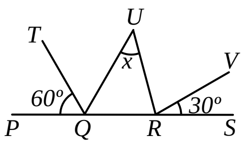
11 En el triángulo *ABC*, la longitud de cada lado viene medida por un número entero de centímetros. Si el lado *AB* es 14 cm más largo que el *AC* y el *BC* es 30 cm más largo que el *AC*, el mínimo valor posible para el perímetro, en cm, de dicho triángulo es:

A) 44 **B)** 47 **C)** 91 **D)** 94 **E)** 95

12 Un número con dos o más cifras se llama "ascendente" si leído de izquierda a derecha las cifras son cada vez mayores. Por ejemplo, 125, 14 y 239 son números ascendentes pero 255, 74 o 198 no lo son. Si escribimos la lista de números ascendentes de menor a mayor, el primero sería 12, luego el 13, etc. ¿Qué número ocuparía el lugar 100º de esa lista?

A) 389 **B)** 356 **C)** 269 **D)** 345
E) 258

13 En el dibujo que ves, los puntos *P*, *Q*, *R* y *S* están alineados, el ángulo *PQT* = 60º, el ángulo *SRV* = 30º, *UQ* es la bisectriz del ángulo *TQR* y *UR* es la bisectriz del ángulo



QRV. ¿Cuál es el valor de *x*?

A) 65º **B)** 45º **C)** 50º **D)** 60º **E)** 75º

14 En la resta que observas, algunas de las cifras están representadas por letras. ¿Cuál de ellas toma el máximo valor?

$$\begin{array}{rccccc} & a & 4 & b & 7 & c \\ - & 5 & d & 8 & e & 6 \\ \hline & 2 & 8 & 4 & 9 & 9 \end{array}$$

A) *a* **B)** *b* **C)** *c* **D)** *d* **E)** *e*

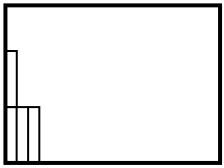
15 Cuando dividimos 2006 entre cierto número entero positivo *N*, obtenemos de resto 5. ¿Cuántos números *N* tienen esta propiedad?

A) 6 **B)** 5 **C)** 4 **D)** 3 **E)** 2

16 Durante dos días consecutivos, Julio se come cada día el 20 % de los pistachos que tiene en una bolsa. Si al final del segundo día quedan 32 pistachos en la bolsa, ¿cuántos había al comienzo del primer día?

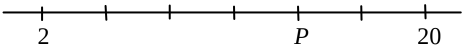
A) 40 **B)** 50 **C)** 55 **D)** 60 **E)** 75

17 Queremos embaldosar una habitación rectangular en la que el cociente entre la longitud del lado largo y el corto es $\frac{5}{4}$, con baldosas de 5 y 30 cm de lado, como se indica en la figura. ¿Cuántas baldosas hacen falta como mínimo?



A) 30 **B)** 40 **C)** 60 **D)** 24 **E)** 18

18 En la recta que ves están marcados los números 2 y 20. Colocamos entre ellos cinco puntos más de modo que los 7 puntos resultantes están igualmente espaciados. ¿Qué número corresponde al punto que hemos llamado *P*?



A) 14 **B)** 17 **C)** 11 **D)** 16 **E)** 15

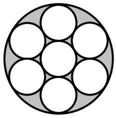
19 La factura de teléfono de mi casa se compone de una cantidad fija más una cantidad por el número de horas que hablo. Si en el mes de febrero, pagué 78 euros y en el de marzo, que hablé el doble de tiempo, pagué 114 euros, ¿cuál es, en euros, la cantidad fija que marca mi factura?

A) 36 **B)** 38 **C)** 40 **D)** 42 **E)** 44

20 Julián visita a su abuela Rosario cada 5 días. La otra nieta de Rosario, Lucía, la visita cada 7 días. Rosario siempre hace croquetas cuando algún nieto la visita. Si el día 31 de diciembre de 2005 fueron los dos a visitarla, ¿cuántas veces tendrá que hacer croquetas para sus nietos en el año 2006?

A) 10 **B)** 115 **C)** 125 **D)** 76 **E)** 85

21 Cada uno de los círculos pequeños de la figura tienen radio 1 cm. El círculo del centro es tangente a cada uno de los seis que lo rodean, siendo estos tangentes al círculo grande y a sus vecinos más cercanos. ¿Cuál es el área en cm^2 de la zona sombreada?

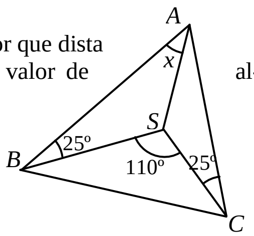


A) π **B)** $1{,}5\pi$ **C)** 2π **D)** 3π **E)** $3{,}5\pi$

22 Si un arco de 45º del círculo *A* tiene la misma longitud que un arco de 30º del círculo *B*, el cociente entre las áreas de *A* y *B* es:

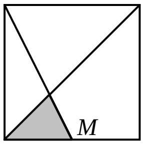
A) $\frac{4}{9}$ **B)** $\frac{2}{3}$ **C)** $\frac{5}{6}$ **D)** $\frac{3}{2}$ **E)** $\frac{9}{4}$

23 En el triángulo *ABC* de la figura, *S* es un punto de su interior que dista lo mismo del vértice *A* que del vértice *C*. Te damos el valor de algunos ángulos. Calcula *x*.



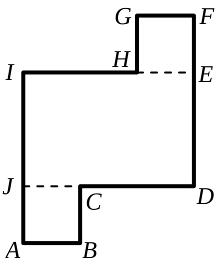
A) 5º **B)** 15º **C)** 25º **D)** 35º **E)** 45º

24 El cuadrado de la figura tiene lado 6 cm y *M* es el punto medio de uno de sus lados. El valor del área de la zona sombreada en cm^2 es:



A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

25 El perímetro de esta figura es 154 cm. *ABCJ* y *EFGH* son cuadrados iguales. Los segmentos *JD* y *DF* miden lo mismo y el segmento *DE* es el doble del segmento *EF*. El perímetro del rectángulo *DEIJ* en cm es:



A) 154 **B)** 110 **C)** 132 **D)** 55

E) 66

X CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE : Día 22 de abril de 2006

NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ (☒) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
Ediciones S.M. - Grupo ANAYA - El Corte Inglés
Yalos Instruments, S.L. - SAS

1 Julián visita a su abuela Rosario cada 5 días. La otra nieta de Rosario, Lucía, la visita cada 7 días. Rosario siempre hace croquetas cuando algún nieto la visita. Si el día 31 de diciembre de 2005 fueron los dos a visitarla, ¿cuántas veces tendrá que hacer croquetas para sus nietos en el año 2006?

A) 10 **B)** 115 **C)** 125 **D)** 76 **E)** 85

2 Si cuando escribimos $a \Delta b$ queremos decir $\frac{a+b}{a-b}$, ¿cuál es el valor de $((1\Delta 2)\Delta 3)$?

A) $-\frac{2}{3}$ **B)** $-\frac{1}{5}$ **C)** 0 **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** No se puede calcular pues no se puede dividir por cero.

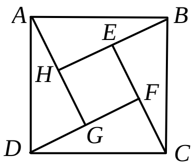
3 Las ecuaciones de incógnita *x*, $2x+7=3$ y $bx-10=-2$ tiene la misma solución. ¿Cuánto vale *b*?

A) – 8 **B)** – 4 **C)** – 2 **D)** 4 **E)** 8

4 Si un rectángulo de diagonal *x* es doble de largo que de ancho, ¿cuál es su área?

A) $\frac{1}{4}x^2$ **B)** $\frac{2}{5}x^2$ **C)** $\frac{1}{2}x^2$ **D)** x^2 **E)** $\frac{3}{2}x^2$

5 El área del cuadrado *ABCD* de la figura es 50 cm^2.
Si *BE* = 1 cm, ¿cuál es el área, en cm^2, del cuadrado interior *EFGH*?



A) 12 **B)** 24 **C)** 36 **D)** 20
E) 40

6 Si el *x* % de *x* es 4, ¿cuál es el valor de *x*?

A) 2 **B)** 4 **C)** 10 **D)** 20 **E)** 40

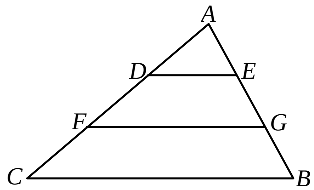
7 En un cuadrado inscribimos un círculo, en el círculo un cuadrado y en este cuadrado, otro círculo. ¿Cuál es el cociente entre el área del círculo más pequeño y el área del cuadrado mayor?

A) $\frac{\pi}{16}$ **B)** $\frac{\pi}{8}$ **C)** $\frac{39}{16}$ **D)** $\frac{\pi}{4}$ **E)** $\frac{\pi}{2}$

8 Se pintan de rojo todos los puntos que distan menos de 2 m del borde de una piscina rectangular de 50 m por 20 m.¿Cuál es, en m^2, la superficie de la zona pintada de rojo?

A) $280 + 4\pi$ **B)** $280 + 2\pi$ **C)** $140 + 2\pi$ **D)** $140 + 4\pi$ **E)** $70 + 2\pi$

9 En el triángulo *ABC* de la figura, de área 90 cm^2, los puntos *E* y *G* dividen al lado *AB* en tres partes iguales y las rectas *DE* y *FG* son paralelas a *BC*. ¿Cuál es, en cm^2, el área del trapecio *DEGF*?



A) 20 **B)** 25 **C)** 30
D) 36 **E)** 45

10 Una jarra tiene 360 mililitros de un refresco de naranja con un 50 % de zumo puro. ¿Cuántos mililitros de agua hay que añadirle para que la concentración de zumo se quede en un 30 %?

A) 240 **B)** 200 **C)** 224 **D)** 400 **E)** 264

11 ¿Cuál es la probabilidad de que un número del conjunto {1, 2, 3,…, 100} sea divisible por 2 pero no por 3?

A) $\frac{1}{6}$ **B)** $\frac{33}{100}$ **C)** $\frac{17}{50}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{18}{25}$

12 El perímetro de un triángulo equilátero coincide numéricamente con el área de su círculo inscrito. ¿Cuál es el radio de este círculo?

A) $\frac{6\sqrt{3}}{\pi}$ **B)** $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ **C)** $\sqrt{3}$ **D)** $\frac{6}{\pi}$ **E)** $\sqrt{3}\,\pi$

13 Si el radio de un círculo crece un 100 %, el área crecerá un:

A) 100 % **B)** 200 % **C)** 300 % **D)** 400 % **E)** Nada de lo anterior

14 El mayor entero *k* para el que $(n^3 - n)$ es divisible por *k* para cualquier *n* mayor o igual que 2006 es:

A) 2 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 10

15 Si rebajamos un artículo un 10 %, ¿qué porcentaje tenemos que aumentarlo para volver al precio inicial?

A) 20 % **B)** 9 % **C)** $\left(\frac{100}{9}\right)\%$ **D)** 10 % **E)** $\left(\frac{107}{9}\right)\%$

16 En una de las siguientes relaciones, x no es ni directa ni inversamente proporcional a y. ¿En cuál?

A) $x + y = 0$ **B)** $3xy = 10$ **C)** $x = 5y$ **D)** $3x + y = 10$ **E)** $\frac{x}{y} = \sqrt{3}$

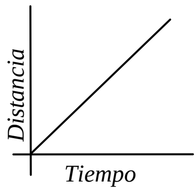
17 Si $x > 0$; $y > 0$; $x > y$; $z \neq 0$, ¿cuál de las siguientes desigualdades no siempre es verdadera?

A) $x + z > y + z$ **B)** $x - z > y - z$ **C)** $xz > yz$ **D)** $\frac{x}{z^2} > \frac{y}{z^2}$ **E)** $xz^2 > yz^2$

18 La circunferencia C pasa por el centro de la circunferencia D y es tangente a ella. Si el área del círculo C es 4 cm^2, el área del círculo D, en cm^2, es:

A) 8 **B)** $8\sqrt{2}$ **C)** $8\sqrt{\pi}$ **D)** 16 **E)** $16\sqrt{2}$

19 La gráfica adjunta muestra la distancia recorrida por un coche en función del tiempo. ¿Qué se deduce de la gráfica que está haciendo el coche?



A) Viaja a velocidad constante **B)** Viaja hacia el Noreste
C) Subiendo un puerto de montaña **D)** Va cada vez más rápido
E) Nada de lo anterior

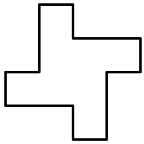
20 Si todos los *plins* son *plons* y algunos *pluns* son *plins*, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es siempre verdadera?

X: Todos los *plins* son *pluns*. Y: Algunos *plons* son *pluns*. Z: Algunos *plins* no son *pluns*.

A) Solamente X **B)** Solamente Y **C)** Solamente Z

D) Solamente X e Y **E)** Solamente Y y Z

21 El diagrama muestra una figura en la que todos los lados largos son de igual longitud que es el doble de la longitud de cualquier lado corto. Si todos los ángulos son rectos y el área de la figura es 200 cm^2, ¿cuál es, en centímetros, su perímetro?

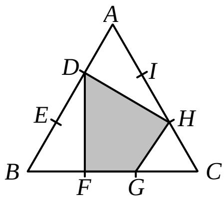


A) 20 **B)** 40 **C)** 60 **D)** 80 **E)** 100

22 Si ando a 4 km/h y corro a 6 km/h, me ahorro 3 minutos en ir al Instituto si voy corriendo en lugar de andando. ¿A qué distancia vivo del Instituto?

A) 0,125 km **B)** 0,6 km **C)** 0,75 km **D)** 6,9 km **E)** 7,5 km

23 *ABC* es un triángulo equilátero y los puntos *D, E, F, G, H, I* dividen a los lados en tres partes iguales. ¿Cuál es el cociente entre el área del cuadrilátero *DFGH* y el triángulo *ABC*?



A) $\frac{4}{9}$ **B)** $\frac{5}{9}$ **C)** $\frac{2}{5}$ **D)** $\frac{4}{5}$

E) $\frac{1}{2}$

24 Si la media de x e y es $\frac{3y}{4}$, ¿cuánto vale $\frac{x}{y}$?

A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** 2 **E)** No se puede saber

25 En el cuadrado de la figura, cada fila, columna y diagonal suman lo mismo. ¿Cuál es el valor de $L + U + C + I + A$?

8	*L*	*U*
C	5	*I*
4	*A*	2

A) 20 **B)** 21 **C)** 23 **D)** 24

E) 26

X CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE : Día 22 de abril de 2006

NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ (☒) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
Ediciones S.M. - Grupo ANAYA - El Corte Inglés
Yalos Instruments, S.L. - SAS

1 Si la media aritmética de dos números es 6 y la raíz cuadrada de su producto es 5, una ecuación cuyas soluciones son esos números es:

A) $x^2 + 12x + 25 = 0$ **B)** $x^2 + 6x + 25 = 0$ **C)** $x^2 - 12x - 5 = 0$
D) $x^2 - 6x + 25 = 0$ **E)** $x^2 - 12x + 25 = 0$

2 ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $\frac{2x^2 - 10x}{x^2 - 5x} = x - 3$?

A) Ninguna **B)** Una **C)** Dos **D)** Tres **E)** Más de tres

3 *AB* es un diámetro de una circunferencia de centro *O*. *C* es un punto de la circunferencia tal que el ángulo *BOC* es 60º. Si el diámetro de la circunferencia mide 5 cm, la longitud de la cuerda *AC*, expresada en cm, es:

A) 3 **B)** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ **C)** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ **D)** $3\sqrt{3}$ **E)** Nada de lo anterior

4 La longitud de la cuerda común a dos circunferencias es 16 cm. Si los radios de dichas circunferencias son 10 y 17 cm, la distancia entre los centros de esas circunferencias, expresada en cm, es:

A) 27 **B)** 21 **C)** $\sqrt{389}$ **D)** 15 **E)** No se puede saber

5 Si $x = (\log_8 2)^{(\log_2 8)}$ entonces $\log_3 x$ es igual a:

A) -3 **B)** $-\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** 3 **E)** 9

6 Si la suma de dos números es 1 y su producto también es 1, la suma de sus cubos es:

A) 12 **B)** $-2 - \frac{\sqrt{3}}{4}i$ **C)** 0 **D)** $-\frac{3\sqrt{3}}{4}i$ **E)** -2

7 Las longitudes de los lados del rectángulo *ABCD* son 5 y 3 cm. Si los puntos *E* y *F* dividen a la diagonal *AC* en tres segmentos iguales, el área del triángulo *BEF*, en cm^2, es:

A) $\frac{3}{2}$ **B)** $\frac{5}{3}$ **C)** $\frac{5}{2}$ **D)** $\frac{1}{3}\sqrt{34}$ **E)** $\frac{1}{3}\sqrt{68}$

8 Sea S_n la suma de los n primeros términos de la progresión aritmética 8, 12,… y T_n la suma de los n primeros términos de la progresión aritmética 17, 19,… Entonces $S_n = T_n$ para:

A) Ningún valor de n **B)** Un valor de n **C)** Dos valores de n
D) Tres valores de n **E)** Más de tres valores de n

9 Si $f(n+1) = \dfrac{2f(n)+1}{2}$, para n = 1, 2,… y $f(1) = \dfrac{1}{2}$ entonces $f(2006)$ es igual a:

A) 1001 **B)** 1002 **C)** 1003 **D)** $\dfrac{4013}{2}$ **E)** $\dfrac{2005}{2}$

10 Si m es un entero positivo y las rectas $y = mx - 1$ y $13x + 11y = 700$, se cortan en un punto reticular (de coordenadas enteras), m puede ser:

A) Solamente 4 **B)** Solamente 5 **C)** Solamente 6

D) Alguno de los enteros 4, 5, 6 y otro entero positivo

E) Tiene infinitas posibilidades

11 En una recta tomamos 5 puntos O, A, B, C y D, de manera que las distancias $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OD = d$ verifican $a < b < c < d$. Si P es un punto de esa recta entre B y C tal que $\dfrac{AP}{PD} = \dfrac{BP}{PC}$, OP es igual a:

A) $\dfrac{b^2 - bc}{a - b + c - d}$ **B)** $\dfrac{ac - bd}{a - b + c - d}$ **C)** $\dfrac{bd + ac}{a - b + c - d}$

D) $\dfrac{b^2 - bc}{a - b + c - d}$ **E)** $\dfrac{ad - bc}{a - b + c - d}$

12 Si el área del triángulo ABC es 64 cm^2 y la media geométrica de los lados AB y AC es 12 cm, el seno del ángulo $\hat{A}$ es igual a:

A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **B)** $\dfrac{3}{5}$ **C)** $\dfrac{4}{5}$ **D)** $\dfrac{8}{9}$ **E)** $\dfrac{15}{17}$

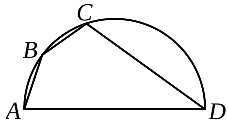
13 Encima de un tablero de ajedrez (8 × 8) dibujamos el círculo inscrito. ¿Cuántos cuadros del tablero están totalmente cubiertos por el círculo?

A) 48 **B)** 44 **C)** 40 **D)** 36 **E)** 32

14 Si $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ con $-1 < x < 1$, $f\left(\frac{3x+x^3}{1+3x^2}\right)$ es igual a:

A) $-f(x)$ **B)** $2f(x)$ **C)** $3f(x)$ **D)** $[f(x)]^2$ **E)** $[f(x)]^2 - f(x)$

15 En el semicírculo de la figura, de diámetro $AD = 4$, inscribimos el cuadrilátero $ABCD$ con $AB = BC = 1$. ¿Cuánto mide el lado CD?



A) $\frac{7}{2}$ **B)** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ **C)** $\sqrt{11}$ **D)** $\sqrt{13}$

E) $2\sqrt{3}$

16 Si P es el producto de n números en progresión geométrica, S su suma y S' la suma de sus inversos, entonces P, en términos de S y S', es:

A) $(S \cdot S')^{\frac{n}{2}}$ **B)** $\left(\frac{S}{S'}\right)^{\frac{n}{2}}$ **C)** $(S \cdot S')^{n-2}$ **D)** $\left(\frac{S}{S'}\right)^{n}$ **E)** $\left(\frac{S'}{S}\right)^{\frac{n-1}{2}}$

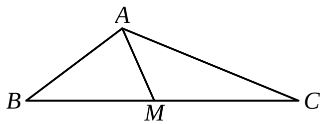
17 Tenemos dos cartas: una con ambas caras rojas y otra con una cara roja y otra azul. Elegimos una al azar y la ponemos encima de la mesa. Si la cara que vemos es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la otra cara de esa carta sea también roja?

A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{3}{4}$

18 Lanzamos un dado seis veces. La probabilidad de obtener un número mayor o igual que 5 al menos cinco veces es:

A) $\frac{13}{729}$ **B)** $\frac{12}{729}$ **C)** $\frac{2}{729}$ **D)** $\frac{3}{729}$ **E)** Nada de lo anterior

19 En el triángulo ABC de la figura, $AB = 4$ y $AC = 8$. Si M es el punto medio de BC y $AM = 3$, ¿cuál es la longitud de BC?



A) $2\sqrt{26}$ **B)** $2\sqrt{31}$ **C)** 9

D) $4 + 2\sqrt{13}$ **E)** No hay datos suficientes

20 Sea *f(x)* una función definida para todos los números reales tal que $f(x) > 0$ y $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$. De las siguientes afirmaciones, ¿cuáles son verdaderas?

I. $f(0) = 1$ II. $f(-a) = \dfrac{1}{f(a)}$ III. $f(a) = \sqrt[3]{f(3a)}$ IV. Si $b > a$, $f(b) > f(a)$

A) Solamente III y IV **B)** Solamente I, III y IV **C)** Solamente I, II y IV
D) Solamente I, II y III **E)** Todas son verdaderas

21 Cada una de estas cartas tiene una letra en una cara y un número en la otra cara. Pedro dice: *"En cualquiera de estas cartas se verifica que como tenga una vocal por una cara, tiene un número par por la otra"*. ¿A cuántas cartas como mínimo tiene que darles la vuelta Alicia para comprobar que Pedro dice la verdad?

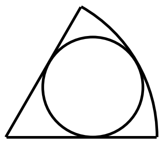
E **K** **4** **7**

A) Ninguna **B)** Una **C)** Dos **D)** Tres **E)** Cuatro

22 Una de las siguientes funciones es par, es decir, simétrica respecto del eje de ordenadas. ¿Cuál?

A) $y = x^2 + x$ **B)** $y = x^3$ **C)** $y = x \cos x$ **D)** $y = x\,senx$ **E)** $y = x^2 senx$

23 En la figura que te mostramos, el cociente entre el radio del sector y el del círculo inscrito en ese sector es 3. ¿Cuál es el cociente entre el área del sector y el área del círculo?



A) $\dfrac{3}{2}$ **B)** $\dfrac{4}{3}$ **C)** $\dfrac{5}{3}$ **D)** $\dfrac{6}{5}$

E) $\dfrac{5}{4}$

24 En mi centro, hace dos años fueron a la Universidad 30 chicos más que chicas. El año pasado, el número de estudiantes que fueron a la Universidad aumentó un 10 %: el de chicas aumentó un 20 % y el de chicos un 5 %. ¿Cuántos estudiantes de mi centro fueron a la Universidad el año pasado?

A) 88 **B)** 99 **C)** 110 **D)** 121 **E)** 132

25 Sean *a* y *b* los dos primeros números primos mayores que 2006^{2006}. ¿Qué fracción de las siguientes representa un número mayor?

A) $\dfrac{a}{b-1}$ **B)** $\dfrac{a}{b+1}$ **C)** $\dfrac{2a}{2b+1}$ **D)** $\dfrac{2a}{2b-1}$ **E)** $\dfrac{3a}{3b+1}$

X CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (1ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**B**	1	**B**	1	**B**	1	**B**
2	**B**	2	**B**	2	**C**	2	**A**
3	**C**	3	**A**	3	**A**	3	**B**
4	**B**	4	**B**	4	**A**	4	**A**
5	**D**	5	**C**	5	**E**	5	**C**
6	**A**	6	**C**	6	**C**	6	**B**
7	**E**	7	**D**	7	**C**	7	**A**
8	**D**	8	**E**	8	**C**	8	**A**
9	**D**	9	**C**	9	**C**	9	**A**
10	**C**	10	**B**	10	**A**	10	**C**
11	**D**	11	**D**	11	**D**	11	**B**
12	**C**	12	**E**	12	**E**	12	**C**
13	**B**	13	**B**	13	**D**	13	**D**
14	**D**	14	**C**	14	**B**	14	**E**
15	**B**	15	**C**	15	**A**	15	**D**
16	**C**	16	**B**	16	**C**	16	**A**
17	**E**	17	**C**	17	**A**	17	**B**
18	**C**	18	**E**	18	**E**	18	**D**
19	**C**	19	**D**	19	**E**	19	**D**
20	**D**	20	**D**	20	**C**	20	**C**
21	**C**	21	**C**	21	**A**	21	**E**
22	**B**	22	**C**	22	**A**	22	**C**
23	**C**	23	**A**	23	**B**	23	**C**
24	**D**	24	**A**	24	**E**	24	**C**
25	**D**	25	**A**	25	**E**	25	**A**

X CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (2ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**C**	1	**E**	1	**B**	1	**E**
2	**D**	2	**C**	2	**C**	2	**A**
3	**D**	3	**D**	3	**B**	3	**C**
4	**B**	4	**B**	4	**B**	4	**B**
5	**B**	5	**A**	5	**C**	5	**A**
6	**B**	6	**D**	6	**D**	6	**E**
7	**D**	7	**B**	7	**B**	7	**C**
8	**C**	8	**D**	8	**A**	8	**B**
9	**E**	9	**E**	9	**C**	9	**C**
10	**B**	10	**D**	10	**A**	10	**C**
11	**C**	11	**E**	11	**C**	11	**B**
12	**D**	12	**A**	12	**A**	12	**D**
13	**B**	13	**B**	13	**C**	13	**E**
14	**E**	14	**A**	14	**C**	14	**C**
15	**E**	15	**A**	15	**C**	15	**A**
16	**B**	16	**B**	16	**D**	16	**B**
17	**C**	17	**A**	17	**C**	17	**D**
18	**B**	18	**A**	18	**D**	18	**A**
19	**E**	19	**D**	19	**A**	19	**B**
20	**C**	20	**B**	20	**B**	20	**D**
21	**E**	21	**C**	21	**D**	21	**C**
22	**D**	22	**A**	22	**B**	22	**D**
23	**E**	23	**D**	23	**A**	23	**A**
24	**B**	24	**B**	24	**B**	24	**B**
25	**B**	25	**B**	25	**E**	25	**A**

X CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel I

1. (B) Se puede realizar la suma con cuidado pero no es necesario ya que sólo nos piden sus últimas cifras. La cifra de las unidades es el resultado de sumar seis nueves, es decir, $6\times 9=54$, será un 4 y "me llevo 5". La cifra de las decenas es el resultado de sumar cinco nueves y sumarle las 5 que me llevaba: $5\times 9+5=50$, por tanto, será un 0 y me llevo 5. La suma total acaba pues en 04 y la única solución que acaba en 04 es la B.

2. (B) Los años no bisiestos tienen 365 días, es decir, 52 semanas y un día $(365=52\times 7+1)$. Por tanto si estamos en un año no bisiesto y hoy fuera lunes, el próximo año, tal día como hoy sería martes. En los años bisiestos $(366=52\times 7+2)$ habría que avanzar dos días.

Entre 2005 y 2025 hay 20 años, de los cuales son bisiestos: 2008, 2012, 2016, 2020 y 2024. Es decir hay 15 años no bisiestos y 5 bisiestos. Por tanto el 1 de septiembre (jueves) se desplazará $15+5\times 2=25$ días de la semana, o sea, 3 semanas y 4 días, esto es, pasará de ser jueves a ser lunes.

3. (C) El primer múltiplo de 3 comprendido entre 200 y 700 es el 201 $(201=67\times 3)$ y el último es 699 $(699=233\times 3)$. Sólo nos falta contar cuántos números hay desde el 67 hasta el 233 para encontrar todos los múltiplos de 3. Esto es ya muy fácil, hay exactamente $233-67+1=167$. (Fíjate que hay que sumar 1 porque si no estaríamos desechando al 67)

4. (B) La fracción que representa al número de escaños del partido MPM es $\frac{18}{270}$ que es equivalente a la fracción $\frac{1}{15}$ (dividiendo numerador y denominador entre 18). Así pues el MPM tiene una representación de un quinceavo del parlamento. Por tanto en un semicírculo de 180º le corresponderá un sector de $\frac{180^\circ}{15}=12^\circ$.

5. (D) Si sumamos los dos paquetes de los que nos habla el problema vemos que siete cuadernos y siete lápices cuestan en total 21 € $(12+9)$. Si calculamos su séptima parte, tenemos que un cuaderno y un lápiz cuestan juntos 3 € $(21:7=3)$. Y si multiplicamos por 3 ya tenemos la respuesta: tres cuadernos y tres lápices cuestan 9 € (3×3).

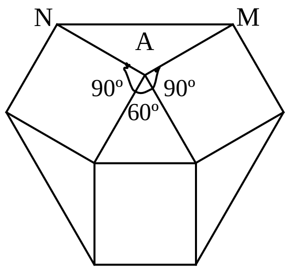
6. (A) En este tipo de problemas es bueno estudiar algunos ejemplos para obtener pistas que nos ayuden a encontrar la solución. Las respuestas B, D y E dicen que al multiplicar un entero por sí mismo se obtendría un número divisible por 2. Y esto es claramente falso ya que si pensamos, por ejemplo, en el 3 tenemos que $3 \times 3 = 9$ que no es divisible por 2. La respuesta C tampoco es válida porque, por ejemplo, $4 \times 4 = 16$ no es divisible por 3.
La respuesta correcta, por descarte, es la A (evidentemente cualquier cuadrado perfecto es divisible por 1 y no necesariamente por 2 como ocurre con $3 \times 3 = 9$).

7. (E) Ejemplos de números *ascendentes* son 25, 36, 59, etc, siempre que la cifra de las decenas sea menor que la de las unidades. Para que sea par, su cifra de las unidades debe ser par. Estudiemos los casos posibles:
La cifra de las unidades no puede ser 0, ya que el número no podría ser *ascendente*.
Si la cifra de las unidades es 2, el único número *ascendente* es 12.
Si la cifra de las unidades es 4, hay tres números *ascendentes*: 14, 24 y 34.
Si la cifra de las unidades es 6, hay cinco números *ascendentes*.
Y si la cifra de las unidades es 8, hay siete números *ascendentes*.
Lo que hace un total de $1+3+5+7=16$ números *ascendentes* pares.

8. (D) Como el triángulo es equilátero, cada uno de sus ángulos mide 60º. Vamos a hallar primero el ángulo $M\hat{A}N$. Como un ángulo completo mide 360º observamos que

$90º+60º+90º+M\hat{A}N = 360º$, es decir,

$240º+M\hat{A}N = 360º \Rightarrow M\hat{A}N = 120º$.



El triángulo *MAN* es isósceles ya que tiene dos lados iguales (los lados del cuadrado) y sus ángulos en *M* y *N* han de ser también iguales. Como los ángulos de cualquier triángulo suman siempre 180º, vemos que en el triángulo *MAN* tenemos que dos ángulos iguales más 120º ha de sumar 180º y por tanto, los dos ángulos iguales suman 60º y cada uno de ellos mide pues 30º. Ya está, $A\hat{M}N = 30º$.

9. (D) Un número es par si acaba en cifra par y para que sea capicúa, la cifra de las unidades y de las centenas debe ser la misma. Por tanto, los números pares capicúas de tres cifras serán de estas cuatro formas: 2□2; 4□4; 6□6 y 8□8. (Fíjate que la última cifra no puedes ser 0 porque entonces tendría sólo dos cifras 0□0.) En cada cuadradito podemos escribir todas las cifras desde el 0 hasta el 9, así que habrá 10 capicúas de cada una de las cuatro formas explicadas, lo que hacen un total de 40 capicúas pares de tres cifras.

10. (C) Vamos a realizar todas esas multiplicaciones teniendo cuidado con las comas:

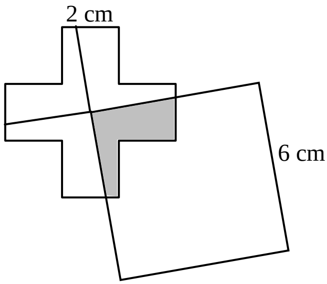
A) $0{,}32\times 0{,}05=0{,}016$ B) $0{,}008\times 0{,}125=0{,}001$

C) $0{,}025\times 0{,}8=0{,}02$ D) $0{,}1\times 0{,}1=0{,}01$

E) $0{,}04\times 0{,}400.016$

El mayor de todos es ellos $0{,}02$.

11. (D) Como un diámetro equivale a dos radios, cuatro diámetros son ocho radios. El enunciado nos dice pues que once radios suman 132 cm por lo que un radio mide $132:11=12$ cm.

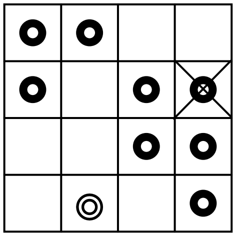


12. (C) Si dibujamos dos segmentos auxiliares vemos que la zona sombreada es justamente la cuarta parte de la cruz. Por tanto nos bastará con hallar el área de la cruz y luego dividirla entre cuatro.
La cruz está formada por cinco cuadraditos de lado 2 cm, así pues su área será de 20 cm^2 y la zona sombreada tendrá un área de 5 cm^2 $(20:4=5)$.

13. (B) Contemos sin prisas. Los números de dos cifras que tiene al menos un cinco son: 50, 51, 52, … 58, 59 y también el 15, 25,…, 85 y 95. En total hay 18 (ojo con contar el 55 dos veces). Los números cuyas dos cifras suman 10 son: 19, 91, 28, 82, 37, 73, 46, 64 y 55 (otra vez lo mismo, no cuentes el 55 que ya está incluido anteriormente). Lo que hace un total de 26 números.

14. (D) Primero calculemos cuántas cifras tiene el número 1234 … 979899: del 1 al 9 hay 9 cifras, y del 10 al 99 hay 178 (89 números por 2 cifras cada uno), lo que hace un total de 188 cifras. En cada jugada se rotulan tres cifras (dos Antonio y una Beatriz).

Como $188 = 62 \times 3 + 2$ significa que justo antes de encontrarse, Beatriz habrá rotulado 62 cifras y Antonio el doble. Veamos dónde se quedará Beatriz. Como ella rotula cifras que pertenecen a números de dos cifras, habrá rotulado las dos cifras de los últimos 31 números y el siguiente que le tocaría sería el 68 $(99 - 31 = 68)$ que es el número en el que se encuentran los dos amigos.



15. (B) Los puntos que habrá que mover son aquellos que ocupen una cuadrícula que afectan a una fila y a una columna con tres puntos. Es el marcado con un aspa. Y habrá que moverlo a una cuadrícula que afecte a una fila y a una columna con un solo punto (es el blanco). De esta manera, ya todas las filas y columnas tienen dos puntos. Así pues basta con mover un solo punto.

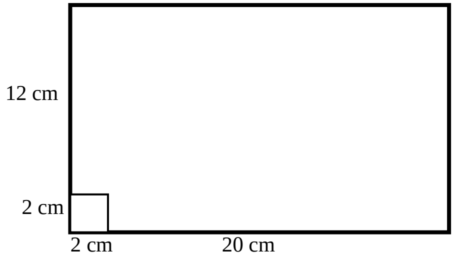
16. (C) Como Pedro obtuvo el 11º mejor resultado, entonces hubo 10 corredores que quedaron por delante de él. De igual manera, como Pedro tuvo el 11º peor resultado, hubo 10 corredores por detrás de él. En total participaron 10 corredores, más otros 10, más Pedro, es decir 21 participantes.

17. (E) La media de dos números es su suma dividida entre dos, es decir, la mitad de su suma. Para que la media de dos números sea 2006, su suma ha de ser el doble, es decir, 4012. Y ya sólo hay que buscar un número que sumado con 1000 dé 4012. Este número es 3012. En efecto: $(1000 + 3012) : 2 = 4012 : 2 = 2006$.

18. (C) Las niñas sólo están en las parejas numeradas con un número impar, así que basta con averiguar cuántos números impares hay desde el 1 al 13. Estos números son: 1, 3, 5, 7, 9 11 y 13, es decir siete. Así pues, hay 7 niñas y 19 niños.

19. (C) Dividiremos 1000 entre 2 todas las veces que se pueda y luego entre 5. $1000 : 2 = 500 \rightarrow 500 : 2 = 250 \rightarrow 250 : 2 = 125$ que ya no se puede dividir entre 2. Ahora entre 5:
$125 : 5 = 25 \rightarrow 25 : 5 = 5 \rightarrow 5 : 5 = 1$. Ya está, hemos dividido tres veces entre 2 y tres veces entre 5, así que: $1000 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$.

20. (D) Un cuadrado de 8 cm de perímetro tiene 2 cm de lado. Así pues en el largo del rectángulo caben 10 cuadrados $(20:2=10)$ y en el ancho caben 6 $(12:2=6)$, lo que hacen un total de 60 cuadrados $(10\times6=60)$.



21. (C) Es fácil observar que las figuras A, B, D y E tienen el mismo perímetro que el rectángulo que las rodea. La única de perímetro mayor es la C.

22. (B) Una escalera de un peldaño tiene 1 cuadradito; una de dos peldaños tiene $1+2=3$ cuadraditos; una de tres peldaños, $1+2+3=6$ cuadraditos, etc. Siguiendo esta pauta vemos que: $1+2+3+4=10$; $1+2+3+4+5=15$; y por fin, $1+2+3+4+5+6=21$. La escalera buscada tiene 6 peldaños.

23. (C) Quitando el voto de más de Beatriz, habría 24 votos, de los cuales Beatriz tiene el triple que Antonio. Si dividimos 24 entre 4, una parte serán los votos de Antonio y las otras tres partes serán votos de Beatriz. Así que Antonio obtuvo $24:4=6$ votos y Beatriz el resto de los votos: $25-6=19$.

24. (D) Como la suma de los ángulos de un triángulo es 180º, la suma de los dos ángulos que nos faltan es 160º. Si uno es el cuádruple de otro, dividimos 160º en 5 partes iguales (una parte para uno y las otras cuatro para el otro) y así obtenemos su medida: $\frac{160^{\circ}}{5}=32^{\circ}$ y $4\times32^{\circ}=128^{\circ}$. El mayor de los tres ángulos es 128º.

25. (D) 2 horas y 20 minutos son 140 minutos. El corredor recorre 42 km en 140 minutos, así pues, en 1 minuto recorre $42:140=0{,}3$ km. Por tanto, en una hora (60 minutos) recorrerá $0{,}3\times60=18$ km.

X CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel II

1. (B) Un número es múltiplo de 9 (o divisible por 9) cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 9.

Los números capicúas de 4 cifras son de la forma **abba**. Procediendo de una forma ordenada (hemos empezado con los números de la forma $1--1$ y hemos ido rellenando los guiones con 00, 11, 22, ... 99; hemos seguido con $2--2$, y así sucesivamente hasta llegar a $9--9$.

De esta manera hemos localizado que hay 10 números que cumplen las condiciones del enunciado, y son: 1881, 2772, 3663, 4554, 5445, 6336, 7229, 8118, 9009 y 9999.

Si te fijas en estos números, el procedimiento antes expuesto se puede abreviar una vez localizado el primer número.¿Has visto cómo? (si aumento en una unidad los extremos ...). También podemos empezar por el último.

2. (B) Mediante una regla de tres, es decir, utilizando la proporcionalidad entre la medida del ángulo central del sector y el número de diputados.

$$\left.\begin{array}{lll} 270 \text{ diputados} & ----- & 180^{\circ} \\ 18 \quad '' & ----- & x \end{array}\right\} \; x = \frac{18 \times 180^{\circ}}{270} = 12^{\circ}$$

3. (A) Se nos dice que un nº de dos cifras, **ab**, es ascendente si a < b.

Sabemos que un nº es múltiplo de 3 (o divisible por 3) cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

Así, los números que cumplen las dos condiciones son: 12, 15, 18, 24, 27, 36, 39, 45, 48, 57, 69, 78, que hacen un total de 12 números.

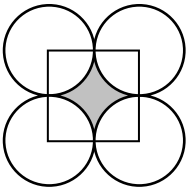
Para escribirlos hemos procedido de una forma ordenada, escribiendo primero los que empiezan por 1, luego por 2, 3, y así sucesivamente.

4. (B) Llamemos **a** y **b** a los dos números. Apliquemos la siguiente propiedad:

$a \times b = \text{m.c.d.}(a, b) \times \text{m.c.m.}(a, b) = (2 \times 5) \times (2^3 \times 3 \times 5^2) = 2^4 \times 3 \times 5^3 =$
$= 16 \times 3 \times 125 = 6000$.

5. (C) Observando la figura vemos que el área pedida se puede obtener como diferencia entre el área del cuadrado (que resulta de unir los centros de las cuatro circunferencias) y 4 veces el área de un cuarto de un círculo (lo que equivale al área de un círculo completo). Así:

$A = 2^2 - \pi \cdot 1^2 = 4 - \pi$



6. (C) Llamemos *x* al número de aciertos que Juan tuvo cuando lanzó 20 tiros a canasta e *y* al total de aciertos cuando lanzó 25 tiros en total (20+5).
Podemos calcularlos de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{l} 100 \text{------} 55 \\ 20 \text{-------} x \end{array}\right\} x = \frac{20 \times 55}{100} = 11$$

$$\left.\begin{array}{l} 100 \text{------} 56 \\ 25 \text{-------} y \end{array}\right\} y = \frac{25 \times 56}{100} = 14$$

Luego $y - x = 14 - 11 = 3$.

7. (D) Si llamamos *a, b, c, d* y *e* a los 5 números, se tiene:

$$\frac{a+b+c+d+e}{5} = 54 \,;\, a+b+c+d+e = 5 \times 54 = 270$$

$$\frac{a+b}{2} = 48 \,;\, a+b = 2 \times 48 = 96$$

Luego $c + d + e = 270 - 96 = 174$

$$\text{Media aritmética de los 3 últimos números} = \frac{c+d+e}{3} = \frac{174}{3} = 58$$

8. (E) Calculamos el número de horas que trabajó Alicia en total:

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)+\frac{50}{60}+\left(2+\frac{25}{60}\right)+\frac{1}{2} = 3+\frac{1}{4}+\frac{5}{6}+\frac{5}{12}+\frac{1}{2} = \frac{36+3+10+5+6}{12} = \frac{60}{12} = 5$$

Por tanto, Alicia ganó 5 × 3 = 15 euros.

9. (C) Las distintas opciones que cumplen las reglas del enunciado son:

$\underline{a}$ $\underline{12}$ $\underline{2}$ $\underline{6}$ $\underline{b}$

$\underline{a}$ $\underline{6}$ $\underline{12}$ $\underline{2}$ $\underline{b}$

$\underline{a}$ $\underline{12}$ $\underline{6}$ $\underline{2}$ $\underline{b}$

En la posición *a* puede ir un 4 o un 9 y en la *b* un 9 o un 4.

Luego la media de los extremos es:

$$\frac{4\times6+9\times6}{12}=\frac{6\times(4+9)}{6\times2}=\frac{4+9}{2}=6{,}5$$

10.(B) A partir del 213 (inclusive) vamos analizando si se trata de un número primo.

Quedan descartados los números pares ya que sabemos que son divisibles por 2, los que terminan en 5 pues son divisibles por 5 y los que terminan en 0 al ser divisibles por 2 y por 5.

Llegamos así al primer "sospechoso" (de ser primo, claro), el 217; comprobamos que la división entre 7 da exacta, luego no es primo.

El siguiente "sospechoso" podría ser el 219, pero rápidamente queda descartado al aplicarle el criterio de divisibilidad por 3; no lo había dicho antes pero por esta misma razón quedó descartado el 213.

Pasamos al 221, que también queda descartado al hacer la división entre 13 que da exacta.

El siguiente en la lista de "sospechosos" sería el 223. Y por fin, este resulta ser un número primo (lo hemos ido dividiendo por los números primos hasta llegar a dividirlo entre 17, resultando un cociente de 13, menor o igual –en este caso menor– que el divisor, sin que ninguna división haya sido exacta).

11.(D) Escribamos los posibles resultados de la 1ª y 2ª ruletas y su producto:

1 × 1 = 1	2 × 1 = **2**	3 × 1 = 3	4 × 1 = **4**
1 × 2 = **2**	2 × 2 = **4**	3 × 2 = **6**	4 × 2 = **8**
1 × 3 = 3	2 × 3 = **6**	3 × 3 = 9	4 × 3 = **12**

Probabilidad de que el producto sea par $=\dfrac{8}{12}=\dfrac{2}{3}$

12.(E) $\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}\right)=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{2}{8}-\dfrac{1}{8}\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{16}$

13.(B) Calculamos el área de los distintos cuadriláteros. En los casos A, B y C podemos hacerlo mediante la diferencia entre el área total de la cuadrícula (4 × 4 = 16) y las zonas (triángulos rectángulos) comprendidas entre el cuadrilátero y el borde de la cuadrícula.

A: $16-\frac{3\times3}{2}-\frac{2\times1}{2}-\frac{2\times2}{2}-\frac{1\times2}{2}=16-\frac{9}{2}-1-2-1=7{,}5$

B: $16-\frac{3\times1}{2}-\frac{2\times3}{2}-\frac{2\times1}{2}-\frac{1\times3}{2}=16-\frac{3}{2}-3-1-\frac{3}{2}=9$

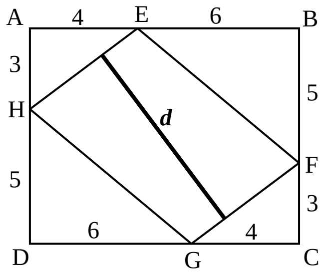
C: $16-\frac{3\times1}{2}-\frac{2\times3}{2}-\frac{2\times2}{2}-\frac{1\times2}{2}=16-\frac{3}{2}-3-2-1=8{,}5$

El caso D se puede calcular como anteriormente, si bien es más rápido hacerlo como suma de dos triángulos:

D: $\frac{4\times1}{2}+\frac{4\times3}{2}=2+6=8$

En el caso E, por simple observación, se tiene: 16 – 8 = 8.

14.(C) Podemos calcular el área del paralelogramo EFGH como diferencia entre el área del rectángulo ABCD y el área de los triángulos (rectángulos) comprendidos entre este paralelogramo y el rectángulo. Así:



$$A=10\times8-\frac{4\times3}{2}-\frac{6\times5}{2}-\frac{4\times3}{2}-\frac{6\times5}{2}=80-6-15-6-15=38$$

Por otro lado sabemos que el área de un paralelogramo se puede calcular como:

$A = b \cdot h$ (base por altura)

En nuestro caso: b = FG = $\sqrt{4^2+3^2}=5$, b = HE = FG = 5, h = d, luego:

$$5\,\mathrm{d}=38;\ \mathrm{d}=\frac{38}{5}=7{,}6$$

15.(C) Analicemos las distintas operaciones:

1. No siempre; si $a < 1 \Rightarrow a^2 < a$

2. No siempre; si $a > 1 \Rightarrow \dfrac{1}{a} < a$

3. Siempre. $a(a+1) = a^2 + a > a$

4. No siempre; si $a > 1 \Rightarrow \sqrt{a} < a$

5. Siempre, porque $a + \dfrac{1}{a} > 1 \Rightarrow a\left(a + \dfrac{1}{a}\right) > a \cdot 1 = a$

16.(B) 1728 es cubo perfecto, ya que $1728 = 2^6 \times 3^3 = (2^2 \times 3)^3$.

Si lo multiplicamos por 3 tendremos un cuadrado perfecto, ya que:

$1728 \times 3 = (2^6 \times 3^3) \times 3 = 2^6 \times 3^4 = (2^3 \times 3^2)^2 = 72^2$.

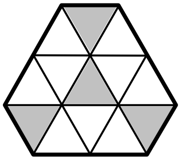
17.(C) Hay que tener en cuenta que para que un número sea múltiplo de 6, (2×3), es necesario que sea múltiplo de 2 y de 3; que si un número es múltiplo de 4, también lo es de 2, y si es múltiplo de 8, también lo es de 2 y de 4.

Hacemos la siguiente descomposición de los números dados en las distintas opciones: A: $24 = 3 \times 8$, B: $30 = 2 \times 3 \times 5$, C: $40 = 5 \times 8$, D: $50 = 2 \times 5^2$, E: $60 = 3 \times 4 \times 5$.

Analizando estas opciones, la C es falsa con seguridad, ya que ser múltiplo de 40 equivale a que sea múltiplo de 5 y de 8. El ser múltiplo de 8 implica, como se ha dicho antes, que es múltiplo de 2 y también de 4. Esto equivale a cuatro "síes".

Como en el enunciado se dice que responde 5 veces que sí, nos quedan dos posibilidades: o que el sí restante correspondiese a múltiplo de 3 (y como antes se ha dicho que es múltiplo de 2, también lo sería de 6, y por tanto habría 6 respuestas "sí") o que el sí correspondiese a múltiplo de 6 (lo que implica también de 3 y estaríamos en el mismo caso anterior).

18.(E) Como se observa, la figura hexagonal se puede descomponer en 13 triángulos equiláteros iguales (de área 4 cm^2 cada uno), luego A = 4 × 13 = 52.



19.(D) Para que un número sea múltiplo de 12 (3 × 4), es necesario que lo sea de 3 y de 4.

Podemos tener en cuenta los criterios de divisibilidad por 3 (cuando lo es la suma de sus cifras) y por 4 (cuando las dos últimas cifras son ceros o forman un número múltiplo de 4).

Procederemos de forma ordenada para ver qué números de la forma **a72b**, son múltiplos de 12. Ponemos en lugar de **a** un 1 y vamos dando a **b** valores desde 0 hasta 9; luego ponemos en lugar de **a** un 2 y a la **b** damos valores desde 0 hasta 9, y así sucesivamente hasta tener en el lugar de la **a** un 9.

De esta manera obtenemos que son múltiplos de 12 los números 1728, 2724, 3720, 4728, 5724, 6720, 7728, 8724 y 9720, que hacen un total de 9 números.

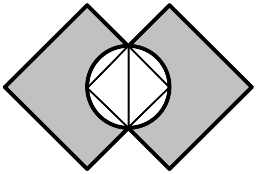
Muchos ya se habrán dado cuenta de que el largo proceso expuesto se puede sustituir por otro más rápido en el que se tendrá en cuenta que:

- La suma de 7+2=9 es múltiplo de 3, luego bastará con que a + b sea múltiplo de 3.
- Las dos últimas cifras del nº han de ser 20, 24 o 28 (para que sea múltiplo de 4).

Así, si la **b** es 0, la **a** puede ser 3, 6 ó 9; si la **b** es 4, la **a** puede ser 2, 5 u 8; y si la **b** es 8, la **a** puede ser 1, 4 ó 7.

20.(D) Calculamos el diámetro del círculo, por aplicación del teorema de Pitágoras según se desprende de la figura:

$$d = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2};\ r = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$



Área de la región sombreada:

$$4^2 + 4^2 - 2^2 - \pi\left(\sqrt{2}\right)^2 = 16 + 16 - 4 - 2\pi = 28 - 2\pi$$

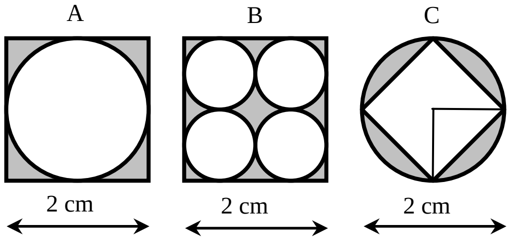
(Para ver por qué se resta el área del cuadrado de lado 2 y la del círculo de radio $\sqrt{2}$, puedes rayar con distinto color las áreas de los cuadrados de lado 4).

21.(C) Calculamos el área de las distintas coronas circulares (indicamos los pasos para la primera; en las demás ponemos solo el resultado):

A: $\pi\ (R^2 - r^2) = \pi\ (4^2 - 3^2) = \pi\ (16 - 9) = 7\pi$

B: 9π , C: 12π , D: 11π , E: 8π

22.(C) Calculamos el área de la zona sombreada mediante diferencias:



A: $2^2 - \pi \cdot 1^2 = 4 - \pi = 0{,}86\ ...$

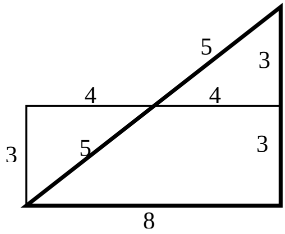
B: $2^2 - 4\pi \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 4 - 4\pi \cdot \dfrac{1}{4} = 4 - \pi$

C: $\pi \cdot 1^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = \pi - 2 = 1{,}14\ ...$

En el caso de la figura C, se ha calculado previamente el lado del cuadrado aplicando del teorema de Pitágoras;

según se desprende de la figura: $l = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

23.(A) Con las dos piezas en que hemos dividido la figura dada, formamos el triángulo rectángulo de la siguiente figura:



24.(A) Partimos de la conocida fórmula de la velocidad:

$$v = \frac{e}{t}\,;\ v \cdot t = e\,;\ t = \frac{e}{v}$$

Llamemos *x* al espacio recorrido por cada uno de los cinco coches.
Tiempo que tarda cada coche:

A: $t_A = \dfrac{x}{60}$

B: $t_B = \dfrac{\frac{x}{2}}{40} + \dfrac{\frac{x}{2}}{80} = \dfrac{x}{80} + \dfrac{x}{160} = \dfrac{2x + x}{160} = \dfrac{3x}{160} = \dfrac{x}{\frac{160}{3}} = \dfrac{x}{53{,}3\ldots}$

C: $t_C = \dfrac{\frac{2}{3}x}{90} + \dfrac{\frac{1}{3}x}{30} = \dfrac{2x}{270} + \dfrac{x}{90} = \dfrac{2x + 3x}{270} = \dfrac{5x}{270} = \dfrac{x}{\frac{270}{5}} = \dfrac{x}{54}$

D: $t_D = \dfrac{\frac{1}{3}x}{90} + \dfrac{\frac{2}{3}x}{30} = \dfrac{x}{270} + \dfrac{2x}{90} = \dfrac{x + 6x}{270} = \dfrac{7x}{270} = \dfrac{x}{\frac{270}{7}} = \dfrac{x}{38{,}5\ldots}$

E: $t_E = \dfrac{\frac{1}{4}x}{100} + \dfrac{\frac{3}{4}x}{20} = \dfrac{x}{400} + \dfrac{3x}{80} = \dfrac{x + 15x}{400} = \dfrac{16x}{400} = \dfrac{x}{\frac{400}{16}} = \dfrac{x}{25}$

Es menor la fracción que tiene mayor denominador (si los numeradores son iguales), luego tardó menos el coche A.

25.(A) El ángulo central formado por los dos radios de la figura mide 1 radián.
Área del círculo = $\pi \cdot 1^2 = \pi$ cm^2.

$$\left.\begin{array}{lcl} 2\pi \text{ rad} & \text{--------} & \pi \text{ cm}^2 \\ 1 & \text{--------} & x \end{array}\right\}\ x = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}\ \text{cm}^2$$

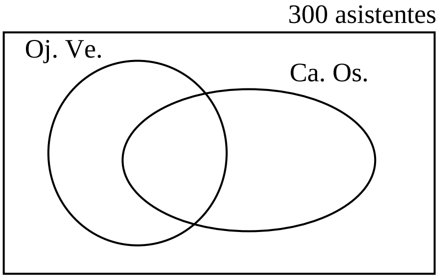
X CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel III

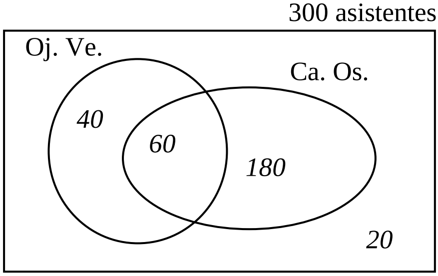
1. (B) Los capicúas de tres cifras son de la forma *ABA*, y como han de ser múltiplos de tres, entonces $A + B + A$ debe ser también múltiplo de tres. Con estas condiciones, ya podemos encontrarlos todos:
111, 141, 171, 222, 252, 282, 303, 333, 363, 393, 414, 444, 474, 525, 555, 585, 606, 636, 666, 696, 717, 747, 777, 828, 858, 888, 909, 939, 969, 999.
Lo que hacen un total de 30.

2. (C) Si con un quinto de su dinero compra un tercio de los CD, entonces, todos los CD (tres tercios) los podrá comprar con el triple del dinero, es decir con tres quintos. Así pues, después de comprarlos le quedan dos quintos de su dinero.

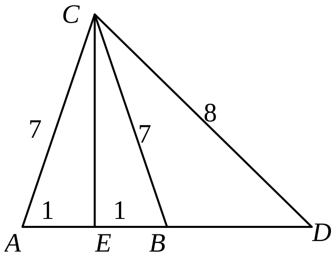
3. (A) En este tipo de problemas en el que intervienen proporciones o porcentajes es muy útil trabajar con cantidades concretas y luego, al final, hallar la proporción o el porcentaje pedido. En este problema es acertado suponer que asisten 300 personas a la reunión ya que es múltiplo de 3 y de 100. Utilizaremos unos sencillos diagramas.



Ya solo falta ir rellenando las regiones con su cantidad correspondiente. Es importante darse cuenta con qué dato debemos empezar: el 20% (20% de 300, es decir, 60 personas) tienen ojos verdes y cabello oscuro. Pondremos 60 en la intersección. Como el 80% (240) tienen cabello oscuro, debemos colocar 180 en la parte que queda, pues ya hay 60 con cabello oscuro. Así, poco a poco, hasta llegar a:



Al final quedan 20 asistentes que ni tienen ojos verdes ni cabello oscuro, lo que hace una proporción de $\frac{20}{300} = \frac{1}{15}$.



4. (A) Al igual que en muchísimos otros problemas geométricos, a parte de plasmar en un dibujo los datos del enunciado, debemos trazar alguna línea auxiliar, en este caso, nos es suficiente con trazar la altura *CE* del triángulo *ABC* y trabajaremos en los dos triángulos rectángulos *CEB* y *CED*.
En el triángulo *CEB* calculamos el cateto *CE* con el teorema de Pitágoras:
$CE^2 + 1^2 = 7^2 \rightarrow CE = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$
Hallado ya *CE*, podemos encontrar el valor del cateto *ED* en el triángulo *CED*:
$ED^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2 = 8^2 \Rightarrow ED = 4$
Por tanto $BD = ED - EB = 4 - 1 = 3$

5. (E) Estudiemos cómo van variando el área y el perímetro de los cuatro primeros *crucigramas* para intentar encontrar alguna relación en su formación:

Crucigrama	1º	2º	3º	4º
Área (cm^2)	1	5	13	25
Perímetro (cm)	4	12	20	28

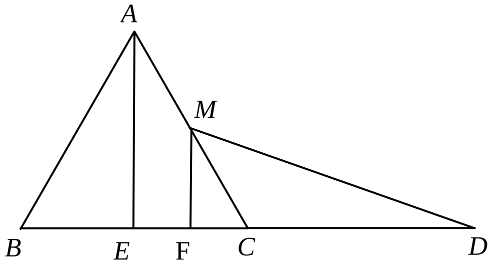
Y ya se ve que el área va aumentando en múltiplos de 4, es decir, más 4, más 8, más 12, etc. Y el perímetro va aumentando en 8 a cada paso. Podemos pues continuar la serie sin necesidad de dibujar los *crucigramas*:

Crucigrama	1º	2º	3º	4º	5º	6º
Área (cm^2)	1	5	13	25	41	61
Perímetro (cm)	4	12	20	28	36	44

El perímetro del *crucigrama* de área 61 cm^2 es 44 cm.
Si nos hubieran pedido estudiar *crucigramas* mucho mayores, tendríamos que encontrar su ley de formación. El *crucigrama* que ocupa el lugar *n* tiene:

Área: $A_n = (n+1)^2 - 3$ Perímetro: $P_n = 8n - 4$

6. (C) Del triángulo *CDM* sabemos que su base *CD* mide 2 y por tanto sólo nos falta averiguar su altura *MF*. Los triángulos rectángulos *AEC* y *MFC* son claramente semejantes, por tanto:



$$\frac{AC}{MC} = \frac{EC}{FC} \rightarrow \frac{2}{1} = \frac{1}{FC}$$

de lo que concluimos que $FC = \dfrac{1}{2}$ y ya podemos calcular el cateto *MF*:

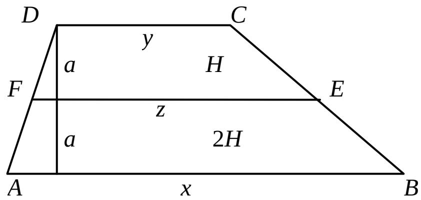
$$MF^2 + FC^2 = MC^2 \rightarrow MF^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 \rightarrow MF = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

El área del triángulo *CDM* es $\dfrac{CD \times MF}{2} = \dfrac{2 \times \sqrt{3}/2}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

7. (C) Habrá que buscar alguna relación entre la segunda suma y la primera, y a simple vista se ve que las bases de la segunda son el doble que las de la primera:

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + 50^2 = (2 \times 1)^2 + (2 \times 2)^2 + (2 \times 3)^2 + ... + (2 \times 25)^2 =$$
$$= 2^2 \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 25^2) = 4S$$

8. (C) Al ser *E* y *F* puntos medios de los lados *BC* y *AD*, entonces *FE* es paralelo a las bases del trapecio *ABCD* y además lo divide en dos trapecios de igual altura (*a*).



Para manejarnos mejor utilizaremos la nomenclatura del dibujo.

Escribamos ahora el área de los tres trapecios que tenemos:

Área de *ABEF*: $2H = \dfrac{x+z}{2} \cdot a \rightarrow 4\dfrac{H}{a} = x + z$

Área de *FECD*: $H = \dfrac{y+z}{2} \cdot a \rightarrow 2\dfrac{H}{a} = y + z$

Área de *ABCD*: $3H = \frac{x+y}{2} \cdot 2a \rightarrow 3\frac{H}{a} = x + y$

Para más comodidad, llamamos P a $\frac{H}{a}$ y tenemos así el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 4P = x + z \\ 2P = y + z \\ 3P = x + y \end{array}\right\} \xrightarrow{E_1 - 2E_2} \left.\begin{array}{l} 2P = x - y \\ 3P = x + y \end{array}\right\}$$ y al resolver este sencillo sistema obtenemos

que: $x = \frac{5P}{2}$ e $y = \frac{P}{2}$. Ya podemos contestar:

$$\frac{AB}{DC} = \frac{x}{y} = \frac{(5P)/2}{P/2} = 5$$

9. (C) Para comparar raíces se puede intentar extraer todos los factores posibles del radicando o elevarlas al cuadrado y comparar dichos cuadrados. Optaremos por la segunda opción que es más viable aquí:

$\left(4\sqrt{50}\right)^2 = 16 \times 50 = 800$ $\quad \left(7\sqrt{20}\right)^2 = 49 \times 20 = 980$

$\left(5\sqrt{40}\right)^2 = 25 \times 40 = 1000$ $\quad 31^2 = 961$ $\quad \left(\sqrt{951}\right)^2 = 951$

El mayor número es $5\sqrt{40}$ ya que su cuadrado es el mayor.

10. (A) Necesitamos conocer otro punto de la parábola para poder resolver el problema. Como el vértice de la parábola es $V(2,-1)$, sabemos que es simétrica respecto al eje vertical $x = 2$. Así pues, el simétrico del punto $P(1,1)$ respecto al eje $x = 2$ tendrá la misma ordenada $y = 1$. Ya tenemos el tercer punto: $Q(3,1)$. (Observa que en el eje X, el simétrico de 1 respecto a 2 es 3)

La parábola $y = ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos $V(2,-1)$, $P(1,1)$ y $Q(3,1)$ con lo que formamos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} V(2,-1) \rightarrow 4a + 2b + c = -1 \\ P(1,1) \rightarrow \quad a + b + c = 1 \\ Q(3,1) \rightarrow \quad 9a + 3b + c = 1 \end{array}\right\}$$

para calcular *c*, eliminemos *b* de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{l} E_1 - 2E_2 \rightarrow 2a - c = -3 \\ E_3 - 3E_2 \rightarrow 6a - 2c = -2 \end{array}\right\} \text{y ahora } E_2 - 3E_1 \rightarrow c = 7$$

11. (D) Como las velocidades de los chicos están en proporción de 2 a 3, podemos escribir que la velocidad de Pedro es $2v$ y la de Teresa es $3v$.

6 km

Pe. $\rightarrow 2v$ km/h $3v$ km/h $\leftarrow$ Te.

Cuando se encuentren habrán estado caminando el mismo tiempo *t*. Pedro habrá recorrido $2vt$ km y Teresa $3vt$ km, y además, la suma de sus distancias recorridas ha de ser necesariamente 6 km. Por tanto: $2vt + 3vt = 6 \rightarrow 5vt = 6$. Nos piden la distancia recorrida por Pedro que es $2vt$, así que como

$5vt = 6 \rightarrow vt = \dfrac{6}{5} \rightarrow 2vt = \dfrac{12}{5} = 2{,}4$ km.

12. (E) Es evidente que dados tres números consecutivos, uno de ellos, a la fuerza debe ser múltiplo de tres ya que éstos van de tres en tres. Hay dos casos:

IMPAR, PAR, IMPAR: Como la suma de tres consecutivos es igual al triple del central, entonces, es múltiplo de 6. ¿Qué ocurre con su producto? Si uno de los impares es el múltiplo de 3, entonces es claro que el producto es múltiplo 6. Si el múltiplo de 3 es el par, entonces ese número ya es múltiplo 6. Así pues, la suma multiplicada por el producto es múltiplo de 36 (6×6) .

PAR, IMPAR, PAR: La suma es múltiplo de 3 por ser igual al triple del central. ¿Y el producto? Si el impar es el múltiplo de 3, entonces el producto es múltiplo de 12 $(2 \times 3 \times 2)$. Si uno de los pares es el múltiplo de 3, entonces es múltiplo de 6 y al multiplicarlo por el otro par obtenemos un múltiplo de 12. Por tanto, la suma por el producto es también múltiplo 36 (3×12) .

13. (D) La suma será impar si los sumandos tienen distinta paridad, es decir, uno debe ser par y el otro impar. Así pues:

$$P(suma\,impar) = P(impar_1 \cap par_2) + P(par_1 \cap impar_2) = \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{2}{6}$$

Lo que hace un total de $\frac{20}{36} = \frac{5}{9}$.

14. (B) Se trata de calcular muchas hipotenusas de triángulos rectángulos. Podemos ahorrarnos un buen trabajo si nos damos cuenta de que el lado superior de cada cuadrilátero es igual en todos y por tanto podemos descartarlos. Calculemos el resto de las hipotenusas (en sentido horario empezando por arriba) de los polígonos y tenemos que:

A: $\sqrt{8} + \sqrt{8} + \sqrt{13}$ *B:* $\sqrt{8} + \sqrt{20} + 3$ *C:* $\sqrt{13} + \sqrt{2} + \sqrt{18}$

D: $\sqrt{8} + 2 + 5$ *E:* $\sqrt{8} + \sqrt{13} + \sqrt{10}$

Es claro que entre *A*, *B*, *D* y *E*, el mayor es *B*. Y comparando *B* y *C*, también se observa que *B* es el mayor.

15. (A) No hace falta resolver el sistema, de hecho no es eso lo que piden. Es muy sencillo:

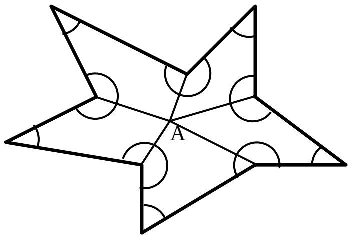
$$\begin{cases} a^2 + ab = 6 \\ b^2 + ab = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a\,(a+b) = 6 \\ b\,(a+b) = 2 \end{cases}$$ y dividiendo la primera ecuación entre la segunda (observa que $a+b$ no puede ser 0) vemos que $\frac{a}{b} = \frac{6}{2} = 3$.

16. (C) Todos los números son positivos salvo $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$ que ya lo descartamos. Estudiemos los otros cuatro:

$0{,}2^3 = 0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}008$ $0{,}3^2 = 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}09$

$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}25$ $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} = 0{,}\overset{\frown}{1}$. El mayor es 2^{-3}.

17. (A) Señalamos un punto A en el interior de la estrella y lo unimos con los vértices de los ángulos obtusos. Obtenemos de esta manera cinco cuadriláteros cuyos ángulos suman:
$5\times 360º = 1800º$. Si restamos los 360º del ángulo central, obtenemos la respuesta: $1800º - 360º = 1440º$.



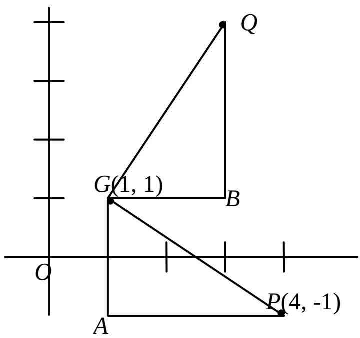
18. (E) Es un problema parecido al 7, habrá que buscar alguna relación entre la segunda suma y la primera. Las bases de la segunda son una unidad mayor que las de la primera:

$$2^2 + 12^2 + 22^2 + ... + 92^2 = (1+1)^2 + (11+1)^2 + (21+1)^2 + ... + (91+1)^2 =$$
$$= (1^2 + 1 + 2) + (11^2 + 1 + 22) + (21^2 + 1 + 42) + ... + (91^2 + 1 + 182) =$$
$= S + 3 + 33 + 43 + ... + 183$ y ya sólo falta calcular la suma de esa progresión aritmética, que es $\frac{3+183}{2}\times 10 = 930$. La respuesta es, por tanto, $S + 930$.

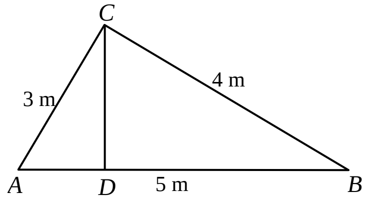
19. (E) Descomponemos 5445 en factores primos y así hallamos todos sus divisores primos: $5445 = 3^2 \times 5 \times 11^2$, es decir, los divisores primos de 5445 son 3, 5 y 11, cuya suma es 19.

20. (C) Lo mejor es hacer un dibujo cuidadoso. Una buena manera de plasmar un giro de 90º es ayudarse de un triángulo rectángulo. Si giramos el triángulo rectángulo GAP (cuyos catetos miden $GA = 2$ y $AP = 3$), obtenemos el triángulo rectángulo GBQ con $GB = 2$ y $BQ = 3$. Estamos buscando las coordenadas del punto Q que es el que resulta de girar P un ángulo de 90º. Y ya se ve claramente que

$$Q = (1+2, 1+3) = (3,4) .$$



21. (A) Lo primero que haremos será calcular la altura CD del triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 m.



Como los triángulos ACD y ABC son semejantes, entonces:

$$\frac{3}{5} = \frac{CD}{4} \to CD = \frac{12}{5}\text{ m}$$

El menor triángulo semejante al ABC de altura entera sobre la hipotenusa será el que tenga razón de semejanza 5. Sus catetos serán $3\times5=15$ m y $4\times5=20$ m. Su hipotenusa será 25 m y su altura 12 m.

El área del triángulo de catetos 15 y 20 m es: $\frac{15\times20}{2}=150\text{ m}^2$.

22. (A) Para que el número *abcd* sea múltiplo de 11 debe ocurrir una de estas tres cosas:
I. $a+c=b+d$. Es imposible ya que como $a<b$ y $c<d$, entonces: $a+c<b+d$
II. $a+c-(b+d)=11$. Que ya hemos visto que es imposible porque $a+c<b+d$.
III. $b+d-(a+c)=11$. Que también es imposible. Como c debe ser mayor que b, podemos decir que $c=b+x$, siendo x un entero positivo menor que 10. Entonces: $b+d-(a+c)=b+d-(a+b+x)=d-a-x$ y este resultado evidentemente nunca puede ser 11 ya que d, a y x son números entre 0 y 9.
Por tanto, ningún número ascendente de 4 cifras es múltiplo de 11.

23. (B) Operando primero los paréntesis vemos que:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\ldots\times\frac{8}{9}\times\frac{9}{10}$$

y ahora no te pongas a multiplicar como un robot, observa que se simplifican casi todos los numeradores con casi todos denominadores y al final queda $\frac{1}{10}=0{,}1$.

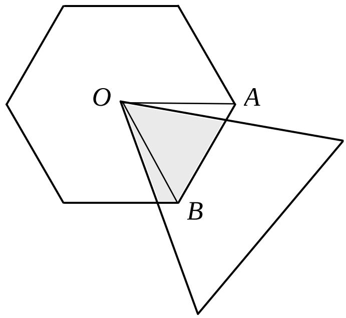
24. (E) Observa que $(0,2)^n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$ y que $10^{-6} = \left(\frac{1}{10}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \left(\frac{1}{5}\right)^6$. Resolvamos ahora la inecuación:

$$(0,2)^n < 10^{-6} \to \left(\frac{1}{5}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \left(\frac{1}{5}\right)^6 \to \left(\frac{1}{5}\right)^n : \left(\frac{1}{5}\right)^6 < \left(\frac{1}{2}\right)^6 \to$$

$$\to \left(\frac{1}{5}\right)^{n-6} < \frac{1}{64} \to 5^{n-6} > 64 \to n-6 > 2 \to n > 8$$

El primer natural mayor que 8 es $n = 9$.

25. (E) Todo consiste en convencerse de que la región sombreada tiene igual área que el triángulo *OAB*. (Lo que se quita por un lado se añade por otro). Es como si girásemos el triángulo grande hasta que sus lados pasen por los vértices del hexágono. Esto es así porque los ángulos de un triángulo equilátero miden 60º y en un hexágono, el ángulo interior que abarca un lado del mismo, también mide 60º.



El área del triángulo *OAB* es la sexta parte del área total del hexágono, es decir, $\frac{24}{6} = 4$ m^2.

X CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel IV

1. (B) La parábola tiene un mínimo $\Rightarrow$ a > 0. Además tiene dos raíces reales positivas

$$\Rightarrow \frac{b}{a} < 0 \ \text{ y } \ \frac{c}{a} > 0$$

2. (A) $A - B = 2005^{2006}$
$B - C = 2005^{2005}$
$C - D = 2002 \times 2005^{2005}$
$D - E = 2005^{2005}$
$E - F = 2004 \times 2005^{2004}$.

3. (B) La pendiente de la recta, m, es negativa porque la recta es decreciente y en valor absoluto menor que la unidad, ya que la recta está menos inclinada que la bisectriz del 2º y 4º cuadrantes. Es decir, $-1 < m < 0$.
La ordenada en el origen, n, es positiva y menor que la unidad.
Es decir, $0 < n < 1$.
Por tanto $-1 < m \cdot n < 0$

4. (A) $$\begin{cases} a+b=4 \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ \dfrac{a+b}{ab}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ 2ab=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+b)^2=16 \\ 2ab=4 \end{cases}$$

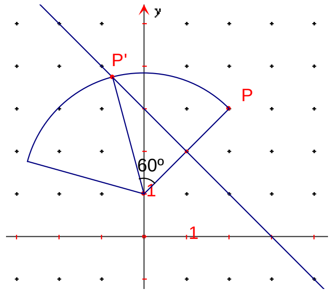
Y restando las dos ecuaciones miembro a miembro, tenemos $a^2 + b^2 = 12$

5. (C) La parábola $\pi \equiv y = x^2 - 6x + 13$ se puede escribir también $y = (x-3)^2 + 4$.
El simétrico del punto P(x,y) respecto de la recta x = 2 es P'(4 – x, y)
La parábola simétrica de π respecto de x = 2 es $y = (4 - x - 3)^2 + 4 = x^2 - 2x + 5$.

6. (B) La diferencia de las áreas de los triángulos ADE y BCE es la misma que la diferencia de los triángulos ABE y ABC.

$$A_{ADE} - A_{BDC} = A_{ABE} - A_{ABC} = \frac{4\times 8}{2} - \frac{4\times 6}{2} = 4$$

7. (A) El punto resultante está en la mediatriz del segmento cuyos extremos son P y el centro de giro, es decir, la recta x + y = 3



8. (A) El área del triángulo obtusángulo ABP es

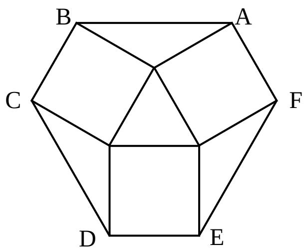
$$A_{ABP} = \frac{1 \cdot 1 \cdot sen 120^{o}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

El área del triángulo equilátero es

$$A_{PQR} = \frac{1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

El área del hexágono ABCDEF es

$$3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 1^2 = 3 + \sqrt{3}$$



9. (A) El triángulo isósceles cuyos lados tienen medida entera en cm y que tiene área máxima, es el más próximo al triángulo equilátero, es decir, el que tiene base igual a 9 cm y cuyos lados iguales miden 8 cm. Su área, por la fórmula de Herón, es

$$A = \sqrt{\frac{25}{2} \cdot \left(\frac{25}{2} - 9\right)\left(\frac{25}{2} - 8\right)\left(\frac{25}{2} - 8\right)} = \frac{45\sqrt{7}}{4} .$$

10. (C) La suma de n números enteros consecutivos es S_n = Me × n, donde Me es el valor central de la serie. Como $S_n = 7^5$ y n = 49, Me = $\frac{7^5}{49} = 7^3$.

11. (B) La ecuación de la recta AC es y = $-\frac{1}{2}x + 9$. Esta recta corta a y = x en A'(6,6).

La ecuación de la recta BC es y = –2x + 12. Esta recta corta a y = x en B'(4,4).

La distancia entre A' y B' es, por tanto, $2\sqrt{2}$

12. (C) La suma de los n primeros cuadrados de los números naturales es $\frac{n\cdot(n+1)(2n+1)}{6}$

Para n = 100, tenemos $\frac{100\times 101\times 201}{6} = 50\times 101\times 67 = 6767\times 50$**,** que es un impar por 50, por lo que el número acaba en 50.

13. (D) $1+\cos^2\alpha+\cos^4\alpha+\cos^6\alpha+...=5 \Rightarrow \frac{1}{1-\cos^2\alpha}=5 \Rightarrow \frac{1}{sen^2\alpha}=5$.

sen ^{2} α = $\frac{1}{5}$ y cos^2 α = $\frac{4}{5}$. Por tanto, cos 2α = $\frac{4}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$

14. (E) Las circunferencias $x^2-4x+y^2-2y=0$ y $x^2+2x+y^2+2y=18$ se cortan en puntos que pertenecen a su eje radical**.** Éste se obtiene igualando las potencias de un punto respecto de ambas circunferencias lo que equivale a restar las ecuaciones miembro a miembro:

$$x^2+2x+y^2+2y-18-x^2+4x-y^2+2y=0 \Rightarrow$$
$$6x+4y-18=0 \Rightarrow 3x+2y=9$$

15. (D) Sea la variable aleatoria X = “suma del valor de las dos monedas extraídas”.La función de probabilidad de dicha variable es:

X	2	6	10	11	15	20	21	25	30	40
P(X=x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$

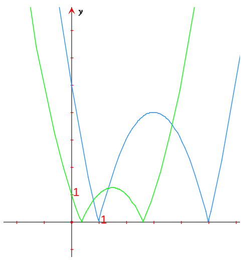
P(x ≥ 20) = $\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$.

16. (A) El valor mínimo de A corresponde a *x* = 3 y vale 2 (Es el vértice de la parábola).
El valor máximo de A corresponde a *x* = 1 y vale 10.
La función *f(x)* = $2x^2 - 12x + 20$ es continua en el intervalo [1,4], por eso todos los valores del intervalo [2,10] pertenecen a A.

17. (B) Se trata de encontrar el valor de k tal que $x{\cdot}y = k$ sea tangente a la recta $x + 2y = 4$.

Para que esto se cumpla, el sistema $\begin{cases} x{\cdot}y = k \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ debe tener una única solución.

Despejando x en la ecuación de la recta y sustituyendo en la ecuación de la hipérbola se tiene: $(4 - 2y){\cdot}y = k \;\Rightarrow\; y^2 - 2y + \dfrac{k}{2} = 0$. Para que tenga solución única es necesario que $\dfrac{k}{2} = 1 \;\Rightarrow\; k = 2$.



18. (D) El número de intersecciones entre ambas curvas es tres.

19. (D) La función tiene una asíntota oblicua $\left(y = \dfrac{1}{2}x\right)$ y dos asíntotas verticales. En total, tres.

20. (C) $$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{-1+\sqrt{3}i}\right)^{10} = \left(\frac{2_{60}}{2_{120}}\right)^{10} = \left(1_{-60}\right)^{10} = 1_{-600} = 1_{120} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

21. (B) $\log_8 2 = \dfrac{1}{3}$; $\log_{1/2} 8 = 6$; $\log_2 0'5 = -1$; $\log_2 \sqrt{2} = \dfrac{1}{2}$; $\log_4 \sqrt{8} = \dfrac{3}{4}$.

22. (C) Los posibles productos de los puntos de tres dados que dan 36 son:

$1 - 6 - 6$: tres formas diferentes ($PR_3^{1,2}$)

$2 - 3 - 6$: seis formas diferentes (P_3)

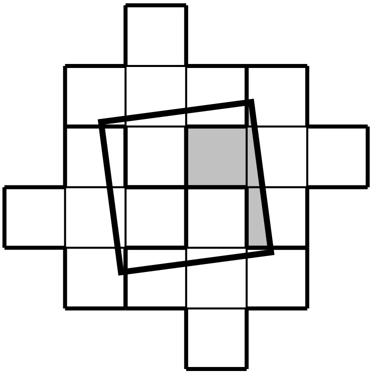
$3 - 3 - 4$: tres formas diferentes ($PR_3^{1,2}$).

La probabilidad de que el producto sea 36 es P = $\dfrac{3+6+3}{216} = \dfrac{12}{216} = \dfrac{1}{18}$

23. (C) La circunferencia $x^2 - 4x + y^2 - 2y = 5$ se puede escribir $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$, de modo que tiene el centro en (2,1) y tiene radio $\sqrt{10}$. Las rectas de las respuestas A, D y E pasan muy cerca del centro y no pueden ser tangentes. La recta de la respuesta C corta a la circunferencia en: $(15 - 3y - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10 \Longrightarrow y^2 - 8y + 16 = 0$. Como tiene una solución única, la recta es tangente a la circunferencia.

24. (C) $9\times99\times999 = (10-1)\cdot(100-1)\cdot(1000-1) = \left(10^3-10^2-10+1\right)\left(10^3-1\right)=$
$= 10^6-10^5-10^4+10^2+10-1$

25. (A) El área común entre el cuadrado y la cruz griega es independiente del ángulo que formen sus lados superiores. Si el ángulo es cero, se ve fácilmente y si no, basta observar en la figura adjunta que en el cuadrado hay cuatro regiones iguales de la cruz, por lo que el área común es la cuarta parte del cuadrado, es decir, 25 cm^2 .



X CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel I

1. (C) Vamos a escribir los datos que tenemos separadamente para verlos mejor:

6 peras = una trucha + un pan
3 peras = 4 panes

De la segunda igualdad se deduce que por 6 peras me darían 8 panes:

6 peras = 8 panes

y comparando esta expresión con la primera vemos que por 8 panes (que son como 6 peras) me darían una trucha y un pan.

8 panes = una trucha + un pan

así que por una trucha me darán 7 panes.

2. (D) Como ✋ = 7 y 7 + 7 = 14, entonces ★ puede ser 4 ó 5 (si me llevara una) pero como debe ser par, tenemos que ★ = 4, ☺ = 1 y ❀ = 8. ☾ tiene que ser menor que 5 porque si no, al hacer ☾ + ☾, me llevaría una y ★ sería impar. Probemos con cada caso. Si ☾ = 0 entonces ☼ también sería 0, pero cada letra debe ser un dígito diferente. ☾ = 1 no puede ser pues ☺ = 1. ☾ = 2, tampoco pues sería ☼ = 4, pero ★ = 4, por esa misma razón no puede ser ☾ = 4. Así que sólo nos queda ☾ = 3. Si ☾ = 3 entonces ☼ = 6 que sí es posible. Conclusión: ☾ = 3

3. (D) $2006 \times 100 + 2006 = 200600 + 2006 = 202606$

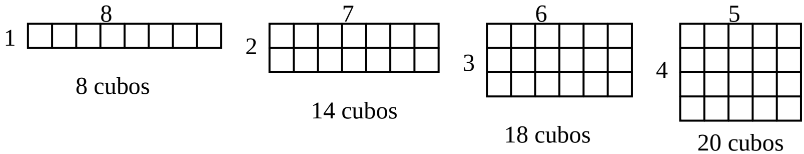
4. (B) Comparemos las velocidades de los niños:
Ana: si da 3 vueltas en 12 minutos, entonces tarda 4 minutos en dar una vuelta.
Belén: si da 16 vueltas en 60 minutos (una hora), entonces tarda 60 : 16 = 3,75 minutos en dar una vuelta.
Carlos: como 480 segundos son 480 : 60 = 8 minutos, tarda 4 minutos en dar una vuelta, igual que Ana y más que Belén.
Diana: un día son 24 horas. Como Belén da 16 vueltas en una hora, en un día daría 16 x 24 = 384 vueltas, luego Belén es más rápida que Diana.
Esteban: en dar una vuelta tardaría 242 segundos que son 4 minutos y 2 segundos.
Luego la más rápida es Belén.

5. (B) Si el 20% son 12, el 10% son 6 entonces el 30% (20% + 10%) son 12 + 6 = 18.

6. (B) Este problema consiste en contar con cuidado:

Llamemos a los chicos A, B, C, D y E y enumeremos las partidas (ten en cuenta que “A juega con B” es la misma partida que “B juega con A”):
A con B, A con C, A con D y A con E.
B con C, B con D y B con E.
C con D y C con E.
D con E.
En total han jugado 10 partidas.

7. (D) Pensemos en cómo debe ser la base de la construcción de Belén si su perímetro es 18 cm. Estas son todas las posibilidades:



Con 42 cubos, si la base fuera el primer rectángulo, podría construir 5 pisos pero le sobrarían 2 cubos. Con la segunda base sí puede construir exactamente 3 pisos. Con las de 18 y 20 cubos podría hacer dos plantas pero le sobrarían cubos.
Así que el prisma de Belén tenía base de 2 x 7 y 3 pisos de altura.

8. (C) Como los divisores de ese número tienen que estar formados por productos de esos cuatro factores tenemos:
Con un solo factor hay 4 posibilidades: 2, 3, 5 y 7.
Con dos factores hay 6 posibilidades: 2 x 3, 2 x 5, etc…
Con tres factores hay 4 posibilidades.
Y por último tenemos el propio número y el 1.
Así que en total hay 16 divisores.
También podías multiplicar los números y hallar todos los divisores de 210. Eso se hace por parejas:
1 y 210; 2 y 105; 3 y 70; 5 y 42; 6 y 35; 7 y 30; 10 y 21; 14 y 15.
Y de nuevo hemos encontrado 16 divisores.

9. (E) Para formar un número de 6 cifras con las cifras ordenadas de menor a mayor y utilizando las cifras 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 simplemente hay que quitar una cifra del número 3456789. Como tenemos 7 elecciones distintas de la cifra a quitar, hay 7 números que cumplen las condiciones del número de carné de Ana.

10. (B) Como ves, cada figura se obtiene añadiendo una columna con un número impar de cuadrados a la figura anterior.
La primera figura tiene un cubo.
La segunda 1 + 3 = 4

La tercera 1 + 3+ 5 = 9
La cuarta 1+ 3+ 5+ 7 = 16
Tendrías que sumar los números impares 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + …. hasta el 39.
Eso no te llevaría mucho tiempo, pero si observas que:
La 1ª tiene 1 cubo = 1^2
La 2ª tiene 4 cubos = 2^2
La 3ª tiene 9 cubo = 3^2
La 4ª tiene 16 cubo = 4^2
La 20ª tendrá 20^2 = 400 cubos.

11. (C) Debemos averiguar cuánto miden las líneas diagonales, las verticales y las horizontales

Juan caracol ha hecho 25 dm recorriendo 5 diagonales, entonces cada diagonal mide 5 dm.
Laura caracol hizo 5 diagonales (25 dm) y 4 verticales y en total sumó 37 dm. Así que las 4 verticales suman 37 – 25 = 12 dm y una vertical mide 3 dm.
Luis caracol hizo 6 verticales que suman 18 dm y 5 horizontales. Como en total recorrió 38 dm, las 5 horizontales son 20 dm y por tanto una horizontal mide 4 dm.
Calculemos la longitud del recorrido de Sara caracol:
3 diagonales + 4 verticales + 2 horizontales = 3 x 5 + 4 x 3 + 2 x 4 = 35 dm.

12. (D) Empecemos sentando al conductor que es el que tiene más restricciones. Tenemos 2 posibilidades para elegirlo. Una vez que hemos sentado al conductor quedan 4 personas entre las que elegir al copiloto. Así que tenemos 2 x 4 = 8 formas distintas de elegir al piloto y al copiloto. Aún quedan 3 personas entre las que elegir la que irá en la ventanilla derecha y, una vez elegida, quedarán dos personas para elegir la que se sentará en el centro. El último se sentará en la ventanilla izquierda. En total hay 2 x 4 x 3 x 2 = 48 formas distintas de sentarse en el coche.

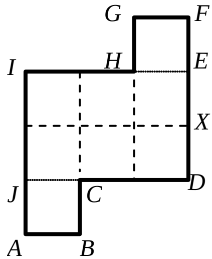
13. (B) Julián visitará a su abuela los días 5, 10, 15,… Como entre 1 y 365 hay 73 múltiplos de 5, Rosario recibirá la visita de su nieto 73 veces en el año 2006. Lucía irá los días 7, 14, 21, …, en total 52 veces en un año. Así pues, podrías pensar que Rosario hace croquetas 73 + 52 = 125 días al año. Pero, ¡ojo! Hay días en que Julián y Lucía coinciden visitando a su abuela: los días múltiplo de 35. Esos días los estamos contando dos veces. Como en total hay 10 múltiplos de 35 entre 1 y 365, tenemos que Rosario hará croquetas 73 + 52 – 10 = 115 veces.

14. (E) Veamos cuántas semanas, días y horas esperó el pobre Lucas:

Dividiendo 1000 entre 24 tenemos que 1000 horas son 41 días y 16 horas. Dividiendo 41 entre 7 obtenemos que 41 días son 5 semanas y 6 días.
Así que Lucas esperó 5 semanas, 6 días y 16 horas.
Tras 5 semanas de espera volvía a ser sábado a las 22 horas. Seis días después era viernes a las 22 horas y 16 horas después ya era de nuevo sábado.
Luego, cuando llegó Elisa era sábado (a las 2 de la tarde para más datos).

15. (E) De 120 niños, 30 aún no han visto la película, luego uno de cada cuatro no la ha visto. Uno de cada cuatro es el 25%, así que ya la ha visto el 75% de los alumnos.

16. (B) Como *DE* es el doble de *EF*, si *X* es el punto medio de *DE* tenemos *DX* = *XD* = *EF*. Trazando unas líneas auxiliares vemos que el perímetro de la figura es 14 veces *EF* y, por tanto, *EF* = 154 : 14 = 11 cm y el perímetro del rectángulo *DEIJ* es diez veces *EF* luego mide 10 x 11 = 110 cm.



17. (C) Como Sara le dio 42 euros a Manuel y ambos quedaron con la misma cantidad de dinero, Sara tenía al principio 84 euros más que Manuel. Y como Sara tenía al principio el doble de dinero que Manuel, la diferencia entre el dinero que tenía Sara y el dinero que tenía Manuel es, justamente, el dinero que tenía Manuel.
Así que Manuel tenía 84 euros y Sara el doble, o sea 168, y los dos juntos tienen 84 + 168 = 252 euros.

18. (B) Como en cada paso forma un cuadrado, si queremos que el perímetro sea 1024 cm, el lado del cuadrado deberá medir 1024 : 4 = 256 cm.
Si parte de 2 cm, la primera vez que dibuja obtiene un cuadrado de lado 2 x 2 = 4 cm. La segunda uno de lado 2 x 4 = 8 cm, la tercera uno de lado 2 x 8 = 16 cm y así sucesivamente, en cada paso el lado se multiplica por 2. La longitud de los lados de los cuadrados obtenidos en cada paso forma una sucesión así:
4 8 16 32 64 128 256 512…
El lado que nosotros queremos lo obtiene la 7ª vez que dibuja.

19. (E) Veamos, cada uno debe pagar 84 : 3 = 28 euros. Agustina se queda con las vueltas que le dan después de haber pagado (100 – 84 = 16 €) y con lo que le dieron Benito (28 €) y Camila (14 €). Así que en total le quedan 16 + 28 + 14 = 58 euros.

20. (C) Calculemos cuántos partidos empató, ganó y perdió cada equipo.
El equipo *A* no empató ninguno y de 24 partidos ganó 10 más de los que perdió así que ganó 17 y perdió 7.

El equipo *B* no perdió ninguno y de 24 partidos empató 6 más que gano. Entonces ganó 9 partidos y empató 15.
Así que la diferencia entre los ganados por el equipo *A* y los ganados por el equipo *B* es de 17 – 9 = 8 partidos.

21. (E) Este no es un problema fácil. Vayamos por partes.
Si Marta leyó primero 7 páginas y después de 10 en 10, el número de páginas del libro debe acabar en 7.
Si Alicia leyó primero 2 y después de 11 en 11, el número de páginas del libro, quitando las dos primeras, debe ser múltiplo de 11. Si quitamos 2 al número de páginas obtendremos un número que acaba en 5, así que el número de páginas del libro menos las dos primeras es un múltiplo de 11 y de 5 que acaba en 5, entonces será un múltiplo de 55 que acaba en 5. Escribamos todos los que son menores de 300, que son solo tres: 55 165 275
Sumando las dos primeras páginas tenemos que el número de páginas del libro podrá ser: 57, 167 ó 277.
Como sabemos que Inés leyó primero 5 páginas y después de 9 en 9 tenemos que, tras leer las 5 primeras, le quedarían en casa caso:
57 – 5 = 52 que no da exacto al dividirlo entre 9.
167 – 5 = 162 que da exacto al dividirlo entre 9.
277 – 5 = 272 que no da exacto al dividirlo entre 9.
Así que el número de páginas del libro es 167.

22. (D) Si yendo en elefante tarda 32 minutos en ir y volver, en volver tarda la mitad, o sea 16 minutos. Si cuando va andando y vuelve en elefante tarda 40 minutos, en la ida andando tarda 40 – 16 = 24 minutos. Así que ida y vuelta andando lo hará en 2 x 24 = 48 minutos.

23. (E) Calculemos cuántas personas y cuántos kilos de naranjas hay:
Personas: 1 + 2 + 4 + 2 + 1 = 10 personas.
Kilos de naranjas: 1 x 5 + 2 x 4 + 4 x 2 + 2 x 1,5 + 1 x 0 = 24 kilos.
Si reparten a partes iguales como propone la abuela cada uno obtendrá 2,4 kilos. Así que salen beneficiadas con este reparto las cuatro personas que recibirían 2 kilos con el reparto del abuelo, las 2 personas que recibirían 1,5 y el pobre que no recibiría nada. En total, 7 personas salen beneficiadas.

24. (B) Si quitamos las 12 zanahorias que se comió el hijo y las 5 que se comió de más el padre, el resto deben dividirlo a partes iguales entre el padre y la madre, así que la madre comió (73 – 12 – 5) : 2 = 28 zanahorias.

25. (B) Como la primera casilla más la segunda más la tercera deben sumar lo mismo que la segunda más la tercera más la cuarta, la cuarta casilla tiene que ser igual que la primera, o sea un 7

7			7					6		

Por la misma razón la quinta casilla es igual que la segunda y la sexta que la tercera, y la séptima y la décima vuelven a ser 7.

7			7			7		6	7	

Ahora vamos al revés. La última debe ser 8 pues 6 + 7 + 8 = 21, y la octava también. Y completando los números que faltan:

7	8	6	7	8	6	7	8	6	7	8

Así que en la segunda casilla va un 8.

X CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel II

1. (E) Sólo una respuesta es verdadera, por ello no puede ser “Beatriz es la mayor” porque entonces también sería cierto que “Ana no es la mayor”. Si Beatriz no es la mayor y fuese cierto que “Ana no es la mayor”, entonces la mayor sería Celia, con lo cual sería también cierto que “Celia no es la más joven”. Luego sólo nos queda que Ana sea la mayor, y que sólo sea cierto que “Celia no es la más joven”, teniendo que ser la de en medio.

2. (C) Haciendo cuentas:

$\frac{1}{3}\times 600 = 200$; $\frac{2}{5}\times 600 = 240$, y así la proporción final es $\frac{200+240}{1200} = \frac{440}{1200} = \frac{11}{30}$

3. (D) Como cada amigo debe tener un lápiz, los repartos diferentes consisten en ver cómo repartir los tres lápices restantes entre los tres. Podemos contar fácilmente los pocos casos: Un lápiz para cada uno; dos lápices para uno, uno para otro y el tercero sin lápiz (seis formas- números de tres cifras con un dos, un uno y un cero); los tres lápices para uno de ellos (tres formas). Por tanto diez repartos distintos.

4. (B) Resulta que al restar 2 a nuestro número obtenemos un múltiplo de 3, 4, 5 y 6, luego nuestro número menos dos es múltiplo del mínimo común múltiplo de esos números, $3 \times 4 \times 5 = 60$. El número más pequeño con esa propiedad es 62.

5. (A) Enseguida descubrimos por la suma de las dos tiradas que sólo Carlos, Alicia o Delia pueden haber obtenido un 6, pero las diferentes tiradas de Blas dicen que obtuvo necesariamente un 1 y un 3, lo que descarta que Carlos sacara un 6, y además obliga a que sus puntuaciones fueran 2 y 5. Por tanto Delia no sacó un seis. Así que fue Alicia.

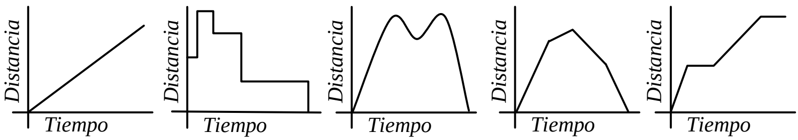
6. (D) Si seis sillas es un cuarto, hay 24 sillas, y las 18 personas sentadas son dos tercios, luego un tercio son nueve y tres tercios 27.

7. (B) Si $\frac{3}{5}$ de las mujeres son casadas, los hombres casados son $\frac{3}{5}$ de las mujeres. Así la proporción de hombres es $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{5}{5}+\frac{3}{5}} = \frac{3}{8}$.

8. (D) $2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}=2{,}5$. Así miramos si algún *d* hace que $\frac{19}{d}$ esté entre 2 y 3, lo que nos deja como candidatos a 7, 8 y 9, y las divisiones con cerrada pugna entre los denominadores 7 y 8 dan a 8 como ganador.

9. (E) 35 se ha obtenido sumando un múltiplo de 8 más un múltiplo de 3, y eso sólo puede hacerse con 32 + 3 o 8 + 27. En el primer caso acertó 4 y dejó en blanco una, y en el segundo acertó una y dejó en blanco 9, por tanto hubo más errores (siete) en la primera opción.

10. (D)

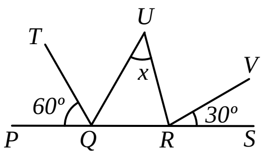


Cuando sale la distancia al punto de partida es cero y eso vuelve a ocurrir cuando completa una vuelta. Sólo dos gráficas tienen dos veces distancia cero. Pero la distancia a J aumenta hasta llegar a L y luego disminuye hasta llegar a J. Ese comportamiento sólo lo refleja la gráfica D)

11. (E) *AC* es el lado más corto y como los demás están referenciados a él, cuanto más pequeño sea, menor es el perímetro, pero para formar triángulo debe ser mayor que la diferencia de los otros dos, es decir mayor que 16 cm y por tener que ser entero debe al menos medir 17 cm, y entonces las otras medidas son 31 y 47 cm, luego el perímetro mínimo es 95 cm.

12. (A) Que empiecen por 1 tenemos desde 12 hasta 19 (ocho). Que empiecen por 2 desde 23 hasta 29 (siete) y así seis, cinco, cuatro,... hasta uno que es el 89. Así 89 ocupa el lugar 36 = 8 + 7 + 6 +... + 2 +1, después vienen 123 hasta 129, 134 hasta 189, es decir 7 +6 + 5 +... + 1= 28 más, y luego de 234 hasta 289 (21 más) y 15 más hasta llegar a 389 y justo entonces tenemos cien números ascendentes.

13. (B) El ángulo $\angle TQR$ es de 120º y por ser *UQ* su bisectriz, $\angle UQR$ mide 60º. El ángulo $\angle QRV$ mide 150º y como *UR* es su bisectriz $\angle QRU$ mide 75º, con lo cual *x* que es el tercer ángulo del triángulo *QRU* mide 180º - (60º + 75º) = 45º.



14. (A) Podemos fácilmente resolver: c es 5, e es 7, b es 3, d es 5 y a es 8. Quizás es menos lioso si en vez de resta planteamos el problema en forma de suma.

$$\begin{array}{rccccc} & a & 4 & b & 7 & c \\ - & 5 & d & 8 & e & 6 \\ \hline & 2 & 8 & 4 & 9 & 9 \end{array}$$

15. (A) Lo verifican todos los divisores de (2006 – 5) mayores que 5.
Como 2001 = 3 × 667, y en el estudio de ver si 667 es primo aparece que 667 = 23 × 29, tenemos que la descomposición en factores primos es 2001 = 3 × 23 × 29, y así sus divisores mayores que 5 son:
23, 29, (3 × 23), (3 × 29), (23 × 29) y 2001.

16. (B) Si 32 era el 80% el segundo día después de comérselos, entonces antes había (32 + 8) pistachos. Si 40 era el 80% el primer día después de comer pistachos, antes había 40 + 10.

17. (A) Las medidas del rectángulo a embaldosar deben ser 5*x* y 4x. Pero 5*x* debe ser múltiplo de 5, luego *x* e un número entero, y 4*x* debe ser múltiplo de 30, es decir 2*x* múltiplo de 15. El valor más pequeño de *x* es 15 cm.
En un rectángulo [(5 × 15) × (4 × 15)] caben 15 × 2 = 30 baldosas (5 × 30).

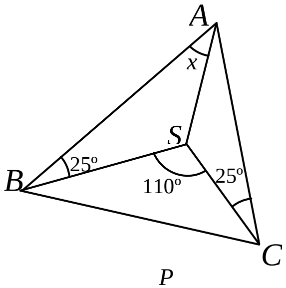
18. (A) El segmento de longitud 20 – 2 =18, queda dividido en seis partes iguales, cada una de longitud 3. Entre P y 20 hay dos de esas partes luego P se corresponde con 14.

19. (D) La diferencia entre 114 y 78 es el precio de las llamadas de más que hice el segundo mes, es decir lo que me costaron las llamadas del primer mes. Por tanto el fijo por la línea es 78 menos esa diferencia.

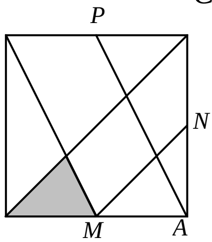
20. (B) Rosario hace croquetas los días del año "múltiplos" de 5 y los "múltiplos" de 7. En 365 hay 73 múltiplos positivos de 5 y 52 de 7, pero luego están los diez múltiplos de 35 que hay que descontar. (73 + 52 – 10 = 115)

21. (C) El círculo grande tiene de radio 3 cm y por tanto de área 9π cm^2. A esa área hay que quitarle siete círculos de radio 1 cm, luego restarle 7π cm^2.

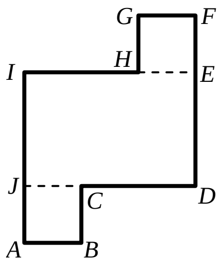
22. (A) Un arco de 45º mide la octava parte de la circunferencia, es decir $\frac{\pi}{4}r$. Un arco de 30º mide la doceava parte de la circunferencia $\frac{\pi}{6}R$. Si ambas longitudes deben ser iguales tenemos que $\frac{r}{4}=\frac{R}{6}$, y así: $\frac{r}{R}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. Como los círculos son figuras semejantes la proporción de áreas es el cuadrado de la proporción de longitudes correspondientes.



23. (D) Que S dista lo mismo de *A* que de *C* nos dice que el triángulo *ASC* es isósceles y de ahí el ángulo $\angle ASC$ es igual a 180º - 25º - 25º = 130º. Ahora el ángulo $\angle BSA$ = 360º - 110º - 130º = 120º, y por último x = 180º - 25º - 120º = 35º.



24. (B) Dibujando las líneas auxiliares *PA* y *MN* (siendo P y N puntos medios de lados, tenemos dividido el cuadrado de la diagonal hacia abajo en cinco piezas, dos triángulos como el sombreado, un paralelogramo doble del triángulo y otras dos piezas que encajadas igualan a ese paralelogramo. Luego el área rayada es la sexta parte de la mitad del cuadrado, es decir un a doceava parte de 36.



25. (B) Podemos medir los segmentos tomando como unidad *EF*. Así *ED* = *CD* = *HI* = *IJ* =2 *EF*. Así el perímetro de la figura es 14 *EF* = 154, y por tanto *EF* = 11 cm. Y el perímetro del rectángulo *DEIJ* es 10 *EF* = 110 cm.

X CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel III

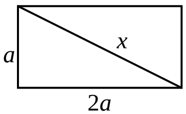
1. (B) Julián visitará a su abuela los días 5, 10, 15,… Como entre 1 y 365 hay 73 múltiplos de 5, Rosario recibirá la visita de su nieto 73 veces en el año 2006. Lucía irá los días 7, 14, 21, …, en total 52 veces en un año. Así pues, podrías pensar que Rosario hace croquetas 73 + 52 = 125 días al año. Pero, ¡ojo! Hay días en que Julián y Lucía coinciden visitando a su abuela: los días múltiplo de 35. Esos días los estamos contando dos veces. Como en total hay 10 múltiplos de 35 entre 1 y 365, tenemos que Rosario hará croquetas 73 + 52 – 10 = 115 veces.

2. (C) Como siempre que hay que hacer varias operaciones, lo mejor es ir poco a poco y en orden:

$$((1\Delta 2)\Delta 3)=\left(\left(\frac{1+2}{1-2}\right)\Delta 3\right)=-3\Delta 3=\frac{-3+3}{-3-3}=0$$

3. (B) La primera ecuación tiene por solución $x=-2$. Si queremos que también sea solución de la segunda, b debe cumplir: $b\cdot(-2)-10=-2$, luego b ha de ser – 4.

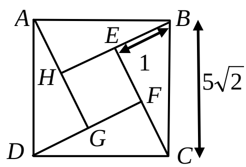
4. (B) Observa el dibujo. El área del rectángulo es $2a^2$.



Aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos:

$x^2=a^2+4a^2=5a^2$, luego $a^2=\dfrac{x^2}{5}$ y por tanto $2a^2=\dfrac{2x^2}{5}$

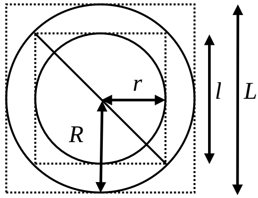
5. (C) Observa que, al ser su área 50 cm^2, los lados del cuadrado grande miden $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ cm.



Calculemos el área del triángulo *CBE* que es rectángulo en *E* y del que conocemos su hipotenusa y uno de sus catetos. Para ello debemos calcular el segundo cateto: $\left(5\sqrt{2}\right)^2=1^2+x^2$ de donde $x=7$. Así pues el área de cada triángulo es $\dfrac{7}{2}$ cm^2 y el área del cuadrado pequeño es $50-4\times\dfrac{7}{2}=36\text{cm}^2$

6. (D) $x\%\ de\ x = \frac{x^2}{100} = 4$. Luego $x = 20$. La solución negativa no tiene sentido.

7. (B) Fíjate en la figura y observa las siguientes relaciones entre los lados de los cuadrados y los radios de las circunferencias:



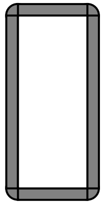
$R = \frac{L}{2}; r = \frac{l}{2}$

Ahora fíjate en la diagonal *d* del cuadrado pequeño:

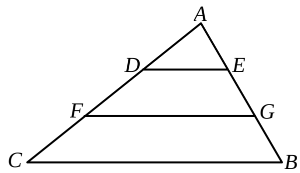
Por un lado: $\frac{d}{2} = R = \frac{L}{2} \Rightarrow d = L$ y por otro $d^2 = l^2 + l^2$ luego $d = \sqrt{2}\, l$

Así pues $\frac{\text{Área círculo pequeño}}{\text{Área cuadrado grande}} = \frac{\pi r^2}{L^2} = \frac{\pi (l/2)^2}{d^2} = \frac{\pi l^2/4}{(\sqrt{2}l)^2} = \frac{\pi}{8}$

8. (A) Al colorear todos los puntos que están a distancia 2 m del borde, además de dos rectángulos de 50 x 2 y dos rectángulos de 20 x 2, en cada esquina nos queda un cuarto de circunferencia de radio 2 m.
La superficie pintada es 2 x 100 + 2 x 40 + π x 4 = (280 + 4 π) m^2



9. (C) Al ser los segmentos *FG* y *DE* paralelos a *CB*, los triángulos $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{AGF}, \overset{\Delta}{AED}$ son semejantes. Además conocemos las razones de semejanza pues *AE* = 1/3 *AB* y *AG* = 2/3 *AB*. Luego



Área de $\overset{\Delta}{AGF} = \frac{4}{9}$ área $\overset{\Delta}{ABC}$ = 40 cm^2 y

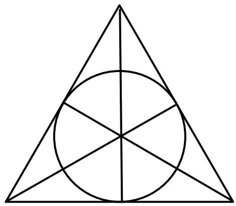
Área de $\overset{\Delta}{AED} = \frac{1}{9}$ área $\overset{\Delta}{ABC}$ = 10 cm^2

El área del trapecio *DEGF* = área de $\overset{\Delta}{AGF}$ – área de $\overset{\Delta}{AED}$ = 40 – 10 = 30 cm^2.

10. (A) Antes de añadir el agua, tenemos en la jarra 360 ml de refresco, de los cuales 180 ml son zumo. Al añadir *x* mililitros de agua obtenemos (360 + *x*) ml de refresco pero la cantidad de zumo sigue siendo 180 ml. Como queremos que la cantidad de zumo sea del 30%, planteamos la ecuación $\frac{180}{360+x} = \frac{30}{100}$ y obtenemos $1800 = 1080 + 3x$ cuya solución es *x* = 240.

11. (C) Debemos contar cuántos números hay entre 1 y 100 que sean pares pero que no sean múltiplos de 3. Entre 1 y 100 hay 50 pares pero debemos eliminar los que también sean múltiplos de 3, es decir, los múltiplos de 6. En total hay 16 múltiplos de 6 entre 1 y 100. Tenemos que la probabilidad buscada es $\frac{(50-16)}{100}=\frac{17}{50}$.

12. (A) El radio de la circunferencia es $r=\frac{\sqrt{3}}{6}l$. Una forma de obtener esta igualdad es observar que las tres alturas del triángulo se cortan en el centro de la circunferencia y forman tres triángulos idénticos de base el lado del triángulo. Igualando el área del triángulo grande a la suma de las áreas de los tres triángulos pequeños obtenemos la igualdad.



Sabemos que $3l=\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{6}l\right)^2$. Esta ecuación tiene dos soluciones: l = 0 (que obviamente no nos sirve) y $l=\frac{36}{\pi}$ lo que nos dice que $r=\frac{\sqrt{3}}{6}l=\frac{6\sqrt{3}}{\pi}$

13. (C) Si el radio r crece un 100%, el radio de la nueva circunferencia será el doble. Así pues su área será 4 veces el área del original, lo que significa que ha aumentado en 3 veces, es decir, el 300%.

14. (C) Observa que $(n^3-n)=n(n+1)(n-1)$ es el producto de 3 enteros consecutivos, luego al menos uno de ellos será múltiplo de 2 y al menos uno de ellos será múltiplo de 3. Así que podemos estar seguros de que el producto de los tres es múltiplo de 6.

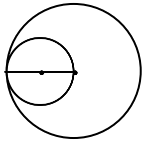
15. (C) Este es un clásico problema de porcentajes encadenados. Queremos 0,9 x = 1. Luego $x=\frac{10}{9}=1+\frac{1}{9}$. Se ha aumentado el artículo el $\frac{100}{9}\%$.

Otra forma de resolverlo es suponer que el artículo cuesta 100 €. La primera rebaja deja su precio en 90 € y nosotros queremos subirlo de nuevo hasta 100 €, es decir queremos aumentar en 10 € los 90 que tenemos. Esto supone un porcentaje del $\frac{100}{9}\%$.

16. (D) Observemos si se conservan los productos o los cocientes entre *x* e *y*. En **A)** expresión *x* + *y* = 0 nos puede despistar la suma, pero dividiendo entre *y* (si no es cero) observamos que $\frac{x}{y} = -1$ y por lo tanto son directamente proporcionales. En **B)**, claramente, son inversamente proporcionales pues se conserva el producto $xy = \frac{10}{3}$. En **C)** son directamente proporcionales $\frac{x}{y} = 5$ y en **E)** es claro que son directamente proporcionales. Luego, por descarte queda 3*x* + *y* = 10. La suma ya nos había hecho sospechar que era esta.

17. (C) Como ya sabes, al sumar (o restar) un número en ambos miembros de una desigualdad, esta no se altera. Luego **A)** y **B)** son siempre verdaderas. Lo mismo ocurre al multiplicar (o dividir) por un número positivo, luego **D)** y **E)** también son siempre ciertas. Sin embargo, al multiplicar (o dividir) una desigualdad por un número negativo, cambia el sentido de la desigualdad. Así pues **C)** será falsa siempre que $z < 0$.

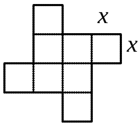
18. (D) Observa la relación que hay entre los radios: $R = 2r$. Luego el área del círculo grande es 4 veces el área del pequeño, 16 cm^2.



19. (A) En la gráfica observamos que a tiempos iguales corresponden distancias iguales, luego el coche viaja a velocidad constante.

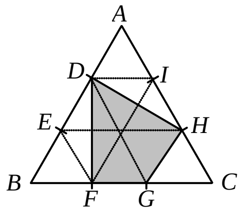
20. (B) ¡¡Vaya lío!! X no se deduce de la información que me dan, luego no podemos afirmar que sea siempre verdadera. Y sí es cierta: pensemos en alguno de los *pluns* que son *plins*, como todos los *plins* son *plons*, nuestro *pluns* es *plons* y hemos encontrado un *plons* que también es *pluns*. Z tampoco se deduce de la información que me dan. La única afirmación que es siempre verdadera es Y.

21. (D) Trazando algunas líneas auxiliares y llamando *x* al lado corto, vemos fácilmente que el perímetro es $16x$ y el área $8x^2 = 200$, luego *x* = 5 y el perímetro mide $16 \times 5 = 80$ cm.



22. (B) Si llamamos *d* a la distancia (en km) que hay de mi casa al instituto y, *t* al tiempo (en minutos) que tardo en ir andando, tenemos que $d = \frac{4}{60}t = \frac{2}{30}t$. Cuando voy corriendo tardo $(t-3)$ minutos y tenemos la relación $d = \frac{6}{60}(t-3) = \frac{1}{10}(t-3)$

Resolviendo el sistema obtenemos que *d* = 0,6 km.



23. (A) Trazando algunos segmentos dividimos el triángulo en nueves triangulitos equiláteros iguales. El área sombreada equivale a cuatro de estos triangulitos, luego el cociente buscado es $\frac{4}{9}$.

24. (B) Nos dicen que $\frac{x+y}{2}=\frac{3y}{4}$, operando obtenemos $2x=y$, por tanto $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$.

25. (E) Tenemos un cuadrado mágico de suma 8 + 5 + 2 = 15. A partir de aquí puedes ir deduciendo el valor de cada letra: 4 + *A* + 2 = 15, *A* = 9; 8 + *C* + 4 = 15, C = 3; etc... Pero, no es necesario conocer el valor de cada letra para conocer el valor de la suma. Si sumas todas las filas obtienes: 8 + *L* + *U* + *C* + 5 + *I* + 4 + *A* + 2 = 15 + 15 + 15, y por tanto *L* + *U* + *C*+ *I* + *A* = 26.

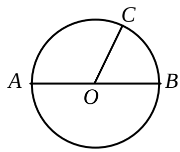
X CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel IV

1. (E) Nos dicen que, llamando x_1 y x_2 a ambos números, se verifica que $x_1 + x_2 = 12$ y que $x_1 \cdot x_2 = 25$, por lo que una ecuación de 2º grado que tenga por soluciones x_1 y x_2 será $x^2 - 12x + 25 = 0$, siendo entonces la respuesta E.

2. (A) La ecuación dada se puede escribir como $\dfrac{2x(x-5)}{x(x-5)} = x - 3$, de donde concluimos en primer lugar que para $x = 0$ y $x = 5$, carece de sentido el término de la izquierda. Si $x \neq 0, 5$, la ecuación es equivalente a $2 = x - 3$, que tiene por solución $x = 5$, número que ya habíamos visto que no era solución por carecer de sentido uno de los dos términos. Así pues, la ecuación dada no tiene ninguna solución y la respuesta es A.

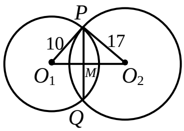
3. (C) Como el triángulo OBC es isósceles y los ángulos iguales, en C y B, suman 120º, sigue que es equilátero, por lo que $BC = \dfrac{5}{2}$, radio de la circunferencia.



Por otra parte, el triángulo ABC es rectángulo en C por lo que

$AC = \sqrt{5^2 - \left(\dfrac{5}{2}\right)^2} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ y la respuesta es C.

4. (B)

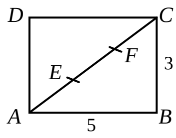


La línea que une los centros de las circunferencias es perpendicular a la cuerda común a ambas en su punto medio; así $O_1M = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ y $MO_2 = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$, por lo que $O_1O_2 = 21$, siendo, entonces, B la respuesta correcta.

5. (A) Nos dicen que $x = (\log_8 2)^3$, y como $\log_8 2 = \dfrac{1}{3}$, sigue que $x = \dfrac{1}{3^3}$ por lo que $\log_3 x = -3$ y la respuesta es A.

6. (E) Llamando a y b a los números, nos dicen que $a + b = 1$ y $a \cdot b = 1$ y nos piden $a^3 + b^3$.
Desarrollando $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, o sea, $a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$, por lo que $1^3 = a^3 + b^3 + 3 \times 1 \times 1$, es decir, $a^3 + b^3 = -2$, siendo, entonces, E la respuesta correcta.

7. (C) Podemos considerar el triángulo *BEF* con base *EF*, es decir, un tercio de *AC* y altura la misma que el triángulo *ABC* si consideramos en éste como base *AC*. Así pues, su área será un tercio del área de *ABC*, es decir, $\frac{1}{3}\ \frac{3\times 5}{2}=\frac{5}{2}$, por lo que la respuesta será *C*.



8. (B) En la progresión aritmética 8, 12, … el *n*-ésimo término es $8 + 4(n-1) = 4n + 4$ y en la 17, 19, … dicho término será $17 + 2(n-1)$, o sea, $2n + 15$.

Como $S_n=\frac{8+4n+4}{2}n$ y $T_n=\frac{17+2n+15}{2}n$, y nos piden cuándo $S_n = T_n$, bastaría escribir $12 + 4n = 32 + 2n$, ecuación con una sola solución, de donde la respuesta será B.

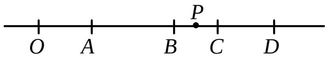
9. (C) Nos dicen que $f(n+1) = f(n) + \frac{1}{2}$ y que $f(1) = \frac{1}{2}$, por lo que los términos $f(n)$ están en progresión aritmética de primer término $\frac{1}{2}$ y diferencia $\frac{1}{2}$, es decir $f(2006) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 2005 = 1003$ y la respuesta es C.

10. (C) Al hallar el punto de corte de las rectas dadas, tenemos que

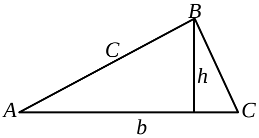
$13x + 11(mx-1) = 700$, de donde $x = \frac{711}{11m+13} = \frac{3^2\times 79}{11m+13}$. Como *x* debe ser entero, $11m + 13$ debe ser alguno de los divisores del numerador, o sea, $11m + 13 = 79$, $11m +13 = 3\times 79$ ó $11m + 13 = 3^2\times 79$ pues para los otros, 3 y 3^2, es imposible ya que *m* es positivo.

Si $11m + 13 = 79$, $m = 6$; si $11m + 13 = 3\times 79 = 237$, $m = \frac{224}{11}$, que no es entero y si $11m + 13 = 711$, $m = \frac{698}{11}$ que tampoco es entero. Finalmente, como cuando *x* es entero, *y* también lo es pues $y = mx - 1$, sigue que el único valor de *m* que hace el punto de corte sea un punto reticular es $m = 6$, por lo que la respuesta es C.

11. (B) Aunque no lo explicite, el enunciado da a entender que los puntos *A*, *B*, *C* y *D* están todos en la misma semirrecta que parte de *O*. Así pues, la situación es como la del dibujo, por lo que llamando *x* a la distancia *OP*, tenemos que $AP = x - a$, $PD = d - x$, $BP = x - b$ y $PC = c - x$ de donde sigue que $\dfrac{x-a}{d-x} = \dfrac{x-b}{c-x}$, es decir, $cx - ac + ax = dx - bd + bx$, por lo que $x = \dfrac{ac - bd}{a - b + c - d}$ y la respuesta es B.



12. (D)

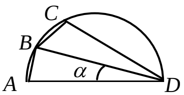


Nos dicen que $64 = \dfrac{1}{2}bh = \dfrac{1}{2}bc$ sen *A* y que $\sqrt{bc} = 12$; así pues sen $A = \dfrac{2\times 64}{144} = \dfrac{8}{9}$, siendo, entonces D la respuesta.

13. (E) Tomando como unidad el lado de cada uno de los 64 cuadraditos, observamos que los dos rectángulos centrados en el centro del tablero y de dimensiones 6 × 4 están totalmente cubiertos por el círculo, pues los vértices más lejanos distan del centro $\sqrt{3^2 + 2^2} < 4$, que es el radio del círculo. Los restantes vértices de la cuadrícula distan al menos 4 ó $\sqrt{3^2 + 3^2} > 4$ por lo que los cuadrados a los que pertenecen no están totalmente cubiertos por el círculo. Así pues, sólo están totalmente cubiertos por el círculo los cuadrados del tablero correspondientes a los dos rectángulos citados anteriormente, que suponen 24 + 24 – 16 = 32, por lo que la respuesta es E.

14. (C) Escribamos $f\left(\dfrac{3x + x^3}{1 + 3x^2}\right)$ como $\log\left(\dfrac{1 + \dfrac{3x + x^3}{1 + 3x^2}}{1 - \dfrac{3x + x^3}{1 + 3x^2}}\right) = \log\dfrac{1 + 3x^2 + 3x + x^3}{1 - 3x + 3x^2 - x^3} =$

$\log\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)^3 = = 3\ \log\dfrac{1 + x}{1 - x} = 3\,f(x)$ y la respuesta es C.



15. (A) Como el triángulo *ABD* es rectángulo, tenemos que $BD = \sqrt{15}$, sen $\alpha = \frac{1}{4}$ y cos $\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Por otra parte, el ángulo *BDC* es también α pues se trata de un ángulo inscrito que abarca el mismo arco que el *BDA*, con lo que su seno será también $\frac{1}{4}$.

Aplicando, entonces, el teorema del coseno al triángulo *BDC*, tenemos que $1^2 = 15 + x^2 - 2\sqrt{15}x\frac{\sqrt{15}}{4}$, siendo $x = CD$.

Así pues, $x^2 - \frac{15}{2}x + 14 = 0$, ecuación que tiene por soluciones 4 y $\frac{7}{2}$ siendo entonces $CD = \frac{7}{2}$ pues es menor que el diámetro del semicírculo, 4, con lo que la respuesta es A.

16. (B) Si los términos están en progresión geométrica de razón *r*, sus inversos están en progresión geométrica de razón $\frac{1}{r}$ por lo que $S = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}$ y $S' = \frac{\frac{1}{a_n}\frac{1}{r} - \frac{1}{a_1}}{\frac{1}{r}-1}$

$= \frac{(a_1 - a_n r)\,r}{(a_n r \cdot a_1)(1-r)} = \frac{S}{a_1 \cdot a_n}$.

Así pues, $\frac{S}{S'} = a_1 \cdot a_n$ y como $P = (a_1 \cdot a_n)^{\frac{n}{2}}$, sigue que $P = \left(\frac{S}{S'}\right)^{\frac{n}{2}}$ y la respuesta es B.

17. (D) Llamando R_v a "ver una cara roja" y R_o a "la otra cara es roja", nos piden $P\,(R_o/R_v)$.

Al escoger una carta, el suceso $(R_v \cap R_o)$ tiene probabilidad $\frac{1}{2}$ pues significa escoger la carta de las dos caras rojas. Así pues,

$\frac{1}{2} = p\,(R_v \cap R_o) = p\,(R_v) \times p\,(R_o/R_v)$, de donde $p\,(R_o/R_v) = \frac{1}{2\,p(R_v)}$.

Pero $R_v = R_v \cap S$ siendo S el suceso seguro, que lo podemos poner como

$(1) \cup (2)$ donde (1) es escoger la carta de las dos caras rojas y (2) escoger la carta de una cara azul y una roja.
Tenemos, entonces, que $p\ (R_v) = p\ \big((1)\big) \times p\left(R_v/(1)\right) + p\ \big((2)\big) \times p\left(R_v/(2)\right) =$

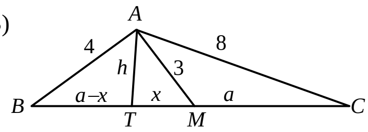
$= \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ de donde $p\ (\left(R_o/R_v\right) = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$ y la respuesta es D.

18. (A) Llamando A al suceso "obtener número mayor o igual que 5 las seis veces" y B al suceso " obtener número mayor o igual que 5 cinco veces y número menor que 5 una vez", nos piden $p\ (A \cup B)$ donde $A \cap B = \varnothing$.

$p\ (A) = \left(\frac{2}{6}\right)^6 = \frac{1}{3^6}$; $p\ (B) = \frac{4}{6} \times \left(\frac{2}{6}\right)^5 \times 6 = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5$

$p\ (A \cup B) = \frac{1}{3^6} + \frac{4}{3^5} = \frac{13}{3^6}$, siendo la respuesta A.

19. (B)



Bajemos la perpendicular AT y llamemos a y x como en la figura.
Así pues, por el teorema de Pitágoras, podemos escribir que $\begin{cases} (a-x)^2 + h^2 = 16 \\ (a+x)^2 + h^2 = 64 \\ x^2 + h^2 = 9 \end{cases}$

Restando las dos primeras ecuaciones, obtenemos $ax = 12$ y restando las dos últimas, $a^2 + 2ax = 55$, de donde sigue que $a^2 = 31$, por lo que $BC = 2\sqrt{31}$ y la respuesta es B.

20. (D) I es verdadera pues $f\,(0 + 0) = f\,(0) = f\,(0) \times f\,(0) = \left(f\,(0)\right)^2 \Rightarrow f\,(0) = 1$ pues $f\,(0) \neq 0$.

II es verdadera pues es equivalente a decir $f\,(a) \times f\,(-a) = 1$ que lo es, pues $f\,(a) \times f\,(-a) = f\,(a - a) = f\,(0)$.

III también es verdadera pues $f\ (3a) = f\ (a + a + a) = \left(f\,(a)\right)^3$, de donde $f\,(a) = \sqrt[3]{f\,(3a)}$.

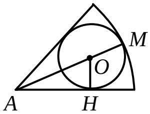
En cambio IV es falsa pues tomo la función $f\,(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $2 > 1$ pero $\frac{1}{4} \not> \frac{1}{2}$.

Así pues, sólo son verdaderas las afirmaciones I, II y III por lo que la respuesta es D.

21. (C) Si Alicia da la vuelta a la carta *E* y observa que por detrás hay un número par y da la vuelta a la carta 7 y observa que por detrás no hay una vocal, ha comprobado que Pedro dice la verdad pues por detrás de las cartas *K* y 4 puede haber cualquier número y cualquier letra respectivamente, que no va a influir en la veracidad de lo dicho por Pedro. Así pues, la respuesta es C.

22. (D) La función $f(x) = x \operatorname{sen} x$ es par pues
$f(-x) = (-x)\operatorname{sen}(-x) = (-x)\cdot(-\operatorname{sen} x) = x \operatorname{sen} x = f(x)$, así que la respuesta es D.

23. (A)



Siendo *O* el centro del círculo y *M* y *H* los puntos de tangencia de la figura, observamos que *A*, *O* y *M* están alineados y llamando *r* al radio del círculo, es $AM = 3r$, por lo que $AO = 2r$ y en el triángulo rectángulo *AOH*, el ángulo *A* es, entonces, de 30º.

Así pues, se trata de un sector de 60º, por lo que su área será $\dfrac{\pi\cdot(3r)^2}{6}$, con lo que el cociente pedido es $\dfrac{\pi(3r)^2}{6\cdot\pi r^2} = \dfrac{3}{2}$, de donde la respuesta es A.

24. (B) Llamando x y $x + 30$ a los números de chicas y chicos respectivamente que fueron a la universidad hace dos años, sigue que el año pasado fueron
$1,1\,(x + x + 30)$, que se dividieron entre las chicas, $1,2x$ y los chicos,
$1,05\,(x + 30)$.
Así pues, $1,1\,(2x + 30) = 1,2x + 1,05\,(x + 30)$, de donde sigue que
$30 \times 0{,}05 = 0,05x$, por lo que $x = 30$ y el año pasado fueron, entonces,
$1,1 \times 90 = 99$ estudiantes a la universidad, con lo que la respuesta es B.

25. (A) Es mucho más cómodo mirar los inversos de las fracciones dadas, es decir, $\dfrac{b}{a}-\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{b}{a}+\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{b}{a}+\dfrac{1}{2a}$, $\dfrac{b}{a}-\dfrac{1}{2a}$, $\dfrac{b}{a}+\dfrac{1}{3a}$, de donde la menor es aquella en la que a $\dfrac{b}{a}$ se le resta una cantidad mayor, es decir, la primera, por lo que la mayor fracción es la $\dfrac{a}{b-1}$ y la respuesta es A.

VI Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

18 de noviembre de 2006

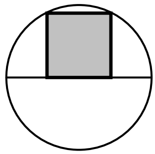
<u>PRUEBA POR EQUIPOS</u> (45 minutos)

1.- Calcula las cifras "*a*" y "*b*" para que el número 1 8 *a* 1 2 *b* 4 6 sea múltiplo de 99.

2.- Al salir de casa, Esteban observó que tenía bastantes euros y bastantes céntimos, pero en total menos de 100 €. Cuando volvió, se dio cuenta de que había gastado la mitad del dinero que llevaba, pero con la particularidad de que el número de céntimos que tenía ahora coincidía con el número de euros que tenía al salir y que el número de euros que tenía ahora, era la mitad del número de céntimos que tenía cuando salió. ¿Con cuánto dinero salió Esteban de casa?

3.- Un número de tres cifras aumenta en 9 unidades si permutamos la segunda con la tercera cifra y aumenta en 90 unidades si permutamos la primera con la segunda. ¿En cuánto aumenta (o disminuye) si permutamos la primera con la tercera cifra?

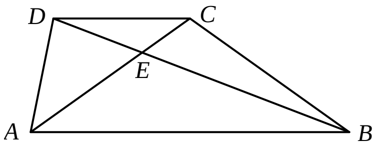
4.- Encuentra el valor de las cifras *A*, *B* y *C* sabiendo que los números de tres cifras *AB*4, *B*03, *B*3*C* y *BA*1 están en progresión aritmética.



5.- Calcula el cociente entre las áreas del círculo y del cuadrado de la figura.

6.- Si $x^2 - 3x + 5 = 0$, ¿cuál es el valor numérico de $x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 7$?

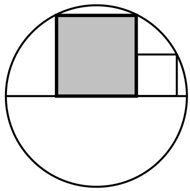
7.- En el trapecio *ABCD* con *AB* paralelo a *CD*, las diagonales se cortan en el punto *E*. Si sabemos que el área del triángulo *ABE* es 98 y que el área del triángulo *CDE* es 18, ¿cuál es el área del trapecio?



8.- Si la diferencia de dos números es 2 y la suma de sus cuadrados 8, ¿cuál es la diferencia de sus cubos?

9.- ¿Cuál es el resto de la división de 1! + 2! + 3! + 4! +…+ 2006! entre 18?

10.- En una circunferencia inscribimos dos cuadrados como se muestra en la figura. Si el área del cuadrado pequeño es 16, ¿cuál es el área del cuadrado grande?



<u>PRUEBA INDIVIDUAL</u> Primer ciclo de E.S.O. (90 minutos)

1. El rectángulo de lados *a* y 20 cm se divide en cuatro cuadrados como muestra la figura 1. ¿Cuál es el valor de *a*?

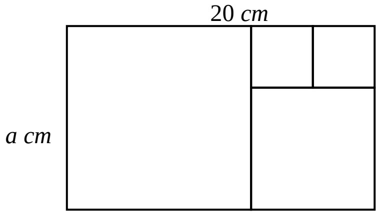


Figura 1

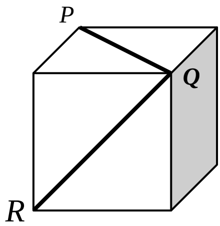
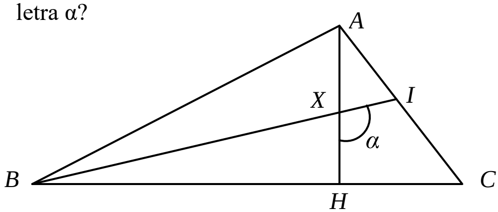


Figura 2

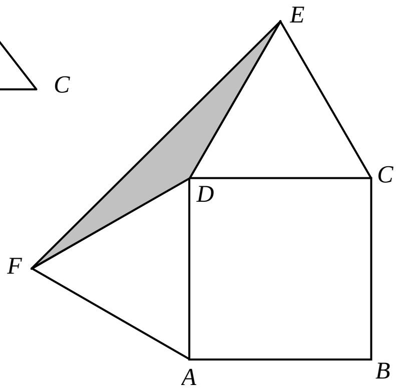
2. *P*, *Q* y R son vértices de un cubo, como se muestra en la figura 2. ¿Cuál es la medida del ángulo formado por las rectas *PR* y *QR* ?

3. ¿Cuál es el menor entero N para el que 2N es un cuadrado perfecto y 3N es un cubo perfecto?

4. En el triángulo *ABC*, la altura *AH* corta a la bisectriz *BI* en el punto *X*. Si el ángulo $\hat{A}$ del triángulo mide 117º y el $\hat{C}$, 35º, ¿cuál es la medida del ángulo señalado con la letra α?

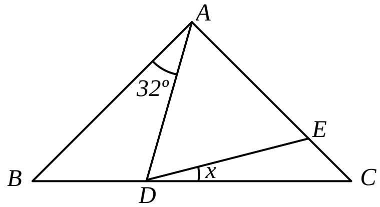


ABCD es un cuadrado de lado 8 *cm*. Sobre los lados DC y AD se han construido los triángulos equiláteros *DCE* y *DAF*. Calcula el área del triángulo sombreado *EFD*.



<u>PRUEBA INDIVIDUAL</u> Segundo ciclo de E.S.O. (90 minutos)

1.- En la figura adjunta se verifica que AB = AC, AE = AD y el ángulo $\angle BAD = 32º$. ¿Cuál es la medida del ángulo $x = \angle EDC$?

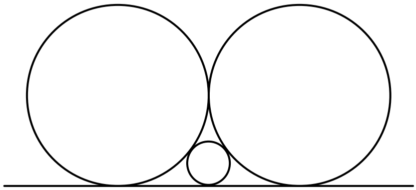


2.- Calcula el valor de *n* para el que

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}=2006$$

3.- Encuentra todos los enteros positivos n para los cuales $\dfrac{5n+23}{n-7}$ es también un entero positivo.

4.- Dos círculos iguales de área 64π cm^2 cada uno, son tangentes entre sí y a una recta como indica la figura. ¿Cuál es el área del círculo pequeño tangente a ambos y a la recta?



5.- Un entero positivo N tiene exactamente 12 divisores positivos distintos, (incluido él mismo y 1), pero solamente tiene tres factores primos en su descomposición. Si la suma de estos tres factores primos es 20, calcula el menor valor posible de N.

<u>PRUEBA INDIVIDUAL</u> Bachillerato (90 minutos)

1. La parábola $y = ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos (1, -6) y (6, 44). Si corta al eje de abscisas en puntos de coordenadas enteras, encuentra a, b y c.

2. Los puntos medios de las caras de un cubo son los vértices de un octaedro regular. Halla el cociente entre el volumen del cubo y el del octaedro.

3. Alicia (A), Beatriz (B) y Carlos (C) tiran repetidamente un dado en este orden: A, B, C, A, B, C, A, B,… ¿Cuál es la probabilidad de que Carlos sea el primero en sacar un seis?

4. Hay infinitos enteros positivos "*k*" para los que se verifica la igualdad $\cos^2\left(k^2 + 6^2\right) = 1$ donde la medida del ángulo $k^2 + 6^2$ viene expresada en grados sexagesimales. Encuentra los tres valores más pequeños de *k*.

5. Calcula $1^2 – 2^2 + 3^2 – 4^2 + 5^2 -\ldots+ 2005^2 – 2006^2$.

PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

1er Ciclo de ESO.-

1A.- De los 30 estudiantes de mi clase, 26 han cumplido ya 12 años, 7 llevan gafas y 4 han cumplido 12 años y llevan gafas. ¿Cuántos estudiantes de mi clase no han cumplido 12 años ni llevan gafas?

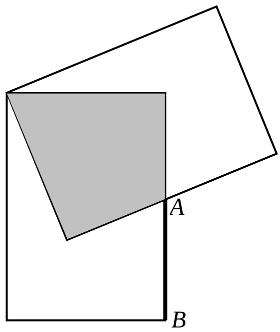
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1B.- Sea "T" la respuesta del problema 2B. Si el precio de un ordenador ha bajado el T %, el porcentaje que debe subir sobre el nuevo precio para igualar el precio antiguo es $\frac{a}{b}$ %, en donde $\frac{a}{b}$ es una fracción irreducible. Halla $a + b$.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1C.- Sea "T" la respuesta del problema 2C. Dos rectángulos iguales de dimensiones 12 y $\frac{20}{3}$ *cm* se solapan como se muestra en la figura, siendo la distancia AB = T. ¿Cuál es el área de la región sombreada, común a ambos rectángulos?

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala)



PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

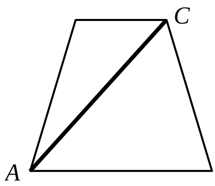
2º Ciclo de ESO.-

2A.- Sea "T" la respuesta del problema 3A. Dadas dos circunferencias concéntricas en las que el radio de la mayor es T, resulta que el área de la corona circular que determinan es igual que el área del círculo pequeño. Calcula la longitud de la cuerda de la circunferencia mayor que es tangente a la circunferencia pequeña.

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala)

2B.- El área del trapecio isósceles de la figura es $72\sqrt{5}\ cm^2$, la base mayor 16 *cm* y la menor 8 *cm* .Calcula, en *cm*, la longitud de la diagonal *AC*.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1er ciclo)

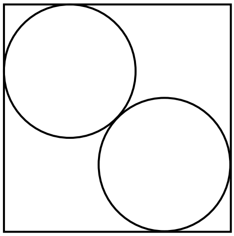


2C.- Sea "T" la respuesta del problema 3C. Empezando por el 1, escribimos los enteros positivos uno detrás de otro, de la siguiente forma:
1234567891011121314151617181920...¿Qué cifra aparece en la posición 100×T?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1er ciclo)

<u>PRUEBA POR RELEVOS</u> (60 minutos)

Bachillerato.-



3A .- Sea "T" la respuesta del problema 1A. Las dos circunferencias de la figura son iguales, tangentes entre sí y tangentes al cuadrado *ABCD.* Si el radio de dichas circunferencias es T, expresa el área del cuadrado en la forma $a + b\sqrt{2}$ y calcula $a + b$.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 2º ciclo)

3B .- Sea "T" la respuesta del problema 1B. Expresa la siguiente suma como una fracción irreducible

$$\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\ldots+\frac{1}{T\times (T+1)}$$

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala)

3C .- Los lados de un triángulo son 6, 7 y *x.* ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar el área de dicho triángulo?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 2º ciclo)

XXIV CONCURSO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS "SOCIEDAD PUIG ADAM"
Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 10 de junio de 2006

NIVEL I

Problema 1º

En una etapa ciclista en línea, cuando el vencedor llegó a la meta, el segundo clasificado estaba a 3 km y el tercero estaba a 4,35 km. Conservando sus velocidades respectivas, el segundo llegó a la meta sacando de ventaja al tercero 1,5 km. ¿Cuál fue la longitud de la etapa?

Problema 2º

Considera el cuadrado ABCD, de centro O y lado 1. A_1, B_1, C_1 y D_1 son los puntos medios de los segmentos AO, BO, CO y DO respectivamente. ¿Cuál es el área de la región común a los paralelogramos AB_1CD_1 y A_1BC_1D?

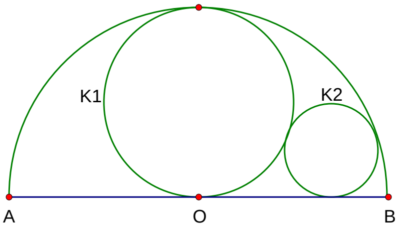
Problema 3º

¿Cuántos enteros positivos tienen exactamente 3 divisores propios de forma que cada uno de estos divisores propios sea menor que 50?

(Recuerda: un divisor propio de un número es un divisor positivo menor que el número)

Problema 4º

Consideramos una semicircunferencia de centro O y diámetro AB. Dos circunferencias, K_1 y K_2, tangentes exteriores, son tangentes a la semicircunferencia, y tangentes a su diámetro AB, la primera de ellas precisamente en el punto O. Si AB = 8, determina el radio r de la circunferencia K_2.



NIVEL II

Problema 1º

Se escribe la fracción $\dfrac{535353.........53}{9009}$ El numerador se forma escribiendo el par 53 n veces. Hallar el menor valor de n para que la fracción sea un entero.

Problema 2º

En el triángulo ABC, D es el punto medio de AB y E, que está en BC, verifica BE = 2 EC.

Si $\widehat{ADC} = \widehat{BAE}$, ¿cuánto mide el ángulo A del triángulo dado?

Problema 3º

Las dimensiones de un trapecio isósceles ABCD (con AD = BC) son AB = 9, CD = 7 y AD = $\sqrt{17}$. Hallar sobre la base mayor AB un punto P tal que el área del trapecio ABCD sea 4 veces el área del triángulo isósceles PDM, con M en CD y PD = PM

Problema 4º

Encuentra todas las ternas de enteros (a, b, c) tales que $a^2 + b^2 - 8c = 6$.

NIVEL III

Problema 1º

En un equipo de fútbol tenemos 11 jugadores, cuyas camisetas están numeradas del 1 al 11. Elegimos al azar 6 de ellas. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números de las camisetas sea impar?

Problema 2º

En el triángulo ABC. $AB = 3$. $BC = 5$ y $AC = 7$. y además las bisectrices AD y CE se cortan en P , Calcular AP.

Problema 3º

En el triángulo ABC. La bisectriz del ángulo B corta al lado AC en el punto D. Demostrar que la longitud del segmento BD es menor que la media geométrica de los lados BA y BC.

Problema 4º

Los números a, b, c, d, e, f, g, son siete enteros positivos consecutivos cuya suma es un cubo. La suma $b + c + d + e + f$ de los cinco centrales es un cuadrado. Hay infinitas soluciones para el primero, a. Ordenadas de menor a mayor, calcular cuál es la segunda.

XLII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

2ª FASE LOCAL-COMUNIDAD DE MADRID

Primera sesión, viernes 20 de enero de 2006

No está permitido el uso de calculadoras. Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.

Problema 1
En el sótano del castillo, 7 gnomos guardan su tesoro. El tesoro está detrás de 12 puertas, cada una de ellas con 12 cerraduras. Todas las cerraduras son distintas. Cada gnomo tiene llaves para algunas de las cerraduras. Tres gnomos cualesquiera tienen conjuntamente llaves para todas las cerraduras. Probar que entre todos los gnomos tienen por lo menos 336 llaves.

Problema 2
Determinar todos los enteros n tales que $\sqrt{\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}}+\sqrt{\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}}$ es entero.

Problema 3
Dos esferas de radio r son tangentes exteriores. Tres esferas de radio R son tangentes exteriores entre sí, cada una tangente a las otras dos. Cada una de estas esferas es, además, tangente exterior a las dos primeras.
Encontrar la relación existente entre R y r.

Segunda sesión, sábado 21 de enero de 2006

Problema 4
Calcular los números p y q tales que las raíces de la ecuación $x^2 + px + q = 0$ sean D y $1 - D$, siendo D el discriminante de esa ecuación de segundo grado.

Problema 5
Los números naturales 22, 23, y 24 tienen la siguiente propiedad: los exponentes de los factores primos de su descomposición son todos impares:

$$22 = 2^1 \times 11^1; \quad 23 = 23^1; \quad 24 = 2^3 \times 3^1$$

¿Cuál es el mayor número de naturales consecutivos que pueden tener esa propiedad?. Razónese la contestación.

Problema 6

Los vértices del cuadrilátero convexo *ABCD* están situados en una circunferencia. Sus diagonales *AC* y *BD* se cortan en el punto *E*. Sea O_1 el centro del círculo inscrito en el triángulo *ABC*, y O_2 el centro del círculo inscrito en el triángulo *ABD*. La recta O_1O_2 corta a *EB* en *M* y a *EA* en *N*.

Demostrar que el triángulo *EMN* es isósceles.

XLIII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

1ª FASE LOCAL-COMUNIDAD DE MADRID

Primera sesión, viernes 24 de noviembre de 2006

- **En la hoja de respuestas, rodea con un círculo la opción que creas correcta en cada pregunta. Si decides cambiarla, táchala con una cruz y escoge otra.**
- **Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos, cada respuesta en blanco 2 puntos y cada respuesta errónea, 0 puntos.**
- **No están permitidas calculadoras ni ningún instrumento de medida.**
- **Tiempo: 3 horas.**

1 ¿Cuántos subconjuntos de 3 elementos del conjunto {88, 95, 99, 132, 166, 173} tienen la propiedad de que la suma de sus elementos es un número par?

A) 6 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 24

2 Algunos enteros positivos tienen estas propiedades:

I La suma de los cuadrados de sus cifras es 50.

II Cada cifra es mayor que la que está a su izquierda.

¿Cuál es el producto de las cifras del mayor de ellos?

A) 7 **B)** 25 **C)** 36 **D)** 48 **E)** 60

3 Para enumerar las páginas de un libro, empezando por la página 1, hemos necesitado 600 dígitos (por ejemplo, para numerar la página 23 hemos necesitado 2 dígitos, y para numerar la 122 hemos necesitado 3). ¿Cuántas páginas tiene el libro?

A) 136 **B)** 137 **C)** 236 **D)** 600 **E)** Nada de lo anterior.

4

La igualdad $A + B + C + \grave{}D + E = FG$ representa la suma de cinco números de una cifra que es igual a un número de dos cifras, donde todas las cifras que aparecen son distintas. Si el número FG es el mayor posible, ¿cuál es el valor de G?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

5 En una hoja de papel hay escrito un número. De las cuatro afirmaciones siguientes, tres son verdaderas y la otra es falsa.

I El número es el 1. **III** El número no es el 3.
II El número es el 2. **IV** El número no es el 4.

De los siguientes enunciados, ¿cuál de ellos es siempre correcto?

A) I es falsa **B) II** es verdadera **C) II** es falsa **D) III** es falsa **E) IV** es verdadera

6 Las gráficas de $y = -|x-a| + b$ e $y = |x-c| + d$ se cortan en los puntos (2, 5) y (8, 3). El valor de $a + c$ es:

A) 5 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 13

7 El triángulo de lados 3, 4, y 5 divide el interior de su circunferencia circunscrita en cuatro regiones. Sean A, B y C las áreas de las regiones no triangulares, siendo C la mayor. Entonces:

A) $A + B = C$ **B)** $A^2 + B^2 = C^2$ **C)** $A + B + 6 = C$
D) $4A + 3B = 5C$ **E)** $\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} = \frac{1}{C^2}$

8 Las letras a, b, c, d, e, f del dibujo adjunto han sido sustituidas por los números 2, 4, 5, 6, 8, 9 (en algún orden) de forma que la suma de los elementos de cada fila y cada columna es siempre el mismo número, k. ¿Qué número es k?

7	a	b	1
c			d
3	e	f	10

A) 15 **B)** 16 **C)** 17 **D)** 19 **E)** 21

9 Si x, y, z son números reales que satisfacen las igualdades $x + \frac{1}{y} = 4$, $y + \frac{1}{z} = 1$, $z + \frac{1}{x} = \frac{7}{3}$, el valor de xyz es:

A) $\frac{2}{3}$ **B)** 1 **C)** $\frac{4}{3}$ **D)** 2 **E)** $\frac{7}{3}$

10 Desde un determinado punto de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, trazamos paralelas a los catetos de éste que dividen al triángulo en un cuadrado y dos triángulos rectángulos pequeños. Si el área de uno de estos triángulos pequeños es *m* veces el área del cuadrado, ¿cuál es el cociente entre el área del otro triángulo y el área del cuadrado?

A) $\frac{1}{2m+1}$ **B)** m **C)** $1-m$ **D)** $\frac{1}{4m}$ **E)** $\frac{1}{8m^2}$

11 El segmento que une los puntos medios de las diagonales de un trapecio mide 3 cm de longitud. Si la base mayor del trapecio mide 97 cm, la longitud, en centímetros, de la base menor es:

A) 94 **B)** 92 **C)** 91 **D)** 90 **E)** 89

12 En la siguiente igualdad, cada letra representa una cifra (letras distintas, cifras distintas) y cada *palabra* un número de dos o tres cifras. $(VA)\cdot(CA)=MMM$. ¿Cuánto vale $A+C+M+V$?

A) 19 **B)** 20 **C)** 21 **D)** 22 **E)** 24

13 Para cada número real x, sea $f(x)$ el mínimo de los números $4x+1$, $x+2$ y $-2x+4$. ¿Cuál es el máximo valor para $f(x)$?

A) $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{2}{3}$ **D)** $\frac{5}{2}$ **E)** $\frac{8}{3}$

14 Sea f una función lineal tal que $f(1) \leq f(2)$ y $f(3) \geq f(4)$. Si $f(5) = 5$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) $f(0) < 0$ **B)** $f(0) = 0$ **C)** $f(1) < f(0) < f(-1)$ **D)** $f(0) = 5$
E) $f(0) > 5$

15 Si a, b y c son tres números (no necesariamente distintos) elegidos al azar en el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, la probabilidad de que $ab + c$ sea par es:

A) $\frac{2}{5}$ **B)** $\frac{59}{125}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{64}{125}$ **E)** $\frac{3}{5}$

16 Los puntos $A(3, 9)$, $B(1, 1)$, $C(5, 3)$ y $D(a, b)$ están en el primer cuadrante y son los vértices del cuadrilátero *ABCD*. Si el cuadrilátero formado uniendo los puntos medios de los lados *AB*, *BC*, *CD* y *DA* es un cuadrado, ¿cuál es la suma de las coordenadas del punto *D*?

A) 7 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 16

17 El producto de los cuatro enteros positivos a, b, c y d es 8!. Si $ab + a + b = 524$, $bc + b + c = 146$ y $cd + c + d = 104$, ¿cuánto vale $a - d$?

A) 4 **B)** 6 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 12

18 Para cada entero positivo $m > 1$, representamos por *P(m)* el mayor factor primo de *m*. Por ejemplo $P(35) = 7$ y $P(289) = 17$. ¿Para cuántos enteros positivos se verifica que $P(n) = \sqrt{n}$ y $P(n + 48) = \sqrt{n + 48}$?

A) 0 **B)** 1 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

19 En el triángulo *ABC* tenemos que $AB = 25$, $BC = 39$ y $AC = 42$. Los puntos *D* y *E*, que están en *AB* y *AC* respectivamente, hacen que $AD = 19$ y $AE = 14$. ¿Cuál es el cociente entre el área del triángulo *ADE* y el área del cuadrilátero *BCDE*?

A) $\frac{266}{1521}$ **B)** $\frac{19}{75}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** $\frac{19}{56}$ **E)** 1

20 Todos los números de teléfonos móviles que nos han ofrecido para el comité organizador de la XLIII Olimpiada Matemática Española son de la forma $66abcdefg$ donde *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* y *g* son números distintos, no son ni 0 ni 1 y además están en orden creciente. ¿Cuántos números de teléfono nos han ofrecido?

A) 1 **B)** 2 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

21 ¿Cuál es la media de todos los números de 5 cifras distintas que pueden formarse con las cifras 1, 3, 5, 7 y 8?

A) 48.000 **B)** 49.999,5 **C)** 53.332,8 **D)** 55.555 **E)** 56.432,8

22 ¿Para cuántos enteros positivos *n* menores o iguales que 24 se verifica que n! es divisible entre $1+2+...+n$?

A) 8 **B)** 12 **C)** 16 **D)** 17 **E)** 21

23 Un subconjunto *B* del conjunto de los enteros 1, 2, …, 100 tiene la propiedad de que no tiene ningún par de elementos que sumen 125. ¿Cuál es el máximo número de elementos que puede tener el subconjunto *B*?

A) 50 **B)** 51 **C)** 62 **D)** 65 **E)** 68

24 En el conjunto $\{2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{25}\}$ elegimos dos números distintos *a* y *b*. ¿Cuál es la probabilidad de que $\log_a b$ sea un entero?

A) $\frac{2}{25}$ **B)** $\frac{31}{300}$ **C)** $\frac{13}{100}$ **D)** $\frac{7}{50}$ **E)** $\frac{1}{2}$

25 Las dos raíces de la ecuación de segundo grado $x^2 - 63x + k = 0$ son números primos. ¿Cuántos valores puede tomar *k*?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 4 **E)** Más de 4

26 Supón que *a* y *b* son dígitos distintos, ninguno cero ni nueve y que el número periódico $0,abababab...$ viene expresado como fracción irreducible. ¿Cuántos denominadores diferentes podría haber?

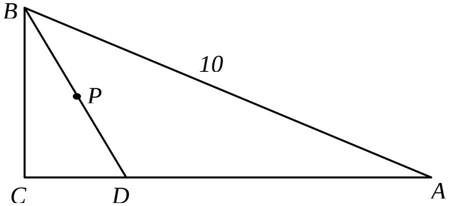
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 8 **E)** 9

27

En el triángulo *ABC*, el lado *AC* y la mediatriz del lado *BC* se cortan en el punto *D*, siendo *BD* bisectriz del ángulo *B*. Si $AD = 9$ y $DC = 7$, el área del triángulo *ABD* es:

A) 14 **B)** 21 **C)** 28 **D)** $14\sqrt{5}$ **E)** $28\sqrt{5}$

28 En el triángulo rectángulo *ABC* de la figura, la hipotenusa *AB* mide 10 cm y el ángulo *B*, 60º. Elegimos al azar un punto *P* en el interior de dicho triángulo y prolongamos la recta *BP* hasta que corte en *D* al lado *AC*. ¿Cuál es la probabilidad de que $BD > 5\sqrt{2}$?



A) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{5-\sqrt{5}}{5}$

29 En el triángulo *ABC*, el lado *AB* mide 1 y el *AC*, 2. Si el otro lado, *BC*, y la mediana desde *A* son de igual longitud, ¿cuál es esta longitud?

A) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ **B)** $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ **C)** $\sqrt{2}$ **D)** $\frac{3}{2}$ **E)** $\sqrt{3}$

30 Para cada entero *n* mayor que 1, definimos $a_n = \frac{1}{\log_n 2006}$. Si $b = a_2 + a_3$ y $c = a_4 + a_{51} + a_{59}$, $b - c$ es igual a:

A) – 2 **B)** – 1 **C)** $\frac{1}{2006}$ **D)** $\frac{1}{2003}$ **E)** $\frac{1}{2}$

XIIª OLIMPIADA de MAYO
Primer Nivel
Mayo de 2006

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

PROBLEMA 1

Un calendario digital exhibe la fecha: día, mes y año, con 2 dígitos para el día, 2 dígitos para el mes y 2 dígitos para el año. Por ejemplo, 01-01-01 es el primero de enero de 2001 y 25-05-23 es el 25 de mayo de 2003. Frente al calendario hay un espejo. Los dígitos del calendario son como los de la figura

Si 0, 1, 2, 5 y 8 se reflejan, respectivamente, en 0, 1, 5, 2 y 8, y los demás dígitos pierden sentido al reflejarse, determina cuántos días del siglo, al reflejarse en el espejo, también corresponden a una fecha.

PROBLEMA 2

Un rectángulo de papel de 3 cm por 9 cm se dobla a lo largo de una recta, haciendo coincidir dos vértices opuestos. De este modo se forma un pentágono. Calcular su área.

PROBLEMA 3

Hay 20 puntos alineados, separados por una misma distancia:

Miguel tiene que pintar de rojo tres o más de estos puntos, de manera tal que los puntos rojos estén separados por una misma distancia y sea imposible pintar de rojo exactamente un punto más sin violar la condición anterior. Determinar de cuántas maneras puede Miguel hacer su tarea.

PROBLEMA 4

Con 150 cubitos blancos de $1 \times 1 \times 1$ se arma un prisma de $6 \times 5 \times 5$, se pintan sus seis caras de azul y luego se desarma el prisma. Lucrecia debe armar un nuevo prisma, sin huecos, usando exclusivamente cubitos que tengan al menos una cara azul y de modo que las caras del prisma de Lucrecia sean todas completamente azules. Dar las dimensiones del prisma de mayor volumen que puede armar Lucrecia.

PROBLEMA 5

En algunas casillas de un tablero de 10×10 se coloca una ficha de manera que se cumpla la siguiente propiedad:
Para cada casilla que tiene una ficha, la cantidad de fichas colocadas en su misma fila debe ser mayor o igual que la cantidad de fichas colocadas en su misma columna.
¿Cuántas fichas puede haber en el tablero? Dar todas las posibilidades.

XIIª OLIMPIADA de MAYO
Segundo Nivel
Mayo de 2006

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

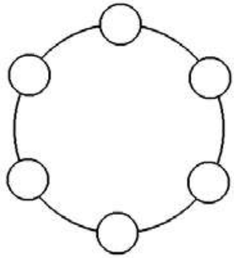
PROBLEMA 1

Determinar todas las parejas de números naturales a y b tales que $\frac{a+1}{b}$ y $\frac{b+1}{a}$ son números naturales.

PROBLEMA 2

En la pizarra están escritos varios números primos (algunos repetidos). Mauro sumó los números de la pizarra y Fernando multiplicó los números de la pizarra. El resultado que obtuvo Fernando es igual a 40 veces el resultado que obtuvo Mauro. Determinar cuáles pueden ser los números de la pizarra. Dar todas las posibilidades.

PROBLEMA 3

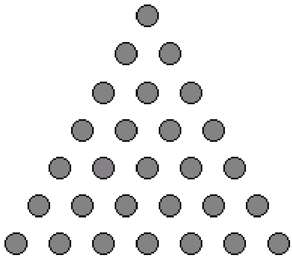


Escribir un número entero positivo en cada casilla de modo que:
Los seis números sean distintos.
La suma de los seis números sea 100.
Si se multiplica cada número por su vecino (en el sentido de las agujas del reloj) y se suman los seis resultados de esas multiplicaciones se obtenga el menor valor posible.
Explicar por qué no se puede obtener un valor menor.

PROBLEMA 4

Sea *ABCD* un trapecio de bases *AB* y *CD*. Sea *O* el punto de intersección de sus diagonales *AC* y *BD*. Si el área del triángulo *ABC* es 150 y el área del triángulo *ACD* es 120, calcular el área del triángulo *BCO*.

PROBLEMA 5



Con 28 puntos se forma una “rejilla triangular”, de lados iguales, como se muestra en la figura.
Una operación consiste en elegir tres puntos que sean los vértices de un triángulo equilátero y retirar esos tres puntos de la rejilla. Si luego de realizar varias de esas operaciones queda solamente un punto, ¿en qué posiciones puede quedar dicho punto?
Dar todas las posibilidades e indicar en cada caso las operaciones realizadas.
Justificar por qué el punto no puede quedar en otra posición.

12 Olimpiada de Mayo (2006)
Soluciones y pautas de corrección
Primer Nivel

Problema 1

Un calendario digital exhibe la fecha: día, mes y año, con 2 dígitos para el día, 2 dígitos para el mes y 2 dígitos para el año. Por ejemplo, 01-01-01 es el primero de enero de 2001 y 25-05-23 es el 25 de mayo de 2003. Frente al calendario hay un espejo. Los dígitos del calendario son como los de la figura

Si 0, 1, 2, 5 y 8 se reflejan, respectivamente, en 0, 1, 5, 2 y 8, y los demás dígitos pierden sentido al reflejarse, determina cuántos días del siglo, al reflejarse en el espejo, también corresponden a una fecha.

Solución

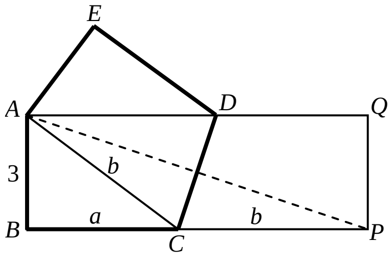
Cualquier combinación de dígitos representa un año, así que si un día al reflejarse tiene sentido, corresponde a un año. Los días que se reflejan en años son 14:
01, 02, 05, 08 , 10, 11, 12, 15, 18, 20, 21, 22, 25, 28.
Por ende, también son 14 los años que se reflejan en días (los simétricos de la lista anterior): 10, 50, 20, 80, 01, 11, 51, 21, 81, 05, 15, 55, 52, 85.
Los meses que se reflejan en meses son 3: 01, 10 y 11.
En total hay 14×14×3 = 588 fechas que se reflejan en fechas.

Pautas de corrección:

Descubre que los días se reflejan en años y los meses en meses (puede ser a través de ejemplos)	2 puntos
Halla los días que se reflejan en años	Hasta 4 puntos
Halla los meses que se reflejan en meses	1 punto
Halla los años que se reflejan en días	1 punto
Halla el resultado correcto	2 puntos
TOTAL	10 puntos

Problema 2

Un rectángulo de papel de 3 cm por 9 cm se dobla a lo largo de una recta, haciendo coincidir dos vértices opuestos. De este modo se forma un pentágono. Calcular su área.



Solución

Sea *ABCD* el pentágono que se obtiene al doblar el papel. El doblez *CD* es perpendicular a la diagonal *AP*

del rectángulo y el punto de intersección de ambos es el centro del rectángulo.
Si $BC = a$ y $AC = b$ entonces $DQ = BC = a$ y $AD = PC = AC = b$
Luego $a + b = BP = 9$ y como el triángulo ABC es rectángulo en B tenemos
$3^2 + a^2 = b^2$, de donde $9 + a^2 = (9 - a)^2$; $9 = 81 - 18a$ y resulta $a = 4$ y $b = 5$.
Luego área (ABC) = área (ADE) = $3 \cdot 4/2 = 6$.
Como BC es paralelo a AD, la altura del triángulo ACD trazada desde C es igual a AB, luego $\acute{a}rea(ACD) = \dfrac{AD \times AB}{2} = \dfrac{5 \times 3}{2} = \dfrac{15}{2}$.
Finalmente, área($ABCDE$) = área(ABC) + área(ACD) + área(ADE) = 2×6+15/2 =39/2.

Pautas de corrección

Descubre que los triángulos *ABC* y *AED* son iguales	2 puntos
Calcula las longitudes de *BC* y *AC*	2 puntos
Descompone el triángulo en otras figuras (3 triángulos, un triángulo y un trapecio, etc) y calcula cada área	5 puntos
Calcula el área total	1 punto
TOTAL	10 puntos

Problema 3
Hay 20 puntos alineados, separados por una misma distancia:
. . . .

Miguel tiene que pintar de rojo tres o más de estos puntos, de manera tal que los puntos rojos estén separados por una misma distancia y sea imposible pintar de rojo exactamente un punto más sin violar la condición anterior. Determinar de cuántas maneras puede Miguel hacer su tarea.

Solución I
Numeramos los puntos de izquierda a derecha, de 1 a 20. Si d es la distancia entre puntos rojos consecutivos, el primer punto rojo es menos o igual que d (para que no se pueda agregar un punto rojo antes). Por otra parte, si el primer punto rojo es x, también son rojos x + d y x + 2d, de modo que $1 + 2d \leq 20$, y tenemos $1 \leq d \leq 9$. Además, para las distancias d menores o iguales que 6 hay d maneras de elegir los puntos, según que el primer punto marcado sea 1, 2 ó d. Para las distancias mayores que 6, el primer punto tiene que ser menor o igual que 20 – 2d, para que se puedan marcar al menos tres puntos, y hay 20 – 2d elecciones para cada d entre 7 y 9. En total son 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 5 + (20 – 14) + (20 – 16) + (20 – 18) = 33 posibilidades.

Solución II
Con separación 1 hay una sola distribución: pintar todos los puntos de rojo.
Con separación 2 hay dos distribuciones: pintar los impares (1,3,5, .., 19) o pintar los pares(2,4,6,...20)

Con separación 3 hay 3 distribuciones: 1,4,7,10,13,16,19; 2,5,8,11,14,17,20; 3,6,9,12,15,18.
Con separación 4 hay 4 distribuciones: comenzando con 1, o con 2 o con 3 o con 4.
Con separación 5 hay 5 distribuciones: comenzando con 1, o con 2, o con 3, o con 4 o con 5.
Con separación 6 hay 6 distribuciones : comenzando en un punto desde 1 hasta 6.
Con separación 7 hay 6 distribuciones: 1,8,15; 2,9,16; 3,10,17; 4,11,18; 5,12,19 y 6,13,20.
Con separación 8 hay 4 distribuciones: 1,9,17; 2,10,18; 3,11,19 y 4,12,20.
Con separación 9 hay 2 distribuciones: 1,10,19 y 2,11,20.
En total son 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 6 + 4 + 2 = 33 elecciones posibles para los puntos rojos.

Pautas de corrección
Solución I

Descubre dónde tiene que pintar el primer punto para que no se pueda agregar un punto a la izquierda	3 puntos
Descubre dónde tiene que pintar el primer punto para que se puedan pintar al menos 3 puntos	3 puntos
Cuenta bien todos los casos	4 puntos
TOTAL	10 puntos

Solución II

Cuenta bien las maneras con separación 1 y 2	1 punto
Cuenta bien las maneras con separación 3 y 4	2 puntos
Cuenta bien las maneras con separación 5 y 6	2 puntos
Cuenta bien las maneras con separación 8,8 y 9	Hasta 4 puntos
Da el total correcto	1 punto
TOTAL	10 PUNTOS

Problema 4
Con 150 cubitos blancos de $1 \times 1 \times 1$ se arma un prisma de $6 \times 5 \times 5$, se pintan sus seis caras de azul y luego se desarma el prisma. Lucrecia debe armar un nuevo prisma, sin huecos, usando exclusivamente cubitos que tengan al menos una cara azul y de modo que las caras del prisma de Lucrecia sean todas completamente azules. Dar las dimensiones del prisma de mayor volumen que puede armar Lucrecia.
Solución
El prisma de $6 \times 5 \times 5$ pintado de azul contiene $4 \times 3 \times 3 = 36$ cubitos completamente blancos, que son los que forman el prisma de $4 \times 3 \times 3$ en el centro del prisma inicial. Los restantes $150 - 36 = 114$ cubitos tienen al menos una cara azul. Los 8 cubitos de los

vértices tienen 3 caras azules (concurrentes); los cubitos de las aristas, excepto los 8 de los vértices, tienen exactamente dos caras azules (adyacentes). De estos cubitos hay 4 por cada arista de longitud 6 y 3 por cada arista de longitud 5, de modo que el prima inicial tiene $4 \times 4 + 8 \times 3 = 40$ cubitos con 2 caras azules. Los restantes $114 - 8 - 40 = 66$ cubitos tienen exactamente una cara azul.
En el nuevo prisma de Lucrecia, no es posible que una dimensión sea 1, porque entonces se necesitarían cubitos con dos caras opuesta azules, cosa que no ocurre con ninguno de los 114 disponibles.
Veamos que Lucrecia no puede usar los 114 cubitos. En efecto, como $114 = 2\times3\times19$, cualquier prisma formado usando los 114 cubitos disponibles tendrá una dimensión igual a 19 o a un múltiplo de 19. Por lo tanto habrá 4 aristas de longitud mayor o igual que 19. Esas 4 aristas requieren cada una al menos 17 cubitos de dos lados adyacentes azules, lo que hace un total de $17\times4 = 68$ de estos, cantidad que excede los 40 disponibles.
Si se descarta sólo 1 cubito, quedan 113, número primo: el único prisma posible sería de $1 \times 1 \times 113$, y no se puede lograr.
Luego Lucrecia debe descartar al menos 2 cubitos. Veamos que con $112 = 2^4 \times 7$ cubitos es posible armar un prisma azul de $4 \times 4 \times 7$:
Los vértices se cubren con los 8 cubitos de 3 caras azules,
Las 8 aristas de longitud 4 se cubren con 16 cubitos de 2 caras adyacentes azules
Las 4 aristas de longitud 7 se cubren con 20 cubitos de dos caras adyacentes azules. Se usan en total 36 de los 40 cubitos de dos caras azules. Para completar el prisma completamente azul, solo hay que cuidar que todos los de las caras tengan una cara azul a la vista.
Este es el único prisma azul que se puede armar con 112 cubitos.

Pautas de corrección

Cuenta cuántos cubos pintados hay	1 punto
Cuenta cuántos son los cubos con una cara pintada (66), con 2 caras (40) y con 3 caras (8)	2 puntos
Descarta la posibilidad de un prisma con 114 cubitos	3 puntos
Descarta la posibilidad de un prisma con 113 cubitos	1 punto
Muestra cómo armar un prisma azul con 112 cubitos	3 puntos
TOTAL	10 puntos

Las siguientes puntuaciones no se acumulan con las anteriores:

Cuenta cuántos cubos pintados hay	1 punto
Cuenta cuántos son los cubos con una cara pintada (66), con 2 caras (40) y con 3 caras (8)	2 puntos
Muestra que es posible armar algún prisma de volumen mayor o igual que 80 (por ejemplo, el de $4 \times 4 \times 6$)	1 punto
TOTAL	4 puntos

Problema 5
En algunas casillas de un tablero de 10 x 10 se coloca una ficha de manera que se cumpla la siguiente propiedad:
Para cada casilla que tiene una ficha, la cantidad de fichas colocadas en su misma fila debe ser mayor o igual que la cantidad de fichas colocadas en su misma columna.
¿Cuántas fichas puede haber en el tablero? Dar todas las posibilidades.
Solución
Sea N la cantidad de fichas en el tablero. Demostraremos que N puede tomar cualquier valor desde 0 hasta 10·9 = 90, además de 10^2.
En primer lugar, vemos que N puede tomar cualquier valor entero en los intervalos $\left[10k, 10(k+1)\right]; 0 \le k \le 8$.
Si N = 10*k*, se colocan fichas en todas las casillas de *k* filas.
Si N = 10*k* + *p*, con $1 \le p \le 9 - k$, también se puede escribir N como 9*k* + (*k*+*p*). Luego se pueden distribuir las fichas en un rectángulo de *k* x 9 completo, y *k* + *p* fichas en otra fila, de la siguiente forma
Si N = 10*k* + *p*, con $9 - k < p \le 9$, también se puede escribir N como 10(*p*+*k* – 9) + 9(10 – *p*). Luego se pueden distribuir las fichas en dos rectángulos, uno de dimensión (*p* + *k* – 9)·10 y otro de (10 – *p*)·9.
En todos los casos, cada ficha tiene igual o menor cantidad de fichas en su misma fila que en su misma columna.
La unión de todos los intervalos anteriores permite obtener todos los valores de N desde 1 hasta 10×9 = 90. Además, es obvio que se cumple la propiedad cuando el tablero está completamente vacío o completamente cubierto.
Por otra parte, si $10\times9<N<10^2$, hay menos de 10 casillas vacías, luego existe al menos una columna con fichas en todas ellas. Así, una ficha colocada en la intersección de esta columna y alguna fila que tenga una casilla vacía no cumple la propiedad.
N solo puede tomar los valores 1,2,3 ,....., 90 y 100.

Pautas de corrección

Descarta los números de fichas que no se pueden poner	2 puntos
Muestra cómo colocar N = 10k fichas	1 punto
Muestra cómo colocar N = 10k + p fichas para una familia de valores de p (por ejemplo, hasta 9 – k, o de 9 – k a 9, o al menos k +1)	3 puntos
Muestra todos los casos que faltan	4 puntos
TOTAL	10 puntos

12 Olimpiada de Mayo (2006)
Soluciones y pautas de corrección
Segundo Nivel

Problema 1

Determinar todas las parejas de números naturales a y b tales que $\frac{a+1}{b}$ y $\frac{b+1}{a}$ son números naturales.

Solución

Como $\frac{a+1}{b}$ y $\frac{b+1}{a}$ son números naturales, debe ser $b \le a+1$ y $a \le b+1$. Entonces $a \le b+1 \le a+2$

Analizamos las tres posibilidades:

Si $b + 1 = a$, $\frac{a+1}{b} = \frac{b+2}{b} = 1+\frac{2}{b}$. Este número es entero si y sólo si $b = 1$ ó $b = 2$. Los valores correspondientes a a son, respectivamente, $a = 2$ ó $a = 3$.

Si $b+ 1 = a + 1$, se tiene $\frac{a+1}{b} = \frac{a+1}{a} = 1+\frac{1}{a}$. Este número es entero si y sólo si $a = 1$; entonces $b = 1$.

Por último, si $b + 1 = a + 2$, $\frac{a+1}{b} = \frac{a+2}{a} = 1+\frac{2}{a}$. Este número es entero si y sólo si $a =1$ ó $a = 2$, y los valores correspondientes de b son $b = 2$ ó $b = 3$.

Las únicas parejas posibles son 1 y 1; 1 y 2; 2 y 1; 2 y 3; 3 y 2.

Pautas de corrección

Mediante un análisis correcto encuentra las 5 soluciones (o 3, si no considera el orden)	Hasta 8 puntos
Muestra algún argumento que justifique que no hay otras	Hasta 2 puntos
TOTAL	10 puntos

Puntuaciones que NO se acumulan con los anteriores:
Encuentra la solución (1,1) : 1 punto
Encuentra la solución (1,2) : 2 puntos
Encuentra la solución (2,3) : 2 puntos
TOTAL: 5 puntos.

Problema 2

En la pizarra están escritos varios números primos (algunos repetidos). Mauro sumó los números de la pizarra y Fernando multiplicó los números de la pizarra. El resultado que obtuvo Fernando es igual a 40 veces el resultado que obtuvo Mauro. Determinar cuáles pueden ser los números de la pizarra. Dar todas las posibilidades.

Solución I

Como el producto de los primos es múltiplo de 40, entre los primos hay al menos tres 2 y un 5. Además, estos no son los únicos primos que hay, pues 40×(2+2+2+5)>2×2×2×5. Sea q el mayor de los restantes primos; denotemos S a la suma y P al producto de los restantes primos, sin contar ni a q, ni los tres doses ni el cinco. Entonces,

$$40\times(2+2+2+5+q+S) = 2\times2\times2\times5\times q\times P,$$

es decir, $11 + q + S = q\times P$

Como el producto de uno o más números mayores que 1 es mayor o igual que su suma, tenemos que $P \geq S$, y en consecuencia, $11+q+S \geq q\times S$. (1)

Esta desigualdad equivale a $12 \geq q\times S - q - S + 1 = (q-1)(S-1)$.

Por lo tanto, $q-1 \leq 12$, y los valores posibles de q son 13, 11, 7, 5, 3 y 2.

Si $\boldsymbol{q = 13}$, la única posibilidad para S es 2. En tal caso, los nuevos primos son 2 y 13, luego $q = 13$ y $P = 2$, y efectivamente, 11 + 13 + 2 = 13×2.

Si $\boldsymbol{q = 11}$, de nuevo la única posibilidad es $S = 2$. En tal caso, los nuevos primos son 11 y 2, pero 11 + 11 + 2 es distinto de 11×2.

Si $\boldsymbol{q = 7}$, las posibilidades para S son $S = 2$ y $S = 3$. En el primer caso los nuevos primos son 7 y 2, y $q = 7$, $P = 2$, pero 11 + 7 + 2 es distinto de 2×7, y no es solución. En el segundo caso los nuevos primos son 3 y 7, y $q = 7$, $P = 3$, y efectivamente 11 + 7 + 3 = 3×7

Si $\boldsymbol{q = 5}$, las posibilidades para S son $S = 2, 3, 4$. En el primer caso, los nuevos primos son 2 y 5, y $q = 5$, $P = 2$; tenemos $11 + 5 + 2 \neq 5\times2$, y no hay solución. En el seundo caso, los nuevos primos son 3 y 5, luego $q = 5$, $P = 3$. Como $11 + 2 + 3 \neq 5\times3$, no hay solución. En el tercer caso, los nuevos primos son 2, 2 y 5, y $q = 5$ y $P = 4$.

Se verifica que 11 + 5 + 4 = 5×4.

Si $\boldsymbol{q = 3}$, las posibilidades para S son 2, 3, 4, 5, 6 y 7, y los nuevos primos solo pueden ser 2 y 3, pues son menores o iguales que 3. La ecuación (1) es $11 + 3 + S = 3P$. Luego $14 + S$ debe ser múltiplo de 3. De los posibles valores de $14 + S$, los únicos múltiplos de 3 son: 14 + 4 = 18 y 14+7 = 21. Si $S = 4$, entonces los nuevos primos son 2, 2 y 3, y $q = 3$, $P = 4$. Como $14 + 4 \neq 3\times4$, no es solución; si $S = 7$, los nuevos primos son 2, 2, 3 y 3 y $q = 3$, $P = 12$. Como $14 + 7 \neq 3\times12$ tampoco hay solución. Por lo tanto se descarta la posibilidad $q = 3$.

Si $\boldsymbol{q = 2}$, los nuevos primos solo pueden ser 2. Entonces S es par, y $11 + q + S = 11 + 2 + S$ es impar, mientras que $qP = 2P$ es par. Por lo tanto en este caso no hay soluciones.

En total, hay tres posibilidades para los números de la pizarra:

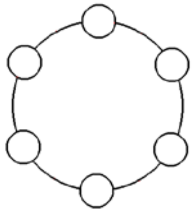
2,2,2,2,5,13   2,2,2,3,5,7   y   2,2,2,2,2,5,5.

Pautas de corrección

Separa $2^3\times5$ del producto de los primos y separa 2 + 2 + 2 + 5 de la suma de los primos	1 punto

Acota el mayor primo q ($q \leq 13$)	Hasta 3 puntos
Descarta los casos q = 11, 3 y 2	Hasta 3 puntos
Resuelve los casos q = 13, 7 y 5	Hasta 3 puntos
TOTAL	10 puntos

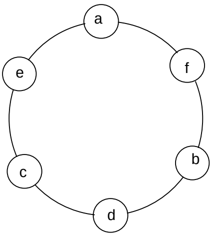
Problema 3



Escribir un número entero positivo en cada casilla de modo que:
Los seis números sean distintos.
La suma de los seis números sea 100.
Si se multiplica cada número por su vecino (en el sentido de las agujas del reloj) y se suman los seis resultados de esas multiplicaciones se obtenga el menor valor posible.
Explicar por qué no se puede obtener un valor menor.

Solución

La respuesta son los números 1, 5, 3, 4, 2, 85 en el sentido horario, o sus simetrías y rotaciones.
El resultado es 85 + 85×2 + 2×4 + 4×3 + 3×5 + 5 = 295.
Vamos a justificar por qué este es el menor valor posible.
Sean $a > b > c > d > e > f$ los seis números, escritos en orden decreciente. Si la suma es mínima, los vecinos de *a* (el mayor) son *e* y *f* (los dos más pequeños). En efecto, si *f* no es vecino de *a*, recorremos los números, saliendo de *a* de uno a su vecino, hasta encontrar *f*, y luego hacemos una especie de simetría: reemplazamos *x*,…,*f* por su inversa *f*,…,*x*. En ésta *x* es vecino de *a*, y los puntos suspensivos son los números que se recorren hasta encontrar *f*. Rehaciendo la suma de los productos de cada número por su vecino, los únicos sumandos que cambian son *ax* y *fy* (*y* es vecino de *f*), que se sustituyen por *af* y *xy*.
Como $ax + fy > af + xy$, pues esta desigualdad es equivalente a $a(x - f) > y(x - f)$, cierta pues *a* es el mayor de los seis números, la suma disminuye.
Análogamente, el otro vecino de *a* debe ser *e*.
Repitiendo este argumento, se llega a que, una vez elegidos los seis números, el orden relativo que produce menor suma es *a, f, b, d, c, e* (sentido de las agujas del reloj).



Ahora veamos cómo determinar los seis números. Como son distintos y suman 100, el mayor valor posible de *a* es:
85 = 100 – (1 + 2 + 3 + 4 + 5).
Verifiquemos que 85,5,4,3,2,1 son los números con los que se obtiene suma mínima:
Si a = 85 – t entonces
$b = 5 + i, c = 4 + j, d = 3 + h, e = 2 + k,\ f = 1 + l$, con *i,j,h,l* y *k* enteros no negativos que verifican $i + j + h + l + k = t$.

La nueva suma es

$$(85-t)(1+l)+(85-t)(2+k)+(5+i)(1+l)+(5+i)(3+h)+(4+j)(2+k)+(3+h)(4+j)=$$
$$85+2\times85+5+5\times3+4\times2+3\times4+85l-tl-t+85k-2t-tk+5l+i+il+5h+3i+ih+4k+$$
$$2j+jk+3j+4h+jh=295+87l+i+86k+2j+6h+il+ih+jk+jh-tl-tk.$$

Como $87l\geq tl$ y $86\text{k}\geq tk$, la expresión es mayor que 295.

Pautas de corrección

Encuentra los seis números y los ubica correctamente	4 puntos
Demuestra que cualesquiera que sean los seis números elegidos la ubicación que corresponde al mínimo tiene un patrón determinado	3 puntos
Demuestra que para cualquier otra elección de los números distinta de 85,5,4,3,2,1 la suma de los productos es mayor que 295	3 puntos
TOTAL	10 puntos

Los siguientes puntajes no se acumulan con los anteriores:

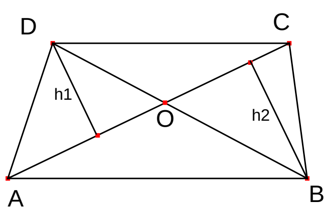
Encuentra los seis números y los ubica correctamente	4 puntos
Demuestra que para 1,2,3,4,5,85 la ubicación elegida corresponde al mínimo de todas las ubicaciones de esos números	2 puntos
Sobre la ubicación óptima, modifica algunos números y ve que obtiene una suma mayor	1 punto
TOTAL	7 puntos

No acumulable a los anteriores:
Da una respuesta en que la suma de los seis productos está entre 296 y 300: 2 puntos

Problema 4
Sea *ABCD* un trapecio de bases *AB* y *CD*. Sea *O* el punto de intersección de sus diagonales *AC* y *BD*. Si el área del triángulo *ABC* es 150 y el área del triángulo *ACD* es 120, calcular el área del triángulo *BCO*.

Solución I
Los triángulos *ACD* y *BCD* tienen igual área, pues los vértices *A* y *B* pertenecen a una recta paralela al lado común *CD*. Consecuentemente, los triángulos *ADO* y *BCO* tienen igual área, ya que el área del triángulo *OCD* es común.

Llamemos S_1 al área del triángulo *AOB*, S_2 al área de los triángulos *BOC* y *ADO*, y S_3 el área del triángulo *OCD*. Si h_1 es la altura de los triángulos *ADO* y *COD* trazada desde *D*, tenemos $\frac{S_2}{S_3}=\frac{\frac{1}{2}AO\cdot h_1}{\frac{1}{2}CO\cdot h_1}=\frac{AO}{CO}$



Análogamente, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} AO \cdot h_2}{\frac{1}{2} CO \cdot h_2} = \frac{AO}{CO}$.

Por lo tanto, $S_2^2 = S_1 \cdot S_3$. (1)

Como $S_1 + S_2 = 150$ y $S_3 + S_2 = 120$, tenemos que $S_1 = 150 - S_2$ y $S_3 = 120 - S_2$.

Sustituyendo estos valores en (1): $S_2^2 = (150 - S_2)(120 - S_2) = 150 \cdot 120 - 150(S_2 + S_1) + S_2^2$

y obtenemos $S_2 = \frac{150 \times 120}{270} = \frac{200}{3}$.

Solución II

Los triángulos *ACD* y *BCD* tienen igual área, pues los vértices *A* y *B* pertenecen a una recta paralela al lado común *CD*. Entonces área(*BCD*) = 120.

Sean h_1 y h_2 las alturas de los triángulos *ACD* y *ABC* correspondientes al lado *AC*.

Entonces $área(ACD) = \frac{AC \cdot h_1}{2}$ y $área(ABC) = \frac{AC \cdot h_2}{2}$.

En consecuencia, $\frac{h_1}{h_2} = \frac{150}{120} = \frac{5}{4}$.

Los triángulos *BOC* y *COD* comparten la base *OC*, y las alturas correspondientes a dicha base son, respectivamente h_2 y h_1, luego $área(BOC = \frac{OC \cdot h_2}{2}$ y $área(COD = \frac{OC \cdot h_1}{2}$.

Entonces, $\frac{área(BOC)}{área(COD)} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{5}{4}$.

Como los triángulos *BOC* y *COD* unidos forman el triángulo *BCD*, de la relación anterior se desprende que

$$área(BOC) = \frac{5}{9} área(BCD) = \frac{5}{9} \cdot 120 = \frac{200}{3}$$

Pautas de corrección

Solución I

Observa que área (*AOD)* = área(*BOC)*	1 punto
Halla la relación $S_2^2 = S_1 \cdot S_3$	6 puntos
Calcula S_2	3 puntos
TOTAL	10 puntos

Solución II

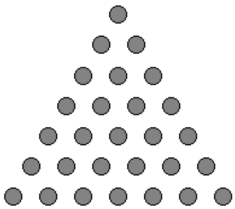
Observa que área(*BCD*) = área(*BOC*)	1 punto

Obtiene la proporción entre las alturas de los triángulos *ACD* y *ABC* y la utiliza para la proporción entre las áreas de los triángulos *BOC* y *COD*	6 puntos
Calcula S_2	3 puntos
TOTAL	10 puntos

Los siguientes puntajes NO se acumulan con los anteriores:
Considera un trapecio que verifique las condiciones del problema (por ejemplo, un trapecio de altura 6 y bases 60 y 40) y resuelve correctamente: hasta 6 puntos.

Problema 5

Con 28 puntos se forma una "rejilla triangular", de lados iguales, como se muestra en la figura.



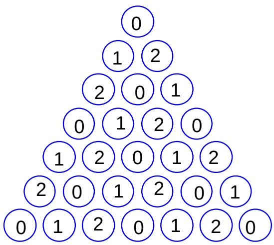
Una operación consiste en elegir tres puntos que sean los vértices de un triángulo equilátero y retirar esos tres puntos de la rejilla. Si luego de realizar varias de esas operaciones queda solamente un punto, ¿en qué posiciones puede quedar dicho punto?

Dar todas las posibilidades e indicar en cada caso las operaciones realizadas.

Justificar por qué el punto no puede quedar en otra posición.

Solución

Etiquetamos cada punto con un 0, un 1 ó un 2 como en la figura.



Afirmamos lo siguiente: si tomamos dos puntos de la rejilla con el mismo número, el punto que forme con ellos un triángulo equilátero debe tener el mismo número.

Esto se puede verificar, por ejemplo, agotando todos los casos posibles (la simetría de la figura reduce el número de casos).

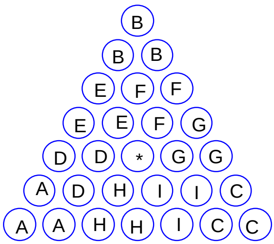
De la afirmación anterior se deduce que las ternas de números de tres puntos de la rejilla que sean vértices de un triángulo equilátero deben ser una de las siguientes: 0 – 0 – 0 (suma 0); 1 – 1– 1 (suma 3); 2 – 2 – 2 (suma 6); 0 – 1 – 2 (suma 3).

Luego vemos que la suma de las etiquetas de dichos vértices es siempre múltiplo de 3.

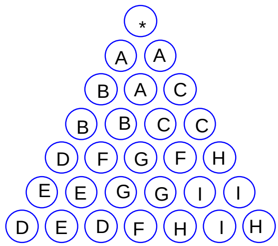
Como la suma al inicio es 10×0 + 1×9 + 2×9 = 27 y cada vez que se retiran puntos que son vértices de un triángulo equilátero se retiran puntos cuya suma es múltiplo de 3, si queda al final un punto, este debe tener un número que sea múltiplo de 3, es decir, únicamente

puede quedar el 0. De aquí, las posiciones posibles para el último punto son las que ocupa el 0 en el referido etiquetado.
Solo nos falta ahora dar un ejemplo para cada una de las posiciones de 0. Por la simetría de la figura, solo necesitamos dar ejemplos para cuatro posiciones.
Colocamos letras iguales para puntos de un mismo triángulo equilátero retirado y un * para el último punto.

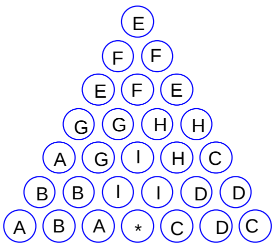
a) Cuando el último punto está en el centro



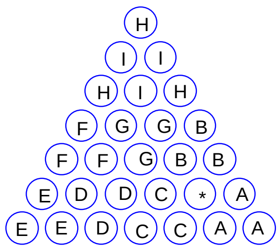
b) Cuando el último punto es un vértice



c) Punto medio del lado



d) Punto medio del segmento centro-vértice



Pautas de corrección.

Responde correctamente cuáles son las posiciones en que puede quedar el punto	1 punto
Da un ejemplo de cada una de las posiciones esencialmente distintas (1 punto por caso)	4 puntos
Demuestra que las otras posiciones son imposibles	5 puntos
TOTAL	10 puntos

Relación de ganadores en la "XII OLIMPIADA DE MAYO – 2007"

PRIMER NIVEL

	Apellidos y nombre	**Centro**	**Localidad**	**Premio**
1	Peña Castillo, Diego	Colegio Amor Misericordioso	Madrid	ORO
2	Esteban de la Iglesia, Lorenzo	Colegio Fray Luis de León	Madrid	PLATA
3	Hernández Martín, Arturo	CP Maestra Trinidad García	Fuenlabrada	PLATA
4	Sánchez Salvador, José L.	IES María Guerrero	Collado Villalba	BRONCE
5	Boixeda Álverez, Pablo	Colegio Alemán	Madrid	BRONCE
6	Solanet Mayou, Fernando	Colegio Highlands	Alcobendas	BRONCE
7	Henry Mantilla, Daniel	Liceo Francés	Madrid	BRONCE
8	González Fernández, Alberto	Colegio Joyfe	Madrid	MENCIÓN
9	Lorenzo García, Vicente	IES Fortuny	Madrid	MENCIÓN
10	Plaza Ramos, Pedro	Colegio Ntra Sra de Fátima	Madrid	MENCIÓN

	SEGUNDO NIVEL	**Centro**	**Localidad**	
1	Jiménez Benito, Rubén	IES José Hierro	Getafe	ORO
2	Fernández Alcázar, Andrés	Colegio SEK Ciudalcampo	Tres Cantos	PLATA
3	González Ortega, Jorge	Colegio Base	Madrid	PLATA
4	Herradón Cueto, Moisés	Colegio Brains	Alcobendas	BRONCE
5	Sánchez Díaz, Jesús María	Colegio Vedruna	Madrid	BRONCE
6	del Barrio Rey, Miguel	IES Parque de Lisboa	Alcorcón	BRONCE
7	Ruiz Domínguez, Carlos	Colegio San Viator	Madrid	BRONCE
8	Roquero Giménez, Jaime	Liceo Francés	Madrid	MENCIÓN
9	Blázquez García, Rodrigo	IES Gran Capitán	Madrid	MENCIÓN
10	Amorós Aldea, Vicente	Colegio El Prado	Madrid	MENCIÓN

Dirección General de Mejora de la Calidad de la Enseñanza
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN
Comunidad de Madrid

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Consejo Social de la UCM

sm

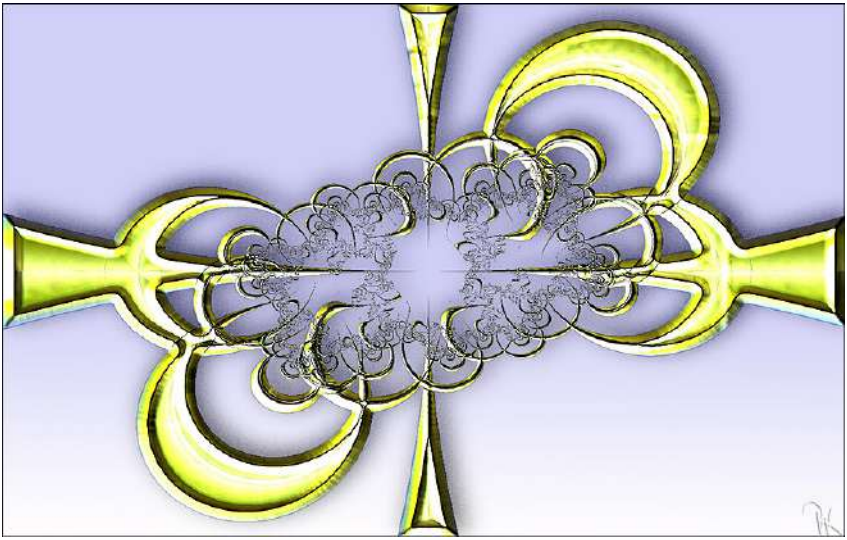
ANAYA

El Corte Inglés

sas.

EDUCAMADRID

YALOS INSTRUMENTS, S.L.



XII Concurso de Primavera de

MATEMÁTICAS

2008

Comunidad de Madrid

Comité organizador del Concurso de Primavera

Juan Jesús Donaire Moreno
Jesús García Gual
Joaquín Hernández Gómez
Alfredo Martínez Sanz
Víctor Manuel Sánchez González
Javier Soler Areta
José María Sordo Juanena

Luis Ferrero de Pablo
María Gaspar Alonso-Vega
Francisco López Álvarez
María Moreno Warleta
Merche Sánchez Benito
Esteban Serrano Marugán

$$e^{i\pi}+1=0$$

Euler (1707 –1783)

Presentación

Y nos dieron la diez, y las once, y ahora nos dan las uvas. Doce años lleva ya el Concurso de Primavera. Ha cumplido toda una etapa escolar entre tres leyes de Educación, LOGSE, LOCE Y LOE, que han puesto más empeño en quitar letras al nombre de la ley, que en recuperar horas de Matemáticas. Y luego, nos liamos los Pisa a la cabeza (¿no será hora de cambiar de expertos?). Y en los programas los temas revoltosillos, los que se atragantan, primero se retrasan y luego simplemente desaparecen.

Primero fue la ecuación de 2º grado: Incompleta hasta que sepan resolver con regla de tres cuántas patas tiene un gato.

Después fue el álgebra: Antes de usar letras griegas tienen que conocer las letras vernáculas.

El binomio de Newton: ¡Al Bachillerato!

....

Ahora le toca a los complejos: ¡A la Historia!

Pero nosotros, "venimos simplemente a trabajar, como uno más, a arrimar el hombro al tajo. Ésta nuestra esperanza, nuestras voces. Ésta nuestra canción, ¡nuestro trabajo!" ***(La Bullonera).***

Comité Organizador

Agradecimientos:

- *A los alumnos, a sus profesores y a sus padres.*
- *A la Facultad de Matemáticas, al Consejo Social y al Vicerrectorado de Alumnos de la U.C.M.*
- *A la Fundación SAS*
- *A la Dirección General de Mejora de la Calidad de la Enseñanza.*
- *A Educamadrid*
- *A las editoriales* Grupo ANAYA y Ediciones S.M.
- *Al grupo empresarial* El Corte Inglés.

XI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE : Día 28 de febrero de 2007

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ (☒) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA.**
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
www.profes.net (SM) - Grupo ANAYA - El Corte Inglés
Yalos Instruments, S.L. - SAS

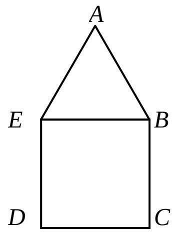
1 Isabel cumplió 12 años en enero del 2007 y su tío Esteban cumplió el triple de años en el siguiente mes. ¿En qué año nació Esteban?

A) 1968 **B)** 1969 **C)** 1970 **D)** 1971 **E)** 1995

2 ¿Cuál es el resultado de $\dfrac{0{,}001 \times 400}{0{,}02}$?

A) 0,2 **B)** 4 **C)** 20 **D)** 200 **E)** 400

3 *ABE* es un triángulo equilátero de 36 cm de perímetro y *BCDE* un cuadrado. ¿Cuál es, en centímetros, el perímetro del pentágono *ABCDE*?



A) 48 **B)** 60 **C)** 72 **D)** 108 **E)** 180

4 Bárbara tiene seis vestidos, cuatro pares de zapatos y tres sombreros distintos. ¿De cuántas formas distintas puede vestirse Bárbara si siempre lleva vestido, zapatos y sombrero?

A) 72 **B)** 36 **C)** 18 **D)** 12 **E)** 3

5 Dibujamos un hexágono regular con todas sus diagonales. ¿En cuántas regiones queda dividido el polígono?

A) 18 **B)** 6 **C)** 30 **D)** 12 **E)** 24

6 Lucía tiene dos terrenos separados de igual área. Uno es rectangular de 18 por 50 metros y el otro es cuadrado. ¿Cuántos metros de valla necesita para rodear ambos?

A) 256 **B)** 376 **C)** 392 **D)** 512 **E)** 1800

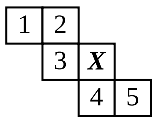
7 Gasté 3/8 de mis ahorros en un regalo para mi hermano. Si aún me quedan 45,60 euros, ¿cuántos euros costó el regalo?

A) 9,12 **B)** 15,20 **C)** 17,10 **D)** 24,32 **E)** 27,36

8 A mi hermano pequeño le encanta recitar en voz alta todos los números naturales desde el *uno* hasta el *cien*.
Cada vez que lo hace, ¿cuántas veces pronuncia la letra **"t"**?

A) 130 **B)** 30 **C)** 110 **D)** 141 **E)** 90

9 Si doblamos la figura para formar un dado, ¿qué número quedará en la cara opuesta a la ***X*** ?



A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

10 En la clase de Víctor hay 5 niñas y 20 niños. Ariel dice: "El 80% somos niños"; Braulio dice: "El 20% somos niños"; Claudio dice: "Cuatro de cada cinco somos niños", y Daniela dice: "Uno de cada cuatro somos niñas." ¿Quiénes están diciendo la verdad?

A) Sólo Daniela **B)** Sólo Ariel **C)** Sólo Braulio y Daniela
D) Sólo Braulio **E)** Sólo Ariel y Claudio

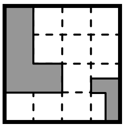
11 2007 es un número como otro cualquiera pero, fíjate, las dos cifras centrales son iguales y las de los extremos suman nueve. ¿Cuántos números de cuatro cifras tiene la misma propiedad que el 2007?

A) 80 **B)** 90 **C)** 81 **D)** 72 **E)** 100

12 Con unos tablones de madera y mucho esmero construí dos mesillas de noche. Resultó que una mesilla tenía 300 termitas que acabaron con ella en 20 minutos. Comiendo al mismo ritmo, ¿cuántas termitas vivían en la otra mesilla si dieron buena cuenta de ella en 25 minutos?

A) 150 **B)** 200 **C)** 240 **D)** 250 **E)** 375

13 ¿Qué fracción de la superficie del cuadrado está sombreada?

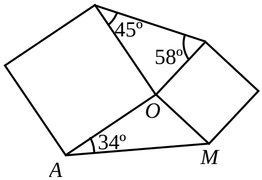


A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{5}{16}$ **C)** $\frac{3}{8}$ **D)** $\frac{7}{16}$ **E)** $\frac{1}{2}$

14 En una fiesta de 48 personas, 20 están bailando. Si de las 25 mujeres que hay, 13 no bailan, ¿cuántos hombres no bailan?

A) 12 **B)** 13 **C)** 8 **D)** 15 **E)** 10

15 La figura está formada por dos cuadrados y dos triángulos.



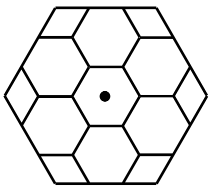
El ángulo $A\hat{M}O$ mide:

A) 43º **B)** 39º **C)** 38º **D)**36º
E) 35º

16 ¿Cuántas veces hay que tirar un dado para asegurar que se repite un resultado cualquiera?

A) 7 **B)** 36 **C)** 120 **D)** 720 **E)** No se puede asegurar por muchas veces que se tire.

17 Si el hexágono grande de la figura tiene 180 cm^2 de área, el área del hexágono central, en cm^2, es:



A) 15 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 30
E) 36

18 En una granja hay conejos y gallinas. En total hay 24 cabezas y 72 patas. ¿Cuál es la diferencia entre el número de conejos y gallinas?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

19 La suma 12345 + 23451 + 34512 + 45123 + 51234 es:

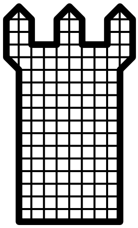
A) 155555 **B)** 166665 **C)** 198765 **D)** 3555555 **E)** 655555

20 Nueve de treinta es el:

A) 30 % **B)** 33 % **C)** 34 % **D)** 27 % **E)** 11 %

21 Si me subo con mi madre en una báscula pesamos 103 kg, y si me subo con mi padre, 113 kg. Si mi padre y mi madre juntos pesan 126 kg, ¿cuántos kilos pesamos los tres juntos?

A) 168 **B)** 169 **C)** 170 **D)** 171 **E)** 172



22 En marzo de este año se celebrará en Torrelodones la XLIII Olimpiada Matemática Española. En la figura aparece la torre más emblemática de Torrelodones que tiene una altura de 17 metros. ¿Cuál es, en m^2, la superficie de la cara representada?

A) 130 **B)** 128 **C)** 122 **D)** 118 **E)** 126

23 - Carmelo forma parte de una inmensa fila india de niños. El primer niño grita "¡5!", el segundo grita "¡18!", el tercero "¡31!", el cuarto "¡44!", el quinto "¡57!" y así todos. Carmelo gritó "¡2007!". ¿Qué lugar ocupa Carmelo en la fila india?

A) 154 **B)** 155 **C)** 156 **D)** 157 **E)** 158

24 Zipi sólo miente los lunes, martes y miércoles, y Zape sólo miente los jueves, viernes y sábados. Un día los dos hermanos tuvieron esta charla: "Ayer me tocó mentir" dijo Zipi. "Pues a mí también me tocó mentir" dijo Zape. ¿En qué día de la semana estaban?

A) Lunes **B)** Martes **C)** Jueves **D)** Sábado **E)** Domingo

25 Entre los jóvenes de 15 años, tres de cada cuatro tienen móvil, dos de cada tres tienen ordenador y uno de cada doce no tiene ni móvil ni ordenador. ¿Cuántos tienen las dos cosas?

A) Uno de cada seis **B)** Uno de cada cuatro **C)** Uno de cada tres
D) La mitad **E)** Siete de cada doce

XI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE : Día 28 de febrero de 2007

NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ ($\boxtimes$) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA.**
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
www.profes.net (SM) - Grupo ANAYA - El Corte Inglés
Yalos Instruments, S.L. - SAS

1 En mi huerto cosecho una cebolla cada 4 días, un tomate cada 15 días y una lechuga cada 18 días. Si me como los productos el mismo día que los cosecho, ¿cada cuántos días podré hacerme una ensalada mixta (lechuga, tomate y cebolla)?

A) 4 **B)** 18 **C)** 90 **D)** 180 **E)** Nunca

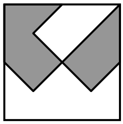
2 Al comprar unas deportivas nos hacen un 15 % de descuento y así ahorramos 9 €. ¿Cuántos euros hemos pagado por ellas?

A) 60 **B)** 54 **C)** 51 **D)** 50 **E)** 48

3 La suma de las cifras del mayor primo que divide a 2007 es:

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

4 ¿Qué fracción de la superficie del cuadrado está sombreada?

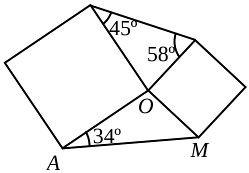


A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{5}{16}$ **C)** $\frac{3}{8}$ **D)** $\frac{7}{16}$ **E)** $\frac{1}{2}$

5 En una fiesta de 48 personas, 20 están bailando. Si de las 25 mujeres que hay, 13 no bailan, ¿cuántos hombres no bailan?

A) 12 **B)** 13 **C)** 8 **D)** 15 **E)** 10

6 La figura está formada por dos cuadrados y dos triángulos. El ángulo $A\hat{M}O$ mide:



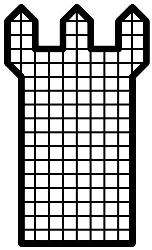
A) 43º **B)** 39º **C)** 38º **D)**36º **E)** 35º

7 ¿Cuántas veces hay que tirar un dado para asegurar que se repite algún resultado?

A) 7 **B)** 36 **C)** 120 **D)** 720

E) No se puede asegurar por muchas veces que se tire.

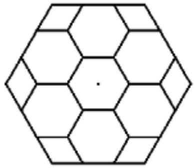
8 En marzo de este año se celebrará en Torrelodones la XLIII Olimpiada Matemática Española. En la figura aparece la torre más emblemática de Torrelodones que tiene una altura de 17 metros. ¿Cuál es, en m^2, la superficie de la cara representada?



A) 130 **B)** 128 **C)** 122 **D)** 118 **E)** 126

9 Si me subo con mi madre en una báscula pesamos 103 kg, y si me subo con mi padre, 113kg. Si mi padre y mi madre juntos pesan 126 kg, ¿cuántos kilos pesamos los tres juntos?

A) 168 **B)** 169 **C)** 170 **D)** 171 **E)** 172



10 Si el hexágono grande de la figura tiene 180 cm^2 de área, el área del hexágono central es, en cm^2:
A) 15 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 30
E) 36

11 Zipi sólo miente los lunes, martes y miércoles, y Zape sólo miente los jueves, viernes y sábados. Un día los dos hermanos tuvieron esta charla: “Ayer me tocó mentir” dijo Zipi. “Pues a mí también me tocó mentir” dijo Zape. ¿En qué día de la semana estaban?
A) Lunes **B)** Martes **C)** Jueves **D)** Sábado **E)** Domingo

12 Entre los jóvenes de 15 años, tres de cada cuatro tienen móvil, dos de cada tres tienen ordenador y uno de cada doce no tiene ni móvil ni ordenador. ¿Cuántos tienen las dos cosas?
A) Uno de cada seis Lunes **B)** Uno de cada cuatro **C)** Uno de cada tres
D) La mitad **E)** Siete de cada doce

13 Al dividir el número de fumadores entre el número de no fumadores que asisten a una reunión, sale exactamente 0,24. ¿Cuál es el menor número de asistentes posibles a dicha reunión?
A) 25 **B)** 31 **C)** 36 **D)** 48 **E)** 76

14 ¿Cuántos números *abcde* formados con cinco cifras diferentes del uno al cinco, verifican que *ab* es par, *abc* múltiplo de tres, *abcd* múltiplo de cuatro y *abcde* múltiplo de cinco.
A) Ninguno **B)** 1 **C)** 2 **D)** 4 **E)** 6

15 Un rombo tiene un ángulo de 120º y la diagonal menor mide 6 cm. Su perímetro, en cm, mide:
A) 36 **B)** 30 **C)** 24 **D)** 21 **E)** 18

16 ¿Cuál de estos números es el mayor?
A) $2^4 \times 3^2 \times 5^4$ **B)** $2^5 \times 3 \times 5^4$ **C)** $2^4 \times 5^5$ **D)** $2^3 \times 11 \times 5^3$
E) $2^4 \times 5^3 \times 7$

17 Escribimos en orden alfabético todas las palabras de seis letras que tienen tres *aes*, dos *bes* y una *c*. La primera palabra es *aaabbc*. ¿Qué posición ocupa *ababac* en esa lista?
A) Undécima **B)** Duodécima **C)** Décimo tercera
D) Décimo cuarta **E)** Décimo quinta

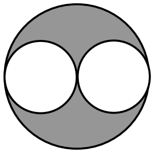
18 ¿Cuál de estos números no se puede obtener sumando menos de cuatro cuadrados perfectos?

A) 59 **B)** 69 **C)** 79 **D)** 89 **E)** 99

19 Si los dos quintos de un recorrido son 840 m, ¿cuánto metros son los tres cuartos?

A) 1625 **B)** 1620 **C)** 1575 **D)** 1551 **E)** 1545

20 Los círculos pequeños, de radio 1 cm, son tangentes entre sí y tangentes al círculo mayor. ¿Cuál es el área, en cm^2, de la zona sombreada?



A) 4π **B)** 4 **C)** 2π **D)** 2
E) $2\pi - 4$

21 ¿De cuántas formas puedo elegir los dígitos *a* y *b* para que el número $5a21b$ sea múltiplo de 6?

A) Ninguna **B)** 5 **C)** 12 **D)** 15 **E)** 16

22 El mínimo común múltiplo de $2^3 \times 9 \times 10$, $4^2 \times 3^3 \times 5$ y $8 \times 3 \times 25^2$ es:

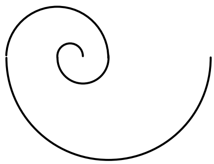
A) $2^3 \times 3^3 \times 4^2 \times 5 \times 9 \times 10 \times 25^2$ **B)** $2^3 \times 3^3 \times 5^2$ **C)** 27×10^4

D) $2^4 \times 3^4 \times 5^2$ **E)** 180000

23 En una granja hay conejos y gallinas. En total hay 24 cabezas y 72 patas. ¿Cuál es la diferencia entre el número de conejos y gallinas?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

24 La espiral de la figura está formada por cuatro semicircunferencias, siendo la más pequeña de radio 1 cm, y el radio de las otras duplica al de la anterior. Así, la longitud de la espiral, en cm, es:



A) 7π **B)** 10π **C)** 11π **D)** 14π **E)** 15π

25 En un hotel numeran las habitaciones con tres cifras, la primera indica la planta y las dos siguientes el número de habitación. Por ejemplo, $\boxed{1}\boxed{1}\boxed{5}$ indica la habitación 15 de la primera planta y $\boxed{3}\boxed{1}\boxed{5}$ la habitación 15 de la tercera planta. Si el hotel tiene en total 5 plantas con 35 habitaciones por planta, ¿cuántas veces habrán utilizado la cifra 2 para numerar todas las habitaciones?

A) 60 **B)** 65 **C)** 95 **D)** 100 **E)** 105

CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE : Día 28 de febrero de 2007

NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ ($\boxtimes$) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
www.profes.net (SM) - Grupo ANAYA - El Corte Inglés
Yalos Instruments, S.L. - SAS

1 O es el centro de un cuadrado de lado 4 cm y M el punto medio de un lado. ¿Cuál es el área, en cm^2, del cuadrado de diagonal OM?

A) 2 **B)** $2\sqrt{2}$ **C)** 4 **D)** $4\sqrt{2}$ **E)** 8

2 Al comprar unas deportivas nos hacen un 15 % de descuento y así ahorramos 9 €. ¿Cuántos euros hemos pagado por ellas?

A) 60 **B)** 54 **C)** 51 **D)** 50 **E)** 48

3 Siete cruasanes pesan lo mismo que cuatro ensaimadas y cinco palmeras pesan lo mismo que seis ensaimadas. Si *c, e y p* representan los pesos, en gramos, de un cruasán, una ensaimada y una palmera, respectivamente, entonces:

A) $c < p < e$ **B)** $c < e < p$ **C)** $e < c < p$ **D)** $e < p < c$ **E)** $p < c < e$

4 El número de matrícula del coche de Pedro es de 4 cifras pero no es muy difícil de recordar, pues es de la forma *abba* con *a* y *b* distintos y *ab* y *ba* números primos de dos cifras. ¿Cuántos números podrían ser los números de matrícula del coche de Pedro?

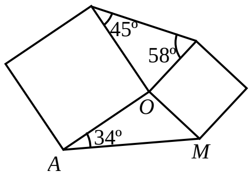
A) 4 **B)** 6 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 12

5 En un tablero 10 ×10 escribimos por columnas las tablas de multiplicar del 1 al 10. En la primera columna están los números del 1 al 10, en la segunda del 2 al 20,..., en la décima del 10 al 100. ¿Cuánto suman todos los números del tablero?

A) 770 **B)** 1000 **C)** 2250 **D)**2625 **E)** 3025

6 La figura está formada por dos cuadrados y dos triángulos. El ángulo $A\hat{M}O$ mide:

A) 43º **B)** 39º **C)** 38º **D)**36º **E)** 35º



7 Se tira una moneda tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan dos y sólo dos caras seguidas?

A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{3}{4}$

8 Designamos por $n!$, donde n es natural, al producto $n\times(n-1)\times(n-2)\times...\times 2\times 1$. Así por ejemplo: $5!=4\times 4\times 3\times 2\times 1=120$. ¿Cuál es la última cifra de 20! que no es cero?

A) 2 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 8

9 Numeramos los ocho vértices de un cubo desde el 1 al 8, de manera que los números correspondientes a los vértices de cada una de las seis caras son: [1,2,6,7] [1,4,6,8], [1,2,5,8], [2,3,5,7], [3,4,6,7] y [3,4,5,8]. El vértice marcado con el 6 es el más lejano al marcado con:

A) 1 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 7

10 $98561^2 + 98569^2 - 2 \times 98565^2$ es igual a:

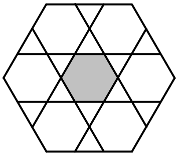
A) 32 **B)** 82 **C)** 100 **D)** 2 **E)** 98562

11 El entero positivo *N* tiene exactamente seis divisores, incluyendo 1 y *N*. Si el producto de cinco de ellos es 648, ¿qué entero de los siguientes tiene que ser el otro divisor de *N*?

A) 4 **B)** 9 **C)** 12 **D)** 16 **E)** 24

12 Si el hexágono grande de la figura tiene 180 cm^2 de área, el área del hexágono central sombreado, en cm^2, es:

A) 15 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 30 **E)** 36



13 En una bolsa hay dos bolas rojas y dos azules. Se extraen dos bolas sin mirar. ¿Cuál es la probabilidad de que sean de distinto color?

A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{3}{4}$

14 En una reunión, a dos tercios de los asistentes les gusta el teatro y a tres cuartos de ellos les gusta el cine. ¿Cuál es la proporción mínima de los que les gusta el cine y el teatro?

A) $\frac{1}{12}$ **B)** $\frac{5}{12}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{8}{9}$ **E)** $\frac{5}{7}$

15 En un recorrido de 6 km quiero hacer una media de 5 km/h, pero en los tres primeros kilómetros mi media sólo ha sido de 4 km/h. ¿Cuál ha de ser la media en km/min de los últimos 3 km para poder conseguir mi objetivo?

A) $\frac{1}{8}$ **B)** $\frac{1}{9}$ **C)** $\frac{1}{10}$ **D)** $\frac{1}{11}$ **E)** $\frac{1}{12}$

16 Amparo le dijo a su nieto David: *"Durante seis años seguidos mi edad ha sido un múltiplo de la tuya, pero este año ya no ha ocurrido eso"*. Cuando ocurra de nuevo que la edad de Amparo sea múltiplo de la de David, ¿cuánto será la suma de sus edades?

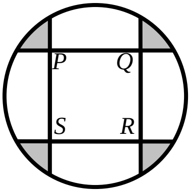
A) 65 **B)** 68 **C)** 70 **D)** 76 **E)** 80

17 En otra reunión, exactamente el 76 % de los asistentes lleva móvil. ¿Cuál es el menor número posible de asistentes?

A) 14 **B)** 19 **C)** 25 **D)** 48 **E)** 52

18 La compra en un súper sale un 12 % de media más barata. Alberto va al súper sólo si ahorra al menos 15 euros (para compensar tiempo y gastos de desplazamiento). ¿Cuál debe ser en ese caso el precio mínimo, en euros, de su compra en el súper?

A) 100 **B)** 110 **C)** 115 **D)** 120
E) 125



19 El cuadrado *PQRS* de lado 1 m y el círculo de radio 1 m de la figura, tienen el mismo centro. ¿Cuál es, en m^2, el área de la región sombreada?

A) $\frac{\pi}{3}$ **B)** $\frac{\pi-\sqrt{3}}{3}$ **C)** $\sqrt{3}-1$ **D)** $\frac{\pi-1}{3}$

E) $\frac{\pi}{3}+1-\sqrt{3}$

20 Si $\frac{a+b}{a-b}=\frac{7}{4}$, ¿cuánto vale $\frac{a^2}{b^2}$?

A) $\frac{11}{3}$ **B)** $\frac{121}{9}$ **C)** $\frac{121}{16}$ **D)** $\frac{49}{9}$ **E)** $\frac{49}{16}$

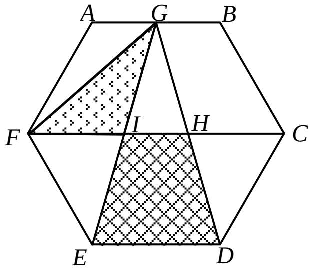
21 Consideremos un cuadrado de lado 4 cm. Al unir los puntos medios de sus lados obtenemos un segundo cuadrado y si continuamos así, uniendo los puntos medios de los lados de cada cuadrado dibujado, obtenemos un nuevo cuadrado. ¿Cuál es, en cm, la longitud del lado del cuadrado número 12?

A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{8}$ **C)** $\frac{1}{16}$ **D)** $\frac{1}{8\sqrt{2}}$ **E)** $\frac{1}{16\sqrt{2}}$

22 En el interior de un triángulo rectángulo isósceles de 6 cm de cateto, dibujamos una circunferencia tangente a sus tres lados. ¿Cuál es, en cm, el radio de esta circunferencia?

A) $3\sqrt{2}$ **B)** $2\sqrt{3}$ **C)** $6-3\sqrt{2}$ **D)** $\frac{3}{2}$ **E)** 3

23 En el hexágono regular *ABCDEF* de la figura, *G* es el punto medio del lado *AB*. ¿Cuál es el cociente entre el área del trapecio *EDHI* y el triángulo *FIG*?



A) 2 **B)** 3 **C)** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

D) $\sqrt{3}$ **E)** $\sqrt{2}$

24 Si el cociente entre el perímetro de un cuadrilátero en el que se pueda inscribir una circunferencia y la longitud de la circunferencia inscrita en él es $\dfrac{4}{3}$, ¿cuál es el cociente entre el área de dicho cuadrilátero y el área del círculo?

A) $\dfrac{4}{\pi}$ **B)** $\dfrac{3\sqrt{2}}{\pi}$ **C)** $\dfrac{16}{9}$ **D)** $\dfrac{\pi}{3}$ **E)** $\dfrac{4}{3}$

25 El entero positivo 1 tiene la propiedad de ser un cuadrado perfecto y al sumarle 99 también resulta ser un cuadrado perfecto. Además del 1, ¿cuántos enteros positivos tienen esa propiedad?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 48 **E)** 98

CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE : Día 28 de febrero de 2007

NIVEL IV (Bachillerato)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ ($\boxtimes$) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
www.profes.net (SM) - Grupo ANAYA - El Corte Inglés
Yalos Instruments, S.L. - SAS

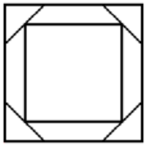
1 Se tira una moneda tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan exactamente dos caras seguidas?

A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{3}{4}$

2 ¿Cuál es la altura menor de un punto de la gráfica de la función?
$y = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4| + |x-5|$

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 10

3 En la figura podemos ver dos cuadrados y un octógono regular que están inscritos unos en otros. Si el área del cuadrado grande es 48 cm^2, el área del pequeño, en cm^2, es:



A) 40 **B)** 36 **C)** 32 **D)** 28 **E)** 24

4 La función inversa (o recíproca) de $y = |x-3| + 2x$ es:

A) $y = |x+3| + \frac{1}{2}x$ **B)** $y = \frac{2x-3}{3} + \left|\frac{x-6}{3}\right|$ **C)** $y = \frac{2x-3}{3} - \left|\frac{x-6}{3}\right|$

D) $y = \frac{|x+3|}{3} + x$ **E)** $y = x - \frac{|x-3|}{3}$

5 Sabiendo que la suma de los n primeros cuadrados, $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$, es $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, entonces la suma de los diez primeros cuadrados pares, $2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + 20^2$ es:

A) 1444 **B)** 1540 **C)** 1556 **D)** 1596 **E)** 1616

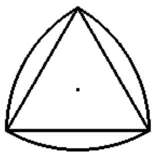
6 Se tira un dado cuatro veces. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan cuatro números distintos?

A) $\frac{5}{18}$ **B)** $\frac{1}{54}$ **C)** $\frac{5}{108}$ **D)** $\frac{1}{144}$ **E)** $\frac{24}{216}$

7 ¿Cuál de los siguientes números no es raíz del polinomio $z^4 - 5z^2 - 36$?

A) $2i$ **B)** 2_{180° **C)** 2_{270° **D)** 3_{180° **E)** 3

8 El triángulo curvilíneo de la figura, está formado por tres arcos de centro un vértice del triángulo equilátero y radio su lado, que mide 2 cm. ¿Cuál es el área, en cm^2, del triángulo curvilíneo?



A) $2\pi + \sqrt{3}$ **B)** $\pi + \sqrt{3}$ **C)** $2\left(\pi - \sqrt{3}\right)$ **D)** $\pi - \sqrt{3}$

E) $2\sqrt{3} - \pi$

9 ¿Cuál de los siguientes números es primo?

A) $5^5 + 1$ **B)** $6^7 - 1$ **C)** $2^{18} + 1$ **D)** $4^{16} - 1$ **E)** $16^4 + 1$

10 El valor mínimo de $f(x) = (x-5)^3 \cdot (x-1)$ es:

A) -27 **B)** -8 **C)** $-\frac{75}{8}$ **D)** -3 **E)** 0

11 La recta tangente a $y = x^3 - 2x^2 + 1$ en (1, 0), además de tocar a la curva en (1, 0) la corta también en:

A) (0, 1) **B)** (– 1, – 4) **C)** (2, 1) **D)** (3, 10) **E)** (– 2, – 11)

12 ¿Cuántos "martes y 13" puede haber como mucho en un año?

A) Uno **B)** Dos **C)** Tres **D)** Cuatro **E)** Cinco

13 Consideremos las funciones $f(x) = x^2 + 2bx + 1$ y $g(x) = 2a(x+b)$ donde las constantes *a* y *b* son números reales. Cada par de constantes *a* y *b* puede considerarse como un punto de coordenadas (*a*, *b*) en el plano. Si *S* es el conjunto de puntos (*a*, *b*) para los que la gráfica de $y = f(x)$ e $y = g(x)$ no se cortan, el área de *S* es:

A) 1 **B)** π **C)** 4 **D)** 4π **E)** Infinita

14 ¿Cuántos triángulos rectángulos distintos verifican que su perímetro, en cm, y su área, en cm^2, vienen dados por dos números iguales?

A) Ninguno **B)** Uno **C)** Dos **D)** Cuatro **E)** Infinitos

15 El área total de un ortoedro (prisma recto rectangular) es 22 cm^2 y la suma de las longitudes de todas sus aristas es 24 cm. ¿Cuál es, en cm, la máxima distancia entre dos vértices de dicho ortoedro?

A) $\sqrt{11}$ **B)** $\sqrt{12}$ **C)** $\sqrt{13}$ **D)** $\sqrt{14}$

E) No está unívocamente determinada

16 Una circunferencia de radio arbitrario puede cortar a la gráfica de la función $y = sen\, x$ en:

A) Dos puntos como máximo **B)** Cuatro puntos como máximo

C) Seis puntos como máximo **D)** Ocho puntos como máximo

E) Más de dieciséis puntos

17 Si el cociente entre el perímetro de un cuadrilátero en el que se pueda inscribir una circunferencia y la longitud de dicha circunferencia es k, ¿cuál es el cociente entre el área de dicho cuadrilátero y el área del círculo?

A) $k\pi$ **B)** $\frac{k}{\pi}$ **C)** $\frac{k^2}{\pi}$ **D)** k^2 **E)** k

18 Consideremos las gráficas de $y = Ax^2$ e $y^2 + 3 = x^2 + 4y$ con $A > 0$.
¿En cuántos puntos se cortan?
A) Cuatro **B)** Dos **C)** Depende de los valores de A
D) Hay un valor positivo de A para el que no se cortan **E)** Nada de lo anterior

19 El volumen de un ortoedro es 8 cm^3, su área total 32 cm^2 y sus tres dimensiones están en progresión geométrica. ¿Cuál es, en cm, la suma de las longitudes de todas sus aristas?
A) 7 **B)** 14 **C)** 24 **D)** 28 **E)** 32

20 ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $\left|x - |2x+1|\right| = 3$?

A) Ninguna **B)** Una **C)** Dos **D)** Tres **E)** Cuatro

21 Si $f(x) = 10x$ y $f\left(g(x)\right) = -5x$ entonces $g(x)$ es igual a:

A) $-\frac{1}{2}$ **B)** $-\frac{x}{2}$ **C)** $-\frac{x}{10}$ **D)** $-\frac{1}{10}$ **E)** $-2x$

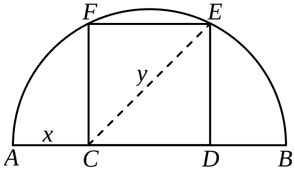
22 En un concurso de opción múltiple y con 30 problemas, se puntúa con 12 puntos cada respuesta correcta, se restan 7 puntos por cada respuesta incorrecta y 0 por cada respuesta en blanco. Si Antonio obtuvo 234 puntos, ¿cuántas respuestas dejó en blanco?
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

23 Si m y n son enteros, con $1 \le m < n$, ¿cuántas soluciones positivas tiene la ecuación $x^n - x^m - 1 = 0$?

A) Ninguna **B)** n **C)** Una **D)** $n - m$

E) Es posible cualquier número de soluciones

24 En una semicircunferencia de diámetro *AB* inscribimos un cuadrado *CDEF* como se muestra en la figura. Si $AC = x$ y $CE = y$, entonces $\dfrac{x}{y}$ es igual a:



A) $\dfrac{\pi}{4}$ **B)** $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ **C)** $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{2}}$ **D)** $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}}$ **E)** $\dfrac{3}{5}$

25 $arctg\left(\dfrac{1}{10}\right)+arctg\left(\dfrac{1}{17}\right)$ es igual a:

A) π **B)** $arctg\left(\dfrac{1}{3}\right)$ **C)** $\dfrac{\pi}{2}$ **D)** $arctg\left(\dfrac{1}{7}\right)$ **E)** $arctg\left(\dfrac{27}{169}\right)$

XI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE : Día 21 de abril de 2007

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ (☒) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA.**
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

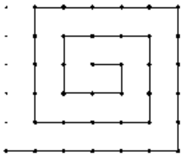
CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
www.profes.net (SM) - Grupo ANAYA - El Corte Inglés
Yalos Instruments, S.L. - SAS

1 En esta rejilla de puntos la distancia en horizontal o en vertical de puntos consecutivos es 1 cm. ¿Cuál es, en cm, la longitud de la espiral trazada?



A) 30 **B)** 31 **C)** 32 **D)** 35 **E)** 36

2 El abuelo ha repartido su colección de postales entre sus cuatro nietos. Todos recibieron el mismo número de postales. Si el número de postales es uno de los que figura en las respuestas, ¿cuántas postales tenía el abuelo?

A) 14 **B)** 18 **C)** 28 **D)** 33 **E)** 42

3 Un coche con cuatro elefantes dentro pesa 16 toneladas. Si todos los elefantes pesan lo mismo y el coche vacío pesa una tonelada más que un elefante, ¿cuántas toneladas pesa el coche vacío?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 12

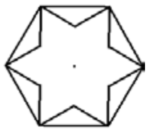
4 ¿Cuál de las siguientes operaciones da como resultado 50?

A) $15+10\times 2$ **B)** $100:5$ **C)** $2\times(5\times 10)$ **D)** $(20+80):10$ **E)** $200:4$

5 Un mismo producto se vende en distintos envases. ¿Cuál sale más barato?

A) 120 g a 0,45 € **B)** 150 g a 0,65 € **C)** 200 g a 1,10
D) 250 g a 1,25 € **E)** 400 g a 2,10 €

6 La estrella hexagonal de la figura tiene 12 cm^2 de área. ¿Cuál es, en cm^2, el área del hexágono regular circunscrito?

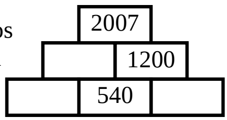


A) 15 **B)** 16 **C)** 18 **D)** 20 **E)** 21

7 He preguntado a mis tres amigos si eran capaces de adivinar cuántos libros tengo en mi habitación. Azucena dice que 183, Bruno que 194 y Celia que 152. Y yo les digo que uno se ha equivocado por 11 libros, otro por 20 y otro por 22. ¿Cuánto suman las cifras del número de libros que tengo en mi habitación?

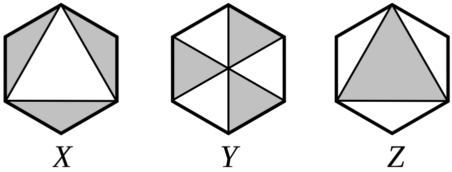
A) 10 **B)** 5 **C)** 7 **D)** 14 **E)** 12

8 En esta pirámide, cada ladrillo es la suma de los dos ladrillos que lo sostienen. ¿Cuál es la suma de los números de la fila de abajo?



A) 1467 **B)** 1740 **C)** 2007 **D)** 1747 **E)** 1627

9 Estos tres hexágonos regulares son del mismo tamaño. *X*, *Y*, *Z* representan las áreas de las zonas sombreadas. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?



A) *X* es igual a *Y* pero no a *Z* **B)** *X* es igual a *Z* pero no a *Y*
C) *Y* es igual a *Z* pero no a *X* **D)** *X*, *Y* y *Z* son las tres iguales
E) *X*, *Y* y *Z* son las tres distintas

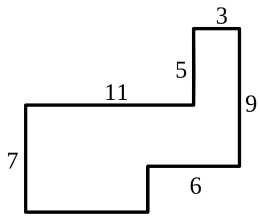
10 Si ☺ + ❁ = ✈, ☾ = ❁ + ✈, ☾ + ☾ = ☺ + ☺ + ☺ + ☺, entonces, ❁ + ❁ + ❁ =

A) ☾ + ✈ **B)** ✈ **C)** ☾ **D)** ☺ **E)** ☾ + ☺

11 A Julián le encantan los animales. Tiene en su casa 39 mascotas entre gatos, perros, hámsteres, tortugas y periquitos. Tiene tantos gatos como perros y el doble de hámsteres que de perros. El número de tortugas es la tercera parte que el número de hámsteres y tiene siete periquitos más que tortugas. ¿Cuántos periquitos tiene Julián?

A) 10 **B)** 11 **C)** 12
D) 13 **E)** 14

12 Los ángulos de la siguiente figura son todos rectos y la longitud de algunos de sus lados, en cm, está indicada en el dibujo. El área de la figura, en cm^2, es:

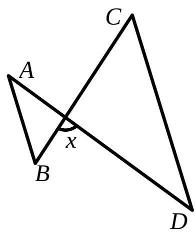


A) 41 **B)** 104 **C)** 112 **D)** 64 **E)** 95

13 ¿Cuál de estos números es primo?

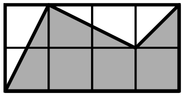
A) 2001 **B)** 2003 **C)** 2005 **D)** 2007
E) 2009

14 En la figura de la derecha, los segmentos *AB* y *CD* son paralelos. El ángulo *A* es de 28º y el ángulo *C* de 52º. ¿Cuánto mide el ángulo *x*?



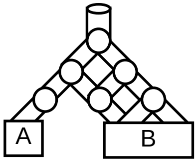
A) 62º **B)** 80º **C)** 100º **D)** 280º
E) 120º

15 ¿Qué fracción del rectángulo grande está sombreada? (Los polígonos interiores son cuadrados)



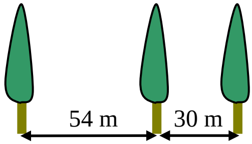
A) $\frac{11}{16}$ **B)** $\frac{9}{16}$ **C)** $\frac{5}{8}$ **D)** $\frac{3}{4}$ **E)** $\frac{2}{3}$

16 Por la tubería superior se introducen 1000 litros de agua. Cada vez que el líquido llega a una bifurcación, se separa en dos partes iguales y discurre la mitad por cada lado. ¿Cuántos litros de agua llegarán al recipiente B?



A) 750 **B)** 500 **C)** 666 **D)** 600 **E)** 800

17 Por el camino que lleva al cementerio hay una hilera de cipreses plantados a la misma distancia entre sí. Un verano de fuerte sequía murieron todos los cipreses menos los dos de los extremos y uno más que se salvó. ¿Cuántos cipreses había antes de la sequía si sólo recuerdo que había menos de 25?



A) 6 **B)** 12 **C)** 14 **D)** 15 **E)** 19

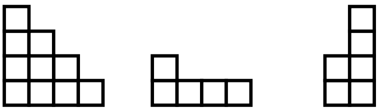
18 Una leona tarda en comerse una cebra 6 horas, mientras que un gran león tarda la mitad de tiempo que la leona. Si un amanecer cazan los dos juntos una cebra, ¿cuánto tiempo tardarán en devorarla?

A) 9 horas **B)** 3 horas **C)** 1 hora y media **D)** 4 horas y media **E)** 2 horas

19 En un triángulo, la medida de cada lado es un número entero. El mayor es doble que el mediano y éste, doble que el menor. ¿Cuál de estos números no puede ser el perímetro de dicho triángulo?

A) 84 **B)** 77 **C)** 14 **D)** 97 **E)** 70

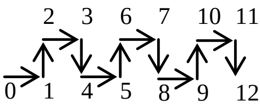
20 Hemos construido un castillo con cubos iguales. ¿Cuántos cubos, como mínimo, hemos utilizado si sus vistas son éstas?

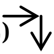


Vista de frente Vista de arriba Vista lateral

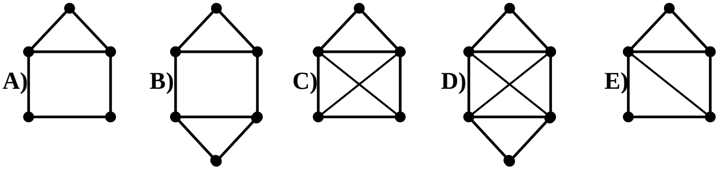
A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 15 **E)** 21

21 Si el camino sigue siempre el mismo patrón, ¿cuál es la secuencia de flechas que llevan del 675 al 677?



A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** No se puede saber

22 ¿Cuál de estas figuras no puede ser trazada sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por un mismo segmento?



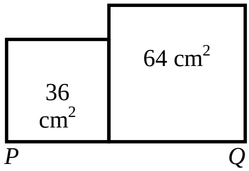
23 Inicialmente hay un "1" en la pantalla. Al apretar la tecla A se multiplica por 3 el número de la pantalla. Al apretar la tecla B, se resta 1 al número de la pantalla. Utilizando sólo las teclas A y B hay que llegar a tener en la pantalla el 53. ¿Cuántas veces, como mínimo, debes pulsar las teclas?

A) 4 **B)** 6 **C)** 10 **D)** 15 **E)** 53

24 La familia Abolengo es muy tradicional. Hace muchísimos años Pepita Abolengo tuvo tres hijas a las que dio su apellido (la primera generación) y, desde entonces, todas las mujeres Abolengo tienen siempre tres hijas de apellido Abolengo. Si van ya por la cuarta generación de mujeres Abolengo, ¿cuántas mujeres Abolengo, incluida Pepita, han existido?

A) 121 **B)** 243 **C)** 31 **D)** 2007 **E)** 81

25 La figura está formada por dos cuadrados cuyas áreas son 36 cm^2 y 64 cm^2. ¿Cuánto mide, en cm, el segmento *PQ*?



A) 16 **B)** 14 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 8

XI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE : Día 21 de abril de 2007

NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ (☒) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

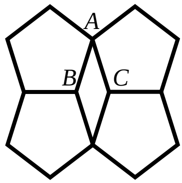
COLABORAN:

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
www.profes.net (SM) - Grupo ANAYA - El Corte Inglés
Yalos Instruments, S.L. - SAS

1 En una hoja de papel hay escrito un número de cuatro cifras del que vemos que empieza por 86 pero no vemos las dos últimas cifras. Si nos dicen que el número escrito es divisible por 2, 3, 4 y 5. ¿Cuál es la suma de las dos cifras que no vemos?

A) 4 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 9 **E)** 14

2 La figura está formada por cuatro pentágonos regulares que encierran un paralelogramo. ¿Cuánto mide el ángulo $B\hat{A}C$?

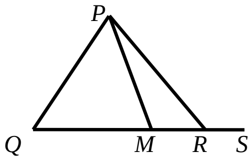


A) 15º **B)** 18º **C)** 20º **D)** 30º **E)** 36º

3 Mi coche gasta exactamente 8 litros cada 100 km, dijo Alonso (*A*). Pues si lleno los 45 litros del depósito del mío puedo recorrer 540 km, comentó Barrichello (*B*). Pues yo, con 1 litro soy capaz de recorrer 13 km, dijo Coulthard (*C*). Según el consumo, ¿cómo ordenarías los coches desde el más económico al más caro?

A) *ABC* **B)** *BAC* **C)** *BCA* **D)** *CAB* **E)** *CBA*

4 Si el ángulo $R\hat{P}M$ de la figura mide 20º y el $Q\hat{M}P$ mide 70º, ¿cuál es el valor del ángulo $P\hat{R}S$?

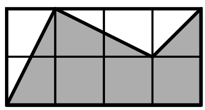


A) 90º **B)** 110º **C)** 120º **D)** 130º **E)** 140º

5 Si entre los jóvenes españoles de 15 años, tres de cada cuatro tienen móvil y dos de cada tres tienen ordenador, podemos asegurar que tienen las dos cosas, por lo menos:

A) Uno de cada diez **B)** Cinco de cada doce
C) Uno de cada tres **D)** La mitad **E)** Siete de cada diez

6 ¿Qué fracción del rectángulo grande está sombreada? (Los polígonos interiores son cuadrados)



A) $\frac{11}{16}$ **B)** $\frac{9}{16}$ **C)** $\frac{5}{8}$ **D)** $\frac{3}{4}$ **E)** $\frac{2}{3}$

7 Observa estas tres sumas:

★ + ◈ = ■, ★ = ◈ + ⦿, ★ + ★ + ◈ = ■ + ⦿ + ⦿.

Entonces, ★ es igual a:

A) ■ + ■ **B)** ◈ **C)** ⦿ + ⦿ **D)** ◈ + ■ **E)** ⦿

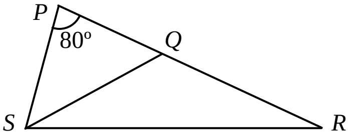
8 Los tres ángulos de un triángulo miden $(x+10)^{o}$, $(2x-40)^{o}$ y $(3x-90)^{o}$. ¿Qué afirmación de las siguientes es la verdadera? "El triángulo es…

A) Rectángulo isósceles **B)** Rectángulo pero no isósceles **C)** Equilátero
D) Isósceles obtusángulo **E)** Nada de lo anterior.

9 Al dividir el número de fumadores entre el número de no fumadores de las personas que hay en una reunión, sale exactamente 0,24. ¿Cuál es el menor número de asistentes posibles a esa reunión?

A) 25 **B)** 31 **C)** 36 **D)** 48 **E)** 76

10 Los segmentos *PQ* y *PS* del dibujo adjunto son iguales, así como *QS* y *QR*. Si el ángulo $S\hat{P}Q = 80^{o}$, el ángulo $Q\hat{R}S$ es igual a:



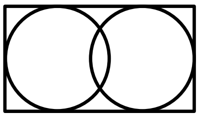
A) 10º **B)** 15º **C)** 20º
D) 25º **E)** 30º

11 A lo largo de una carretera nos encontramos con siete ciudades *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* en ese orden. La tabla de la derecha nos indicaba todas las distancias que hay entre ellas (en km). Así, por ejemplo, desde *A* a *D* hay 23 km. Como ves, se han borrado 15 de esas distancias. Con los datos que aún se conservan, puedes calcular algunas distancias más. ¿Cuántas exactamente?

A						
	B					
		C				
23			***D***			
	30			***E***		
58		40			***F***	
	68		53			***G***

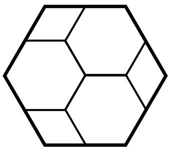
A) 0 **B)** 1 **C)** 6 **D)** 12 **E)** 15

12 La figura muestra dos círculos iguales dentro de un rectángulo de 9 cm x 5 cm. Cuál es la distancia, en cm, entre los centros de los círculos



A) 2 **B)** 2,5 **C)** 3 **D)** 3,5 **E)** 4

13 María tiene escritos cuatro números enteros. Al sumarlos de tres en tres obtiene 115, 153, 169 y 181. ¿Cuál es el mayor de los números de María?



A) 66 **B)** 53 **C)** 91 **D)** 121
E) 72

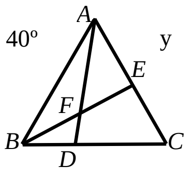
14 Dividimos un hexágono regular en tres hexágonos regulares iguales y tres rombos iguales, como se muestra en la figura. Si el área del hexágono grande es 360 cm^2, el área de cada rombo, en cm^2, es:

A) 60 **B)** 30 **C)** 75 **D)** 15 **E)** 45

15 Con 10! (que se lee 10 factorial) representamos el producto $10 \times 9 \times 8 \times ... \times 3 \times 2 \times 1$ (multiplicar 10 por todos los enteros anteriores a él hasta el 1) ¿Cuál es el número más pequeño que multiplicado por 10! nos da un cuadrado perfecto?

A) 7 **B)** 14 **C)** 30 **D)** 70 **E)** 210

16 El triángulo ABC de la figura es equilátero. Si el ángulo $D\hat{A}C = 40^{o}$ y el ángulo $E\hat{B}C = 35^{o}$, ¿cuánto mide el ángulo $D\hat{F}E$?

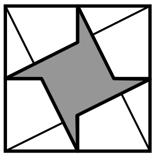


A) 140º **B)** 135º **C)** 130º **D)**120º
E) 105º

17 A la final de una competición escolar de atletismo llegan dos colegios que participan en seis pruebas presentando dos estudiantes por colegio en cada prueba. Cada uno de estos cuatro participantes obtiene 5, 3, 2, ó 1 punto según quede 1º, 2º, 3º ó 4º, respectivamente. Si al final no ha habido ningún descalificado, los centros no empataron y la puntuación global de uno de los centros viene dada por el número de la del otro leído al revés, ¿cuál fue la diferencia entre las puntuaciones de los dos centros?

A) 12 **B)** 18 **C)** 27 **D)** 36 **E)** No tenemos datos suficientes

18 Cada vértice de la estrella de la figura es el punto medio de cada uno de los lados del cuadrado grande. ¿Qué fracción del área del cuadrado cubre la estrella?

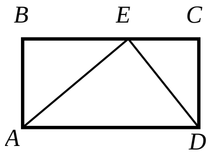


A) $\frac{1}{5}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** $\frac{3}{8}$
E) $\frac{2}{5}$

19 Intentando ordenar los números enteros entre 11 y 19 de forma que dos cualesquiera que estén uno al lado del otro no fueran primos entre sí, tuve que dejar fuera el 11, 13, 17 y 19, y escribí: 16, 18, 15, 12, 14. Si hubiera intentado hacer lo mismo con los nueve enteros que hay entre 111 y 119, ¿cuántos, como mínimo, tendría que dejar fuera?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

20 Dividimos el rectángulo *ABCD* de la figura, en el que $AB = 49$ cm y $BC = 100$ cm , en 4900 cuadraditos de lado 1 cm. Si *E* es un punto de *BC* con $BE = 60$ cm, ¿a cuántos de los 4900 cuadraditos cortan los segmentos *AE* y *ED*?

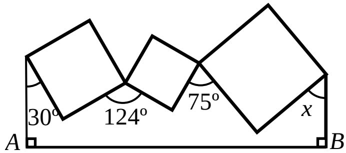


A) 192 **B)** 196 **C)** 198 **D)** 200 **E)** 202

21 Un día que salí de excursión por la montaña, a las 10 de la mañana había completado la tercera parte de todo el recorrido, y a las 12, las tres cuartas partes. ¿A qué hora comencé a andar si siempre mantuve el mismo ritmo?

A) 7 : 32 **B)** 8 : 24 **C)** 9 : 12 **D)** 9 : 36 **E)** 9 : 48

22 Colocamos tres cuadrados, como se muestra en la figura, encajados entre dos barras perpendiculares a la horizontal *AB*. Con los datos que te damos, ¿cuál es el valor del ángulo *x*?

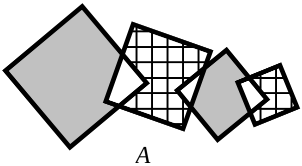


A) 39º **B)** 41º **C)** 43º **D)** 44º **E)** 46º

23 Colocamos en fila 60 monedas de 20 céntimos de euro. Contando de dos en dos, es decir, las monedas 2, 4, 6, etc., las reemplazamos por monedas de 10 céntimos de euro. Contando las resultantes de tres en tres, las reemplazamos por monedas de 5 céntimos de euro y, finalmente, contando las que nos quedan de cuatro en cuatro, las reemplazamos por monedas de 2 céntimos de euro. ¿Cuánto suman las monedas que hay ahora?

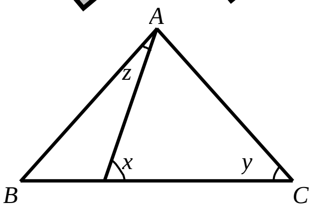
A) 3.30 € **B)** 5,80 € **C)** 6,05 € **D)** 6,60 € **E)** 7,55 €

24 La figura muestra cuatro cuadrados de lados 11, 9, 7 y 5 cm que se solapan. ¿Cuál es la diferencia, en cm^2, entre el área sombreada y el área cuadriculada?



A) 25 **B)** 36 **C)** 49 **D)** 64
E) No hay información suficiente

25 Si $AB = AC$ y *z* es un ángulo agudo, ¿cuál de las siguientes expresiones debe ser igual a *z*?



A) $x - y$ **B)** $x + y$ **C)** $x + y - 180$
D) $180 + x - y$ **E)** $180 - x + y$

XI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE : Día 21 de abril de 2007

NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***

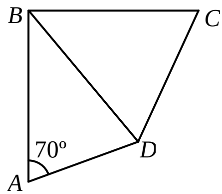
* **MARCA CON UNA CRUZ (☒) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA.**
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
www.profes.net (SM) - Grupo ANAYA - El Corte Inglés
Yalos Instruments, S.L. - SAS

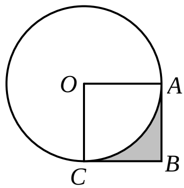


1 En el cuadrilátero de la figura, $AB = BD = BC$, $A\hat{B}C = 90^{\circ}$ y $B\hat{A}D = 70^{\circ}$ ¿Cuál es la medida del ángulo $B\hat{D}C$?

A) 40º **B)** 50º **C)** 65º **D)** 70º **E)** 80º

2 ¡El 80 % de los estudiantes de este centro está a favor de que haya exámenes no avisados!, proclamó el Jefe de Estudios con satisfacción olvidando conscientemente que al 80 % de los estudiantes del centro no se les había preguntado nada. ¿Qué porcentaje de los estudiantes del centro le habían dicho al Jefe de Estudios que estaban a favor de los exámenes no avisados?

A) 16 % **B)** 20 % **C)** 40 % **D)** 64 % **E)** 80 %



3 El punto O es el centro de un circulo de radio 1, OA y OC son radios y $OABC$ es un cuadrado. ¿Cuál es el área, en unidades cuadradas, de la región sombreada?

A) $1-\frac{\pi}{4}$ **B)** $1-\frac{\pi}{2}$ **C)** $\frac{1-\pi}{4}$ **D)** $2-\frac{\pi}{2}$ **E)** $2-\frac{\pi}{4}$

4 Si $a = b - c$, $b = c - d$ y $c = d - a$, $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}$ es igual a:

A) 1 **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** 0 **D)** $-\frac{1}{2}$ **E)** –1

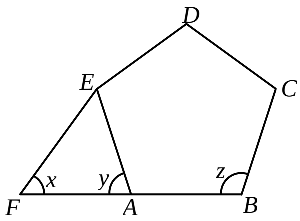
5 Si dibujas dos rectas paralelas al eje X, tres rectas paralelas al eje Y y cuatro rectas paralelas a la recta $y = x$, ¿cuál es el menor número posible de puntos de corte entre las nueve rectas que has dibujado?

A) 10 **B)** 12 **C)** 14 **D)** 16 **E)** 18

6 La media que obtuve en los cuatro últimos exámenes de Matemáticas fue un 8,5. ¿Cuál fue la peor nota que pude haber obtenido?

A) 0 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8,1 **E)** 8,5

7 El pentágono $ABCDE$ es regular. F, A y B están alineados y $FA = AE$. Las medidas de los ángulos x, y, z son proporcionales a:



A) 1, 2 y 3 **B)** 2, 2 y 3 **C)** 2, 3 y 4

D) 3, 4 y 5 **E)** 3, 4 y 6

8 Colocamos los enteros del 1 al 20 en la lista que aparece debajo, de forma que la suma de dos cualesquiera que estén juntos sea un número primo. Como ves, algunos se han sustituido por letras. ¿Qué número corresponde a la letra d?

20, ***a***, 16, 15, 4, ***b***, 12, ***c***, 10, 7, 6, $\boxed{d}$, 2, 17, 14, 9, 8, 5, 18, ***e***.

A) 1 **B)** 3 **C)** 11 **D)** 13 **E)** 19

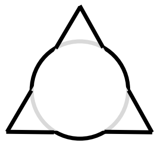
9 La suma de las aristas de un cubo es L cm. Si el área total del cubo es L cm^2, ¿cuál es su volumen en cm^3?

A) 1 **B)** L **C)** 2 **D)** L^3 **E)** 8

10 De las tres afirmaciones siguientes: I) 3^{10} es par II) 3^{10} es impar III) 3^{10} es un cuadrado perfecto, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

A) Sólo I **B)** Sólo II **C)** Sólo III **D)** I y III **E)** II y III

11 Encima de un triángulo equilátero de lado 3 cm, colocamos un círculo de 1 cm de radio, haciendo coincidir los centros de ambas figuras. ¿Cuánto mide el perímetro o borde de la figura resultante?

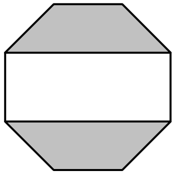


A) 2π **B)** $6 + \pi$ **C)** 9 **D)** 3π
E) $9 + 2\pi$

12 Si C indica la temperatura en la escala Celsius y F indica la temperatura en la escala Fahrenheit , sabes que la relación entre ambas es $F = \frac{9}{5}C + 32$. Para evitar tener que operar con fracciones y en el caso de temperaturas ambientales, a veces se usa una fórmula de aproximación $F = 2C + 30$. ¿Qué temperatura hay en la escala Celsius si la fórmula de aproximación nos da una temperatura en la escala Fahrenheit 1 grado más alta que la real?

A) 15 ºC **B)** 18 ºC **C)** 20 ºC **D)** 30 ºC **E)** 36 ºC

13 Cada uno de los lados de este octógono regular mide 2 cm. ¿Cuál es la diferencia entre el área de la región sombreada y el área de la región sin sombrear?

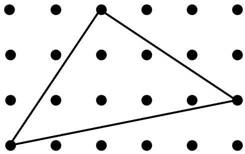


A) $2\sqrt{2}$ **B)** 2 **C)** $\frac{3}{2}$ **D)** 1 **E)** 0

14 El peso medio de las patatas que había en una bolsa subió al doble cuando a las cuatro patatas que había añadimos una patata inmensa. ¿Cuál es el cociente entre el peso de este patatón y la suma de los pesos de las cuatro patatas que había?

A) $\frac{3}{2}$ **B)** 6 **C)** $\frac{8}{3}$ **D)** 2 **E)** 1

15 En el diagrama adjunto se muestra una retícula en la que los puntos más cercanos están separados 1 cm. ¿Cuál es, en cm^2, el área del triángulo que se representa?

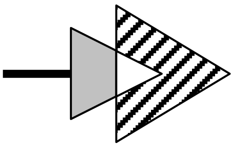


A) 8 **B)** $3\sqrt{2}$ **C)** $\frac{15}{2}$ **D)** $\frac{13}{2}$ **E)** 7

16 ¿Cuál de los siguientes números es la suma de 8 enteros consecutivos?

A) 2003 **B)** 2004 **C)** 2005 **D)** 2006 **E)** 2007

17 La flecha de la figura está formada por dos triángulos que se solapan. La zona rayada ocupa $\frac{13}{15}$ del área del triángulo grande y la zona sombreada $\frac{4}{5}$ del triángulo pequeño. ¿Cuál es el cociente entre el área de la zona sombreada y la de la zona rayada?



A) $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{7}{15}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{8}{13}$ **E)** $\frac{12}{13}$

18 Un avión tarda 2 horas y 30 minutos en ir de Madrid a Roma. Si hubiera ido un 20 % más rápido, ¿cuánto habría tardado?

A) 2 h **B)** 2 h 5 min **C)** 2 h 10 min **D)** 2 h 15 min **E)** 2 h 20 min

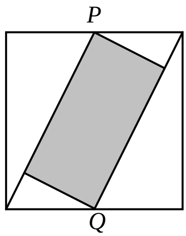
19 Un rectángulo es 25 veces más largo que ancho. ¿Cuál es el cociente entre su perímetro y el perímetro del cuadrado de igual área?

A) 1 **B)** $\frac{5}{4}$ **C)** $\frac{13}{5}$ **D)** $\frac{25}{4}$ **E)** 25

20 Tiramos dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos números obtenidos sean los dígitos de un cuadrado perfecto?

A) $\frac{1}{9}$ **B)** $\frac{2}{9}$ **C)** $\frac{7}{36}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{1}{3}$

21 *P* y *Q* son los puntos medios de los lados del cuadrado de perímetro 4 cm. El área del rectángulo sombreado de la figura, está comprendida entre:



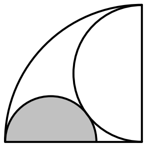
A) $\frac{1}{4}$ *y* $\frac{5}{16}$ **B)** $\frac{5}{16}$ *y* $\frac{3}{8}$ **C)** $\frac{3}{8}$ *y* $\frac{7}{16}$

D) $\frac{7}{16}$ *y* $\frac{1}{2}$ **E)** Más de $\frac{1}{2}$

22 Cuando dividimos 2007 entre el entero positivo *N*, el resto es 5. ¿Cuántos valores posibles hay para *N*?

A) 12 **B)** 13 **C)** 14 **D)** 15 **E)** 16

23 El diámetro del semicírculo grande y el radio del cuadrante miden ambos 2 cm. ¿Cuál es, en cm, el radio del semicírculo pequeño?



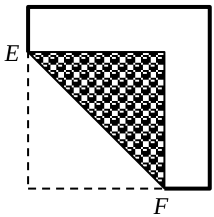
A) $\frac{2}{\pi}$ **B)** $\frac{7}{10}$ **C)** $\frac{2}{3}$ **D)** $\frac{\pi}{2}$ **E)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

24 ¿Cuándo el siguiente producto es un número entero?

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

A) Cuando *n* es impar **B)** Cuando *n* es par **C)** Cuando *n* es múltiplo de 3
D) Siempre **E)** Nunca

25 Una hoja cuadrada de papel de 12 cm^2 de área, es blanca por una cara y roja por la otra. Doblamos una esquina de la hoja formando un triángulo con dos lados paralelos a los lados de la hoja, como se muestra en la figura. Si ahora la superficie visible de la hoja es la mitad roja y la mitad blanca, ¿cuál es, en cm, la longitud del doblez *EF*?



A) 4 **B)** $\sqrt{12}$ **C)** 3 **D)** 6 **E)** $\sqrt{8}$

XI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE : Día 21 de abril de 2007

NIVEL IV (Bachillerato)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ (☒) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA.**
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
www.profes.net (SM) - Grupo ANAYA - El Corte Inglés
Yalos Instruments, S.L. - SAS

1 En un examen de Matemáticas, puntuando de 0 a 10, la media de los 12 primeros de la lista, en una clase de 20 estudiantes, fue 6,5. ¿Qué podemos concluir sobre la media m de los 20 estudiantes de la clase?

A) $0{,}325 \leq m \leq 6{,}5$ **B)** $3{,}25 \leq m \leq 6{,}5$ **C)** $3{,}9 \leq m \leq 6{,}5$
D) $3{,}9 \leq m \leq 7{,}9$ **E)** $6{,}5 \leq m \leq 7{,}5$

2 En el cubo *ABCDEFGH,* apoyado sobre la cara *ABCD,* los vértices *E, F, G* y *H* están en la misma arista que *A, B, C* y *D* respectivamente. ¿Cuál es el coseno del ángulo $C\hat{A}G$?

A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **B)** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **C)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **D)** $\sqrt{\frac{2}{3}}$ **E)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

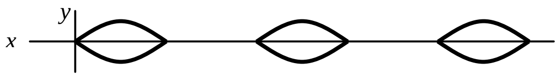
3 Si n es un entero con $1 \leq n \leq 9$, ¿cuál será el valor de $\frac{0{,}n}{0{,}\overset{\frown}{n}}$?

A) $\frac{1}{10}$ **B)** $\frac{9}{10}$ **C)** 1 **D)** $\frac{10}{9}$ **E)** Depende de n

4 En el triángulo isósceles *ABC,* con *AB* = *AC,* se verifica que el ángulo $B\hat{C}D$ es igual al ángulo $B\hat{A}C$, siendo *D* el punto medio de *AB.* ¿Cuál es el coseno de este ángulo?

A) $\frac{3}{4}$ **B)** $\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$ **C)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **D)** $\frac{\sqrt{7}}{4}$ **E)** $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

5 ¿Cuál de las siguientes expresiones podría ser la ecuación de una curva de la que un trozo de su gráfica se muestra en la figura adjunta?

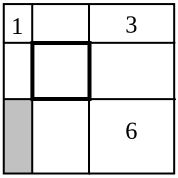


A) $y = senx$ **B)** $|y| = senx$ **C)** $y = |senx|$
D) $|y| = |senx|$ **E)** Nada de lo anterior

6 Si *h, h', h''* denotan las alturas de un triángulo, ¿cuáles de los siguientes números no pueden ser proporcionales a sus longitudes?

A) 2, 3 y 4 **B)** 2, 3 y 5 **C)** 2, 4 y 5 **D)** 3, 4 y 5 **E)** 3, 4 y 6

7 Dividimos un cuadrado en 9 rectángulos con rectas paralelas a los lados como muestra la figura. El rectángulo central resulta ser otro cuadrado y las áreas de tres rectángulos de las esquinas, en cm^2, son las que te mostramos. ¿Cuál es, en cm, el perímetro del rectángulo sombreado?



A) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **B)** 2 **C)** $3\sqrt{3}$ **D)** 6 **E)** $\frac{11\sqrt{3}}{3}$

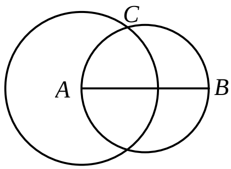
8 De las siguientes expresiones, ¿cuál es igual a $sen^3x + cos^3x$ para cualquier x?

A) $sen3x + cos3x$ **B)** 1 **C)** $(senx + cosx)^3$
D) $(senx + cosx)(1 - senx \cdot cosx)$ **E)** $(senx + cosx)(sen2x + 1)$

9 Si $\cos\theta = \frac{1}{2}$, ¿cuál de las siguientes expresiones no puede ser igual a $sen2\theta$?

A) $sen\theta$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ **D)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **E)** $2sen\theta\cos\theta$

10 La circunferencia pequeña de la figura tiene 10 cm de radio y *AB* es uno de sus diámetros. La circunferencia grande, de centro *A*, tiene 12 cm de radio y corta a la pequeña en *C*. ¿Cuál es, en cm, la medida de la cuerda *CB*?



A) 8 **B)** 10 **C)** 12 **D)** $10\sqrt{2}$ **E)** 16

11 Un corredor de fondo recorre cierta distancia a una velocidad *v* m/s y luego recorre la mitad de esa distancia a *u* m/s. Si el tiempo total que ha empleado ha sido de *t* segundos, ¿cuál ha sido, en m, la distancia total recorrida?

A) $\frac{3tuv}{u+2v}$ **B)** $\frac{3tuv}{2u+v}$ **C)** $\frac{3t}{u+2v}$ **D)** $\frac{tuv}{2u+v}$ **E)** $\frac{2tuv}{2u+v}$

12 Si la recta $y = 3x + 4$ se refleja en la recta $y = -x$, ¿cuál es la ecuación de la recta imagen?

A) $3y = x + 4$ **B)** $3y = x - 4$ **C)** $y = 3x - 4$ **D)** $y = -3x - 4$ **E)** $y = 4x + 3$

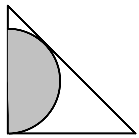
13 ¿Qué número ocupa el lugar 2007 en la sucesión **1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5,**…?

A) 55 **B)** 59 **C)** 63 **D)** 67 **E)** 71

14 Si cada base de un trapecio decrece en un 10 % y la altura crece en un 10 %, ¿cuál es el porcentaje de cambio en el área?

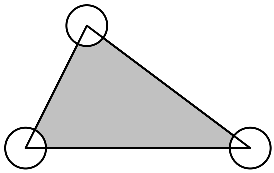
A) Decrece un 10 % **B)** Decrece un 1 % **C)** No cambia
D) Crece un 10 % **E)** Decrece un 20 %

15 Los catetos del triángulo rectángulo miden 1. ¿Cuál es el radio del semicírculo sombreado?



A) $\sqrt{2}-1$ **B)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **C)** $3-2\sqrt{2}$ **D)** $\dfrac{1}{2}$ **E)** $2-\sqrt{2}$

16 El área del triángulo de la figura es 80 m^2 y el radio de los círculos centrados en los vértices es 2 m. ¿Cuál es el área, en m^2, de la zona sombreada?



A) 76 **B)** 80 – 2π **C)** 40 – 4π

D) 80 – π **E)** 78π

17 Las soluciones de la ecuación $x^2 - Ax + B = 0$ son dos números naturales distintos, de dos dígitos cada uno y cuyas cifras están intercambiadas. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es necesariamente verdadera?

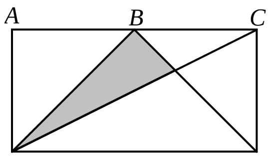
A) *B* es capicúa **B)** *A* es múltiplo de 11 **C)** *A* = *B*

D) *B* es un múltiplo de 11 **E)** *A* es múltiplo de 10

18 ¿Para cuántos valores enteros de *p* resulta que $4^{\frac{p-1}{p+1}}$ también es entero?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

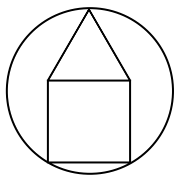
19 Sabiendo que *B* es el punto medio de *AC* y que la base del rectángulo es 2 y su altura es 1, ¿cuál es el área del triángulo sombreado?



A) $\dfrac{1}{4}$ **B)** $\dfrac{1}{5}$ **C)** $\dfrac{1}{2}$ **D)** $\dfrac{1}{3}$

E) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

20 La figura muestra un cuadrado y un triángulo equilátero con un lado común. Si el lado del cuadrado mide 2, ¿cuánto mide el radio de la circunferencia circunscrita a la figura?



A) $\dfrac{9}{4}$ **B)** $4-\sqrt{3}$ **C)** $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$ **D)** 2

E) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2}$

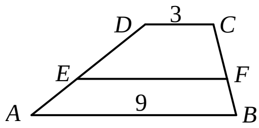
21 En una bolsa hay 3 bolas rojas y una azul. Se extraen sin mirar dos bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que sean de distinto color?

A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{3}{4}$

22 ¿Cuál es la penúltima cifra de 11^{48}?

A) 8 **B)** 6 **C)** 4 **D)** 2 **E)** 0

23 Dividimos el trapecio de bases 9 y 3 de la figura por un segmento paralelo a las bases, de forma que los dos trapecios formados tienen igual perímetro. Si $AD = 6$ y $BC = 4$, ¿cuál es el valor del cociente $\frac{AE}{ED}$?



A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{4}{5}$

24 Nadal y Federer juegan en tierra batida un partido a 3 sets, es decir, vence quien gana 2 sets. Si la probabilidad que tiene Nadal de ganar cada set es un 60 %, ¿qué probabilidad tiene Nadal de salir victorioso en el partido?

A) 0,6 **B)** 0,648 **C)** 0,504 **D)** 0,36 **E)** 0,75

25 En el segmento BC, marcamos los puntos D y E que lo dividen en tres segmentos iguales. Si $BD^2 + BE^2 = k \cdot BC^2$, el valor de k es:

A) $\frac{5}{9}$ **B)** $\frac{2}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** 2 **E)** $\frac{1}{4}$

XI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (1ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**D**	1	**D**	1	**A**	1	**A**
2	**C**	2	**C**	2	**C**	2	**C**
3	**B**	3	**C**	3	**B**	3	**E**
4	**A**	4	**D**	4	**C**	4	**C**
5	**E**	5	**D**	5	**E**	5	**B**
6	**A**	6	**A**	6	**A**	6	**A**
7	**E**	7	**A**	7	**A**	7	**B**
8	**A**	8	**A**	8	**B**	8	**C**
9	**A**	9	**D**	9	**D**	9	**E**
10	**E**	10	**C**	10	**A**	10	**A**
11	**B**	11	**C**	11	**B**	11	**A**
12	**C**	12	**D**	12	**C**	12	**C**
13	**B**	13	**B**	13	**D**	13	**B**
14	**D**	14	**A**	14	**B**	14	**E**
15	**A**	15	**C**	15	**B**	15	**D**
16	**A**	16	**A**	16	**E**	16	**E**
17	**C**	17	**E**	17	**C**	17	**E**
18	**A**	18	**C**	18	**B**	18	**A**
19	**B**	19	**C**	19	**E**	19	**E**
20	**A**	20	**C**	20	**B**	20	**C**
21	**D**	21	**E**	21	**D**	21	**B**
22	**A**	22	**C**	22	**C**	22	**B**
23	**B**	23	**A**	23	**A**	23	**C**
24	**C**	24	**E**	24	**E**	24	**D**
25	**D**	25	**E**	25	**C**	25	**E**

XI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (2ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**E**	1	**A**	1	**C**	1	**D**
2	**C**	2	**E**	2	**A**	2	**D**
3	**C**	3	**B**	3	**A**	3	**B**
4	**E**	4	**D**	4	**B**	4	**A**
5	**A**	5	**B**	5	**C**	5	**B**
6	**C**	6	**A**	6	**B**	6	**C**
7	**A**	7	**C**	7	**E**	7	**E**
8	**A**	8	**C**	8	**C**	8	**D**
9	**D**	9	**B**	9	**E**	9	**B**
10	**B**	10	**D**	10	**E**	10	**E**
11	**B**	11	**E**	11	**B**	11	**B**
12	**E**	12	**E**	12	**A**	12	**A**
13	**B**	13	**C**	13	**E**	13	**C**
14	**B**	14	**B**	14	**A**	14	**B**
15	**A**	15	**A**	15	**D**	15	**A**
16	**A**	16	**B**	16	**B**	16	**B**
17	**D**	17	**B**	17	**D**	17	**B**
18	**E**	18	**B**	18	**B**	18	**E**
19	**D**	19	**C**	19	**C**	19	**D**
20	**C**	20	**B**	20	**B**	20	**D**
21	**D**	21	**B**	21	**C**	21	**C**
22	**B**	22	**B**	22	**C**	22	**A**
23	**B**	23	**C**	23	**C**	23	**C**
24	**A**	24	**D**	24	**A**	24	**B**
25	**B**	25	**A**	25	**A**	25	**A**

XI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel I

1. (D) En el año 2007 el tío Esteban cumplió 36 años (12 x 3 = 36)
Nació en el año 1971 (2007 – 36).

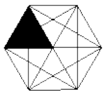
2. (C) $(0,001 \times 400) : 0,02 =$

$0,001 = 1/1000$
$1/1000 \times 400 = 0,4$
$0,02 = 2/100 = 1/50$
$0,4 : 1/50 = 0,4 \times 50 = 20$
$(0,001 \times 400) : 0,02 = 20$

3. (B) El perímetro de la figura es igual a la suma de dos lados del triángulo y tres lados del cuadrado. Los lados de ambos polígonos son iguales.
6 : 3 = 12 cm mide un lado del pentágono.
12 cm × 5 = 60 cm

4. (A) Si Bárbara combina un vestido con un par de zapatos, obtiene 24 formas distintas de vestirse (6 × 4). Como además cada una de esas formas las puede combinar con tres sombreros, obtendrá 72 formas distintas (24 × 3).
6 × 4 × 3 = 72 formas distintas

5. (E) Al trazar las diagonales de un hexágono regular se forman 6 triángulos equiláteros como el que se muestra en la figura. Cada triángulo está formado a su vez por 4 regiones (triángulos). En total: 6 × 4 = 24. El hexágono queda dividido en 24 regiones.



6. (A) La longitud de la valla es igual a la suma de los perímetros de ambos polígonos. Para hallar la longitud del lado del cuadrado calculamos su área que es igual a la del rectángulo.
Área del rectángulo: 18 m × 50 m = 900 m^2; por tanto, el área del cuadrado es 900 m^2
El lado del cuadrado se obtiene hallando la raíz cuadrada de su área.
Lado del cuadrado: $\sqrt{900} = 30$ m.
El perímetro del rectángulo es igual a: (18 + 50) × 2 = 136 m
El perímetro del cuadrado es igual a: 30 m × 4 = 120 m
Longitud de la valla: 136 m + 120 m = 256 m

7. (E) Si gasté los 3/8 de mis ahorros en un regalo, me quedan 5/8 (8/8 – 3/8 = 5/8)
Los 5/8 corresponden a los 45, 60 €
1/8 de mis ahorros equivaldrá a la quinta parte de de lo que me queda.
45,6 : 5 = 9,12.
El regalo costó: 9,12 × 3 = 27, 36 €

8. (A) Del 1 al 19 la pronuncia únicamente 6 veces; las seis veces en las que aparecen los números 3, 4 ó 7. En las 8 decenas que faltan, la pronuncia al menos una vez por cada número (vein**t**e, vein**t**iuno… trein**t**a, trein**t**a y uno…), es decir pronuncia la "t" 80 veces por lo menos. Sin embargo, no hemos tenido en cuenta que, en las decenas del "**t**rein**t**a" y del "se**t**en**t**a", aparece la letra "t" al menos dos veces en cada número, lo que suma otras 20 pronunciaciones. Por último, en estas 8 decenas, tampoco hemos contado las veces que aparece otra "t" cada vez que uno de esos números termina en 3, 4 ó 7, lo que supone $3 \times 8 = 24$ veces más. En consecuencia pronuncia la "t" $6 + 80 + 20 + 24 = 130$ veces.

9. (A) La cara opuesta a la X es 1 porque todas las demás tienen un vértice común con X
La cara opuesta a 4 es 2
La cara opuesta a 5 es 3

10.(E) El 80 % de 25 es 20, que es el número de niños.
Cuatro de cada cinco son 20 (4/5 de 25 = 20)
Sólo Ariel y Claudio dicen la verdad.

11.(B) 1008, 1118, 1228, …, 1998 → 10 números
2007, 2117, 2227, …, 2997 → 10 números

.
.
8001, 8118, 8221, …, 8991 → 10 números
9000, 9110, 9220, …, 9990 → 10 números
Hay: 9 × 10 = 90 números que tienen la misma propiedad que 2007

12.(C) El ritmo al que comen las termitas es: 300/25 = 240/20
(300 × 20) : 25 = 240

13.(B) El cuadrado está dividido en 16 partes iguales. Cada parte es 1/16 del cuadrado. La "L" grande ocupa cuatro casillas; es decir, 4/16. La "L" pequeña ocupa dos mitades de una casilla; o sea, 2/32. La fracción 2/32 es equivalente a 1/16; por tanto, 4/16 + 1/16 = 5/16 del cuadrado están sombreados.

14.(D) Con un diagrama como el que se muestra y anotando los datos conocidos se hallan los datos pedidos.

	BAILAN	NO BAILAN	
MUJERES	a	d	g
HOMBRES	b	e	h
	c	f	

a: Mujeres que bailan
b: Hombres que bailan
c: Muj. y homb.que bailan
d: Mujeres que no bailan
e: Hombres que no bailan
f: Muj. y homb. que no bailan
g: nº de mujeres
h: nº de hombres

	BAILAN	NO BAILAN	
MUJERES	**12**	13	25
HOMBRES	**8**	**15**	**23**
	20	**28**	48

En negrita, los datos que se pueden deducir, una vez anotados los conocidos.
Obsérvese que 25 + 13 = 48 personas; lo mismo, 20 + 28 = 48.
No bailan 15 hombres.

15.(A) La medida del ángulo $A\hat{M}O$ se calcula siguiendo estos pasos:
180º - (45º + 58º) = 77º

$A\hat{O}M$ = 360º - (77º + 90º + 90º) = 103º

$A\hat{M}O$ = 180º - (103º + 34º) = 43º

16.(A) Si al lanzar las seis primeras veces no se ha obtenido ningún resultado, en la séptima tirada se repetirá seguro uno de los resultados anteriormente obtenidos.

17.(C) La figura (el hexágono) está formada por 7 celdas y 6 rombos que equivalen a 2 celdas más.
180 cm^2 : (7 + 2) = 20 cm^2

18.(A) Hay 12 conejos y 12 gallinas.
La diferencia es cero.

19.(B) No es necesario realizar completamente la suma de los cinco números, Se suman sucesivamente los diferentes órdenes de unidades, empezando por las unidades y se va, simultáneamente comprobando las soluciones; así, la cifra de las unidades es 5, la de las decenas es 6, la de las centenas es 6. No es necesario seguir sumando porque el único número que tiene esas cifras es 166 665.

20.(A) 9 de 30 es lo mismo que 3 (9:3) de 10 (30:3); y 3 de 10 es lo mismo que 30 (3×10) de 100 (10×10); por lo tanto 9 de 30 es el 30%.

21.(D) La suma de las tres cantidades es igual al doble del peso de las tres personas.
(h + m) + (h + p) + (m + p) = 2 x (h + m + p)
Los tres juntos pesan. (103 + 113 + 126) : 2 = 171 kilos

22.(A) Como la torre tiene 17 m de altura y 17 cuadraditos de altura, entonces cada cuadradito es de un metro cuadrado, por lo tanto:
$8 \times 14 + 3 \times 6 = 112 + 18 = 130\ m^2$

23.(B) En la serie: 5, 18, 31, 44, 57,…, cada número se diferencia del anterior en 13 unidades. A partir del primero ha habido, (2007 – 5) : 13 = 154 niños que han gritado un número, luego Carmelo ocupa el puesto: 154 + 1 = 155

24.(C) Con una tabla como la que se muestra se comprueba que el único día de la semana que los dos hermanos pueden afirmar "Ayer me tocó mentir" es el jueves.

	L	M	X	J	V	S	D
ZIPI	m	m	m				
ZAPE				m	m	m	

25.(D) El número de jóvenes tiene que ser múltiplo de 4, 3 y 12. Sin perder generalidad podemos suponer que son 12.
Uno de los 12 no tiene móvil ni ordenador, por lo que 11 tienen alguna de las dos cosas o ambas.
3/4 de 12 = 9 tienen móvil
2/3 de 12 = 8 tienen ordenador
Luego 9 + 8 – 11 = 6 tienen las dos cosas, es decir, la mitad de ellos.

XI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

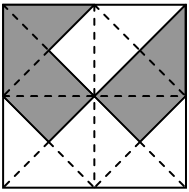
Soluciones 1ª Fase Nivel II

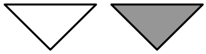
1. (D) Una vez que un día haya podido hacer una ensalada completa, entonces para poder hacer otra deberá pasar un número de días múltiplo de 4, de 15 y de 18. El mínimo común múltiplo me da la respuesta menor: $18 \cdot 5 \cdot 2 = 180$ días

2. (C) Se nos dice que el 15 % del precio son 9 euros, y se nos pregunta cuánto hemos pagado por las zapatillas, lo cual es el 85% del precio. Podemos hacerlo por regla de tres, o con un entretenido cálculo mental: Si el 15 % son 9 €, el 5% son 3, y el 10% son 6. Así el 85% son $8 \cdot 6 + 3 = 51$ €.

3. (C) Habrá que hallar el mayor primo que divide a 2007. Empecemos dividiéndolo por 9, pues cumple su regla de divisibilidad. $2007 = 9 \cdot 223$. Aunque 223 huela a primo habrá que investigar si lo es. Empezamos dividiendo por 7 (2, 3 y 5 están fuera de sospecha) y no da exacto. La división por 11 la podemos evitar si conocemos la regla del 11. Dividimos por 13 y tampoco. Dividimos por 17 y nada, pero ahora el cociente ya es menor que el divisor, luego el proceso terminó: 223 es primo.

4. (D)

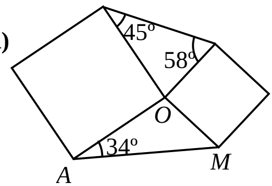


Mirando la zona sombreada y la zona blanca podemos descubrir un "divisor" común: 

Esta fracción se ve que cabe 7 veces en la zona sombreada y nueve veces en la blanca. Así la región sombreada es $\frac{7}{16}$ del total.

5.(D) Completemos ordenadamente los datos: 48 personas, 20 bailan, 28 no bailan, 25 mujeres, 13 mujeres no bailan, ... ¿?. ¡15 hombres no bailan!
(Ver respuesta en el problema 14 del Nivel I)

6. (A)

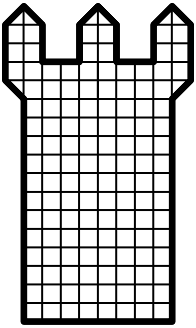


Nos piden el ángulo del triángulo con vértice *M*. Bastará con hallar el otro ángulo del mismo triángulo con vértice en *O*. En el otro triángulo el ángulo con vértice *O* mide: 180º – 45º – 58º = 77º, pero los dos ángulos de vértice *O* y dos ángulos rectos (de los cuadrados) suman un ángulo completo.

Así $A\hat{M}O$ = 180º – 77º = 103º, y finalmente $A\hat{M}O$ = 180º – 34º – 103º = 43º.

7. (A) Hay que tener un poco de cuidado con el enunciado. Si se pone que se repite algún resultado, es seguro que después de siete tiradas se habrá repetido algún resultado, ya que resultados distintos sólo hay seis. Si pusiera repetir un resultado concreto entonces no podríamos asegurarlo nunca (aunque lo normal es que no tardemos mucho en lograr ese resultado, en media una de cada seis tiradas).

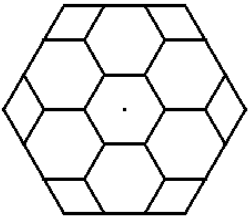
8. (A)



Como de hecho podemos intuir (pero ello no nos excusa de comprobar) la altura de la torre equivale a la de una columna de 17 cuadraditos y por tanto el lado de la cuadrícula representa un metro. La figura puede ser descompuesta en un rectángulo de 8 × 14 cuadrículas, una almena central equivalente a 5 cuadrículas y dos almenas laterales con sobaco que equivalen a 13 cuadrículas más, luego el área del dibujo es 112 + 5 + 13 =130 m^2**.**

9. (D) Tenemos pesadas a tres personas de dos en dos. Si sumamos los tres resultados tendremos en la suma dos veces el peso de cada persona y por lo tanto el peso de las tres será la mitad de ese cálculo. 103 + 113 + 126 = 342, y los tres pesan 171 kg.

10.(C)



El hexágono está formado por 7 hexágonos pequeños y 6 rombos. Si nos damos cuenta, tres de estos rombos equivalen a un hexágono pequeño, y por tanto el área del hexágono grande es nueve veces el área del hexágono pequeño. Dividimos 180 entre 9 y obtenemos la respuesta. Otra forma más culta de ver la relación de áreas es ver la relación de lados y elevarla al cuadrado.

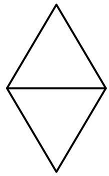
11.(C) Empezamos por descartar que sea domingo, porque no es posible que los dos digan la verdad, ya que entonces el día anterior habrían mentido ambos y eso no ocurre ningún día. Así uno miente y el otro dice la verdad. Es cierto entonces que a uno el día anterior le tocaba mentir, y por ello ha cambiado de mentir a decir la verdad. Eso sólo le puede ocurrir a Zipi que pasa de mentir a decir la verdad en días consecutivos, pero no a Zape. Luego el diálogo lo tuvieron en jueves.

12.(D) Uno de los datos no está definido en sentido positivo hacia la pregunta. Uno de cada doce no tiene ni móvil ni ordenador, es decir que 11 de cada 12 tiene alguna de las dos cosas. Ya podemos aplicar uno de los principios de una medida. La medida de la unión de dos cantidades es igual a la suma de las medidas de cada una de ellas menos la medida de la cantidad intersección. Así $\frac{11}{12} = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - m$ siendo m la proporción pedida, pero $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12}$, luego $m = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

13.(B) $0,24 = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}$. Es decir la proporción simplificada entre fumadores y no fumadores es de 6 a 25. Por lo menos debe haber 31 personas.

14.(A) Enseguida vemos que *e* debe ser 5, y que 2 y 4 deben ocupar posición par, y por tanto 1 y 3 las dos posiciones impares restantes. Pero la regla de divisibilidad por 4 dice que las dos últimas cifras forman un múltiplo de 4, es decir *cd* es múltiplo de 4, pero *c* es 1 ó 3, y eso obliga a que *d* sea 2**.** Entonces *abc* es 143 ó 341, en ningún caso un múltiplo de 3.

15.(C) Si un ángulo es de 120º, como son iguales dos a dos y suman 360º, se tiene que el otro ángulo distinto es de 60º. La diagonal menor es la que divide al ángulo obtuso, y a su vez divide al rombo en dos triángulos isósceles. Pero el ángulo "desigual" mide 60º, y por tanto esos triángulos son equiláteros. El perímetro es pues 24.



16.(A) Bueno estos números no son tan difíciles de calcular pues 2 y 5 forman un buen tándem cuando se multiplican. Podemos sin mucho esfuerzo realizar todos los productos.

$2^4 \times 3^2 \times 5^4 = 9 \times 10^4 = 90000$; $2^5 \times 3 \times 5^4 = 6 \times 10^4 = 60000$;

$2^4 \times 5^5 = 5 \times 10^4 = 50000$; $2^3 \times 11 \times 5^3 = 11 \times 10^3 = 11000$;

$2^4 \times 5^3 \times 7 = 14 \times 10^3 = 14000$.

17.(E) Irán por delante todas las que empiecen por *aa*. Si conocemos la fórmula de permutaciones con repetición el número de estas palabras será $P_4^{2,1,1} = \frac{4!}{2!} = \frac{4\times3\times2}{2} = 12$. Luego vendrán las que empiecen por *abaa*, que son dos más, y luego viene nuestra palabra. Ocupa el lugar decimoquinto.

Si no conocemos esas fórmulas, podemos contar desarrollando los casos (mejor en forma de árbol y partiendo de la ramificación propuesta).

$$aa\begin{cases} a\begin{cases} b\begin{cases} bc \\ cb \end{cases} \\ cb \end{cases} \\ b\begin{cases} a\begin{cases} b \\ c \end{cases} \\ b\begin{cases} ac \\ ca \end{cases} \\ c\begin{cases} ab \\ ba \end{cases} \end{cases} \\ c\begin{cases} abb \\ b\begin{cases} ab \\ ba \end{cases} \end{cases} \end{cases};\qquad abaa\begin{cases} bc \\ cb \end{cases};\qquad ababac\,.$$

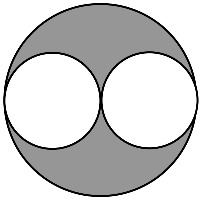
DOCE + DOS + UNO = QUINCE

18.(C) Salvo que se conozca el resultado de cuando un número necesita cuatro cuadrados para su descomposición en sumas, lo que procede es (rápidamente) encontrar descomposiciones menores para los que se pueda.

59 = 49 + 9 + 1; 69 = 64 + 4 + 1; 89 = 81 + 4 + 4; 99 = 81 + 9 + 9.

19.(C) Aunque el problema puede ser resuelto mecánicamente mediante aplicación de una regla de tres, es más bonito hacer cálculo “mental”. Si los $\frac{2}{5}$ son 840 m, $\frac{1}{5}$ será 420, y así la unidad será: 5 × 420 = 2100 m.

Ahora sólo resta hacer una multiplicación: $\frac{3}{4}\times 2100 = 3\times 525 = 1575$ m.



20.(C) Como los círculos pequeños tienen radio 1 cm, el círculo mayor tiene radio 2 cm. La región sombreada tiene por área una diferencia de áreas:

$$\pi\cdot 2^2 - (\pi\cdot 1^2 + \pi\cdot 1^2) = 4\pi - 2\pi = 2\pi \text{ cm}^2.$$

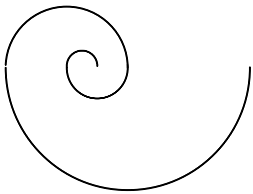
21.(E) Para que el número sea múltiplo de 6, tiene que serlo de 2 y de 3. Para ello *b* tiene que ser par (5 posibilidades). Para *b* = 0, a falta de *a*, las cifras del número suman 8, y para que sea múltiplo de 3 tenemos tres posibilidades para *a* (1, 4 y 7). Para b = 2 , otras tres posibilidades para *a* (2, 5 y 8), ... Pongamos en una tabla los resultados posibles:

b	0	2	4	6	8
a	1, 4, 7	2, 5, 8	0, 3, 6, 9	1, 4, 7	2, 5, 8

22.(C) Hay que darse cuenta de que las descomposiciones en producto no lo son en factores primos. Eso será lo primero a remediar:
$2^3 \times 9 \times 10 = 2^3 \times 3^2 \times 2 \times 5 = 2^4 \times 3^2 \times 5$;
$4^2 \times 3^3 \times 5 = 2^4 \times 3^3 \times 5$;
$8 \times 3 \times 25^2 = 2^3 \times 3 \times 5^4$;
Ahora ya podemos aplicar la regla para obtener el mínimo común múltiplo.
mcm = $2^4 \times 3^3 \times 5^4$. Repasando con ojo las respuestas se corresponde con la C.

23.(A) Si pensamos que los 24 animales son gallinas, el número de patas sería 48. Hasta 72 nos faltan por contar 24 patas. Ello es porque hemos contado sólo dos patas por conejo en vez de cuatro. Luego esas 24 patas que faltan nos dan divididas por dos el número de conejos no contados (o contados como si fueran gallinas). Hay por tanto 12 conejos y de ahí 12 gallinas.

24.(E) Leyendo lo que dice el enunciado deberemos sumar la longitud de cuatro semicircunferencias de radios: 1, 2, 4 y 8, es decir:



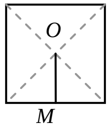
$$\pi\cdot 1 + \pi\cdot 2 + \pi\cdot 4 + \pi\cdot 8 = \pi\cdot(1+2+4+8) = 15\pi \text{ cm}$$

25.(E) En principio necesitaremos 35 doses para numerar la centena de las 35 habitaciones de la segunda planta. Veamos ahora cuántos doses son necesarios para escribir los números del 01 al 35. Diez para los veintes y cuatro más para los números que acaban en 2 (terminaciones de 0**2**, 1**2**, 2**2** y 3**2**). Así que en total tenemos:

$35 + 5 \times 14 = 35 + 70 = 105$.

XI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel III



1. (A) OM mide 2 cm y, como el área de un cuadrado de diagonal d es $A = \frac{d^2}{2}$, tenemos que el área buscada es 2 cm^2.

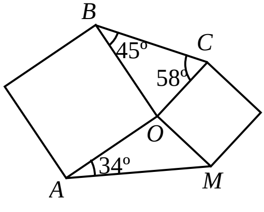
2. (C) Como un 15% del precio de las zapatillas son 9 euros, las zapatillas costaban antes del descuento $\frac{9 \cdot 100}{15} = 60$ y por tanto he pagado $60 - 9 = 51$ euros por ellas.

3. (B) Sabemos que $7c = 4e$ luego, claramente, una ensaimada pesa más que un cruasán y que $5p = 6e$, así que las palmeras son más pesadas que las ensaimadas. Entonces $c < e < p$.

4. (C) Pensemos en todas las posibilidades. Observa que ni a ni b pueden ser pares pues si a fuera par, ba no sería primo salvo que b fuera 0, pero en ese caso ab sería 20 que no es primo. Por la misma razón ni a ni b pueden ser 0 ni 5. Así que nos quedan las siguientes posibilidades: 1331, 1771, 1991, 3113, 3773, 3993, 7117, 7337, 7997, 9119, 9339, 9779.
Observa que si *abba* es una combinación válida, también lo será *baab* así que podemos estudiar los casos por parejas: 1331 y 3113 valen pues tanto 13 como 31 son primos. 1771 y 7117 también. 1991 y 9119 no valen pues 91 es múltiplo de 7, 3773 y 7337 sí valen pues tanto 37 como 73 son primos. No valen ni 3993 ni 9339 pues tanto 39 como 93 son múltiplos de 3. Por último 7997 y 9779 sí valen pues 97 y 79 son primos
En total hay 8 posibilidades: 1331, 3113, 1771, 7117, 3773, 7337, 7997, y 9779.

5. (E) Los números de la primera columna suman 1 + 2 + 3 + ... + 10 = 55.
Los de la segunda columna suman el doble que los de la primera pues cada sumando es el doble luego suman $2 \cdot 55$, los de la tercera el triple y así hasta los de la décima columna que suman diez veces lo que suman los de la primera:
$55 + 2 \cdot 55 + 3 \cdot 55 + ... + 10 \cdot 55 = 55 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 10) = 55 \cdot 55 = 3025$

6. (A) El ángulo $B\hat{O}C = 180 - (45 + 58) = 77^{\circ}$ por ser un ángulo del triángulo BOC. Además, $B\hat{O}C + 90 + A\hat{O}M + 90 = 360$ luego $A\hat{O}M = 103^{\circ}$ y

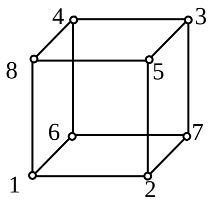


como $A\hat{M}O$ es un ángulo del triángulo AMO tenemos que $A\hat{M}O = 180 - (34+103) = 43º$

7. (A) Escribamos todos los casos posibles (C es cara y X es cruz):
CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX.
Los casos favorables son CCX y XCC y los casos posibles son 8, luego la probabilidad buscada es $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

8. (B) $20! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20 =$
$1\cdot \underline{2}\cdot 3\cdot 4\cdot \underline{5}\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot \underline{10}\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 3\cdot \underline{5}\cdot 16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot \underline{2}\cdot \underline{10}$
Agrupando cada 5 con un dos, vemos que este número es divisible por 10 000 y no lo es por 100 000.
Ahora calculamos la última cifra del producto de los números restantes del siguiente modo:
$3\cdot 4 \to 2\cdot 6 \to 2\cdot 7 \to 4 \;...\to 6\cdot 19 \to 4$ La última cifra del producto , distinta de cero, es 4.

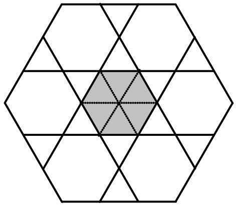
9. (D) Observando los vértices que forman cada cara se ve que la única forma de distribuir los vértices es la siguiente y por tanto, el vértice más alejado del 6 es el 5.



10. (A) Claramente, no se trata de calcular los cuadrados. Debemos encontrar una forma más eficaz de hacer la cuenta. Si escribimos $98561 = 98565 - 4$ y $98569 = 98565 + 4$ tenemos:
$$98561^2 + 98569^2 - 2\times 98565^2 = (98565-4)^2 + (98565+4)^2 - 2\times 98565^2 =$$
$$= 98565^2 - 8\cdot 98565 + 16 + 98565^2 + 8\cdot 98565 + 16 - 2\times 98565^2 = 16 + 16 = 32$$

11. (B) Factoricemos $648 = 2^3\cdot 3^4$. Así pues 2 y 3 dividen a N y por tanto 6, $\frac{N}{2}$ y $\frac{N}{3}$, $\frac{N}{6}$ también. Estos 6 números junto con 1 y N nos dan 8 divisores de N, luego hay números repetidos. Las únicas posibilidades son N = 12 o N = 18.
Como los divisores de 12 son: 1, 2, 3, $4=2\cdot 2$, $6=2\cdot 3$, $12=2^2\cdot 3$, aún multiplicando todos no obtendríamos 3^4. Entonces N = 18, sus divisores son: 1, 2, 3, $6=2\cdot 3$, $9=3^2$, $18=2\cdot 3^2$ y el único divisor que no hemos multiplicado ha sido el 9.

12. (C) Como cada hexágono pequeño está formado por seis triangulitos iguales entre sí e iguales a los de la figura, el hexágono grande está formado por 54 triangulitos de área $180:54=\dfrac{10}{3}$ cm^2. El área del hexágono central es, pues, $6\cdot\dfrac{10}{3}=20\,\text{cm}^2$.



13. (D) En este problema es más fácil calcular cuál es la probabilidad de que ambas sean del mismo color: La probabilidad de que sean ambas rojas es $\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$, igual que la probabilidad de que ambas sean azules. Luego la probabilidad de que sean de distinto color es $1-2\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{3}$.

También puedes escribir todos los casos posibles, pero debes hacerlo con cuidado: distingamos las dos bolas rojas llamándolas R_1 y R_2, y las dos azules: A_1 y A_2. Como no me importa el orden en el que las saco, todas las posibilidades son $\{R_1\,R_2,\, R_1\,A_1,\, R_1\,A_2,\, R_2\,A_1,\, R_2\,A_2,\, A_1\,A_2,\}$. Tenemos 4 casos favorables y 6 posibles y, como todos ellos tienen la misma probabilidad, usando la regla de Laplace obtenemos que la probabilidad buscada es $\dfrac{2}{3}$.

14. (B) Como $\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{17}{12}=1+\dfrac{5}{12}$, al menos $\dfrac{5}{12}$ de los asistentes que han sido contados dos veces. Podrían ser más si en la reunión hubiera gente sin esas aficiones, pero eso no lo sabemos.

15. (B) Como en total quiero tardar 1 hora y 12 minutos (a 5km/h de media, ese es el tiempo que se tarda en recorrer 6 km) y para los primeros 3 km ya he invertido 45 minutos, sólo me quedan 27 minutos para hacer los restantes 3 km. Así que mi velocidad deberá ser de $\dfrac{3\,km}{27\text{ min}}=\dfrac{1}{9}$ km/min

16. (E) Llamemos a a la edad que tenía Amparo y d a la que tenía David hace seis años. Observa que si d es un número grande, por ejemplo 10, a podría ser, por ejemplo, 50 ó 60 ó 70…, pero $a+1$ tendría que ser múltiplo de 11, el primer a

que cumple eso es 120 y $a+2$ no es múltiplo de 12 así que a tendrá que ser aún mayor.
Así que d es pequeño. Probemos con 1, tendríamos que a es un múltiplo de 2 menos 1, un múltiplo de 3 menos 2, etc:

$$a = 2\cdot k_2 - 1 = 3\cdot k_3 - 2 = 4\cdot k_4 - 3 = 5\cdot k_5 - 4 = 6\cdot k_6 - 5\,.$$

Un número que cumpla todas esas condiciones debe ser impar ($a = 2\cdot k_2 - 1$), debe acabar en 1 ($a = 5\cdot k_5 - 4$), si le sumamos dos unidades la suma de sus cifras debe ser múltiplo de 3 ($a = 3\cdot k_3 - 2$) y es la edad de una abuela así que comencemos probando con ¿41?, 51, 61, 71, …
Descartamos 41 y 51 pues la suma de sus cifras más dos no es múltiplo de 3 y llegamos al 61 que cumple todas las condiciones. Escribamos lo que sabemos en una tabla:

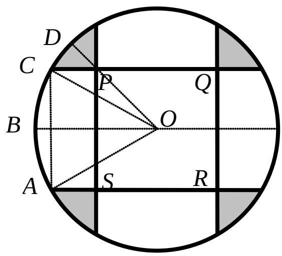
David	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Amparo	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70

La edad de Amparo volverá a ser múltiplo de la David cuando tengan 70 y 10 años respectivamente, y la suma se sus edades será 80.

17. (C) Si llamamos N al número de asistentes, queremos que el $76\,\%$ de N sea un número entero. Luego buscamos el menor número N con $\dfrac{76N}{100} = \dfrac{19N}{25}$ entero y ese número es 25 .

18. (B) Si la compra le cuesta x euros en la tienda de su barrio, en el súper le cuesta $0{,}88x$ y el ahorro es de $0{,}12x = 15$. Luego $x = 125$ y lo que pagará en el súper es $0{,}88\cdot 125 = 110$ euros.

19. (E) Vamos a calcular el área de la figura sombreada que queda entre los puntos *C, D* y *P* y después multiplicaremos por 8 el resultado obtenido.
Observa que el área que intentamos calcular es el área del sector circular *COD* menos el área del triángulo *CPO*.
Para calcular el ángulo *COD* observa que el triángulo *ACO* es equilátero y por tanto, el ángulo *CÔD* = 45º – 30º = 15º y el área del sector circular



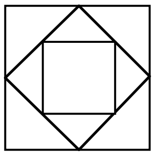
$COD = \frac{15 \cdot \pi}{360} = \frac{\pi}{24}$ m^2.

Para calcular el área del triángulo *CPO* tratemos de calcular la medida de *CP* ya que su altura correspondiente es $\frac{1}{2}$ m. Como $CP + \frac{1}{2}$ es la altura del triángulo equilátero *ACO* cuyo lado es 1 m, tenemos que $CP = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ m, y por tanto el área del triángulo *CPO* es $\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{8}$.

Juntando todo lo anterior tenemos que el área buscada, en m^2, es $8 \cdot \left(\frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}-1}{8} \right) = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} + 1$.

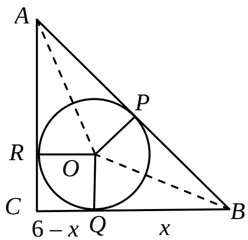
20. (B) Si $\frac{a+b}{a-b} = \frac{7}{4}$., entonces, $4a + 4b = 7a - 7b$, por lo que $3a = 11b$. Elevando al cuadrado obtenemos $9a^2 = 121b^2$, así que $\frac{a^2}{b^2} = \frac{121}{9}$.

21. (D) Observa que, si comenzamos con un cuadrado de lado a, el lado del cuadrado siguiente será $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Luego para calcular el lado de un cuadrado dado el cuadrado anterior, basta con dividir por $\sqrt{2}$.



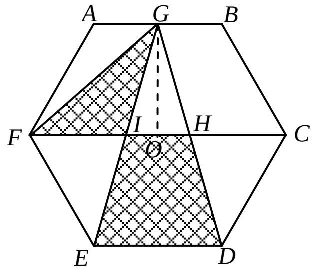
Para formar la figura 12 hay que hacer 11 pasos así que dividiremos entre $\sqrt{2}$ 11 veces, luego el lado medirá $\frac{4}{\left(\sqrt{2}\right)^{11}} = \frac{4}{2^5\sqrt{2}} = \frac{1}{8\sqrt{2}}$ cm.

22. (C) Observa la figura que se forma. Como $OP = OQ = OR = RC = CQ = 6 - x$, obtenemos que $AP = PB = QB = RA = x$ y, aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo inicial tenemos que



$(2 \cdot x)^2 = 6^2 + 6^2$, luego $x^2 = 18$ y $x = 3\sqrt{2}$. El radio de la circunferencia es $6 - 3\sqrt{2}$ cm.

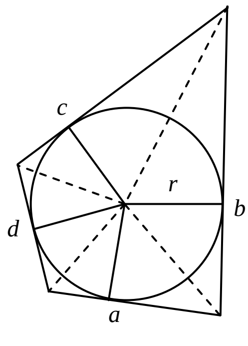
23. (A) Observa el dibujo: El área del trapecio *EDHI* es igual al área del triángulo *EGD* menos el área del triángulo *IGH* y el área del triángulo *FIG* es el área del triángulo FOG menos el área del triángulo *IGO*.



Área(*EDHI*) = Área(*EGD*) – Área(*IGH*)
Área(*FIG*) = Área(*FOG*) – Área(*IGO*)
Como Área(*EGD*) es el doble de Área(*FOG*) pues sus bases miden lo mismo y la altura de *EGD* es el doble de la de *FOG* y Área(*IGH*) es el doble de Área(*IGO*), tenemos que Área(*EDHI*)= 2 Área(*FIG*) y por tanto el cociente buscado es 2.

24. (E) Llamemos *a*, *b*, *c* y *d* a los lados del cuadrilátero, *P* a su perímetro y *r* al radio de la circunferencia inscrita.

Sabemos que $\frac{P}{2\pi r} = \frac{4}{3}$



Para comenzar hagamos un dibujo. Observa que para calcular el área del cuadrilátero podemos dividirlo en cuatro triángulos de bases cada un de los lados del cuadrilátero y alturas el radio de la circunferencia inscrita.

Entonces, área del cuadrilátero es

$$\frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} + \frac{d \cdot r}{2} = \frac{r}{2} \cdot (a + b + c + d) = \frac{r \cdot P}{2}$$

Al hacer el cociente del área obtenida con el área de la circunferencia obtenemos

$$\frac{\frac{r \cdot P}{2}}{\pi r^2} = \frac{P}{2\pi r} = \frac{4}{3}$$

25. (C) Busquemos cuadrados perfectos n^2 con la propiedad de que $n^2 + 99 = m^2$.

Entonces $99 = m^2 - n^2 = (m - n) \cdot (m + n)$. Así que 99 se escribe como el producto de $m + n$ y $m - n$.

Veamos de cuántas formas posibles podemos descomponer 99 como producto de dos números y planteemos un sistema de ecuaciones: $99 = 1 \cdot 99 = 3 \cdot 33 = 9 \cdot 11$.

Como $m-n \leq m+n$, tenemos tres sistemas:

$$\begin{cases} m-n=1 \\ m+n=99 \end{cases} \qquad \begin{cases} m-n=3 \\ m+n=33 \end{cases} \qquad \begin{cases} m-n=9 \\ m+n=11 \end{cases}$$

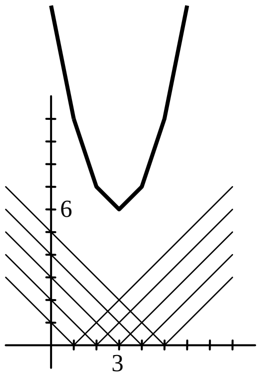
Y encontramos tres posibles valores para n: 49, 15 y 1. Luego además del 1 hay dos cuadrados perfectos con esa propiedad: 49^2 y 15^2.

XI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

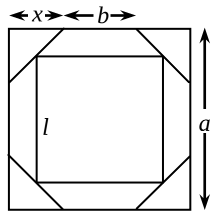
Soluciones 1ª Fase Nivel IV

1. (A) De los ocho posibles resultados hay exactamente dos caras seguidas en los siguientes: CC+ y +CC. La probabilidad es $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

2. (C) Obsérvese en la gráfica adjunta las representaciones gráficas de los cinco sumandos y la de su suma. Se aprecia que el mínimo de la función se alcanza para $x = 3$ tomando el valor $y = 6$.



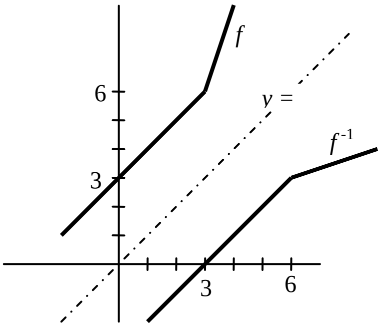
3. (E) Al ser el área del cuadrado exterior 48, el lado del mismo es $a=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$. El lado del cuadrado interior es: $l=a-x$. Pero $x=\frac{b\sqrt{2}}{2}$, donde b representa el lado del octógono. Por otra parte, $2x + b = a$. Sustituyendo $2x$ se obtiene $b\sqrt{2}+b=a \Rightarrow \quad b=\frac{a}{\sqrt{2}+1}=a\left(\sqrt{2}-1\right)$.



Por tanto $x=\frac{a\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}}$ y $l=a-\frac{a\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}}=\frac{a}{\sqrt{2}}$, y el área del cuadrado interior es $l^2=\left(\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2=24$.

4. (C) La gráfica de la función inversa (o recíproca) de una función, es su simétrica respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes. En la figura se aprecia que la función inversa pedida es

$$f(x)=\begin{cases} x-3 & x<6 \\ \frac{1}{3}x+1 & x\geq 6\end{cases}$$ que corresponde a la expresión. $y=\frac{2x-3}{3}-\frac{|x-6|}{3}$



5. (B) La suma pedida es: $(1\cdot 2)^2+(2\cdot 2)^2+...+(10\cdot 2)^2=4\cdot(1^2+2^2+...+10^2)=$

$$=4\cdot\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}=4\cdot 385=1540.$$

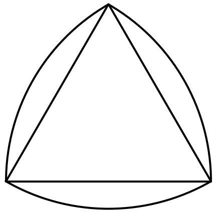
6. (A) Para que los cuatro números sean distintos, el segundo debe ser distinto del primero (que es indiferente cuál sea); el tercero distinto de los dos anteriores y el cuarto distinto de los tres anteriores, por tanto: $p(A)=\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{5}{18}$.

7. (B) Se pueden obtener las soluciones de la ecuación bicuadrada:

$$z^2=\frac{5\pm\sqrt{25+144}}{2}=\frac{5\pm 13}{2}=\begin{cases} z^2=9 & \begin{cases} z=-3=3_{180^\circ} \\ z=3=3_{0^\circ}\end{cases} \\ z^2=-4 & \begin{cases} z=-2i=2_{270^\circ} \\ z=2i=2_{90^\circ}\end{cases}\end{cases}$$

El número 2_{180° no está entre las raíces de la ecuación.

8. (C) El área del sector circular es $A_S=\frac{r^2\alpha}{2}$, con α medido en radianes; y el área del triángulo equilátero es $A=\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$. El área del triángulo curvilíneo es



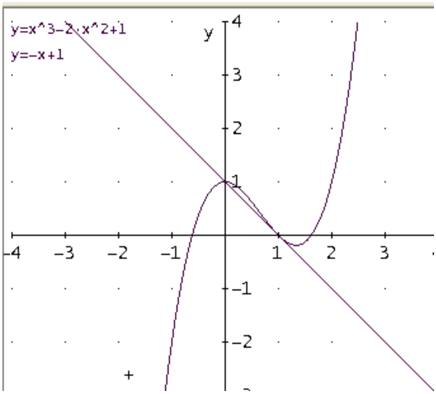
$$A=3A_S-2A_T=3\frac{4\pi/3}{2}-2\frac{4\sqrt{3}}{4}=2\pi-2\sqrt{3}=2\left(\pi-\sqrt{3}\right)$$

9. (E) El número de la respuesta A es par, los números de las respuestas B y D corresponden a diferencias de potencias enésimas: son divisibles por la diferencia (6-1) en el caso B y (4-1) en el caso D. El número de la opción C es una suma de potencias de exponente impar: $\left(2^2\right)^9+1$. Por tanto es divisible por 2^2+1. Finalmente, el número $16^4 + 1$ es $2^{16}+1=2^{2^4}+1=65\,537$ que es el cuarto primo de Fermat ($F_n=2^{2^n}+1$, para n=4).

10. (A) La derivada de la función es $f'(x)=3(x-5)^2(x-1)+(x-5)^3=(x-5)^2(4x-8)$, y sólo se anula en x = 5 y en x = 2. Pero al estar el factor (x-5) elevado a exponente par, el signo de la derivada no cambia al pasar x de valores menores que 5 a valores mayores que 5, de modo que la función en x = 5 es creciente. Sin embargo, en x = 2 la derivada pasa de tomar valores negativos (a la izquierda de 2) a tomar valores positivos (a la derecha de 2). Por tanto en x = 2 la función presenta un mínimo (pues pasa de ser decreciente a ser creciente).

El valor mínimo es $f(2) = (-3)^3 \cdot 1 = -27$.

11. (A) La tangente a $y=x^3-2x^2+1$ en (1, 0) tiene pendiente
$m=f'(1)=3(1)^2-4\cdot 1=-1$.
La ecuación de dicha recta es:
$y = -x + 1$, que corta a la función en los puntos cuya x cumple
$x^3-2x^2+1=-x+1$;
$x^3-2x^2+x=0$;
$x(x-1)^2=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$. Como se observa en la gráfica adjunta.



12. (C) En la tabla adjunta, llamamos diferencial semanal a la diferencia entre los días de la semana correspondientes a días del mes con el mismo número. Y este número es el número que sobrepasa a 28 (múltiplo de 7) el nº de días del mes anterior. Por ejemplo, el diferencial semanal de febrero es tres porque el 12 de febrero cae tres días de la semana después que el correspondiente al 12 de enero. Y es así porque enero tiene 31 días (28 + 3). Los meses que tienen el mismo número-módulo 7 coinciden el número de día del mes con el día de la semana. Así en febrero, marzo y noviembre coinciden el nº de día y de semana. Igual ocurre con enero y octubre, abril y julio y septiembre y diciembre. Los meses de mayo, junio y agosto no coinciden con ningún otro mes del año. Si el 13 de febrero fue martes, hay otros dos "treces" que caen en martes: marzo y noviembre, y éste es el número máximo de "treces" y martes que puede haber en un año.

Si el año es bisiesto, los meses de coincidencia son enero, abril y julio. En cualquier caso, el número máximo de coincidencias es tres.

Mes	Nº de días	Diferencial semanal		Diferencial semanal acumulado		Módulo 7	
		Normal	Bisiesto	Normal	Bisiesto	Normal	Bisiesto
Enero	31	-	-	-	-	0	0
Febrero	28/29	3	3	3	3	3	3
Marzo	31	0	1	3	4	3	4
Abril	30	3	3	6	7	6	0
Mayo	31	2	2	8	9	1	2
Junio	30	3	3	11	12	4	5
Julio	31	2	2	13	14	6	0
Agosto	31	3	3	16	17	2	3
Septiembre	30	3	3	19	20	5	6
Octubre	31	2	2	21	22	0	1
Noviembre	30	3	3	24	25	3	4
Diciembre	31	2	2	26	27	5	6

13. (B) Para que *f*(*x*) y *g*(*x*) no se corten, el sistema $\left.\begin{array}{r} y = x^2 + 2bx + 1 \\ y = 2a(x+b) \end{array}\right\}$ no debe tener solución, y para ello la ecuación $x^2 + 2bx + 1 = 2ax + 2ab$ no debe tener solución. Pero esta es una ecuación de segundo grado: $x^2 - 2(a-b)x + 1 - 2ab = 0$, que deja de tener solución cuando su discriminante es: $\Delta < 0 \quad \Rightarrow \quad (a-b)^2 - (1-2ab) < 0$, es decir cuando $a^2 + b^2 < 1$, ecuación que corresponde a los puntos interiores de una circunferencia de radio 1. El área del círculo es A = π.

14. (E) Puesto que el triángulo es rectángulo, se tiene que $\sqrt{b^2 + c^2} + b + c = \dfrac{bc}{2}$

$$\sqrt{b^2+c^2}=\frac{bc}{2}-(b+c) \Rightarrow b^2+c^2=\frac{b^2c^2}{4}+b^2+c^2+2bc-b^2c-bc^2 .$$

Suprimiendo términos semejantes y dividiendo por bc: $\frac{bc}{4}-b=c-2$, y de aquí:

$b=4\cdot\frac{c-2}{c-4}$. Para cualquier valor de $c>4$ se obtiene un triángulo con la propiedad de que su perímetro en cm coincide con su área en cm^2.

15. (D) Llamando *a, b* y *c* a las dimensiones del ortoedro, su área total es:

A= $2ab + 2ac + 2bc = 22$.

Como la suma de todas las aristas del ortoedro es $4\cdot(a+b+c)=24$, la suma de las dimensiones del ortoedro es $a+b+c=6$.

La máxima distancia entre dos vértices del ortoedro es la diagonal

$$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{(a+b+c)^2-(2ab+2ac+2bc)}=\sqrt{36-22}=\sqrt{14} .$$

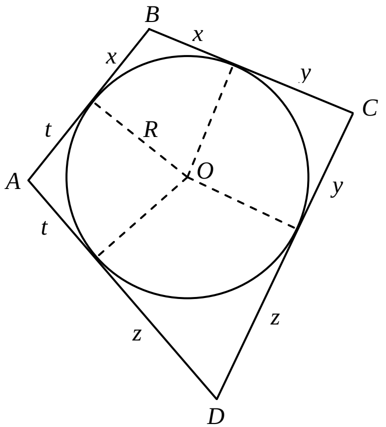
16. (E) Tomando el centro de la circunferencia sobre el eje de ordenadas, con radio tan grande como sea necesario, la circunferencia que pasa por el origen corta a la función y = sen x en tantos puntos como se quiera.

17. (E) Obsérvese la figura. Si la razón entre el perímetro del cuadrilátero y la longitud de la circunferencia es *k*, tenemos:

$$\frac{2x+2y+2z+2t}{2\pi R}=\frac{x+y+z+t}{\pi R}=k$$

Pero si multiplicamos el numerador y denominador por *R*, tenemos:

$$\frac{(x+y+z+t)R}{\pi R^2}=k \Rightarrow \frac{A_{Cuadrilátero}}{A_{Círculo}}=k$$

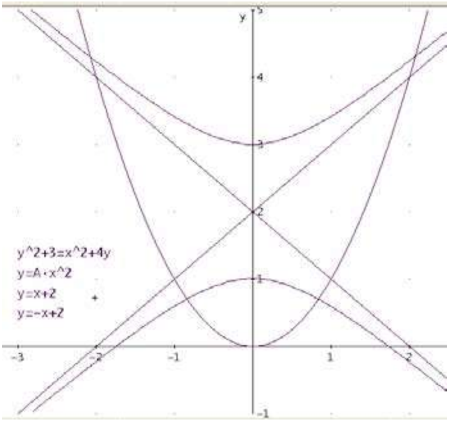


18. (A) La ecuación de la curva $y^2+3=x^2+4y$ se puede escribir

$y^2 - 4y + 4 = x^2 + 1$, es decir,

$(y-2)^2 - x^2 = 1$. Se trata de una hipérbola con centro en el punto (0, 2) y asíntotas $y = \pm x + 2$

La parábola $y = Ax^2$ con A positivo corta a la hipérbola, necesariamente en cuatro puntos.



19. (E) Si las dimensiones están en progresión geométrica, se pueden escribir como $\frac{x}{r}$, x, $x \cdot r$. Como el volumen es el producto de sus tres dimensiones, se tiene que $x^3 = 8$, de donde $x = 2$.

El área del ortoedro es A = $2ab + 2ac + 2bc = 2 \cdot \frac{2}{r} \cdot 2 + 2 \cdot \frac{2}{r} \cdot 2r + 2 \cdot 2 \cdot 2r = 32$.

Dividiendo esta última igualdad entre 4, tenemos: $\frac{2}{r} + 2 + 2r = 8$. Si la suma de las dimensiones es 8, la suma de las aristas es $4 \cdot 8 = 32$.

20. (C) Quitando el primer valor absoluto, tenemos dos posibilidades: $\begin{cases} x - |2x+1| = 3 \\ x - |2x+1| = -3 \end{cases}$

Para quitar el valor absoluto que queda, hemos de considerar a su vez, en cada caso, dos posibilidades:

Primer caso: $x - |2x+1| = 3 \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \Rightarrow x - (2x+1) = 3 \Rightarrow x = -4 \\ x \le -\frac{1}{2} \Rightarrow x - (-2x-1) = 3 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \end{cases}$

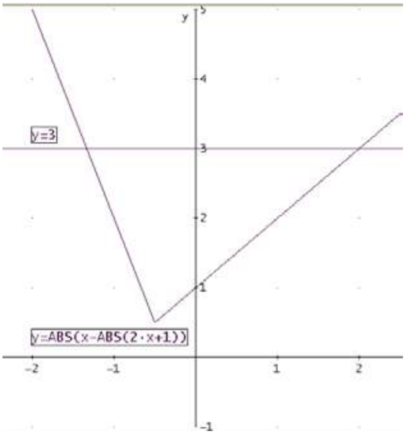
Pero ambas soluciones son contradictorias, si $x > -\frac{1}{2}$ no puede valer -4. O si es $x \le -\frac{1}{2}$ no puede ser $\frac{2}{3}$.

Segundo caso: $x-|2x+1|=-3\Rightarrow\begin{cases} x>-\dfrac{1}{2}\Rightarrow x-(2x+1)=-3\Rightarrow x=2 \\ x\le-\dfrac{1}{2}\Rightarrow x-(-2x-1)=-3\Rightarrow x=-\dfrac{4}{3}\end{cases}$

Estas dos soluciones son válidas. Por tanto sólo hay dos soluciones.

También podría contestarse si representamos las gráficas de las funciones $y=\big|x-|2x+1|\big|$, $y=3$

Y observar que el número de puntos de corte entre sus gráficas es dos.



21. (B) $f\big(g(x)\big)=-5x \quad\Rightarrow\quad 10\cdot g(x)=-5x \quad\Rightarrow\quad g(x)=\dfrac{-x}{2}$

22. (B) Contestar correcta o incorrectamente cada pregunta supone una diferencia de 19 puntos (12 − (−7)), mientras que la diferencia entre hacerlo correctamente o en blanco es tan solo de 12 puntos. Si se contestan las treinta preguntas correctamente se obtiene una puntuación de 360 puntos. Antonio obtuvo 234 puntos por lo que la diferencia es de 126 puntos. Llamando *x* al número de errores e *y* al número de preguntas en blanco, tendremos:

$$19x+12y=126 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases}.$$

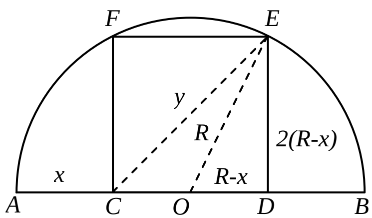
Las demás soluciones enteras de la ecuación corresponden a valores, bien de *x* o de *y*, negativos.

23. (C) Consideremos la función $f(x) = x^n - x^m - 1$. Obsérvese que $f(1) = -1$ y que

$\forall x \in (0, 1) \quad f(x) < 0$, puesto que $\left.\begin{matrix} x \in (0,\ 1) \\ n > m \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^m > x^n$.

Por otro lado, $f(2) > 0$, de modo que, según el teorema de Bolzano, como *f*(*x*) es continua, existe un punto en el que F corta al eje $y = 0$. Además, la derivada es $f'(x) = x^{m-1}(nx^{n-m} - m) > 0 \quad \forall x > 1$. Al ser estrictamente positiva, la función es estrictamente creciente y corta al eje OX una sola vez.

24. (D) Obsérvese la figura: $\dfrac{y}{2(R-x)} = \sqrt{2}$, pues se trata de la diagonal y el lado del cuadrado. Por tanto: $\dfrac{y}{(R-x)} = 2\sqrt{2}$.



Por otro lado, en el triángulo rectángulo ODE $\dfrac{R}{R-x} = \sqrt{5} \quad \Rightarrow \dfrac{R-x+x}{R-x} = \sqrt{5}$,

y $\dfrac{x}{R-x} = \sqrt{5} - 1$.

Dividiendo ambas expresiones: $\dfrac{\dfrac{x}{R-x}}{\dfrac{y}{R-x}} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}}$

25. (E) Como $tg(\alpha + \beta) = \dfrac{tg(\alpha) + tg(\beta)}{1 - tg(\alpha) \cdot tg(\beta)}$ si llamamos $x = tg(\alpha),\ y = tg(\beta)$ entonces

$\alpha = arctg(x),\ \beta = arctag(y)$ y se deduce que $arctg\ x + arctg\ y = arctg\ \dfrac{x+y}{1 - x \cdot y}$

Así $\quad arctg\left(\dfrac{1}{10}\right) + arctg\left(\dfrac{1}{17}\right) = arctg\ \dfrac{\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{17}}{1 - \dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{1}{17}} = arctg\ \dfrac{27}{169}$.

XI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel I

1. (E) Como cada uno de los segmentos, definidos por los puntos de la espiral, mide 1 cm, la longitud de la espiral será igual al número de puntos enlazados menos uno. Ese número de puntos se puede contar rápidamente porque forman un cuadrado y queda uno suelto, es decir, dicho número de puntos es: $6 \times 6 + 1 = 37$. Por lo tanto la espiral mide 36 cm.

2. (C) Si todos los nietos reciben el mismo número de postales, dicho número debe ser divisible por 4. Es inmediato comprobar que, de todos los números ofrecidos, el único divisible por cuatro es 28.

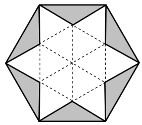
3. (C) Como el coche pesa una tonelada más que un elefante, el coche lleno pesará lo mismo que 5 elefantes más una tonelada. Luego 5 elefantes pesan 15 toneladas y 1 elefante, 3 toneladas. El coche vacío pesará 3 + 1 = 4 toneladas.
Utilizando lenguaje algebraico, si x es el peso de cada uno de los cuatro elefantes, entonces el peso del coche vacío será $x+1$, y como nos dicen que el peso total es de 16 toneladas tendremos:
$4x + (x+1) = 16 \Rightarrow 5x = 15 \Rightarrow x = 3$**.** Por lo tanto el coche vacío pesa 4 toneladas.

4. (E) Se puede resolver mal el problema si no se respeta la jerarquía de operaciones. Un error frecuente consiste en hacer $15+10\times 2 = (15+10)\times 2 = 25\times 2 = 50$, en lugar de calcular $15+10\times 2 = 15+(10\times 2) = 15+20 = 25$, que es lo correcto. Hecha esta salvedad vemos fácilmente que la respuesta es $200 : 4 = 50$.

5. (A) Para responder a la pregunta debemos calcular lo que vale un gramo del producto en cada uno de los envases y elegir el valor más pequeño, esto es, tendremos que deducir cual es la menor de las siguientes fracciones:
$\frac{0,45}{120}; \frac{0,65}{150}; \frac{1,10}{200}; \frac{1,25}{250}; \frac{2,10}{400}$**,** que expresan el precio en €/g.
Si ahora multiplicamos todos los precios por 100 obtendremos fracciones más manejables sin alterar, por ello, el lugar del envase más barato:
$\frac{45}{120}; \frac{65}{150}; \frac{110}{200}; \frac{125}{250}; \frac{210}{400}$
Vemos inmediatamente que las dos primeras tienen un valor menor que 1/2 (el denominador es mayor que el doble del numerador) y, del mismo modo observamos que las tres últimas son iguales o mayores que 1/2, por lo que las descartamos.

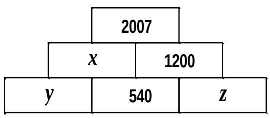
Por último, simplificamos las dos primeras fracciones y reducimos a común denominador. $\frac{45}{120}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}=\frac{90}{240}$ $\qquad \frac{65}{150}=\frac{13}{30}=\frac{104}{240}$ y concluimos que el producto sale más barato en el primer envase.

6. (C) Si "completamos" el dibujo como se muestra en la figura, podemos comprobar que la estrella se divide en 12 triángulos equiláteros iguales de 1 cm^2 de superficie cada uno. Por otra parte, el área del hexágono pedido puede obtenerse añadiendo a la estrella los seis triángulos isósceles sombreados. Pero el área de cada uno de estos es la de dos triángulos equiláteros, es decir, 1 cm^2. Concluimos entonces que el área de la figura pedida es $12+6=18$ cm^2



7. (A) La diferencia entre el número menor, 152, dicho por Celia, y el mayor, 194, dicho por Bruno, es 42. Dado que los errores cometidos son 11, 20 y 22, y que 20 + 22 = 42, podemos asegurar que Celia se ha equivocado por defecto y Bruno por exceso (sabemos además que uno ha errado en 20 y el otro en 22). No queda ya sino recordar que Azucena ha dicho 183 libros y se ha equivocado en 11.
Como 183 + 11 = 194 está en contradicción con los datos de Bruno (194 – 20 ó 194 – 22), podemos concluir que en mi habitación hay 183 – 11 = 172 libros, cuya suma de cifras es: 1 + 7 + 2 =10.

8. (A) Sean x, y, z los números desconocidos de ladrillos. Como cada ladrillo es la suma de los dos ladrillos que lo sostienen, tenemos:

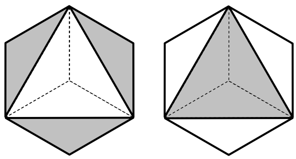


$$x+1200=2007 \Rightarrow x=2007-1200=807$$
$$z+540=1200 \Rightarrow z=1200-540=660$$

y la suma pedida será:

$$(y+540)+z=x+z=807+660=1467.$$

9. (D) El hexágono "***Y***" está dividido en 6 triángulos equiláteros iguales, de los que 3 están sombreados, luego ***Y*** es igual a la mitad del área del hexágono. Es muy sencillo ver que ambas zonas sombreadas, ***X*** y ***Z***, también miden la mitad del área del hexágono. Para ello, basta trazar los tres radios punteados de la figura. Así dividimos, tanto a "***X***" como a "***Y***", en tres rombos iguales; en el primero, la zona



X ***Z***

sombreada ocupa la mitad de cada rombo y, en el segundo, la otra mitad. Conclusión: las tres zonas tienen la misma área.

10. (B) Partimos de las tres ecuaciones:

a) ☺ + ❀ = ✈, **b)** ☾ = ❀ + ✈, **c)** ☾ + ☾ = ☺ + ☺ + ☺ + ☺

y debemos obtener ❀ + ❀ + ❀.

Sumando **a)** tres veces consigo misma obtenemos:

☺ + ☺ + ☺ + ❀ + ❀ + ❀ = ✈ + ✈ + ✈, y de aquí:

e) ❀ + ❀ + ❀ = ✈ + ✈ + ✈ – (☺ + ☺ + ☺)

De **c)** obtenemos: ☺ + ☺ = ☾, que sumándole **a)** proporciona:

☺ + ☺ + ☺ + ❀ = ☾ + ✈

o lo que es lo mismo: ☺ + ☺ + ☺ = ✈ + (☾– ❀) = ✈ + ✈, donde hemos tenido en cuenta **b)**.

Sustituyendo este último resultado en **e)** obtenemos finalmente:

❀ + ❀ + ❀ = ✈ + ✈ + ✈ –(✈ + ✈) = ✈

11. (B) Si partimos de que tenemos *x* gatos, *y* perros, *z* hámsteres, *t* tortugas y *p* periquitos, el enunciado del problema nos conduce a plantear las ecuaciones:

$x+y+z+t+p=39$ **;** $x=y$; $z=2y$; $t=z/3$; $p=t+7$

De la segunda y la tercera obtenemos: $x=y=z/2$

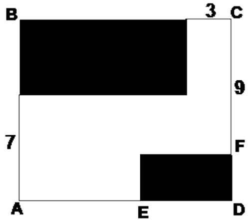
De la tercera y la cuarta: $p=z/3+7 \Rightarrow z/3=p-7$

Llevando estos resultados a la primera ecuación: $\frac{z}{2}+\frac{z}{2}+z+\frac{z}{3}+p=39 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2z+\frac{z}{3}+p=39 \Rightarrow 7\frac{z}{3}+p=39$, pero como sabemos que $\frac{z}{3}=p-7$,

tenemos: $7(p-7)+p=39 \Rightarrow 7p-49+p=39 \Rightarrow 8p=88 \Rightarrow p=11$

12. (E) Obtendremos el área pedida como diferencia entre el área del rectángulo *ABCD* y la de la zona sombreada.



Área del rectángulo:

$\overline{BC}\times\overline{AB}=(11+3)\times(7+5)=168\text{ cm}^2$

Área de la zona sombreada: $11\times5+6\times\overline{DF}$.

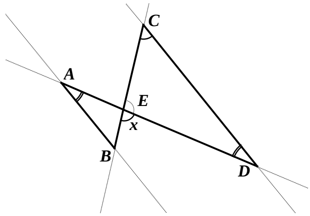
Pero $\overline{DF}=\overline{AB}-\overline{FC}=(7+5)-9=3$

Por lo tanto, el área de esa zona será $55+6\times3=73$

y el área pedida: $168-73=95\text{ cm}^2$

13. (B) Los números 2001 y 2007 son múltiplos de 3 y 2005 lo es de 5. El número 2009 es divisible por 7 $(2009 = 7 \times 287)$. Por exclusión 2003 debe ser primo.

14. (B) En la figura vemos que la recta definida por los puntos ***A*** y ***D*** corta a las rectas paralelas definidas respectivamente por los puntos ***A B*** y ***C D***. Como consecuencia los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{D}$ son alternos internos y por lo tanto tenemos: $\hat{A} = \hat{D} = 28^{o}$.

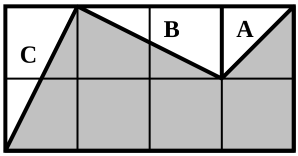


Por otra parte $\hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = 180^{o}$ por ser los tres ángulos de un triángulo. Por lo tanto:

$$\hat{E} = 180^{o} - \hat{C} - \hat{D} = 180^{o} - 52^{o} - 28^{o} = 100^{o}$$

Como $\hat{E} + \hat{x} = 180^{o}$ obtenemos finalmente que el ángulo x mide 80º.

15. (A) Cada casilla es 1/8 del rectángulo. La zona A es 1/16 del rectángulo, la zona B es 1/8, la zona C es también 1/8. Por lo tanto, 8/8 – (1/16 + 1/8 + 1/8) = 8/8 – 5/16 = 11/16



16. (A) Como la totalidad de los 1000 litros de agua se reparten entre los dos recipientes, basta calcular el agua que llega al recipiente A (es un camino mucho más sencillo que el que lleva el agua al recipiente B). Después de la primera bifurcación, 500 litros se dirigen hacia el recipiente A, pero estos sufren una, y sólo una, bifurcación más antes de verterse en A. Así que finalmente llegan 250 litros a dicho recipiente. El resto, 750 litros, llegan necesariamente a B.

17. (D) Supongamos que los cipreses que había plantados en los 54 metros de la izquierda, dividían a este intervalo en n partes iguales y que, del mismo modo, los cipreses dividían a los 30 metros restantes en otras m partes. Como la longitud de todas esas partes es la misma, tendremos: $\frac{54}{n} = \frac{30}{m}$, que es la distancia que había entre dos árboles consecutivos antes de la sequía.

La igualdad anterior implica: $54m = 30n \Rightarrow 9m = 5n$, donde m y n son números enteros positivos. Es obvio que la ecuación se cumple si $m = 5$ y $n = 9$ $(9 \times 5 = 5 \times 9)$. Adoptando esta solución tendremos 5 + 9 = 14 intervalos en total, lo que implica tener plantados 15 cipreses antes de la sequía.

Aunque ya hemos solucionado el problema con $m = 5$ y $n = 9$, debemos advertir que también son solución todas las parejas de múltiplos de 5 y 9 de la forma $m = 5k$, $n = 9k$, siendo k cualquier número entero positivo.

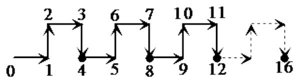
La solución que ha resuelto el problema corresponde a $k = 1$. Pero si ahora consideramos la segunda solución ($k = 2$), tendremos 10 + 18 = 28 intervalos y 29 árboles, que es una cantidad superior a 25, confirmando la solución encontrada.

18. (E) En una hora, la leona, se come 1/6 de cebra y el león, por su parte, se come 1/3 de cebra. Así, comiendo los dos simultáneamente, devorarán $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ de cebra en una hora. Por lo tanto, los dos juntos se la zamparán en 2 horas.

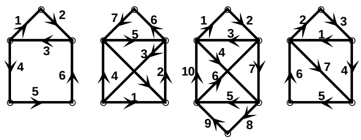
19. (D) Sean n, $2n$ y $4n$ los lados de ese hipotético triángulo. Entonces el perímetro sería: $n + 2n + 4n = 7n$, lo que implica que el perímetro "sería" (*) múltiplo de 7. El único número propuesto que no es múltiplo de 7 es 97.
(*) Hay que advertir que no se puede construir ese hipotético triángulo, porque la longitud de un lado no puede ser mayor que la suma de las longitudes de los otros dos ($4n > n + 2n$).

20. (C) La "vista de frente" nos dice que, como mínimo, hemos utilizado 10 cubos. Además, la estabilidad de la construcción exige que haya 10 cubos en el frente formando una pared. Esta consideración conduce a que, en la "vista de arriba", los 4 cubos de la fila inferior correspondan a los 10 cubos que forman la pared del frente y, como hay un cubo en la fila superior, esta vista implica que como mínimo hemos empleado 11 cubos. Por último, en la "vista lateral", la columna de la derecha representa los diez cubos citados y, la de la izquierda requiere como mínimo 2 cubos más. Conclusión: como mínimo se han empleado 12 cubos.

21. (D) Es fácil observar que el patrón se repite de 4 en 4. En la figura se han señalado los primeros múltiplos de 4 y un patrón (flechas punteadas). Además, observamos que los múltiplos de 4 señalan el final de un patrón y el comienzo del siguiente. Como 676 es múltiplo de 4, la secuencia de flechas que lleva del 675 al 677 necesariamente es la **D)**.



22. (B) En todos los casos, a excepción del **B)**, es bastante fácil encontrar un trazado sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos



veces por el mismo segmento y, en la figura, vemos una forma de conseguirlo. **(**Sin embargo podemos resolver el problema más fácilmente conociendo las reglas de Euler para tales trazados. Una de estas reglas dice que si hay más de dos puntos en los que converge un número impar de segmentos, entonces no existe ningún trazado que cumpla las condiciones requeridas. En nuestro caso eso sólo ocurre en la figura **B).**

23. (B) Al pulsar la tecla A, el valor del número aumenta multiplicándose por 3 y al pulsar B disminuye en una unidad. Está claro que pulsando A sólo conseguimos múltiplos de 3. Pero como 53 no es múltiplo de 3, necesariamente tendremos que pasar por el 54 antes de alcanzar nuestro objetivo. Como $54 = 2 \times 3^3$, es posible obtener este número, a partir del 2, pulsando AAA, que es el mínimo número de pulsaciones para ir del 2 al 54. Sólo resta obtener el 2 y el 53; el 2 se obtiene, a partir del 1 inicial, pulsando AB y el 53 se logra restando 1 al 54 mediante una pulsación de la tecla B. En ambos casos es obvio que hemos obtenido los números con las mínimas pulsaciones posibles. Conclusión: ABAAAB es la secuencia que lleva del 1 al 53 con el mínimo número de pulsaciones. No obstante, podría pensarse que es posible alcanzar el 54 por algún otro camino, sin pasar por el 2. Pero es inmediato comprobar que cualquier alteración en ese sentido conlleva un aumento del número de pulsaciones.

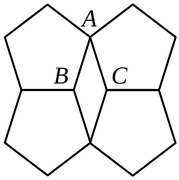
24. (A) Pepita Abolengo tiene 3 hijas, cada una de las tres tiene otras 3, es decir $3 \times 3 = 3^2 = 9$, y ya estamos en la segunda generación. Continuando con el proceso hasta la cuarta generación, tendremos que el total de mujeres Abolengo es: $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 121$.

25. (B) Como $36 = 6 \times 6$ y $64 = 8 \times 8$, tenemos que los lados de los cuadrados son 6 y 8 centímetros respectivamente. Dado que el segmento PQ es la suma de los lados de ambos cuadrados, dicho segmento medirá 14 cm.

XI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel II

1. (A) Empezamos por la divisibilidad por 5. Nuestro número acaba en 0 o en 5, pero esto último queda descartado porque al ser múltiplo de 4 debe ser par. Entonces debe ya acabar en 00, 20, 40, 60 u 80. Nos vamos a la divisibilidad por tres. La suma de las cifras debe ser múltiplo de 3, pero las que conocemos suman 14. Sólo 1440 verifica todas las condiciones.

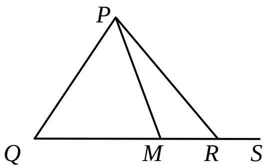


2. (E) En un pentágono regular, el ángulo central mide 360 : 5 = 72º, y por tanto el interior 180º – 72º = 108º. Eso hace que conozcamos los tres ángulos de vértice *B*: 108º, 108º y 360º – 108º – 108º = 144º. El ángulo $B\hat{A}C$ es el otro ángulo del rombo *ABCD*, y por ello mide 180º – 144º = 36º.

3. (B) Bastará con que expresemos en forma de fracción los distintos consumos:

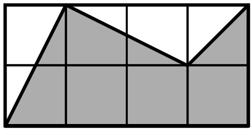
Alonso: $\frac{100}{8}=\frac{25}{2}=12{,}5$ km/l ; Barrichello: $\frac{540}{45}=\frac{60}{5}=12$ km/l

Coulthard: 13 km/l



4. (D) $R\hat{P}M=20^{\circ}$, y como $Q\hat{M}P=70^{\circ}$, el ángulo adyacente $P\hat{M}R$,es 110º. Así el ángulo $M\hat{R}P$ es el tercero del triángulo *PMR* y mide por tanto: 180º – 20º – 110º = 50º. El pedido es su suplementario, es decir, 180º – 50º = 130º.

5.(B) Aquí jugamos con una de las propiedades básicas de una medida. La medida de "A o B" es igual a la medida de "A" más la medida de "B" menos la medida de "A y B". Sumando las proporciones de los que tienen móvil y de los que tienen ordenador se obtiene $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{9+8}{12}=\frac{17}{12}$, más del 100%. Por ello al menos debemos restar $\frac{5}{12}$.



6. (A) Si miramos bien la figura vemos que la parte no sombreada equivale a dos cuadrados y medio, y de ahí la sombreada se corresponde con cinco y medio.

Luego la proporción pedida es: $\frac{5{,}5}{8}=\frac{11}{16}$.

7. (C) ✱ + ◈ = ■,   ✱ = ◈ + ⦿,   ✱ + ✱ + ◈ = ■+ ⦿ + ⦿.

Si sumamos los dos primeros miembros de las dos primeras ecuaciones obtenemos el primer miembro de la tercera ecuación. Así la suma de sus dos segundos miembros será también igual al segundo miembro de la tercera. Pero de ■ + ◈ + ⦿ = ■+ ⦿ + ⦿ se obtiene ◈ = ⦿ y sustituyendo en la segunda ecuación inicial se llega a ✱ = ⦿ + ⦿.

8. (C) La suma de los tres ángulos será 180º:

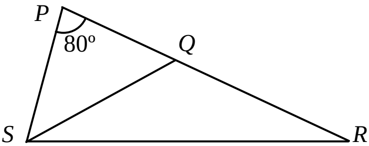
$(x+10)^{\text{o}} + (2x-40)^{\text{o}} + (3x-90)^{\text{o}} = 180^{\text{o}}$, de donde:

$x + 2x + 3x + 10 - 40 - 90 = 6x - 120 = 180$; $6x = 180 + 120 = 300$; $x = 50$

Entonces los ángulos miden: $x + 10 = 60$; $2x - 40 = 60$; $3x - 90 = 60$, y el triángulo es equilátero.

9. (B) $\dfrac{F}{NF} = 0{,}24 = \dfrac{24}{100}$. La idea es que la proporción escrita en forma de fracción se puede escribir en forma irreducible como $\dfrac{6}{25}$, es decir que 6 y 25 son los números menores enteros que pueden dar lugar a esa proporción, y por lo tanto el número mínimo de personas en juego es 25 + 6 = 31.

10.(D) Tenemos por el enunciado que los triángulos *QPS* y *RQS* son isósceles. De ahí que los dos ángulos iguales en *QPS* midan juntos 100º, y cada uno 50º. Pero $R\hat{Q}S$, adyacente con uno de ellos, mide 180º – 50º = 130º, y volvemos a empezar. Los dos ángulos iguales de *RQS* miden juntos 50º, y cada uno 25º.



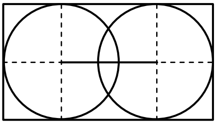
11.(E) Es esencial en el problema que entendamos que las ciudades están en una misma carretera y por tanto apliquemos que las distancias entre tres ciudades son aditivas (se suman) si las expresamos ordenadas alfabéticamente:

Ej: dist (B, E) + dist (E, G) = dist (B, G). Eso hace que si en la tabla tenemos dos distancias en la misma columna, podamos rellenar la casilla que une las dos ciudades finales, y si tenemos dos distancias en la misma fila podemos rellenar la casilla que conecta las dos ciudades iniciales. Si actuamos de forma ordenada, y marcamos con X esos

A						
8	*B*					
18	**10**	*C*				
23	**15**	**5**	*D*			
38	30	**20**	**15**	*E*		
58	**50**	40	**35**	**20**	*F*	
76	68	**58**	53	**38**	**18**	*G*

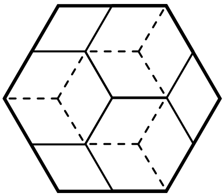
cruces, y luego los nuevos que se generan con ellos, podremos ver como queda rellena toda la tabla.
Observa dos casos:
dist (A, D) + dist (D, F) = dist (A, F) → 23 + dist (D, F) = 58 → dist (D, F) = 35
dist (A, D) + dist (D, G) = dist (A, G) → 23 + 53 = dist (A, G) → dist (A, G) = 76.

12.(E) Por la altura del rectángulo el diámetro de los círculos es 5 cm, y por la longitud, la distancia entre los centros es 9 – 5 = 4 cm, ya que dibujando esa distancia nos damos cuenta de que añadiendo un radio a la izquierda y otro a la derecha nos da la longitud del rectángulo.



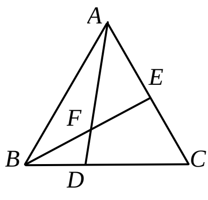
13.(C) Si los sumamos de tres en tres, y luego sumamos las cuatro cuentas obtenemos tres veces la suma de los cuatro (cada uno aparece en tres cuentas). Así, como 115 + 153 + 169 + 181 = 618, la suma de los números es 618 : 3 = 206, pero como la suma menor es 115, en ella no estaba el número mayor y éste es 206 – 115 = 91.

14.(B) Si nos damos cuenta de que un hexágono pequeño se puede descomponer en tres rombos como los de las esquinas, resulta que el hexágono regular grande puede ser repartido en doce de esos rombos.



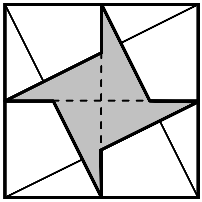
15.(A) Un cuadrado perfecto es reconocible si lo tenemos factorizado en factores primos por el hecho de que los factores primos tienen que venir emparejados (con exponente par). No es tan difícil factorizar en primos 10!. De los números del 2 al 10, cinco son pares, dos múltiplos de cuatro y uno múltiplo de ocho. Así en la descomposición factorial de 10! El 2 aparece 5 + 2 + 1 = 8 veces. Tres números son múltiplos de tres y uno de nueve. El 3 aparece 3 + 1 = 4 veces. Dos números son múltiplos de 5, y uno de 7. Por tanto $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$. ¿Qué le hace falta a este número para ser cuadrado perfecto. Pues una pareja para el 7.

16.(B) Como $D\hat{A}C = 40º$ y el triángulo ABC es equilátero tenemos que $B\hat{A}D = 20º$. De igual forma como $E\hat{B}C = 35º$, $A\hat{B}F = 25º$, y así $B\hat{F}A = 180º - 20º - 25º = 135º = D\hat{F}E$ que es su opuesto por el vértice.



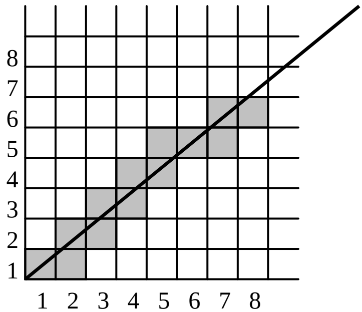
17.(B) En cada prueba hay once puntos en juego, y así en las seis pruebas hay 66 puntos. La puntuación de un centro variará entre 48 y 18 puntos, y por la simetría de las puntuaciones y no haber empate éstas deben ser 42 y 24.

18.(B) La figura sombreada puede ser descompuesta en cuatro triángulos rectángulos idénticos, uno de cuyos catetos mide la mitad del lado del cuadrado y el otro la cuarta parte. Así su área sería cuatro veces la mitad de la mitad por la cuarta parte, es decir un cuarto del cuadrado. También es fácil pensar cómo organizar esos cuatro triángulos para cubrir una cuarta parte del cuadrado.

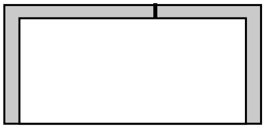


19.(C) Habrá que empezar desechando los que sean primos, y ya de paso podemos mirar sus factorizaciones: $111 = 3 \cdot 37$; $112 = 2^4 \cdot 7$; 113 es primo; $114 = 2 \cdot 3 \cdot 19$; $115 = 5 \cdot 23$; $116 = 2^2 \cdot 29$; $117 = 3^2 \cdot 13$; $118 = 2 \cdot 59$; $119 = 7 \cdot 17$. Así vemos que además de quitar 113, también hay que quitar 115, ya que no tiene factores comunes con el resto. Intentamos encadenar los restantes empezando por los más difíciles: 119 – 112 – 116 – 118 – 114 – 111 – 117 es una forma de hacerlo.

20.(B) Como $\frac{49}{60}$ es una fracción irreducible, el segmento *AE* no puede pasar por ningún otro vértice de la cuadrícula. Para pasar desde el primer cuadradito (1, 1) hasta el último (60, 49), siempre tiene que avanzar desde un cuadrado hasta uno colindante que estará necesariamente a la derecha o encima de él, es decir, una de sus coordenadas aumenta en una unidad. Por lo tanto para pasar desde el cuadradito (1, 1) hasta el (60, 49) tiene que atravesar, además del primero, otros (60 – 1) + (49 – 1) = 107 cuadraditos más. En total 108. Análogo razonamiento nos sirve para determinar el número de cuadraditos que atraviesa el segmento *ED*, ya que $\frac{49}{40}$ también es irreducible. El número de estos cuadraditos será: 1 + (100 – 61) + (49 – 1) = 88, que con los 108 que atravesaba el segmento *AE*, hacen un total de 108 + 88 = 196.



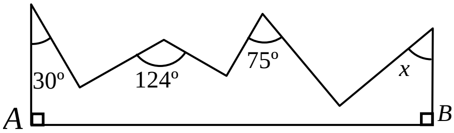
NOTA. También se puede obtener razonando así: Siempre que avancemos a la derecha o hacia arriba de un cuadradito a uno colindante, el número de cuadraditos que se atraviesa es independiente del camino elegido. Si vamos por la orilla del rectángulo obtendremos:
Para el primer trayecto, 49 + (60 – 1) = 108.
Para el segundo trayecto, 40 + (49 – 1) = 88



21.(B) Empleé dos horas desde la tercera parte del recorrido hasta las tres cuartas partes, es decir dos horas en hacer $\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{9-4}{12}=\frac{5}{12}$ del recorrido. En un doceavo había tardado 120: 5 = 24 min, y en la tercera parte (cuatro doceavos) 96 minutos. Salí por tanto a las 8h 24 min.

22.(B) El polígono resultante de borrar los tres cuadrados es de nueve lados, y por tanto sus ángulos suman 7 veces 180º, es decir 1260º. De esos nueve ángulos, tres vienen dados numéricamente, otros dos son rectos, los tres cóncavos miden 270º ya que forman un ángulo completo con los 90º del cuadrado que los tiene como vértices, y nos queda por hallar *x*.

$$x = 1260^{o} - 30^{o} - 124^{o} - 75^{o} - 90^{o} - 90^{o} - 270^{o} - 270^{o} - 270^{o} = 41^{o}$$

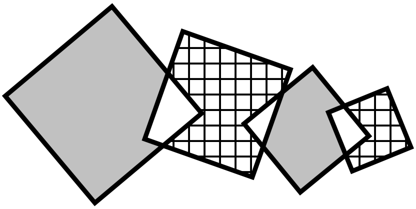


23.(C)

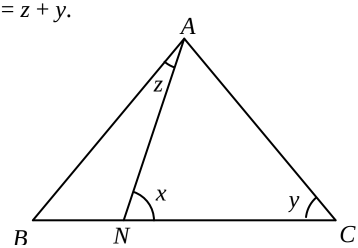
$$\begin{cases} 30 \text{ pares} \begin{cases} 10 \text{ múltiplos de } 3 \begin{cases} 5 \text{ múltiplos de } 4 \rightarrow 5 \text{ monedas de } 2 \text{ cts.} \\ 5 \text{ no múltiplos de } 4 \rightarrow 5 \text{ monedas de } 5 \text{ cts.} \end{cases} \\ 20 \text{ no múltiplos de } 3 \begin{cases} 10 \text{ múltiplos de } 4 \rightarrow 10 \text{ monedas de } 2 \text{ cts.} \\ 10 \text{ no múltiplos de } 4 \rightarrow 10 \text{ monedas de } 10 \text{ cts.} \end{cases} \end{cases} \\ 30 \text{ impares} \begin{cases} 10 \text{ múltiplos de } 3 \rightarrow 10 \text{ monedas de } 5 \text{ cts.} \\ 20 \text{ no múltiplos de } 3 \rightarrow 20 \text{ monedas de } 20 \text{ cts.} \end{cases} \end{cases}$$

5 × 2 + 5 × 5 + 10 × 2 + 10 × 10 + 10 × 5 + 20 × 20 = 605 cts.

24.(D) La solución es $11^2 - 9^2 + 7^2 - 5^2 = 121 - 81 + 49 - 25 = 64$. Restar dos áreas es independiente de cómo sea el dibujo de las figuras, y si éstas se solapan o no. De hecho lo que se nos pide puede ser representado como:
$(11^2 - AB) - (9^2 - AB - BC) + (7^2 - BC - CD) - (5^2 - CD)$, donde las áreas designadas con un par de letras se corresponden con las zonas blancas del dibujo, y acaban desapareciendo en la operación.



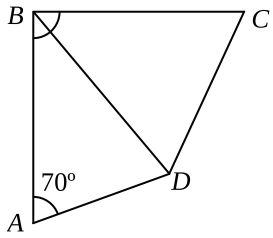
25.(A) Si nos fijamos en el triángulo *ABN*, descubrimos que sus ángulos miden *z*, *y*, y 180º - *x*, es decir $x = z + y$.



XI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel III

1. (C) El triángulo ABD es isósceles: por tanto el ángulo $A\hat{D}B = 70^o$ y el tercer ángulo vale $A\hat{B}D = 180 - (70 + 70) = 40^o$.
El triángulo BCD también es isósceles, y como $D\hat{B}C = 90 - 40 = 50^o$, cada uno de los otros ángulos mide $(180 - 50) : 2 = 65^o$. El ángulo que nos piden mide $B\hat{D}C = 65^o$.



2. (A) El Jefe de Estudios sólo consultó al 20% de los estudiantes y de éstos, el 80% estaba a favor de los exámenes sorpresa, es decir, el 20% del 80% del total, o lo que es lo mismo: $\frac{20}{100} \cdot \frac{80}{100} = \frac{1600}{10000} = \frac{16}{100} = 16\%$ de los estudiantes del Centro.

3. (A) La región sombreada es el resultado de quitar al cuadrado *OABC* un cuarto del círculo de centro *O* y radio *OA*. Su área será, por tanto:

$$1^2 - \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

4. (B) Vamos a escribir todas las letras en función de a:

Sabemos que $\left.\begin{array}{l} a = b - c \\ b = c - d \\ c = d - a \end{array}\right\}$, sumamos estas tres igualdades y tenemos que:

$a + b + c = b - c + c - d + d - a \to a + b + c = b - a \to c = -2a$.

Sustituimos este valor de c en la primera y en la tercera igualdad y:

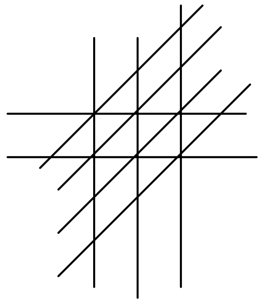
$a = b - c \to a = b - (-2a) \to a = b + 2a \to b = -a$.

$c = d - a \to -2a = d - a \to d = -a$.

Escribiendo todo en función de a ya podemos calcular:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = \frac{a}{-a} + \frac{-a}{-2a} + \frac{-2a}{-a} + \frac{-a}{a} = -1 + \frac{1}{2} + 2 - 1 = \frac{1}{2}$$

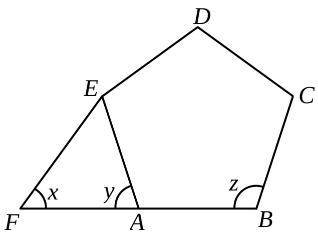
5. (C) Para conseguir el menor número de puntos de corte, las rectas horizontales y verticales deben formar una cuadrícula (es decir, todas a igual distancia), y las oblicuas deben pasar por los puntos de intersección de las anteriores. Así obtenemos el dibujo adjunto.
En total hay 14 puntos de corte entre esas nueve rectas.



6. (B) Como la nota media es la suma de las notas dividida entre 4, la suma total de mis cuatro exámenes ha sido de $4 \cdot 8{,}5 = 34$. Para hallar la peor nota posible P en un examen debo suponer que en los otros tres he sacado la máxima nota, es decir, un diez en cada uno de esos tres. La suma sería $P + 10 + 10 + 10 = 34$, es decir, $P = 4$ es la peor nota posible. (Por debajo de 4 ya no habría forma de alcanzar una suma igual a 34).

7. (E) Calculemos los ángulos *x, y, z.*
El ángulo z es un ángulo interior de un pentágono regular cuya medida es:

$$z = \frac{180^o \cdot (5-2)}{5} = 108^o .$$



El ángulo y es un ángulo exterior del pentágono regular y mide

$$180^o - 108^o = 72^o .$$

Como el triángulo *AFE* es isósceles $(AF = AE)$:

$$x + x + 72^o = 180^o \rightarrow x = 54^o .$$

Así pues, los ángulos *x, y, z* miden 54º, 72º y 108º, que son proporcionales a 3, 4 y 6 ya que $54 = 3 \cdot 18$, $72 = 4 \cdot 18$ y $108 = 6 \cdot 18$.

8. (C) Vayamos con cuidado averiguando las posibles valores de los números *a, b, c, d, e,* que podemos elegir entre los cinco números que faltan: 1, 3, 11, 13 y 19.
El número *a* sólo puede ser 3. Los números *b* y *c* sólo pueden ser 1 ó 19 (es decir, uno será 1 y el otro será 19). Así pues, para el valor *d* ya hemos descartado 1, 3 y 19, por tanto a *d* (que podía ser 1 ó 11) debemos asignarle el 11 y a *e* el 13.

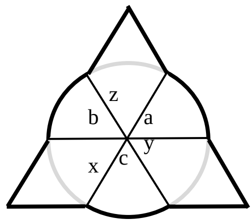
9. (E) Un cubo tiene 12 aristas y como la suma de todas ellas es L, entonces la arista, a, del cubo vale $a = \frac{L}{12}$. El área total es seis veces la superficie de una de sus caras y podemos escribir que $A_T = 6 \cdot \left(\frac{L}{12}\right)^2$ que, a su vez, vale L, según nos dice el enunciado. Por tanto: $6 \cdot \left(\frac{L}{12}\right)^2 = L \to \frac{L^2}{24} = L \to L = 24$. Ya podemos hallar la arista del cubo: $a = \frac{L}{12} = \frac{24}{12} = 2$.

El volumen del cubo es $V = a^3 = 2^3 = 8$ cm^3.

10. (E) 3^{10} es impar ya que cualquier potencia de 3 es siempre impar porque nunca aparecen factores pares, todos son 3.

3^{10} es un cuadrado perfecto ya que $3^{10} = \left(3^5\right)^2$.

Así pues, la afirmaciones II y III son verdaderas.



11. (B) Como el círculo está centrado en el triángulo equilátero, los ángulos *a*, *b*, *c* son iguales. Y como los otros ángulos *x*, *y*, *z* son opuestos por el vértice a los anteriores, concluimos que esos seis ángulos son iguales y por tanto miden 60º cada uno.

La parte de circunferencia que se ve equivale a 180º, es decir la mitad de la circunferencia completa: $\frac{2\pi r}{2} = \pi$.

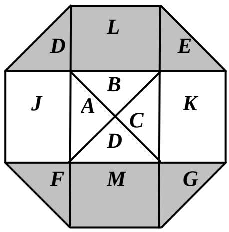
La parte que se oculta del triángulo es 1 cm por cada lado ya que los triangulitos interiores son equiláteros al ser isósceles y tener un ángulo de 60º. Por tanto, de cada lado se ven 2 cm.

Así pues el borde de la figura es $6 + \pi$.

12. (A) Hay que encontrar una temperatura C en grados Celsius que cumpla:

$2C + 3 = \frac{9}{5}C + 32 + 1$ y al resolver esta sencilla ecuación obtenemos que $C = 15\ ^oC$.

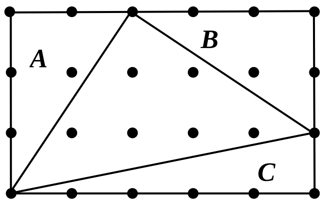
13.(E) Si trazamos las diagonales del cuadrado interior se forman cuatro triángulos rectángulos isósceles (*A*, *B*, *C* y *D*) de hipotenusa 2 cm (el lado del octógono) y, por tanto son iguales a los triángulos de las esquinas (*D*, *E*, *F* y *G*) que también son rectángulos e isósceles de hipotenusa 2 cm.
Además, los rectángulos *J*, *K*, *L* y *M* son todos iguales. Por tanto, la región sombreada y la blanca son iguales y tiene igual área. La diferencia entre ellas es cero.



14. (A) Si llamamos C a la suma de los pesos de las cuatro patatas, el peso medio de estas cuatro patatas será $\frac{C}{4}$ y llamando P al peso del patatón, nuestro objetivo es calcular el cociente $\frac{P}{C}$. El enunciado nos asegura que:

$$\frac{C+P}{5} = 2\cdot\frac{C}{4} \to 2C+2P = 5C \to 2P = 3C \to \frac{P}{C} = \frac{3}{2}.$$

15.(D) Calcular directamente el área del triángulo pedido sería muy complicado ya que tendríamos que hallar previamente su base y su altura. Es más fácil hallar el área del rectángulo y restarle el área de los tres triángulos *A*, *B*, *C*, rectángulos.
El área del rectángulo es $5\cdot 3 = 15$.

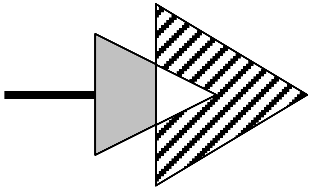


$$Área(A) = Área(B) = \frac{3\cdot 2}{2} = 3.$$

$$Área(C) = \frac{5\cdot 1}{2} = \frac{5}{2}.$$

El área del triángulo pedido es $15-3-3-\frac{5}{2} = \frac{13}{2}$

16. (B) Al sumar ocho enteros consecutivos obtenemos:
$a+(a+1)+(a+2)+\ldots+(a+7)=8a+28=4(2a+7)$, es decir, un múltiplo de 4.
Entre las respuestas, la única que es múltiplo de 4 es 2004.



17. (D) La clave está en el triangulito blanco.
En el triángulo pequeño P: la zona sombreada ocupa $\frac{4}{5}$ de P y el triangulito blanco ocupa, por tanto, $\frac{1}{5}$ de P. Así pues, el triangulito blanco ocupa $\frac{1}{4}$ de la zona sombreada S.

En el triángulo grande G: la zona rayada ocupa $\frac{13}{15}$ de G y el triangulito blanco ocupa, por tanto, $\frac{2}{15}$ de G. Así pues, el triangulito blanco ocupa $\frac{2}{13}$ de la zona rayada R.

Así pues, tenemos que $\frac{1}{4}\cdot S=\frac{2}{13}\cdot R\rightarrow\frac{S}{R}=\frac{8}{13}$

18. (B) Sabemos que el tiempo (2 horas y 30 minutos es igual a 2,5 horas) es igual al espacio (e) partido entre la velocidad (v). O sea, $2{,}5=\frac{e}{v}$.
Si aumenta su velocidad en un 20% significa que lleva una velocidad de $1{,}20v$. Calculemos el tiempo que emplea:

$$t=\frac{e}{1{,}20v}=\frac{2{,}50}{1{,}20}=\frac{2{,}40}{1{,}20}+\frac{0{,}10}{1{,}20}=2h+\frac{0{,}10}{1{,}20}\cdot 60\,\text{min}=2h\quad y\quad 5\,\text{min}$$

19. (C) Si llamamos x a la altura del rectángulo, su base debe ser $25x$ y su área será: $A = 25x \cdot x = 25x^2$. Un cuadrado del mismo área debe tener un lado de $\sqrt{25x^2} = 5x$. Ya podemos hallar sus perímetros:

Perímetro del rectángulo: $P_R = 25x + 25x + x + x = 52x$.

Perímetro del cuadrado: $P_C = 4 \cdot 5x = 20x$.

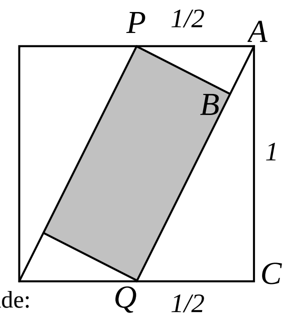
El cociente entre estos perímetros es $\dfrac{P_R}{P_C} = \dfrac{52x}{20x} = \dfrac{52}{20} = \dfrac{13}{5}$.

20. (B) Al lanzar dos dados tenemos 36 (6×6) casos posibles. Los cuadrados perfectos de dos cifras son: 16, 25, 36, 49, 64 y 81. Evidentemente, los dígitos del 49 y del 81 no podremos conseguirlos nunca y para cada uno de los restantes tenemos dos casos favorables (observa que, por ejemplo, 16 se puede conseguir con un 1 en el primer dado y un 6 en el segundo; y también con un 6 en el primer dado y un 1 en el segundo). Los casos favorables son por tanto 8.

La probabilidad pedida es: $P = \dfrac{casos \quad favorables}{casos \quad posibles} = \dfrac{8}{36} = \dfrac{2}{9}$

21. (C) Para calcular el área del rectángulo restaremos a la del cuadrado el área de los cuatro triángulos rectángulos (dos grandes y dos pequeños).

Los triángulos grande y pequeño son semejantes ya que tienen todos sus ángulos iguales. Basándonos en esta semejanza, calcularemos los catetos del triángulo pequeño.



Debemos hallar la hipotenusa del triángulo grande:

$$AQ^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow AQ = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ cm.}$$

Por semejanza:

$$\frac{HIP}{hip} = \frac{CAT_G}{cat_G} \rightarrow \frac{AQ}{AP} = \frac{AC}{BP} \rightarrow \frac{\sqrt{5}/2}{1/2} = \frac{1}{BP} \rightarrow BP = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ cm.}$$

Como el otro cateto es la mitad, tenemos que $AB = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ cm.

El área del triángulo pequeño es por tanto:

$$\frac{AB \cdot BP}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}}\right) : 2 = \frac{1}{20}\ \text{cm}^2.$$

El área del triángulo grande es $\dfrac{1}{4}$ cm^2. Y ya podemos hallar el área del rectángulo:

$$1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20}\right) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}\ \text{cm}^2.$$

Observando que $\dfrac{2}{5} = \dfrac{6,4}{16}$ vemos que se encuentra entre $\dfrac{3}{8} = \dfrac{6}{16}$ y $\dfrac{7}{16}$.

22. (C) La situación del problema es esta:

$$\begin{array}{r|l} 2007 & N \\ \cline{2-2} 5 & C \end{array}$$

Debemos calculara todos los posibles valores de *N*.

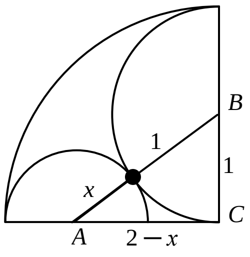
Sabemos que $2007 = N \cdot C + 5 \rightarrow 2002 = N \cdot C$. El problema se reduce pues a calcular los divisores del 2002 pero ¡ojo!, no valdrán aquellos que sean menores o iguales que 5 ya que el divisor, *N*, debe ser mayor que el resto 5.

Descomponiendo en factores primos 2002, vemos que $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$.

Los divisores de 2002 son 16: 1, 2, 7, 11, 13, 2·7, 2·11, 2·13, 7·11, 7·13, 11·13, 2·7·11, 2·7·13, 2·11·13, 7·11·13, 2·7·11·13. De estos, el 1 el 2 no valen, lo que hace un total de 14 valores posibles para *N*.

23. (C) El punto de tangencia de dos circunferencias se encuentra en el segmento que une sus centros, formándose así el triángulo rectángulo *ABC*, siendo sus vértices, todos ellos, los centros de las tres circunferencias.

Si llamamos x al radio de la circunferencia pequeña vemos que: $AB = x + 1$, $BC = 1$ y $AC = 2 - x$.



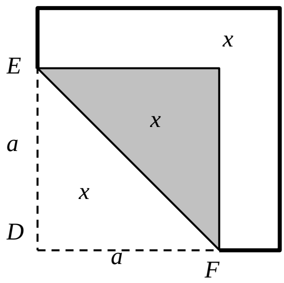
Aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos la ecuación $(1+x)^2 = 1^2 + (2-x)^2$, que al resolverla nos da la solución $x = \frac{2}{3}$.

24. (A) Calculemos dicho producto:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2}$$

La expresión $\frac{n+1}{2}$ será un número entero cuando $n+1$ sea par, es decir, cuando n sea impar.

25. (A) Si llamamos x al área de la parte blanca de hoja, entonces, el triángulo rojo también tiene área x. Y el triángulo EDF también tiene área x ya que es igual a la zona roja. Por tanto $3x = 12 \rightarrow x = 4$ cm^2.



$$Área(DEF) = 4 \rightarrow \frac{a\cdot a}{2} = 4 \rightarrow a = \sqrt{8} \text{ cm.}$$

Y ya podemos calcular la longitud del doblez EF aplicando el teorema de Pitágoras:

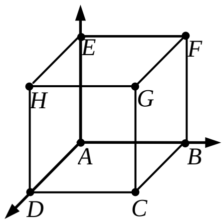
$$EF^2 = a^2 + a^2 = \sqrt{8}^2 + \sqrt{8}^2 = 16 \rightarrow EF = \sqrt{16} = 4 \text{ cm.}$$

XI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel IV

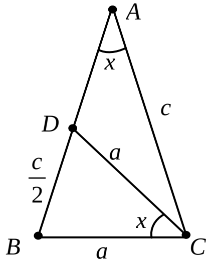
1. (D) La suma de las notas de estos 12 estudiantes fue $6{,}5\cdot 12 = 78$. Así que la suma de las notas de los 20 alumnos de la clase osciló entre $78+0\cdot 8$ y $78+10\cdot 8$, es decir, la media de las 20 notas, m, verifica $\frac{78}{20}\le m\le\frac{158}{20}$, o sea, $3{,}9\le m\le 7{,}9$.

2. (D) Al tomar un sistema de ejes centrado en A, como indica la figura, resulta que, tomando como unidad el lado del cubo, el vector $\overrightarrow{AG}=(1,1,1)$ y el vector $\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$, por lo que su producto escalar es 2 y el coseno del ángulo que forman es $\frac{2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$.



3. (B) Llamando $0,\widehat{n}=x$, tenemos $n,\widehat{n}=10x$, por lo que $n=9x$, y como $0,n=\frac{n}{10}=\frac{9x}{10}$, el cociente pedido es $0,n:0,\widehat{n}=\frac{9x}{10}:x=\frac{9}{10}$.

4. (A) El triángulo BCD es semejante al original ABC pues nos dicen que $B\hat{C}D=B\hat{A}C$ y los ángulos en B son el mismo. Así pues, dicho triángulo es también isósceles, de lados a, a y $\frac{c}{2}$, siendo c, c y a los lados del triángulo ABC.



Aplicando, entonces, el teorema del coseno a ambos triángulos podemos escribir:

$$a^2=c^2+c^2-2c^2\cos x=2c^2(1-\cos x)$$

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2=a^2+a^2-2a^2\cos x=2a^2(1-\cos x)$$

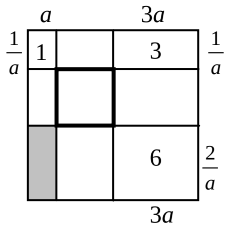
Así pues $\frac{c^2}{4}=4c^2(1-\cos x)^2$, de donde $1-\cos x=\frac{1}{4}$ y $\cos x=\frac{3}{4}$

5. (B) Como se puede observar, estas curvas están estrechamente relacionadas con $y=sen\,x$, con la particularidad de que solamente existen valores de y cuando $sen\,x\ge 0$, habiendo para cada uno de esos valores de x dos valores de y, por lo que la curva es $|y|=sen\,x$.

6. (C) Llamemos $a \le b \le c$ a los lados del triángulo y $h \ge h' \ge h''$ a las alturas correspondientes a cada uno de los lados.

Así pues, el área del triángulo $A = \frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} b \cdot h' = \frac{1}{2} c \cdot h''$ de donde $a = \frac{2A}{h}$, $b = \frac{2A}{h'}$, $c = \frac{2A}{h''}$ y, como $c \le a + b$ tenemos que las alturas de un triángulo verifican $\frac{1}{h''} \le \frac{1}{h} + \frac{1}{h'}$ siendo $h \ge h' \ge h''$.

Como $h = 5 \cdot k$, $h' = 4 \cdot k$ y $h' = 2 \cdot k$ no verifican esa desigualdad ya que $\frac{1}{2} > \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}$, las alturas de un triángulo no pueden ser proporcionales a 2,4 y 5.



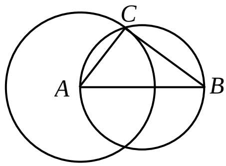
7. (E) .Llamando a al lado horizontal del rectángulo de área 1, tenemos la figura que se muestra y, al ser el rectángulo central un cuadrado, debe ser $a + 3a = \frac{1}{a} + \frac{2}{a}$, es decir $4a^2 = 3$ y $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Así pues, los lados del rectángulo sombreado miden $\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\frac{4}{\sqrt{3}}$, por lo que el perímetro es $2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3} + \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{11\sqrt{3}}{3}$.

8. (D) Como $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$ para cualquiera números a y b, es

$$sen^3 x + \cos^3 x = (sen\, x + \cos x)\left(sen^2 x - sen x \cos x + \cos^2 x\right) = (sen\, x + \cos x)(1 - sen x \cos x)$$

9. (B) Al ser $sen 2\theta = 2 sen\theta \cos\theta$, en nuestro caso sería $sen 2\theta = sen\theta$ y como $sen\theta \ne \frac{1}{2}$ si $\cos\theta = \frac{1}{2}$, entonces $sen 2\theta \ne \frac{1}{2}$.



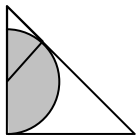
10. (E) Al ser $A\hat{C}B = 90^{\circ}$, $AC = 12$ y $AB = 20$, tenemos que, por el teorema de Pitágoras, $CB = 16$ cm.

11. (B) Nos dicen que $t = \frac{d}{v} + \frac{d}{2u}$, así que $d = \frac{2tuv}{2u+v}$, por lo que la distancia total recorrida, $d + \frac{d}{2}$ será $\frac{3tuv}{2u+v}$.

12. (A) Dos puntos de la recta imagen serán el punto de corte de $y = 3x + 4$ con $y = -x$, a saber $(-1,\ 1)$ y el reflejado de $(0, 4)$ sobre $y = -x$, a saber $(-4,\ 0)$, por lo que la pendiente de la recta imagen es $\frac{1}{3}$ y su ecuación $y = \frac{1}{3}(x+4)$, o sea $3y = x + 4$.

13. (C) Como cada número ocupa tantos lugares como indica su valor, el número de lugares ocupados hasta el número n inclusive vendrá dado por $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Planteemos, pues, la ecuación $\frac{n(n+1)}{2} = 2007$, de donde $62 < n < 63$. Así pues, con $n = 62$ no llegamos a ocupar 2007 lugares y con $n = 63$ nos pasamos, por lo que el lugar 2007º está ocupado por el número 63.

14. (B) El área inicial es $\frac{B+b}{2}h$ y el área final es $\frac{0{,}9B + 0{,}9b}{2} \cdot 1{,}1h = 0{,}99 \cdot \frac{B+b}{2}h$, es decir, el área se ha reducido un 1%.



15. (A) El triángulo rectángulo, uno de cuyos vértices es el centro del semicírculo y el vértice del ángulo recto el punto de tangencia, tiene de hipotenusa $1 - r$, un cateto igual a r y es semejante al triángulo original. Así pues, $1 - r = \sqrt{2}r$, de donde $r = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$

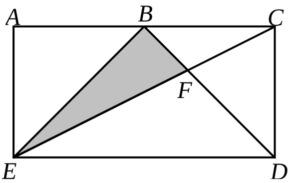
16. (B) La zona sombreada es el triángulo menos tres sectores de radio 2 m y en los que los ángulos suman 180º. Así pues, el área de dicha zona es $80 - \frac{\pi \cdot 2^2}{2} = 80 - 2\pi$.

17. (B) Las soluciones vienen dadas por los números naturales $10p+q$ y $10q+p$ y, como su suma es A, tenemos que $11(p+q)=A$, luego A es múltiplo de 11.

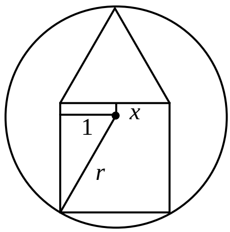
18. (E) $4^{\frac{p-1}{p+1}}=2^{\frac{2p-2}{p+1}}$, que será un entero solamente cuando $\dfrac{2p-2}{p+1}$ sea un entero mayor o igual que cero.

Como $\dfrac{2p-2}{p+1}=2-\dfrac{4}{p+1}$, deberá ocurrir que $|p+1|$ sea un divisor de 4 tal que $2\geq\dfrac{4}{p+1}$.

Así pues $p+1=-1,-2,-4,2,4$, por lo que resultarán 5 valores de p, a saber: $-2,-3,-5,1,3$.



19. (D) .El área del triángulo EBC es $\dfrac{1}{2}$ pues su base, BC, mide 1 y su altura también.
Por otra parte, el triángulo BFC es semejante al EFD, siendo $\dfrac{1}{2}$ la razón de semejanza, por lo que sus alturas sobre BC y ED serán h y $2h$, de suma 1, con lo que $h=\dfrac{1}{3}$, el área de BFC es $\dfrac{1}{6}$ y el área sombreada es $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$



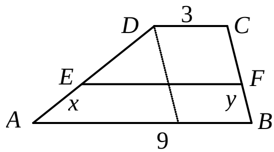
20. (D) Como la altura del triángulo equilátero es $\sqrt{3}$, el segmento x de la figura medirá $r-\sqrt{3}$, por lo que el cateto vertical del triángulo dibujado medirá $2-x=2-\left(r-\sqrt{3}\right)=2+\sqrt{3}-r$ y, aplicando el teorema de Pitágoras en dicho triángulo, tenemos que $r^2=1^2+\left(2+\sqrt{3}-r\right)^2$, ecuación de primer grado que nos conduce a

$$r=\frac{1+\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{2\left(2+\sqrt{3}\right)}=\frac{1+4+4\sqrt{3}+3}{2\left(2+\sqrt{3}\right)}=\frac{4\left(2+\sqrt{3}\right)}{2\left(2+\sqrt{3}\right)}=2$$

21. (C) Las bolas extraídas serán de distinto color si una de las dos es la azul, cuya probabilidad es $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$.

22. (A) $11^{48}=(10+1)^{48}=\binom{48}{0}10^{48}+...+\binom{48}{46}10^{2}+\binom{48}{47}10+1=10^{2}\cdot p+481$ siendo p un número entero. Así pues, esta suma acabará en 81 siendo, pues, su penúltima cifra un 8.

23. (C) Llamando $AE=x$ y $FB=y$, la condición que nos dan nos lleva a escribir $9+x+y=6-x+3+4-y$, es decir, $x+y=2$.



Por otra parte, trazando por D una paralela al lado BC, la semejanza de los triángulos formados nos permite escribir $\frac{6-x}{6}=\frac{4-y}{4}$, o sea, $x=\frac{3}{2}y$ que, junto con $x+y=2$ hacen que $x=\frac{6}{5}$ y

$$\frac{AE}{ED}=\frac{\frac{6}{5}}{6-\frac{6}{5}}=\frac{1}{4}.$$

24. (B) Nadal gana el partido en cualquiera de estas situaciones: NN, NFN ó FNN representando por N ó F que Nadal o Federer ganen un set.
Así pues, la probabilidad de que Nadal gane el partido es

$$p=\left(\frac{3}{5}\right)^{2}+\left(\frac{3}{5}\right)^{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot 2=\left(\frac{3}{5}\right)^{2}\cdot\frac{9}{5}=\frac{81}{125}=0{,}648$$

25. (A) Tomando como unidad la tercera parte de la longitud del segmento BC, tenemos que $1^{2}+2^{2}=k\cdot 3^{2}$, de donde $k=\frac{5}{9}$.

Participantes y relación de ganadores del XI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Como ya viene siendo habitual, año tras año el número de participantes sigue aumentando. En esta ocasión el número de concursantes inscritos en esta segunda fase o fase final del Concurso de Primavera fue de 2 787 por lo que no era posible la realización de la prueba en dos turnos y hubo que hacerla en tres. La Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid se nos está quedando pequeña y esto, mas que un inconveniente, es un estímulo para continuar con este concurso cuyo objetivo es popularizar el estudio de las Matemáticas y la resolución de problemas.

La distribución por niveles y la relación de los ganadores de cada uno de los cuatro niveles fue la siguiente:

	NIVEL 1		NIVEL 2		NIVEL 3		NIVEL 4	
	5º P	6º P	1º ESO	2º ESO	3º ESO	4º ESO	1º B	2º B
nº de estudiantes	153	396	331	496	352	357	231	168
total real / inscritos	**549** (572)		**827** (917)		**709** (834)		**399** (464)	
media	60,2	70	57,2	63,3	59	61,6	57,5	61
puntuación máxima	106	120	107	115	112	117	105	108
nº de estudiantes con más de 90 puntos	8 (5%)	59 (15%)	8 (2,5%)	33 (6,7%)	14 (4%)	23 (6,5%)	4 (2%)	1 (0,6%)
nº de estudiantes con menos de 50 puntos	36	39	105	97	105	85	64	9
nº de centros	121		231		230		133	

Total real se refiere al número de estudiantes del nivel correspondiente que realizaron la prueba. Entre paréntesis figura el número de estudiantes inscritos en ese nivel.

Los ganadores fueron:

NIVEL I

1. Guillermo Pascual Pérz (5º Primaria) Colegio Fray Luis de León. Madrid
1. Paúla Sardinero Meirás (6º Primaria) Colegio Virgen de Europa. Madrid
1. Javier Cortázar Hernando (6º Primaria) C.E.I.P. Joaquín Costa. Madrid

NIVEL II

1. Pablo Boixeda Álvarez (2º ESO) Colegio Alemán. Madrid
2. Eric García de Ceca Elejoste (1º ESO) Colegio Bérriz. Madrid
3. Alberto González Fernández (2º ESO) Colegio Joyfe. Madrid

NIVEL III

1. Rubén Jiménez Benito (4º ESO) IES José Hierro. Getafe
2. Santiago Cubillo Esteban (3º ESO) Colegio El Prado. Madrid
3. Moisés Herradón Cueto (3º ESO) Colegio Brains. Madrid

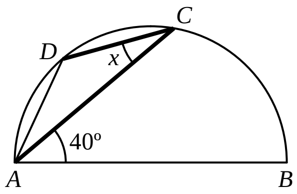
NIVEL IV

1. Manuel López Sheriff (2º Bchto) Colegio Arturo Soria. Madrid
2. Gabriel Fürstenheim Milerud (1º Bchto) IES Ramiro de Maeztu. Madrid
3. Diego Izquierdo Arseguet (3º ESO) Liceo Francés. Madrid

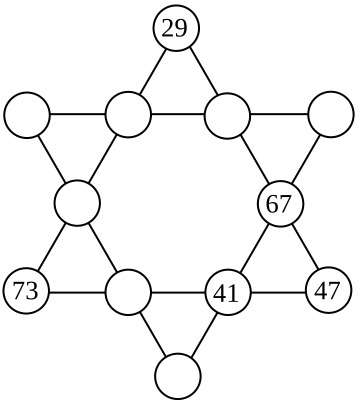
VII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid
17 de noviembre de 2007

PRUEBA POR EQUIPOS 1º y 2º de E.S.O. (45 minutos)

1.- En la semicircunferencia de la figura, AB es un diámetro y $AD = DC$. Si $\angle BAC$ es de 40º, calculad lo que mide $\angle DCA$.



2.- Todos los números que aparecen en la estrella de la figura son primos. Esta estrella es mágica, porque los números que hay en cada una de las seis líneas (cuatro en cada una) suman lo mismo. Si entre los que te hemos escrito está el mayor y el menor de los doce que deben aparecer, complétala explicando detalladamente los pasos que habéis seguido y en el orden en que los habéis hallado.

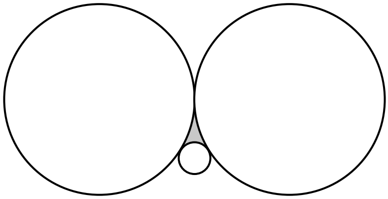


3.- Un número entero, n, es tal que la cifra de las decenas de su cuadrado es impar. ¿Cuál es la cifra de las unidades de n^2?

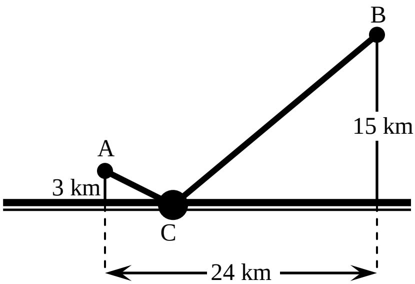
<u>PRUEBA POR EQUIPOS</u> 3º y 4º de E.S.O. (45 minutos)

1.- Juan le dice a Luisa: Si me das 3 monedas yo tendré n veces las que tú tengas. Ya, le responde Luisa; pero si tú me das a mí n monedas, entonces yo tendré el triple de las que te quedan a ti. ¿Para qué valores de n son verdaderas esas dos afirmaciones?

2.- La figura muestra dos circunferencias de radio 105 tangentes entre sí y tangentes a otra de radio 14. ¿Cuál es el radio del círculo más grande que cabe en la zona sombreada?



3.- Dos pueblos A y B se encuentran situados en la misma ribera de un río a una distancia del mismo de 3 y 15 km, respectivamente, tal como se muestra en la figura. El río sigue un curso rectilíneo. Se quiere construir un colector para la depuración de las aguas residuales para que sea utilizado por ambos pueblos. Hay que elegir el lugar del colector C, en la orilla del río, de manera que la suma de las distancias del colector a los dos pueblos sea la menor posible. Determinar ese lugar y la suma de las dos distancias.

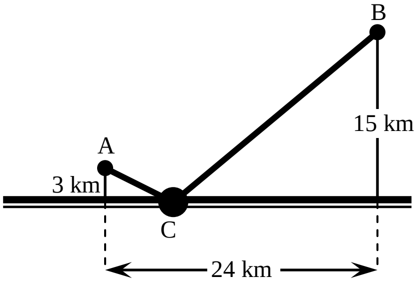


PRUEBA POR EQUIPOS Bachillerato. (45 minutos)

1.- En un triángulo rectángulo isósceles, una recta que pasa por el vértice del ángulo recto divide a éste en dos ángulos, uno doble que otro. Si el cociente entre los dos segmentos que esta recta determina en la hipotenusa es $\sqrt{a}$, $a > 1$, calculad *a*.

2.- En un club de tenis en el que hay más de 25 jugadores pero menos de 40, la tercera parte son zurdos. Durante la temporada pasada cada jugador se enfrentó con cada uno de los demás jugadores una sola vez y el cociente entre el número de partidos ganados por zurdos y el número de partidos ganados por diestros fue $\frac{3}{4}$. ¿Cuántos jugadores hay en el club?

3.- Dos pueblos A y B se encuentran situados en la misma ribera de un río a una distancia del mismo de 3 y 15 km, respectivamente, tal como se muestra en la figura. El río sigue un curso rectilíneo. Se quiere construir un colector para la depuración de las aguas residuales para que sea utilizado por ambos pueblos. Hay que elegir el lugar del colector C, en la orilla del río, de manera que la suma de las distancias del colector a los dos pueblos sea la menor posible. Determinar ese lugar y la suma de las dos distancias.



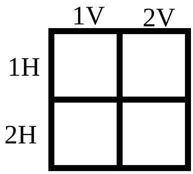
4.- Resolver la ecuación $|3-x|-|x+2|=5$

<u>PRUEBA INDIVIDUAL</u> 1º y 2º de E.S.O. (90 minutos)

1. ¿Para cuántos enteros positivos se verifica que su mitad y su doble son números de 3 cifras?

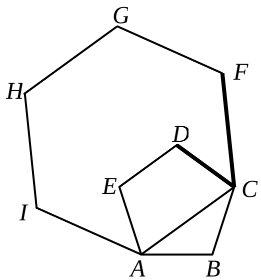
2. Un número entero, comprendido entre 1000 y 1500, tiene la propiedad de dar resto 2 al dividirlo entre 3, resto 3 al dividirlo entre 4, resto 4 al dividirlo entre 5, resto 5 al dividirlo entre 6 y resto 6 al dividirlo entre 7. ¿De qué número se trata?

3. En cada una de estas cuatro casillas debes colocar una cifra de manera que se cumplan las siguientes condiciones:



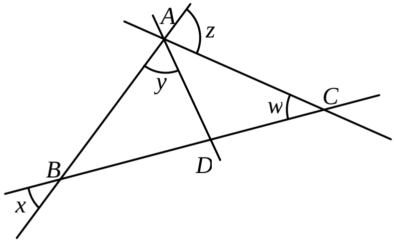
- Las cuatro son cifras distintas y ninguna de ellas es cero.
- El número de dos cifras de la primera fila horizontal (1H) es un cubo perfecto.
- El número de dos cifras de la segunda fila horizontal (2H) es suma de dos cuadrados perfectos.
- El número de dos cifras de la primera fila vertical (1V) es un cuadrado perfecto.
- El número de dos cifras de la segunda fila vertical (2V) es un número primo.

4. La figura que ves muestra un pentágono regular *ABCDE* y un hexágono regular *ACFGHI.* ¿Cuál es la medida del ángulo $\angle DCF$?



5. En la figura inferior se verifica que $AB = AC$ y $AD = CD$.
De las tres afirmaciones siguientes, sobre los ángulos señalados, decide cuáles son necesariamente siempre verdaderas.

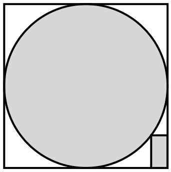
I. $w = x$ **II.** $x + y + z = 180º$ **III.** $z = 2x$.



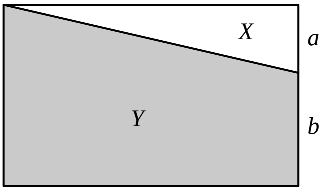
<u>PRUEBA INDIVIDUAL</u> 3º y 4º de E.S.O. (90 minutos)

1.- Si $x = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 2007^2$ e $y = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + ... + 2007 \cdot 2009$, calcula $y - x$.

2.- En un cuadrado hay inscritos un círculo y un rectángulo, doble de largo que de ancho, con un vértice en la circunferencia y los lados opuestos a este vértice sobre los lados del cuadrado, como muestra la figura. Calcula el cociente entre el área del círculo y el área del rectángulo.



3.- Cortamos una hoja de papel en dos trozos con un corte rectilíneo que pasa por una esquina, como se muestra en la figura. Si $\frac{\text{Área } X}{\text{Área } Y} = \frac{2}{7}$, ¿cuánto vale el cociente $\frac{a}{b}$?

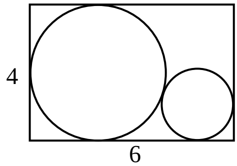


4.- En un triángulo rectángulo se verifica que la circunferencia inscrita toca a la hipotenusa en un punto que divide a ésta en dos trozos de longitudes 7 y 8 cm. Calcula el área del triángulo.

5.- A las 12 de la mañana sale un AVE de Sevilla a Zaragoza y 40 minutos más tarde sale otro de Zaragoza a Sevilla. Si ambos van a velocidad constante haciendo el trayecto en tres horas y media, ¿a qué hora se cruzaron?

PRUEBA INDIVIDUAL Bachillerato (90 minutos)

1. En un rectángulo de dimensiones 6 y 4, inscribimos dos circunferencias tangentes como se muestra en la figura. ¿Cuál es el radio de la pequeña?



2. Considera las tres igualdades siguientes:

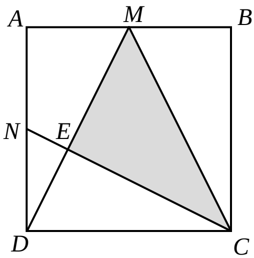
$11 - 2 = 3^2$

$1111 - 22 = 33^2$

$111111 - 222 = 333^2$

A la vista de ellas, enuncia y demuestra el resultado que te sugieran.

3. En el dibujo que ves, *M* y *N* son los puntos medios de los lados *AB* y *AD*, respectivamente, del cuadrado *ABCD*. Demuestra que el triángulo *MEC* es rectángulo y que sus lados están en la proporción 3 : 4 : 5.



4. Hay algunos enteros "n" para los que la expresión $\dfrac{7n+18}{2n+3}$ resulta también un número entero. Escribe todos los "n" con esta propiedad.

5. Antonio y Benito juegan con otros 14 jugadores un torneo de tenis, sin cabezas de serie, por el sistema habitual, es decir, eliminando en cada partido al perdedor. Si los 16 jugadores son exactamente igual de buenos, ¿cuál es la probabilidad de que Antonio y Benito lleguen a enfrentarse?

PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

1^er^ Ciclo de ESO.-

1A.- En la multiplicación de al lado, cada letra representa una cifra, así que **A B** y **D E** representan números de dos cifras cada uno. Si sólo hemos utilizado las cifras 1, 2, 3, 4 y 5, ¿qué cifra representa la letra **E**?

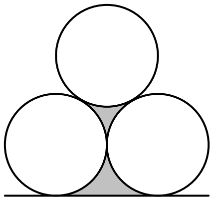
$$\begin{array}{r} A\ \ B \\ \times\ C \\ \hline D\ \ E \end{array}$$

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1B.- Sea "T" la respuesta del problema 2B
El cuadrado de la figura es un cuadrado mágico, o sea, la suma de los elementos de cada fila, cada columna y cada diagonal es la misma. Si T ocupa la posición inferior izquierda, ¿qué número *X* ocupa la posición superior derecha?
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

		X
5		15
T		

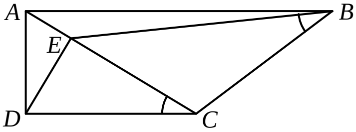
1C.- Sea "T" la respuesta del problema 2C.
Calcula el perímetro de la región sombreada sabiendo que las tres circunferencias de la figura tienen radio T y son tangentes entre sí.
(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala)



PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

2º Ciclo de ESO.-

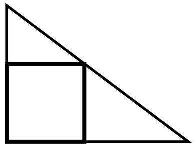
2A.- Sea "T" la respuesta del problema 3A.
En el trapecio rectángulo *ABCD* de la figura, la longitud del lado *AD* es T y *DE* es perpendicular a la diagonal *AC*. Si los ángulos marcados, $\angle DCA$ y $\angle CBE$, son ambos de 30º, calcula la longitud de *AB*.



(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala)

2B.- Las longitudes de los lados de un triángulo son 15, 20 y 25. Calcula la longitud de la altura más corta.
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1^er^ ciclo)

2C.- Sea "T" la respuesta del problema 3C.
En un triángulo rectángulo la medida de sus lados viene expresada con números enteros y la suma de las longitudes de sus catetos es T. Inscribimos un cuadrado en el triángulo como indica la figura. ¿Qué fracción del área del triángulo ocupa dicho cuadrado? Exprésala en forma de fracción irreducible, $\frac{a}{b}$, y escribe el número $b - 2a$ como respuesta en la tarjeta.



(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1er ciclo)

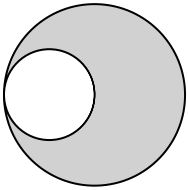
PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

Bachillerato.-

3A.- Sea “T” la respuesta del problema 1A.
¿Para cuántos valores de k menores que $10\cdot T$ es imposible encontrar un valor de n tal que $n!$ acabe exactamente en k ceros?
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 2º ciclo)

3B.- Sea “T” la respuesta del problema 1B.
En el cuadrado *ABCD* cuyo lado tiene longitud T, hay inscrito un triángulo equilátero *AEF* siendo *E* y *F* puntos de los lados *BC* y *CD* respectivamente. Otro cuadrado, uno de cuyos vértices es *B*, tiene un vértice en *AE* y lados paralelos a los lados del cuadrado *ABCD.* Calcula la longitud del lado de este cuadradito pequeño y expresa la solución de la forma más simplificada posible.
(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala)

3C.- El círculo pequeño es tangente al grande y pasa por el centro de éste. ¿Qué fracción del área del círculo grande está fuera del pequeño? Exprésala como fracción irreducible $\frac{a}{b}$ y escribe el número $a + b$ como respuesta en la tarjeta.



(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 2º ciclo)

XXIV CONCURSO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
"SOCIEDAD PUIG ADAM"
Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 9 de junio de 2007

NIVEL I

Problema 1º

Se da el triángulo ABC y se trazan las medianas AM y BN, que se cortan en G. Calcular el área del cuadrilátero GMCN en función del área de ABC.

Problema 2º

Decimos que un número entero es "supersticioso" cuando es igual a 13 veces la suma de sus cifras. Escribe todos los números supersticiosos que existen.

Problema 3º

Los lados de un triángulo miden 9, 12 y 15 cm. ¿Cuánto mide el radio de un círculo cuyo centro está en el lado pequeño y es tangente a los otros dos.

Problema 4º

Escribe todas las formas posibles de obtener 100 como suma de dos o más enteros positivos consecutivos.

NIVEL II

Problema 1º

Encuentra un número de cuatro cifras que verifique las siguientes condiciones:

a) La suma de los cuadrados de las cifras de las centenas y de las unidades es 53.
b) La suma de los cuadrados de las otras dos cifras es igual a 45.
c) Si del número pedido restamos el que se obtiene al invertir sus cifras, resulta un múltiplo de 99 comprendido entre 1 000 y 1 200.

Problema 2º

Sea un triángulo; *a, b, c*, las longitudes de sus lados y *R* la longitud del radio del círculo circunscrito. Demostrar que si se verifica $R(a+b)=c\sqrt{ab}$, entonces el triángulo es isósceles.

Problema 3º

A una persona la han prestado un teléfono móvil, pero ha olvidado su número PIN (de 4 cifras), a pesar de que le dijeron que era un capicúa divisible por 49. El teléfono se bloquea si hace más de dos intentos fallidos. Probar que podrá utilizarlo.

Problema 4º

El cuadrilátero ABCD admite un círculo inscrito, de centro O. Si el ángulo AÔB es de 70º, calcular el valor del ángulo DÔC.

NIVEL III

Problema 1º

Se comprueba que es $\sqrt{82}-9<0{,}05$. Con este dato, calcula cuál es la cifra decimal que ocupa el lugar 31º en la escritura decimal de $\left(9+\sqrt{82}\right)^{50}$, recordando que $\left(9+\sqrt{82}\right)^{50}+\left(9-\sqrt{82}\right)^{50}$ es un número entero.

Problema 2º

Lanzamos alternativamente una moneda y un dado perfectamente equilibrados y dejamos de lanzar cuando obtengamos cara o cuando obtengamos un dos. Si empezamos lanzando la moneda, ¿cuál es la probabilidad de acabar porque hemos obtenido un dos?

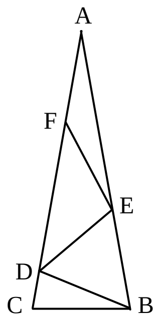
Problema 3º

Sean a y b enteros positivos. Demuestra que la ecuación $(x-a)^2+(x-b)^2=2ab-1$ no tiene raíces racionales.

Problema 4º

En la figura, el triángulo ABC es isósceles y el ángulo Â es de 20º.
Además, CB = BD = DE = EF.

Calcular el valor del ángulo FBA (no señalado en la figura).



XLIII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

2ª FASE LOCAL-COMUNIDAD DE MADRID

Primera sesión, viernes 19 de enero de 2007

No está permitido el uso de calculadoras. Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.

Problema 1
Demostrar que es imposible obtener un cubo yuxtaponiendo tetraedros regulares, todos del mismo tamaño.

Problema 2
Entre los 2007 primeros enteros positivos elegimos 1005 cualesquiera. Demostrar que es seguro que hay al menos dos de estos 1005 cuya diferencia es 4.

Problema 3
Demostrar que, en un triángulo, la distancia de un vértice cualquiera al ortocentro, es el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto a ese vértice.

Segunda sesión, sábado 20 de enero de 2007

Problema 4
Consideramos un triángulo isósceles ABC con $AC = BC$, y un punto D, fuera del triángulo, tal que el ángulo $\angle ACB$ sea el doble del ángulo $\angle ADB$. La recta AD corta a BC en el punto E con $CE = 2$ y $EB = 1$. Calcular el producto $AE \cdot ED$.

Problema 5
Encontrar todas las soluciones enteras posibles, x e y, de la ecuación: $p \cdot (x + y) = x \cdot y$ siendo p un cierto número primo.

Problema 6
Sea $a_n = 1 + n^3$ la sucesión $\{2, 9, 28, 65, \ldots\}$ y $\delta_n = mcd(a_{n+1}, a_n)$. Hallar el máximo valor que puede tomar δ_n.

XLIV OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA
Fase local-Comunidad de Madrid

Primera sesión, viernes 23 de noviembre de 2007

- **En la hoja de respuestas, escribe la letra que corresponde a la opción que creas correcta en cada pregunta. Si decides cambiarla, táchala con una cruz y escribe otra.**
- **Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos, cada respuesta en blanco 2 puntos y cada respuesta errónea, 0 puntos.**
- **No están permitidas calculadoras ni ningún instrumento de medida.**
- **Tiempo: 3 horas.**

1 A un número de 4 cifras del que sabemos que es divisible por 3, 4 y 5, se le han borrado las dos últimas cifras, quedándonos el 86 □□. ¿Cuál cifras borradas?

A) 4 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 9 **E)** 14

2 Utilizando algunos de los nueve enteros que hay del 11 al 19, podemos hacer una lista de forma que cualesquiera dos consecutivos no son primos entre sí. Por ejemplo: 16, 18, 15, 12, 14. Al hacer la lista más larga posible con los nueve enteros que hay del 111 al 119, ¿cuántos quedarán fuera?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

3 Al hacer la multiplicación de los dos números de dos cifras que ves, se nos han perdido unos cuantos. ¿Qué cifra debe aparecer en lugar de ♥?

$$\begin{array}{cccc}
 & & 4 & \sim \\
 & \times & \sim & \sim \\
\hline
 & \sim & 8 & \sim \\
 & 8 & \sim & 0 \\
\hline
\sim & \sim & 4 & \heartsuit
\end{array}$$

A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

4 Los cuatro números $\frac{1}{2}$, x, y, $\frac{3}{4}$ están colocados en orden creciente. Si la diferencia entre cada dos consecutivos es constante, ¿cuál es valor de y?

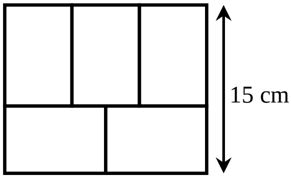
A) $\frac{3}{8}$ **B)** $\frac{2}{3}$ **C)** $\frac{7}{12}$ **D)** $\frac{5}{6}$ **E)** $\frac{5}{8}$

5 La suma de un número de tres cifras y la suma de sus cifras es 429. ¿Cuál es el producto de las tres cifras de este número?

A) 20 **B)** 28 **C)** 30 **D)** 36 **E)** 48

6 Colocamos cinco rectángulos idénticos como se muestra en la figura. Si el rectángulo grande mide 15 cm de ancho, ¿cuál es su área en cm^2?

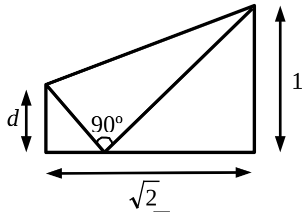
A) 270 **B)** 300 **C)** 330 **D)** 360 **E)** 450



7 ¿Cuándo es el producto $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)$ un número entero?

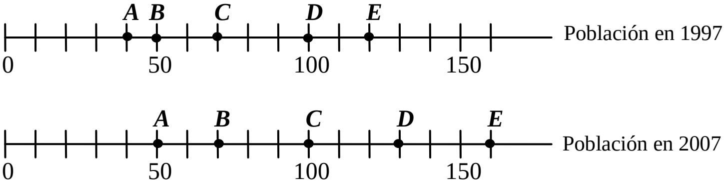
A) Cuando *n* es impar **B)** Cuando *n* es par **C)** Cuando *n* es múltiplo de 3
D) Siempre **E)** Nunca

8 Doblamos una hoja de papel de dimensiones 1 y $\sqrt{2}$ como se muestra en la figura, es decir, que una esquina cae en el lado opuesto y el doblez pasa por la otra esquina opuesta al lado. ¿Cuál es el valor de d ?



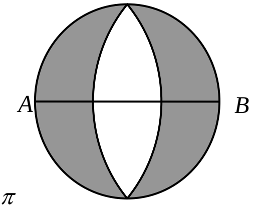
A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\sqrt{2}-1$ **C)** $\frac{7}{16}$ **D)** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ **E)** $\frac{\sqrt{2}}{3}$

9 Las siguientes escalas muestran la población de cinco ciudades *A*, *B*, *C*, *D* y *E* en 1997 y 2007. ¿Cuál de las cinco tiene un porcentaje de crecimiento más alto durante estos diez años?



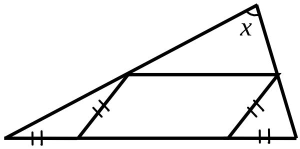
A) *A* **B)** *B* **C)** *C* **D)** *D* **E)** *E*

10 En la circunferencia de la figura, de radio 1 cm, *AB* es un diámetro. Hemos dibujado dos arcos del mismo radio, con centros *A* y *B*, que se cortan, como puedes observar, en puntos que están en la circunferencia. ¿Cuál es, en cm^2, él área sombreada?



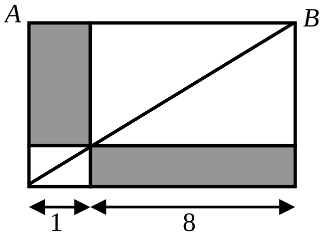
A) $\frac{\pi}{2}$ **B)** 1 **C)** $\pi - 1$ **D)** 2 **E)** $\frac{2\pi}{3}$

11 El dibujo que ves muestra un paralelogramo dentro de un triángulo. Si los segmentos marcados tienen igual longitud, ¿cuántos grados mide el ángulo x ?



A) 80º **B)** 85º **C)** 90º **D)** 95º **E)** 100º

12 ¿Qué fracción del área del rectángulo *ABCD* está sombreada?



A) $\frac{16}{81}$ **B)** $\frac{4}{9}$ **C)** $\frac{2}{9}$

D) $\frac{1}{8}$ **E)** $\frac{1}{9}$

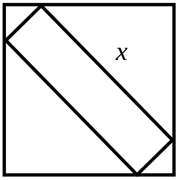
13 Si $x = \frac{111\,110}{111\,111}$, $y = \frac{222\,221}{222\,223}$, $z = \frac{333\,331}{333\,334}$, ¿qué afirmación de las siguientes es correcta?

A) $x < y < z$ **B)** $x < z < y$ **C)** $y < z < x$ **D)** $z < x < y$ **E)** $y < x < z$

14 Si *a* personas trabajando *b* horas diarias cada una, pintan *c* m^2 de pared, ¿cuántas horas debe trabajar al día cada una de *d* personas para pintar *e* m^2?

A) $\frac{abe}{cd}$ **B)** $\frac{abd}{ce}$ **C)** $\frac{abc}{de}$ **D)** $\frac{acd}{be}$ **E)** $\frac{ace}{bd}$

15 El dibujo muestra un rectángulo $1 \times x$ dentro de un cuadrado 10×10. ¿Cuál es el valor de *x*?



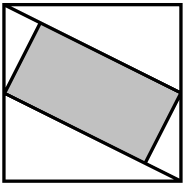
A) $10 + 2\sqrt{2}$ **B)** $10\sqrt{2} - 1$ **C)** $10\sqrt{2} - 2$

D) $10 + \sqrt{2}$ **E)** 12

16 El cociente entre la longitud y la anchura de una pantalla de televisión de las de antes es $\frac{4}{3}$, y ese cociente en las de pantalla plana es $\frac{16}{9}$. Si dos pantallas, una antigua y otra plana, tienen la misma área, el cociente (longitud pantalla plana)**:**(longitud pantalla antigua) es:

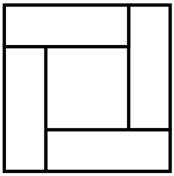
A) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **B)** $\frac{3}{2}$ **C)** $\frac{3}{\sqrt{2}}$ **D)** $\frac{4}{3}$ **E)** Nada de lo anterior

17 El dibujo que ves muestra un cuadrado y dos segmentos que unen vértices del cuadrado con el punto medio de un lado opuesto. Si la figura sombreada es un rectángulo, ¿qué fracción del área del cuadrado ocupa?



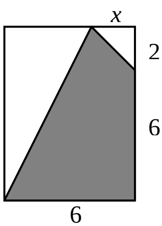
A) $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{2}{5}$ **C)** $\frac{3}{10}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{3}{8}$

18 Un cuadrado está dividido en cuatro rectángulos iguales y una cuadrado pequeño como se muestra en la figura. Si el área del cuadrado pequeño es $\frac{1}{4}$ del área del grande, ¿cuál es el cociente entre las longitudes de los lados de los rectángulos?



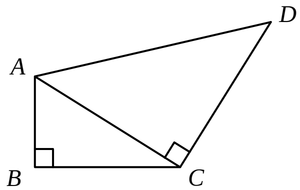
A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **B)** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** $\frac{1}{4}$

19 En el rectángulo de la figura, hemos sombreado tres cuartos de su área. ¿Cuál es el valor de *x*?



A) 2 **B)** 2,4 **C)** 3 **D)** 3,6 **E)** 4

20 En el cuadrilátero *ABCD* de la figura, la diagonal *AC* es bisectriz del ángulo *A*. Si $AB = \frac{7}{3}$ y $AD = \frac{21}{4}$, y los ángulos $A\hat{B}C$ y $A\hat{C}D$ son rectos, la longitud de dicha diagonal es:



A) $\frac{7}{2}$ **B)** 4 **C)** $\frac{17}{4}$ **D)** $\frac{193}{42}$ **E)** 5

21 Si $x^2 + x + 1 = 0$, ¿cuánto vale $x^2 + \frac{1}{x^2}$?

A) $\frac{1}{4} + \sqrt{3}i$ **B)** 1 **C)** $-\sqrt{3} - i$ **D)** -1 **E)** Nada de lo anterior

22 De los siguientes números hay uno sólo que es primo. ¿Cuál?

A) $1\,000^2 + 111^2$ **B)** $555^2 + 666^2$ **C)** $2\,007^2 - 2\,004^2$

D) $2\,007^2 + 2\,006^2$ **E)** $2\,007^2 + 2\,009^2$

23 Si *R* es el radio de la circunferencia circunscrita a un decágono regular de lado 1, ¿cuántas de las siguientes expresiones son iguales a *R*?

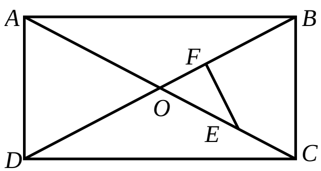
$$\frac{\cos 18^\circ}{sen\ 36^\circ}; \quad \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}; \quad \sqrt{\frac{1}{2\cdot(1-\cos 36^\circ)}}; \quad 2\cdot sen\ 54^\circ$$

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

24 Hace 22 años, la edad de Jorge era el cuádruple de la de Marta, pero hace 18 años era sólo el triple. ¿Cuántos años hace que era nada más que el doble?

A) 14 **B)** 8 **C)** 7 **D)** 6 **E)** 5

25 En el rectángulo *ABCD* de centro *O*, el punto *E* está en el segmento *OC* y *F* es el pie de la perpendicular de *E* a *OB*. Si *OF* =3 y *EF* = 4, el cociente $\frac{AB}{BC}$ es igual a:



A) $\frac{3}{4}$ **B)** 1 **C)** $\frac{4}{\sqrt{5}}$ **D)** $\frac{4}{3}$ **E)** 2

26 En el interior del triángulo equilátero *ABC* elegimos al azar un punto *P*. ¿Cuál es la probabilidad de que el ángulo *APB* sea obtuso?

A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **B)** $\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ **D)** $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}+\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{3}{4}$

27 En la sucesión 1, 3, 4, 7, 11, … se verifica, como ves, que cada término después de los dos primeros es la suma de los dos que le preceden. De las siguientes afirmaciones, ¿cuántas son verdaderas?
I. El 20º término es divisible por 2.
II. El 30º término es divisible por 3.
III. El 40º término es divisible por 4.
IV. El 50º término es divisible por 5.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

28 Si *b* es un número real que verifica $b^3 = b+1$, ¿cuál de las siguientes igualdades no es correcta?

A) $b^4 = b^2 + b$ **B)** $b^5 = b^4 + 1$ **C)** $b^4 = b^3 + b^2 - 1$

D) $b^2 + b + 1 = 1 + \frac{1}{b-1}$ **E)** $b^4 + b^3 = b^2 + 1$

29 En el triángulo isósceles *ABC* con $AB = AC$ y el ángulo *A* igual a 2α, las alturas que parten de *A* y *B* se cortan en el punto *P*. Si *E* es el pie de la altura que parte de *A*, ¿cuánto vale $\frac{PE}{AE}$?

A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $sen\ \alpha$ **D)** $\frac{1}{\cos\alpha}$ **E)** $tg^2\ \alpha$

30 Una bolsa contiene *m* bolas rojas y *n* bolas blancas. Elegimos al azar una bola, miramos su color y la devolvemos a la bolsa junto a *k* bolas de su mismo color. A continuación elegimos una segunda bola al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que esta segunda bola sea roja?

A) $\frac{m}{m+n}$ **B)** $\frac{n}{m+n}$ **C)** $\frac{m}{m+n+k}$ **D)** $\frac{m+k}{m+n+k}$ **E)** $\frac{m+n}{m+n+k}$

XIII^{a} OLIMPIADA de MAYO
Primer Nivel
Mayo de 2007

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

PROBLEMA 1

En un año que tiene 53 sábados, ¿qué día de la semana es el 12 de mayo?
Dar todas las posibilidades.

PROBLEMA 2

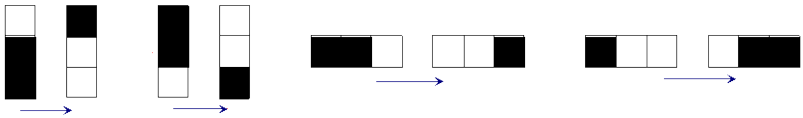
Sean $X = a1b9$ e $Y = 51ab$ dos números enteros positivos donde a y b son dígitos. Se sabe que X es múltiplo de un número positivo n de dos cifras e Y es el siguiente múltiplo de ese número n. Hallar el número n y los dígitos a y b. Justificar por qué no hay otras posibilidades.

PROBLEMA 3

Jorge elige 6 números enteros positivos distintos y escribe uno en cada cara de un cubo. Arroja su cubo tres veces.
La primera vez su cubo mostró el número 5 hacia arriba y además, la suma de los números de las caras laterales fue 20.
La segunda vez su cubo mostró el número 7 hacia arriba y además, la suma de los números de las caras laterales fue 17.
La tercera vez su cubo mostró el número 4 hacia arriba y además, todos los números de las caras laterales resultaron ser primos.
¿Cuáles son los números que eligió Jorge, y cómo los distribuyó en las caras del cubo? Analizar todas las posibilidades.
Nota: el 1 no es primo.

PROBLEMA 4

Un tablero de 7 × 7 tiene una lámpara en cada una de sus 49 casillas, que puede estar encendida o apagada. La operación permitida es elegir 3 casillas consecutivas de una fila o de una columna que tengan dos lámparas vecinas entre sí encendidas y la otra apagada, y cambiar el estado de las tres. Es decir,



Dar una configuración de exactamente 8 lámparas encendidas ubicadas en las cuatro primeras filas del tablero tales que, mediante una sucesión de operaciones permitidas, se llegue a tener una única lámpara encendida en el tablero y que ésta esté ubicada en la última fila. Mostrar la secuencia de operaciones que se utilizan para lograr el objetivo.

PROBLEMA 5

Se tiene un pentágono de papel, *ABCDE*, tal que

$$AB = BC = 3\text{cm.},\ CD = DE = 5\text{cm.},\ EA = 4\text{cm.},\ A\hat{B}C = 100^{\circ},\ C\hat{D}E = 80^{\circ}$$

Hay que dividir el pentágono en cuatro triángulos, mediante tres cortes rectos, de manera que con los cuatro triángulos se arme un rectángulo, sin superposiciones ni huecos. (Los triángulos se pueden girar y / o dar la vuelta)

XIIIª OLIMPIADA de MAYO
Segundo Nivel
Mayo de 2007

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

PROBLEMA 1
Determinar el mayor número natural que tiene todas sus cifras distintas y es múltiplo de 5, de 8 y de 11.

PROBLEMA 2
Sea $n > 2$ un entero par. En las casillas de un tablero de n x n se deben colocar fichas de modo que en cada columna la cantidad de fichas sea par y distinta de cero, y en cada fila la cantidad de fichas sea impar. Determinar la menos cantidad de fichas que hay que colocar en el tablero para cumplir esta regla. Mostrar una configuración con esa cantidad de fichas y explicar por qué con menos fichas no se puede cumplir la regla.

PROBLEMA 3
Ocho niños, todos de distintas estaturas, deben formar una fila ordenada de menor a mayor. Diremos que la fila tiene exactamente un error si hay un niño que está inmediatamente detrás de otro más alto que él, y todos los demás (salvo el primero de la fila) están inmediatamente detrás de uno más bajo. ¿De cuántas maneras los ocho niños pueden formar una fila con exactamente un error?

PROBLEMA 4
Alex y Bruno escriben, entre los dos, un número natural de 6 dígitos distintos. Cada uno, en su turno, escribe un dígito a la derecha del último dígito que escribió el otro. Empieza Alex con el primer dígito de la izquierda y termina Bruno con el último dígito de la derecha. (Está prohibido escribir un dígito que ya se usó).
Bruno gana si el número de 6 dígitos es primo. En caso contrario, gana Alex.
Determinar cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y explicar cómo debe hacer para ganar sin importar lo bien que juegue el otro.

PROBLEMA 5

En un triángulo *ABC*, $\hat{A} = 2\hat{C}$, y $2\hat{B} = \hat{A} + \hat{C}$. La bisectriz del ángulo $\hat{C}$ corta al lado *AB* en *E*, y *F* es el punto medio del segmento *AE*. La altura correspondiente al lado *BC* es *AD*. La mediatriz del segmento *DF* corta al lado *AC* en *M*.
Demostrar que *AM* = *CM*.

Relación de ganadores en la "XIII OLIMPIADA DE MAYO – 2007"

PRIMER NIVEL

	Apellidos y nombre	Centro	Localidad	Premio
1	Esteban de la Iglesia, Lorenzo	Colegio Fray Luis de León	Madrid	ORO
2	Mendizábal Roche, Jaime	IES Ramiro de Maeztu	Madrid	PLATA
3	Hernández Martín, Arturo	IES La Serna	Fuenlabrada	PLATA
4	Rodríguez-Toubes,Jaime	Colegio Retamar	Pozuelo	BRONCE
5	Sardinero Meirás, Paula	Colegio Virgen de Europa	Majadahonda	BRONCE
6	Pardo García, Marcos	Colegio Joyfe	Madrid	BRONCE
7	Pliego García, Javier	IES San Juan Bautista	Madrid	BRONCE
8	Alonso Lorenzo, Aitor	IES Diego Velázquez	Torrelodones	MENCIÓN
9	Barbas Espá, Fernando	IES San Juan Bautista	Madrid	MENCIÓN
10	Peña Castillo, Diego	Colegio Amor Misericordioso	Madrid	MENCIÓN

	SEGUNDO NIVEL	Centro	Localidad	
1	Herradón Cueto, Moisés	Colegio Brains	Alcobendas	ORO
2	Gago Encinas, Fernando	Colegio San Gabriel	Madrid	PLATA
3	Berenguer Verdú, Ricardo	IES La Creveta	Onil	PLATA
4	Blázquez García, Rodrigo	IES Gran Capitán	Madrid	BRONCE
5	Sánchez Díaz, Jesús María	Colegio Vedruna	Madrid	BRONCE
6	Fernández Alcázar, Andrés	Colegio SEK Ciudalcampo	S S de los Reyes	BRONCE
7	Sánchez Salvador, José L.	IES María Guerrero	Collado Villalba	BRONCE
8	Terriza Díaz, Ignacio	Colegio Virgen de Europa	Boadilla	MENCIÓN
9	Fernández Rincón, Sergio	IES Antonio Machado	Alcalá d Henares	MENCIÓN
10	Barbed Martín, Gonzalo	Colegio El Prado	Madrid	MENCIÓN

SOLUCIONES 13ª OLIMPIADA DE MAYO – 2007

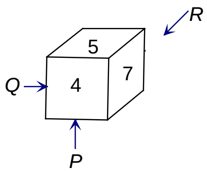
Primer Nivel

Problema 1. Solución
En un año hay 365 días si febrero tiene 28 días, y 366 días si es bisiesto (febrero tiene 29 días).
Como 365 = 7·52 + 1, el año comienza en sábado (hay 53 sábados y 52 de cada uno de los demás días). Hasta el 12 de mayo hay 31 + 28 + 31 + 30 + 12 = 132 días.
Como 132 = 7·18 + 6, estos días ocupan 18 semanas completas, de sábado a viernes, y 6 días más. Luego el 12 de mayo es jueves.
Si el año es de 366 días, el 1 de enero es viernes o sábado, y hasta el 12 de mayo hay 132 + 1 = 133 días. Si el año comienza en viernes, de nuevo el 12 de mayo es jueves. Si el año comienza en sábado, el 12 de mayo es viernes.

Problema 2. Solución
Como X e Y son múltiplos consecutivos de n, tenemos $X = Y + n$, siendo n u número de dos dígitos. Por lo tanto, dado que X e Y tienen el mismo dígito en las centenas, debe ser $a = 5$.
Luego $X = 51b9$ e $Y = 515b$, de modo que $n = Y – X = 5b – b9$.
Para que este número sea positivo y de dos dígitos, b debe ser 0, 1, 2 o 3.
Si $b = 0$ se obtiene $n = 50 – 9 = 41$. Pero en este caso, $X = 5109 = 124·41 + 25$ no es múltiplo de 41.
Si $b = 1$, se obtiene $n = 51 – 19 = 32$, y dado que $X = 5119$ es impar, no puede ser múltiplo de 32.
Si $b = 2$, se obtiene $n = 52 – 29 = 23$. En este caso, $X = 5129 = 23·223$, $Y = 5152 = 23·224$.
Si $b = 3$, se obtiene $n = 53 – 39 = 14$, y dado que $X = 5139$ es impar, no puede ser múltiplo de 14.
Por lo tanto, la única solución es $n = 23$, $a = 5$, $b = 2$.

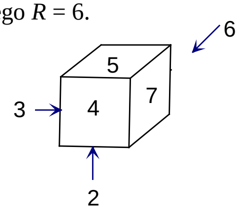
Problema 3. Solución
Primero analizamos las posiciones relativas en las que deben estar los números 4, 5 y 7 en el cubo.
Los números 5 y 7 no pueden estar en caras opuestas, pues si así fuera, la suma de los otros cuatro números sería 20 y 17 a la vez. Por lo tanto los números 5 y 7 deben estar en caras adyacentes (que comparten una arista)
Analicemos ahora si es posible que los números 4 y 5 estén en caras opuestas. Si así fuera, en las caras adyacentes al 4 y al 5 tendríamos cuatro números primos p_1, p_2, p_3 y 7 que sumen 20, es decir, $p_1 + p_2 + p_3 = 13$. Los primos p_1, p_2 y p_3 deben ser los tres impares, pues hay un único primo par, y entonces $p_1 + p_2 + p_3 = 15 > 13$. Por lo tanto, 4 y 5 no pueden estar en caras opuestas.

Análogamente, si 4 y 7 están en caras opuestas, al 4 y al 7 tendríamos cuatro números primos $q_1, q_2, q_3, 5$ que suman 17, es decir $q_1 + q_2 + q_3 = 12$. De aquí deducimos que alguno de ellos, digamos q_1 debe ser par, pero como es primo, debe ser $q_1 = 2$. Luego $q_2 + q_3 = 10$. Por otro lado, ninguno de los números q_1 y q_2 puede ser 5 o 7, pues ya están escritos en otras caras. De esto se deduce que la ecuación anterior no tiene soluciones en los números primos. Por lo tanto, 4 y 7 no pueden estar en caras opuestas.
Hasta aquí, sabemos que los números 4, 5 y 7 deben estar en caras que tengan un vértice común.
Designemos con *P, Q* y *R* los números que van en las caras que indica la figura:



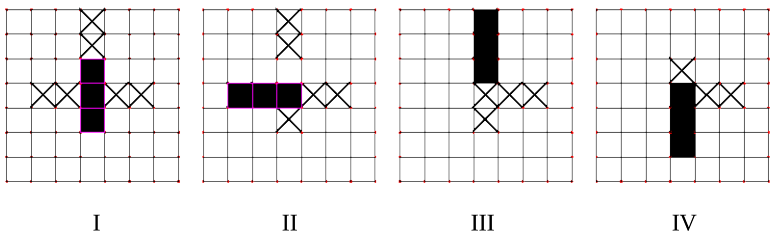
Como *P* y *Q* son primos y además *P* + *Q* = 9 y *P* + *R* = 8, se deduce que *P* y *Q* son de diferente paridad y *P* < *Q*, en consecuencia, *P* = 2 y *Q* = 3. Luego *R* = 6.

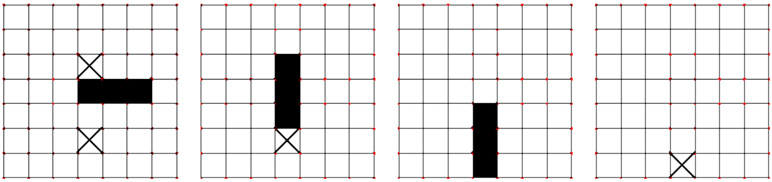
El dado es



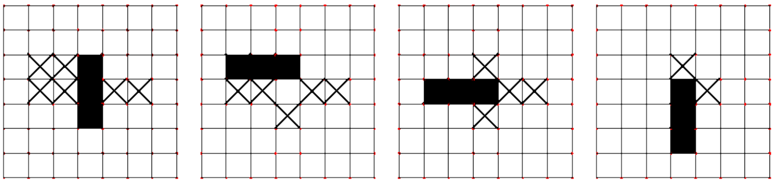
Se ve fácilmente que este dado satisface todas las condiciones del problema. (Solamente hay una posibilidad para la distribución de los números que pensó Jorge).

Problema 4. Solución
Damos dos configuraciones y las transformaciones paso a paso. En cada una de ellas, las cruces indican las lámparas encendidas y las tres casillas grises son las que intervienen en la operación.

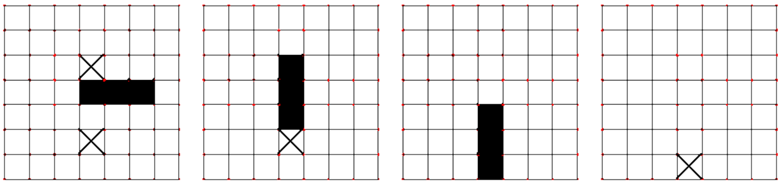




V VI VII VIII



I II III IV

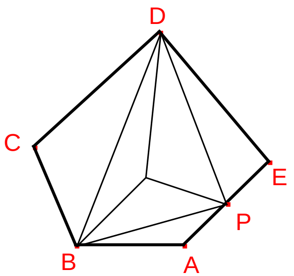


V VI VII VIII

Problema 5. Solución

Sea P el punto medio del lado EA. Hacemos los cortes a lo largo de DP, BP y BD. Como la suma de los ángulos del pentágono es 540º, resulta que

$$B\hat{C}D + D\hat{E}A + E\hat{A}B = 540^{\circ} - A\hat{B}C - C\hat{D}E = 540^{\circ} - 100^{\circ} - 80^{\circ} = 360^{\circ}$$

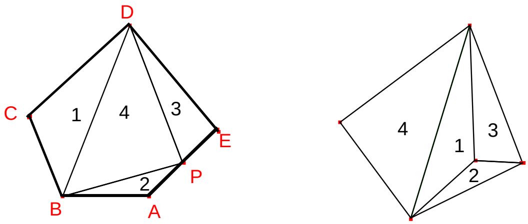


Además $AP = PE, AB = BC$ y $CD = DE$.

En consecuencia, los triángulos BAP, DEP y BCD se pueden unir con un vértice común en A, E y C. Los lados del triángulo que resulta son BP, DP y BD, o sea, iguales a los del triángulo BPD. Por lo tanto el triángulo que se arma es igual al BPD. Entonces,

$$B\hat{P}D = B\hat{P}A + D\hat{P}E = \frac{1}{2} A\hat{P}E = 90^{\circ} .$$

Como el triángulo *BPD* es rectángulo, con dos copias de *BPD* se arma un rectángulo.



Segundo Nivel

Problema 1. Solución

Vamos a demostrar que el mayor número es 9876513240. Para ello, observemos primero que un número en que todos sus dígitos son distintos no tiene más de 10 dígitos. Como el número indicado tiene exactamente 10 dígitos, basta analizar los números de la forma 98765*abcde* que tengan las propiedades del problema y quedarnos con el mayor de ellos (pues los números de 10 dígitos distintos que no comiencen en 98765 serán menores que los que analizamos).

Como el número que buscamos es múltiplo de 5 (dígito usado), $e = 0$, y como sus dígitos son distintos, $\{a,b,c,d\} = \{1,2,3,4\}$. (1)

Para que 98765*abcd*0 sea múltiplo de 11, debe ocurrir que

$$9 - 8 + 7 - 6 + 5 - a + b - c + d - 0 = 7 + (b + d) - (a + c)$$

sea múltiplo de 11.

De (1) tenemos que $3 \leq b + d \leq 7$ y $3 \leq a + c \leq 7$. Luego

$$3 = 7 + 3 - 7 \leq 7 + (b + d) - (a + c) \leq 7 + 7 - 3 = 11,$$

de donde la única posibilidad es que $7 + (b + d) - (a + c) = 11$, es decir $(b + d) - (a + c) = 4$.

De aquí deducimos $b + d = 7$ y $a + c = 3$, de donde $\{b,d\} = \{3,4\}$ y $\{a,c\} = \{1,2\}$ (por (1)).

Como el número es también múltiplo de 4, d es par. Deducimos que $d = 4$ y $b = 3$, y como es múltiplo de 8, $cde = c40$ es múltiplo de 8. Entonces $c = 2$ y $a = 1$, es decir, 9876513240 es el único número de la forma que buscamos, así que será el mayor.

Problema 2. Solución

Como en cada columna la cantidad de fichas es par y mayor que 0, en cada columna hay al menos dos fichas, y en todo el tablero la cantidad de fichas es mayor o igual que $2n$.

Veamos ahora que es posible colocar $2n$ fichas en las condiciones del problema. Por ejemplo, una en cada casilla de la diagonal principal (son n fichas), más una ficha en cada casilla de la última fila, desde la segunda hasta la antepenúltima (son $n - 2$ fichas más). Más dos fichas en la penúltima fila: una en la primera y otra en la última columna.

De este modo, todas las columnas tienen exactamente dos fichas; hay $n - 2$ filas con una ficha exactamente, una fula, la penúltima, con 3 fichas, y la última fila tiene $n - 1$ fichas.

Problema 3. Solución

Numeramos los niños en orden creciente de estatura: 1, 2, 3, … , 8.

Si el error se produce entre el primero y el segundo niño de la fila, el primero es alguno de los niños distintos de 1, desde 2 hasta 8 (si no, no habría error), y una vez elegido el

primero, los otros siete se ordenan de menor a mayor detrás del elegido. Hay siete filas posibles con el error entre el primero y es segundo de la fila.
Si el error se produce entre el segundo y el tercero de la fila, los dos primeros niños de la fila pueden ser cualesquiera excepto el par formado por el 1 y el 2 (en cuyo caso no habría error). Los demás se ordenan de menor a mayor detrás del segundo de la fila.

En este caso hay $\binom{8}{2}-1=\frac{8\cdot 7}{2}-1=27$ filas posibles.

Si el error se produce entre el tercero y el cuarto de la fila, los tres primeros de la fila pueden ser cualesquiera tres niños excepto el trío formado por el 1, el 2 y el 3 (en cuyo caso no habría error). Los demás se ordenan de menor a mayor detrás del tercero de la fila.

En este caso hay $\binom{8}{3}-1=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2}-1=55$ filas posibles.

Análogamente, si el error se produce entre el cuarto y quinto de la fila, hay $\binom{8}{4}-1=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2}-1=69$ posibles filas; con el error entre el quinto y el sexto hay $\left(\frac{8}{5}\right)-1=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2}-1=55$ filas; con el error entre el sexto y el séptimo hay $\binom{8}{6}-1=\frac{8\cdot 7}{2}-1=27$ filas posibles, y con el error entre el séptimo y el octavo hay siete filas posibles.

Son en total 7 + 27 + 55 + 69 + 55 + 27 + 7 = 243 filas con exactamente un error.

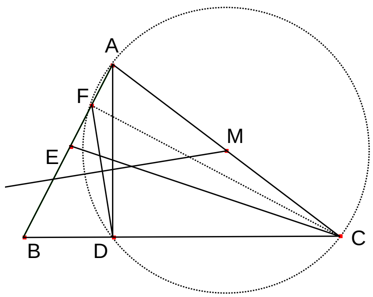
Problema 4. Solución
Afirmamos que Alex siempre gana.
Imaginemos que los dígitos están divididos en dos conjuntos:

$$X = \{1,3,7,9\}; \quad Y = \{0,2,4,5,6,8\}$$

Si el último dígito del número es un dígito de Y, entonces el número es compuesto, ya que es par o múltiplo de 5.
Daremos una estrategia mediante la cual Alex logra que o bien la suma de los 6 dígitos sea múltiplo de3 o bien el último dígito elegido esté en Y.
En su primera jugada Alex elige $a_1 = 3$.
Si el primer dígito que escribe Bruno, b_1, es 9, entonces Alex elige en su siguiente turno $a_2 = 7$. Si luego Bruno elige $b_2 = 1$, no importa qué número elija Alex a continuación, ya que no quedan más números en X disponibles, y en su última jugada Bruno elegirá forzosamente un número de Y.

Si en cambio b_2 no es 1, Alex elige a_3 = 1, y de nuevo Bruno tiene que elegir su último número entre los de Y. En ambos casos, gana Alex.
Si b_1 (primer número elegido por Bruno) no es 9, Alex elige en su segundo turno a_2 = 9. Tenemos entonces que a_1 = 3, a_2 = 9, a_3 son los números que escribe Alex (son los números primero, tercero y quinto del número de seis cifras) y b_1, b_2 y b_3 son los dígitos que escribe Bruno (segundo, cuarto y sexto del número de seis cifras).
El objetivo de Alex es que $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3$ sea múltiplo de 3.
Como a_1 = 3, a_2 = 9 ya son múltiplos de 3, la condición se reduce a que $b_1 + b_2 + a_3 + b_3$ sea múltiplo de 3.
Si $b_1 + b_2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$, entonces Alex elige a_3 =, 5 u 8 (al menos uno de ellos está disponible, pues Alex no usó ninguno, y como Bruno solo hizo dos jugadas no puede haber usado los tres).
Si Bruno elige b_3 en Y ya vimos que gana Alex; las otras dos posibilidades son elegir b_3 1 ó 7; en los dos casos, $b_3 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$, luego $b_1 + b_2 + a_3 + b_3 \equiv 0 + 2 + 1 (\mathrm{mod}\, 3)$, y de nuevo gana Alex. Este caso corresponde a las siguientes elecciones de b_1 y b_2, en algún orden: 0 y 6, 2 y 4, 4 y 5, 4 y 8, 1 y 2, 1 y 5, 1 y 8, 2 y 7, 5 y 7, 7 y 8.
Si $b_1 + b_2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$, entonces Alex elige a_3 = 1, 4 o 7. Igual que antes, al menos uno de ellos estará disponible.
Si Bruno elige b_3 en Y, gana Alex; las otras posibilidades son elegir b_3 = 1 ó 7. En los dos casos $b_3 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$, y entonces $b_1 + b_2 + a_3 + b_3 \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$, y de nuevo gana Alex. Este caso corresponde a las elecciones de b_1 y b_2, en algún orden: 0 y 4, 2 y 5, 2 y 8, 4 y 6, 5 y 8, 0 y 1, 1 y 6, 0 y 7, 7 y 6.
Por último, si $b_1 + b_2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3)$, entonces Alex elige a_3 = 0 ó 6 (al menos uno de ellos estará disponible, pues Alex no usó ninguno de ellos, y como 0 + 2 no es congruente con 2 módulo 3, Bruno no pudo usar ambos). Si Bruno elige b_3 en Y, (estará obligado a hacerlo si b_1 y b_2 son 1 y 7, en algún orden), gana Alex; las otras posibilidades son elegir b_3 = 1 ó 7; en los dos casos $b_3 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$, luego $b_1 + b_2 + a_3 + b_3 \equiv 2 + 0 + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$, y de nuevo gana Alex. Este caso corresponde a las siguientes elecciones de b_1 y b_2, en algún orden:0 y 2, 0 y 5, 0 y 8, 2 y 6, 5 y 6, 6 y 8, 1 y 4, 1 y 7, 4 y 7)
Hemos mostrado que para todas las posibles jugadas de Bruno Alex tiene estrategia para ganar.

Problema 5. Solución I



Tenemos

$$\hat{A} = 2\hat{C}, \hat{B} = \frac{2\hat{C}+\hat{C}}{2} = \frac{3\hat{C}}{2},$$

y como

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 2\hat{C} + \frac{3\hat{C}}{2} + \hat{C} = \frac{9\hat{C}}{2} = 180^{o},$$

resulta que $\hat{C} = 40^{o}$, $\hat{B} = 60^{o}$ y $\hat{A} = 80^{o}$.

Dado que $A\hat{C}E = 20^{o}$ y $E\hat{A}C = 80^{o}$, tenemos que

$A\hat{E}C = 180 - A\hat{C}E - E\hat{A}C = 80^{o} = E\hat{A}C$.

Luego el triángulo *AEC* es isósceles. Entonces la mediana *CF* es también altura, y resulta perpendicular a *AB*.

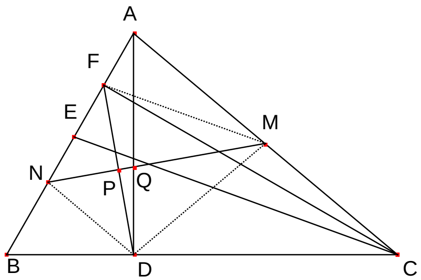
Los ángulos $C\hat{F}A$ y $C\hat{D}A$ son rectos, así que la circunferencia de diámetro *AC* pasa por *F* y por *D*. Como *M* pertenece a la mediatriz de *FD*, equidista de *F* y de *D*. Además *M* pertenece al diámetro *AC*, por lo tanto es el centro de la circunferencia y resulta *AM* = *MC*.

Solución II

Como en la solución I se obtiene que $\hat{C} = 40^{o}$, $\hat{B} = 60^{o}$ y $\hat{A} = 80^{o}$ y $CF \perp AB$.

Luego en el triángulo *ACD*, $C\hat{A}D = 180^{o} - 90^{o} - 40^{o} = 50^{o}$.

Los triángulos rectángulos *ABD* y *CBF* son semejantes, pues comparten el ángulo en *B*.



Entonces $\frac{BD}{BF} = \frac{BA}{BC}$. De esta proporción resulta que los triángulos *ABC* y *DBF*, que comparten el ángulo en *B*, también son semejantes. Por lo tanto $B\hat{D}F = 80^{o}$ y $B\hat{F}D = 40^{o}$.

Sea *P* el punto medio de de *DF* y *N*, *Q* los puntos de intersección de la mediatriz de *DF* con *AB*, *AD* respectivamente. En el triángulo rectángulo *NPF* se tiene que

$$P\hat{N}F = 180^{o} - 40^{o} - 90^{o} = 50^{o}$$

Como *D* es el simétrico de *F* respecto de *MN* se deduce que $P\hat{N}D = P\hat{N}F = 50^{o}$. (1)

Además, el triángulo *AMN* es isósceles con *AM* = *AN*, pues

$A\hat{M}N = 180 - M\hat{A}N - A\hat{N}M = 180º–80º–50º = 50º$ (2)

De (1) y (2) se obtiene que $M\hat{N}D = A\hat{M}N = 50,$ por tanto *AC* y *ND* son paralelas. Notemos además que *AQ* = *MQ*, pues $M\hat{A}Q = A\hat{M}Q = 50º$.

Por el teorema de Thales, $\dfrac{AD}{AQ} = \dfrac{MN}{MQ}$, y resulta *AD* = *MN*.

Ahora los triángulos *MAD* y *AMN* son iguales pues *AD* = *MN*, $M\hat{A}D = A\hat{M}N = 50º$, y comparten el lado *AM*. En consecuencia, el triángulo *MAD* es isósceles con *AM* = *MD* (pues *AMN* es isósceles). Esto implica que *M* es el punto medio de *AC*. En efecto, en el triángulo rectángulo *ACD*, como $M\hat{A}D = M\hat{D}A$, resulta que $M\hat{D}C = 90 - M\hat{D}A = M\hat{C}D$ Luego *MD* = *MC*, y dado que *AM* = *MD*, se obtiene *AM* = *MC*.

Solución III

Como en la solución I se obtiene que $\hat{C} = 40º$, $\hat{B} = 60º$ y $\hat{A} = 80º$ y $CF \perp AB$.
Como en la solución II, se obtiene que los triángulos *ABC* y *DBF* son semejantes.

Entonces $B\hat{D}F = B\hat{A}C = 80$, y resulta que $A\hat{D}F = 90º–80º = 10º$.
Sean *N*, *P* y *Q* los puntos definidos en la solución II. Los triángulos rectángulos *DPQ* y *CFA* son semejantes, pues $Q\hat{D}P = 10º$ y $A\hat{C}F = 90 - C\hat{A}F = 10º$.

Entonces $\dfrac{QD}{PD} = \dfrac{AC}{CF}$. (1)

En el triángulo rectángulo *NPF* se tiene que $P\hat{N}F = 180º–40º–90º = 50º$.

En el triángulo *AMN*, $A\hat{M}N = 180 - M\hat{A}N - A\hat{N}M = 180º–80º–50º = 50º$, por lo tanto, es isósceles con *AM* = *AN*. (2)

Los triángulos *NQA* y *FDC* son semejantes, pues $N\hat{Q}A = 180º–50º–30º = 100$, $F\hat{D}C = F\hat{D}A + A\hat{D}C = 10º+90º = 100º$ y $D\hat{C}F = N\hat{A}Q = 30º$.

Luego $\dfrac{AN}{CF} = \dfrac{QN}{DF}$. (3)

Veamos que el triángulo *NDQ* es isósceles. Tenemos que $P\hat{N}D = P\hat{N}F = 50º$ y $P\hat{D}N = P\hat{F}N = 40º$, pues *D* y *F* son simétricos respecto de *MN*. Luego $Q\hat{N}D = P\hat{N}D = 50º$ y $Q\hat{D}N = 10º+40º = 50º$.
Por lo tanto, *QN* = *QD* (4)

De (3) y (4) se obtiene $\frac{AN}{CF}=\frac{QN}{DF}=\frac{QD}{DF}$. Como *DF* = 2*PD*, esto implica que $\frac{AN}{CF}=\frac{QD}{2PD}$, y ahora por (1) resulta que $\frac{AN}{CF}=\frac{QD}{2PD}=\frac{AC}{2CF}$.

Luego $AN=\frac{1}{2}AC$, y de (2) se obtiene $AM=\frac{1}{2}AC$, es decir, *AM* = *MC*.

Dirección General de Mejora de la Calidad de la Enseñanza
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN
Comunidad de Madrid

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Consejo Social de la UCM

sm

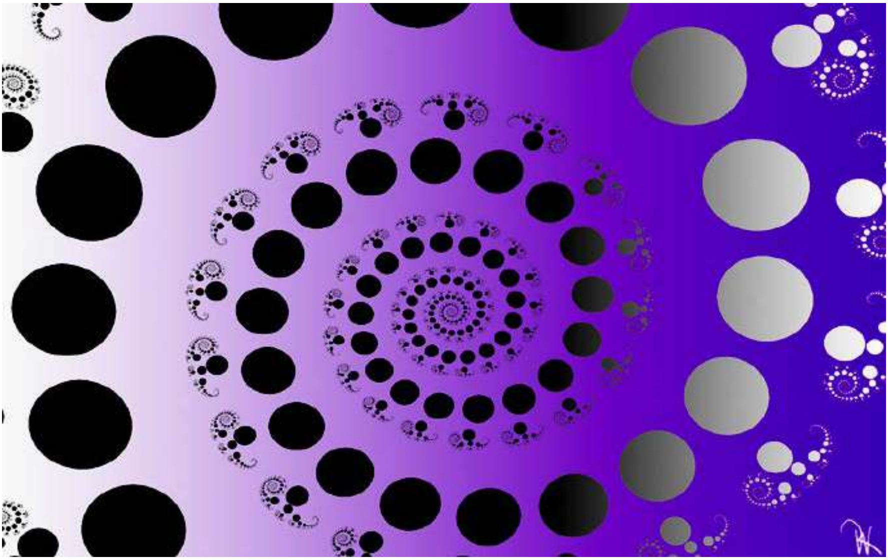
ANAYA

El Corte Inglés

sas.

EDUCAMADRID

YALOS INSTRUMENTS, S.L.



XIII Concurso de Primavera de

MATEMÁTICAS

2009

Comunidad de Madrid

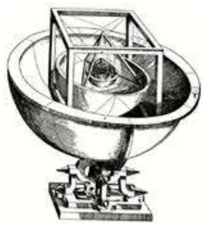
Comité organizador del Concurso de Primavera

Juan Jesús Donaire Moreno
Jesús García Gual
Joaquín Hernández Gómez
Alfredo Martínez Sanz
Víctor Manuel Sánchez González
Javier Soler Areta
José María Sordo Juanena

Luis Ferrero de Pablo
María Gaspar Alonso-Vega
Francisco López Álvarez
María Moreno Warleta
Merche Sánchez Benito
Esteban Serrano Marugán

2009
Año Internacional
de la Astronomía

41 · 49 = ***2009***
42 · 48 = 2016
43 · 47 = 2021
44 · 46 = 2024
45 · 45 = 2025



Presentación

¡Aquí seguimos en nuestro trece concurso!, dispuestos siempre a dar más por menos en un año de muchas rebajas. Y aunque el año nace feo, eppure si muove!

¡Adornémosle con nuestro esfuerzo!

A nosotros no nos asustan los problemas, burla, burlando van doce concursos delante.

Comité Organizador

Agradecimientos:

- *A los alumnos, a sus profesores y a sus padres.*
- *A la Facultad de Matemáticas, al Consejo Social y al Vicerrectorado de Alumnos de la U.C.M.*
- *A la Fundación SAS*
- *A la Dirección General de Mejora de la Calidad de la Enseñanza.*
- *A Educamadrid*
- *A las editoriales* Grupo ANAYA y Ediciones S.M.
- *Al grupo empresarial* El Corte Inglés.

XII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: Día 27 de febrero de 2008

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ (☒) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA.**
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
www.profes.net (SM) - Grupo ANAYA - El Corte Inglés
Yalos Instruments, S.L. - SAS

1 $0{,}7777 + 0{,}0777 + 0{,}0077 + 0{,}0007 =$

A) 0,77777 **B)** 0,8638 **C)** 0,8418 **D)** 2,9247 **E)** 0,8888

2 Los números *a*, *b*, *c* y *d* cumplen que:

$527 - a = 305$ $b - 109 = 210$ $2047 : c = 23$ $d : 17 = 20$

¿Cuánto vale $a + b + c + d$?

A) 1000 **B)** 2008 **C)** 752 **D)** 970 **E)** 1580

3 En un puesto del Rastro me cambian 10 de mis cromos repes por tres nuevos y en otro el cambio es 15 por 4. Si tengo 58 cromos repes, ¿cuántos cromos nuevos puedo conseguir como mucho?

A) 19 **B)** 18 **C)** 17 **D)** 16 **E)** 15

4 Observa estas dos sumas en las que cada símbolo representa una cifra.
¿Cuál es el valor de ▲ + ✷?

A) 9 **B)** 14 **C)** 10 **D)** 13 **E)** 11

5 ¿Cuánto suman los números de esta tabla?

A) 225 **B)** 235 **C)** 245 **D)** 255

E) 275

1	**2**	**3**	**4**	**5**
2	**4**	**6**	**8**	**10**
3	**6**	**9**	**12**	**15**
4	**8**	**12**	**16**	**20**
5	**10**	**15**	**20**	**25**

6 ¿Cuál es el mayor número que al dividirlo entre 28 nos da que el cociente es igual al resto?

A) 29 **B)** 4018 **C)** 4030054 **D)** 783 **E)** 812

7 ¿Qué palabra debes incluir en la siguiente frase para que, una vez escrita, sea verdadera?

EN ESTA EXTRAÑA FRASE APARECE $\boxed{}$ VECES LA VOCAL E.

A) OCHO **B)** NUEVE **C)** DIEZ **D)** ONCE **E)** DOCE

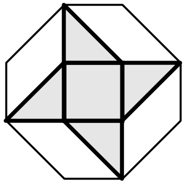
8 ¿Cuántos divisores tiene 120?

A) 8 **B)** 2 **C)** 6 **D)** 12 **E)** 16

9 ¿Cuántos números comprendidos entre 2008 y 8002 son múltiplos de 3?

A) 1998 **B)** 2008 **C)** 1996 **D)** 2000 **E)** 2004

10 En la figura vemos un molinillo de viento formado por un cuadrado y cuatro triángulos rectángulos isósceles, que está inscrito en un octógono. Si el perímetro del octógono es de 12 m, el perímetro del molinillo, en metros, es:



A) 6 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10

E) 12

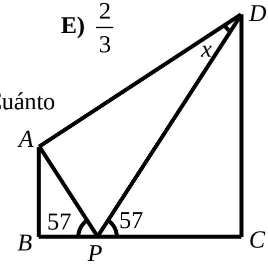
11 María y Juan hacen la misma colección de cromos que consta de 240 cromos. María tiene 192 diferentes y Juan 160. Juntando sus cromos les faltarían aún 10 cromos para acabarla. ¿Cuántos cromos tiene María que no tiene Juan?

A) 32 **B)** 36 **C)** 38 **D)** 48 **E)** 70

12 En 5ºA hay 20 alumnos y en 5ºB, 25. La proporción de chicas en 5ºA es de $\frac{1}{2}$ y en 5ºB de $\frac{3}{5}$. ¿Cuál es la proporción de chicas en 5º?

A) $\frac{5}{9}$ **B)** $\frac{3}{5}$ **C)** $\frac{4}{7}$ **D)** $\frac{7}{10}$ **E)** $\frac{2}{3}$

13 Los tres triángulos de la figura son rectángulos. ¿Cuánto mide el ángulo x?



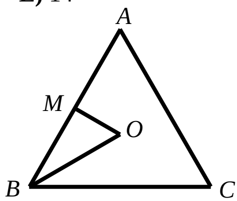
A) 57º **B)** 33º **C)** 39 º **D)** 27º

E) 24º

14 Si un prisma tiene 42 aristas, ¿cuántas caras tiene?

A) 21 **B)** 20 **C)** 18 **D)** 16 **E)** 14

15 El triángulo equilátero ABC tiene 24 cm^2 de área. O es el centro del triángulo y M el punto medio del lado AB. ¿Cuál es, en cm^2, el área del triángulo BOM?



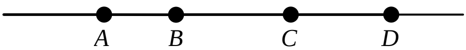
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6

E) 8

16 Estoy pensando en un número par menor que 200 y atención: si lo divides entre 11 da de resto 1 y si lo divides entre 9 da de resto 0. ¿Has averiguado ya el número? Pues ahora, multiplica sus cifras y dime cuánto sale:

A) 81 **B)** 16 **C)** 12 **D)** 2 **E)** 0

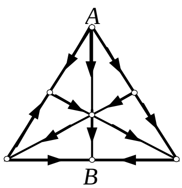
17 Sobre una línea recta hemos marcado cuatro puntos *A*, *B*, *C*, *D*, como indica el dibujo:



La distancia entre *A* y *C* son 12 m; y entre *B* y *D*, 18 m. ¿Qué distancia, en metros, separa los puntos medios de los segmentos *AB* y *CD*?

A) 15 **B)** 12 **C)** 18 **D)** 6 **E)** 9

18 Moviéndose en el sentido de las flechas y sin pasar dos veces por el mismo camino, se quiere ir de *A* hasta *B*. ¿De cuántas formas distintas se puede hacer?



A) 10 **B)** 9 **C)** 3 **D)** 15 **E)** 8

19 Esteban reparte entre sus amigos una bolsa de caramelos. Si le diera 25 caramelos a cada uno, le sobrarían 5, pero como a su amiga Felisa no le gustan los caramelos, le da un bombón y al resto les da 28 caramelos a cada uno y le sobran 6. ¿Cuántos caramelos tenía Esteban?

A) 230 **B)** 96 **C)** 200 **D)** 500 **E)** 120

20 Con dos cuadrados iguales y dos triángulos rectángulos iguales hemos formado tres figuras. Si el perímetro de la figura I es de 74 cm, el de la figura II es 82 cm y el de la figura III es de 84 cm, ¿cuál es, en cm^2, el área del triángulo?

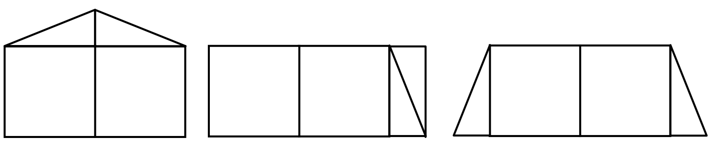


Figura I Figura II Figura III

A) 18 **B)** 20 **C)** 24 **D)** 30 **E)** 36

21

Las barras de la figura I tienen todas el mismo ancho. La más pequeña es un cuadrado y la diferencia de alturas entre dos consecutivas es de 10 cm. En la figura II están las mismas barras pero en otro orden y su perímetro es 270 cm. ¿Cuál es el área, en cm^2, del rectángulo mayor?

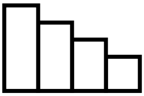


Figura I

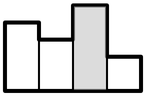


Figura II

A) 400 **B)** 931 **C)** 1000 **D)** 1040 **E)** 1421

22

Radio Lolailo decide poner 4 rumbitas por hora. El número de rumbitas que emitirá Radio Lolailo entre las 6 de la mañana del martes hasta las 7 de la tarde del miércoles de la misma semana es:

A) 144 **B)** 96 **C)** 100 **D)** 92 **E)** 148

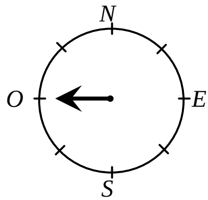
23

Si dos lados de un triángulo miden 5 cm y 7 cm, el tercer lado no puede medir

A) 11 cm **B)** 10 cm **C)** 6 cm **D)** 3cm **E)** 1 cm

24

Una ruleta tiene una flecha que marca el oeste, como se indica en la figura. Si hacemos girar la flecha dos vueltas y cuarto en el sentido de las agujas del reloj; y luego tres vueltas y tres cuartos en el sentido contrario, ¿qué dirección marca la flecha después de estos movimientos?



A) Norte **B)** Este **C)** Sur **D)** Oeste

E) Noroeste

25

En el bar de mi colegio, un bocata de jamón y un refresco cuestan lo mismo que tres refrescos y dos paquetes de gusanitos. Cinco paquetes de gusanitos cuestan lo mismo que dos refrescos. ¿Cuántas bolsas de gusanitos podré comprar con el dinero de un bocata de jamón?

A) 10 **B)** 5 **C)** 7 **D)** 6 **E)** 4

XII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE : Día 27 de febrero de 2008

NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ ($\boxtimes$) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA.**
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

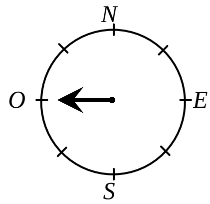
CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
www.profes.net (SM) - Grupo ANAYA - El Corte Inglés
Yalos Instruments, S.L. - SAS

1 Una ruleta tiene una flecha que marca el oeste, como se indica en la figura. Si hacemos girar la flecha dos vueltas y cuarto en el sentido de las agujas del reloj; y luego tres vueltas y tres cuartos en el sentido contrario, ¿qué dirección marca la flecha después de estos movimientos?

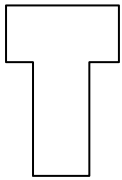


A) Norte **B)** Este **C)** Sur **D)** Oeste **E)** Noroeste

2 El círculo *X* tiene 5 cm de radio, el círculo *Y* tiene un perímetro de longitud 8π cm y el círculo *Z* tiene de área 9π cm^2. Colocados de menor a mayor tamaño resulta ser:

A) *X, Y, Z* **B)** *Z, X, Y* **C)** *Y, X, Z* **D)** *Z, Y, X* **E)** *X, Z, Y*

3 La letra ***T*** de la figura está formada por dos rectángulos idénticos, de dimensiones 2×4 cm, colocados como se muestra. ¿Cuánto mide, en cm, el perímetro de dicha letra?



A) 12 **B)** 16 **C)** 20 **D)** 22 **E)** 24

4 La tabla adjunta muestra los resultados de los 800 estudiantes de 1º y 2º de ESO que participaron en un concurso de problemas análogo a éste.

	Puntuación mayor o igual que 80 puntos	Puntuación menor que 80 puntos	Total
Chicos	**?**	**104**	**?**
Chicas	**232**	**?**	**384**
Total	**544**	**256**	**800**

¿Qué porcentaje de los chicos participantes obtuvo una puntuación mayor o igual a 80 puntos?

A) 39% **B)** 38% **C)** 52% **D)** 55% **E)** 75%

5 ¿Cuántos números de dos cifras verifican que la suma de sus cifras es un cuadrado perfecto?

A) 13 **B)** 16 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 19

6 En un acuario de base rectangular de dimensiones 100 cm por 40 cm y altura 50 cm, el agua llega hasta una altura de 37 cm. Si sumergimos totalmente una piedra de 1000 cm^3 de volumen, ¿hasta qué altura, en cm, subirá el agua?

A) 37,25 **B)** 37,5 **C)** 38 **D)** 38,25 **E)** 39,5

7 En un torneo de tenis de 6 jugadores, cada jugador juega un partido con cada uno de los restantes. Alicia ganó 4 partidos, Beatriz 3, Carlos 2, David 2 y Emilio también 2. ¿Cuántos partidos ganó Félix?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

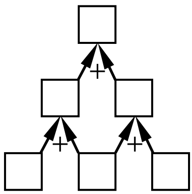
8 En una caja hay más de 40 monedas pero menos de 70. Si las repartimos a partes iguales entre 6 personas sobran 4, pero si lo hacemos entre 5 sobran 3 monedas. ¿Cuántas sobrarían si las repartiéramos equitativamente, es decir, a partes iguales entre 7 personas?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

9 Arcediano resolvió correctamente el 70% de los problemas de un concurso de 10 problemas, el 80% de otro de 20 problemas y el 90% de los problemas de un tercer concurso de 30 problemas. Si estos concursos se hubieran fusionado en un único concurso de 60 problemas, ¿qué porcentaje de los siguientes sería el más próximo al de problemas que Arcediano resolvió correctamente?

A) 40 **B)** 77 **C)** 80 **D)** 83 **E)** 87

10 En cada uno de los tres cuadrados inferiores de la figura colocamos un entero positivo de una cifra, los tres distintos. El número de cada uno de los tres cuadrados restantes lo obtenemos sumando los dos que tiene debajo. ¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor número que puede aparecer en el cuadrado de arriba?



A) 16 **B)** 24 **C)** 25 **D)** 26

E) 35

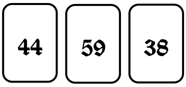
11 Tenemos 27 cubitos de 1 cm de lado, de los que 19 son blancos y 8 negros. Con ellos formamos un cubo de 3 cm de lado con los 8 cubitos negros en las esquinas. ¿Qué fracción de la superficie del cubo grande es de color blanco?

A) $\frac{1}{9}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{4}{9}$ **D)** $\frac{5}{9}$ **E)** $\frac{19}{27}$

12 En la multiplicación $ABA \times CD = CDCD$, A, B, C y D son cifras diferentes. ¿Cuánto suman $A + B$?

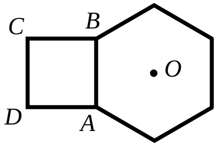
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

13 En cada una de las dos caras de tres cartas hemos escrito un número de manera que los dos números de cada carta suman lo mismo. Tres de estos números, son como ves, 44, 59 y 38. Si los tres números ocultos son primos, ¿cuál es su media?



A) 13 **B)** 14 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 17

14 El hexágono regular de la figura de centro O, comparte el lado AB con el cuadrado $ABCD$. ¿Cuánto mide el ángulo $A\hat{O}D$?



A) 10º **B)** 12º **C)** 15º **D)** 18º

E) 20º

15 ¿Cuántos triángulos isósceles no semejantes hay en los que las medidas de los tres ángulos son múltiplos de 10º? (Recuerda que un equilátero es isósceles).

A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 16 **E)** 18

16 ¿Cuál de estos números es el mayor?

A) $2^4\cdot5^4\cdot22$ **B)** $2^5\cdot3\cdot5^4$ **C)** $2^4\cdot5^6$ **D)** $2^4\cdot5^3\cdot50$ **E)** $2^4\cdot5^5\cdot7$

17 El guardián del Laberinto me deja entrar si lanzando un dado saco al menos el doble de puntos que él. Si el dado es cúbico, con caras numeradas del uno al seis, ¿qué probabilidad tengo de entrar?

A) $\frac{5}{18}$ **B)** $\frac{2}{5}$ **C)** $\frac{2}{9}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** $\frac{1}{4}$

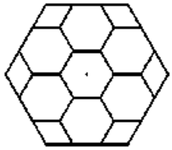
18 Hace tres años la edad de mi padre era el triple de la mía. Dentro de siete años será sólo el doble. ¿Cuánto suman nuestras edades ahora?

A) 40 **B)** 42 **C)** 46 **D)** 48 **E)** 51

19 ¿Cuántos números de cuatro cifras de la forma $a11b$ son múltiplos de 12?

A) dos **B)** cuatro **C)** seis **D)** ocho **E)** doce

20 Si el hexágono grande de la figura tiene 540 cm^2 de área, el área, en cm^2, de uno de los rombos de las esquinas es:



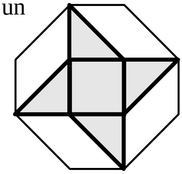
A) 36 **B)** 30 **C)** 27 **D)** 24

E) 20

21 Si escribimos siete enteros consecutivos y la suma de los tres pequeños es 33, ¿cuál es la suma de los tres mayores?

A) 39 **B)** 37 **C)** 42 **D)** 48 **E)** 45

22 En la figura vemos un molinillo de viento formado por un cuadrado y cuatro triángulos rectángulos isósceles, que está inscrito en un octógono. Si el área del octógono es de 42 m^2, el área del molinillo, en m^2, es:



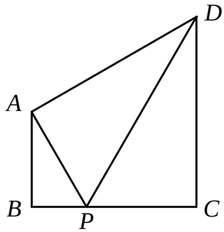
A) 27 **B)** 24 **C)** 21 **D)** 18

E) 15

23 A las 3:00 las agujas de un reloj forman un ángulo de 90º. ¿Qué ángulo forman 10 minutos más tarde?

A) 45º **B)** 30º **C)** 35º **D)** 17,5º **E)** 70º

24 Los tres triángulos de la figura son rectángulos y semejantes. Si el lado *AP* mide 12 cm, la longitud, en cm, del segmento *BC* es:



A) 12 **B)** 15 **C)** 16 **D)** 18

E) 21

25 El número *m* verifica que cada pareja de los números 24, 42 y *m* tiene el mismo máximo común divisor y cada pareja de los números 6, 15 y *m* tiene el mismo mínimo común múltiplo. ¿Qué número es *m*?

A) 10 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 36 **E)** 30

XII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE : Día 27 de febrero de 2008

NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ ($\boxed{\times}$) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
www.profes.net (SM) - Grupo ANAYA - El Corte Inglés
Yalos Instruments, S.L. - SAS

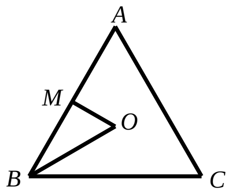
1 La edad del padre de Nacho es cuatro veces la edad de éste. Dentro de cuatro años será sólo el triple. ¿Cuántos años desde ahora deben pasar para que sea sólo el doble?

A) 16 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 24 **E)** 30

2 Con 10! (diez factorial) representamos al producto 10 · 9 · 8 · ... · 2 · 1 (multiplicar diez por todos los enteros anteriores hasta el uno) ¿Cuál es el número más pequeño que multiplicado por 10! nos da un cubo perfecto?

A) 490 **B)** 630 **C)** 1470 **D)** 4410 **E)** 8820

3 El triángulo equilátero *ABC* tiene 24 cm de perímetro. *O* es el centro del triángulo y *M* el punto medio del lado *AB*. ¿Cuál es, en cm, el perímetro del triángulo *BOM*?



A) 4 **B)** 6 **C)** $4+4\sqrt{3}$ **D)** $2+6\sqrt{3}$

E) $8\sqrt{3}$

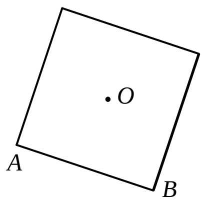
4 El radio de la circunferencia inscrita en un triángulo de perímetro 30 cm y área 30 cm^2, mide en cm:

A) 2 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 10 **E)** 12

5 Una cuesta la subo en bicicleta a 12 km/h y la bajo a 24 km/h. La velocidad media, en km/h, del recorrido total de subida y bajada ha sido:

A) 20 **B)** 18 **C)** 18,2 **D)** 16 **E)** 15,6

6 El cuadrado de la figura tiene como vértices *A*(3, 5) y *B*(9, 3). Las coordenadas de su centro O son:



A) (6, 6) **B)** (7, 7) **C)** (6, 7) **D)** (6, 8)

E) (7,6)

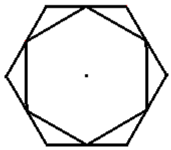
7 Los tres lados de un triángulo acutángulo miden un número entero de centímetros. Si dos lados miden 10 y 15 cm, la menor medida posible para el tercer lado es:

A) 5 cm **B)** 10 cm **C)** 11cm **D)** 12 cm **E)** 15 cm

8 Al dividir un número entre 5 da 4 de resto, y al dividirlo entre 7 da 6 de resto. ¿Cuál es el resto al dividirlo entre 35?

A) 24 **B)** 19 **C)** 22 **D)** 13 **E)** 34

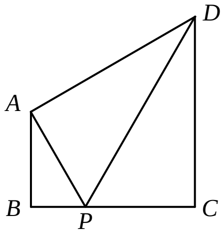
9 El hexágono interior tiene sus vértices en los puntos medios del hexágono exterior. Si el grande tiene de área 20 cm^2, ¿cuál es, en cm^2, el área del pequeño?



A) 10 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 16

E) 18

10 Los tres triángulos de la figura son rectángulos y semejantes. Si el triángulo *ABP* tiene de área 12 cm^2, el área del trapecio *ABCD*, en cm^2, es:



A) 84 **B)** 90 **C)** 96 **D)** 100

E) 108

11 María y Juan hacen la misma colección de cromos que consta de 240 cromos. María tiene 192 diferentes y Juan 160. Juntando sus cromos les faltarían aún 10 cromos para acabarla. ¿Cuántos cromos tiene María que no tiene Juan?

A) 32 **B)** 36 **C)** 38 **D)** 48 **E)** 70

12 Mi casa dista del colegio 720 m. Tanto al ir como al volver lo hago con velocidad uniforme. Tardo 4 minutos al ir y 6 minutos al volver. ¿A qué distancia de mi casa está el punto en el que los tiempos empleados en ir desde casa y volver desde el colegio son los mismos?

A) 240 m **B)** 268 m **C)** 396 m **D)** 432 m **E)** 480 m

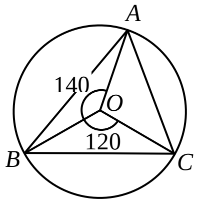
13 En 3º de ESO hay tres grupos A, B y C, que cuentan con 30, 25 y 20 alumnos, respectivamente. Si en el mismo orden la proporción de chicas en cada grupo es de $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{2}$, la proporción de chicas en 3º de ESO es de:

A) 52% **B)** $\frac{38}{75}$ **C)** 54% **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{8}{15}$

14 Si cuando escribimos $a \otimes b$ queremos decir $(a+b)\cdot b$, ¿cuál es el valor de $(3\otimes 5)-(5\otimes 3)$?

A) – 16 **B)** – 8 **C)** 0 **D)** 8 **E)** 16

15 El punto O es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC en el que $B\hat{O}C = 120^{\circ}$ y $A\hat{O}B = 140^{\circ}$, como se muestra en la figura. ¿Cuánto mide el ángulo $A\hat{B}C$?



A) 35º **B)** 40º **C)** 45º **D)** 50º **E)** 60º

16 Los ángulos de un cuadrilátero $ABCD$ verifican $\hat{A} = 2\hat{B} = 3\hat{C} = 4\hat{D}$. ¿Cuál es la medida del ángulo $\hat{A}$ redondeada al entero más próximo?

A) 125º **B)** 144º **C)** 153º **D)** 173º **E)** 180º

17 ¿Cuál es, en cm^2, el área del círculo circunscrito al triángulo isósceles de lados 3, 3 y 2 cm?

A) 2π **B)** $\frac{5\pi}{2}$ **C)** $\frac{81}{32}\pi$ **D)** 3π **E)** $\frac{7\pi}{2}$

18 La edad actual de Juan, T años, es la suma de las edades de sus tres hijos y hace N años era el doble de la suma de las edades que sus hijos tenían entonces. ¿Cuál es el valor de $\frac{T}{N}$?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

19 Dos círculos de radio 2 cm tiene por centros los puntos $O(2,0)$ y $P(0,2)$. ¿Cuál es, en cm^2, el área de la zona común a ambos?

A) $\pi - 2$ **B)** $\frac{\pi}{2}$ **C)** $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ **D)** $2(\pi - 2)$ **E)** π

20 En un centro se hizo la misma prueba del Concurso de Primavera a un grupo de alumnos muy buenos de ESO y a todos los de Bachillerato. La media global fue de 84 puntos. Los de ESO, que eran solamente el 10%, obtuvieron todos la misma puntuación y la media de los de Bachillerato fue 83 puntos. ¿Cuál fue la puntuación de cada estudiante de ESO?

A) 85 **B)** 88 **C)** 93 **D)** 94 **E)** 98

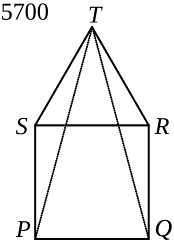
21 Los números a y b satisfacen las ecuaciones $3^a = 81^{b+2}$ y $125^b = 5^{a-3}$. ¿Cuál es el valor de $a \cdot b$?

A) – 60 **B)** – 17 **C)** 9 **D)** 12 **E)** 60

22 Si m y n son dos enteros positivos con $75m = n^3$, ¿cuál es el mínimo valor posible de $m + n$?

A) 15 **B)** 30 **C)** 50 **D)** 60 **E)** 5700

23 Si el cuadrado *PQRS* y el triángulo equilátero *STR* están en el mismo plano, ¿cuánto mide el ángulo $P\hat{T}Q$?



A) 16º **B)** 22º 30’ **C)** 30º **D)** 36º

E) 40º

24 ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar dos dados los números obtenidos sean las cifras de un cuadrado perfecto de dos cifras?

A) $\frac{1}{9}$ **B)** $\frac{2}{9}$ **C)** $\frac{7}{36}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{1}{3}$

25 Una bolsa contiene seis palitos de longitudes 1, 3, 5, 7, 11 y 13 cm. ¿Cuántos triángulos diferentes pueden construirse utilizando tres de esos seis palitos?

A) 20 **B)** 11 **C)** 8 **D)** 1 **E)** 5

XII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE : Día 27 de febrero de 2008

NIVEL IV (Bachillerato)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ (☒) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
www.profes.net (SM) - Grupo ANAYA - El Corte Inglés
Yalos Instruments, S.L. - SAS

1 Una parábola de eje vertical y vértice $V(2, 1)$, que pasa por $(4, 9)$, también pasa por:

A) (1,2) **B)** (1, 3) **C)** (1, 4) **D)** (1, 5) **E)** (1,6)

2 Si un rombo de 10 cm de lado tiene un ángulo de 30º, entonces su área, en cm^2, es:

A) 50 **B)** $50\sqrt{2}$ **C)** $50\sqrt{3}$ **D)** 60 **E)** $20\sqrt{3}$

3 El radio, en cm, de la circunferencia circunscrita a un triángulo con un lado que mide 4 cm y ángulo opuesto de 30º es:

A) 2 **B)** $2\sqrt{2}$ **C)** $2\sqrt{3}$ **D)** 3 **E)** 4

4 ¿Cuántas soluciones formadas por enteros positivos tiene la ecuación $4x + 3y + 2z = 18$?

A) tres **B)** cinco **C)** seis **D)** ocho **E)** nueve

5 Un triángulo acutángulo tiene dos lados que miden 10 y 15 cm. De las medidas: 5, 10, 15, 18 y 20 cm, ¿cuántas pueden corresponder al tercer lado?

A) una **B)** dos **C)** tres **D)** cuatro **E)** cinco

6 El resto de dividir un polinomio por $x – 5$ es 2 y el resto de dividirlo por $x – 2$ es 5. ¿Cuál es el resto de dividirlo por $x^2 – 7x + 10$?

A) $3x + 7$ **B)** $–3x + 10$ **C)** $–x + 7$ **D)** $2x + 3$ **E)** $3x + 2$

7 Al dividir un número entre 5 da resto 3, y al dividirlo por 7 da resto 2. ¿Cuál es el resto al dividirlo por 35?

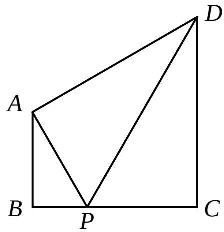
A) 24 **B)** 12 **C)** 5 **D)** 9 **E)** 23

8 Se tira una moneda tres veces y se gana si salen dos caras seguidas. ¿Cuál es la probabilidad de ganar?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{3}{8}$ **C)** $\frac{5}{8}$ **D)** $\frac{3}{4}$ **E)** $\frac{1}{4}$

9 Los tres triángulos de la figura son rectángulos y semejantes. Si el segmento BC mide 12 cm, el área, en cm^2, del trapecio $ABCD$ es:

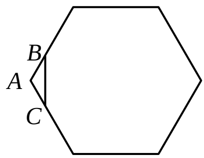
A) 108 **B)** $72\sqrt{2}$ **C)** $72\sqrt{3}$ **D)** 96 **E)** $64\sqrt{6}$



10 Mi casa dista del colegio 840 m. Al ir y al volver camino a una velocidad uniforme, si bien a la ida voy un tercio más rápido que a la vuelta. ¿A qué distancia de mi casa está el punto en el que los tiempos empleados en ir desde casa y volver desde el colegio son los mismos?

A) 210 m **B)** 240 m **C)** 360 m **D)** 420 m **E)** 480 m

11 El hexágono regular de la figura tiene área 216 cm^2. En el triángulo isósceles *ABC*, el lado *AB* es un tercio del lado del hexágono. ¿Cuál es, en cm^2, el área de dicho triángulo?



A) 16 **B)** 12 **C)** 9 **D)** 6 **E)** 4

12 ¿Cuáles son las dos últimas cifras de 51^{48}?

A) 81 **B)** 61 **C)** 41 **D)** 21 **E)** 01

13 $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{6^2}\right)=$

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{17}{18}$ **C)** $\frac{7}{12}$ **D)** $\frac{5}{6}$ **E)** $\frac{1}{3}$

14 Los triángulos *ABC* y *ADC* son isósceles con $AB = BC$ y $AD = DC$. Si el punto *D* está dentro del triángulo *ABC*, siendo el ángulo $A\hat{B}C = 40º$ y el ángulo $A\hat{D}C = 140º$, ¿cuánto mide el ángulo $B\hat{A}D$?

A) 20º **B)** 30º **C)** 40º **D)** 50º **E)** 60º

15 La media de las edades de todos los miembros de una familia compuesta por padre, madre y varios hijos es 20 años. Si el padre tiene 48 años y la media de las edades de la madre y de todos los hijos es 16, ¿cuántos hijos tienen?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

16 Si m y n son dos enteros positivos con $75m = n^3$, ¿cuál es el mínimo valor posible de $m + n$?

A) 15 **B)** 30 **C)** 50 **D)** 60 **E)** 5700

17 Si el número a verifica $a + \frac{1}{a} = 4$, ¿cuál es el valor de $a^4 + \frac{1}{a^4}$?

A) 256 **B)** 164 **C)** 172 **D)** 192 **E)** 194

18 ¿Cuántas parejas (m, n) de enteros positivos, con $m > n$, verifican $m^2 - n^2 = 96$?

A) 3 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 9 **E)** 12

19 Si $sen\, a + sen\, b = \sqrt{\frac{5}{3}}$ y $\cos a + \cos b = 1$, $\cos(a-b)$ es igual a:

A) $\sqrt{\frac{5}{3}} - 1$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** 1

20 La función f verifica que $f(3x-1) = x^3 + x + 1$ para cualquier número real x. ¿Cuál es el valor de $f(5)$?

A) 7 **B)** 13 **C)** 31 **D)** 11 **E)** 131

21 Considera las progresiones aritméticas 2001, 2008, 2015, … y 1999, 2008, 2017, …. ¿Cuál es el siguiente número, después del 2008, que aparece en las dos?

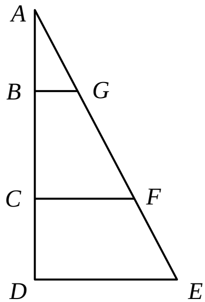
A) 2080 **B)** 2078 **C)** 2071 **D)** 2106 **E)** 2134

22 ¿Cuál es el mayor número que al dividirlo entre 2008 nos da que el cociente es igual que resto?

A) 4034072 **B)** 4018 **C)** 4030054 **D)** 4032063

E) 2009

23 En la figura adjunta los segmentos de longitudes BG, CF y DE son paralelos. Si $AG = 3$, $GF = 4$, $FE = 3$, $DE = 5$, $BG = x$ y $CF = y$, ¿cuánto vale $x + y$?



A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6

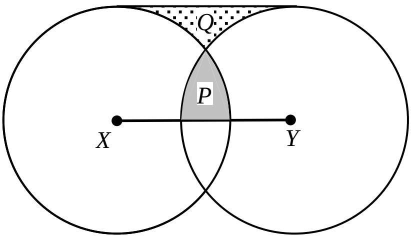
E) 7

24 Si $y=\dfrac{x}{x+\dfrac{x}{x+y}}$, ¿para cuál de los valores siguientes de x resulta que y no es un número real?

A) -6 **B)** -3 **C)** 1 **D)** 3 **E)** 6

1 Los puntos X e Y son los centros de dos círculos de radio 1 cm. Si el área de la región P es la misma que el área de la región Q, la longitud del segmento XY, en cm, es igual a:

A) 1,5 **B)** $\dfrac{\pi}{4}$ **C)** $\dfrac{\pi}{2}$ **D)** 1,4 **E)** 1,6



XII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE : Día 19 de abril de 2008

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ (☒) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA.**
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
www.profes.net (SM) - Grupo ANAYA - El Corte Inglés
Yalos Instruments, S.L. - SAS

1 Para comenzar, realiza estas cinco operaciones:

$A = 111 - 11 \cdot (11-1)$ $B = 22 + 222 : 2$ $C = (333 - 33) : (3^3 + 3)$

$D = 444 : 4 - 44 : 4 - 4$ $E = 555 : (5 + 5 + 5)$

Si ordenas los cinco resultados de menor a mayor, ¿cuál quedará en el medio?

A) *A* **B)** *B* **C)** *C* **D)** *D* **E)** *E*

2 En julio de este año se celebrará en Madrid la XLIX Olimpiada Matemática Internacional en la que participan chicos y chicas de entre 15 y 18 años de 108 países. Si la Olimpiada Internacional se ha celebrado año tras año desde la primavera vez, que se celebró en Rumanía, ¿en qué año se celebró la I Olimpiada Matemática Internacional?

A) 1958 **B)** 1959 **C)** 1960 **D)** 1961 **E)** 1962

3 Julián lleva a su hermanita Lucía de la mano. Por cada tres pasos que da Julián, Lucía da cinco pasitos. Si para llegar al quiosco de la esquina han dado entre los dos 112 pasos, ¿cuántos pasos ha dado Lucía más que Julián?

A) 14 **B)** 28 **C)** 42 **D)** 48 **E)** 60

4 Con las cifras del número 1 940 y sin repetir, ¿cuántos números comprendidos entre 1 000 y 4 900 se pueden formar?

A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

5 Al doble del número que estoy pensando le he restado 23 unidades y he obtenido como resultado el 123. ¿Cuánto suman las cifras del número que había pensado?

A) 6 **B)** 7 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 12

6 De los siguientes números, ¿cuál es el más próximo a $\dfrac{53{,}1 \times 0{,}046}{0{,}0021}$?

A) 1 **B)** 100 **C)** 1 000 **D)** 10 000 **E)** 100 000

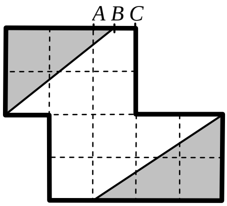
7 Con 64 cubitos blancos formamos un gran cubo y coloreamos sus caras de rojo. Después volvemos a deshacer el cubo en cubitos. ¿Cuántos cubitos pequeños seguirán teniendo todas sus caras blancas?

A) 16 **B)** 12 **C)** 8 **D)** 4 **E)** Ninguno

8 La operación rombito consiste en lo siguiente: $a \blacklozenge b = \dfrac{a+b}{2a-b}$. ¿Cuánto vale $10{,}2 \blacklozenge 0{,}4$?

A) 0,53 **B)** 25 **C)** 2,5 **D)** 53 **E)** 10,6

9 Si *B* es el punto medio de *AC*, ¿qué fracción del área de la figura está sombreada?

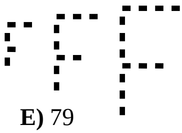


A) $\dfrac{11}{28}$ **B)** $\dfrac{5}{14}$ **C)** $\dfrac{3}{7}$ **D)** $\dfrac{6}{14}$ **E)** $\dfrac{13}{28}$

10 Ana, Bea, Carlos, Diana y Esteban disputaron una carrera. Diana llegó justo detrás de Ana. Bea llegó tres puestos por delante de Diana y Carlos llegó tres puestos por detrás de Esteban. ¿Quién llegó en tercer lugar?

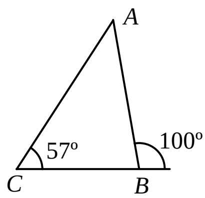
A) Ana **B)** Bea **C)** Carlos **D)** Diana **E)** Esteban

11 Observa estas tres primeras "efes". Si continuas dibujando, ¿cuántos palitos necesitarás para dibujar la "efe" que ocupa el lugar 20º?



A) 64 **B)** 81 **C)** 80 **D)** 64 **E)** 79

12 El reloj de la casa de Joaquín está unos minutos adelantado. Antes de salir de casa, Joaquín ve que marca las 7:58. Al llegar al colegio, mira el reloj del patio que marca las 8:06 y, como se da cuenta de que ha olvidado el libro de mates, vuelve a casa a la misma velocidad. Al llegar a casa el reloj marca las 8:26. ¿Qué hora marcará el reloj de la casa de Joaquín cuando el reloj del patio marque las 10:27?



A) 10:33 **B)** 10:35 **C)** 10:38 **D)** 10:40 **E)** 10:41

13 En el triángulo *ABC* se han medido un ángulo exterior y otro interior. ¿Cuánto mide el ángulo menor del triángulo *ABC*?

A) 50º **B)** 40º **C)** 43º **D)** 57º **E)** 37º

14 En esta multiplicación cada letra representa una cifra distinta. ¿Cuánto vale la suma $A+C+E$?

1	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
				×	**3**
A	**B**	**C**	**D**	**E**	**1**

A) 9 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 19

15 ***ab*** y ***ba*** son números de dos cifras no necesariamente distintas. Leira y Ariel se van a casar. Leira ha invitado a ***ab*** amigos y Ariel a ***ba***. Si cada uno ha invitado a más de 30 amigos pero a menos de 70 y no hay ninguna coincidencia entre las listas de invitados, ¿cuál de estas cantidades puede ser el número total de invitados a la boda?

A) 75 **B)** 94 **C)** 100 **D)** 110 **E)** 143

16 En 5º B hay 15 chicas y varios chicos. El primer día de clase la maestra llevó caramelos y, para que se fueran conociendo, dijo: "Cada chica debe dar un caramelo a cada uno de los chicos que estuvieron en su clase el curso pasado y cada chico deben dar un caramelo a cada una de las chicas que no estuvieron en su clase el curso pasado". Si en total repartieron 135 caramelos, ¿cuántos chicos hay en 5º B?

A) 8 **B)** 9 **C)** 12 **D)** 15 **E)** No se puede saber

17 Francisco es un poco trasto. Un día se subió al ascensor de unos grandes almacenes, que tiene 8 pisos y 5 sótanos numerados del –5 al 7, y comenzó a subir y a bajar. Primero subió dos pisos, después bajó cuatro. Después fue al piso cuyo número era el doble del que estaba en ese momento, y por último bajó siete pisos. Si acabó en la planta –3, ¿dónde empezó su recorrido?

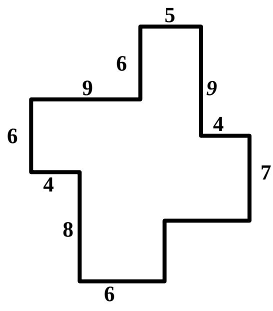
A) –2 **B)** 0 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

18 Una caja pesa 242 gramos cuando está llena y 188 gramos cuando está medio llena. ¿Cuántos gramos pesa cuando está vacía?

A) 94 **B)** 268 **C)** 134 **D)** 54

E) 108

19 En la figura que ves se indican, en cm, las medidas de algunos de los lados del polígono. El área, en cm^2, es



A) 191 **B)** 200 **C)** 206 **D)** 224

E) 300

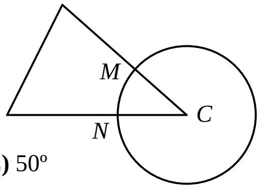
20 En Aqualandia tienen unas curiosas medidas de capacidad que se relacionan así: 2 *sorbos* son igual que 3 *chorros*; 4 *tragos* son lo mismo que 5 *sorbos*; 6 *tragos* son lo mismo que 7 *buches*. ¿A cuántos *chorros* equivalen 28 *buches*?

A) 30 **B)** 35 **C)** 40 **D)** 45 **E)** 5

21 El último año en el que al escribir una fecha en el formato día-mes-año resultó un número capicúa fue el 2002 y la fecha fue el 20 de febrero (20-02-2002). En este caso, la suma de los dígitos de esta fecha es: 2+0+0+2+2+0+0+2=8. ¿Cuál es la suma de los dígitos de la última fecha capicúa anterior al año 2 000?

A) 26 **B)** 32 **C)** 16 **D)** 28 **E)** 30

22 La circunferencia de centro *C* corta al triángulo *ABC* en los puntos *M* y *N*. El ángulo $N\hat{M}C$ mide 70º y el ángulo $A\hat{B}C$ mide 80º. ¿Cuánto mide el ángulo *A* del triángulo?



A) 30º **B)** 70º **C)** 90º **D)** 60º **E)** 50º

23 Para cada número de cuatro cifras realizamos estas dos sumas: primero sumamos sus cuatro cifras y obtenemos un número; y segundo, sumamos las cifras del resultado anterior. ¿Cuál es valor máximo que podemos obtener en esta segunda suma?

A) 9 **B)** 11 **C)** 18 **D)** 10 **E)** 18

24 Los amigos del bosque se han unido para ayudar a las hormigas a construir un puente sobre el río. Cada uno aporta maderos de diversa longitud. El oso ha encontrado un tronco de 11 metros; el castor uno de 22 decímetros; la ardilla uno de 33 centímetros; y el escarabajo uno de 44 milímetros. ¿Cuál es, en decímetros, la longitud del puente así construido?

A) 1357,4 **B)** 135,74 **C)** 110 **D)** 22 **E)** 13,574

25 Tres amigos hacen un viaje y cada uno de ellos filmó una parte del viaje. Ana hizo en total 2 horas, 45 minutos y 19 segundos de grabación, a Blas le faltaron 14 minutos y 41 segundos para las 3 horas de filmación y Clea filmó en total 10200 segundos. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

A) Ana y Blas filmaron la misma cantidad de tiempo
B) Blas filmó más que Ana pero menos que Clea
C) Ana filmó menos que Clea pero más que Blas
D) La diferencia entre el que más filmó y el que menos filmó es de 5 minutos
E) Clea filmó más que Blas pero menos que Ana.

XII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE : Día 19 de abril de 2008

NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ (☒) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
www.profes.net (SM) - Grupo ANAYA - El Corte Inglés
Yalos Instruments, S.L. - SAS

1 A los animales del zoo de mi ciudad les encantan los números. Así, cada vez que Águila se encuentra un número N lo multiplica por 3 y luego le suma 12, es decir: $3N+12$. Búho hace esto: $4N+8$. Cocodrilo: $7N+21$. Delfín: $5N+5$. Elefante: $6N+6$. Después de hacer sus cálculos gritan en voz alta el resultado. Ayer oí a un animal que gritaba: ¡¡trescientos cuarenta y tres!! ¿Qué animal era?

A) Águila **B)** Búho **C)** Cocodrilo **D)** Delfín **E)** Elefante

2 ¿Cuál de los siguientes números es 2^{100}?

A) $4^5 \cdot 2^{10}$ **B)** $2^2 + 2^{98}$ **C)** $16^5 \cdot 2^5$ **D)** $(2^3)^{97}$ **E)** La mitad de 2^{101}

3 Para cada uno de los números de 3 cifras en las que ninguna es 0, calculamos la diferencia entre el propio número y el producto de sus cifras ¿Cuál es la mayor diferencia posible?

A) 110 **B)** 270 **C)** 902 **D)** 910 **E)** 927

4 ¿Cuántos enteros positivos verifican que su cuadrado es un divisor de 2 000?

A) 3 **B)** 6 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 20

5 El pasado mes de Marzo se ha celebrado el 50 aniversario del invento del *chupa chups*. Para festejarlo se han repartido muchos *chupa chups* en una clase de 1º de ESO. Si empezamos dando 7 a cada uno, el último de la lista sólo se lleva 5, y si cada uno se lleva 6, sobran 21. ¿Cuántos *chupa chups* se repartieron?

A) 156 **B)** 157 **C)** 158 **D)** 159 **E)** 163

6 En los últimos cuatro años, los cambios en el número de habitantes de una ciudad fueron: 20 % de crecimiento, 20 % de decrecimiento, 20 % de crecimiento y 20 % de decrecimiento. El porcentaje de crecimiento, o de decrecimiento, en el cómputo global de los 4 años, redondeado, fue:

A) 8 % de decrecimiento **B)** 4 % de decrecimiento **C)** 0 %

D) 4 % de crecimiento **E)** 8 % de crecimiento

7 Si en la fracción $\frac{n}{360}$ sustituimos n por cualquier entero positivo menor que 360, obtenemos 359 fracciones diferentes. ¿Cuántas de ellas, simplificadas al máximo, resultan tener en el denominador un número de una cifra?

A) 9 **B)** 21 **C)** 17 **D)** 19 **E)** 20

8 En esta multiplicación PQRS es un número de cuatro cifras diferentes. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones no es verdadera?

P	Q	R	S
		$\times$	9
S	**R**	**Q**	**P**

A) P = 1 **B)** Q = 0 **C)** R = 7 **D)** $S = 9$ **E)** PQRS es divisible por 9

9 A, B, C y D son cuatro puntos diferentes, alineados, y tales que B y C están entre A y D, siendo $AD = 10$ m y $BC = 3$ m. ¿Cuál es la suma de las seis distancias posibles entre dos de estos 4 puntos?

A) 33 m **B)** 52 m **C)** 58 m **D)** 60 m **E)** 65 m

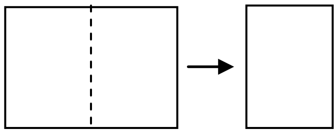
10 ¿Cuánto vale $\sqrt{16+4\cdot\sqrt{28-\sqrt{7+\sqrt{4}}}}$?

A) 6 **B)** 10 **C)** $\sqrt{84}$ **D)** $\sqrt{340}$ **E)** $4+2\cdot\sqrt{17}$

11 ¿Cuántas parejas (x, y) de enteros no negativos x e y verifican que $3x + 4y = 96$?

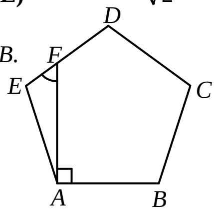
A) 6 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

12 Doblamos una hoja rectangular por la mitad y resulta un rectángulo semejante al original. ¿Cuál es el cociente entre la longitud y la anchura del rectángulo pequeño?



A) 2 **B)** $\frac{3}{2}$ **C)** $\sqrt{3}$ **D)** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **E)** $\sqrt{2}$

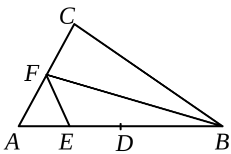
13 En el pentágono regular de la figura, AF es perpendicular a AB. ¿Cuánto mide el ángulo $E\hat{F}A$?



A) 36º **B)** 54º **C)** 64º **D)** 72º

E) 74º

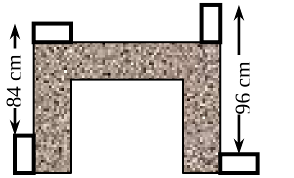
14 En el dibujo que ves, D es el punto medio de AB, E es el punto medio de AD y F es el punto medio de AC. Si el área del triángulo EFB es 21 cm^2, ¿cuál es el área, en cm^2, del triángulo ABC?



A) 56 **B)** 49 **C)** 42 **D)** 63

E) 50

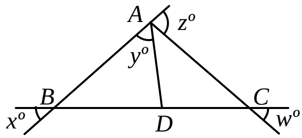
15 Si colocamos 4 piezas de madera idénticas en las esquinas de una mesa, resulta la figura que estás viendo. ¿Cuál es la altura de la mesa?



A) 84 cm **B)** 87 cm **C)** 90 cm

D) 93 cm **E)** 96 cm

16 En el dibujo de la derecha, $AB = AC$ y $AD = CD$. ¿Cuántas afirmaciones de las tres siguientes son verdaderas?

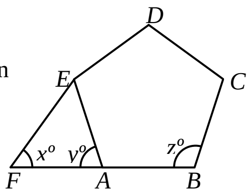


$$w = x, \qquad x + y + z = 180, \qquad z = 2x.$$

A) Todas **B)** Solamente dos **C)** Solamente una

D) Ninguna **E)** Depende del valor de x

17 $ABCDE$ es un pentágono regular. Los puntos F, A y B están alineados y $FA = AB$. ¿Cuál es la relación $x : y : z$?



A) 1 : 2 : 3 **B)** 2 : 2 : 3 **C)** 2 : 3 : 4 **D)** 3 : 4 : 5

E) 3 : 4 : 6

18 ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar cuatro monedas resulte que el número de caras es mayor o igual que el de cruces?

A) $\frac{5}{16}$ **B)** $\frac{3}{8}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{5}{8}$ **E)** $\frac{11}{16}$

19 Ali construye una lista de enteros positivos con los siguientes criterios:
Empieza con un entero positivo y le aplica una de estas tres reglas. A cada uno de los resultados que va obteniendo vuelve a aplicarle la regla correspondiente.

Regla 1: Si el entero es menor que 10, lo multiplica por 9.
Regla 2: Si el entero es par y mayor que 9, lo divide por 2.
Regla 3: Si el entero es impar y mayor que 9, le resta 5.

Un ejemplo sería: 100, 50, 25, 20, 10, 5, 45,…
Si empieza con 98, ¿cuál es el término 2008º de la lista?

A) 6 **B)** 11 **C)** 22 **D)** 27 **E)** 54

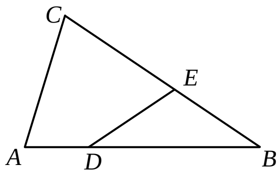
20 Si la media de cinco enteros positivos diferentes es 15 y la mediana es 18, ¿cuál es el mayor valor posible para el mayor de los cinco?

A) 19 **B)** 24 **C)** 32 **D)** 35 **E)** 40

21 En julio de este año se celebrará en Madrid la XLIX Olimpiada Matemática Internacional en la que participan chicos y chicas de entre 15 y 18 años de 108 países. ¿Cuál es la suma de todos los números romanos de cuatro símbolos que se pueden formar bailando los símbolos del número XLIX y cuya escritura tenga sentido?

A) MIL**B)** CXX **C)** CXVIII **D)** CCLVIII **E)** CLXXXIX

22 En el triángulo ABC de la figura, el ángulo $A\hat{D}E = 146º$, $ED = EB$ y $AB = BC$. ¿Cuánto mide el ángulo $A\hat{C}B$?



A) 54º **B)** 68º **C)** 73º

D) 75º **E)** 80º

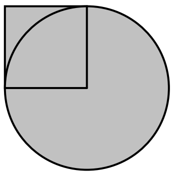
23 ¿Cuánto vale la mitad de la raíz cuadrada de 2^{2008} ?

A) 1004 **B)** 2^{1004} **C)** 1 **D)** 2^{1003} **E)** 2^{502}

24 ¿Cuántos números de 3 cifras son divisibles por 13?

A) 7 **B)** 67 **C)** 69 **D)** 76 **E)** 77

25 Con centro en un vértice de un cuadrado de lado 10, dibujamos un círculo de radio 10. ¿Cuál es el área de la región sombreada que encierran las dos figuras?



A) $200 + 25\pi$ **B)** $100 + 75\pi$ **C)** $75 + 100\pi$

D) $100 + 100\pi$ **E)** $100 + 125\pi$

XII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE : Día 19 de abril de 2008

NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ ($\boxtimes$) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
www.profes.net (SM) - Grupo ANAYA - El Corte Inglés
Yalos Instruments, S.L. - SAS

1 Lanzamos un dado al aire y sea P el producto de los cinco números visibles. ¿Cuál es el mayor número que podemos asegurar que siempre dividirá a P?

A) 6 **B)** 12 **C)** 24 **D)** 144 **E)** 720

2 De los siguientes números, ¿cuál es un cuadrado perfecto?

Nota. La expresión $n!$, en donde n es un número natural, representa el producto de todos los números naturales menores o iguales a n. Por ejemplo. $5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$

A) $98!\cdot99!$ **B)** $98!\cdot100!$ **C)** $99!\cdot100!$ **D)** $99!\cdot101!$ **E)** $100!\cdot101!$

3 En un viaje a EEUU, Pedro llevó n euros que los cambió por dólares al llegar, recibiendo 10 dólares por cada 7 euros. Si después de gastar 600 dólares, se quedó con n dólares, ¿cuál es la suma de las cifras de n?

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

4 La edad de Juan tiene las mismas dos cifras que la de su sobrina Ana pero cambiando el orden. Si dentro de 5 años, Juan tiene el doble de años que Ana, ¿cuántos años le lleva?

A) 9 **B)** 18 **C)** 27 **D)** 36 **E)** 45

5 En la sucesión 2001, 2002, 2003,…, cada término a partir del 4º se obtiene restando el anterior a la suma de los dos que preceden a éste. Así por ejemplo, el cuarto término sería $2001 + 2002 - 2003 = 2000$. ¿Qué número ocupa el lugar 2008 en esta sucesión?

A) 0 **B)** –2 **C)** –4 **D)** –6 **E)** –8

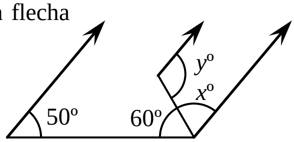
6 En una fiesta, en la que había 12 chicos, cada uno de ellos bailó con 3 chicas y cada una de las chicas que había, bailó con 2 chicos. ¿Cuántas chicas había en la fiesta?

A) 8 **B)** 12 **C)** 16 **D)** 18 **E)** 24

7 Ana y Beatriz parten al mismo tiempo de dos puntos diametralmente opuestos de una pista circular, a distintas velocidades y en sentido contrario. Cuando se encuentran por primera vez, Ana ha recorrido 100 metros y, desde ese momento hasta que se encuentra por segunda vez, Beatriz ha recorrido 150 metros. Si sus velocidades son constantes ¿cuál es, en m, la longitud de la pista?

A) 250 **B)** 300 **C)** 350 **D)** 400 **E)** 500

8 En el diagrama de la figura, en el que las líneas con flecha son paralelas, $y - x$ es igual a:



A) 30 **B)** 35 **C)** 40 **D)** 45 **E)** 50

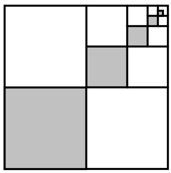
9 Antonio, Beatriz y Carolina tienen 15, 14 y 13 monedas respectivamente y acuerdan el siguiente entretenimiento: en cada ronda, el que más monedas tenga les da 1 a cada uno de los otros dos y otra a Dani que hace de árbitro. Así, después de la 1ª ronda, Antonio se queda con 12, Beatriz con 15 y Carolina con 14. El juego se acaba cuando alguno se queda sin monedas. ¿Cuántas rondas durará?

A) 33 **B)** 35 **C)** 37 **D)** 39 **E)** 41

10 Si m y n son enteros impares mayores que 2008, ¿Qué número de los siguientes es impar?

A) $m^3 + n$ **B)** $2m^5n^7$ **C)** $m^3 + 2n$ **D)** $m + n$ **E)** $(mn + 7)^5$

11 Dividimos un cuadrado en cuartos y lo sombreamos como se indica en la figura. Si el proceso continuara indefinidamente, ¿qué fracción del cuadrado original quedaría sombreada?



A) $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{3}{8}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{5}{8}$

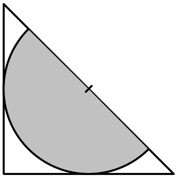
12 En un grupo de 3º de ESO elegimos un estudiante al azar. La probabilidad de que el elegido sea chico es $\frac{2}{3}$ de la probabilidad de que sea chica. ¿Cuál es el cociente entre el número de chicos y el total de estudiantes de ese grupo?

A) $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{2}{5}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{3}{5}$ **E)** $\frac{2}{3}$

13 En un supermercado se vende detergente en tres tipos de envases: pequeño (P), mediano (M) y grande (G). El envase mediano cuesta un 50% más que el pequeño y contiene 20% menos detergente que el grande. El envase grande contiene doble detergente que el pequeño y cuesta un 30% más que el mediano. Ordenados del más rentable al menos rentable, quedarían así:

A) PMG **B)** GMP **C)** MPG **D)** GPM **E)** MGP

14 El triángulo de la figura es rectángulo e isósceles y el semicírculo que ves, con centro en la hipotenusa y tangente a los dos catetos, tiene de área 2π. ¿Cuál es el área del triángulo?



A) 6 **B)** 8 **C)** 3π **D)** 10

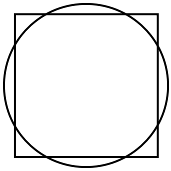
E) 4π

15 P es un número de 2 008 cifras que es divisible por 18. Si Q es la suma de las cifras de P, R la suma de las cifras de Q y S la suma de las cifras de R, el valor de S es:

A) 9 **B)** 18 **C)** 180 **D)** 2 008

E) Faltan datos para determinarlo

16 El cuadrado y el círculo de la figura tienen el mismo centro. Si el área de la región interior al círculo pero exterior al cuadrado y el área de la región exterior al círculo pero interior al cuadrado coinciden, ¿cuál es el radio del círculo si la longitud del lado del cuadrado es 2?



A) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ **B)** $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ **C)** $\frac{3}{2}$ **D)** $\sqrt{3}$ **E)** $\sqrt{\pi}$

17 De una lista de 9 números, sabemos que seis de ellos son 7, 8, 3, 5, 9 y 5. ¿Cuál es el mayor valor posible para la mediana de los nueve?

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

18 En la gráfica adjunta te mostramos los resultados de un entrenamiento de un equipo de cross. ¿Quién es el más rápido?

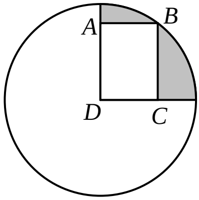
A) Alicia **B)** Beatriz **C)** Carlos

D) David **E)** Emilio

19 Si $f(x) = x^{x+1} \cdot (x+2)^{x+3}$, $f(0) + f(-1) + f(-2) + f(-3)$ es igual a:

A) $-\frac{8}{9}$ **B)** 0 **C)** $\frac{8}{9}$ **D)** 1 **E)** $\frac{10}{9}$

20 El lado *AB* del rectángulo de la figura mide 3 cm y el *BC*, 4. Si *D* es el centro del círculo, el área, en cm^2, de la región sombreada está comprendida entre:



A) 4 y 5 **B)** 5 y 6 **C)** 6 y 7 **D)** 7 y 8

E) 8 y 9

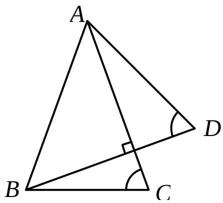
21 La suma de las longitudes de las 12 aristas de una caja rectangular (ortoedro) es 140 cm y la distancia de uno de los vértices al vértice más lejano es 21 cm. ¿Cuál es, en cm^2, el área total de la caja?

A) 776 **B)** 784 **C)** 798 **D)** 800 **E)** 812

22 Tiramos un dado tres veces. Si la suma de los números aparecidos en las dos primeras tiradas es igual al número aparecido en la tercera, ¿cuál es la probabilidad de que haya aparecido un 2 al menos una vez?

A) $\frac{1}{6}$ **B)** $\frac{91}{216}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{8}{15}$ **E)** $\frac{7}{12}$

23 Los triángulos *ABC* y *ABD* son isósceles con $AB = AC = BD$. Si *BD* es perpendicular a *AC*, la suma de los ángulos $\hat{C} + \hat{D}$ es igual a:



A) 115º **B)** 120º **C)** 130º **D)** 135º

E) No tenemos datos suficientes para determinarla

24 En julio de este año se celebrará en Madrid la XLIX Olimpiada Matemática Internacional en la que participan chicos y chicas de entre 15 y 18 años de 108 países. Si el delegado de cada país da un apretón de manos a los demás delegados, ¿cuántos apretones en total se darán en la inauguración?

A) 107 **B)** 216 **C)** 5778 **D)** 11556 **E)** 11664

25 Si en una división entera sumo 900 al dividendo, el cociente aumenta en 7 y el resto disminuye en 24, ¿cuál es el divisor de dicha división?

A) 132 **B)** 168 **C)** 732 **D)** 31 **E)** 231

XII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE : Día 19 de abril de 2008

NIVEL IV (Bachillerato)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

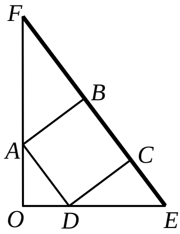
* **MARCA CON UNA CRUZ ($\boxed{\times}$) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA:

Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

COLABORAN:

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
www.profes.net (SM) - Grupo ANAYA - El Corte Inglés
Yalos Instruments, S.L. - SAS



1 En la figura adjunta. *OEF* es un triángulo rectángulo y *ABCD* es un cuadrado. Si $OA = 48$ y $OD = 36$, *EF* es igual a:

A) 176 **B)** 180 **C)** 185 **D)** 188 **E)** 190

2 ¿Cuántos números de 4 cifras verifican que la suma de la cifra de las unidades, la cifra de las decenas y el número formado por las dos primeras cifras es igual al número formado por las dos últimas cifras?

A) 10 **B)** 45 **C)** 50 **D)** 80 **E)** 90

3 Si $a+b+c=7$ y $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{7}{10}$, $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ es:

A) $\frac{3}{2}$ **B)** $\frac{9}{7}$ **C)** $\frac{10}{7}$ **D)** $\frac{17}{10}$ **E)** $\frac{19}{10}$

4 En un grupo de 1º de Bachillerato hay al menos 28 estudiantes. El número de chicos es estrictamente superior al doble de la diferencia entre el número de chicas y 12. El número de chicas es estrictamente superior a 9 veces la diferencia entre el número de chicos y 10. ¿Cuál es la diferencia entre el número de chicas y el número de chicos?

A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 10

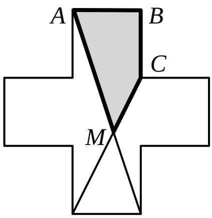
5 Si $S = (x + 20) + (x + 21) + (x + 22) + \ldots + (x + 100)$ siendo x un entero positivo, ¿cuál es el menor valor de x para el que S es un cuadrado perfecto?

A) 1 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 8 **E)** 64

6 Entre los números 1, 2, 3,…, 2008 elegimos 4 al azar *a*, *b*, *c* y *d*, pudiendo aparecer números repetidos. ¿Cuál es la probabilidad de que el número $a \cdot d - b \cdot c$ sea par?

A) $\frac{3}{8}$ **B)** $\frac{7}{16}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{9}{16}$ **E)** $\frac{5}{8}$

7 Los doce lados del polígono de la figura son de igual longitud, 4, y cualesquiera dos consecutivos se cortan en ángulo recto. ¿Cuál es el área del cuadrilátero *ABCM*?



A) $\frac{44}{3}$ **B)** 16 **C)** $\frac{88}{5}$ **D)** 20

E) $\frac{62}{3}$

8 Diego se encuentra en un cierto punto en el camino entre su casa y el parque. Quiere ir al parque y no sabe si ir directamente o ir a casa, coger la bicicleta e ir en bicicleta al parque. Si en bicicleta va 7 veces más rápido que a pie y las dos opciones le llevan igual cantidad de tiempo, ¿cuál es el cociente entre la distancia a casa y la distancia al parque desde el punto en el que se encuentra?

A) $\frac{2}{3}$ **B)** $\frac{3}{4}$ **C)** $\frac{4}{5}$ **D)** $\frac{5}{6}$ **E)** $\frac{6}{7}$

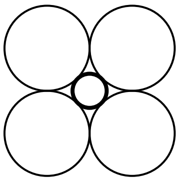
9 El radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo cuyos lados están en la relación 3 : 4 : 5 es 3. ¿Cuál es el área de dicho triángulo?

A) 5π **B)** 12 **C)** 8,64 **D)** 17,28 **E)** 18

10 En el interior de un triángulo equilátero señalamos un punto *P* que dista 1, 2 y 3 de cada uno de los tres lados del triángulo. ¿Cuál es la longitud del lado de dicho triángulo?

A) 4 **B)** $3\sqrt{3}$ **C)** 6 **D)** $4\sqrt{3}$ **E)** 9

11 Un círculo de radio 1 está rodeado por 4 círculos de radio ***r*** como se muestra en la figura. ¿Cuál es el valor de ***r***?



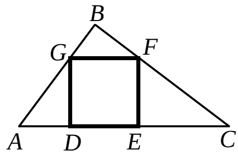
A) $\sqrt{2}$ **B)** $1+\sqrt{2}$ **C)** $\sqrt{6}$ **D)** 3

E) $2+\sqrt{2}$

12 Cortamos una pirámide cuadrangular regular por un plano paralelo a la base y que dista 2 cm de ella. Si el área lateral de la pirámide que queda arriba es la mitad del área lateral de la pirámide original, ¿cuánto mide, en cm, la altura de ésta?

A) 2 **B)** $2+\sqrt{2}$ **C)** $1+2\sqrt{2}$ **D)** 4 **E)** $4+2\sqrt{2}$

13 En el triángulo rectángulo ABC de la figura, $AB = 3$ y $BC = 4$.
Si el cuadrilátero $DEFG$ es un cuadrado, ¿cuánto mide su lado?

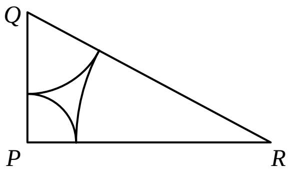


A) $\frac{3}{2}$ **B)** $\frac{60}{37}$ **C)** $\frac{12}{7}$ **D)** $\frac{23}{13}$ **E)** 2

14 Sea n el menor entero positivo divisible por 36 y que, escrito en notación usual, sólo tiene cuatros y nueves, al menos uno de cada. ¿Cuáles son las cuatro últimas cifras de n?

A) 4444 **B)** 4494 **C)** 4944 **D)** 9444 **E)** 9944

15 En el triángulo rectángulo PQR de la figura, con $QR = 17$ cm y $PR = 15$ cm, hemos dibujado, con centros en P, Q y R los arcos que ves, de forma que cada uno toca a los otros dos. ¿Cuál es, en cm, el radio del arco con centro R?



A) 10 **B)** 10,5 **C)** 11

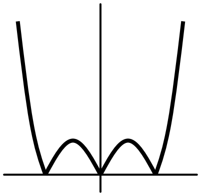
D) 11,5 **E)** 12

16 ¿Cuál es el valor de la siguiente suma: $2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \ldots + 10 \cdot 2^{10}$?

A) $9 \cdot 2^{11}$ **B)** $10 \cdot 2^{11}$ **C)** $11 \cdot 2^{10}$ **D)** $11 \cdot 2^{11}$

E) $10 \cdot 2^{12}$

17 ¿Cuántas funciones continuas $y = f(x)$ hacen que la gráfica de $y = |f(x)|$ sea la de la figura?



A) 16 **B)** 12 **C)** 8 **D)** 4 **E)** 2

18 ¿Cuántos números de 12 a 12345, ambos incluidos, están formados por dígitos consecutivos y en orden creciente leídos de izquierda a derecha?

A)10 **B)** 13 **C)** 18 **D)** 22 **E)** 25

19 El año 2003 fue el último año primo y el próximo es 2011. ¿Cuántos divisores cuadrados perfectos tiene 2011^{2011} más que 2003^{2003}?

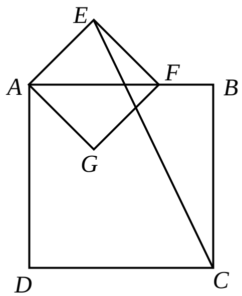
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 8 **E)** 2007

20 El precio de 5 peras, 3 naranjas y 2 melones es 3,18 € y el de 4 peras, 8 naranjas y 3 melones es 4,49 €. ¿Cuántos céntimos de euro es más cara una pera que una naranja?

A) 8 **B)** 7 **C)** 6 **D)** 5

E) Falta información

21 El cuadrado *ABCD* de la figura mide 4 cm de lado y el cuadrado *AEFG*, 2 cm de lado. ¿Cuál es, en cm, la longitud de *CE*?



A) 5 **B)** $5+\sqrt{2}$ **C)** 6 **D)** 7

E) $4+2\sqrt{2}$

22 En una clase de 25 estudiantes hay 7 zurdos. Si elegimos al azar 2 estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean zurdos?

A) $\frac{7}{15}$ **B)** $\frac{21}{50}$ **C)** $\frac{7}{100}$ **D)** $\frac{18}{25}$ **E)** $\frac{7}{25}$

23 Lanzamos dos dados y anotamos la diferencia entre los números que aparecen. ¿Qué diferencia es la más probable?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4 o más

24 Una escalera está apoyada en la pared formando un ángulo de 60º con el suelo. Si alejamos el punto de apoyo en el suelo 1 m de la pared, entonces la escalera forma un ángulo de 45º con el suelo. ¿Cuál es, en m, la longitud de la escalera?

A) $\sqrt{2}+1$ **B)** $2\left(\sqrt{2}+1\right)$ **C)** $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ **D)** $\sqrt{5}$ **E)** $\frac{2}{\sqrt{2}+1}$

25 En julio de este año se celebrará en Madrid la XLIX Olimpiada Matemática Internacional en la que participan chicos y chicas de entre 15 y 18 años de 108 países. Pues a propósito de 49: si la suma de 49 enteros positivos consecutivos acaba en 2, ¿en qué cifra acaba el menor de dichos números?

A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 0

XII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (1ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**B**	1	**B**	1	**A**	1	**B**
2	**D**	2	**D**	2	**D**	2	**A**
3	**D**	3	**C**	3	**C**	3	**E**
4	**C**	4	**E**	4	**A**	4	**A**
5	**A**	5	**C**	5	**D**	5	**B**
6	**D**	6	**A**	6	**B**	6	**C**
7	**C**	7	**C**	7	**D**	7	**E**
8	**E**	8	**C**	8	**E**	8	**B**
9	**A**	9	**D**	9	**C**	9	**C**
10	**E**	10	**D**	10	**E**	10	**E**
11	**E**	11	**D**	11	**E**	11	**E**
12	**A**	12	**A**	12	**D**	12	**E**
13	**E**	13	**B**	13	**B**	13	**C**
14	**D**	14	**C**	14	**E**	14	**D**
15	**C**	15	**A**	15	**D**	15	**E**
16	**B**	16	**E**	16	**D**	16	**D**
17	**A**	17	**E**	17	**C**	17	**E**
18	**A**	18	**C**	18	**D**	18	**B**
19	**A**	19	**C**	19	**D**	19	**B**
20	**D**	20	**E**	20	**C**	20	**D**
21	**B**	21	**E**	21	**E**	21	**C**
22	**E**	22	**D**	22	**D**	22	**D**
23	**E**	23	**C**	23	**C**	23	**C**
24	**B**	24	**D**	24	**B**	24	**B**
25	**C**	25	**E**	25	**E**	25	**C**

XII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (2ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**E**	1	**C**	1	**B**	1	**C**
2	**C**	2	**E**	2	**C**	2	**D**
3	**B**	3	**D**	3	**A**	3	**E**
4	**A**	4	**B**	4	**B**	4	**C**
5	**D**	5	**D**	5	**C**	5	**C**
6	**C**	6	**A**	6	**D**	6	**E**
7	**C**	7	**B**	7	**C**	7	**C**
8	**A**	8	**C**	8	**C**	8	**B**
9	**A**	9	**A**	9	**C**	9	**C**
10	**A**	10	**A**	10	**C**	10	**D**
11	**B**	11	**C**	11	**A**	11	**B**
12	**A**	12	**E**	12	**B**	12	**E**
13	**C**	13	**B**	13	**E**	13	**B**
14	**E**	14	**A**	14	**B**	14	**C**
15	**D**	15	**C**	15	**A**	15	**E**
16	**B**	16	**A**	16	**A**	16	**A**
17	**C**	17	**E**	17	**D**	17	**A**
18	**C**	18	**E**	18	**D**	18	**D**
19	**C**	19	**D**	19	**E**	19	**C**
20	**D**	20	**D**	20	**D**	20	**A**
21	**A**	21	**E**	21	**B**	21	**C**
22	**D**	22	**C**	22	**D**	22	**C**
23	**B**	23	**D**	23	**D**	23	**B**
24	**B**	24	**C**	24	**C**	24	**B**
25	**A**	25	**B**	25	**A**	25	**B**

XII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel I

1. (B) Se hace la suma con más facilidad si tenemos en cuenta que la cifra 7 se repite 4 veces en las unidades ($7 \times 4 = 28$), 3 veces en la decenas, 2 veces en las centenas y una vez en los millares. La suma es: 0,8638.

2. (D) Basta calcular, uno tras otro, a, b, c, d :

$$a = 527 - 305 = 222$$
$$b = 210 + 109 = 319$$
$$c = 2047 : 23 = 89$$
$$d = 17 \times 20 = 340$$
$$a + b + c + d = 970.$$

3. (D) En primer lugar veremos en que puesto resulta más ventajoso hacer el cambio. En el primero la relación es 10/3 y en el segundo 15/4 que, reducidas a común denominador son respectivamente 40/12 y 45/12, por lo que está claro que nos interesa cambiar el máximo número de cromos en el primer puesto. La relación 40/12 nos conduce a añadir otros 10 cromos viejos y obtener 12 + 3 = 15 nuevos a cambio de 50 repetidos, aunque nos quedamos con 8 repetidos. Pero es inmediato ver que si, en el primer puesto, solo cambio 40, me quedan 18 que, canjeados en el otro puesto, me proporcionan 4 cromos nuevos y me sobran 3 repes. Como 3 es menor que 10/3 (lo que "vale" un cromo nuevo en el caso más favorable), no hay forma de mejorar los cambios realizados. De modo que como mucho puedo conseguir 12 + 4 = 16 cromos nuevos.

4. (C) Podemos escribir las sumas como dos ecuaciones:

◈ + ⮝ = ✱

✱ + ✹ = 10 × ◓ + ◈

Sustituyendo ✱ por ◈ + ▲ en la segunda, tenemos:
◈ + ▲ + ✷ = 10 × ◓ + ◈
De donde: ▲ + ✷ = 10 × ◓**,** pero como ▲ y ✷ son menores o igual que 9, tenemos que ◓ es menor que 2, y como no es 0 entonces ◓ = 1.
Por lo tanto: ▲ + ✷ = 10

5. (A) Observemos que las distintas filas, a partir de la segunda, se obtienen multiplicando los números de la primera por 2, 3, 4 y 5 respectivamente. Como los números de la primera fila suman 15, la suma pedida es:

$$15\times1+15\times2+15\times3+15\times4+15\times5=15\times(1+2+3+4+5)=15\times15=225.$$

6. (D) Sea N el número y sea x el valor común del cociente y el resto. Como el divisor es 28 tenemos: N = 28x + x = 29x

En nuestro caso el mayor valor posible de x es 27 ya que el resto debe ser menor que el divisor. Por lo tanto: N = 28 × 27 = 783.

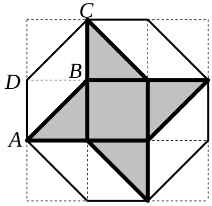
7. (C) Sin incluir la nueva palabra, la E aparece 9 veces, de modo que si añadimos la palabra DI**E**Z, la frase es verdadera.

8. (E) Descomponemos 120 en factores primos; $120=2^3\times3\times5.$ De aquí es fácil formar todos los divisores del número:

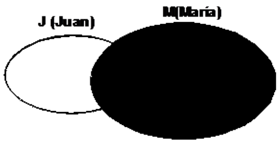
1, 2, 4 y 8 son 4 divisores de 120 (todos los que se pueden formar con la unidad y el factor 2). Si ahora multiplicamos cada uno de los 4 divisores anteriores por el factor 3 tendremos 4 divisores más (todos los que se pueden formar con los factores 1, 2 y 3). Reiterando el proceso, multiplicamos cada uno de los 8 divisores que tenemos por el factor 5 y tenemos todos los divisores que incluyen a los factores anteriores más el factor 5 (8 divisores más), en total tenemos pues 16 divisores, que son todos los posibles.

9. (A) Si agrupamos los números comprendidos entre 2008 y 8002 en ternas: (2008, 2009, 2010), (2011, 2012, 2013)… …(7999, 8000, 8001), (8002…), donde sólo el último número de cada una es múltiplo de 3, vemos que habrá tantos múltiplos de 3 entre 2008 y 8002, como ternas entre 2008 y 8001, esto es: $\frac{8001-2008+1}{3}=1998$.

10.(E) Completando la figura con otros ocho cuadrados iguales al central, establecemos claramente que el lado *CD* del octógono es igual al *AB* del molinillo por ser ambos diagonales de cuadrados iguales y, evidentemente, el lado *AD* es igual al *BC*. Realizando análogas operaciones en cada uno de los paralelogramos sombreados podemos igualar, dos a dos, las longitudes de todos los lados del octógono con los correspondientes lados del perímetro del molinillo. Por lo tanto el perímetro del molinillo es igual a perímetro del octógono, es decir, 12 m.



11.(E) En el diagrama de Veen de la figura, la parte "María y no Juan", sombreada en claro, representa el número de cromos pedido.

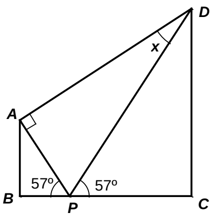


Llamando N(X) al número de elementos de un conjunto X, tenemos:

$N(M \cup J) = N(M) + N(J) - N(M \cap J)$, es decir,

$240 - 10 = 192 + 160 - N(M \cap J)$, de donde $N(M \cap J) = 122$ y de ahí, el número de cromos que tiene María pero no tiene Juan: $192 - 122 = 70$.

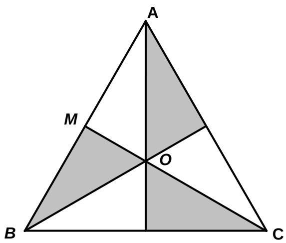
12.(A) En 5ºA hay 20 alumnos y $\frac{1}{2}20 = 10$ chicas. En 5ºB hay 25 alumnos y $\frac{3}{5}25 = 15$ chicas. Luego en 5º, la proporción de chicas será: $\frac{10+15}{20+25} = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$.



13.(E) En el triángulo *PAD* el ángulo $\hat{P}$ es igual a: 180º – (57º + 57º) = 180º – 114º = 66º y como es rectángulo ($\hat{A}$ = 90º), tenemos: x = 90º – 66º = 24º.

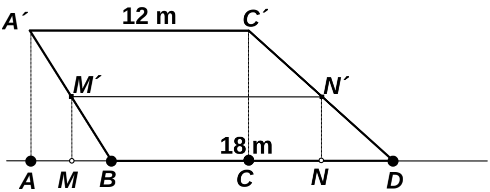
14.(D) Empecemos clasificando las aristas de un prisma. a) Aristas laterales: en igual número que las caras laterales y b) aristas de las bases: en cada una de las dos bases el número de aristas es igual al número de lados del polígono que la forma, y ese número es precisamente el número de caras laterales. En consecuencia tenemos tres grupos de aristas con el mismo número de aristas en cada uno. En nuestro caso ese número es 42/3 = 14. Tenemos pues, 14 caras laterales y las dos bases, en total 16 caras.

15.(C) En la figura hemos dividido el triángulo en 6 pequeños triángulos. Pero por razones de simetría podemos asegurar que todos tienen las mismas dimensiones. Por lo tanto el área del triángulo *BOM* es: 24/6 = 4 cm^2.



16.(B) Los números que dan resto 1 al dividirlos por 11 son los múltiplos de 11 + 1: 11×1 + 1, 11×2 + 1, 11×3 + 1… De ellos, los pares son: 11×1 + 1, 11×3 + 1, 11×5 + 1… Calculando los menores que 200 tenemos: 12, 34, 56, 78, 100, 122, 144, 166, y 188. Pero el único que es múltiplo de 9 es 144 y el producto de sus cifras es 16.

17.(A) Si obtenemos los puntos *A* y *C* a partir del trapecio *A´BDC´*, por proyección de *A´* y *C´* según se muestra en la figura, entonces, los puntos medios de *AB* y *CD* serán las proyecciones, *M* y *N*, de los extremos de la paralela media *M´N´*. Como la longitud de la paralela media del trapecio es la semisuma de las longitudes de sus bases, la distancia pedida es: $\frac{12+18}{2}=15$ m.



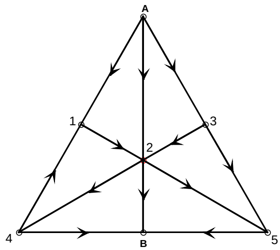
18.(A) Como desde *A* se puede ir de modo único a los puntos *1, 2, 3,* el problema se reduce a contar las formas de ir de esos puntos hasta *B*.

Desde *1*: *12B, 125B, 124B* (3 formas).

Desde *2*: *25B, 2B, 24B* (3 formas).

Desde *3*: *32B, 35B, 324B, 34B* (4 formas).

En total se puede ir de 3 + 3 + 4 = 10 formas distintas.



19.(A) Esteban tiene *x* caramelos e *y* amigos, dado que si repartiese 25 caramelos a cada uno le sobrarían 5, tenemos: $x = 25y + 5$. Pero como reparte 28 a $y-1$ amigos y le sobran 6, también tenemos: $x = 28(y-1) + 26 = 28y - 28 + 6 = 28y - 22$.

Igualando ahora las dos expresiones de *x*

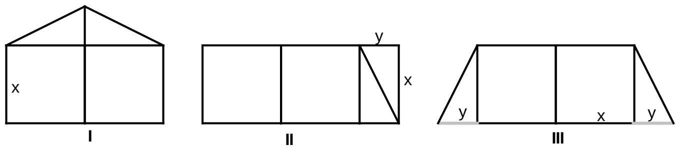
$$28y - 22 = 25y + 5 \Rightarrow 3y = 27 \Rightarrow y = \frac{27}{3} = 9, \text{ de donde } x = 25 \times 9 + 5 = 230.$$

20.(D) Los perímetros las figuras I y III se diferencian únicamente en que en la III aparecen dos segmentos, señalados como *y*, que no están en el perímetro de la I, por lo tanto:

$$y = \frac{84 - 74}{2} = 5.$$

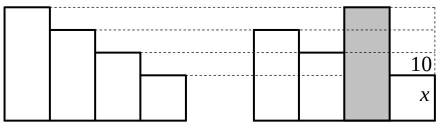
Y de la figura II podemos escribir: $6x + 2 \times 5 = 82 \Rightarrow x = \frac{82 - 10}{6} = 12$.

Por lo que, finalmente, el área pedida es: $\frac{5 \times 12}{2} = 30 \text{ cm}^2$.



21.(B) Contando, en la segunda figura, los tramos de longitud *x* y los de longitud 10, tenemos: $10x + 8 \times 10 = 270 \Rightarrow x = \frac{270 - 80}{10} = 19$ cm.

Calculamos ahora el área del rectángulo sombreado: $19^2 + 30 \times 19 = 931$ cm^2.



22.(E) Desde las 6 de la mañana del martes hasta las 6 de la mañana del miércoles trascurren 24 horas y desde esa hora hasta las 6 de la tarde 12 horas más. De modo que, radio Lolailo, ha estado emitiendo 24 + 12 + 1 = 37 horas a razón de cuatro rumbitas por hora, lo que supone 37 × 4 = 148 rumbitas.

23.(E) Como el tercer lado no puede ser mayor que 7 + 5 =12 cm ni menor que 7 − 5 = 2, entones, no puede medir 1 cm.

24.(B) Como las vueltas completas no afectan a la dirección final, el problema se reduce a girar primero un cuarto de vuelta en el sentido de las agujas del reloj; y luego tres cuartos de vuelta en sentido contrario. Resulta que al final la flecha habrá girado, desde la posición inicial, media vuelta en sentido contrario a las agujas del reloj y por tanto apuntará al este.

25.(C) De la primera condición se deduce que un bocata de jamón vale como 2 refrescos más 2 bolsas de gusanitos. Pero como 2 refrescos cuestan lo mismo que 5 bolsas de gusanitos, tenemos pues, que un bocata de jamón vale igual que 5 + 2 = 7 bolsas de gusanitos.

XII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase 2º Nivel

1. (B) Número de cuartos de vuelta en el sentido de las agujas del reloj $2 \times 4 + 1 = 9$. Número de cuartos de vuelta en el sentido contrario $3 \times 4 + 3 = 15$. Diferencia $15 - 9 = 6$ cuartos de vuelta = 1 vuelta + media vuelta en el sentido contrario de las agujas del reloj. La flecha, al final, marcará E.

2. (D) Como perímetro de $Y = 2\pi r = 8\pi$ cm, radio de Y = 4 cm. Como el área de Z es $\pi r^2 = 9\pi$ cm^2, radio de Z = 3 cm. Por lo tanto, la colocación pedida es: Z, Y, X.

3. (C) Perímetro de un rectángulo: 2 + 2 + 4 + 4 = 12. El perímetro del otro rectángulo es 12. Al juntar ambos rectángulos para formar la T, perdemos 2 cm del borde de un rectángulo y 2 cm del otro; por lo tanto, el perímetro de la figura es:
12 + 12 – (2 + 2) = 20.

4. (E) Número de chicos con puntuación mayor o igual que 80 puntos, 544 – 232 = 312. Número total de chicos, 312 + 104 = 416. Si entre 416 chicos, hay 312 que obtienen una puntuación mayor o igual que 80, entre 100, habría $\frac{312 \times 100}{416} = 75$

La respuesta es el 75%.

5. (C) Suman1: 10. Suman 4: 13, 22, 31, 40. Suman 9: 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90. Suman 16: 79, 88, 97. Suman 25: Ninguno. Total: 17.

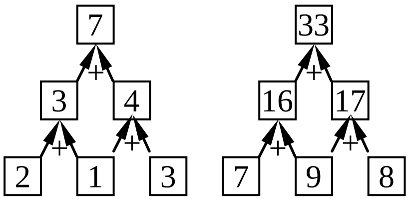
6. (A) El volumen del agua, antes de introducir la piedra, es $100 \times 40 \times 37 = 148\,000$ cm^3. Volumen de la piedra más volumen del agua: 149 000 cm^3. El agua, al final, alcanzará una altura de $\frac{149\,000}{40 \times 100} = 37{,}25$ cm.

7. (C) Como cada jugador juega 5 partidos, el número total de partidos jugados será $\frac{6 \times 5}{2} = 15$. Como el número de partidos ganados por jugadores distintos de Félix es 4 + 3 + 2 + 2 + 2 = 13, este último jugador habrá ganado 15 – 13 = 2 partidos.

8. (C) Como el número de monedas tiene que ser múltiplo de 6, más 4, las posibilidades son: 42 + 4 = 46, 48 + 4 = 52, 54 + 4 = 58, 60 + 4 = 64. Pero, de estos 4 números, sólo hay uno que cumpla la condición de ser múltiplo de 5, más 3: el 58. Y como 58 = 7 × 8 + 2, la respuesta es 2.

9. (D) Número de problemas que Arcediano resolvió correctamente:
$\frac{70x10}{100}+\frac{80x20}{100}+\frac{90x30}{100}=50$. Pero, si de 60 problemas, resuelve 50, de 100, resolverá $\frac{50\times 100}{60}=83,\overset{\frown}{3}$. Por lo tanto, la respuesta es 83.

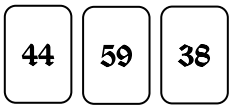
10. (D) Para obtener en el cuadrado de arriba el menor número posible, habrá que colocar en los tres cuadrados inferiores los números más pequeños, cuidando de que el menor de los tres ocupe el lugar central.
Con esta distribución obtendremos:
(2 + 1) + (1 + 3) = 3 + 4 = 7. Para obtener el número mayor posible, procederemos así:
(7 + 9) + (9 + 8) = 16 + 17 = 33.
Diferencia pedida: 33 – 7 = 26.



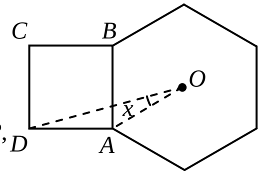
11. (D) En cada cara hay 4 cuadraditos negros y 5 blancos; por lo tanto, en las 6 caras habrá 24 cuadraditos negros y 30 blancos. La fracción pedida será, lógicamente, $\frac{30}{54}=\frac{5}{9}$.

12. (A) $ABA=\frac{CDCD}{CD}=\frac{CD00+CD}{CD}=100+1=101$; Por lo tanto, $A + B = 1$.

13. (B) Llamando x al número que hemos escrito por detrás del 59, las tres sumas mencionadas se pueden expresar de la forma 44 + 15 + x, 59 + x y 38 + 21 + x, y los tres números ocultos serán: 15 + x, x y 21 + x. Observamos que x no puede ser impar, porque, entonces, 15 + x y 21 + x serían pares y, por lo tanto, no serían primos. Pero si x es par, tampoco sería primo, salvo que se trate del número 2. Por consiguiente, los números ocultos tienen que ser 17, 2 y 23, cuya media es $\frac{17+2+23}{3}=\frac{42}{3}=14$.



14.(C) Sabemos que en el hexágono regular el lado es igual al radio; por tanto el triángulo OAB es equilátero y el ángulo $O\hat{A}B$ mide 60º.



De la figura se desprende que $D\hat{A}O = 90º + 60º = 150º$, $2x + D\hat{A}O = 180º$, luego $x = 15º$.

15.(A) En la tabla siguiente se recogen todos los casos:

xº	10	20	30	40	50	60	70	80
yº	10	20	30	40	50	60	70	80
zº	160	140	120	100	80	60	40	20

16.(E) Si aplicamos algunas de las propiedades de las operaciones con potencias, obtenemos:

A) $2^4 \cdot 5^4 \cdot 22 = (2 \cdot 5)^4 \cdot 22 = 22 \cdot 10^4$

B) $2^5 \cdot 3 \cdot 5^4 = 2^4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5^4 = 2 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 5)^4 = 6 \cdot 10^4$

C) $2^4 \cdot 5^6 = 2^4 \cdot 5^4 \cdot 5^2 = (2 \cdot 5)^4 \cdot 25 = 25 \cdot 10^4$

D) $2^4 \cdot 5^3 \cdot 50 = 2^4 \cdot 5^3 \cdot 5 \cdot 10 = 2^4 \cdot 5^4 \cdot 10 = 10 \cdot (2 \cdot 5)^4 = 10 \cdot 10^4$

E) $2^4 \cdot 5^5 \cdot 7 = 2^4 \cdot 5^4 \cdot 5 \cdot 7 = (2 \cdot 5)^4 \cdot 5 \cdot 7 = 35 \cdot 10^4$

17.(E) Los casos favorables son:

(2, 1), (3, 1), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2), (6, 1), (6, 2), (6, 3)

Nota: La 1ª puntuación que aparece es la mía y la 2ª la del guardián.

El nº de casos posibles es $6 \times 6 = 36$.

Luego $p = \dfrac{nº\ de\ casos\ favorables}{nº\ de\ casos\ posibles} = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$.

18.(C)

	Edad hace 3 años	**Edad actual**	**Edad dentro de 7 años**
Padre	x - 3	x	x + 7
Hijo	y - 3	y	y + 7

$$\left.\begin{array}{l} x-3=3\,(y-3) \\ x+7=2\,(y+7) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x-3y=-6 \\ x-2y=\ \ 7 \end{array}\right\}$$

Resolviendo este sistema, resulta: x = 33, y = 13, luego $x + y$ = 46 .

19.(C) Para que $a11b$ sea múltiplo de 12, tiene que serlo de 3 y de 4. Por tener que ser múltiplo de 4, tiene que verificarse:

$a11b=\dot{4} \Leftrightarrow 1b=\dot{4} \Leftrightarrow 1b=12 \quad ó \quad 1b=16 \Leftrightarrow b_1=2 \quad ó \quad b_2=6$. Pero como a11b tiene que ser, además, múltiplo de 3, ha de cumplirse que:

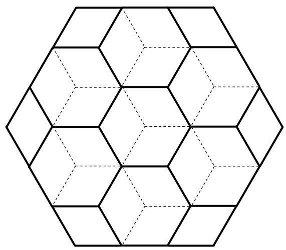
a) Para b_1=2: $a+1+1+2=\dot{3}, \quad a=\dot{3}-4$.

b) Para b_2=6: $a+1+1+6=\dot{3}, \quad a=\dot{3}-8$

$b_1 = 2$		$b_2 = 6$	
$\dot{3}$	a	$\dot{3}$	a
6	2	9	1
9	5	12	4
12	8	15	7
15	~~11~~	18	~~10~~

Por lo tanto, el número pedido es 3 + 3 = 6.

20.(E) Descomponemos cada hexágono en tres rombos, iguales a los rombos de las esquinas, tal como se muestra en la figura.



El número total de rombos es: 7 × 3 + 6 = 27, luego el área de cada uno de ellos es 540 : 27 = 20 cm^2.

21.(E) Llamemos a los números: x, $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4$, $x+5$, $x+6$.

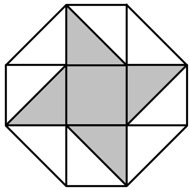
Como la suma de los tres primeros es 33, escribimos:

$x + (x+1) + (x+2) = 33$; de aquí obtenemos que $3x = 30$.

Escribamos ahora la suma de los tres mayores: $(x + 4) + (x + 5) + (x + 6)$,

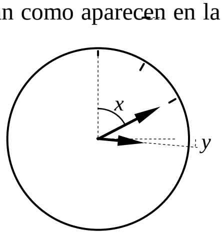
Que, efectuando operaciones, es igual a $3x + 15$; y teniendo en cuenta que $3x = 30$, dicha suma asciende a $30 + 15 = 45$.

22.(D) Descomponiendo el octógono como muestra en la figura, su superficie consta de 5 cuadrados y 4 triángulos. Como cada 2 triángulos equivalen a 1 cuadrado, en total tenemos 7 cuadrados. Como se nos dice que el área del octógono es de 42 m^2, el área de cada cuadrado será de $42 : 7 = 6$ m^2.



En la figura observamos que el molinillo está formado por un cuadrado y 4 triángulos; en total es como si tuviésemos 3 cuadrados, luego el área del molinillo es $6 \times 3 = 18$ m^2.

23.(C) Las agujas del reloj, a las 3 horas y 10 minutos se encontrarán como aparecen en la figura. De la observación de esta figura, deducimos:

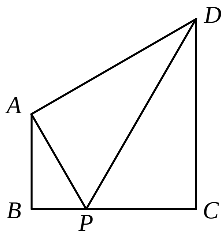


$x = 90º : 3 = 30º$ (ángulo que forma la aguja de los minutos con la horizontal).

La aguja horaria, cada hora (60 minutos) habrá girado 30º (se obtiene de dividir los 360º de la circunferencia entre 12 horas), luego en 10 minutos habrá girado la sexta parte, o sea 5º. Este valor se puede obtener también mediante la regla de tres:

$$\left.\begin{array}{lcl} 60 \text{ minutos} & ----- & 30º \\ 10 & --------- & y \end{array}\right\} \quad y = \frac{10 \times 30}{60} = 5$$

Luego el ángulo que forman las agujas es de $30º + 5º = 35º$.



24.(D) Los dos triángulos mayores son iguales, por ser semejantes y tener igual (común) el lado *PD*, luego *PC* = *AP* = 12 cm. Al ser semejantes los tres triángulos, los ángulos correspondientes han de ser iguales, luego los tres ángulos cuyo vértice es P son iguales y por tanto cada uno mide 180º : 3 = 60º. De aquí deducimos que el triángulo *ABP* es la mitad de un triángulo equilátero, y por tanto *BP* mide la mitad de *AP*, o sea, 12 : 2 = 6 cm, luego *BC* = *BP* + *PC* = 6 + 12 = 18 cm.

25.(E) Para resolver este ejercicio hemos de tener muy claras las reglas para calcular el máximo común divisor (MCD) y el mínimo común múltiplo (MCM).

En primer lugar se nos dice que MCD (24, 42) = MCD (24, *m*) = MCD (42, *m*).

Calculamos MCD (24, 42):

$24 = 2^3 \cdot 3$, $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, luego MCD (24, 42) = $2 \cdot 3$.

De que MCD (24, *m*) = $2 \cdot 3$, y que $24 = 2^3 \cdot 3$, se deduce que ***m*** ha de tener como factores el 2 y el 3.

De que MCD (42, *m*) = $2 \cdot 3$, y que $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, se llega a la misma conclusión anterior.

Por otra parte se nos dice que MCM(6, 15) = MCM(6, *m*) = MCM (15, *m*).

Calculamos MCM(6, 15):

$6 = 2 \cdot 3$, $15 = 3 \cdot 5$, luego MCM(6, 15) = $2 \cdot 3 \cdot 5$.

De que MCM(6, *m*) = $2 \cdot 3 \cdot 5$, y que $6 = 2 \cdot 3$, se deduce que ***m*** ha de tener como factor el 5.

De que MCM(15, *m*) = $2 \cdot 3 \cdot 5$, y que $15 = 3 \cdot 5$, se deduce que ***m*** ha de tener como

factor el 2 (condición ya obtenida antes).

Luego el número ***m*** ha de ser igual a $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

XII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel III

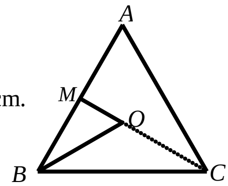
1. (A) Si Nacho tiene actualmente x años, su padre tiene $4x$. Dentro de cuatro años Nacho tendrá $x + 4$ años y su padre $4x + 4$. Como el padre tendrá el triple de edad que Nacho tenemos que $4x + 4 = 3\cdot(x + 4)$ así pues $x = 8$ y por tanto Nacho tiene actualmente 8 años y su padre 32.
Para saber dentro de cuántos años la edad del padre será el doble de la de Nacho planteamos una nueva ecuación, $32 + y = 2\cdot(8 + y)$, cuya solución es $y = 16$.

2. (D) $10! = 2\cdot5\cdot3^2\cdot2^3\cdot7\cdot2\cdot3\cdot5\cdot2^2\cdot3\cdot2\cdot1 = 7\cdot5^2\cdot3^4\cdot2^8$. Si descomponemos un cubo perfecto en producto de primos, todos los primos estarán elevados a un múltiplo de tres. Así pues, para obtener el menor cubo perfecto debemos multiplicar 10! por $7^2\cdot5\cdot3^2\cdot2 = 4410$.

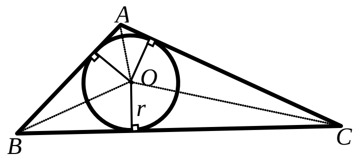
3. (C) El lado del triángulo mide 8 cm luego $MB = 4$ cm.

$MO + OB = MC$ que es la altura del triángulo y mide $4\sqrt{3}$ cm.

Así pues, el perímetro del triángulo es 4 + $4\sqrt{3}$ cm.



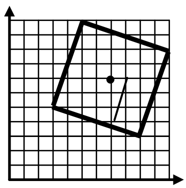
4. (A) Las bisectrices dividen al triángulo en tres triángulos con la misma altura, r, que es el radio de la circunferencia inscrita.
El área del triángulo grande es igual a la suma de las áreas de los tres triángulos pequeños.



$$30 = \frac{AB\cdot r}{2} + \frac{BC\cdot r}{2} + \frac{CA\cdot r}{2} = (AB + BC + CA)\cdot\frac{r}{2} = 30\cdot\frac{r}{2}$$. Luego $r = 2$ cm.

5. (D) Como uso el doble de tiempo para subir que para bajar, la velocidad media es $\frac{12\cdot2 + 24}{3} = 16$ km/h

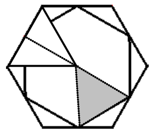
6. (B) Un buen dibujo puede ayudarnos a resolver este problema. Las coordenadas del centro O son (7, 7).



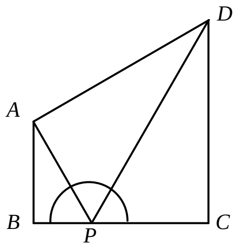
7. (D) Llamemos *a* al lado desconocido. Si el lado mayor mide 15 cm, para que el triángulo sea acutángulo se debe cumplir que $a^2 + 10^2 > 15^2$ luego $a > \sqrt{125}$ y como debe ser entero, el menor valor posible para *a* es 12.

8. (E) La clave está en darse cuenta que $N + 1$ es múltiplo de 5 y de 7 y por tanto lo es de 35. Luego $N + 1 = 35 \cdot a$ y $N = 35 \cdot a - 1 = 35 \cdot (a - 1) + 34$. Así pues, el resto de dividir *N* entre 35 es 34.

9. (C) Observa que la apotema del hexágono grande es igual al lado del hexágono pequeño. Luego la razón entre sus lados es $1 : \sqrt{3}/2$ y por tanto la razón entre sus áreas es $1 : 3/4$, así que el área del pequeño es $20 \cdot 3/4 = 15$ cm^2.

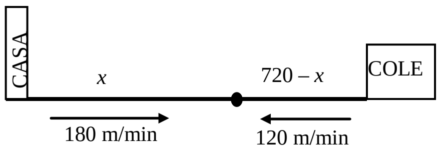


10. (E) Los triángulos grandes, *PCD* y *APD*, son iguales pues son semejantes y comparten la hipotenusa. $B\hat{P}A = 60º$ pues los tres ángulos homólogos suman 180º. Así pues, $AP = 2 \cdot BP$ y por tanto la razón de semejanza entre el triángulo pequeño y los grandes es 2. El área de un triángulo grande es $12 \cdot 2^2 = 48$ cm^2 con lo que el área del trapecio es $12 + 2 \cdot 48 = 108$ cm^2.



11. (E) Como entre los dos tienen 192 + 160 = 352 cromos pero les faltan 10 para acabar la colección, tienen 230 cromos distintos y 352 – 230 = 122 cromos repes. Como de los 230 cromos, Juan aporta 160 cromos el resto, 230 – 160 = 70, son los cromos que tiene María y no tiene Juan.

12. (D) Es importante comprender bien la situación que se plantea.
Como queremos
$$\frac{x}{180} = \frac{720 - x}{120}, \quad x = 432 \text{ m.}$$



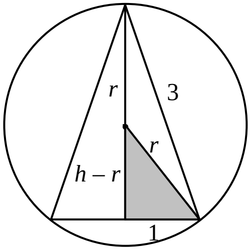
13. (B) En total hay 75 alumnos. En A hay $\frac{3}{5} \cdot 30 = 18$ chicas, en B $\frac{2}{5} \cdot 25 = 10$ y en C $\frac{1}{2} \cdot 20 = 10$, así que hay 38 chicas en total y la proporción es de $\frac{38}{75}$.

14. (E) . $(3\otimes 5)-(5\otimes 3)=(3+5)\cdot 5-(5+3)\cdot 3=8\cdot 2=16$

15. (D) Sin más que observar que los triángulos *BOC* y *BOA* son isósceles, obtenemos que $A\hat{B}O=20^{o}$ y $O\hat{B}C=30^{o}$ y, por tanto, $A\hat{B}C=50^{o}$.

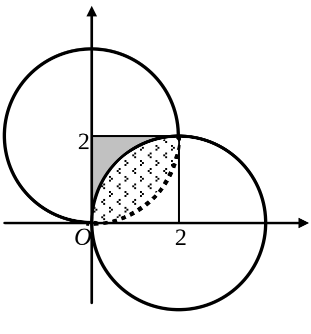
16. (D) Como los ángulos de un cuadrilátero suman 360º tenemos que $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360^{o}$ y, por tanto, $\hat{A}+\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{A}}{3}+\frac{\hat{A}}{4}=360^{o}$; $\frac{25}{12}\hat{A}=360^{o}$ luego $\hat{A}=\frac{360\cdot 12}{25}=\frac{72\cdot 24}{10}=172{,}8^{o}\approx 173^{o}$.

17. (C) Calculamos la altura *h* del triángulo sobre el lado desigual, $3^2=1^2+h^2$; $h=2\sqrt{2}$. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo sombreado obtenemos $r^2=1^2+(2\sqrt{2}-r)^2$;
$r^2=1+8-4\sqrt{2}r+r^2$ luego $r=\frac{9}{4\sqrt{2}}$ y el área del círculo es $\pi r^2=\pi\frac{81}{32}$



18. (D) Llamemos *a*, *b* y *c* a las edades de los hijo de Juan. Tenemos que
$\begin{cases} T=a+b+c \\ T-N=2[(a-N)+(b-N)+(c-N)] \end{cases}$; $\begin{cases} T=a+b+c \\ T-N=2(a+b+c)-6N \end{cases}$;
$T-N=2T-6N$; $T=5N$ y por tanto $\frac{T}{N}=5$

19. (D) El área común es el área de un cuadrado de lado 2 cm menos dos veces el área sombreada. El área sombreada es, de nuevo, el área del cuadrado menos el área de un cuarto de círculo, luego $A_{Sombredada}=2^2-\frac{1}{4}\pi\cdot 2^2=4-\pi$
$A_{Común}=2^2-2\cdot(4-\pi)=2\pi-4=2(\pi-2)$ cm^2.



20. (C) Si llamamos x a la nota media de los alumnos de la ESO, la nota media total es $\frac{10x + 90\cdot 83}{100} = 84$, luego la nota media de los alumnos de la ESO es $x = 93$.

21. (E) Escribamos las ecuaciones como potencias de igual base y utilicemos las propiedades de las potencias:

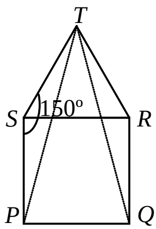
$3^a = \left(3^4\right)^{b+2};\ 3^a = 3^{4b+8} \qquad \left(5^3\right)^b = 5^{a-3};\ 5^{3b} = 5^{a-3}$.

Resolviendo el sistema $\begin{cases} a = 4b + 8 \\ 3b = a - 3 \end{cases}$ obtenemos que $a = -12$ y $b = -5$ y por tanto $a\cdot b = 60$.

22. (D) $75\cdot m = 3\cdot 5^2\cdot m$ y por tanto el menor valor de m para que ese número sea un cubo perfecto es $m = 3^2\cdot 5 = 45$; $n^3 = 3^3\cdot 5^3$; $n = 3\cdot 5 = 15$. $m + n = 60$.

23. (C) Los triángulos PST y QRT son isósceles y su ángulo desigual mide 150º luego sus dos ángulos iguales miden 15º.

Así pues el ángulo $P\hat{T}Q = 60 - 2\cdot 15 = 30$º.



24. (B) Los únicos pares de resultados que nos sirven son (1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 6), (6, 3), (6, 4) y (4, 6). Como hay 36 pares de resultados posibles al lanzar dos dados, la probabilidad es $\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$.

25. (E) Tomamos tres palitos, si llamamos P a la longitud del palito pequeño, M a la del mediano y G a la del mayor, para poder formar un triángulo se debe cumplir que $P + M > G$. Las ternas que cumplen esta condición son (3, 5, 7); (3, 11, 13); (5, 7, 11); (5, 11, 13) y (7, 11, 13) luego se pueden formar 5 triángulos diferentes.

XII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel IV

1. (B) Como el vértice es el punto V(2, 1), la ecuación de la parábola es:
$y-1=a\left(x-2\right)^2$
Si pasa también por (4, 9): $9-1 = a\ (4-2)^2 \Rightarrow \quad a=2$ .Por tanto, para x = 1, es
$y=1+2\left(1-2\right)^2=3$.

2. (A) La altura sobre el lado del rombo vale $l\cdot sen(30^o)=10\cdot\frac{1}{2}=5\ cm$. Y el área del rombo, como de todo paralelogramo es: A = b · h = 10 · 5 = 50 cm^2.

3. (E) Según el teorema del seno, $\frac{a}{sen\ A}=2R \Rightarrow \quad \frac{4}{1/2}=2R\Rightarrow R=4$ cm.

4. (A) Con x = 1, tenemos que resolver la ecuación 3y + 2z = 14, que tiene dos soluciones con enteros positivos: y = 2; z = 4; y = 4, z = 1.
Con x = 2, tenemos la ecuación 3y + 2z = 10, que tiene la solución y = 2, z = 2.
Para $x\geq 3$, $3y+2z\leq 6$ y ya no hay soluciones con sólo enteros positivos.

5. (B) La primera medida, ni siquiera forma triángulo con los lados dados porque no cumple la desigualdad triangular. La segunda medida forma un triángulo isósceles obtusángulo $15^2>10^2+10^2$. La tercera forma un triángulo isósceles acutángulo, la cuarta también forma triángulo acutángulo ($18^2<10^2+15^2$), y la última medida forma un triángulo obtusángulo ($20^2>10^2+15^2$).

6. (C) Como el resto al dividir por x – 2 es 5 $\Rightarrow \quad P(x)=(x-2)\cdot C(x)+5$
Al ser el resto al dividir entre x – 5, 2 $\Rightarrow \quad P(x) = (x-5)\cdot D(x)+2$.
Si multiplicamos la primera igualdad por x – 5 y la segunda por x – 2, tenemos:
$P(x)\cdot(x-5)=(x-2)\cdot(x-5)\cdot C(x)+5\cdot(x-5)$
$P(x)\cdot(x-2)=(x-2)\cdot(x-5)\cdot D(x)+2\cdot(x-2)$
Restando ahora miembro a miembro estas dos igualdades obtenemos:

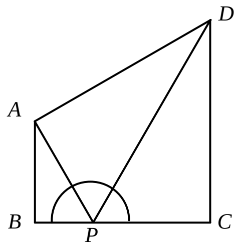
$$3 \cdot P(x) = (x-2)\cdot(x-5)\cdot\left[D(x) - C(x)\right] + 2x - 4 - 5x + 25 \Rightarrow$$
$$P(x) = (x^2 - 7x + 10)\cdot E(x) + (-x + 7).$$

7. (E) Razonando como en el problema anterior, si llamamos *N* al número tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} N = 5C + 3 \\ N = 7C' + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 7N = 35C + 21 \\ 5N = 35C' + 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 21N = 35\cdot 3C + 63 \\ 20N = 35\cdot 4C' + 40 \end{array}\right\} \Rightarrow N = 35(3C - 4C') + 23\,.$$

8. (B) El nº de casos igualmente posibles es 8:
CCC, CC+, C+C, C++, +CC, +C+, ++C, +++
Y sólo en tres de ellos aparecen dos caras seguidas.

9. (C) Los tres ángulos con vértice en P son iguales por la semejanza de los tres triángulos. Por tanto cada uno mide 60º.



Las bases del trapecio suman *BP*·tg 60º + *PC* ·tg 60º = 12·tg 60º = $12\sqrt{3}$.

Y el área es $A = \frac{B+b}{2}\cdot h = \frac{12\sqrt{3}}{2}\cdot 12 = 72\sqrt{3}\ cm^2$

10. (E) Como voy al colegio un tercio más rápido que vuelvo, $v_1 = \frac{4}{3}v_2 \Rightarrow 3v_1 = 4v_2$

El tiempo que tardo en llegar a la distancia *x* es $t = \frac{x}{v_1}$ y el tiempo que tardo en volver desde el colegio a este mismo punto es $t' = \frac{840 - x}{v_2}$. Como me piden *x* para que *t* = *t’*, tenemos:

$$\frac{x}{v_1} = \frac{840 - x}{v_2} \Rightarrow \frac{3x}{3v_1} = \frac{3360 - 4x}{4v_2} \Rightarrow 3x = 3360 - 4x \Rightarrow x = 480 \text{ m.}$$

11. (E) El área del hexágono regular es $A = 6\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}l^2$. Por tanto el lado del hexágono es $216 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}l^2 \Rightarrow l = \dfrac{12}{\sqrt[4]{3}}$ cm. Los segmentos AB y AC miden: $\dfrac{4}{\sqrt[4]{3}}$ cm, y el área del triángulo ACB es $A = \dfrac{AB{\cdot}AC{\cdot}sen120º}{2} = \dfrac{\frac{4}{\sqrt[4]{3}}\cdot\frac{4}{\sqrt[4]{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 4$ cm^2.

12. (E) $51^{48} = (50+1)^{48} = \binom{48}{0}50^{48} + \binom{48}{1}50^{47} + ... + \binom{48}{46}50^2 + \binom{48}{47}50 + \binom{48}{48}$.

De todos los términos de este desarrollo, los únicos que pueden influir en las dos últimas cifras del resultado son los dos últimos, ya que los anteriores tienen un factor potencia de 10 con exponente mayor o igual que 2. Pero los dos últimos términos son 2400 y 1 respectivamente, por lo que las dos últimas cifras de 51^{48} son 01.

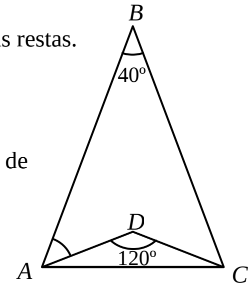
13. (C) Descomponiendo cada diferencia de cuadrados como suma por diferencia, tenemos que el valor pedido es:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{6}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right) =$$

$= \left(\frac{3}{2}\frac{4}{3}\frac{5}{4}\frac{6}{5}\frac{7}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4}\frac{4}{5}\frac{5}{6}\right)$, donde en el primer paréntesis se han puesto los resultados de las sumas y en el segundo los resultados de las restas.

Simplificando resulta $\dfrac{7}{2}\cdot\dfrac{1}{6} = \dfrac{7}{12}$.

14. (D) . Obsérvese la figura. El ángulo pedido es el suplementario de $\dfrac{40º}{2} + \left(180º - \dfrac{140º}{2}\right) = 20º + 110º = 130º$, es decir 50º.



15. (E) Si S es la suma de las edades de la madre y los hijos, y n el número de hijos,

tenemos: $\left.\begin{array}{l}\dfrac{48+S}{n+2}=20\\ \dfrac{S}{n+1}=16\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c}48+S=20n+40\\ S=16n+16\end{array}\right\} \Rightarrow 4n+24=48 \Rightarrow n=6$

16. (D) Puesto que $75 = 3\cdot5^2$, el mínimo valor de *m*, entero positivo, que haga que *n* sea también entero positivo es $m = 3^2\cdot5$, con lo que $n = 3\cdot5$, y $m + n = 60$.

17. (E) De la ecuación $a+\dfrac{1}{a}=4$, se deduce que $a=2+\sqrt{3}$ *o* $a=2-\sqrt{3}$.

En cualquier caso uno es el inverso del otro, por tanto

$a^4+\dfrac{1}{a^4}=\left(2+\sqrt{3}\right)^4+\left(2-\sqrt{3}\right)^4$ Pero en este desarrollo, los términos de exponente impar en $\sqrt{3}$ se anulan, y los de exponente par se duplican, por lo que

$$a^4+\frac{1}{a^4}=\left(2^4+6\cdot2^2\cdot\sqrt{3}^2+\sqrt{3}^4\right)\cdot2=(16+72+9)\cdot2=194\,.$$

18. (B) Desarrollando la diferencia de cuadrados, tenemos: $(m + n)\cdot(m – n) = 96$. Ahora, 96 tiene doce divisores, que son 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48 y 96, lo que produce seis posibles parejas de números enteros positivos con producto 96. De ellas, hay dos que corresponden a $(m + n)$ par, pero $(m – n)$ impar, lo que es imposible con *m* y *n* enteros positivos. Quedan, por tanto, cuatro posibles parejas válidas: (25, 23), (14, 10), (11, 5) y (10, 2).

19. (B) Si elevamos al cuadrado cada igualdad, tenemos:

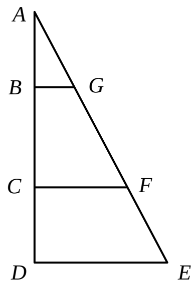
$\left.\begin{array}{l}sen^2a+sen^2b+2sen\,a\,sen\,b=\dfrac{5}{3}\\ \cos^2a+\cos^2b+2\cos a\cos b=1\end{array}\right\}$ Sumando a continuación las dos igualdades

miembro a miembro, tenemos: $2+2\cos(a-b)=\dfrac{8}{3} \Rightarrow \cos(a-b)=\dfrac{1}{3}$.

20. (D) $f(5)=f(3\cdot2-1)=2^3+2+1=11$.

21. (C) La primera progresión tiene diferencia 7 y la segunda 9. Como el mínimo común múltiplo de 7 y 9 es 63, el siguiente número común es 2008 + 63 = 2071.

22. (D) Si el cociente de la división entre 2008 debe ser igual al resto; $D = 2008C + C = 2009\,C$. Pero todos los números propuestos son múltiplos de 2009, aunque el mayor, 4 034 072, es exactamente 2009·2008, por lo que no cumple la condición exigida, al ser el resto 0. El mayor que cumple la condición es 4 032 063.



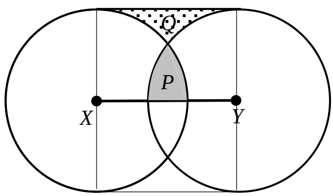
23. (C) Por el Teorema de Tales, sabemos que $\dfrac{AG}{BG} = \dfrac{AF}{CF} = \dfrac{AE}{DE}$, es decir, $\dfrac{3}{x} = \dfrac{7}{y} = \dfrac{10}{5}$. Y como “suma de antecedentes es a suma de consecuentes como un antecedente es a su consecuente” $\dfrac{3+7}{x+y} = \dfrac{10}{5} \Rightarrow x + y = 5$.

24. (B) Haciendo el inverso en los dos miembros de la igualdad dada:

$$\frac{1}{y} = 1 + \frac{1}{x+y} \quad \Rightarrow \quad x + y = xy + y^2 + y \quad \Rightarrow \quad y^2 + xy - x = 0 .$$

Y resolviendo la ecuación: $y = \dfrac{-x \pm \sqrt{x^2 + 4x}}{2}$. El radicando es positivo, y por tanto *y* es real para todos los valores positivos de *x* y también para *x* = – 6. Sin embargo, para *x* = – 3, el radicando es negativo, y por tanto *y* no es real.

25. (C) El área de la figura es la suma de las áreas de los semicírculos izquierdo y derecho más el área del rectángulo con base *XY* y altura 2. Por tanto $A = \dfrac{\pi}{2} + 2\overline{XY} + \dfrac{\pi}{2} = \pi + 2\overline{XY}$.



Pero por otro lado, el área es la suma de las áreas de los dos círculos más 2*Q* – 2*P*, es decir $A = \pi + \pi + 2Q - 2P$. Y como *P* = *Q*, el área es *A* = 2*π*. Igualando las dos expresiones, tenemos que $\overline{XY} = \dfrac{\pi}{2}$.

XII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel I

1. (E) Basta operar respetando la jerarquía de las operaciones. Obtenemos sucesivamente 1, 133, 10, 96, y 37 que, ordenados de menor a mayor, resulta: 1, 10, **37**, 96, 133. Vemos que el centro está el número 37.

2. (C) Nos dicen que en 2008 se habrán celebrado 49 olimpiadas, por lo que la olimpiada 1 se habrá celebrado el año 2008 – (49 – 1) = 1960.

3. (B) Cada 8 pasos (3 de Julián y 5 de Lucía) ambos andan la mínima distancia común para un número entero de pasos de cada uno. Cuando han finalizado los 112 pasos, el número de veces que han recorrido dicha distancia es 112/8 =14.

$14 \times 5 = 70$ pasos ha dado Lucía; $14 \times 3 = 42$ pasos ha dado Julián

70 – 42 = 48 pasos ha dado Lucía más que Julián.

4. (A) Está claro que los números que se pueden formar deben comenzar por 1 o por 4. Primero veamos cuántos empiezan por 1: para la segunda cifra tenemos 3 opciones (9, 4, 0), para la tercera sólo quedan 2 opciones y una para la cuarta, es decir, se pueden formar $3 \times 2 = 6$ números.

Empiezan por 4: para la segunda cifra disponemos de 2 opciones (no podemos emplear el 9), para la tercera tenemos dos posibilidades (podemos emplear el 9) y para la cuarta cifra solo una, en consecuencia podemos formar $2 \times 2 = 4$ números. Así que, en total, podemos formar 10 números.

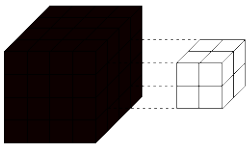
5. (D) El enunciado dice: $2 \cdot x - 23 = 123$, de donde $x = 73$ → 7 + 3 = 10. La suma pedida es 10.

6. (C) Operando con la fracción dada tenemos: $\dfrac{53{,}1 \times 0{,}046}{0{,}0021} = \dfrac{2{,}4426}{0{,}0021} = \dfrac{24426}{21}$. Si ahora transformamos los números dados en fracciones con denominador 21, será muy fácil establecer la comparación pedida:

$$1 = \frac{21}{21},\ 100 = \frac{2100}{21},\ 1000 = \frac{21000}{21},\ 10\,000 = \frac{210\,000}{21},\ 100\,000 = \frac{2100\,000}{21}.$$

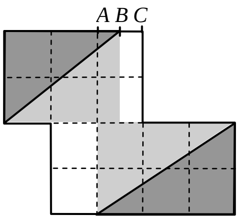
Como el numerador más próximo 24 426 es 21 000, el número pedido es 1000.

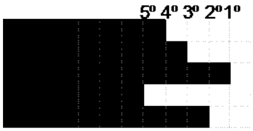
7. (C) Con 64 cubitos formamos un cubo de cuatro cubitos de lado. Si quitamos la "cáscara" pintada de rojo queda un cubo central de dos cubitos de lado, como muestra la figura. Conclusión: solo quedan 8 cubitos completamente blancos.



8. (A) $10{,}2 \blacklozenge 0{,}4 = \dfrac{10{,}2 + 0{,}4}{2 \times 10{,}2 - 0{,}4} = \dfrac{10{,}6}{20} = 0{,}53$.

9. (A) El área total es de 14 cuadrados. A la vista de la figura está claro que la parte sombreada consta de $\dfrac{5+6}{2} = \dfrac{11}{2}$ cuadrados. En consecuencia la fracción sombreada es $\dfrac{\frac{11}{2}}{14} = \dfrac{11}{28}$.





10.(A) En un esquema como el de la figura es inmediato colocar a Diana, Ana y Bea. En su ordenación observamos que entre Bea y Ana es necesario ocupar un puesto. Pero de Carlos y Esteban solo sabemos que Carlos llega tres puestos detrás de Esteban; tenemos que ocupar dos puestos entre Carlos y Esteban. Desplazando solidariamente a estos dos últimos, vemos enseguida que la única opción para ocupar sucesivamente los cinco puestos es la mostrada en la figura. Concluimos que en tercer lugar llega Ana.

11.(B) Si dividimos cada "efe" en cuatro tramos (vertical, horizontal, vertical, horizontal) y sumamos los palitos de cada tramo obtenemos inmediatamente la regla de formación:

1ª: 1 + 1 + 1 + 2

2ª: 2 + 2 + 2 + 3

3ª: 3 + 3 + 3 + 4

de modo que la 20ª "efe" tendrá 20 + 20 + 20 + 21 = 81 palitos,

12.(A) En el viaje de ida y vuelta Joaquín tarda 8:26 – 7:58 = 7:86 – 7:58 = 28 minutos, de modo que en ir de casa al colegio tardará 14 minutos. Por lo tanto cuando Joaquín llega al colegio el reloj de la casa (adelantado) marcará las 7:58 más 14 minutos, es decir, las 8:12. Dado que en ese instante el reloj del colegio marca las 8:06, el reloj de la casa de Joaquín está adelantado en 8:12 – 8:06 = 6 minutos. Como consecuencia, cuando el reloj del patio marque las 10:27 el de Joaquín marcará las 10:33.

13.(C) El ángulo exterior B es igual a la suma de los otros dos, es decir 100º = 57º + $\hat{A}$, de donde $\hat{A}$ = 100º–57º = 43º.

14.(E) Basta realizar la multiplicación teniendo presente la regla de multiplicar por 3. Como "3 por E" debe terminar en 1, E necesariamente es un 7 ($3 \times 7 = 21$). Ahora sabemos que la última cifra de "3 por D más 2" es 7, luego D tiene que ser un 5. Del mismo modo, como la última cifra de "3 por C más uno" es 5, C tiene que ser 8. Reiterando el proceso obtenemos B = 2 y A = 4. Tras comprobar que, al efectuar el último paso de la multiplicación, obtenemos A, calculamos A + C + E = 4 + 8 + 7 =19.

15.(D) Leira ha invitado a $ab = 10a + b$ amigos y Ariel a $ba = 10b + a$. Como no hay coincidencias, han invitado en total a $(10a + b) + (10b + a)$ amigos. Pero ese número se puede poner como $10(a + b) + (a + b) = 11(a + b)$; un múltiplo de 11. De los números ofrecidos solo 110 cumple esa condición.

16.(B) Para cada chica, dividamos a los chicos de la clase en dos conjuntos disjuntos; A: los chicos que estuvieron en su clase el curso pasado y B: los chicos que no estuvieron en su clase. La chica da un caramelo a cada chico del conjunto A y recibe uno de cada chico del conjunto B. de modo que, entre los caramelos que da y los que recibe, tenemos justamente el número, x, de chicos de la clase. Como hay 15 chicas, el número total de caramelos repartidos será $15x$ que, sabemos, es igual a 135. Por lo tanto $x = \frac{135}{15} = 9$.

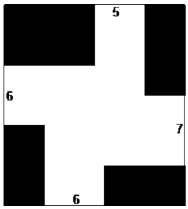
17.(C) Si empieza en el piso x basta seguir paso a paso sus travesuras:

Primero: $x + 2$; Segundo: $x + 2 - 4 = x - 2$; Tercero: $2\ (x - 2) = (2x - 4)$; Cuarto: $(2x - 4) - 7 = 2x - 11$.

Pero como acaba en la planta -3, tenemos: $2x - 11 = -3 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$.

18.(C) Al quitar la mitad del contenido de la caja, esta pasa de 242 gramos a 188, esto es, ha perdido 242 – 188 = 54 gramos. Si ahora retiramos la otra mitad del contenido perderá otros 54 gramos y quedarán 188 – 54 = 134 gramos.

19.(C) Nos ayudaremos del rectángulo de la figura, en el que la base mide 9 + 5 + 4 = 18 cm y la altura 6 + 6 + 8 = 20 cm. De donde x = 20 – (9 + 7) = 4 cm e y = 18 – (4 + 6) = 8 cm. Ahora calculamos el área pedida, restando el área de los cuatro pequeños rectángulos del área del rectángulo grande:

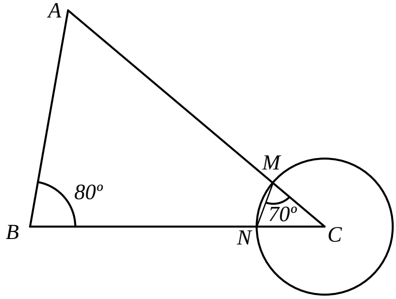


360 – (32 + 32 + 54 + 36) = 206 cm^2.

20.(D) Como 6 *tragos* = 7 *buches*, los 28 *buches* pedidos son: 28 *buches* = 24 *tragos*. Por otra parte 4 *tragos* = 5 *sorbos* implica: 24 *tragos* = 30 *sorbos* =15(2 *sorbos*) y como 2 *sorbos* = 3 *chorros*, tenemos 28 *buches* = 24 *tragos* = 15(3 *chorros*) = 45 *chorros*.

21.(A) El número que representa al año debe ser lo más grande posible. Pero como solo tenemos 12 meses, el que proporciona el año más alto admisible es noviembre (11). Y ya tenemos nuestra fecha como xx-11-11xx. Nos centramos ahora en el año: la cifra más grande de las decenas del año es un 9, lo que nos conduce al día 29 para obtener el año lo más alto posible. Así, la fecha pedida es el 29 de noviembre de 1192 (29-11-1192) y la suma de sus cifras es 26.

22.(D) Como el triángulo *MNC* es isósceles, el ángulo N = 70º y el ángulo $\hat{C}$ será:
$\hat{C}$ = 180º – (70º + 70º) = 40º. Fijándonos en el triángulo *ABC* tenemos el ángulo Â = 180º – (80º + 40º) = 60º.



23.(B) La suma de las cifras del número debe ser menor o igual que 36 (9 + 9 + 9 +9). Se trata pues de encontrar un número menor o igual que 36 tal que la suma de sus cifras sea máxima. Está claro que la cifra de las unidades debe ser un 9 y, de aquí, es fácil ver que el valor máximo admisible para las decenas es 2; con el 3 tendríamos 39. Por lo tanto el valor máximo es 2 + 9 = 11.

24.(B) Transformamos todo a decímetros: 11 m = 110 dm; 22 dm; 33 cm =3,3 dm y 44 mm = 0,44 dm. Longitud del puente: L = 110 + 22 + 3,3 + 44 = 135,74 dm.

25.(A) Blas grabó un total de (2 h 59 m 60 s) – (0 h 14 m 41 s) = 2 h 45 m 19 s ¡El mismo tiempo que Ana! La respuesta correcta es la A.

Nota: Podemos comprobar que las otras respuestas son falsas. La corrección de A elimina las respuestas B, C y E. Pero para continuar quizás lo más cómodo sea convertir todos los tiempos a segundos:

Ana y Blas; $2 \times 3600 + 45 \times 60 + 19 = 9919$ segundos.

$5\,\text{minutos} = 5 \times 60 = 300\,\text{segundos}$

Como la diferencia entre Clea y Ana (o Blas) es 10 200 – 9 919 = 281 segundos también es falsa la afirmación D.

XII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel II

1. (C) Si nos fijamos un poco, vemos que los animales cantan múltiplos de 3, de 4, de 5, de 6 y de 7. Habría duda de quién grita 343 si este número tuviera como divisores dos de esos números, pero el único que funciona como divisor es el 7.

2. (E) Podemos ir operando o con ojo más preciso echar un vistazo e ir directamente a la solución. Efectivamente, la mitad de 2^{101} es quitar un dos, es decir 2^{100}. Los otros cálculos son: $4^5 \cdot 2^{20} = 2^{10} \cdot 2^{10} = 2^{20}$; $2^2 + 2^{98} = 2^2 \cdot \left(1+2^{96}\right)$; $16^5 \cdot 2^5 = 2^{20} \cdot 2^5 = 2^{25}$ $\left(2^3\right)^{97} = 2^{291}$.

3. (D) La primera observación es que la solución se dará con un número ascendente de derecha a izquierda. Esa solución será mayor que 900, ya que para 951, la diferencia correspondiente es 950 – 45 = 905. Por tanto estamos operando con números que empiezan por 9. Y de ahí que tengan que acabar en 1, pues cambiar otra cifra por 1 será disminuir el producto de las cifras en al menos nueve unidades. Ya sólo queda hallar la cifra de las decenas. Un cálculo rápido compensa a seguir razonando: $991 \rightarrow 910$; $981 \rightarrow 909$; $971 \rightarrow 908$; ...

4. (B) $2000 = 2 \cdot 2^3 \cdot 5^3 = 2^4 \cdot 5^3$. Para que el cuadrado de un número divida a 2000, el número tendrá 0, 1 o 2 doses y 0 o 1 cincos. En total habrá seis números.

5. (D) Si n es el número de alumnos, tenemos que el de chupa chups es $7n – 2$ y también $6n + 21$, luego $7n – 2 = 6n + 21$; $n = 23$, $7 \cdot 23 – 2 = 159$.

6. (A) Para ver el crecimiento sucesivo en los cuatro años debemos multiplicar $1{,}2\cdot 0{,}8\cdot 1{,}2\cdot 0{,}8 = 0{,}9216$, que con respecto a 1, representa un decrecimiento redondeado del 8%.

7. (B) Si $\dfrac{n}{360}=\dfrac{p}{q}$ y q es un cifra, quiere decir que q es un divisor de una sola cifra de 360, es decir que q (excluido el 1) puede ser 2, 3 , 4, 5, 6, 8 y 9. Entonces p tiene que ser más pequeño que q y primo con él: $2\to 1$; $3\to 1$ y 2; $4\to 1$ y 3; $5\to 1{,}2{,}\ 3$ y 4; $6\to 1$ y 5; $8\to 1{,}3{,}5$ y 7; $9\to 1{,}2{,}4{,}5{,}7$ y 8.

8. (C) P es 1 ya que después de multiplicar por 9 y sumar lo que se lleve da lugar a una sola cifra S. Por ello S = 9 y como Q no es 1, tiene que ser 0, pues si no al multiplicarla por 9 llevaría alguna unidad hacia delante. Entonces 9 x 9 = 81 y llevamos 8, que sumados al producto 9 x R acaba en 0, es decir R = 8. Luego PQRS = 1089, que es múltiplo de 9 (lo sería en cualquier caso al tener las mismas cifras que el múltiplo de 9 SRQP).

9. (A) Haciendo un dibujo podemos ver más claro el problema

A B C D

Las seis distancias son: d(A, B), d(A, C), d(A, D), d(B, C), d(B, D), d(C, D).
d(A, B) + d(B, C) + d(C, D) =d(A, D) = 10, y en esa igualdad tenemos implicadas ya cuatro de la distancias. Las dos que faltan d(A, C) y d(B, D) suman 10 + 3. La suma de las seis es por tanto 10 + 10 + 10 + 3.

10.(A) Empezamos trabajando de dentro a afuera:

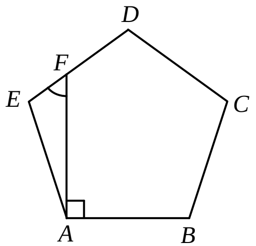
$$\sqrt{16+4\sqrt{28-\sqrt{7+\sqrt{4}}}}=\sqrt{16+4\sqrt{28-3}}=\sqrt{16+20}=6\,.$$

11.(C) $3x + 4y = 96$**.** Una solución con enteros no negativos de la ecuación es (32, 0). Hay que saber, o darse cuenta, que para hallar nuevas soluciones enteras debemos avanzar 4 en x y bajar 3 en y, o retroceder 4 en x y subir 3 en y. Para mantenernos en coordenadas no negativas debemos hacer lo segundo.

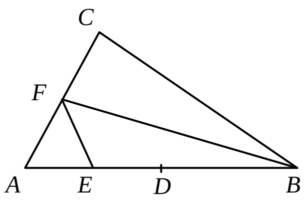
$(32,0) \to (28,3) \to (24,6) \to (20,9) \to ... \to (0,24)$, lo que contando bien suponen nueve soluciones.

12.(E) La razón de áreas entre los rectángulos es 2, luego la razón de longitudes es $\sqrt{2}$ **,** pero la razón entre longitud y anchura del rectángulo pequeño es la razón de longitudes entre lados pequeños (los correspondientes) de los dos rectángulos.

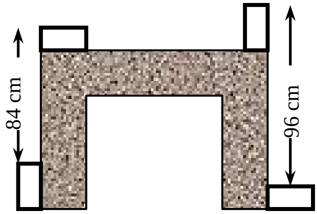
13.(B) Calculemos primero el ángulo del pentágono regular. Empezamos por el central 360º : 5 = 72º, y el ángulo interior es su suplementario, 108º. En el triángulo *EFA*, $\hat{E} = 108º$, $\hat{A} = 108º - 90º = 18º$; $\hat{F} = 180º - 108º - 18º = 54º$.



14.(A) El triángulo *EFB* tiene la mitad de altura que el *ABC* y $\frac{3}{4}$ de su base, luego su área es $\frac{3}{8}$ del área de ABC, y por tanto el área de ABC es $\frac{8}{3}$ veces el área de *EFB* .



15.(C) Si llamamos x a la longitud de la pieza, y a su anchura y z a la altura de la mesa, tenemos:

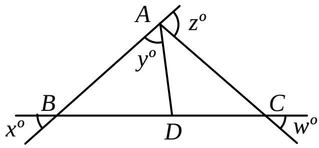


$$\begin{matrix} 84 = z + y - x \\ 96 = z - y + x \end{matrix}$$; y sumando ambas ecuaciones

obtenemos $180 = 2\,z$; $z = 90$ cm.

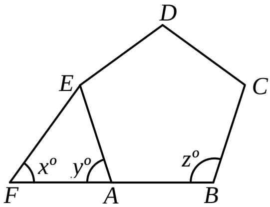
.

16.(A) El triángulo ABC es isósceles y de ahí $w = x$. Como también ADC es isósceles $w = C\hat{A}D$, y así $w + y + z =$ $= 180$, con lo que $x + y + z = 180$.



Queda por ver si $z = 2x$. $A\hat{D}C = 180^o - 2w^o = 180^o - 2x^o$.. $B\hat{D}A$ es su suplementario, es decir $2x^o$. Luego $y = 180 - x - 2x$ y $z = 180 - y - x = 3x - x$.

17.(E) z es el ángulo interior de un pentágono regular, es decir 108º; y es su suplementario 72º; y por ser FAE isósceles $2x = 180^o - 72^o$, por tanto $x = 54^o$. La proporción 54 : 72 : 108 es la misma que 3: 4 : 6.

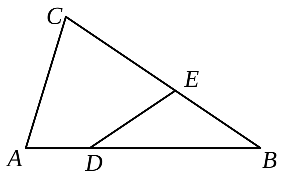


18.(E) Al tirar cuatro monedas y observar si sale cara o cruz tenemos 16 resultados equiprobables. Contemos los resultados del suceso “igual número de caras que de cruces”. Le corresponden los seis resultados: cczz, czcz, czzc, zccz, zczc, zzcc. Quedan pues diez para repartir por igual entre “más caras” y “más cruces”. Luego la probabilidad pedida es $\dfrac{6+5}{16}$.

19.(D) Veamos la trayectoria de 98: 98, 49, 44, 22, 11, 6, 54, 27, 22, ... ; no seguimos, pues el proceso se ha hecho periódico (repetitivo). Hay tres números fuera del periodo y el periodo es de 5 números. El que ocupa el lugar 2008, será el 2005 contando a partir del comienzo del periodo. Dividimos 2005 entre 5 y miramos el resto: 0, que corresponde al 5º del periodo: 27

20.(D) Si la media es 15, la suma de los cinco números es 75. Si la mediana es 18, dos serán menores que 18 y dos mayores. El mayor será más grande cuanto más pequeños sean los otros. Así los otros serán: 1, 2 y 19, que junto a 18 dejan 75 – 1 – 2 – 18 – 19 = 35 para el mayor.

21.(E) Ordenemos los resultados por tamaño. Tenemos dos X, una L y una I. XLIX, LXIX, LXXI. ¡Pues no son tantos! Sumémoslos traducidos: 49 + 69 + 71 =189. Y volvamos a la numeración romana CLXXXIX.

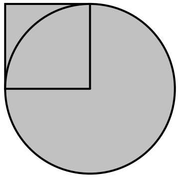


22.(C) Como $A\hat{D}E = 146º$; $E\hat{D}B = 34º$ y como el triángulo *EDB* es isósceles, también $A\hat{B}C = 34º$. Entrando en el triángulo isósceles *ABC* el ángulo . $A\hat{C}B = \dfrac{180º-34º}{2} = 73º$

23.(D) La raíz cuadrada de 2^{2008} es 2^{1004} ya que $2^{1004} \cdot 2^{1004} = 2^{2008}$. Su mitad es un dos menos y por tanto 2^{1003}

24.(C) Dividimos 101 entre 13 y nos da cociente 7, luego 8 · 13 =104, es el primer múltiplo de 13 de tres cifras. Dividimos 999 entre 13 y nos da cociente 76, luego 76 · 13 = 988. Así entre 8 y 76 hay (contando a ambos) 69 múltiplos de 13. También podemos dividir los 900 números de tres cifras entre 13, obteniendo el mismo resultado.

25.(B) La figura sombreada se compone de tres cuartos del círculo y el cuadrado. Su área es:



$$\frac{3}{4}\pi \cdot 10^2 + 10^2 = 100 \cdot \frac{3\pi + 4}{4} = 75\pi + 100 \ .$$

XII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel III

1. (B) Si elegimos cinco números entre 1, 2, 3, 4, 5 y 6, siempre habrá uno que sea múltiplo de 3 y dos que sean múltiplos de 2. Así pues, el mayor número que divide al producto de esos cinco números será 2·2·3 = 12.

2. (C) Analicemos las posibles respuestas:
A: $98!\cdot 99! = 99\cdot(98!)^2 = 3^2\cdot 11\cdot(98!)^2$ no es un cuadrado perfecto.
B: $98!\cdot 100! = 100\cdot 99\cdot(98!)^2 = 2^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 11\cdot(98!)^2$ no es un cuadrado perfecto.
C: $99!\cdot 100! = 100\cdot(99!)^2 = 10^2\cdot(99!)^2$ sí es un cuadrado perfecto.
D: $99!\cdot 101! = 101\cdot 100\cdot(99!)^2 = 2^2\cdot 5^2\cdot 101\cdot(99!)^2$ no es un cuadrado perfecto.
E: $100!\cdot 101! = 101\cdot(100!)^2$ no es un cuadrado perfecto.

3. (A) Si por 7 euros le dan 10 dólares, por *n* euros le dan $\frac{10n}{7}$ dólares. La ecuación que refleja los datos del problema es: $\frac{10n}{7} - 600 = n \Rightarrow n = 1400$ dólares.
La suma de las cifras de 1400 es 5.

4. (B) Si la edad de Juan es el número $\underline{xy}$ (su edad es $10x + y$), la edad de su sobrina, $\underline{yx}$, es $10y + x$. Por tanto, *x* e *y* deben cumplir que:

$$10x + y + 5 = 2\cdot(10y + x + 5) \Rightarrow 8x - 19y = 5\ .$$

Como sabemos que *x* e *y* son las cifras de un número, solo pueden valer 0, 1, .,9. Probamos hasta encontrar la solución: x=3, y=1. La edad de Juan es 31 y la de su sobrina es 13. La diferencia entre ambas es 18.

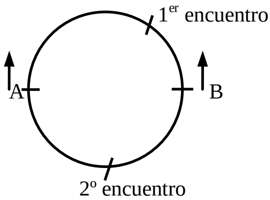
5. (C) Continuemos un poco la sucesión para estudiar su formación:

1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
2001	2002	2003	2000	2005	1998	2007	1996	2009	1994

Los términos pares que ocupan el lugar *n* siguen la ley: $T_n = 2004 - n$.
El número que ocupa el lugar 2008º es 2004 – 2008 = –4.

6. (D) El número total de bailes es $3\cdot 12 = 2\cdot x$, siendo *x* es el número de chicas. Así pues, en la fiesta había 18 chicas.

7. (C) Sea v_A la velocidad de Ana y v_B la velocidad de Beatriz; sea T_1 el tiempo transcurrido hasta su primer encuentro y T_2 el tiempo transcurrido desde el primer encuentro hasta el segundo; y sea L la longitud de la pista circular.



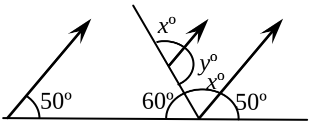
Cuando se juntan por primera vez, la suma de las distancias recorridas por Ana y Beatriz es la mitad de L. Y cuando se juntan por segunda vez, la suma de las distancias recorridas por Ana y Beatriz desde el primer encuentro, es L. Así pues:

$$\left.\begin{array}{l} v_A T_1 + v_B T_1 = L/2 \\ v_A T_2 + v_B T_2 = L \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1(v_A + v_B) = L/2 \\ T_2(v_A + v_B) = L \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{L/2}{L} = \frac{1}{2} \Rightarrow T_2 = 2T_1$$

Y ya podemos calcular la longitud L:

$$L = v_A T_2 + v_B T_2 = v_A T_2 + 150 = 2v_A T_1 + 150 = 2 \cdot 100 + 150 = 350 \text{ metros.}$$

8. (C) Prolongamos algunos segmentos del dibujo y observamos que:



$x + 50º + 60º = 180º \Rightarrow x = 70º$

$x + y = 180º \Rightarrow 70º + y = 180º \Rightarrow y = 110º$.

Así pues, $y - x = 110º - 70º = 40º$.

9. (C) Continuemos un poco la partida para estudiar su desarrollo:

Rondas	**Inicio**	**1ª**	**2ª**	**3ª**	**4ª**	**5ª**	**6ª**	**7ª**
Ana	15	12	13	14	11	12	13	10
Beatriz	14	15	12	13	14	11	12	13
Carolina	13	14	15	12	13	14	11	12

Se aprecia que Ana será la primera en quedarse sin monedas. Pierde una moneda cada tres rondas: 12 (1ª), 11 (4ª), 10 (7ª), 9(8ª),… Así pues, tendrá monedas hasta la partida 36 (12·3) y en la partida 37 se quedará sin monedas.
El juego durará 37 rondas.

10. (C) Analicemos las posibles respuestas:
A: $m^3 + n$ es par ya que m^3 es impar.
B: $2m^5n^7$ es par.
C: $m^3 + 2n$ es impar ya que es impar más par.
D: $m + n$ es par.
E: $(mn + 7)^5$ es par ya que $mn + 7$ es par.

11. (A) Si suponemos que el área del cuadrado inicial es 1, el área sombreada es la suma infinita $S=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\dots$, o sea, la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón $r=\frac{1}{4}<1$.

Dicha suma vale $S=\frac{a_1}{1-r}=\frac{1/4}{1-1/4}=\frac{1}{3}$. O sea, 1/3 del área del cuadrado original.

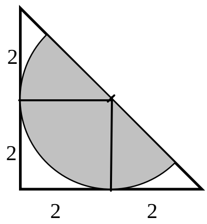
12. (B) Si llamamos x a la probabilidad de elegir chica, entonces la probabilidad de elegir chico es $\frac{2x}{3}$ y como debe cumplirse que $\frac{2x}{3}+x=1$, entonces, la probabilidad de elegir chica es $\frac{3}{5}$ y la de elegir chico es $\frac{2}{5}$. Así pues, $\frac{2}{5}$ es el cociente entre el número de chicos y el total de estudiantes del grupo.

13. (E) Elaboremos una tabla con los datos, llamando *p* al peso del envase pequeño y c a su contenido:

	Precio	**Contenido**	**Precio por unidad de peso**
PEQUEÑO	p	c	$\frac{p}{c}$
MEDIANO	$1{,}5p$	$0{,}8\cdot 2c = 1{,}6c$	$\frac{1{,}5p}{1{,}6c}=0{,}9375\frac{p}{c}$
GRANDE	$1{,}3\cdot 1{,}5p = 1{,}95p$	$2c$	$\frac{1{,}95p}{2c}=0{,}975\frac{p}{c}$

Así pues, ordenados de mejor a peor precio, quedarían así: mediano, grande, pequeño.

14. (B) El radio r del semicírculo es 2 ya que su área es $2\pi=\frac{\pi r^2}{2}$ y entonces, $r=2$.



Si desde el centro del semicírculo trazamos los radios que van a los puntos de tangencia, vemos que el triángulo se descompone en dos cuadrados de lado 2. Su área es 8.

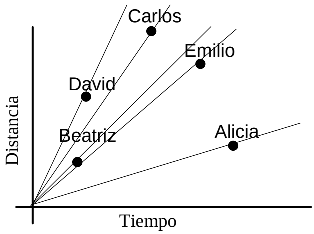
15. (A) El mayor número posible P estaría formado por 2007 nueves y un cero al final. En este caso, Q sería 2007·9 = 8603. Por tanto Q es un múltiplo de 9 que tiene, como mucho, cinco cifras. Por tanto el máximo valor de R es 5·9 = 45. R debe ser un número de dos cifras que es múltiplo de 9: el valor máximo de R es 2·9 = 18. Así pues, S debe ser un número de una cifra múltiplo de 9. Por tanto S = 9.

16. (A) Como el área de la región interior al círculo pero exterior al cuadrado y el área de la región exterior al círculo pero interior al cuadrado coinciden, entonces, el área del cuadrado y del círculo son iguales.

Por tanto, si r el es el radio del círculo se cumple que $2^2 = \pi \cdot r^2$, de donde concluimos que $r = \frac{\sqrt{2}}{\pi}$.

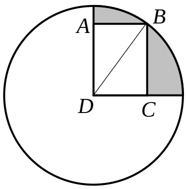
17. (D) El mayor valor para la mediana se conseguirá si los tres números que faltan (n_1, n_2, n_3) son mayores o iguales que 9. De esta forma, la lista de los nueve números ordenados de menor a mayor es: 3, 5, 5, 7, 8, 9, n_1, n_2, n_3.
La mediana es el número que ocupa el lugar central: el 8.

18. (D) Como la velocidad es el tiempo dividido entre la distancia, podemos identificar la velocidad con la pendiente de la recta que une el origen con cada uno de los puntos de los atletas. La recta con mayor pendiente es la de David, que, por tanto, es el más rápido.



19. (E) Calculemos con cuidado:
$f(0) + f(-1) + f(-2) + f(-3) = 0 + 1 + 0 + 1/9 = 10/9$.

20. (D) El radio DB del círculo es 5 cm ya que $DB^2 = DC^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$. El área sombreada es un cuarto del área del círculo menos el área del rectángulo: $A = \frac{25\pi}{4} - 12\ \text{cm}^2$, que es un valor comprendido entre 7 y 8.



21. (B) Si a, b, c son las dimensiones del ortoedro, sabemos que la distancia entre un vértice y el más alejado es $a^2 + b^2 + c^2 = 21^2$. Por otra parte sabemos también que

$a + b + c = 140/4 = 35$. Elevando al cuadrado esta igualdad:
$35^2 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$, de donde concluimos que el área total de la caja es $2ab + 2ac + 2bc = 35^2 – 21^2 = 784$ cm^2.

22. (D) Los casos posibles son:

1er dado	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4	4	5
2º dado	1	2	3	4	5	1	2	3	4	1	2	3	1	2	1
3er dado	2	3	4	5	6	3	4	5	6	4	5	6	5	6	6

Hay 15 casos posibles, en 8 de ellos aparece un 2. Por tanto la probabilidad pedida es 8/15.

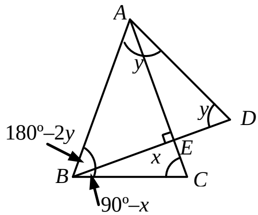
23. (D) En el triángulo *BCE* se cumple que $E\hat{B}C = 90º - x$.

En el triángulo *ABD* se cumple que $A\hat{B}D = 180º - 2y$.

En el triángulo *ABC* se cumple que

$A\hat{B}C = x = 180º - 2y + 90º - x \Rightarrow 2x + 2y = 270º$.

Por tanto, $x + y = 135º$.



24. (C) Cada uno de los 108 delegados da 107 apretones, lo que supondría un total de $108 \cdot 107 = 11556$ apretones. Pero esta no es la respuesta porque hemos contado cada apretón dos veces (una por cada persona que se da el apretón). Así pues, el número total de apretones de manos es la mitad de 11556, es decir, 5778.

25. (A) Sabemos que en toda división entera se cumple que $D = d \cdot c + r$.
Los datos del problema nos aseguran además que $D + 900 = d \cdot (c + 7) + r – 24$, es decir, $D = d \cdot c + r + 7d – 924$ y como $D = d \cdot c + r$, entonces, $7d = 924$, de donde concluimos que $d = 132$.

XII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel IV

1. (C) Observamos, en primer lugar, que los triángulos *OAD*, *DCE* y *ABF* son semejantes pues son rectángulos y los ángulos en *A*, *D* y *F* respectivamente son iguales. Por otra parte, $AD = \sqrt{48^2 + 36^2} = 60$, por lo que $\frac{CE}{60} = \frac{36}{48}$, así que *CE* = 45 y $\frac{BF}{60} = \frac{48}{36}$, de donde *BF* = 80, con lo que *EF* = 80 + 60 + 45 = 185.

2. (D) Sean 1000*a* + 100*b* + 10*c* + *d* los números buscados con $a \neq 0$. Nos dicen que *d* + *c* + 10*a* + *b* = 10*c* + *d*, es decir, 10*a* + *b* = 9*c* donde *c* es cualquier dígito distinto de 0 y de 1 pues $a \neq 0$. Así pues hay ocho opciones para *c* y al poder tomar *d* cualquier valor entre 0 y 9, tenemos diez opciones para *d*, siendo entonces, ochenta los números con la propiedad dada.

3. (E) Si observamos la información dada con la expresión del número que nos piden, parece razonable multiplicar las dos igualdades dadas:

$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) = \frac{49}{10}$, con lo que

$1 + \frac{c}{a+b} + 1 + \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} = \frac{49}{10}$, por lo que $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{19}{10}$.

4. (C) llamando *h* y *m* al número de chicos y chicas, respectivamente, tenemos que:

$\left.\begin{array}{l} h+m \geq 28 \\ h > 2(m-12) \\ m > 9(h-10) \end{array}\right\}$. De las dos primeras desigualdades tenemos $\left.\begin{array}{l} f_1 : -h-m \leq -28 \\ f_2 : -h+2m \leq 24 \end{array}\right\}$.

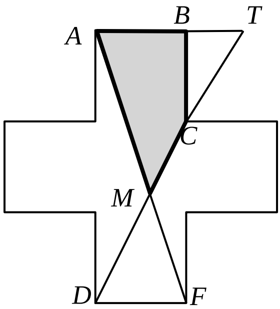
$f_1 + 2f_2$ nos lleva a $3(m-h) \leq 20$, por lo que $m - h \leq 6$.

Utilizando ahora la tercera desigualdad, tenemos que $m > 9h - 90$, por lo que si $m - h \leq 5$, sería $m \leq 5 + h$, por lo que la desigualdad $5 + h > 9h - 90$ nos lleva a $h < \frac{95}{8}$, es decir $h \leq 11$, con lo que $m \leq 16$ y *m* + *h* no sería mayor o igual que 28. Así pues, *m* – *h* = 6.

5. (C) Sabemos que $S = 81x + \dfrac{20+100}{2} \cdot 81 = 81(x+60)$. Al ser 81 un cuadrado perfecto, para que S lo sea debe serlo x + 60 y el menor entero positivo x con esta propiedad es x = 4.

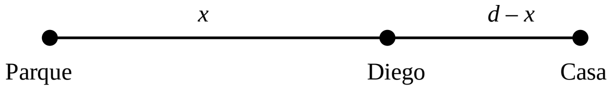
6. (E) La probabilidad de que cualquiera de los cuatro números a, b, c, d sea par o impar es la misma, pues disponemos de la misma cantidad de números pares que de impares en la lista 1, 2,…, 2008.
Por otra parte, ad – bc será impar sólo cuando ad y bc tengan distinta paridad. Como la probabilidad de que bc sea impar es $\dfrac{1}{4}$, la probabilidad de que ad sea par y bc sea impar es $\dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{16}$, con lo que la probabilidad de que ad – bc sea impar será $\dfrac{3}{8}$, por lo que la probabilidad pedida es $\dfrac{5}{8}$.

7. (C) Prolongando MC hasta cortar a la prolongación de AB en T, tenemos que el triángulo BCT es semejante al ADT con razón de semejanza $\dfrac{1}{3}$ por lo que, llamando $BT = x$, es $4 + x = 3x$, $x = 2$ y $AT = 6$.
Por otra parte, los triángulos ATC y MDF son semejantes con razón de semejanza $\dfrac{AT}{DF} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$, de donde, llamando h a la altura de MDF trazada desde M, es $h + \dfrac{3}{2}h = 12, \quad h = \dfrac{24}{5}$.



Área MDF = $\dfrac{48}{5}$; Área ATC = $\dfrac{48}{5}\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{108}{5}$; Área rayada = $\dfrac{108}{5} - 4 = \dfrac{88}{5}$.

8. (B)



Llamando x y $d - x$ como en la figura, tenemos que $\dfrac{x}{v} = \dfrac{d-x}{v} + \dfrac{d}{7v}$, así que $7x = 7d - 7x + d$, por lo que $7x = 4d$ y $\dfrac{d-x}{x} = \dfrac{7}{4} - 1 = \dfrac{3}{4}$.

9. (C) Si los lados son 3*k*, 4*k*, 5*k*, el triángulo es rectángulo, $(3k)^2+(4k)^2=(5k)^2$, por lo que al ser el radio de la circunferencia circunscrita 3, la hipotenusa de dicho triángulo es 6, siendo entonces, sus catetos $3\cdot\frac{6}{5}$ y $4\cdot\frac{6}{5}$, y su área $\frac{1}{2}\cdot\frac{18}{5}\cdot\frac{24}{5}=8{,}64$.

10. (D) El área del triángulo equilátero de lado *l*, $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, podemos escribirla como suma de las áreas de los triángulos obtenidos uniendo *P* con cada uno de los vértices. Así pues, $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}=\frac{l}{2}(1+2+3)$, con lo que $l=4\sqrt{3}$.

11. (B) El lado del cuadrado circunscrito a los cuatro círculos es 4*r*, por lo que podemos escribir que la mitad de su diagonal es $\frac{4r\sqrt{2}}{2}=1+2r+1$, es decir, $r\sqrt{2}=r+1$ y $r=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$.

12. (E) Llamando *H* a la altura de la pirámide original y *h* a la altura de la pirámide que queda arriba, es *H* = *h* + 2. Como ambos cuerpos son semejantes con razón de semejanza $\frac{h}{h+2}$, el cociente entre sus áreas, $\frac{1}{2}$, será el cuadrado de la razón de semejanza. Así pues $\frac{1}{2}=\frac{h^2}{(h+2)^2}$, de donde $h^2+4h+4=2h^2$, $h=2+2\sqrt{2}$ y la altura de la pirámide original es $4+2\sqrt{2}$.

13. (B) La hipotenusa, *AC*, del triángulo *ABC* es 5, por lo que la altura relativa a ella es $\frac{12}{5}$. Así pues, por la semejanza de los triángulos *BGF* y *BAC*, podemos escribir $\frac{h}{l}=\frac{h+l}{5}$, siendo *h* la altura desde *B* en el triángulo *BGF* y *l* el lado del cuadrado que nos piden. Por otra parte, como $\frac{12}{5} = h + l$, tenemos que $\left(\frac{12}{5} - l\right) \cdot 5 = \frac{12}{5} \cdot l$, es decir, $12 - 5l = \frac{12}{5} \cdot l, \quad l = \frac{12}{37/5} = \frac{60}{37}$.

14. (C) El número en cuestión debe ser múltiplo de 9 y de 4. Por ser múltiplo de 4, el número formado por las dos últimas cifras debe serlo también y, por las condiciones del problema, éste debe ser 44. Así pues, debemos encontrar el menor número formado por *c* cuatros, *n* nueves y los dos cuatros del final con $n \geq 1$, que sea el menor posible y que sea múltiplo de 9, es decir que $8 + 4c + 9n = \dot{9}$, con lo que $8 + 4c = \dot{9}$, y el menor *c* se da con *c* = 7. Como *n* debe ser al menos 1, el número pedido deberá tener 9 cuatros, 1 nueve y acabar en 44, y ser el menor posible, es decir, que el nueve esté muy al final, con lo que debe acabar en 4944.

15. (E) Por los datos que nos dan, el cateto *QP* medirá 8 cm, por lo que, llamando *p*, *q* y *r* a las longitudes de los arcos de centros *P*, *Q* y *R*, respectivamente, tenemos que $p + r = 15$, $p + q = 8$, $q + r = 17$, por lo que sumando las tres igualdades, es $p + q + r = 20$ y como $p + q = 8$, es $r = 12$.

16. (A) Disponiendo los sumandos de esta forma:

$$\begin{array}{l} 2^2 + 2^2 \\ 2^3 + 2^3 + 2^3 \\ 2^4 + 2^4 + 2^4 + 2^4 \\ \vdots \\ 2^{10} + 2^{10} + 2^{10} + \cdots 2^{10} \end{array}$$

y sumando por columnas, tenemos que la suma pedida es:

$$S = (2^{11} - 2^2) + (2^{11} - 2^2) + (2^{11} - 2^3) + (2^{11} - 2^4) + \cdots (2^{11} - 2^9) + (2^{11} - 2^{10}) =$$
$$= 10 \cdot 2^{11} - 2^2 - (2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{10}) = 10 \cdot 2^{11} - 2^2 - (2^{11} - 2^2) = 9 \cdot 2^{11}.$$

17. (A) Los puntos de corte con el eje horizontal delimitan los intervalos en R en los que la gráfica de $y = f(x)$ tiene dos opciones de cada uno: $f(x) \geq 0$ o $f(x) < 0$. Así pues, habrá $2^4 = 16$ posibles funciones continuas $y = f(x)$ cuya gráfica sea la de la figura.

18. (D) La mejor manera de atacar este problema parece que es observando cuántos números hay según la cantidad de cifras que tenga. Así pues:
De dos cifras: 12, 23,…, 89. Total: 8.
De tres cifras: 123, 234, 345,…, 789. Total: 7.
De cuatro cifras: 1 234, 2 345,…, 6 789. Total: 6.
De cinco cifras: 12 345. Total: 1.
Así pues, resultan 22 números.

19. (C) Al ser 2003 y 2011 primos, por cada divisor cuadrado perfecto de 2003^{2003}, encontraremos uno de 2011^{2011} (de base 2011 y exponente el mismo que el divisor de 2003^{2003}). Así pues, los divisores buscados serán 2011^{2004}, 2011^{2006}, 2011^{2008} y 2011^{2010}, en total, 4.

20. (A) Llamando *p*, *n* y *m* como es de esperar, tenemos que:
$\left.\begin{array}{l} 5p+3n+2m=3{,}18 \\ 4p+8n+3m=4{,}49 \end{array}\right\}$ y multiplicando la primera ecuación por 3, la segunda por 2
y restando, llegamos a: $7p - 7n = 9{,}54 - 8{,}98$, es decir, $p - n = 0{,}08$.

21. (C) La diagonal *EG* del cuadrado pequeño corta a *AB* en *T* y a *DC* en *Q* con $AT = DQ = \sqrt{2}$. Así pues, $CE^2 = (4-\sqrt{2})^2 + (4+\sqrt{2})^2 = 36$, por lo que $CE = 6$.

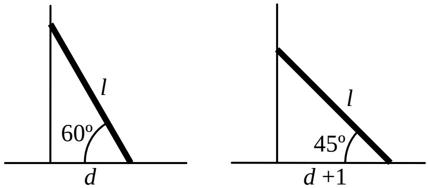
22. (C) Llamando *A* al suceso “El primer estudiante elegido es zurdo” y *B* al suceso “El segundo estudiante elegido es zurdo”, nos piden $p(A \cap B)$:

$$p(A \cap B) = p(A)\,p(B/A) = \frac{7}{25} \cdot \frac{6}{24} = \frac{7}{100}.$$

23. (B) La diferencia 1 se da cuando el número aparecido en un dado es una unidad mayor que le otro, por lo que ésta será la más probable ya que, en el dado en el que parezca el mayor número, éste puede ser 2, 3, 4, 5, 6, mientras que en cualquier otra diferencia el número mayor tiene menos opciones.

24. (B) Observando la figura podemos escribir que $\frac{d}{l} = \frac{1}{2}$ y $\frac{d+1}{l} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Así pues, $d = \frac{l}{2}$ y $\dfrac{\frac{l}{2}+1}{l} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, es



decir, $l+2=\sqrt{2}l$ y $l=\dfrac{2}{\sqrt{2}-1}=2(\sqrt{2}+1)$.

25. (B) Llamando a al menor de dichos números, nos dicen que a + (a + 1)+… + (a + 48) acaba en 2, es decir, $\dfrac{2a+48}{2}\cdot 49=49(a+24)=49a+1176$ acaba en 2, con lo que 49a acabará en 6 y a acabará en 4.

Participantes y relación de ganadores del XI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Y continuamos creciendo. Ya rondamos los 3000 participantes en la 2ª Fase del Concurso de Primavera y como decíamos el año pasado la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid se nos está quedando pequeña y esto, mas que un inconveniente, es un estímulo para continuar con este concurso cuyo objetivo es popularizar el estudio de las Matemáticas y la resolución de problemas.

La distribución por niveles y la relación de los ganadores de cada uno de los cuatro niveles fue la siguiente:

	NIVEL 1		NIVEL 2		NIVEL 3		NIVEL 4	
	5º P	6º P	1º ESO	2º ESO	3º ESO	4º ESO	1º B	2º B
nº de estudiantes	178	488	368	562	333	433	283	150

Los ganadores fueron:

NIVEL I

1. Miguel Barrero Santamaría (6º Primaria) C.E.I.P. Ciudad Pegaso. Madrid
1. Miguel López Rodríguez (6º Primaria) C.E.I.P. Henares. Madrid
1. Joaquín Domínguez de Tena (5º Primaria) C.E.I.P. Ermita del Santo. Madrid

NIVEL II

1. Lorenzo Esteban de la Iglesia (2º ESO) Colegio Fray Luis de León. Madrid
2. Ánder Martínez de la Orden (1º ESO) IES Ramiro de Maeztu. Madrid
3. Arturo Hernández Martín (2º ESO) IES La Serna. Madrid

NIVEL III

1. Ou Zhao Lin (4º ESO) IES Avenida de los Toreros. Madrid
2. Juan Martínez Olondo (3º ESO) Colegio Sta Mª del Pilar. Madrid
3. Moisés Herradón Cueto (4º ESO) Colegio Brains. Madrid

NIVEL IV

1. Gabriel Fürstenheim Milerud (2º Bchto) IES Ramiro de Maeztu. Madrid
2. Diego Izquierdo Arseguet (2º Bchto) Liceo Francés. Madrid
3. Rubén Jiménez Benito (1º Bchto) IES José Hierro. Getafe

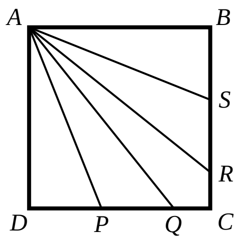
VIII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid
22 de noviembre de 2008

PRUEBA POR EQUIPOS 1º y 2º de E.S.O. (45 minutos)

1.- Pedro y Juan eligen ocho números de los nueve que hay escritos en este diagrama, cuatro cada uno; así pues hay un número que no elige ninguno. Pedro observa que la suma de sus cuatro números es el triple de la suma de los cuatro números de Juan. ¿Qué número dejaron sin elegir?

4	**12**	**8**
13	**24**	**14**
7	**5**	**23**

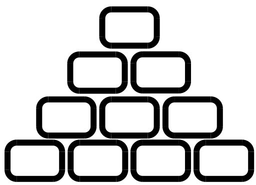
2.- El dibujo muestra un cuadrado de 10 cm de lado en el que los segmentos *AP*, *AQ*, *AR* y *AS* lo han dividido en cinco regiones de igual área. ¿Cuál es la distancia de *Q* a *R*?



3.- En cada una de las diez casillas que ves se ha colocado un entero positivo que satisface las siguientes condiciones:

1. En la fila de abajo, cada número es el doble del que tiene a su izquierda.
2. Cada número de las otras seis casillas (sin contar las de la fila de abajo) es la suma de los dos números que tiene inmediatamente debajo.

Si la suma de los números de todas las casillas es un cubo perfecto, calcula el menor número posible que hay en la casilla de la izquierda de la fila de abajo.

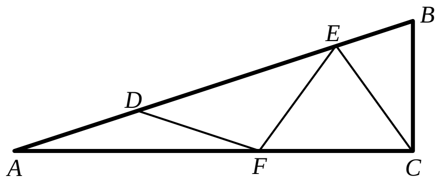


VIII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

22 de noviembre de 2008

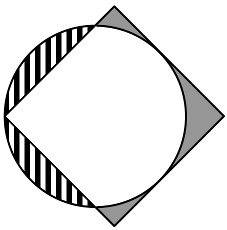
PRUEBA POR EQUIPOS 3º y 4º de E.S.O. (45 minutos)

1.- En la figura que veis, *ABC* es un triángulo rectángulo y los segmentos *AD, DF, FE, EC* y *CB* miden todos lo mismo. ¿Cuál es la medida del ángulo $\hat{A}$?



2.- Si $P_n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$, ¿para cuántos valores de *n*, comprendidos entre 1 y 100, ($1 \le n \le 100$), se cumple que P_n es múltiplo de 5?

3.- La figura muestra una circunferencia de radio 2 y un cuadrado. La circunferencia es tangente a dos lados del cuadrado y pasa por uno de sus vértices. Llamando S_1 al área de la superficie sombreada (interior al cuadrado pero exterior a la circunferencia) y S_2 al área de la zona rayada, (interior a la circunferencia pero exterior al cuadrado), calcula $S_1 + S_2$.



VIII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

22 de noviembre de 2008

PRUEBA POR EQUIPOS Bachillerato. (45 minutos)

1.- En un colegio plantean a un determinado número de estudiantes de E.S.O. y al mismo número de estudiantes de Bachillerato la siguiente pregunta:
- ¿*Tú crees que hay vida en Marte*?
Cada estudiante responde SÍ o NO y resulta que el 60 % de los que respondieron SÍ eran de Bachillerato y el 80 % de los que respondieron NO eran estudiantes de E.S.O. ¿Cuál es el porcentaje de estudiantes de E.S.O. que respondieron SÍ?

2.- Sea f una función para la que $f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=x$ siempre que x no sea ni 0 ni 1.

¿Cuál es el valor de $f(2)$?

3.- En el triángulo ABC, la altura que parte de A divide al lado BC en dos trozos de longitudes 18 y 7. Calcula las longitudes de los trozos en los que divide al lado BC una paralela a dicha altura que divide al triángulo en dos regiones de igual área.

VIII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid
22 de noviembre de 2008

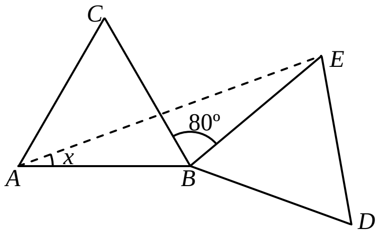
<u>PRUEBA INDIVIDUAL</u> 1º y 2º de E.S.O. (90 minutos)

1. En cierto instante Alicia observa en su reloj digital que han pasado ***"a"*** minutos desde las dos de la tarde. Un cuarto de hora después observa que han pasado ***"b"*** minutos desde las tres de la tarde y, ¡curioso!, 2·3 = 6 y ***"a"*** es el sextuplo (seis veces mayor) de ***"b"***. ¿Qué hora era cuando Alicia miró el reloj por segunda vez?

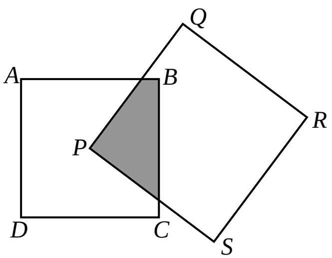
2. Encuentra todos los números naturales menores que 1000 que tienen exactamente tres divisores.

3. En una carrera escolar de 1500 metros cada centro envía 3 participantes. Alba, Beatriz y Carlos son los componentes del equipo del centro Miguel de Guzmán. Alba termina justamente en la posición central de todos los participantes; Beatriz, que llegó después que Alba, acabó en el lugar 19º y Carlos acabó el 28º. ¿Cuántos centros participaron en esa carrera?

4. En la figura que ves, los triángulos *ABC* y *BDE* son equiláteros e iguales. Si el ángulo marcado, de vértice *B*, mide 80º, ¿cuánto mide el ángulo *x*?



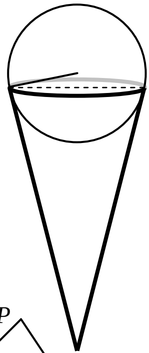
5. El dibujo muestra dos cuadrados *ABCD* y *PQRS* cuyos lados miden 8 y 9 cm, respectivamente. El punto *P* es el centro del cuadrado *ABCD* y el lado *PQ* corta al *AB* en un punto que dista 7 cm de *A*. ¿Cuál es el perímetro de la región sombreada?



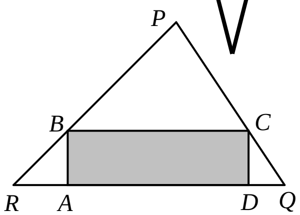
VIII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

22 de noviembre de 2008

PRUEBA INDIVIDUAL **3º y 4º de E.S.O.** (90 minutos)



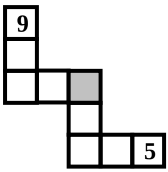
1.- La bola del helado de Pedro tiene un radio de 4 cm y descansa en un cucurucho en forma de cono de $2\sqrt{15}$ cm de diámetro de la base, de tal forma que la superficie del cucurucho es tangente a la superficie de la bola., como indica el dibujo. ¿Qué porcentaje de helado tiene que comerse Pedro para que lo que quede llene al derretirse totalmente el cucurucho?



2.- El dibujo muestra un rectángulo *ABCD* inscrito en un triángulo *PQR*. Si el lado *AB* del rectángulo es la tercera parte de la altura del triángulo que parte del vértice *P*, halla el cociente entre el área del rectángulo y el área del triángulo.

3.- Antes de realizar el último examen del curso, Cal-Culín pensó que si sacaba en dicho examen un 1,7 la nota media de todos los exámenes del curso sería de un 8, pero si sacaba un 9,2, la media sería de 8,5. ¿Cuántos exámenes hizo en ese curso?

4.- Al dividir un número de **cinco** cifras "n" entre 100 obtenemos un cociente "q" y un resto "r". ¿Para cuántos de esos números "n" se verifica que $q + r$ es divisible por 11?



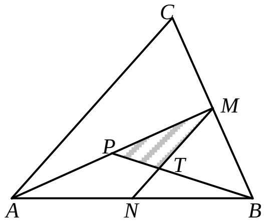
5.- Los números enteros 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 están escritos en estas casillas, uno en cada una, de manera que las tres de cada fila y las tres de cada columna suman 13. Si el 9 y el 5 están en los extremos, como muestra la figura, ¿qué número ocupará la casilla central sombreada?

VIII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

22 de noviembre de 2008

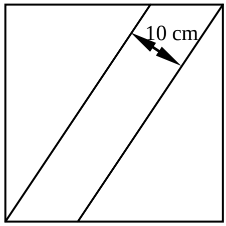
<u>PRUEBA INDIVIDUAL</u> Bachillerato (90 minutos)

1. El área del triángulo ABC de la figura es 48 cm^2. Si P es el punto medio de la mediana AM, N el punto medio del lado AB y T el punto de intersección de los segmentos MN y PB, calcula el área del triángulo MTP.



2. Alex, Bruno y Carolina trabajando juntos tardan 6 horas menos que Alex en pintar una habitación, 1 hora menos que Bruno y la mitad que Carolina. ¿Cuánto tiempo tardarían en pintar esa habitación Alex y Bruno si trabajaran juntos?

3. El cuadrado de la figura está dividido en tres trozos de igual área por las paralelas que ves. Si la distancia entre las paralelas es de 10 cm, ¿cuál es el área del cuadrado?



4. Calcula todos los valores enteros de b para los que en las soluciones de la inecuación $x^2 + bx + 2 \leq 0$ aparecen solamente 3 números enteros.

5. Para cada número real positivo a, escribimos $a = [a] + \{a\}$ donde $[a]$ es la parte entera de a y $\{a\}$ la parte decimal. Si x, y, z son números reales positivos que verifican:

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 4{,}2 \\ y + [z] + \{x\} = 3{,}6 \\ z + [x] + \{y\} = 2 \end{cases}$$ calcula el valor de $\{y\}$.

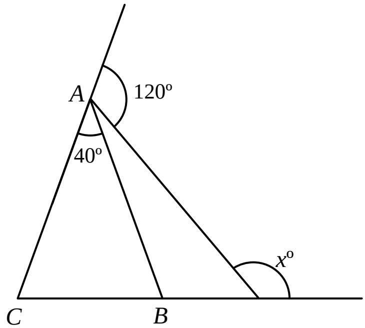
VIII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

22 de noviembre de 2008

PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

1º y 2º **de ESO.-**

1A.- En la figura que te mostramos, el triángulo *ABC* es isósceles con *AB* = *AC*. Calcula *x*.
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)



1B.- Sea "T" la respuesta del problema 2B.
En el diagrama adjunto hay tres casillas vacías. En la 4ª casilla está la respuesta T que te han pasado. En cada una de las casillas 2ª, 3ª y 4ª el número que tiene que haber es la media de los números que hay en las casillas que tiene al lado.
¿Qué número tiene que haber en la 5ª casilla?
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

4			**T**	

1C.- Sea "T" la respuesta del problema 2C.
Para numerar todas las páginas de un libro hemos utilizado T – 1 dígitos (cifras).
¿Cuántas páginas tiene el libro?
(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala)

VIII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

22 de noviembre de 2008

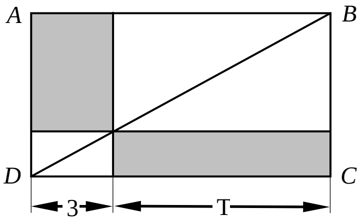
PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

3º y 4º de ESO.-

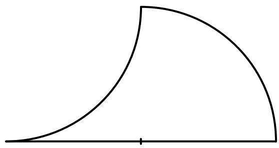
2A.- Sea "T" la respuesta del problema 3A.

La longitud de uno de los rectángulos sombreados de la figura es T. ¿Qué fracción del área del rectángulo *ABCD* está sombreada?

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala)



2B.- La figura de la derecha está compuesta por un segmento de longitud 16 cm y dos cuartos de circunferencia, una de las cuales tiene su centro en el punto medio del segmento. Calcula su área (en cm^2).



(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º-2º de ESO)

2C.- Sea "T" la respuesta del problema 3C.

El producto $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{(T-1)^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{T^2}\right)$ es una fracción

que una vez reducida al máximo puede expresarse como $\frac{a}{b}$. Halla $a+b$.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º-2º de ESO)

VIII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid
22 de noviembre de 2008

PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

Bachillerato.-

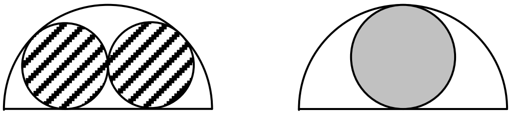
3A.- Sea "T" la respuesta del problema 1A.

La parábola $y = ax^2 + bx + c$ es la simétrica de la parábola $y = x^2 - 4x + \frac{T}{10}$ respecto de la recta paralela al eje OY y que pasa por el vértice de ésta. Calcula $a + b + c$.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º-4º de ESO)

3B.- Sea "T" la respuesta del problema 1B.

El área de cada uno de los dos semicírculos de la figura es T. ¿Cuál es la diferencia entre el área de los círculos rayados y el área del círculo sombreado?



(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala)

3C.- Calcula el valor de k si $3^{2008} - 3^{2006} - 3^{2005} - 3^{2004} = k \cdot 9^{1002}$.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º-4º de ESO)

XXVI CONCURSO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
"SOCIEDAD PUIG ADAM"
Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 7 de junio de 2008

NIVEL I

Problema 1º
Encontrar, si existe, el menor entero positivo, n, que cumpla las siguientes condiciones:

1ª: $5n$ es una cuarta potencia;
2ª: $3n$ es una quinta potencia;
3ª: $7n$ es una sexta potencia..

Problema 2º
Los tres apartados de este problema están encadenados. La respuesta de cada uno es un dato para el siguiente.

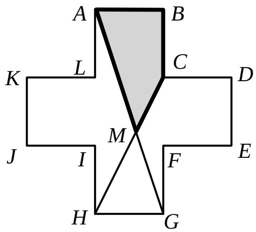
a) Dos lados de un triángulo isósceles miden 22 y 61. Calcular el área de dicho triángulo.

b) Sea T el área y $k = T + 1$. Si a, b y c son enteros positivos menores o iguales que k, y la operación $P*Q$ significa $(P + Q)/2$, calcular el mayor valor posible para la expresión $a*(b*c) - (a*b)*c$.

c) Sea M la respuesta del apartado b). ¿Cuántos números n con $1 < n < M$ verifican $[n/2]+[n/3] = n/2 + n/3$? Recuérdese que $[a]$ significa parte entera de a, esto es, $[1{,}6] = 1$ y $[8] = 8$.

Problema 3º
¿Cuántos cuadrados perfectos menores que 10^6 son múltiplos de 24?

Problema 4º
Consideremos el polígono de 12 lados $ABCDEFGHIJKL$ de la figura, en el que cada lado tiene longitud 4, y cada dos lados consecutivos forman un ángulo recto. Si las diagonales AG y CH se cortan en el punto M, ¿cuál es el área del cuadrilátero $ABCM$?



NIVEL II

Problema 1º

$\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ son dos circunferencias secantes. *O* es el centro de $\mathcal{C}$, y $\mathcal{C}'$ pasa por *O*. La recta de centros corta a $\mathcal{C}'$ en *O* y además en otro punto, *P*, de modo que las tangentes por *P* a $\mathcal{C}$ son perpendiculares entre sí. Calcular la razón entre los radios.

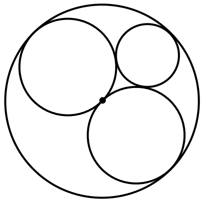
Problema 2º

Los tres apartados de este problema están encadenados. La respuesta de cada uno es un dato para el siguiente.

a) Calcular el menor entero positivo *n* para el que el producto $13 \cdot 19 \cdot n$ se puede escribir también como producto de tres enteros consecutivos.

b) Sea *n* la respuesta del apartado anterior, y $k = \dfrac{n}{111}$.

Todas las circunferencias de la figura son tangentes entre sí. Si la mayor tiene radio *k* y las medianas se tocan en el centro de la mayor, calcular el radio de la pequeña.



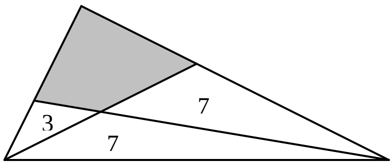
c) Sea *r* la respuesta del apartado anterior. Calcular el área comprendida entre las líneas $y = |x-1| + |x-3|$ e $y = 4r$.

Problema 3º

En una clase de 30 estudiantes, el profesor escribe en la pizarra un entero positivo. Un estudiante dice que es divisible por 2, otro que es divisible por 3, otro que por 4, y así hasta que el estudiante número 30 dice que es divisible por 31. El profesor dice entonces que todas las afirmaciones que se han hecho son verdaderas, salvo dos de ellas, que además han sido hechas seguidas. ¿Cuáles son las dos afirmaciones falsas?

Problema 4º

Dividimos un triángulo en tres triángulos y un cuadrilátero, trazando dos segmentos desde dos de los vértices a los lados opuestos. Si las áreas de los triángulos formados son, como se indica en la figura, 3, 7 y 7, ¿cuál es el área del cuadrilátero sombreado?



NIVEL III

Problema 1º

La suma $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$ es una fracción $\frac{P}{Q}$. Se pide:

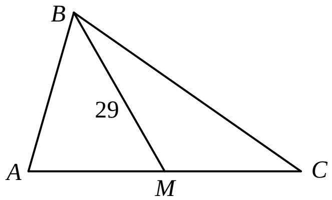
1º.- Demostrar que si n = 100, entonces P es múltiplo de 101.
2º.- Estudiar si para n = 200, será P múltiplo de 201.

Problema 2º

Los tres apartados de este problema están encadenados. La respuesta de cada uno es un dato para el siguiente.

a) El entero n es 124 unidades menor que un cuadrado perfecto y 56 unidades menor que otro cuadrado perfecto. Calcular n.

b) Sea $d = \frac{n}{30}$. En el triángulo *ABC*, la mediana *BM* mide 29. Una perpendicular desde *C* a la prolongación de *BM* corta a ésta en el punto *R*. Si *CR* = *d*, calcular el área del triángulo *ABC*.



c) Sea *T* el área del triángulo *ABC*. La recta $5x + 2y = 2008$ no corta a la circunferencia $x^2 + y^2 = T$. Encontrar el punto de esta circunferencia más próximo a dicha recta.

Problema 3º

Para cada número positivo *A* representamos por $[A]$ la parte entera de *A*. Así pues, $[2,7] = 2$, $[\pi] = 3$ y $[5] = 5$. Representamos por $\{A\}$ a $A - [A]$.

a) Dar un ejemplo de un número *A* positivo tal que $\{A\} + \left\{\frac{1}{A}\right\} = 1$.

b) ¿Puede ocurrir que $\{A\} + \left\{\frac{1}{A}\right\} = 1$ y *A* sea racional? Justifique la respuesta.

Problema 4º

Alicia, Beatriz y Carlos resolvieron entre los tres 100 problemas de su libro de texto y resultó que cada uno por separado sabía resolver exactamente 60 problemas. Decimos que un problema es fácil si lo supieron resolver los tres, y que un problema es difícil si lo supo resolver sólo uno de los tres. ¿Cuántos problemas difíciles había más que fáciles?

Premiados XXVI Concurso PUIG ADAM

Nivel 1.

1. Juan Martínez Olando (Santa María del Pilar)
2. Fernando Gago Encinas (San Gabriel)
3. Daniel Henry Mantilla (Liceo Francés)
4. Aitor Alonso Lorenzo (IES Diego Velázquez)
5. José Luis Sánchez Salvador (IES María Guerrero)

Nivel 2.

1. Francisco Criado Gallart (Amor de Dios)
2. Moisés Herradón Cueto (Brains)
3. Carlos Ruiz Domínguez (San Viator)
4. Sergio Fernández Rincón (IES Antonio Machado)
5. Daniel Herrero Serrano (San José del Parque)

Nivel 3.

1. Rubén Jiménez Benito (IES José Hierro)
   Pedro Segovia Carnicero (San Josçe del parque)
3. Alfonso Alhambra Morón (IES Doctor Marañón)
   Jaime Roquero Giménez (Liceo Francés)
5. Chenda Liu Zhang (IES El Escorial)

XLIV OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

2ª FASE LOCAL-COMUNIDAD DE MADRID

Primera sesión, viernes 18 de enero de 2008

No está permitido el uso de calculadoras. Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.

Problema 1
Demuestra que no existen enteros *a, b, c, d,* tales que el polinomio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $a \neq 0$, cumpla que $P(4) = 1$ y $P(7) = 2$.

Problema 2
En un rectángulo *ABCD,* elegimos puntos *E* y *F* en el lado *AB* de modo que *AE* = *EF*. La perpendicular a *AB* por *E* corta a la diagonal *AC* en el punto *G*. Los segmentos *FD* y *BG* se cortan en *H*. Probar que los triángulos *FBH* y *GHD* tienen la misma área.

Problema 3
Encontrar todos los enteros *a, b* y *c* que verifican:

$$|a+b| + c = 19 \qquad ab + |c| = 97$$

Segunda sesión, sábado 19 de enero de 2008

Problema 4
¿Qué número es mayor: 999! ó 500^{999}? Justifica la respuesta.

Problema 5
Se consideran 17 enteros positivos tales que ninguno de ellos tiene un factor primo mayor que 7. Demuestra que hay al menos una pareja de estos números cuyo producto es un cuadrado perfecto.

Problema 6
Dibujamos en el plano un cuadrilátero convexo *ABCD* en el que las diagonales *AC* y *BD* se cortan en el punto *O*. Si las longitudes de sus lados y de sus diagonales son racionales, demuestra que la longitud *OA* es también racional.

XLV OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA
Fase local-Comunidad de Madrid

Primera sesión, viernes 28 de noviembre de 2008

- **En la hoja de respuestas, escribe la letra que corresponde a la opción que creas correcta en cada pregunta. Si decides cambiarla, táchala con una cruz y escribe otra.**
- **Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos, cada respuesta en blanco 2 puntos y cada respuesta errónea, 0 puntos.**
- **No están permitidas calculadoras ni ningún instrumento de medida.**
- **Tiempo: 3 horas.**

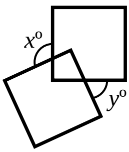
1 El valor de $\sqrt{2^4+\sqrt{3^4}}$ es:

A) 4 **B)** $\sqrt{20}$ **C)** 5 **D)** 7 **E)** $\sqrt{97}$

2 Si $6x-y=16+5\sqrt{2}$ y $6y-x=9+5\sqrt{2}$, ¿cuál es el valor de $x-y$?

A) 1 **B)** $1+\sqrt{2}$ **C)** 2 **D)** $2-\sqrt{2}$ **E)** 0

3 El diagrama muestra dos cuadrados que se solapan.
¿Cuánto vale la suma de los ángulos x e y?



A) 180º **B)** 300º **C)** 330º **D)** 360º

E) Ninguna de las anteriores.

4 ¿Qué operación debe reemplazar a ▲ para que la igualdad escrita sea correcta?

1·2·(3▲4+5)·(6·7+8+9)+2=2008

A) + **B)** – **C)** · **D)** :

E) Ninguna de las anteriores

5 Juanje calculó correctamente el valor de $5^8 \cdot 8^5$. ¿Cuántos dígitos tenía su respuesta?

A) 11 **B)** 12 **C)** 16 **D)** 14 **E)** 15

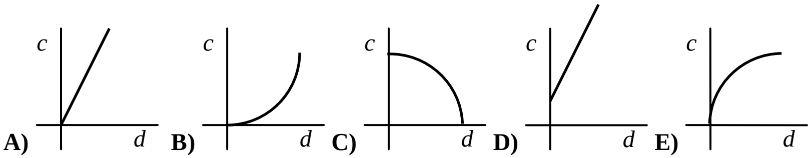
6 Si la media de los tres números *x*, *y*, *z* es *x*, ¿cuál es la media de los dos números *y*, *z*?

A) $\frac{x}{2}$ **B)** x **C)** $2x$ **D)** $3x$ **E)** $4x$

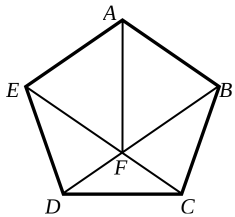
7 Emparejamos los números 72, 8, 10, 5, 45, 36, 15 y 24 de forma que el producto de cada pareja sea el mismo. ¿Con qué número hemos emparejado 10?

A) 36 **B)** 45 **C)** 24 **D)** 15 **E)** 72

8 ¿Cuál de las siguientes gráficas puede ser la que muestra la longitud de una circunferencia *c* en función de su diámetro *d* ?



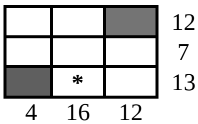
9 El dibujo que ves muestra un pentágono regular *ABCDE*. ¿Cuál es la medida del ángulo *AFC*?



A) 108º **B)** 112º **C)** 116º

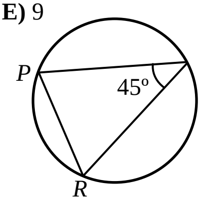
D) 126º **E)** 132º

10 Colocamos algunos de los dígitos de 1 a 9 en las casillas en blanco de forma que no utilizamos el mismo dígito más de una vez, siendo la suma de los dígitos de cada fila y columna la que te mostramos. ¿Qué número aparece en la casilla con asterisco?



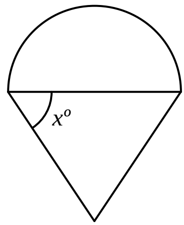
A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

11 Si el radio de la circunferencia de la figura es 4 cm, ¿cuál es, en cm, la longitud de la cuerda *PR*?



A) $4\sqrt{2}$ **B)** 2 **C)** $2\sqrt{2}$ **D)** $2+\sqrt{2}$ **E)** $4-\sqrt{2}$

12 El dibujo que ves muestra un semicírculo y un triángulo isósceles, ambos de igual área. ¿Cuál es el valor de $\operatorname{tg} x^{o}$?



A) 1 **B)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C)** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ **D)** $\frac{2}{\pi}$

E) $\frac{\pi}{2}$

13 Recuerda que $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1$. Si dividimos 2007! entre 2008, el resto r de la división verifica que:

A) $r = 0$ **B)** $100 \le r \le 2006$ **C)** $r = 2007$ **D)** $1 \le r < 100$

E) Nada de lo anterior

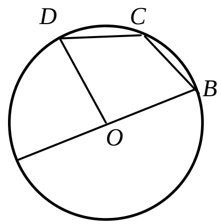
14 En el triángulo rectángulo *ABC* (de ángulo recto en *A*), las bisectrices de los ángulos agudos *B* y *C* se cortan en el punto *P*. Si *P* dista $\sqrt{8}$ unidades de la hipotenusa, ¿cuántas unidades dista *P* de *A*?

A) $\sqrt{8}$ **B)** 3 **C)** $\sqrt{10}$ **D)** $\sqrt{12}$ **E)** 4

15 ¿Cuántos enteros n con $1 \le n \le 500$ son divisibles por 2 pero no por 3?

A) 83 **B)** 84 **C)** 166 **D)** 167 **E)** 417

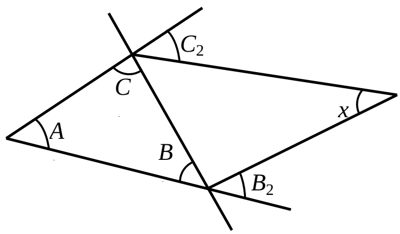
16 En el dibujo de la derecha, los puntos *B*, *C* y *D* son vértices de un octógono regular inscrito en una circunferencia de centro *O* y radio 1. ¿Cuál es el área del cuadrilátero *BCDO*?



A) 1 **B)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C)** $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

D) $\frac{4+\sqrt{2}}{8}$ **E)** $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

17 En la figura que ves, no hecha a escala, los ángulos A_1, B_1, B_2, C_1 y C_2 verifican: $A_1 < 60^o$ $B_1 = 2B_2$ $C_1 = 2C_2$. ¿Cuál es el valor del ángulo *x*?

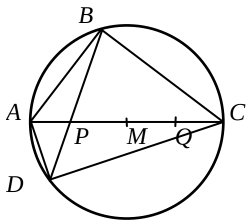


A) $90º-\frac{3}{2}A_1$ **B)** $90º-A_1$ **C)** $180º-3A_1$ **D)** A_1 **E)** $180º-2A_1$

18 Representamos por [*a*] el mayor entero menor o igual que *a*. Así pues [2008]=2008, [π]=3, [–5,76]=–6. ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $[2-x^2]=|2-x^2|$?

A) 0 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 5 **E)** Infinitas

19 Dividimos el diámetro *AC* de una circunferencia en 4 partes iguales con los puntos *P*, *M* y *Q* y dibujamos una cuerda que, pasando por *P*, corte a la circunferencia en *B* y *D*, siendo $PD=\frac{3}{2}AP$. Si el área del triángulo *ABP* es 1, ¿cuál es el área del cuadrilátero *ABCD*?



A) 7 **B)** 7,75 **C)** 8 **D)** 8,5 **E)** 9,25

20 Metemos en una bolsa todos los dígitos utilizados al numerar las 320 páginas de un libro. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer un dígito al azar de esa bolsa resulte ser el 1?

A) $\frac{1}{10}$ **B)** $\frac{11}{100}$ **C)** $\frac{43}{213}$ **D)** $\frac{43}{240}$ **E)** $\frac{40}{213}$

21 De los seis polinomios siguientes, ¿cuántos dividen al polinomio x^7-x?

x^2+x+1; x^3-1; x^2-1; x^4+x^2+1; x^4+x; x^2-x

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

22 En cada una de estas doce casillas hay un número positivo. En la cuarta hay un 4 y en la última un 12. Si la suma de cualesquiera tres casillas consecutivas es 333, ¿qué número hay colocado en la séptima casilla?

			4			?					12

A) 4 **B)** 7 **C)** 12 **D)** 317

E) Faltan datos para determinarlo

23 Si $f(x)=x-1$ y $(g\circ f)(x)=x^2-1$, $g(3)$ es igual a:

A) 3 **B)** 4 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 15

24 La longitud de la diagonal más corta de un polígono regular de *n* lados inscrita en una circunferencia de radio 1 es:

A) $sen\dfrac{\pi}{n}$ **B)** $2sen\dfrac{\pi}{n}$ **C)** $sen\dfrac{2\pi}{n}$ **D)** $2sen\dfrac{2\pi}{n}$ **E)** $2tg\,\dfrac{\pi}{n}$

25 En un juicio se quiere determinar la culpabilidad o no de cuatro personas: P, Q, R y S. Se sabe que:

1) Si P es culpable, lo es Q.
2) Si Q es culpable, es imposible que se verifique simultáneamente que R es inocente y P culpable.
3) Si S es inocente, P es culpable y R inocente.
4) Si S es culpable, lo es P.

¿Cuántos resultaron ser culpables?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4

E) No se puede determinar con estos datos

26 En un triángulo de lados 3, 4 y 5, ¿cuál es la distancia entre los pies de la altura y la mediana trazada desde el vértice opuesto al lado más largo?

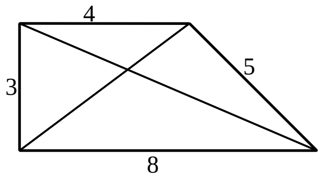
A) $\dfrac{1}{2}$ **B)** $\dfrac{7}{10}$ **C)** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **D)** $\dfrac{3}{4}$ **E)** 1

27 ¿Cuántas soluciones en el intervalo $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ tiene la ecuación $sen\,x+\cos x=\dfrac{1}{2}$?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3

E) Nada de lo anterior

28 Las dimensiones del trapecio rectángulo de la figura son las que se indican en ella. Las áreas de los cuatro triángulos que determinan las diagonales están en la relación:



A) 1, 1, 2, 4 **B)** 1, 1, 3, 4

C) 1, 2, 3, 4 **D)** 1, 2, 2, 4 **E)** 2, 2, 3, 4

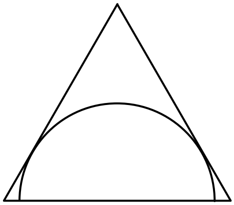
29 Sean x e y dos números reales cuya suma es 1 y sean $A=x^2+y$, $B=x+y^2$. Considera las afirmaciones siguientes:

I. $A = B$ para cualesquiera *x* e *y*. II. $A \neq B$ para algunos *x* e *y*.
III. $A \leq 1$ para cualesquiera *x* e *y*. IV. $A > 1$ para algunos *x* e *y*.

Las afirmaciones verdaderas son:

A) I **B)** II **C)** I y III **D)** I y IV **E)** II y III

30 Un semicírculo está inscrito en un triángulo equilátero como se muestra en la figura. ¿Qué fracción del triángulo cae dentro del semicírculo?



A) $\dfrac{\pi}{4}$ **B)** $\dfrac{2\pi}{5}$ **C)** $\dfrac{\pi}{2}$

D) $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{8}$ **E)** $\dfrac{2\pi}{5}$

XIVª OLIMPIADA de MAYO
Primer Nivel
Mayo de 2008

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
<u>Justifica cada una de tus respuestas.</u>
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

PROBLEMA 1

¿Cuántos números distintos de 6 cifras y múltiplos de 45 se pueden escribir añadiendo un dígito a la izquierda y otro a la derecha de 2008?

PROBLEMA 2

En el colegio Olímpico los exámenes se califican con números enteros. La menor nota posible es 0 y la mayor es 10. En la clase de matemáticas el profesor hace dos exámenes. Este año tiene 15 alumnos. Cuando uno de sus alumnos obtiene en el primer examen menos de 3 y en el segundo examen más de 7, él lo llama *alumno superado*. El profesor, al terminar de corregir los exámenes, hizo la media de las 30 notas y obtuvo 8. ¿Cuál es la mayor cantidad de alumnos superados que pudo haber tenido esta clase?

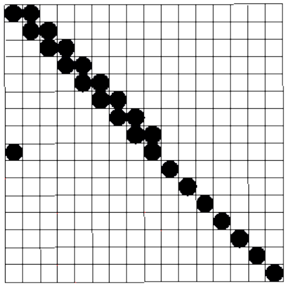
PROBLEMA 3

En la pizarra están escritos todos los números enteros del 1 al 2008 inclusive. Se borran dos números y se escribe su diferencia. Por ejemplo, si se borran 5 y 241, se escribe 236. Así se continúa, borrando dos números y escribiendo su diferencia, hasta que sólo queda un número. Determina si el número que queda al final puede ser 2008. ¿Y 2007? En cada caso, si la respuesta es afirmativa indica una secuencia con ese número final, y si es negativa, explica por qué.
Nota: el 1 no es primo.

PROBLEMA 4

Sobre el lado AB de un cuadrado $ABCD$ se dibuja exteriormente el triángulo rectángulo ABF, de hipotenusa AB. Se sabe que $AF = 6$, y que $BF = 8$. Llamamos E al centro del cuadrado. Calcula la longitud del segmento EF.

PROBLEMA 5



En un tablero de 16×16 se colocaron 25 monedas, como en la figura. Está permitido seleccionar 8 filas y 8 columnas y retirar del tablero todas las monedas que se encuentren en esas 16 líneas.

Determina si es posible retirar todas las fichas del tablero. Si la respuesta es afirmativa, indica las 8 filas y las 8 columnas seleccionadas, y si es negativa, explica por qué.

XIVª OLIMPIADA de MAYO
Segundo Nivel
Mayo de 2008

Olimpíada de Mayo
Competencia Juvenil Iberoamericana de Matemática

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

PROBLEMA 1

En la pizarra está escrita la siguiente expresión:

$$1-2-2^2-2^3-2^4-2^5-2^6-2^7-2^8-2^9-2^{10}.$$

Juan intercala paréntesis de distintas maneras y efectúa el cálculo que queda. Por ejemplo así: $1-2-(2^2-2^3)-2^4-(2^5-2^6-2^7)-2^8-(2^9-2^{10})=403$

O así: $1-(2-2^2-(2^3-2^4)-(2^5-2^6-2^7)-(2^8-2^9)-2^{10}=-933$

¿Cuántos resultados diferentes puede obtener Juan?

PROBLEMA 2

En el rectángulo $ABCD$ de lados AB, BC, CD y DA, sea P un punto del lado AD tal que $B\hat{P}C=90^o$. La perpendicular a BP trazada por A corta a BP en M y la perpendicular a CP trazada por D corta a CP en N.

Demuestra que el centro del rectángulo está en el segmento MN.

PROBLEMA 3

En los números 1010...101 se alternan unos y ceros; si hay n unos, hay $n-1$ ceros $(n \geq 2)$.

Determina los valores de n para los cuales el número 1010...101, que tiene n unos, es primo.

PROBLEMA 4

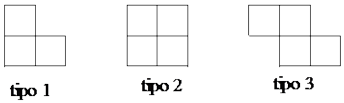
En el plano se tienen 16 rectas tales que no hay dos paralelas ni tres concurrentes. Sebastián tiene que colorear los 120 puntos que son intersección de dos de las rectas de modo que en cada recta todos los puntos sean de distinto color.

Determina el mínimo número de colores que necesita Sebastián para su tarea.

¿Y si las rectas son 15? (En este caso los puntos son 105)

PROBLEMA 5

Matías cubrió un tablero cuadrado de 7×7, dividido en casillas de 1×1, con piezas de los tres tipos siguientes



sin huecos ni superposiciones, y sin salirse del tablero. Cada pieza del tipo 1 cubre exactamente tres casillas y cada pieza del tipo 2 o del tipo 3 cubre exactamente 4 casillas.
Determina la cantidad de piezas del tipo 1 que pudo haber usado Matías.
(Las piezas se pueden girar y dar la vuelta)

Relación de ganadores en la "XIV OLIMPIADA DE MAYO – 2008

PRIMER NIVEL

	Apellidos y nombre	**Centro**	**Localidad**	**Premio**
1	Barrero Santamaría, Miguel	CEIP Ciudad Pegaso	Madrid	ORO
2	Alonso Lorenzo, Izar	IES Diego Velázquez	Torrelodones	PLATA
3	García del Corral, Alfonso	Col. Maristas Chamberí	Madrid	PLATA
4	Cobos del Álamo, Javier	Col. Maristas Chamberí	Madrid	BRONCE
5	Sardinero Meirás, Paula	Col. Virgen de Europa	Madrid	BRONCE
6	Martínez de la Orden, Ander	IES Ramiro de Maeztu	Madrid	BRONCE
7	Matson, Benjamín	Col. Lorenzo Luzuriaga	Madrid	BRONCE
8	Navarro Hernández, Adrián	Colegio Joyfe	Madrid	MENCIÓN
9	García Pereira, Félix	CEIP Mariano Benlliure	Madrid	MENCIÓN
10	Ruiz Domínguez, Marta	Colegio San Viator	Madrid	MENCIÓN

	SEGUNDO NIVEL	**Centro**	**Localidad**	
1	Esteban de la Iglesia, Lorenzo	Col. Fray Luis de León	Madrid	PLATA
2	Gago Encinas, Fernando	Col. San Gabriel	Madrid	PLATA
3	Mendizábal Roche, Jaime	IES Ramiro de Maeztu	Madrid	PLATA
4	López Lázaro, Luis	Col. Alemán	Madrid	BRONCE
5	Barbas Espá, Fernando	IES San Juan Bautista	Madrid	BRONCE
6	Martínez Olando, Juan	Col. Santa Mª del Pilar	Madrid	BRONCE
7	Sánchez Salvador, José Luis	IES María Guerrero	Madrid	BRONCE
8	Alonso Lorenzo, Aitor	IES Diego Velázquez	Madrid	MENCIÓN
9	García Herrero, Victor	IES Ortega y Gasset	Madrid	MENCIÓN
10	Santana Sáez de Ibarra, Raúl	IES José Hierro	Getafe	MENCIÓN

SOLUCIONES 14ª OLIMPIADA DE MAYO – 2008

Primer Nivel

Problema 1. Solución

Sea $a2008b$ el número de seis dígitos y múltiplo de 45 formado añadiendo una cifra a la izquierda y otra a la derecha de 2008. Como 45 = 9·5, $a2008b$ es múltiplo de 5 y de 9. Entonces termina en 0 ó en 5, y $a + 2 + 8 + b$ es múltiplo de 9. Si $b = 0$, para que $10 + a$ sea múltiplo de 9 la única posibilidad es que a sea 8. Si $b = 5$, la suma de las cifras es $15 + a$, que será múltiplo de 9 únicamente con $a = 3$.
Por lo tanto, añadiendo un dígito a la izquierda y otro a la derecha de 2008 se pueden obtener dos números de seis cifras que son múltiplos de 45: 820080 y 320085.

Problema 2. Solución

Observemos para empezar que un alumno superado puede obtener como máximo 2 en el primer examen, luego la suma de las notas de sus dos exámenes es como mucho 12. Sea k el número de alumnos superados. La suma de sus notas será como máximo $12k$. Como la suma de las notas de los 15 alumnos es 8·30 = 240, la suma de las notas de los alumnos no superados es al menos $240 – 12k$.
Por otro lado, la suma de las notas de los $15 – k$ alumnos no superados es a lo sumo $20(15-k)$, pues cada uno puede obtener como máximo 20 puntos sumando sus dos notas.
Si S es la suma de las notas de los alumnos no superados, tenemos $20(15-k) \geq S \geq 240-12k$, de donde $60 \geq 8k$, es decir, k es, como máximo, 7.
Para completar la demostración, resta dar un ejemplo en el que haya exactamente 7 alumnos superados. Una posibilidad sería la siguiente:
7 alumnos con 2 en el primer examen y 10 en el segundo (todos ellos superados); 2 alumnos con 8 en el primer examen y 10 en el segundo; 6 alumnos con 10 en el primer examen y 10 en el segundo. De esta forma la suma de las 30 notas es 7·12 + 2·18 + 6·20 = 240, y por lo tanto la nota media es 8; además hay exactamente 7 alumnos superados.

Problema 3. Solución

El último número si puede ser 2008. Una manera de obtenerlo es la siguiente. Con cualquier grupo de cuatro enteros consecutivos se puede obtener el 0 en tres pasos:

$$\underline{a\ ,\ a+1},\ a+2,\ a+3 \ \rightarrow\ 1\ ,\ \underline{a+2,\ a+3}\ \rightarrow\ \underline{1\ ,\ 1}\ \rightarrow\ 0$$

(en cada paso, se señalan los dos números borrados).
Además, con 1, 2 y 3 se obtiene el 0 del siguiente modo:

$$1,\ \underline{2,\ 3} \rightarrow\ \underline{1,\ 1}\ \rightarrow\ 0$$

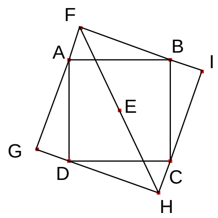
Agrupamos los números en 501 grupos de grupos de cuatro números consecutivos, un grupo de tres (1, 2, 3) y el 2008:
1 2 3 | 4 5 6 7 | 8 9 10 11 | ….. | 2004 2005 2006 2007 | 2008.

Llevando al cero el grupo de tres números y cada uno de los grupos de cuatro, se obtiene una sucesión de 502 ceros y 2008, que finaliza en 2008.
Veamos ahora que el último número no puede ser 2007. Inicialmente hay 1004 números pares y 1004 números impares, así que la suma de todos ellos será un número par. La paridad de la suma de los números escritos en la pizarra es siempre la misma, es decir, será siempre par. Como 2007 es impar, es imposible que quede escrito en la pizarra.

Problema 4. Solución

Solución 1

Construimos triángulos iguales al *AFB* sobre los otros lados del cuadrado. Sea $\alpha = F\hat{A}B$ y $\beta = F\hat{B}A$.

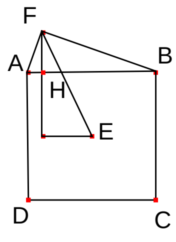


Por construcción, $\alpha + \beta = 90^\circ$ e $I\hat{B}C = \alpha$, luego $F\hat{B}I = F\hat{B}A + A\hat{B}C + I\hat{B}C = \beta + 90^\circ + \alpha = 180^\circ$, de modo que *F*, *B*, *I* están alineados. Lo mismo ocurre en cada vértice del cuadrado *ABCD*. Por lo tanto, *FGHI* es un cuadrado de lado 6 + 8 = 14. Además la figura es simétrica respecto del centro *E* del cuadrado *ABCD*, entonces *E* también es el centro del cuadrado *FGHI*. Luego *FE* es la mitad de la diagonal del cuadrado de lado 14, es decir, $FE = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 14^2} = 7\sqrt{2}$.

Solución 2

El triángulo *AFB* es rectángulo, así que por el teorema de Pitágoras $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = 10$.

Trazamos la recta paralela a *AD* que pasa por *F* y la recta paralela a *AB* que pasa por *E*, y llamemos *G* al punto donde se cortan las dos rectas. Sea *H* la intersección de *AB* con *FG*. Resulta que *FH* es la altura del triángulo *ABF* correspondiente a la base *AB*, luego $área(ABF) = \frac{AB \cdot FH}{2}$. Como también $área(ABF) = \frac{AF \cdot BF}{2} = 24$, obtenemos *FH* = 4,8.



Ahora, *GH* es la mitad de *AD*, de modo que *GH* = 5, y *EG* es la mitad de *AB* menos *AH*. El triángulo *AFH* es rectángulo, luego (Pitágoras) $AH = \sqrt{AF^2 - FH^2} = 3{,}6$. Luego *EG* = 5 – 3,6 = 1,4.

Finalmente, aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo *EFG* tenemos $EF=\sqrt{FG^2+EG^2}=\sqrt{(FH+HG)^2+EG^2}=\sqrt{9{,}8^2+1{,}4^2}=7\sqrt{2}$.

Problema 5. Solución

La respuesta es no. Supongamos, por el contrario, que hay 8 filas y 8 columnas que contienen todas las monedas. En lo que sigue, las filas y las columnas están numeradas del 1 al 16 hacia abajo y de izquierda a derecha, respectivamente. Llamemos Q al cuadrado superior izquierdo de 9 x 9. Hay siete monedas fuera de Q, y estas monedas requieren 7 filas o columnas. Digamos que estas monedas están contenidas en $k\le 7$ filas y $7-k$ columnas. Entonces, las monedas de Q están contenidas en 8 – k filas y 8 – (7 – k) = k + 1 columnas. Denominamos a estas filas y columnas seleccionadas.

Miremos las filas no seleccionadas de Q: hay 9 – (8 – k) = k + 1 de estas filas. Podemos dividirlas en varios bloques de filas consecutivas. Consideraremos que las filas de Q están ordenadas de forma cíclica, es decir, la fila 1 es consecutiva de la fila 9. Digamos que hay *m* bloques de filas consecutivas no seleccionadas, y los bloques contienen $x_1,x_2,\ldots,x_m$ filas respectivamente. Entonces $x_1+x_2+\ldots+x_m=k+1$. Observemos ahora que para contener las monedas del bloque *j* se necesitan x_j + 1 columnas. Además, las columnas necesarias para bloques diferentes son diferentes. En consecuencia, se necesitan al menos $(x_1+1)+(x_2+1)+\ldots+(x_m+1)=m+k+1$ columnas para contener las monedas de Q que no están en las 8 – k filas seleccionadas. Entonces se seleccionan al menos m + k + 1 columnas; pero el número de columnas seleccionadas es k + 1. Esto implica que m = 0, lo que es imposible, y se completa la solución.

Segundo Nivel

Problema 1. Solución

Juan puede colocar los paréntesis de modo que los signos queden como el quiera a partir del segundo signo. Es claro que no puede elegir el primer signo, que siempre será menos. Además, dada una tira de + y de – que comienza con – , Juan puede obtenerla como sigue:

- Si en la tira aparece un – y un + consecutivos, abre un paréntesis entre los correspondientes términos de la expresión original.
- Si en la tira aparece un + y un – consecutivos, cierra paréntesis entre los correspondientes términos de la expresión original.

Por ejemplo, para obtener la expresión

$$1-2-2^2+2^3+2^4-2^5-2^6-2^7+2^8-2^9+2^{10}$$

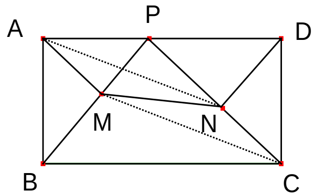
puede colocar los paréntesis así:

$$1-2-(2^2-2^3-2^4)-2^5-2^6-(2^7-2^8)-(2^9-2^{10})$$

Entonces Juan puede escoger 9 de los 10 signos de la expresión, de modo que puede obtener 2^9 expresiones distintas. Sólo nos falta comprobar que Juan no tiene sumas repetidas, es decir, que expresiones distintas dan resultados distintos. Si dos expresiones distintas tienen la misma suma, podemos igualarlas y cancelar los términos que aparecen en ambas con el mismo signo. Así, la mayor potencia de 2 que no se ha cancelado figura en un lado de la igualdad con + y en el otro con – . Como $1 + 2 + \ldots + 2^n < 2^{n+1}$, tenemos que uno de estos miembros es positivo y el otro es negativo, lo que es absurdo.

Problema 2. Solución

Solución 1



En el triángulo rectángulo *ABP*, *AM* es la altura correspondiente a la hipotenusa.

Entonces $A\hat{B}M = 90 - B\hat{A}M = 90 - A\hat{P}B$, de donde

$B\hat{A}M = A\hat{P}B$. (1)

Además, $A\hat{P}B = P\hat{B}C$ (2)

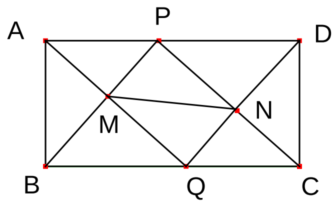
pues son alternos internos entre las paralelas *AD* y *BC*.

Por otra parte, en el triángulo rectángulo *BCP* tenemos que $P\hat{B}C + P\hat{C}B = 90º$, y como $B\hat{C}D = 90º = D\hat{C}P + P\hat{C}B$, resulta $D\hat{C}P = P\hat{B}C$ (3)

De (3), (2) y (1) obtenemos $D\hat{C}P = P\hat{B}C = A\hat{P}B = B\hat{A}M$.

Luego los triángulos rectángulos *ABM* y *CDN* son iguales, pues *AB* = *CD* y $B\hat{A}M = D\hat{C}N$. De aquí deducimos que *AM* = *CN*. Además, como *AM* y *CN* son paralelos por ser ambos perpendiculares a *BP*, resulta que *AMCN* es un paralelogramo. Llamemos *O* al punto de intersección de sus diagonales. Se cortan en su punto medio, así que *O* es el punto medio de *AC*, es decir, *O* es el centro del rectángulo. Ahora es claro que *O*, cetro del rectángulo, es un punto de *MN*.

Solución 2



Prolongamos *AM* y *DN* hasta que se corten en *Q*. El cuadrilátero *PMQN* es un rectángulo, pues tres de sus ángulos son rectos. Las diagonales del rectángulo, *PQ* y *MN*, se cortan en su punto medio. Por otra parte, los triángulos rectángulos *BPC* y *DQA* son iguales, pues tienen sus ángulos iguales (lados paralelos) dado que *BP* es paralela a *DQ* (pues ambas son perpendiculares a *PC*), *CP* es paralela a *AQ* (ambas perpendiculares a *BP)* y *BC* es paralelo a *DA*, al ser lados opuestos del rectángulo *ABCD*.
En consecuencia, *BP* es paralelo e igual que *DQ*, luego el cuadrilátero *BPDQ* es un paralelogramo. De aquí se deduce que *Q* es un punto del segmento *BC*, pues está en la paralela a *AD* que pasa por *B*. Además, las diagonales *PQ* y *BD* del paralelogramo *BPDQ* se cortan en sus puntos medios. Así, el punto medio de *PQ* es el centro del rectángulo *ABCD*. Como este punto es la intersección de las diagonales *PQ* y *MN* del rectángulo *PMQN*, resulta que el centro de *ABCD* pertenece a *MN*.

Problema 3. Solución

Si $n = 2$, obtenemos 101 que es primo.
Si $n > 2$,

$$101....101 = A_n = 10^{2(n-1)} + 10^{2(n-2)} + ... + 10^2 + 1 = \frac{\left(10^2\right)^n - 1}{10^2 - 1} = \frac{\left(10^n - 1\right)\left(10^n + 1\right)}{(10-1)(10+1)}.$$

Si n es par, tenemos que $\dfrac{10^n - 1}{10^2 - 1}$ es entero mayor que 1 (recordemos que $n > 2$).
Queda que el número con n unos y n -1 ceros 101….101 = 101…101·100…01,
Donde el primer factor tiene $\dfrac{n}{2}$ unos y $\dfrac{n}{2}$ - 1 ceros, y en el segundo, entre los unos del principio y final hay n -1 ceros.

Si n es impar, tenemos que $\dfrac{10^n - 1}{10^2 - 1}$ y $\dfrac{10^n + 1}{10^2 + 1}$ son ambos enteros mayores que 1. En este caso, 101…101 = 111…11·909…9091, con el primer factor de n unos, y en el segundo $\dfrac{n-1}{2}$ nueves y $\dfrac{n-3}{2}$ ceros.
En consecuencia, si $n > 2$, el número 101…101 es compuesto.
El único valor de n para el que es primo es $n = 2$.

Problema 4. Solución

En ambos casos la respuesta es 15 colores.

Para el caso de 16 rectas, como en cada una hay 15 puntos pintados, son necesarios al menos 15 colores, y basta mostrar como se logra la coloración de 15 colores.

Numeramos las rectas de 1 a 16, y los colores de 1 a 15. El punto de intersección de la recta 16 con las rectas 1,2,…,15 es de color 1, 2, …, 15, respectivamente. Para colorear los restantes puntos, colocamos los números del 1 al 15 consecutivamente en los vértices de un polígono regular de 15 lados, y luego coloreamos el punto de intersección de las rectas *i* y *j* con el número que tiene el vértice del polígono que está en la mediatriz de la diagonal que une los vértices *i* y *j* del polígono.

Si hay 15 rectas, es imposible colorear los puntos con 14 colores, porque en tal caso en cada recta habría exactamente un punto de cada color, y entonces cada color figura en las 15 rectas. Fijo un color, si lo contamos cada vez que aparece en una recta, obtenemos 15 y hemos contado dos veces cada punto con ese color. Absurdo, porque 15 es impar.

Para colorear los puntos con 15 colores, repetimos la estrategia descrita en el caso anterior con el polígono de 15 lados.

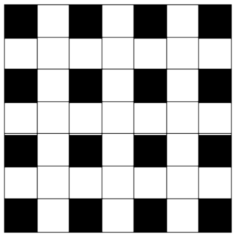
Problema 5. Solución

En primer lugar, veamos que para cubrir el tablero se deben usar al menos 16 piezas. Para ello, marcamos 16 casillas como en la figura. Cada pieza (de cualquier tipo) cubre a lo sumo una casilla marcada. Como hay 16 casillas marcadas, se necesitan al menos 16 piezas.

Supongamos ahora que el tablero se ha cubierto con x piezas de tipo 1, y piezas de tipo 2 y z piezas del tipo 3.

Entonces,

$3x + 4y + 4z = 7^2 = 49$.



Veamos que $x = 15$ (de modo que $y = 1$, $z = 0$ ó $y = 0$, $z = 1$).

Como hay al menos 16 piezas, se tiene que $x + y + z \geq 16$. Luego $4x + 4y + 4z \geq 64$, y como $3x + 4y + 4z = 49$, resulta que $x + (3x + 4y + 4z) = x + 49 \geq 64$, de modo que $x \geq 15$. Es claro que es imposible que $x > 15$, pues contradice $3x + 4y + 4z = 49$, de modo que $x = 15$; en cada cubrimiento del tablero se utilizan exactamente 15 piezas de tipo 1, y una pieza de tipo 2 o una pieza de tipo 3.

Son posibles los cubrimientos de las dos clases.

Dirección General de Mejora de la Calidad de la Enseñanza
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN
Comunidad de Madrid

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Consejo Social de la UCM

sm

ANAYA

El Corte Inglés

sas.

EDUCAMADRID

YALOS INSTRUMENTS, S.L.

XIV concurso de primavera

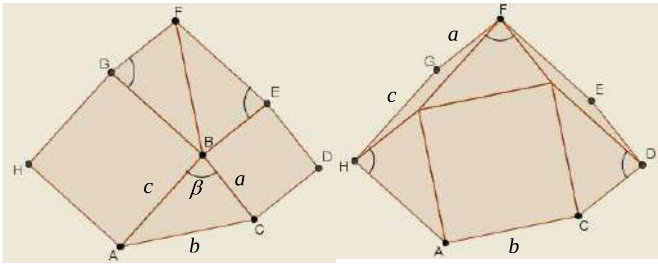
MATEMÁTICAS 2010

Comunidad de Madrid

Comité organizador del Concurso de Primavera

Alfredo Martínez Sanz
Esteban Serrano Marugán
Francisco López Álvarez
Javier Soler Areta
Jesús García Gual
Joaquín Hernández Gómez
José María Sordo Juanena

Juan Jesús Donaire Moreno
Luis Ferrero de Pablo
María Gaspar Alonso-Vega,
María Moreno Warleta
Merche Sánchez Benito
Pilar Ruiz Cervigón
Víctor Manuel Sánchez González



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

Teorema del coseno para un ángulo agudo

Presentación

"Si catorce vidas son dos gatos, ... aún queda mucho por vivir"
(Fito & Fitipaldis).

Vamos a por los catorce, y con vuestro concurso (estudiantes y profesores) no hay quiniela que se nos resista, por muchas equis que tenga.

Bienvenida sea la prueba CDI (de Conocimientos y Destrezas Indispensables) de la Comunidad, pero para mejorar los conocimientos matemáticos de nuestros alumnos es también indispensable contar con horas suficientes de matemáticas para todos los estudiantes: cuatro horas en 3º y 4º de ESO.

Comité Organizador

Agradecimientos:

- *A los alumnos, a sus profesores y a sus padres.*
- *A la Facultad de Matemáticas., al Consejo Social y al Vicerrectorado de Alumnos de la U. C.M.*
- *Al Área de Formación del Profesorado dentro de la Dir. Gral. de Ordenación Académica de la Consejería de Educación.*
- *A Educamadrid*
- *A las editoriales*

  Grupo ANAYA y **Ediciones S.M**,
- *Al grupo empresarial* **El Corte Inglés.**

XIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: Día 4 de marzo de 2009

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ (☒) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA.**
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA
Asociación Matemática “Concurso de Primavera”

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés - Grupo ANAYA
Librería Aviraneta - www.profes.net

1 El producto $34 \times 1\,111\,111$ es igual a:

A) 34 343 434 **B)** 33 334 444 **C)** 37 777 774 **D)** 34 777 734 **E)** 34 777 774

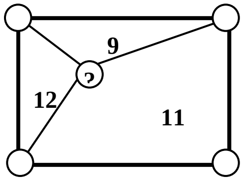
2 Un avión vuela a 9,75 kilómetros sobre el nivel del mar y pasa sobre un submarino que está a 32 hectómetros bajo el nivel del mar. ¿Qué distancia, en metros, los separa?

A) 12 950 **B)** 5 450 **C)** 100 700 **D)** 4 175 **E)** 978 200

3 Julián entretiene a su hermanita Lucía y a cambio, su madre le da dos pasteles por cada tres horas de entretenimiento o seis canicas por cada media hora. Si su madre le da un pastel y 18 canicas, ¿cuánto tiempo debe entretener Julián a Lucía?

A) 1 hora y media **B)** 2 horas **C)** 2 horas y media **D)** 3 horas **E)** 4 horas

4 En cada uno de los círculos he puesto un número del 1 al 5 sin repetir. ¿Qué número he puesto en la casilla central si los números que aparecen en cada región son la suma de los números que están en los vértices que la definen?



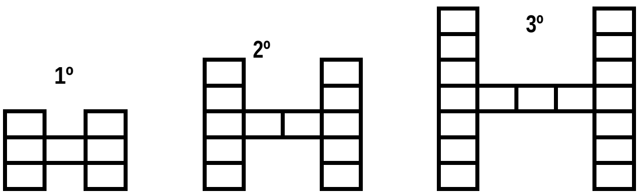
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

5 ¿Cuál de las siguientes expresiones tiene mayor valor?

A) $0{,}02 \times 3000$ **B)** $0{,}06 : 100$ **C)** $1800 : 0{,}003$

D) $200 \times 60 : 2$ **E)** $0{,}2 \times 0{,}03 \times 10\,000$

6 ¿Cuántos rectangulitos son necesarios para dibujar la H que ocupa el lugar 10º?

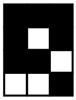


A) 52 **B)** 70 **C)** 50 **D)** 68 **E)** 72

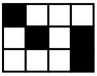
7 La suma de los divisores de 100 es:

A) 111 **B)** 217 **C)** 221 **D)** 222 **E)** 250

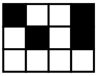
8 Hemos pintado de negro algunos cuadritos de una ventana rectangular. ¿Cuál de las siguientes piezas puede ser cubierta por la ventana de la derecha para obtener una ventana completamente negra?



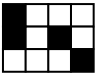
A)



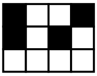
B)



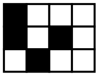
C)



D)



E)



9 Dos de estos cofres están vacíos, en los restantes hay un chicle, un caramelo y una gominola. Si todos los enunciados son falsos, ¿en qué cofre está el caramelo?

A) La gominola está aquí

B) La gominola está en C

C) El cofre B está ocupado

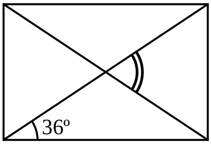
D) El caramelo está en A

E) Este cofre no está vacío

10 En Nineland tienen monedas de 1, 9, 99 y 999 florines. ¿Cuál es el menor número de monedas que se necesitan para pagar exactamente 6 351 florines?

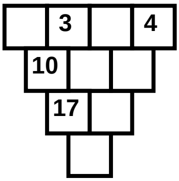
A) 15 **B)** 17 **C)** 19 **D)** 21 **E)** 22

11 En un rectángulo una diagonal forma con uno de los lados un ángulo de 36º. ¿Cuánto mide el ángulo que forman sus diagonales?



A) 90º **B)** 72º **C)** 60º **D)** 54º **E)** 36º

12 En la pirámide invertida de la derecha se colocan números en las casillas de forma que el número de una casilla inferior sea suma de los dos números de las casillas superiores que la tocan. Si rellenas todas las casillas con este criterio, ¿qué número ocupa la casilla más baja?



A) 30 **B)** 31 **C)** 32 **D)** 34 **E)** 35

13 Sofía lee 20 páginas en 50 minutos. A esa velocidad, ¿cuánto tardará en leer 50 páginas?

A) 20 min **B)** 1 h 20 min **C)** 1 h 25 min **D)** 1 h 45 min **E)** 2 h 5 min

14 El día de su cumple, Marta lleva caramelos a su clase y los reparte entre sus 17 compañeros. A todos les da la misma cantidad de caramelos y al final le sobran siete. ¿Cuál de estos números puede ser el total de caramelos que llevó Marta?

A) 170 **B)** 777 **C)** 340 **D)** 109 **E)** 129

15 Si en el año 2009 celebramos el XIII Concurso de Primavera, ¿en qué año celebraremos el XLVI Concurso?

A) 2059 **B)** 2042 **C)** 2060 **D)** 2040 **E)** 2062

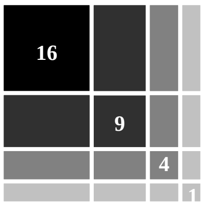
16 ¿Cuál es la suma de las tres cifras que faltan en esta multiplicación?

$$\begin{array}{ccccc} & 5 & 2 & \ast & 7 \\ & & & \times & 4 \\ \hline 2 & \ast & 1 & 4 & \ast \end{array}$$

A) 17 **B)** 15 **C)** 12 **D)** 9

E) 6

17 El logo del Concurso de Primavera es un cuadrado formado por cuadrados y rectángulos. Si las áreas de los cuadrados son 16, 9, 4 y 1 cm^2, ¿cuál es, en cm^2, el área del cuadrado total?



A) 100 **B)** 75 **C)** 64 **D)** 36

E) 25

18 La tuneladora *Dulcinea* es capaz de excavar 35 metros de túnel al día y su gemela *Tizona* hace 90 metros cada dos días. A ese ritmo trepidante, ¿cuántos días tardarán en excavar un túnel de un kilómetro trabajando las dos juntas?

A) Menos de 10 **B)** Entre 10 y 12 **C)** Entre 12 y 15 **D)** Entre 24 y 26
E) Más de 28

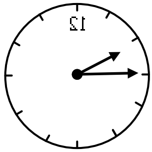
19 El mago *Copri* le dice a Richi:

Piensa un número de tres cifras, multiplícalo por 10 y después súmale 20. Ahora divide el resultado entre 2 y después réstale 45. ¿Qué número has obtenido?

Richi dice 1435. ¿Cuál es la suma de las cifras del número que había pensado Richi?

A) 15 **B)** 5 **C)** 25 **D)** 19 **E)** No se puede saber

20 En un espejo ves este reloj. ¿Qué hora es en realidad?



A) 15:15 **B)** 10:15 **C)** 10:45 **D)** 8:45

E) 9:45

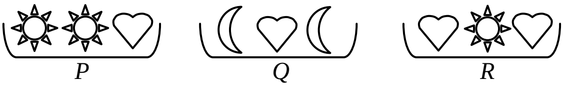
21 Una taza está llena de café con leche. Al principio hay el doble de leche que de café. Cuando ya me he bebido la mitad del contenido, vuelvo a rellenar la taza hasta arriba con leche. ¿Qué fracción del contenido es ahora café?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{2}{9}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** $\frac{1}{9}$ **E)** $\frac{1}{6}$

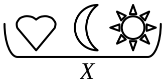
22 En mi bolsillo izquierdo tengo ocho monedas y en el derecho dos. Si en total tengo 2,70 euros y todas las monedas del bolsillo izquierdo son del mismo valor, ¿de cuántos céntimos son?

A) 2 **B)** 5 **C)** 10 **D)** 20 **E)** No se puede saber

23 Las tres bandejas *P*, *Q* y *R* están en orden creciente de peso.



Para mantener este orden añadiendo la bandeja *X*, la colocación debe ser:



A) *XPQR* **B)** *PXQR* **C)** *PQXR*

D) *PQRX* **E)** No se puede saber

24 ¿Cuánto vale 2009 – 2008 + 2007 – 2006 + 2005 – 2004 +…+ 3 – 2 +1 – 0?

A) 2010 **B)** 2009 **C)** 1005 **D)** 1004 **E)** 0

25 Cuando el abuelo Ricardo sale a cabalgar va a 6 km/h al paso, a 15 km/h al trote y a 30 km/h al galope. En su paseo de hoy ha ido media hora al paso, una hora al trote y 20 minutos al galope. ¿Cuántos kilómetros ha recorrido en total?

A) 25,5 **B)** 28 **C)** 17 **D)** 30 **E)** 36

XIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: Día 4 de marzo de 2009

NIVEL II (1º y 2º de ESO)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ (☒) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA
Asociación Matemática "Concurso de Primavera"

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés - Grupo ANAYA
Librería Aviraneta - www.profes.net

1 ¿Cuál de los siguientes enteros se aproxima más a $\sqrt{123456}$?

A) 134 **B)** 245 **C)** 350 **D)** 450 **E)** 617

2 ¿Cuántos divisores tiene 2009?

A) 7 **B)** 6 **C)** 4 **D)** 2 **E)** 0

3 En un trapecio rectángulo las bases miden 15 y 36 cm y el lado oblicuo 29 cm. Su perímetro, en cm, es:

A) 100 **B)** 101 **C)** 102 **D)** 105 **E)** 109

4 Un poliedro tiene un total de 9 vértices. De 3 vértices parten 4 aristas y de 6 vértices parten 5 aristas. ¿Cuántas aristas tiene en total?

A) 18 **B)** 20 **C)** 21 **D)** 30 **E)** 42

5 ¿Cuál de estas operaciones da un resultado mayor?

A) $17\cdot 35+17\cdot 65$ **B)** $221\cdot 3+3\cdot 779$ **C)** $45\cdot 11+89\cdot 45$

D) $77\cdot 23$ **E)** $45\cdot 99$

6 Los lados del triángulo *ABC* tienen de longitud *AB* = 5, *BC* = 6 y *AC* = 7. Dos hormigas parten simultáneamente del punto *A* y recorren a la misma velocidad el borde del triángulo en direcciones distintas. Si se encuentran nuevamente en un punto *D*, ¿cuál es la longitud de *BD*?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

7 La suma 7 + 77 + 777 + 7 777 + 77 777 + 777 777 + 7 777 777 da lo mismo que:

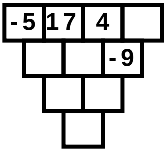
A) 7 777 777 · 123 4567 **B)** 7 777 777 · 1 111 111 **C)** 7 · 1 234 567

D) 7 654 321 · 7 **E)** 1 234 567 · 1 111 111

8 Si ♣ + ♦ = 8, ♣ + ♥ = 13, ♣ + ♠ = 10 y ♦ + ♥ + ♠ = 22, entonces el valor de ♣ × ♦ × ♥ × ♠ es:

A) 1221 **B)** 1440 **C)** 3636 **D)** 2412 **E)** 1050

9 En la pirámide invertida de la derecha, se colocan números en las casillas de forma que el número de una casilla inferior sea suma de los dos números de las casillas superiores que la tocan. Si rellenas todas las casillas con este criterio, ¿qué número ocupa la casilla más baja?



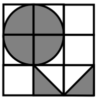
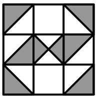
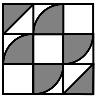
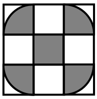
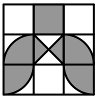
A) 29 **B)** 0 **C)** 45 **D)** 39 **E)** 27

10 ¿Cuántas de las siguientes operaciones dan como resultado un múltiplo de 9?

3333^2 $1333 \cdot 2333$ $10^6 + 2^3$ $65^2 - 64^2$

A) Ninguna **B)** Una **C)** Dos **D)** Tres **E)** Cuatro

11 ¿Cuál de las áreas sombreadas es mayor?

A)

B)

C)

D)

E)


12 ¿Cuántos puntos son necesarios para hacer la figura 10?

Figura 1

Figura 2

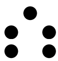



Figura 3

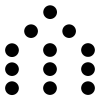
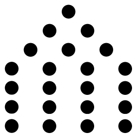
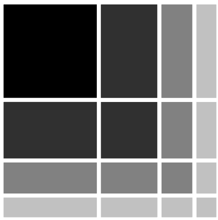



Figura 4


A) 117 **B)** 145 **C)** 212 **D)** 125 **E)** 121

13 El logo del Concurso de Primavera es un cuadrado formado por cuadrados y rectángulos. Si los lados de los cuadrados miden 1, 2, 3 y 4 cm, ¿cuál es el cociente entre el área total de estos cuatro cuadrados y el área total de los otros doce rectángulos?



A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{7}{10}$ **D)** $\frac{3}{7}$

E) $\frac{3}{10}$

14 En un club de literatura, el 70 % de sus miembros ha leído *El Quijote*; el 75 % ha leído *El Lazarillo*; el 80 % ha leído *La Regenta*; y el 85 % ha leído *Fortunata y Jacinta*. ¿Qué porcentaje, como mínimo, ha leído las cuatro obras?

A) 31 **B)** 77,5 **C)** 90 **D)** 69 **E)** 10

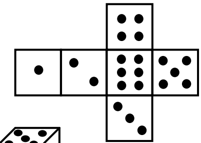
15 Anita tiene la tercera parte del dinero que tiene Belén y Carlos tiene la cuarta parte del dinero que tiene Anita. Carlos tiene la décima parte del dinero que tiene Diego. Si Diego tiene 25 euros, ¿cuántos euros tienen entre los cuatro?

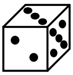
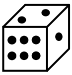
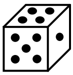
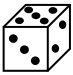
A) 100 **B)** 85,5 **C)** 72,5 **D)** 67,5 **E)** 50

16 Cuatro de las siguientes respuestas representan la misma fracción. ¿Cuál es distinta?

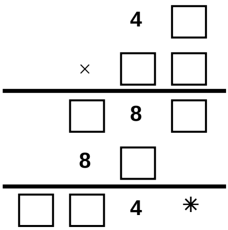
A) 0,4 **B)** $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ **C)** $\frac{14}{15}\cdot\frac{3}{7}$ **D)** 40% **E)** $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}$

17 ¿Cuál de los cubos pudo haber sido hecho doblando el papel?



A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

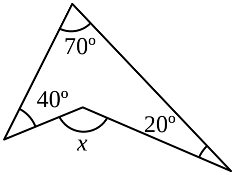
18 De esta multiplicación se han borrado muchos dígitos. ¿Qué dígito va en la posición ✳?



A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7

E) 9

19 ¿Cuánto mide el ángulo x?



A) 130º **B)** 50º **C)** 120º **D)** 110º

E) 70º

20 Uno de estos cofres está vacío; en los otros hay: un tesoro, una cabra, una patata y un compás. Si todos los enunciados son falsos, ¿dónde está el tesoro?

A)	B)	C)	D)	E)
Aquí está el compás	Este cofre no está vacío	La cabra está en A	El compás está en C	Aquí no está la patata

21 El mago *Copri* le dice a Inés:
Piensa un número de tres cifras, multiplícalo por 10 y después réstale 16. Ahora divide el resultado entre 2 y después réstale el número que habías pensado. ¿Qué número has obtenido?
Inés responde 944. ¿Cuál es la suma de las cifras del número que había pensado Inés?

A) 18 **B)** 17 **C)** 15 **D)** 13 **E)** No se puede saber

22 Una taza está llena de café con leche. Al principio hay el doble de leche que de café. Cuando ya me he bebido la mitad del contenido, vuelvo a rellenar la taza hasta arriba con leche. ¿Qué fracción del contenido es ahora café?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{2}{9}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** $\frac{1}{9}$ **E)** $\frac{1}{6}$

23 Si m hombres pueden hacer un trabajo en d días, ¿cuántos días emplearán $m+r$ hombres en hacer ese trabajo?

A) $d+r$ **B)** $d-r$ **C)** $\frac{d}{m+r}$ **D)** $\frac{md}{md+r}$ **E)** $\frac{md}{m+r}$

24 Dibuja un cuadrado e inscribe en él una circunferencia. Ahora inscribe un cuadrado en esa circunferencia. Llama G al área del cuadrado grande y P al área del cuadrado pequeño. ¿Cuál de las siguientes igualdades es cierta?

A) $G = 4P$ **B)** $G = 3P$ **C)** $G = 2P$ **D)** $G = 2\sqrt{2}\ P$ **E)** $G = \sqrt{2}\ P$

25 Un artilugio de precisión tiene dos ruedas que empiezan a girar a la vez. Una da cinco vueltas por minuto y la otra seis. ¿Al cabo de cuánto tiempo volverán a estar por vez primera en la misma posición que la inicial?

A) 30 minutos **B)** 11 minutos **C)** 1 minuto **D)** 30 segundos **E)** 22 segundos

XIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: Día 4 de marzo de 2009

NIVEL III (3º y 4º de ESO)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ (☒) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

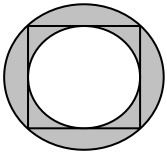
ORGANIZA
Asociación Matemática "Concurso de Primavera"

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés - Grupo ANAYA
Librería Aviraneta - www.profes.net

1 De los siguientes números, ¿cuál es el que más se aproxima a $\sqrt{0{,}65432}$?

A) 0,2 **B)** 0,3 **C)** 0,5 **D)** 0,7 **E)** 0,8

2 En la figura vemos un cuadrado de lado 4 cm y sus circunferencias inscrita y circunscrita. ¿Cuál es, en cm^2, el área de la corona circular determinada por ellas?

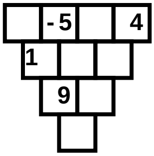


A) 4π **B)** $6\sqrt{2}$ **C)** 8 **D)** $2\pi\sqrt{2}$ **E)** 3π

3 Si el cuadrado de un entero positivo *n* es $25^{64} \cdot 64^{25}$, ¿cuál es la suma de las cifras de *n* escrito en notación usual?

A) 7 **B)** 14 **C)** 21 **D)** 28 **E)** 35

4 En la pirámide invertida de la derecha, se colocan números en las casillas de forma que el número de una casilla inferior sea suma de los dos números de las casillas superiores que la tocan. Rellenas todas las casillas con este criterio, ¿qué número ocupa la casilla más baja?

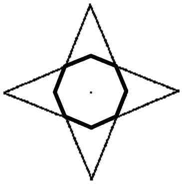


A) 2 **B)** – 1 **C)** 23 **D)** 4 **E)** – 10

5 El área del triángulo de vértices $A(-1, -1)$, $B(5, 0)$ y $C(3, 4)$ es:

A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 15

6 Dos rombos iguales se cortan según se ve en la figura definiendo un octógono regular. ¿Cuánto mide uno de los ángulos agudos de estos rombos?



A) 30º **B)** 36º **C)** 37º 30’ **D)** 40º

E) 45º

7 ¿Cuál de los siguientes polinomios tiene las raíces $\frac{1}{2}$ y -2?

A) $x^2 + 2x$ **B)** $4x^2 - 1$ **C)** $3x^2 + 5x - 2$

D) $-x^2 - 3x - 2$ **E)** $2x^2 + 3x - 2$

8 El factor primo más grande de $5^6 - 1$ es:

A) 7 **B)** 13 **C)** 31 **D)** 59 **E)** 61

8 Al dividir un número entre 5 da 4 de resto, y al dividirlo entre 7 da 6 de resto. ¿Cuál es el resto al dividirlo entre 35?

A) 24 **B)** 19 **C)** 22 **D)** 13 **E)** 34

9 ¿Cuántas de las siguientes operaciones dan siempre un múltiplo de 4?

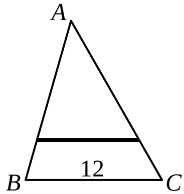
a) La suma de cuatro números consecutivos;
b) El producto de tres números consecutivos;
c) El producto de pares que no son ninguno múltiplo de 4.

A) Ninguna **B)** Cuatro **C)** Tres **D)** Dos **E)** Una

10 El producto $11 \cdot 22 \cdot 33 \cdot 44 \cdot 55$ da lo mismo que:

A) $11 \cdot 12\,345$ **B)** $\frac{11^6 - 1}{10}$ **C)** $11^7 - 11^5$ **D)** 123 454 321 **E)** 654 321

11 En el triángulo *ABC* de base 12 cm y altura 14 cm trazamos un segmento paralelo a la base que divide al triángulo en otro triángulo y un trapecio, los dos de igual área. ¿Cuál es la medida, en cm, de ese segmento?

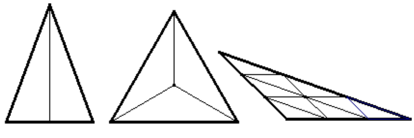


A) $4\sqrt{2}$ **B)** 6 **C)** $6\sqrt{2}$ **D)** 9 **E)** $6\sqrt{3}$

12 Si $\begin{cases} a \cdot b = 90 \\ a \cdot c = 60 \\ a \cdot d = 75 \\ b \cdot c \cdot d = 120 \end{cases}$, entonces el valor de $a + b + c + d$ es:

A) 100 **B)** 80 **C)** 55 **D)** 40 **E)** 30

13 Como ves o puedes intuir en las figuras, un triángulo isósceles puede ser dividido en dos triángulos iguales, uno equilátero en tres triángulos iguales y un triángulo cualquiera en cuatro, nueve, dieciséis,..., triángulos iguales. Si *n* es un número del 5 al 15 (inclusives), ¿para cuántos de ellos es posible dividir un triángulo equilátero en *n* triángulos iguales?



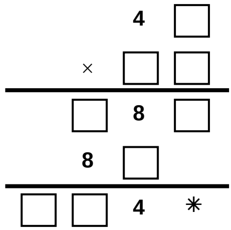
A) Dos **B)** Tres **C)** Cuatro **D)** Cinco **E)** Seis

14 En un *sudoku* simple (9×9) leemos como un número de nueve cifras cada una de las nueve filas. ¿Cuánto suman esos nueve números?

A) $10^{10} - 1$ **B)** 4 545 454 545 **C)** 4 999 999 995 **D)** 4 555 555 555

E) 4 444 455 555

15 De esta multiplicación se han borrado muchos dígitos. ¿Qué dígito va en la posición ✳?



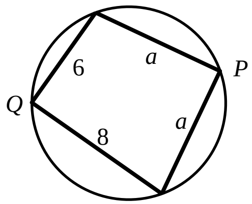
A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7

E) 9

16 Cuando desplazamos cuatro lugares a la derecha la coma de cierto número decimal positivo, el número obtenido es el cuádruplo del inverso del original. ¿Cuál era el número original?

A) 0,0002 **B)** 0,002 **C)** 0,02 **D)** 0,2 **E)** 2

17 El cuadrilátero de la figura está inscrito en una circunferencia y tiene ángulos rectos en P y en Q. Tiene dos lados iguales y los otros dos miden 6 y 8 cm. ¿Cuál es, en cm^2, su área?



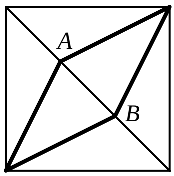
A) 49 **B)** 50 **C)** 48 **D)** 53

E) 51

18 ¿Cuántos números de tres cifras (no necesariamente distintas) verifican que al quitar una cualquiera de sus ellas, las otras dos colocadas en cualquiera de los dos órdenes posibles forman un número primo?

A) Catorce **B)** Trece **C)** Doce **D)** Nueve **E)** Seis

19 Los puntos A y B dividen la diagonal del cuadrado en tres partes iguales. Si el área del cuadrado es 36 cm^2, el área del rombo de la figura, en cm^2, es:



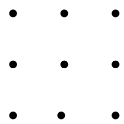
A) 20 **B)** 18 **C)** 15 **D)** 12

E) 9

20 Los lados del triángulo *ABC* tienen de longitud $AB = 9$, $BC = 12$ y $AC = 15$. Dos hormigas parten simultáneamente del punto *A* y recorren a la misma velocidad el borde del triángulo en direcciones distintas. Si se encuentran nuevamente en un punto *D*, ¿cuál es la longitud de *AD*?

A) 18 **B)** $7+6\sqrt{3}$ **C)** $9\sqrt{2}$ **D)** $\sqrt{15}+6\sqrt{3}$ **E)** 14

21 Elegimos al azar tres puntos de los nueve del siguiente diagrama. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres elegidos estén alineados?



A) $\frac{8}{27}$ **B)** $\frac{2}{21}$ **C)** $\frac{8}{81}$ **D)** $\frac{4}{21}$ **E)** $\frac{8}{9}$

22 En el trapecio rectángulo *ABCD*, de bases *AB* y *CD*, con $AB < CD$, se verifica que la altura *AD* mide 7 cm y que $AB + CD = BC$. ¿Cuánto es, en cm^2, el producto $AB \cdot CD$?

A) 12 **B)** 12,25 **C)** 12,5 **D)** 12,75 **E)** 13

23 ¿Cuántos enteros positivos menores que 2009 son múltiplos de 3 o de 4 pero no de 5?

A) 771 **B)** 804 **C)** 937 **D)** 1070 **E)** 1170

24 La suma de los divisores de 2^{10} es:

A) 2001 **B)** 2009 **C)** 2021 **D)** 2035 **E)** 2047

25 Si $\{a_k\}$ es una sucesión de números enteros tales que.

$a_1 = 1$ y $a_{m+n} = a_m + a_n + m \cdot n$ para cualesquiera enteros positivos *m* y *n*, ¿cuál es el valor de a_{12}?

A) 45 **B)** 56 **C)** 67 **D)** 78 **E)** 89

XIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: Día 4 de marzo de 2009

NIVEL IV (Bachillerato)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ (☒) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

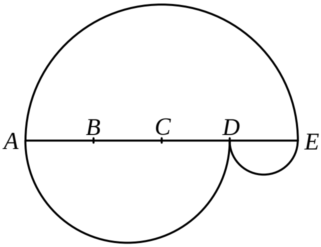
ORGANIZA
Asociación Matemática “Concurso de Primavera”

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés - Grupo ANAYA
Librería Aviraneta - www.profes.net

1 Ana, Beatriz y Carlos tienen en total 30 monedas. Si Carlos le da cuatro monedas a Ana, Beatriz cinco a Carlos y Ana dos a Beatriz, resulta que los tres tienen las mismas monedas. ¿Cuántas monedas tenía Ana al principio?

A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

2 Los puntos *B*, *C* y *D* dividen al segmento *AE* en cuatro partes iguales. ¿Cuál es el cociente entre las longitudes de los caminos de *A* a *E* siguiendo, por una parte, la semicircunferencia de diámetro *AE* y por otra, las dos semicircunferencias de diámetros *AD* y *DE*?

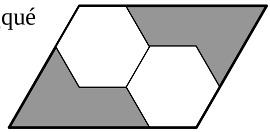


A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{2}{3}$ **C)** 2 **D)** $\frac{3}{2}$ **E)** 1

3 Si todos los lados del pentágono convexo *ABCDE* son de igual longitud y los ángulos en *A* y *B* son rectos, ¿cuál es la medida del ángulo en *E*?

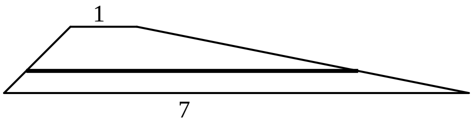
A) 90º **B)** 108º **C)** 120º **D)** 135º **E)** 150º

4 Si los dos hexágonos de la figura son regulares, ¿qué fracción del área del paralelogramo está sombreada?



A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{2}{3}$ **D)** $\frac{2}{5}$ **E)** $\frac{5}{12}$

5 En un trapecio de bases 1 y 7 cm y altura 1 cm, trazamos un segmento paralelo a las bases que divide al trapecio en dos trapecios de igual área. ¿Cuál es la medida, en cm, de ese segmento?



A) 4 **B)** 4,5 **C)** 5 **D)** 5,5 **E)** 6

6 Los lados del triángulo *ABC* tienen de longitud *AB* = 5, *BC* = 6 y *AC* = 7. Dos hormigas parten simultáneamente del punto *A* y recorren a la misma velocidad el borde del triángulo en direcciones distintas. Si se encuentran nuevamente en un punto *D*, ¿cuál es la distancia de *A* a *D*?

A) $\sqrt{33}$ **B)** $\sqrt{34}$ **C)** $\sqrt{35}$ **D)** 6 **E)** $\sqrt{37}$

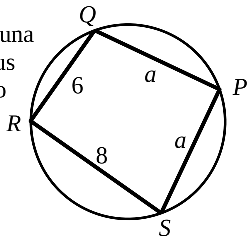
7 La edad de Juan, t años, es la suma de las edades de sus tres hijos. Si hace n años su edad era el doble de la suma de las edades de sus hijos, ¿cuánto vale el cociente $\frac{t}{n}$?

A) 2 **B)** $\frac{11}{3}$ **C)** 4 **D)** $\frac{25}{6}$ **E)** 5

8 A partir de un cuadrado de lado 1 dibujamos todos los cuadrados posibles que tienen al menos dos vértices en común con él. ¿Cuál es el área de la superficie cubierta por todos esos cuadrados?

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

9 El cuadrilátero $PQRS$ de la figura está inscrito en una circunferencia, tiene ángulos rectos en P y en R, dos de sus lados son iguales y los otros dos miden 6 y 8 cm. ¿Cuánto mide la tangente de su ángulo en Q?



A) -7 **B)** $\frac{-3}{4}$ **C)** $\frac{-12}{7}$ **D)** $\frac{-5}{4}$

E) -5

10 La suma de los divisores de 10^6 es:

A) $\frac{10^7-1}{9}$ **B)** $\frac{2^7 \cdot 5^7 - 1}{9}$ **C)** $\frac{(2^7-1)\cdot(5^7-1)}{4}$ **D)** $\frac{2^7+5^7-1}{6}$

E) $3125 \cdot (2^7 - 1)$

11 El área de un octógono regular de lado a es:

A) $2\sqrt{2} \cdot a^2$ **B)** $(2+\sqrt{2}) \cdot a^2$ **C)** $(4-\sqrt{2}) \cdot a^2$ **D)** $(1+2\sqrt{2}) \cdot a^2$

E) $(2+2\sqrt{2}) \cdot a^2$

12 En la igualdad $2^{x+1} + 2^x = 3^{y+2} - 3^y$ se sabe que x e y son enteros. ¿Cuál es el valor de x?

A) -1 **B)** 0 **C)** 1 **D)** 2 **E)** 3

13 ¿Cuánto vale la suma $\cos 1^{\circ} + \cos 2^{\circ} + \cos 3^{\circ} + ... + \cos 357^{\circ} + \cos 358^{\circ} + \cos 359^{\circ}$?

A) 2 **B)** 1 **C)** 0 **D)** -1 **E)** 2

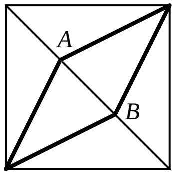
14 Un semáforo tiene el siguiente ciclo: durante 30 segundos permanece verde, luego está amarillo 3 segundos y finalmente, rojo durante otros 30 segundos. Alicia permanece durante tres segundos observando el semáforo desde su casa. ¿Cuál es la probabilidad de que el semáforo cambie de color durante esos tres segundos?

A) $\frac{8}{63}$ **B)** $\frac{5}{21}$ **C)** $\frac{1}{10}$ **D)** $\frac{1}{7}$ **E)** $\frac{1}{3}$

15 La suma de los términos de la progresión geométrica decreciente e ilimitada: a, $a\cdot r$, $a\cdot r^2$,… es 7 y la progresión que sólo tiene potencias impares de r: $a\cdot r$, $a\cdot r^3$, $a\cdot r^5$,… suma 3. ¿Cuál es el valor de $a + r$?

A) $\frac{4}{3}$ **B)** $\frac{12}{7}$ **C)** $\frac{3}{2}$ **D)** $\frac{7}{3}$ **E)** $\frac{5}{2}$

16 Los puntos A y B dividen la diagonal del cuadrado en tres partes iguales. Si el área del cuadrado es 36 cm^2, el lado del rombo de la figura, en cm, es:



A) $2\sqrt{5}$ **B)** $3\sqrt{2}$ **C)** $2\sqrt{3}$ **D)** 4

E) $\sqrt{26}$

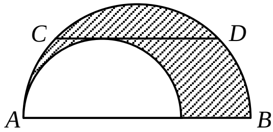
17 Sean a, b y c dígitos con $a \neq 0$ y n un número natural. Los enteros de tres cifras abc y acb dividen al intervalo $\left[n^2, (n+1)^2\right]$ en tres partes iguales. ¿Cuál es el valor de $a + b + c$?

A) 10 **B)** 13 **C)** 16 **D)** 18 **E)** 21

18 El paralelogramo limitado por las rectas:
$y = ax + c,\ y = ax + d,\ y = bx + c,\ y = bx + d$, tiene área 18 y el limitado por las rectas $y = ax + c,\ y = ax - d,\ y = bx + c,\ y = bx - d$, tiene área 72. Si a, b, c, d son enteros positivos, ¿cuál es el menor valor posible para $a + b + c + d$?

A) 13 **B)** 14 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 17

19 En la figura adjunta se observan dos semicircunferencias tangentes en A, siendo la cuerda CD de la mayor paralela al diámetro AB y tangente a la menor. Si $CD = 4$, ¿cuál es el área rayada?



A) π **B)** $\frac{3}{2}\pi$ **C)** 2π **D)** 3π

E) Falta información

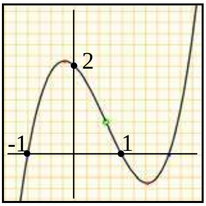
20 Orlando, Pedro y Quino tiran, en ese orden, un dado. Si Orlando obtiene 1, 2 ó 3 gana; si no obtiene esa puntuación tira Pedro que gana si saca 4 ó 5, y si no ha ocurrido nada de eso, tira Quino, que gana si obtiene 6. Así continúan, en ese orden, hasta que gane alguno. ¿Cuál es la probabilidad de que gane Quino?

A) $\frac{1}{6}$ **B)** $\frac{1}{8}$ **C)** $\frac{1}{11}$ **D)** $\frac{1}{13}$ **E)** $\frac{1}{17}$

21 ¿Cuál es el valor del ángulo agudo de un rombo de lado *c*, si *c* es media geométrica de las diagonales?

A) 15º **B)** 30º **C)** 45º **D)** 60º **E)** 75º

22 La figura adjunta muestra la gráfica de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. ¿Cuánto vale *b*?



A) -4 **B)** -2 **C)** 0 **D)** 2

E) 4

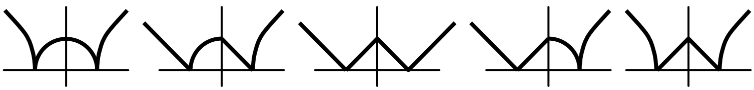
23 Si *a* es un número entero y *b* es un número positivo con $a \cdot b = \log_{10}(b)$ ¿Cuál es la mediana del conjunto $\left\{0, 1, a, b, \frac{1}{b}\right\}$

A) 0 **B)** 1 **C)** *a* **D)** *b* **E)** $\frac{1}{b}$

24 ¿Cuántos triángulos rectángulos hay en los que las medidas de los catetos vienen dadas por números enteros y el número que expresa su área es el triple del que expresa su perímetro?

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 12

25 ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la función $f(x) = \sqrt{\left|(1+x)\cdot(1-|x|)\right|}$?



A) **B)** **C)** **D)** **E)**

XIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: Día 25 de abril de 2009

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ ($\boxtimes$) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

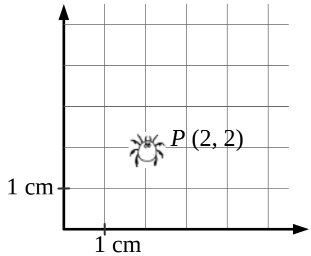
ORGANIZA
Asociación Matemática "Concurso de Primavera"

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés - Grupo ANAYA
Librería Aviraneta - www.profes.net

1 Si ordenamos los resultados de las siguientes cinco operaciones de menor a mayor, ¿cuál quedará en el medio?

A) 1,1 x 1,1 **B)** 0,7 + 0,32 **C)** 0,56 x 2 **D)** 2,3 – 0,179 **E)** 6 : 5

2 Un bichito está en el punto *P*(2, 2) de unos ejes de coordenadas y comienza a dar saltitos horizontales y verticales de medio centímetro de longitud. Primero da 7 saltos hacia arriba, después 25 hacia la derecha, 5 hacia abajo y 3 hacia la izquierda. ¿En qué punto acaba su recorrido?



A) *A*(13, 3) **B)** *B*(3, 13) **C)** *C*(4, 24)
D) *D*(24, 4) **E)** *E*(3, 12)

3 La mitad de cuatro quintos es:

A) $\frac{8}{5}$ **B)** $\frac{2}{5}$ **C)** $\frac{1}{5}$ **D)** $\frac{3}{10}$ **E)** $\frac{1}{10}$

4 Si Merche divide su edad entre 5, obtiene 4 de resto. Don Joaquín tiene el doble de la edad de Merche. ¿Qué resto obtendrá Don Joaquín si divide su edad entre 5?

A) 8 **B)** 4 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 0

5 Un autobús tiene 15 paradas a lo largo de su recorrido. Si la distancia entre cada parada es de 500m, ¿cuál es la distancia entre la primera y la última parada?

A) 5 km **B)** 6 500 m **C)** 7 km **D)** 7 500 m **E)** 8 km

6 Julián debe recorrer ocho manzanas para ir de su casa al colegio. Normalmente, las dos primeras manzanas las hace con su hermanita Lucía, que se queda en la guardería, y las seis últimas las hace solo. En total tarda 15 minutos. Si Julián anda el doble de rápido cuando va solo que cuando va con su hermana, ¿cuántos minutos tardó el lunes en recorrer las ocho manzanas si fue todo el camino solo porque Lucía estaba enferma?

A) 24 **B)** 12 **C)** 10 **D)** 8 **E)** 6

$$\begin{array}{cccc} & 3 & * & 6 \\ + & * & 4 & * \\ \hline * & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

7 De esta operación han desaparecido varias cifras. ¿Cuál es la suma de las cifras desaparecidas?

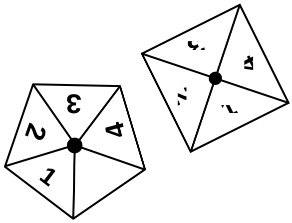
A) 19 **B)** 18 **C)** 17 **D)** 16 **E)** 15

8 Santiago tiene una bolsa con 80 gominolas y decide repartirlas entre sus sobrinos dando el mayor número de gominolas con la siguiente condición: cada uno de los sobrinos mayores recibirá el doble de gominolas que cada uno de los pequeños. Si tiene tres sobrinos mayores y cinco pequeños, ¿cuántas gominolas quedarán en la bolsa después del reparto?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

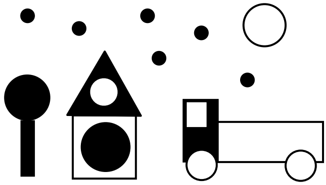
9 Hago girar estas dos peonzas y sumo los resultados que he obtenido en cada una de ellas. ¿Cuántas sumas distintas puedo obtener?

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9



10 He hecho un dibujo con figuras geométricas. ¿Qué fracción de los círculos son negros?

A) $\frac{3}{8}$ **B)** $\frac{12}{8}$ **C)** $\frac{8}{11}$ **D)** $\frac{4}{9}$ **E)** $\frac{2}{3}$



11 Marta ha sacado 6, 9 y 7 en tres controles de matemáticas. ¿Qué nota sacó en el cuarto control si la nota media de los cuatro controles es 7?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

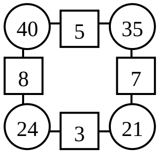
12 En un paralelogramo cada uno de los ángulos mayores mide 130º. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos menores?

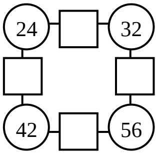
A) 25º **B)** 30º **C)** 45º **D)** 50º **E)** 65º

13 Irene y Richi han quedado en encontrarse a las 17:45. Irene, que tiene su reloj siete minutos adelantado, llega, según su reloj, seis minutos antes a la cita. Richi, que tiene su reloj retrasado 13 minutos, llega, según su reloj, dos minutos antes a la cita. ¿Cuántos minutos esperó Irene a Richi?

A) 15 **B)** 16 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 24

14 Un juego consiste en escribir cuatro números en los cuadraditos y después colocar en cada círculo el producto de los números de los cuadraditos que están a su lado. Ana, por ejemplo, lo completó como ves a la derecha.





¿De cuántas formas distintas pueden rellenarse estos cuadraditos si en los círculos están los números 24, 32, 56 y 42, tal como ves en la figura de la izquierda?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

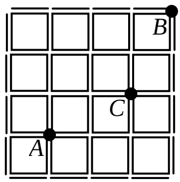
15 En una excavación arqueológica, Indiana Jones ha encontrado la siguiente inscripción: "*Eulerigildo nació en Toledo en el año DXCVII. A los XXIV años se trasladó a Madrid en donde vivió el resto de su vida. Murió en el año DCXLII*". ¿Cuántos años vivió Eulerigildo en Madrid?

A) 21 **B)** 25 **C)** 36 **D)** 39 **E)** 45

16 En una granja el gallo canta cada cinco horas, el perro ladra cada seis, la vaca muge cada diez y el pollito pía cada doce. Si el lunes a las once de la noche los escuchamos a los cuatro a la vez, ¿qué día volveremos a escuchar a todos juntos por primera vez?

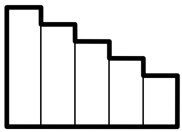
A) Un martes **B)** Un miércoles **C)** Un jueves **D)** Un viernes
E) Un sábado

17 Observa el plano de las calles de una ciudad. Sofía quiere ir desde la esquina *A* a la esquina *B* pasando por *C* y recorriendo la menor distancia posible. ¿De cuántas formas puede hacerlo?



A) 10 **B)** 9 **C)** 8 **D)** 7
E) 6

18 Con piezas rectangulares de 2 cm de base y 3, 4, 5… cm de altura formamos escaleras como la que ves. Ésta se ha formado con cinco rectángulos y tiene un perímetro de 34 cm. ¿Cuál será, en cm, el perímetro de una escalera formada por 16 rectángulos?

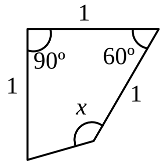


A) 100 **B)** 70 **C)** 104 **D)** 96 **E)** 124

19 En mi hucha tengo monedas de 20 céntimos y de un euro. Si cambiara todas las monedas de 20 céntimos por monedas de 50 céntimos, tendría 19,50 euros. Pero si cambiara todas las monedas de un euro por monedas de 50 céntimos, tendría 9,30 euros. ¿Cuánto dinero en total tengo en mi hucha?

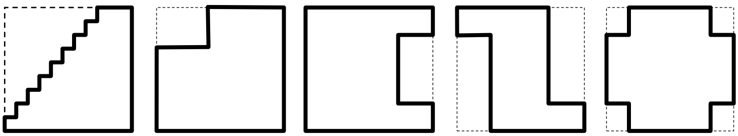
A) 12,20 € **B)** 16,80 € **C)** 17,20 € **D)** 17,80 € **E)** 18,20 €

20 Tres de los cuatro lados de este cuadrilátero miden 1 cm. ¿Cuánto vale *x*?



A) 90º **B)** 120º **C)** 135º **D)** 137,5º
E) 140º

21 Cinco vecinos tienen parcelas rectangulares iguales. Cada uno construye una valla, marcada con la línea continua, para proteger su huerta. ¿Cuál de ellos necesita la valla más larga?



A) **B)** **C)** **D)** **E)**

22 Se eligen cifras del número 2134 y con ellas se forman números de tres cifras distintas. ¿Cuántos números pueden formarse que sean impares y múltiplos de 3?

A) 3 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 9

23 Mariquilla ha estado jugando con su calculadora. Escribió un número y después fue haciendo las siguientes operaciones: dividió entre 2, restó 36, multiplicó por 12 y, por último, sumó 36. Si el resultado que obtuvo fue 2544, ¿cuál es la suma de las cifras del número que escribió al principio?

A) 4 **B)** 5 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 13

24 La medida de longitud en Júpiter es el *jupito* y en Marte, el *marcelo*. Un *jupito* equivale a 120 metros y tres metros son un *marcelo*. ¿Cuántos *marcelos* son un *jupito*?

A) 25 **B)** 40 **C)** 117 **D)** 123 **E)** 360

25 Sólo uno de estos enunciados es cierto.

- ❖ Mi cumple es el martes.
- ❖ Mi cumple no es el miércoles.
- ❖ Mi cumple es el jueves.
- ❖ Mi cumple no es el martes.
- ❖ Mi cumple es el viernes.

¿Qué día es mi cumple?

A) El lunes **B)** El martes **C)** El miércoles **D)** El jueves **E)** El viernes

XIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

concurso de primavera MATEMÁTICAS

2ª FASE: Día 25 de abril de 2009

NIVEL II (1º y 2º de ESO)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ (☒) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA.**
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

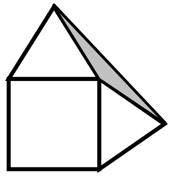
ORGANIZA
Asociación Matemática “Concurso de Primavera”

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés - Grupo ANAYA
Librería Aviraneta - www.profes.net

1 El cociente entre el número de vocales y consonantes de una página es $\frac{3}{7}$. ¿Qué porcentaje de vocales hay en esa página?

A) 70 % **B)** 40 % **C)** 30 % **D)** 7 % **E)** 3 %

2 La figura que ves está diseñada partiendo de un cuadrado y dos triángulos equiláteros. ¿Cuánto vale el ángulo menor del triángulo sombreado?



A) 10º **B)** 12º **C)** 15º **D)** 20º **E)** 30º

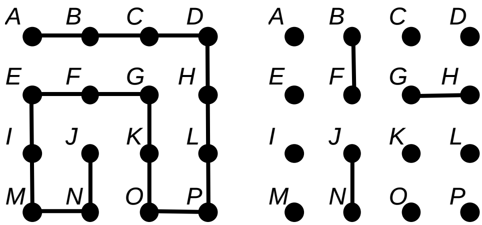
3 El antílope Miope solo da saltos hacia delante de 8 metros de longitud y hacia atrás de 5 metros. Ha divisado muy a lo lejos un arbusto que está a 122 metros de distancia. ¿Cuál es el mínimo número de saltos que debe dar Miope para caer en el arbusto?

A) 25 **B)** 15 **C)** 26 **D)** 16 **E)** 27

4 ¿Cuántos números menores que 2000 se pueden formar si sólo podemos usar las cifras 1 y 2?

A) 30 **B)** 28 **C)** 26 **D)** 22 **E)** 16

5 Queremos recorrer los 16 puntos de una trama mediante segmentos horizontales o verticales, sin pasar dos veces por el mismo punto. Te mostramos un ejemplo que empieza en el punto *A* y termina en el *J*. Observa parte de un segundo recorrido que empieza en *F*. ¿En qué punto acaba?



A) *A* **B)** *B* **C)** *C* **D)** *D* **E)** *E*

6 Un triángulo equilátero y un hexágono regular tienen el mismo perímetro. Si llamamos *T* al área del triángulo y *H* al área del hexágono, ¿cuál de las siguientes igualdades es la correcta?

A) $H = T$ **B)** $H = 2T$ **C)** $H = 3T$ **D)** $2H = 3T$ **E)** $3H = 4T$

7 ¿En cuántos ceros acaba el número $15^6 \cdot 28^5 \cdot 55^7$?

A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

8 Queremos diseñar una bandera que tenga tres franjas horizontales y disponemos de cuatro colores posibles (azul, blanco, verde y negro). ¿Cuántas banderas distintas podremos diseñar si dos franjas contiguas no pueden estar pintadas del mismo color?

A) 4 **B)** 12 **C)** 24 **D)** 36 **E)** 256

9 El cuadrado que ves es mágico (sus filas, columnas y diagonales suman lo mismo).
¿A qué número está representando la letra *d*?

$3x + 1$	$5x$	$11 - x$
a	$2x + 5$	d
b	$x + 4$	c

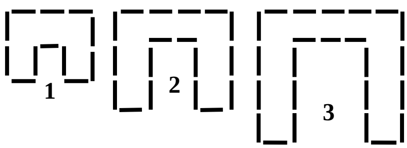
A) 5 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 13

E) No se puede saber con certeza

10 A la fiesta de los amigos del tres han acudido los primeros catorce múltiplos de tres: 3, 6, 9,… Juegan a formar parejas que sumen un cuadrado perfecto y consiguen emparejarse todos los asistentes menos dos. ¿Cuánto suman esos dos números que no pudieron emparejarse?

A) 75 **B)** 54 **C)** 33 **D)** 30 **E)** 27

11 Iván y Sara se entretienen dibujando puentes cada vez más grandes. Aquí vemos cómo han diseñado los tres primeros. Siguiendo esta pauta, ¿cuántas rayitas necesitarán para dibujar el puente número 15?



A) 45 **B)** 96 **C)** 115 **D)** 120 **E)** 180

12 Casi todo el mundo sabe que 3 + 2 = 5, pero la suma que te mostramos es algo diferente ya que cada letra está representando a una cifra distinta. Si la S vale 8, ¿cuánto vale la N?

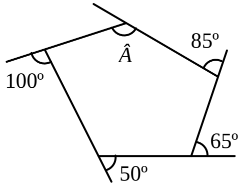
$$\begin{array}{r} \mathrm{T\,R\,E\,S} \\ +\quad \mathrm{D\,O\,S} \\ \hline \mathrm{C\,I\,N\,C\,O} \end{array}$$

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 2 **E)** 7

13 Si la base de un rectángulo aumenta un 15 % y su altura un 20 %, ¿en qué porcentaje aumenta su área?

A) 35 % **B)** 38 % **C)** 40 % **D)** 45 % **E)** 60 %

14 ¿Cuánto mide el ángulo $\hat{A}$ del pentágono de la figura?



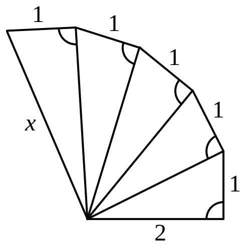
A) 50º **B)** 60º **C)** 120º

D) 240º **E)** 300º

15 Don Retorcido nos ha pedido que averigüemos en qué cifra termina el producto de estas potencias: $2^{?}\cdot 6^{?}\cdot 9^{?}\cdot 11^{?}$. Nos ha dicho que el exponente del 2 es 2009; el exponente del 6 es el número de pie que calza; el exponente del 9 es un número grandísimo que acaba en 5; y el exponente del 11 es igual al año de su nacimiento. ¿En qué cifra acaba dicho producto?

A) 1 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

16 En la figura que ves, todos los ángulos señalados son rectos y, además, te indicamos las longitudes de algunos segmentos.
¿Cuánto vale la longitud x del segmento más largo?



A) $\sqrt{7}$ **B)** $\sqrt{10}$ **C)** 3 **D)** 7

E) 9

17 Observa la siguiente tabla en la que hemos ido colocando los números siguiendo una espiral:

FILA 3	37	38	39	40	41	42	43
FILA 2	36	17	18	19	20	21	44
FILA 1	35	16	5	6	7	22	45
FILA 0	34	15	4	1	8	23	46
FILA –1	33	14	3	2	9	24	47
FILA –2	32	13	12	11	10	25	48
FILA –3	31	30	29	28	27	26	49
FILA –4						51	50

¿En qué fila quedará colocado el número 400?

A) 7 **B)** –8 **C)** 8 **D)** –9 **E)** 9

18 Las medidas, en grados, de los ángulos interiores de un pentágono son cinco números consecutivos. ¿Cuánto mide el menor de sus ángulos?

A) 109º **B)** 107º **C)** 105º **D)** 108º **E)** 106º

19 Tres ardillas se encuentran 25 avellanas. Rita dice: “qué hambre tengo, me comeré más de seis avellanas”. Petrita dice: “uf, yo estoy muy llena, seguro que comeré al menos una para probar pero no más de cuatro”. Quitina dice: “estoy indecisa, me comeré dos o tres”. Después del banquete, ¿cuál es el mayor número de avellanas que pueden quedar sin comer?

A) 15 **B)** 20 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 13

20 ¿Cuál es, en cm^2, el área de un cuadrado cuyos vértices están en una circunferencia de diámetro 8 cm?

A) 16 **B)** 32 **C)** 48 **D)** 60 **E)** 64

21 Las hormigas son muy laboriosas. Anita lleva este ritmo de trabajo: busca comida fuera del hormiguero durante 15 horas y luego descansa 2 horas en el hormiguero; Bertita busca comida durante 9 horas y luego se toma un descanso de 3 horas en el hormiguero. Un día coinciden las dos hormigas saliendo del hormiguero para buscar alimento, ¿al cabo de cuántas horas coincidirán por primera vez de nuevo en el hormiguero?

A) 24 **B)** 33 **C)** 34 **D)** 45 **E)** 204

22 Si sumo 15 números consecutivos obtengo 300. Si elimino el menor y el mayor de esos números, ¿qué suma obtendré?

A) 260 **B)** 255 **C)** 250 **D)** 248 **E)** 240

23 Un número tiene exactamente ocho divisores y sabemos que dos de esos divisores son 10 y 35. Si ordenamos de menor a mayor sus ocho divisores, ¿cuál quedará en cuarta posición?

A) 70 **B)** 35 **C)** 14 **D)** 10 **E)** 7

24 Los robots de la serie R2 están diseñados para pintar carrocerías. Hay tres tipos de robots: los R2gamma son el triple de rápidos que los R2alfa; y los R2beta son el doble de rápidos que los R2alfa. Si trabajan juntos un robot de cada tipo, ¿cuánto tiempo invertirán en pintar una carrocería?

A) La quinta parte del tiempo que emplea un R2beta
B) La quinta parte del tiempo que emplea un R2alfa
C) La sexta parte del tiempo que emplea un R2gamma
D) La sexta parte del tiempo que emplea un R2alfa
E) La sexta parte del tiempo que emplea un R2beta

A) 16 **B)** 32 **C)** 48 **D)** 60 **E)** 64

25 El número n es el 111…111, formado por cien “unos”. ¿Cuánto vale la suma de las cifras del número $37 \times n$?

A) 37 **B)** 109 **C)** 100 **D)** 98 **E)** 1000

XIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

concurso de primavera MATEMÁTICAS

2ª FASE: Día 25 de abril de 2009

NIVEL III (3º y 4º de ESO)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

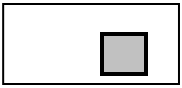
* **MARCA CON UNA CRUZ (☒) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA.**
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA
Asociación Matemática “Concurso de Primavera”

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés - Grupo ANAYA
Librería Aviraneta - www.profes.net

1 Dibujamos un cuadrado en el interior de un rectángulo doble de largo que de ancho siendo esta dimensión el doble que el lado del cuadrado. ¿Qué porcentaje del área del rectángulo ocupa el cuadrado?



A) 12,5 % **B)** 20 % **C)** 15 % **D)** 22,5 % **E)** 10 %.

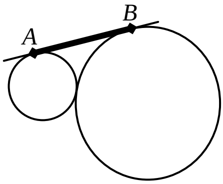
2 La fracción $\dfrac{\left(3^{2009}\right)^2-\left(3^{2007}\right)^2}{\left(3^{2008}\right)^2-\left(3^{2006}\right)^2}$ es igual a:

A) 1 **B)** $\dfrac{9}{4}$ **C)** 3 **D)** $\dfrac{9}{2}$ **E)** 9

3 Supón que $\dfrac{2x}{3}-\dfrac{x}{6}$ es un número entero. De las siguientes afirmaciones sobre x, ¿cuál tiene que ser necesariamente verdadera?

A) Es negativo **B)** Es par **C)** Es múltiplo de 3 **D)** Es múltiplo de 6 **E)** Es múltiplo de 12

4 La figura muestra dos circunferencias tangentes de radios 4 y 9 cm. ¿Cuál es la longitud del segmento AB, tangente a ellas?



A) 5 **B)** 6 **C)** 10 **D)**12 **E)** 13

5 Al dividir un número N de 3 cifras entre el número formado por sus dos últimas cifras (en el mismo orden), se obtiene 30 de cociente y 4 de resto. ¿Cuánto suman las cifras del número N?

A) 13 **B)** 12 **C)** 11 **D)** 10 **E)** 9

6 Francisco tenía $a^2 - b^2$ euros y se gastó $\dfrac{a}{b}$ de lo que no gastó. ¿Cuántos euros le quedaron?

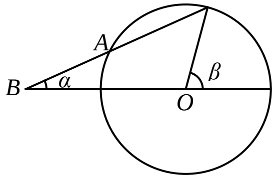
A) $a - b$ **B)** $ab - a^2$ **C)** $ab - b^2$ **D)** $a + b$ **E)** a

7 Ana pinta una habitación en 10 horas y Cati en 7 horas. Trabajando juntas y tomándose una hora para comer, terminarían el trabajo en t horas. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones satisface el número t?

A) $\left(\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{7}\right)(t+1)=1$ **B)** $\left(\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{7}\right)t+1=1$ **C)** $\left(\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{7}\right)t=1$

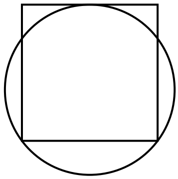
D) $\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{7}\right)(t-1)=1$ **E)** $(10+7)\,t=1$

8 En la figura del margen, O es el centro de la circunferencia y el segmento AB mide igual que el radio de dicha circunferencia. Si α = 25º, ¿cuánto mide el ángulo β?



A) 65º **B)** 70º **C)** 75º **D)** 80º **E)** 85º

9 En la figura se observa un cuadrado con un lado tangente a una circunferencia, siendo los vértices del lado opuesto puntos de esa circunferencia. Si el lado del cuadrado mide 16 cm, ¿cuánto mide el radio de la circunferencia?



A) $4\sqrt{2}$ **B)** 6 **C)** 8 **D)** $6\sqrt{2}$

E) 10

10 Las longitudes, en metros, de los lados de un triángulo son 18, 24 y 30. ¿Cuántos decímetros mide la altura más corta de dicho triángulo?

A) 144 **B)** 150 **C)** 160 **D)** 169 **E)** 180

11 Para cada entero positivo n, mayor que 2009, generamos el número $m = n^3 - n$. ¿Cuál es el máximo común divisor de esos infinitos m así formados?

A) 2 **B)** 6 **C)** 41 **D)** 49 **E)** 2009

12 He estudiado los comportamientos alimenticios de una rata durante algunos días y he observado que:

I: La rata comía como mucho una vez al día, bien por la tarde o bien por la mañana.
II: En total comió 9 veces.
III: Hubo 6 mañanas que no comió.
IV: Hubo 7 tardes que no comió.

¿Cuántos días duró mi estudio?

A) 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** Hay una contradicción en el enunciado.

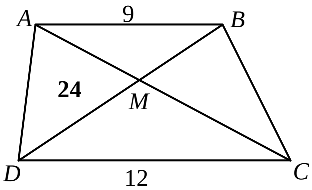
13 Ayer por la tarde, Alicia condujo una hora más que Pedro y a una velocidad media superior a la de Pedro en 5 km/hora. Luisa condujo dos horas más que Pedro y a una velocidad media superior a la de Pedro en 10 km/hora. Si Alicia condujo 70 km más que Pedro, ¿cuántos km condujo Luisa más que Pedro?

A) 120 **B)** 130 **C)** 140 **D)** 150 **E)** 160

14 El lado de un triángulo equilátero mide 6 cm. Pintamos de rojo la región exterior al triángulo formado por los puntos que distan una cantidad menor o igual que 3 cm de algún punto del triángulo. ¿Cuál es, en cm^2, el área de esta región?

A) $12\left(3+2\sqrt{3}\right)$ **B)** $9(6+\pi)$ **C)** $6\left(9+3\sqrt{3}+\pi\right)$ **D)** $\left(2\sqrt{3}+3\right)^2\pi$ **E)** $9\left(\sqrt{3}+1\right)^2\pi$

15 Las diagonales del trapecio *ABCD* de la figura se cortan en el punto *M*. Si $AB = 9$, $DC = 12$ y el área del triángulo *AMD* es 24, ¿cuál es el área del trapecio?



A) 92 **B)** 94 **C)** 96
D) 98 **E)** 100

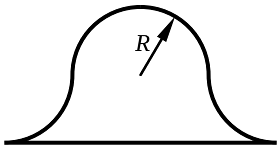
16 ¿Cuántos números de dos cifras verifican que si a la suma de sus cifras le añadimos el producto de las mismas obtenemos el número en cuestión?

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

17 En un triángulo acutángulo, el ángulo menor es $\frac{1}{5}$ del mayor. Si la medida de cada ángulo viene dada por un número entero de grados, ¿cuál es la suma de los dos mayores?

A) 157º **B)** 160º **C)** 163º **D)** 166º **E)** Son posibles varias soluciones.

18 La figura de la derecha está formada por cuatro cuartos de circunferencia del mismo radio *R* y un segmento horizontal. ¿Cuál es su área?



A) $2R^2$ **B)** πR^2 **C)** $4R^2$
D) $6R^2$ **E)** $2\pi R^2$.

19 ¿Cuántos enteros n con $100 < n < 1000$ no son divisibles ni por 2 ni por 5?

A) 270 **B)** 360 **C)** 540 **D)** 630 **E)** 810

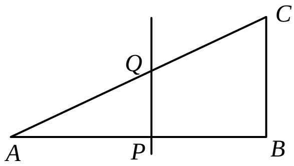
20 Alargamos dos lados opuestos de un cuadrado en un 10% de su longitud y acortamos los otros dos en otro 10% formando así un rectángulo cuya área, respecto de la del cuadrado, resulta ser:

A) La misma **B)** Un 10% mayor **C)** Un 1% mayor **D)** Un 10% menor
E) Un 1% menor.

21 Hemos descompuesto en factores primos los números *A* y *B*:
$A = 2^b \cdot 3^c \cdot 5^d$ y $B = 2^f \cdot 3^g \cdot 5^h$ y hemos comprobado que mcd (*A*, *B*) = 120 y que mcm (*A*, *B*) = 18 000. ¿Cuánto vale la suma $b + f$?

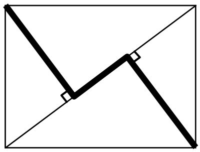
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

22 En el triángulo rectángulo *ABC* de la figura, el cateto *AB* tiene de longitud 3. Por el punto *P* trazamos una paralela a *BC* que corta a la hipotenusa *AC* en el punto *Q*. Si el área del trapecio *PBCQ* es el doble que el área del triángulo *PQA*, entonces la longitud de *AP* es:



A) 1 **B)** 2 **C)** $\sqrt{3}$ **D)** 3 **E)** $\sqrt{5}$.

23 ¿Cuál es la longitud de la línea quebrada construida en el rectángulo de dimensiones 8 y 6?

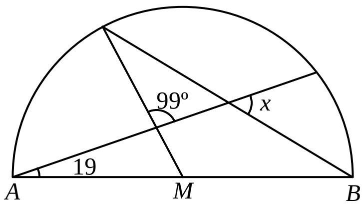


A) 12 **B)** 12,4 **C)** 12,5 **D)** 14
E) 16

24 El número de 4 cifras *aabb* es un cuadrado perfecto. ¿Cuál es la suma de sus cifras?

A) 12 **B)** 16 **C)** 8 **D)** 20 **E)** 22

25 El punto *M* es el centro de la semicircunferencia de la figura, en la que se muestran algunos ángulos. ¿Cuál es el valor del ángulo señalado con *x*?



A) 50º **B)** 51º **C)** 52º
D) 53º **E)** 54º

XIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: Día 25 de abril de 2009

NIVEL IV (Bachillerato)

¡¡¡ Lee detenidamente las instrucciones !!!

Escribe ahora tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas

* No pases la página hasta que se te indique.
* Duración de la prueba: **1 HORA 30 MINUTOS**.
* No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.
* Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.
* No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente:

Cada respuesta correcta te aportará	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes en blanco	***2 puntos***
Cada respuesta errónea	***0 puntos***

* **MARCA CON UNA CRUZ ( ) EN LA HOJA DE RESPUESTAS LA QUE CONSIDERES CORRECTA**.
* **SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "NO" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.**

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA
Asociación Matemática "Concurso de Primavera"

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés - Grupo ANAYA
Librería Aviraneta - www.profes.net

1 ¿Para cuántos enteros n es $\dfrac{n}{20-n}$ el cuadrado de un entero?

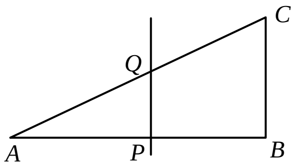
A) 1 **B)** 4 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

2 Si $x \neq 0$ y $x \neq 1$, entonces $\dfrac{x-1-\dfrac{x-1}{x}}{\dfrac{1}{x-1}+1}$ es igual a:

A) $\dfrac{(x-1)^3}{x^2}$ **B)** $\dfrac{(x^2-2x-1)(x-1)}{x^2}$ **C)** $x-1$ **D)** $(x-1)^3$

E) Nada de lo anterior

3 En el triángulo rectángulo ABC de la figura, el cateto AB tiene de longitud 3. Por el punto p, trazamos una paralela a BC que corta a la hipotenusa AC en el punto Q. Si el área del trapecio $PBCQ$ es el doble que el área del triángulo PQA, entonces, AP es igual a:



A) 1 **B)** 2 **C)** $\sqrt{3}$ **D)** 3 **E)** $\sqrt{5}$

4 Si x e y son cualesquiera números reales positivos, ¿cuántas de las afirmaciones siguientes son verdaderas? (Designamos por Q el conjunto de los números racionales)

I: $x^2 \notin Q \Rightarrow x \notin Q$

II: $x \in Q \Rightarrow \sqrt{x} \notin Q$

III: $x \in Q,\ y \notin Q \Rightarrow xy \notin Q$

IV: $x \notin Q,\ y \notin Q \Rightarrow xy \notin Q$

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

5 Si $2 < a < 3$, entonces $|a-1| - |a-2| + |a-3| =$

A) -2 **B)** a **C)** $-a$ **D)** $4-a$ **E)** $3a-6$

6 La suma de 100 números es 1000. Si aumentamos cada número en 20, luego multiplicamos por 5 cada uno de los obtenidos y, finalmente a cada uno de los resultados le restamos 20, la suma de los 100 nuevos números es:

A) 5 000 **B)** 5 080 **C)** 5 800 **D)** 6 500 **E)** 13 000

7 Para cada entero positivo *n*, sea $f(n) = \log_{2009}(n^2)$. Si $T = 2f(7) + f(41)$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

A) $T < 1$ **B)** $T = 1$ **C)** $1 < T < 2$ **D)** $T = 2$ **E)** $T > 2$

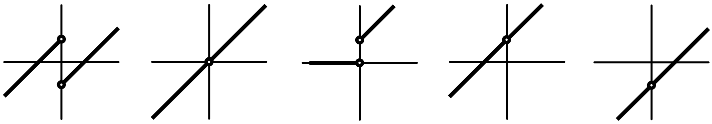
8 El polinomio $P(x) = a_{2009}\,x^{2009} + a_{2008}\,x^{2008} + ... + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$ corta 2009 veces al eje de abscisas, una de las cuales es en el punto (0, 0). ¿Cuál de los siguientes coeficientes no puede ser cero?

A) a_4 **B)** a_3 **C)** a_2 **D)** a_1 **E)** a_0

9 Si $49^x + 49^{-x} = 7$, entonces $7^x + 7^{-x}$ es igual a:

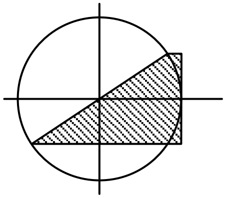
A) 1 **B)** $\sqrt{5}$ **C)** $\sqrt{7}$ **D)** 3 **E)** 9

10 La gráfica de la función $f(x) = x - \dfrac{x}{|x|}$ es:



A) **B)** **C)** **D)** **E)**

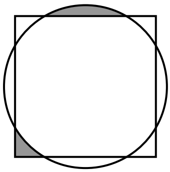
11 La figura muestra una circunferencia de radio 1 y un trapecio rectángulo cuyas bases son paralelas al eje horizontal, un lado es tangente a la circunferencia y el otro es un diámetro de la misma. Si el ángulo que forma este lado con la base mayor es α, el área de dicho trapecio es:



A) 2 sen α **B)** 2 sen^2 α **C)** 2 tg α

D) $2\,sen\alpha(2 + \cos\alpha)$ **E)** sen 2α

12 El cuadrado y el círculo de la figura tienen el mismo centro. Si las dos regiones sombreadas tienen igual área, ¿cuál es el cociente entre el lado del cuadrado y el radio del círculo?



A) $\sqrt{2}$ **B)** $\sqrt{\pi}$ **C)** 2 **D)** $\sqrt{2\pi}$ **E)** π

13 El número de 4 cifras *aabb* es un cuadrado perfecto. ¿Cuál es la suma de sus cifras?

A) 12 **B)** 16 **C)** 18 **D)** 20 **E)** 22

14 Los números $\log(a^3b^7)$, $\log(a^5b^{12})$ y $\log(a^8b^{15})$ son los tres primeros términos de una progresión aritmética de la que el 12º término es $\log(b^n)$. ¿Cuál es el valor de n?

A) 40 **B)** 56 **C)** 76 **D)** 112 **E)** 143

15 ¿Cuál es el máximo valor que puede tomar la función $f(x) = \sqrt{8x-x^2} - \sqrt{14x-x^2-48}$?

A) $\sqrt{7}-1$ **B)** 3 **C)** $2\sqrt{3}$ **D)** 4 **E)** $\sqrt{55}-\sqrt{5}$

16 Trabajando juntas, Ana y Cati pintan un mural en 10 horas; Ana y Gloria lo harían en 12 horas y Cati y Gloria en 15 horas. Si se pusieran las tres juntas a pintar, ¿en cuántas horas acabarían el mural?

A) 5 **B)** 6 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

17 Considera las circunferencias de ecuaciones $(x-10)^2+y^2=36$ y $(x+15)^2+y^2=81$. ¿Cuál es la longitud del segmento más corto tangente a ambas?

A) 15 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 21 **E)** 24

18 Pablo nació en el último cuarto del siglo XX y, ¡qué curioso!, en el año x^2 cumplirá x años. ¿En que año nació Pablo?

A) 1991 **B)** 1985 **C)** 1990 **D)** 1975 **E)** 1980

19 Considera la sucesión de números 4, 7, 1, 8, 9, 7, 6,… Para $n > 2$, el n-ésimo término de la sucesión es el dígito de las unidades de la suma de los dos anteriores. Si S_n representa la suma de los n primeros términos de esta sucesión, ¿cuál es el menor valor de n para el que $S_n > 10\,000$?

A) 1979 **B)** 1989 **C)** 1999 **D)** 2009 **E)** 2019

20 Don Ramón nos asegura que los números a y b son positivos, que los tres números $(1, a, b)$ forman una progresión geométrica y que los tres números $(a, b, 3)$ forman una progresión aritmética. ¿Cuánto vale la suma $a + b$?

A) $\frac{15}{4}$ **B)** 5 **C)** $\frac{15}{2}$ **D)** 4 **E)** $\frac{7}{2}$

21 Una pareja muy particular de dados trucados verifica que las probabilidades de obtener 1, 2, 3, 4, 5 y 6 en cada uno de ellos están en la relación 1:2:3:4:5:6. ¿Cuál es la probabilidad de obtener suma 7 al tirarlos?

A) $\frac{4}{63}$ **B)** $\frac{1}{8}$ **C)** $\frac{8}{63}$ **D)** $\frac{1}{6}$ **E)** $\frac{2}{7}$

22 En un triángulo en el que la longitud de cada lado viene dada por un número entero, un lado es el triple de largo que otro, siendo 15 la longitud del tercer lado. ¿Cuál es el mayor valor posible para el perímetro?

A) 43 **B)** 44 **C)** 45 **D)** 46 **E)** 47

23 Sea x un número elegido al azar en el intervalo (0, 1). ¿Cuál es la probabilidad de que $[\log_{10} 4x] - [\log_{10} x] = 0$? ([a] representa el mayor entero menor o igual que a)

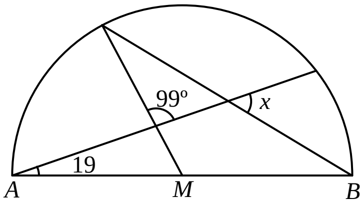
A) $\frac{1}{8}$ **B)** $\frac{3}{20}$ **C)** $\frac{1}{6}$ **D)** $\frac{1}{5}$ **E)** $\frac{1}{4}$

24 En el interior del pentágono de vértices A (0, 2), B (4, 0), C ($2\pi + 1$, 0), D ($2\pi + 1$, 4), E (0, 4), seleccionamos al azar un punto P. ¿Cuál es la probabilidad de que el ángulo APB sea obtuso?

A) $\frac{1}{5}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{5}{16}$ **D)** $\frac{3}{8}$ **E)** $\frac{1}{2}$

25 El punto M es el centro de la semicircunferencia de la figura, en la que se muestran algunos ángulos. ¿Cuál es el valor del ángulo señalado con x?

A) 50º **B)** 51º **C)** 52º
D) 53º **E)** 54º



XIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (1ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**C**	1	**C**	1	**E**	1	**A**
2	**A**	2	**B**	2	**A**	2	**E**
3	**D**	3	**A**	3	**B**	3	**E**
4	**C**	4	**C**	4	**A**	4	**A**
5	**C**	5	**C**	5	**D**	5	**C**
6	**A**	6	**D**	6	**E**	6	**A**
7	**B**	7	**C**	7	**E**	7	**E**
8	**E**	8	**E**	8	**C**	8	**C**
9	**C**	9	**C**	9	**D**	9	**A**
10	**D**	10	**C**	10	**C**	10	**C**
11	**B**	11	**E**	11	**C**	11	**E**
12	**C**	12	**B**	12	**E**	12	**E**
13	**E**	13	**D**	13	**C**	13	**D**
14	**D**	14	**E**	14	**C**	14	**D**
15	**B**	15	**D**	15	**D**	15	**E**
16	**A**	16	**E**	16	**C**	16	**A**
17	**A**	17	**D**	17	**A**	17	**C**
18	**C**	18	**D**	18	**B**	18	**D**
19	**A**	19	**A**	19	**D**	19	**C**
20	**E**	20	**A**	20	**C**	20	**D**
21	**E**	21	**D**	21	**B**	21	**B**
22	**D**	22	**E**	22	**B**	22	**B**
23	**B**	23	**E**	23	**B**	23	**D**
24	**C**	24	**C**	24	**E**	24	**A**
25	**B**	25	**C**	25	**D**	25	**D**

XIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (2ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**E**	1	**C**	1	**A**	1	**B**
2	**A**	2	**C**	2	**E**	2	**A**
3	**B**	3	**A**	3	**B**	3	**C**
4	**C**	4	**D**	4	**D**	4	**C**
5	**C**	5	**D**	5	**A**	5	**D**
6	**B**	6	**D**	6	**C**	6	**E**
7	**A**	7	**C**	7	**D**	7	**D**
8	**D**	8	**D**	8	**C**	8	**D**
9	**D**	9	**D**	9	**E**	9	**D**
10	**E**	10	**B**	10	**A**	10	**A**
11	**C**	11	**B**	11	**B**	11	**A**
12	**D**	12	**A**	12	**C**	12	**B**
13	**E**	13	**B**	13	**D**	13	**E**
14	**C**	14	**C**	14	**B**	14	**D**
15	**A**	15	**E**	15	**D**	15	**C**
16	**C**	16	**C**	16	**E**	16	**C**
17	**B**	17	**E**	17	**C**	17	**C**
18	**A**	18	**E**	18	**C**	18	**E**
19	**B**	19	**A**	19	**B**	19	**C**
20	**C**	20	**B**	20	**E**	20	**A**
21	**C**	21	**B**	21	**E**	21	**C**
22	**C**	22	**A**	22	**C**	22	**A**
23	**E**	23	**E**	23	**B**	23	**C**
24	**B**	24	**D**	24	**E**	24	**C**
25	**C**	25	**B**	25	**A**	25	**A**

XIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel I

1. (C) El producto se efectúa con gran sencillez teniendo en cuenta la propiedad distributiva de la multiplicación:
$34 \times 1\,111\,111 = (30+4) \times 1\,111\,111 = 33\,333\,330 + 4\,444\,444 = 37\,777\,774$

2. (A) Expresamos las dos distancias en metros:
9,75 km = $9{,}75 \times 1000$ m = 9750 m
32 hm = 32×100 m = 3200 m
obtenemos la distancia que los separa: 9750 + 3200 = 12 950 m

3. (D) 2 pasteles cada tres horas implica que, por 1 pastel, Juan entretiene a Lucía durante 1,5 horas, y 6 canicas por cada media hora nos dice que, por $18\,(18 = 3 \times 6)$ canicas, la entretendrá durante $3 \times 0{,}5 = 1{,}5$ horas. Por lo que en total la entretendrá durante: 1,5 + 1,5 = 3 horas.

4. (C) En primer lugar veamos que, con esos cinco números sin repetir, los números de las regiones pueden obtenerse de las formas siguientes:
9 = 5+3+1 = 4+3+2
11= 5+3+2+1
12 = 5+4+3
Como el número buscado debe aparecer en las tres sumas y además tiene que ser el único que se presente en las tres, es inmediato advertir que la forma 9 = 5+3+1 debe rechazarse, pues hace que dos números (el 5 y el 3) se repitan en las tres sumas. Por lo tanto en la casilla central he puesto un 3.

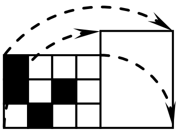
5. (C) Basta seguir cuidadosamente las reglas de las operaciones:
$0{,}02 \times 3000 = 60{,}00 = 60$
$0{,}06 : 100 = 0{,}0006$
$1800 : 0{,}003 = 1\,800\,000 : 3 = 600\,000$
$200 \times 60 : 2 = 12\,000 : 2 = 6000$
$0{,}2 \times 0{,}03 \times 10\,000 = 0{,}006 \times 10\,000 = 60$

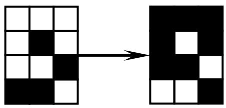
Está claro, la tercera expresión es la de mayor valor.

6. (A) Para pasar a la siguiente H siempre se añaden 2 rectangulitos en cada vertical y uno en la horizontal, es decir, siempre se añaden 5. Con esto tenemos la regla de formación:
1) 7
2) 7+5
3) $7+5+5 = 7+2\times 5$
…
10) $7+9\times 5 = 52$.

7. (B) A partir de la descomposición factorial de 100 ($2^2 \cdot 5^2$) podemos obtener fácilmente todos sus divisores de la siguiente forma:
Con los factores 1 y 2, todos los divisores que se pueden formar son 1, 2 , 4.
Multiplicando estos sucesivamente por 5 y por 5^2 obtenemos todos los factores que pueden formarse con 1, 2 y 5, estos son:
5, 10, 20
25, 50, 100
Sumando ahora estos 9 divisores obtenemos 217.

8. (E) Para lograr una ventana completamente negra es suficiente que el lugar de todos los cuadraditos blancos de la ventana corresponda a cuadraditos negros de la pieza. Observando atentamente los dibujos del problema puede comprobarse que la pieza E (girada 90º en la figura de la derecha) es un "negativo" de la ventana, y por lo tanto verifica la condición que hemos establecido.
En realidad, para resolver el problema, basta observar que en la ventana hay cuatro cuadraditos blancos contiguos y que, auque todas las piezas tienen cuatro cuadraditos negros, la única que los tiene contiguos es la E.





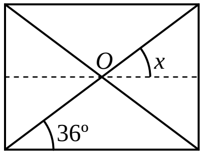
9. (C) Tengamos muy presentes los enunciados:

A)	B)	C)	D)	E)
La gominola está aquí	La gominola está en C	El cofre B está ocupado	El caramelo está en A	Este cofre no está vacío

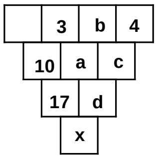
La falsedad de C) y E) implica que los cofres vacíos son el B y el E, por lo que A, C y D deben estar ocupados.
La falsedad de A) y D) nos dice que ni el caramelo ni la gominola están en A. Por lo tanto en A está el Chicle.
Solo resta repartir el caramelo y la gominola entre C y D, pero la falsedad de B) exige que el caramelo esté en C.

10.(D) Dividiendo 6351 entre 999 obtenemos 6 de cociente y 367 de resto, es decir, 6351 florines son igual a **6** monedas de de 999 más 367 de uno.
Dividiendo 367 entre 99 obtenemos que es igual que **3** monedas de 99 florines más 60 (resto) de un florín.
Dividiendo el resto de 60 florines entre 9 obtenemos que 60 florines equivalen a **6** monedas de 9 florines más un resto de **6** florines.
Conclusión: 6351 florines se pueden pagar 6+3+6+6 = 21 monedas, siendo este el menor número de monedas posible ya que hemos empleado, en cada paso, el mayor número posible de monedas de valor máximo.

11.(B) Si trazamos por el punto O la paralela a la base del rectángulo tendremos que el ángulo x y el ángulo dado son iguales por correspondientes entre paralelas. En consecuencia x = 36º. Por otra parte, el doble del ángulo x es el ángulo pedido, luego las diagonales forman un ángulo de 72º.



12.(C) Es muy sencillo calcular sucesivamente los valores de las casillas a, b, c, d y, finalmente, x :



$$10 + a = 17 \Rightarrow a = 7$$
$$3 + b = 7 \Rightarrow b = 4$$
$$b + 4 = c \Rightarrow c = 8$$
$$a + c = d \Rightarrow d = 15$$
$$x = 17 + d = 17 + 15 = 32$$

13.(E) Si lee 20 páginas en 50 minutos, leerá 10 páginas en 25 minutos. Por lo que en leer 50 páginas tardará 5 veces más que en leer 10, esto es, tardará 125 minutos.
125 min = 2 h 5 min.

14.(D) Nos dicen que el resto de dividir el número de caramelos entre 17 debe ser 7.
De los 5 números ofrecidos podemos descartar, de entrada, 170 y 340 pues son claramente múltiplos de 17. De entre los 3 números restantes, una buena estrategia puede ser empezar por el menor. Como la división de 109 entre 17 da de resto 7, 109 es el número de caramelos que llevó Marta.

15. (B) XLVI en notación decimal es el número 46. Por otra parte la diferencia entre el año de celebración y el número de concurso es siempre la misma:
$$2009 - 13 = 2010 - 14 = ... = 1996$$
Llamando x al año buscado tendremos: $x - 46 = 1996 \Rightarrow x = 1996 + 46 = 2042$.

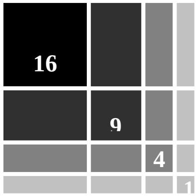
16.(A) Efectuemos paso a paso la multiplicación:

$$\begin{array}{r} 5\ 2\ ✱\ 7 \\ \times\ \ 4 \\ \hline 2\ ✱\ 1\ 4\ ✱ \end{array}$$

Como $4\times7=28$ la última cifra del producto es un **8** y "llevamos 2", por lo que 4 multiplicado por la cifra desconocida del multiplicando debe terminar en 2. Luego esa cifra es otro **8** $(4\times8=32)$. A continuación hacemos $4\times2+3=11$, de modo que obtenemos la cifra 1 presentada en el producto. Por último tenemos $4\times5+1=21$, lo que implica que la tercera cifra desconocida es un **1**.

La suma de las tres cifras es: $8+8+1=17$.

17.(A) Los lados de cada uno de los cuadrados miden respectivamente:



$\sqrt{16}=4$ cm, $\sqrt{9}=3$ m, $\sqrt{4}=2$ cm $\sqrt{1}=1$ cm.

Por lo tanto el lado del cuadrado total mide:

$$4+3+2+1=10\text{ cm}$$

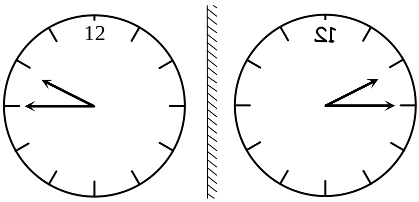
y su área será: $10^2=100\text{ cm}^2$.

18. (C) La Dulcinea excava 35 metros por día y la Tizona $90/2=45$ metros por día. Entre las dos harán $35+45=80$ metros por día. Entonces, para excavar 1000 metros, trabajando las dos juntas, tardarán $1000/80=12{,}5$ días. Conclusión: tardará "entre 12 y 15" días.

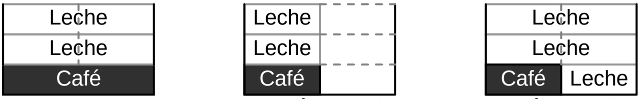
19. (A) Si al número 1435 le hacemos, en orden inverso, el inverso de las operaciones que el mago mandó realizar a *Richi*, obtendremos el número que este había pensado:

sumamos 45: $1435 + 45 = 1480$
multiplicamos por 2: $1480\times2 = 2960$
restamos 20: $2960-20=2940$
y dividimos entre 10: $2940 : 10 = 294$, que es el número que *Richi* había pensado.
La suma de sus cifras es: $2 + 9 + 4 = 15$.

20. (E) **"**Reflejando" la imagen en el espejo obtenemos la imagen real del reloj. Vemos que marca las diez menos cuarto, es decir, son las 9:45.



21.(E) Esquematizando el problema con ayuda de los siguientes dibujos, es inmediato deducir que la fracción de café después de rellenar con leche es 1/6.

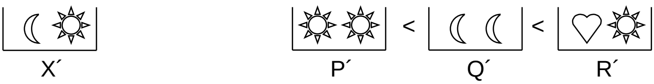


Al principio *Después de beber* *Después de rellenar*

22.D) Las monedas del bolsillo izquierdo no pueden ser de más de 20 céntimos ya que si fuesen de 50 tendría 4 ($8 \times 0{,}50 = 4$) euros en ese bolsillo.

Si son de 20 céntimos, en el izquierdo tendré $8 \times 0{,}20 = 1{,}60$ euros, que es una solución si en el bolsillo derecho tengo una moneda de 1 euro y otra de 10 céntimos. Luego las monedas del bolsillo izquierdo son de 20 céntimos.
Además se comprueba inmediatamente que no existe otra solución, porque si son de 10 céntimos, en el derecho tendría que sumar 1,90 euros con dos monedas, y si fuesen de 5 céntimos, las dos monedas tendrían que sumar 2,30 euros.

23.(B) Si quitamos en todas las bandejas un corazón, el problema, queda reducido a colocar la bandeja X´ entre las P´, Q´ y R´ manteniendo el orden de peso creciente.



De P´ y Q´ se deduce que una *estrella* pesa menos que una *luna* y, de aquí, es inmediato colocar X´ entre P´y Q´. Por lo tanto, la colocación pedida será *PXQR*.

24.(C) Agrupemos los términos de la forma siguiente:
$(2009-2008)+(2007-2006)+...+(5-4)+(3-2)+(1-0)$. Donde todos los paréntesis valen 1.

Desde $(3-2)$ hasta $(2009-2008)$ hay $\dfrac{2008}{2}$ términos, por lo que la expresión vale: $\dfrac{2008}{2}+1=1005$.

25.(B) Si al paso recorre en una hora 6 km, durante media hora recorrerá 3 km.
Al trote, en una hora, recorre 15 km.
Si al galope recorre en 60 minutos 30 km, en 20 minutos recorrerá 30/3=10 km.
En total ha recorrido: $3+15+10=28$ km.

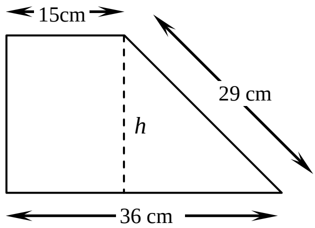
XIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel II

1. (C) Como al tomar las cifras del radicando de dos en dos y de derecha a izquierda, la última pareja es 12, la cifra de las centenas de la raíz tiene que ser 3. Por lo tanto, el valor absoluto de la diferencia entre la raíz y 350 es menor que 50. Las otras cuatro distancias a considerar son, evidentemente, mayores que 50.

2. (B) Como $2009 = 7^2 \cdot 41$, el número de divisores de 2009 es $(2+1)\cdot(1+1) = 6$, que son: 1, 7, 41, $(7 \cdot 7)$, $(7 \cdot 41)$ y $(7 \cdot 7 \cdot 41)$.

3. (A) Trazando la perpendicular a la base mayor por el vértice que une el lado oblicuo con la base menor, obtenemos un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 29 cm y los catetos, 36 - 15 = 21 cm y h (altura del trapecio).
Aplicando el teorema de Pitágoras, resulta que $h = \sqrt{29^2 - 21^2} = \sqrt{400} = 20$ cm. Y como el trapecio es rectángulo, el lado no oblicuo medirá, como la altura, 20 cm.
Perímetro = 20 + 15 + 29 + 36 = 100 cm.



4. (C) Llamemos n al número de aristas pedido. Como cada arista viene limitada por dos vértices, tiene que cumplirse que $2n = 3 \cdot 4 + 6 \cdot 5$; $2n = 42$; $n = 21$.

5. (C) a) $17 \cdot 35 + 17 \cdot 65 = 17 \cdot (35 + 65) = 17 \cdot 100 = 1700$
b) $221 \cdot 3 + 3 \cdot 779 = 3 \cdot (221 + 779) = 3 \cdot 1000 = 3000$
c) $45 \cdot 11 + 89 \cdot 45 = 45 \cdot (11 + 89) = 45 \cdot 100 = 4500$
d) $77 \cdot 23 < 100 \cdot 45$
e) $45 \cdot 99 < 45 \cdot 100$
El número mayor es 4500.

6. (D) Como el perímetro es 5+6+7 = 18, cada hormiga tendrá que recorrer 9 unidades de longitud. Por lo tanto, $AB+BD = 5+BD = 9$; $BD = 4$

7. (C) 7 + 77 + 777 + 7 777 + 77 777 + 777 777 + 7 777 777 = 7 · (1+11+111+1 111 +

+ 11 111 + 111 111 + 1 111 111). Y es evidente que: la cifra de las unidades del segundo factor es 7; la de las decenas, 6; la de las centenas, 5,... Por lo tanto, el resultado es: 7 · 1 234 567.

8. (E) Sumando las tres igualdades primeras, resulta: 3♣+ (♦+♥+♠) = 8+13+10 = 31.
Pero ♦+♥+♠ = 22; por lo tanto, 3♣+22 = 31, 3♣ = 9, ♣ = 3. Sustituyendo en cada una de las tres primeras igualdades, obtenemos: ♦=5, ♥=10 y ♠=7.
Luego ♣ × ♦ × ♥ × ♠ = 3 · 5 · 10 ·7 = 1050.

9. (C) Segunda fila: –5 + 17, 17 + 4, –9; es decir, 12, 21, –9. Tercera fila: 12 + 21, 21 – 9; es decir, 33, 12. Cuarta fila: 33 + 12 = 45.

10.(C) Como el número 3 333 es múltiplo de 3 entonces $3\,333^2 = 3\,333 \cdot 3\,333$ es múltiplo de 9.
Como 1 + 3 + 3 + 3 = 10 y 2 + 3 + 3 + 3 = 11, ninguno de los dos es múltiplo de 3 y por lo tanto el producto 1333 · 2333 no es múltiplo de 9.
Como $10^6 + 2^3 = 1\,000\,008$ y 1+0+0+0+0+0+8 = 9, $10^6 + 2^3$ es múltiplo de 9.
Como $65^2 - 64^2 = (65 + 64)\cdot(65 - 64) = 129$ y 1 + 2 + 9 = 12, $65^2 - 64^2$ es múltiplo de 3, pero no de 9.
La respuesta es 2.
Nota: Hemos aplicado el criterio de divisibilidad por 9 (un número es divisible por 9, si lo es la suma de sus cifras).

11.(E) Llamando *a* al lado de cada cuadradito, las áreas sombreadas son, respectivamente: $\pi a^2 + a^2$; $\frac{7}{2}a^2$; $\pi a^2 + a^2$; $\pi a^2 + a^2$; $\pi a^2 + \frac{3}{2}a^2$. La mayor de las áreas es $\pi a^2 + \frac{3}{2}a^2$.

12.(B) Del análisis "por filas" de las cuatro figuras dadas, el número de puntos es:
Fig. 1: 1
Fig. 2: 1 + 2 · 2
Fig. 3: 1 + 2 + 3 · 3
Fig. 4: 1 + 2 + 3 + 4 · 4
De aquí se deduce que:
Fig.10: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 · 10 = 145.

13.(D) A (cuatro cuadrados) = $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$ cm²
A (doce rectángulos) = 4 · 3 + 4 · 2 + 4 · 1 (1ª "fila" superior) + 3 · 4 + 3 · 2 + 3 . 1 (2ª "fila") + 2 · 4 + 2 · 3 + 2 · 1 (3ª "fila") + 1 · 4 + 1 · 3 + 1 · 2 (4ª "fila") = 70 cm²

Cociente de estas áreas = $\dfrac{30}{70} = \dfrac{3}{7}$.

14.(E) Como mínimo el 45 % = 70 % + 75 % – 100% ha leído las dos primeras obras, el 25 % = 45 % + 80 % – 100 % las tres primeras y el 10 % = 25 % + 85 % – 100 % las cuatro obras.

15.(D) Si llamamos *A*, *B*, *C* y *D* al dinero que tienen Anita, Belén, Carlos y Diego,

respectivamente, podemos expresar que: $A = \dfrac{B}{3},\ C = \dfrac{A}{4},\ C = \dfrac{D}{10}$

Como *D* = 25 €, obtenemos: $C = \dfrac{25}{10} = 2{,}5$ €; *A* = 4 · *C* = 4 · 2,5 = 10 €; *B* = 3 · *A*

=

= 3 · 10 = 30 €, luego entre los cuatro tienen: 10 + 30 + 2,5 + 25 = 67,5 €.

16.(E) A) 0,4 = $\dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$; B) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{15} = \dfrac{5}{15} + \dfrac{1}{15} = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$

C) $\dfrac{14}{15} \cdot \dfrac{3}{7} = \dfrac{14 \cdot 3}{15 \cdot 7} = \dfrac{14}{7} \cdot \dfrac{3}{15} = 2 \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{5}$; D) 40 % = $\dfrac{40}{100} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$

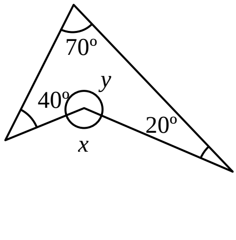
E) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{5}{10} - \dfrac{2}{10} = \dfrac{3}{10}$.

17.(D) De la observación de los cubos se deduce que la respuesta es la D; la A no es posible ya que las caras 2 y 5 no irían unidas (serían paralelas). Por la misma razón:
B (caras 1 y 6), C (caras 3 y 4) y E (caras 2 y 5).

18.(D) En la multiplicación se ha indicado (con subíndices) el orden en el que hemos ido rellenando los huecos, teniendo en cuenta los dígitos que no se habían borrado. Luego el ✳ es un 7

		4	$\boxed{3_3}$
	×	$\boxed{2_2}$	$\boxed{9_4}$
	$\boxed{3_6}$	**8**	$\boxed{7_5}$
	8	$\boxed{6_1}$	
$\boxed{1_8}$	$\boxed{2_7}$	**4**	✳

19.(A) Calculamos la suma de los ángulos interiores del polígono:
S = 2 R (n – 2) = 2 · 90º (4 – 2) = 180º · 2 = 360º
El ángulo *y* = 360º – (40º + 70º + 20º) = 360º – 130º
Como *x* + *y* = 360º; *x* = 360º– *y* = 360º– (360º– 130º) = 130º.



20.(A) Puesto que todos los enunciados son falsos, el cofre B está vacío y en el cofre E está la patata; en A puede estar el tesoro o la cabra (no la cabra, por el enunciado del cofre C); en C puede estar la cabra o el compás (no el compás, por el enunciado del cofre D); en D está el compás.

21.(D) Nº = ($z\,y\,x$) **=** $x + 10\,y + 100\,z$

Expresamos lo que se indica en el problema:

$10 \cdot \text{Nº} = 10\,(x + 10\,y + 100\,z)$

$10 \cdot \text{Nº} - 16 = 10\,(x + 10\,y + 100\,z) - 16$

$$\frac{10 \cdot \text{Nº} - 16}{2} = \frac{10\,(x+10y+100z\,) - 16}{2}$$

$$\frac{10 \cdot \text{Nº} - 16}{2} - N^o = \frac{10\,(x+10y+100z) - 16}{2} - (x+10y+100z) = \ 944$$

Operamos:

$5\,(x + 10\,y + 100\,z) - 8 - (x + 10\,y + 100\,z) = 944$

$4\,(x + 10\,y + 100\,z) - 8 = 944$; $4\,(x + 10\,y + 100\,z) = 944 + 8 = 952$

$x + 10\,y + 100\,z = 952 / 4 = 238 = 8 + 30 + 200 = 8 + 10 \cdot 3 + 100 \cdot 2$

$\Rightarrow x = 8$, $y = 3$, $z = 2$, luego la suma de las cifras es: 8 + 3 + 2 = 13.

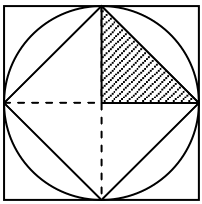
22.(E) Se dice que al principio hay el doble de leche que de café, luego 2/3 de la taza es leche y 1/3 es café.

Bebe la mitad del contenido, o sea, $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ de leche, y $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ de café,

por lo que queda de café: $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$.

23.(E) Se trata de dos magnitudes inversamente proporcionales. La constante de proporcionalidad es: $m \cdot d = (m + r) \cdot x$, luego

$x = \dfrac{m \cdot d}{m + r}$.



24.(C) Sea A el área del triángulo rayado. De la figura se desprende que $P = 4\,A$ y que $G = 8\,A$, luego $G = 2\,P$.

25.(C) 5 vueltas / min $\Rightarrow$ 60 seg / 5 vueltas = 12 $\Rightarrow$ Cada 12 seg está la 1ª rueda en la misma posición que la inicial.

6 vueltas / min $\Rightarrow$ 60 seg / 6 vueltas = 10 $\Rightarrow$ Cada 10 seg está la 2ª rueda en la misma posición que la inicial.

Tiempo que tardan ambas ruedas en estar en la misma posición que la inicial:

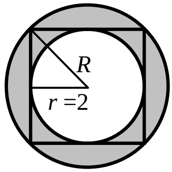
$12 = 2^2 \cdot 3$; $10 = 2 \cdot 5$; m.c.m. $(12, 10) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ seg = 1 minuto.

XIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel III

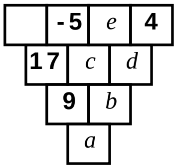
1. (E) Como $\sqrt{0{,}65432} = \sqrt{\dfrac{65{,}432}{100}} = \dfrac{\sqrt{65{,}432}}{10} > \dfrac{\sqrt{64}}{10} = 0{,}8$ la respuesta correcta es 0,8.

2. (A) El radio de la circunferencia inscrita es $r = 2$ cm y, con Pitágoras, obtenemos el radio de la circunferencia circunscrita que resulta ser $R = 2\sqrt{2}$ cm. El área de la corona es $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(8-4) = 4\pi$ cm^2.

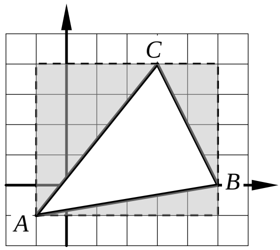


3. (B) El número $n = (5^2)^{64} \cdot (2^6)^{25} = 5^{128} \cdot 2^{150}$ y, por tanto, $\sqrt{n} = 5^{64} \cdot 2^{75} = 2^{11} \cdot 10^{64} = 2048 \cdot 10^{64}$ y la suma de sus cifras es 2 + 4 +8 = 14.

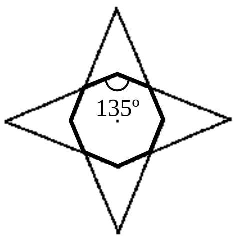
4. (A) Pongamos nombres a los números que faltan y vayamos completando la pirámide poco a poco:
Como 17 + c = 9, c = – 8. Como – 5 + e = – 8; e = – 3 y, por tanto, d = 1.
Ya lo tenemos: $b = c + d = -8 + 1 = -7$ y $a = 9 - 7 = 2$.



5. (D) Representando los puntos en unos ejes de coordenadas vemos que el área del triángulo es el área de un rectángulo menos el área de tres triángulos rectángulos cuyas dimensiones podemos calcular fácilmente. Así pues el área buscada es $6 \cdot 5 - \left(\dfrac{6 \cdot 1}{2} + \dfrac{2 \cdot 4}{2} + \dfrac{4 \cdot 5}{2}\right) = 13$.



6. (E) Como cada uno de los ángulos de un octógono regular miden $\dfrac{180^\circ(8-2)}{8} = 135^\circ$ y la suma de los ángulos de un rombo es 360º, cada uno de los ángulos agudos mide $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$.



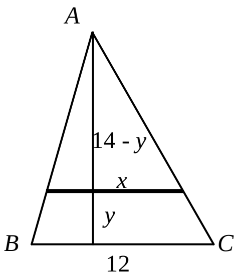
7.(E) Una posibilidad es hallar las raíces de todos ellos igualándolos a cero y resolviendo las ecuaciones, pero es más sencillo pensar que todos los polinomios de segundo grado cuyas raíces son $\frac{1}{2}$ y -2 son de la forma $a\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)=ax^2+\frac{3a}{2}x-a$ y ver cuál de ellos la tiene. Como el coeficiente principal y el término independiente deben ser opuestos, eliminamos todas las posibilidades salvo $2x^2+3x-2$.

8. (C) Comencemos descomponiendo esa expresión aprovechando que es una diferencia de cuadrados. $5^6-1=(5^3-1)(5^3+1)=124\cdot 126$.
Como $124 = 2^2\cdot 31$ y $126 = 2\cdot 3^2\cdot 7$, vemos que el factor primo mayor es 31.

9. (D) a) Probando con cuatro números consecutivos cualesquiera, por ejemplo $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, vemos que es falso. Si sumamos $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4n + 6$ obtenemos que nunca es múltiplo de 4 pues $4n$ lo es pero 6, no.
b) Probando con algunos números vemos que no es siempre cierto. Por ejemplo, $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ no es múltiplo de 4. El producto será múltiplo de cuatro si el número del medio es impar o múltiplo de 4.
c) Si hacemos varias pruebas veremos que siempre se cumple que el producto de cuatro números consecutivos es múltiplo de cuatro. La razón es que entre cuatro números consecutivos siempre hay uno que es múltiplo de cuatro.
d) Esta operación también es siempre múltiplo de cuatro. Si un número es par pero no es múltiplo de 4 debe ser el producto de 2 por un impar: $2(2n+1)= 4n + 2$. Si sumamos dos números de esta forma obtenemos $(4n + 2) + (4m + 2) = 4n + 4m + 4$ que es siempre un múltiplo de 4.
Luego sólo c) y d) son siempre múltiplos de 4.

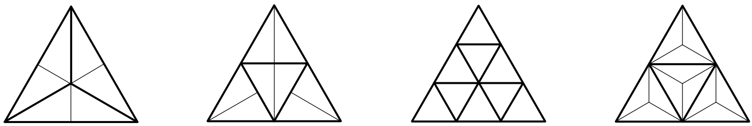
10.(C) Dicho producto acaba en cero, así pues descartamos de un plumazo, las respuestas A, D y E.
$11 \cdot 22 \cdot 33 \cdot 44 \cdot 55 = 11^5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 11^5 \cdot 120 = 11^5 \cdot 12 \cdot 10 =$
$= 11^5 (11+1) (11 - 1) = 11^5 (11^2 - 1) = 11^7 - 11^5$.

11.(C) Como el triángulo grande y el pequeño son semejantes y la razón entre sus áreas es $\frac{1}{2}$, la razón de semejanza entre ellos es $\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ y por tanto la base del pequeño es $12\frac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$ cm.



12.(E) Multiplicando las tres primeras igualdades tenemos que $a^3 \cdot b \cdot c \cdot d = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^4$ y como la última ecuación nos dice que $b \cdot c \cdot d = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, deducimos que $a^3 = 3^3 \cdot 5^3$ y, por tanto *a* = 15. Ya podemos obtener los valores de *b*, *c* y *d* sin dificultad: $b = \frac{90}{15} = 6$; $c = \frac{60}{15} = 4$; $d = \frac{75}{15} = 5$.
Así pues, *a* + *b* + *c* + *d* = 15 + 6 + 4 + 5 = 30.

13.(C) El enunciado nos asegura que podemos dividir un triángulo equilátero en 2, 3, 4 y 9 triángulos iguales. Así pues también podremos dividirlo en 6 triángulos iguales sin más que dividirlo primero en tres isósceles y luego cada uno de éstos en dos. Igualmente en 8 triángulos iguales al dividirlo en cuatro equiláteros y luego cada uno de éstos en dos. En 9 equiláteros iguales también es posible y en 12 triángulos isósceles iguales también es posible si lo dividimos en cuatro equiláteros iguales y cada uno de ellos en tres isósceles iguales. Por tanto podremos estas cuatro divisiones y no podremos conseguir aquellas divisiones que tengan divisores diferentes de 2, 3, 4 y 9.



14.(C) Como en cada columna de un *sudoku* aparecen todas las cifras, en las unidades aparecerán los números del 1 al 9 que suman 45, así pues la suma tendrá un 5 en la unidades. De nuevo la suma de las decenas del *sudoku* será 45 y 4 que me llevo, 49, las decenas en la suma serán 9 y esto se repetirá en cada una de las columnas luego la suma es 4 999 999 995.

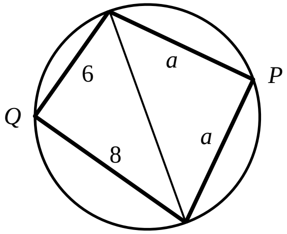
15.(D) Completemos la multiplicación poco a poco. Está claro que *b* debe ser 2 y que *f* debe ser 6 luego *a* es 3. Ahora debemos ver por qué número hay que multiplicar 43 para obtener un número de tres cifras con un 8 en las decenas. Probando un poco vemos que ese número es 9, luego *c* = 9 y por tanto *e* y ✳ valen 7.

		4	$\boxed{a}$
	×	$\boxed{b}$	$\boxed{c}$
	$\boxed{d}$	**8**	$\boxed{e}$
	8	$\boxed{f}$	
$\boxed{}$	$\boxed{}$	**4**	✱

16.(C) Desplazar la coma cuatro lugares a la derecha significa multiplicar por 10 000. Si el número es *x*, podemos plantear la ecuación: $10000x = \frac{4}{x}$; $x^2 = \frac{4}{10000}$, luego

$$x = \frac{2}{100} = 0{,}02 .$$

17.(A) La diagonal que ves en el dibujo divide el cuadrilátero en dos triángulos rectángulos. El de la izquierda tiene área 24 cm^2. Para calcular el área del triángulo de la derecha aplicamos dos veces el teorema de Pitágoras, la primera para obtener la longitud de la diagonal que resulta ser 10 cm y la segunda para obtener el valor de a^2 que resulta ser 50. Luego el área del triángulo de la derecha es 25 cm^2 y el área del cuadrilátero es 24 + 25 = 49 cm^2.



18.(B) Está claro que las cifras de ese número no pueden ser ni números pares ni el 5. Así pues, tendrán que ser 1, 3, 7 ó 9. Veamos cuántos números formados por dos de estas cifras son primos: 11, 13, 17, 19, 31, 37, 71, 73, 79 y 97. De ellos debemos eliminar el 19 ya que el 91 no es primo. Así que las posibles combinaciones de tres números son:

111

113 y todas sus permutaciones (131, 311). Tres en total.

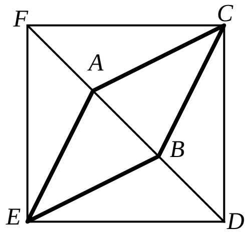
117 y todas sus permutaciones, otras tres posibilidades.

137 y sus permutaciones (173, 317, 371, 713, 731). Seis en total.

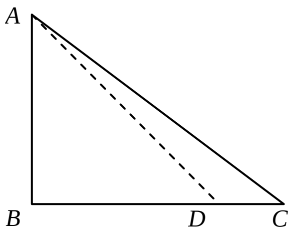
Y ya no hay más posibilidades.

En total hemos encontrado 1 + 3 + 3 + 6 = 13 posibilidades.

19.(D) Cada uno de los seis triángulos que se forman (*FCA*, *ACB*, *BCD*, *BED*, *AEB* y *FEA*) tienen igual área pues sus bases y alturas miden lo mismo (un tercio y un medio de la diagonal respectivamente). Luego el área de un de los triángulos es 36 : 6 = 6 y el área del rombo es $6 \cdot 2 = 12$ cm^2.

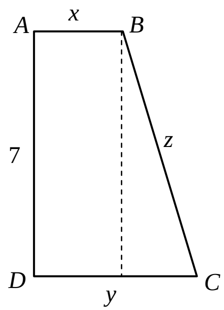


20.(C) La clave está en darse cuenta de que un triángulo cuyos lados miden 9, 12 y 15 es rectángulo pues $9^2 + 12^2 = 15^2$. Como ambas hormigas van a la misma velocidad, cada una de ellas recorre (9 + 12 + 15) : 2 = 18 y, por tanto $BD = AB = 9$ y $AD = 9\sqrt{2}$.



21.(B) Solamente hay 8 casos en los que los tres puntos están alineados (las tres filas, las tres columnas y las dos diagonales) y hay $\frac{9\cdot 8\cdot 7}{6}=84$ formas de escoger tres puntos de nueve, luego la probabilidad buscada es $\frac{8}{84}=\frac{2}{21}$.

22.(B) Llamando $x = AB$, $y = CD$ y $z = BC$ y aplicando el teorema de Pitágoras planteamos el siguiente sistema:



$$\begin{cases} x+y=z \\ (y-x)^2+7^2=z^2 \end{cases}$$

Tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas pero solamente debemos obtener el valor de $x{\cdot}y$. Elevando la primera ecuación al cuadrado e igualando tenemos: $(y-x)^2+49=(x+y)^2$ de donde $xy=\frac{49}{4}=12{,}25$.

23.(B) Debemos contar con cuidado. Hay 669 múltiplos de 3 menores que 2009 (3·1, 3·2, … 3·669 = 2007) y 502 múltiplos de 4 (4·1, … 4·502 = 2008). De aquí debemos quitar los múltiplos de 12 (que son 167). Así pues hay 669 + 502 – 167 = 1004 múltiplos de 3 o de 4 menores que 2009.
Ahora contemos cuántos de ellos son múltiplos de 5: Los múltiplos de 3 y de 5 son múltiplos de 15 y hay 133 menores que 2009. Los múltiplos de 4 y de 5 son múltiplos de 20 y hay 100 menores que 2009. Pero atención, estamos contando dos veces los números que son múltiplos de 3, 4 y 5, esto es, los múltiplos de 60, que son 33. Así pues en la lista anterior hay 133 + 100 – 33 = 200 números que son múltiplos de 5 y por tanto hay 1004 – 200 = 804 múltiplos de 3 o de 4 pero no de 5 menores que 2009.

24.(E) Los divisores de 2^{10} son 1, 2, 2^2, …, 2^{10}. Debemos calcular la suma de los once primeros términos de una progresión geométrica de razón 2 y primer término 1. $1+2+2^2+...+2^{10}=\frac{2^{11}-1}{2-1}=2047$.

25.(D) Comencemos tratando de entender cómo son las cosas: $a_2=a_{1+1}=1+1+1{\cdot}1=3$, $a_3=a_{1+2}=1+3+1{\cdot}2=6$.
Ahora tomemos el camino más corto para hallar el término pedido. Como 12 = 6+6 nos bastará con conocer a_6 y como 6 = 3+3, $a_6=a_{3+3}=2a_3+3{\cdot}3=12+9=21$ y $a_{12}=a_{6+6}=2a_6+6{\cdot}6=42+36=78$.

XIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel IV

1. (A) Sean x, y, z los números de monedas de Ana, Beatriz y Carlos respectivamente. Las monedas que se intercambian se recogen en la siguiente tabla:

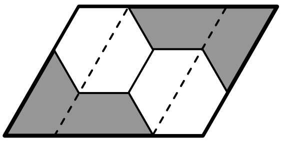
$$\left.\begin{array}{ccc} \textit{Ana} & \textit{Beatriz} & \textit{Carlos} \\ x & y & z \\ x+4 & y & z-4 \\ x+4 & y-5 & z+1 \\ x+2 & y-3 & z+1 \end{array}\right\} x+2=y-3=z+1 \Rightarrow \begin{cases} z=x+1 \\ y=x+5 \end{cases}$$

Y como $x + y + z = 30$; $3x + 6 = 30$; $\boldsymbol{x = 8}$

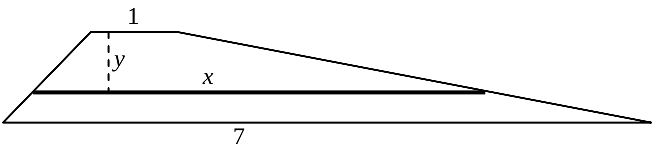
2. (E) La longitud de la circunferencia es directamente proporcional al diámetro de la misma. La suma de los dos diámetros de las circunferencias del segundo camino es el diámetro de la circunferencia del primer camino, por lo que la razón de longitudes es 1

3. (E) El triángulo *CDE* es equilátero, y el ángulo en *E* mide 90º + 60º = 150º.

4. (A) Trazando las paralelas a los lados del paralelogramo por los vértices de los hexágonos se observa que el área sombreada coincide con el área sin sombrear.



5. (C) El área del trapecio es 4, por lo que el área de cada uno de los dos trapecios formados es 2. Llamando x a la longitud de la paralela e y a la altura del trapecio superior $\left.\begin{array}{r} (x+1)y=4 \\ (x+7)(1-y)=4 \end{array}\right\}$ y de aquí $\boldsymbol{x = 5}$



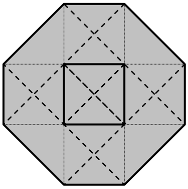
6. (A) En primer lugar, aplicando el teorema del coseno al triángulo *ABC* podemos calcular $\cos\hat{B} = \dfrac{5^2+6^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 6} = \dfrac{1}{5}$.

Y volviendo a aplicar el teorema del coseno al triángulo *ABD*, tenemos $x^2 = 5^2 + 4^2 - 2\cdot 5\cdot 4\cdot \cos\hat{B} = 33$. Por tanto $x = \sqrt{33}$.

7. (E) $t = x + y + z$.

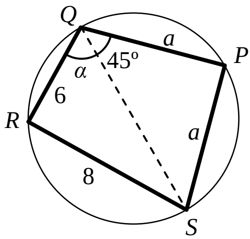
$t - n = 2\,(x - n + y - n + z - n) \Rightarrow t - n = 2t - 6n \Rightarrow \dfrac{t}{n} = 5$

8. (C) Véase la figura



9. (A) En la figura,

$$tg\hat{Q} = tg(\alpha + 45) = \frac{tg\alpha + 1}{1 - tg\alpha} = \frac{1 + \frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{3}} = -7$$



10.(C) 10^6 tiene 49 divisores que se pueden organizar en la siguiente tabla:

	1	**2**	**2^2**	**2^3**	**2^4**	**2^5**	**2^6**
1	1	2	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
5	5	$5\cdot 2$	$5\cdot 2^2$	$5\cdot 2^3$	$5\cdot 2^4$	$5\cdot 2^5$	$5\cdot 2^6$
5^2	5^2	$5^2\cdot 2$	$5^2\cdot 2^2$	$5^2\cdot 2^3$	$5^2\cdot 2^4$	$5^2\cdot 2^5$	$5^2\cdot 2^6$
5^3	5^3	$5^3\cdot 2$	$5^3\cdot 2^2$	$5^3\cdot 2^3$	$5^3\cdot 2^4$	$5^3\cdot 2^5$	$5^3\cdot 2^6$
5^4	5^4	$5^4\cdot 2$	$5^4\cdot 2^2$	$5^4\cdot 2^3$	$5^4\cdot 2^4$	$5^4\cdot 2^5$	$5^4\cdot 2^6$
5^5	5^5	$5^5\cdot 2$	$5^5\cdot 2^2$	$5^5\cdot 2^3$	$5^5\cdot 2^4$	$5^5\cdot 2^5$	$5^5\cdot 2^6$
5^6	5^6	$5^6\cdot 2$	$5^6\cdot 2^2$	$5^6\cdot 2^3$	$5^6\cdot 2^4$	$5^6\cdot 2^5$	$5^6\cdot 2^6$
Sumas	$\frac{5^7-1}{4}$	$\mathbf{2}\cdot\frac{5^7-1}{4}$	$\mathbf{2^2}\cdot\frac{5^7-1}{4}$	$\mathbf{2^3}\cdot\frac{5^7-1}{4}$	$\mathbf{2^4}\cdot\frac{5^7-1}{4}$	$\mathbf{2^5}\cdot\frac{5^7-1}{4}$	$\mathbf{2^6}\cdot\frac{5^7-1}{4}$

La suma total es $\left(\dfrac{5^7-1}{4}\right)\cdot\left(\dfrac{2^7-1}{1}\right) = \dfrac{(5^7-1)(2^7-1)}{4}$

11.(E) El área del octógono regular es $A = 8\dfrac{l\cdot ap}{2} = 4a\cdot ap$. Pero la apotema del octógono mide ap = $\dfrac{a}{2}\cdot tg\left(\dfrac{135}{2}\right) = \dfrac{a}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}} = \dfrac{a}{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$.

Por tanto, el área del octógono es A = $2a^2\left(\sqrt{2}+1\right) = a^2\left(2\sqrt{2}+2\right)$

12.(E) $2^{x+1} + 2^x = 3^{y+2} - 3^y \Rightarrow 3\cdot 2^x = 2^3 3^y \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

13.(D) En $\sum_{k=1}^{359} \cos(k)$ hay 359 sumandos, de los que 358 son opuestos entre sí dos a dos (cos 1º + cos 181º = 0, cos 2º + cos 182º = 0 …cos 179º + cos 359º = 0). Sólo queda, pues, un sumando significativo, cos(180º) = -1.

14.(D) Un ciclo completo del semáforo corresponde al intervalo (0 , 63] si el intervalo de tres segundos que Alicia observa el semáforo tiene su comienzo en cualquier punto del intervalo $(27,33] \cup (60,63]$, entonces observará un cambio de color. Esto supone una longitud de 9 s de un total de 63 s. Por tanto la probabilidad de que observe cambio de color es p = $\dfrac{9}{63} = \dfrac{1}{7}$

15.(E) $a + a\cdot r + a\cdot r^2 + \ldots = 7 \Rightarrow \dfrac{a}{1-r} = 7 \Rightarrow a = 7(1-r)$

$a\cdot r + a\cdot r^3 + a\cdot r^5 + \ldots = 3 \Rightarrow \dfrac{a\cdot r}{1-r^2} = 3 \Rightarrow \dfrac{7(1-r)\cdot r}{(1-r)(1+r)} = 3$

Por tanto $r = \dfrac{3}{4}$, $a = \dfrac{7}{4}$ y $a + r = \dfrac{5}{2}$

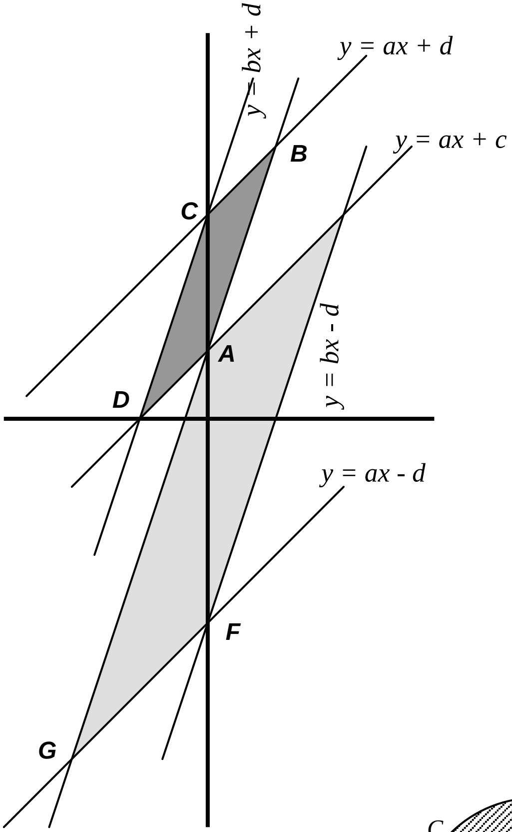
16.(A) Si el área del cuadrado es 36, su lado es 6, y la mitad de su diagonal $3\sqrt{2}$. Puesto que la mitad del segmento AB mide $\sqrt{2}$, y el lado del rombo es la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene por catetos media diagonal y la mitad de AB, el lado del rombo mide $\sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{5}$

17.(C) Si el intervalo $\left[n^2,(n+1)^2\right]$ queda dividido en tres partes iguales, cada parte tiene una longitud de $\frac{2n+1}{3}$.Como los números que dividen al intervalo son *abc* y *acb*, la distancia entre ellos es $(100a+10c+b)-(100a+10b+c)=9(c-b)$.
Tenemos que $27(c-b) = 2n+1$, de modo que 2n +1 ha de ser múltiplo de 27.
El primer múltiplo de 27 se obtiene para n = 13, y el intervalo de cuadrados consecutivos es [169,196], que queda dividido en tres partes iguales por los números 178 y 187. La suma $a + b + c = 16$.
El siguiente múltiplo de 27 se obtiene para n = 40, que ya no sirve.

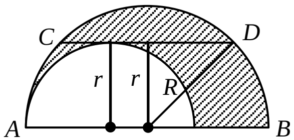
18.(D) Consideremos el primer paralelogramo. Su área es AC · x_B , siendo x_B la abscisa del punto B. Pero AC = $d - c$, y para calcular x_B resolvemos el sistema :
$\begin{cases} y=bx+c \\ y=ax+d \end{cases}$, obteniendo como solución $x_B = \frac{d-c}{b-a}$. Así pues, $\frac{(d-c)^2}{b-a}=18$.
Consideremos ahora el segundo paralelogramo. Su área es AF · x_E, siendo x_E la abscisa del punto E. AF = $d + c$, y para calcular x_E resolvemos el sistema:
$\begin{cases} y=bx-d \\ y=ax+c \end{cases}$, obteniendo como solución $x_E = \frac{d+c}{b-a}$. Así pues $\frac{(d+c)^2}{b-a}=72$.

Dividiendo miembro a miembro, tenemos $\frac{(d+c)^2}{(d-c)^2}=\frac{72}{18}=4 \Rightarrow \frac{d+c}{d-c}=2$.

Por tanto $d = 3c$, y en consecuencia, $\frac{c^2}{b-a}=\frac{9}{2}$, lo que significa que el valor mínimo para c es 3, para $b - a$ es 2, con valores mínimos de 3 y 1 respectivamente. Finalmente, el valor mínimo de d es 9, y el mínimo para $a + b + c + d$ es 16. Ver figura



19.(C) .En la figura se observa que los radios de las dos circunferencias y la mitad del segmento CD forman un triángulo rectángulo, al que aplicando el teorema de Pitágoras nos da: $R^2 = r^2 + 2^2$. Entonces, el área pedida es



A = $\frac{\pi}{2}\left(R^2 - r^2\right) = 2\pi$

20.(D) $p(Q) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}\right) + \ldots =$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}} = \frac{\frac{1}{18}}{1-\frac{5}{18}} = \frac{1}{13}$$

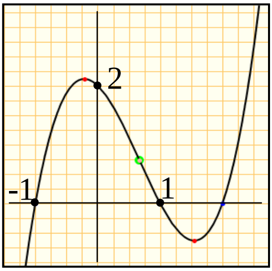
21.(B) Sean a y b las diagonales y c el lado del rombo. Como c es media geométrica de a y b, tenemos que $c^2 = a\cdot b$. Aplicando el teorema de Pitágoras,

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 4ab$ Dividiendo esta expresión por *a·b,* tenemos

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 4$. Pero $\frac{a}{b}$ es la tangente del ángulo mitad del ángulo agudo del rombo,

por tanto, $tg\alpha + \frac{1}{tg\alpha} = 4$, y de aquí, $tg\alpha = 2 \pm \sqrt{3}$. Como α es menor que 45º, tg α es menor que 1, por tanto tg α = $2-\sqrt{3}$, y $\alpha = 15º$. El ángulo agudo del rombo es el doble, es decir 30º.

22. (B) En la figura se aprecia que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ corta al eje y en (0,2) por lo que $f(0) = 2$ y $d = 2$. Puesto que dos ceros de $f(x)$ son -1 y 1, el polinomio se puede escribir $f(x) = a(x+1)(x-1)(x-r)$, siendo r la tercera raíz del polinomio. Este entonces se puede expresar como



$f(x) = a(x^2-1)(x-r) = a(x^3 - rx^2 - x + r) =$

$= ax^3 - arx^2 - ax + ar$, donde se aprecia que los coeficientes de los términos de grado par son opuestos. Como $d = 2$, $b = -2$.

23. (D) Si $a\cdot b = \log_{10} b \Rightarrow (10^a)^b = b \Rightarrow c^b = b$, donde c es 10^a . Pero la función exponencial de base *c* mayor que 1 no corta a la bisectriz del primer cuadrante. Sin embargo, si la base es menor que 1 sí se cortan. Por tanto $c < 1$, lo que implica que $a < 0$ y $b < 1$. Así pues los cinco números quedan ordenados de la forma *a*, 0, *b*, 1, $\frac{1}{b}$, y la mediana es *b*.

24. (A) Sabemos que las ternas pitagóricas se clasifican en primitivas (a, b, c) y múltiplos de primitivas (ka, kb, kc), y que toda terna pitagórica primitiva se puede obtener

con la expresión $2pq,\ p^2-q^2,\ p^2+q^2$ siendo p y q primos entre sí, con p>q. El resto responde a la expresión $2pqk,\ \left(p^2-q^2\right)k,\ \left(p^2+q^2\right)k$.
Si buscamos las ternas que cumplen que el número que mide el área del triángulo es el triple del número que mide su perímetro, tiene que ser:
$\dfrac{2pqk\cdot\left(p^2-q^2\right)\cdot k}{2}=3\left(2pqk+2p^2k\right)$. Esta igualdad se simplifica a

$q(p-q)k=6$, donde los tres factores deben ser enteros positivos. Tenemos, entonces, las siguientes posibilidades:

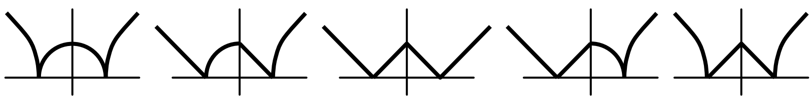
q	p-q	k	p	Terna
1	1	6	2	24, 18, 30
1	2	3	3	18, 24, 30
1	3	2	4	16, 30, 34
1	6	1	7	14, 48, 50
2	1	3	3	36, 15, 39
2	3	1	5	20, 21, 29
3	1	2	4	48, 14, 50
3	2	1	5	30, 16, 34
6	1	1	7	84, 13, 85

Las ternas marcadas son repetidas, de modo que sólo hay 6.

25.(D) $f(x)=\sqrt{\left|(1+x)(1-|x|)\right|}=\begin{cases}\sqrt{\left|(1+x)(1+x)\right|} & si \quad x<0\\ \sqrt{\left|(1+x)(1-x)\right|} & si \quad x\geq 0\end{cases}\Rightarrow$

$$f(x)=\begin{cases}|1+x| & si \quad x<0\\ \sqrt{\left|1-x^2\right|} & si \quad x\geq 0\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}-1-x & si \quad x<-1\\ 1+x & si \quad -1\leq x<0\\ \sqrt{1-x^2} & si \quad 0\leq x<1\\ \sqrt{x^2-1} & si \quad 1\leq x\end{cases}.$$

Es decir, se trata de una función con dos trozos de recta, un trozo de circunferencia y un trozo de hipérbola. La única gráfica con esas características es la D



XIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

***Soluciones 2ª Fase Nivel* I**

1. (E) Realizando las operaciones obtenemos sucesivamente: 1,21 1,02 1,12 2,121 1,2.
Para facilitar la comparación podemos expresarlas con tres cifras decimales:
1,210 1,020 1,120 2,121 1,200.
Ordenadas de menor a mayor tenemos: 1,020 1,120 1,200 1,210 2,121
Donde vemos que en medio queda 1,200 (= 6 : 5).

2. (A) En la dirección horizontal, el bichito, da 25 saltos hacia la derecha y 3 hacia la izquierda, de modo que se ha movido $25-3=22$ saltos hacia la derecha. De la misma forma, en sentido vertical se ha movido $7-5=2$ saltos hacia arriba.
Como cada salto es de 0,5 cm la posición final será:
Eje horizontal: $2+22\times 0{,}5=13$
Eje vertical: $2+2\times 0{,}5=3$
Por lo tanto acaba en el punto (13, 3).

3. (B) Se trata de dividir la fracción $\frac{4}{5}$ entre el número entero 2:

$$\frac{4}{5}:2=\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

4. (C) Puesto que al dividir la edad de Merche entre 5 obtenemos 4 de resto, su edad es un múltiplo de 5 más 4, que se expresa como $\dot{5}+4$.
Don Joaquín tiene el doble de esa edad, es decir, el doble de $\dot{5}$ más 8. Pero el doble de $\dot{5}$ es simplemente otro múltiplo de 5, y 8 se pude poner como $5+3$. De modo que tenemos: "edad de D. Joaquín" $=\dot{5}+5+3=\dot{5}+3$, número que dividido entre 5 da 3 de resto.

5. (C) Es preciso darse cuenta de que si tiene 15 puntos de parada, debe recorrer 14 tramos de 500 m. Hecha esta salvedad la distancia se calcula inmediatamente: $14\times 500=7000\text{ m}=7\text{ km}$.

6. (B) Cuando Julián va solo invierte, en recorrer dos manzanas, el mismo tiempo que empleaba para recorrer una cuando iba con Lucía, por lo que en 15 minutos podría recorrer $4+6=10$ manzanas. Por lo tanto, cuando va sin Lucía tarda $15:10 = 1{,}5$ minutos en recorrer una manzana y, en consecuencia, en recorrer las 8 manzanas tardará $8 \times 1{,}5 = 12$ minutos.

7. (A) Aplicando el algoritmo de la suma, lo primero que se observa es que todas las cifras del resultado "provienen" necesariamente del número 11. Así, tendríamos sucesivamente: 6 + **5** = 11, **6** + 4 + 1 = 11 y 3 +**7** + 1 =**1**1. Donde se han señalado en negrita los números desaparecidos.
Sumándolos tendremos: 1 + 7 + 6 + 5 = 19.

8. (D) Como cada uno de los tres mayores recibe el doble que cada uno de los cinco pequeños, el problema se reduce a hacer la división como si fuesen once niños pequeños. Efectuando la división de 80 entre 11 obtendremos el reparto óptimo pedido.
Como al dividir 80 entre 11 obtenemos 7 de cociente y 3 de resto, repartiremos 14 gominolas a cada sobrino mayor y 7 a cada pequeño. En la bolsa quedarán 3 gominolas.

9. (D) Se han de sumar todas las parejas posibles de números, eligiendo uno de ellos del conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y el otro del $B = \{1, 2, 3, 4\}$.
La suma menor es $1 + 1 = 2$ y la mayor $5 + 4 = 9$. Es muy fácil comprobar que es posible obtener (de diversas formas) todos los números comprendidos entre 2 y 9.
Conclusión: se pueden obtener ocho sumas distintas.
Otra forma de contestar es hacer todas las sumas posibles con una tabla y observar cuántas son diferentes.

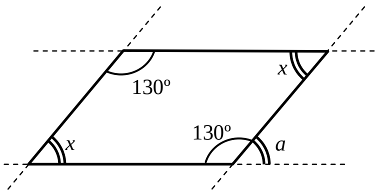
+	1	2	3	4	5
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
2	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	**7**
3	~~4~~	~~5~~	~~6~~	~~7~~	**8**
4	~~5~~	~~6~~	~~7~~	~~8~~	**9**

10.(E) Contando cuidadosamente, vemos que hay 8 círculos negros y 4 blancos. En consecuencia, la fracción pedida es: $\dfrac{8}{8+4} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$

11.(C) Llamando x a la nota del cuarto control, expresamos que la media es 7 mediante una ecuación:

$$\frac{6+9+7+x}{4} = 7 \Rightarrow \frac{22+x}{4} = 7 \Rightarrow 22 + x = 28 \Rightarrow x = 6.$$

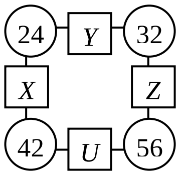
12.(D) Sobre el paralelogramo trazamos cuatro rectas paralelas dos a dos, según se aprecia en la figura. Los ángulos *a* y *x* son iguales por ser ángulos alternos internos. Pero *a* es suplementario de un ángulo de 130º y por lo tanto mide 50º. Como *a* y *x* son iguales, tenemos que cada uno de los ángulos menores mide 50º.



13.(E) Irene llega a la cita con **13** minutos de adelanto: 7 debidos al adelanto de su reloj más los 6 minutos que se adelanta mirando su propio reloj. Richi llega con **11** minutos de retraso: los 13 que lleva de retraso menos los 2 minutos que gana por "adelantarse" a la cita. Por lo tanto, Irene tiene que esperar $13+11=24$ minutos.

14.(C) El enunciado nos dice que:

$X\cdot Y=24,\ \ Y\cdot Z=32,\ \ Z\cdot U=56$ y $U\cdot X=42$



Como *Z* es divisor de 32 y 56, *Z* debe ser un divisor de su máximo común divisor: 2^3. Luego *Z* solo puede valer 1, 2, 2^2 o 2^3.

Estudiemos cada una de estas cuatro posibilidades:

$Z=1$ implica $U=56$ $(Z\cdot U=56)$ que contradice a $U\cdot X=42$.

$Z=2$ implica $U=28$, lo que lleva a $X=\dfrac{42}{U}=\dfrac{3}{2}$, que no es un número admisible en el problema.

$Z=2^2\Rightarrow U=14\Rightarrow X=3$ porque $U\cdot X=42$ y de aquí $Y=8$ porque $X\cdot Y=24$.

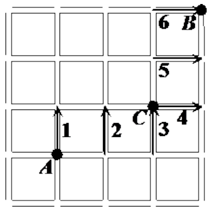
$Z=2^3\Rightarrow U=7\Rightarrow X=6$ porque $U\cdot X=42$ y de aquí $Y=4$ porque $X\cdot Y=24$.

Conclusión: los cuadraditos se pueden rellenar de dos formas distintas.

15.(A) Basta traducir los números romanos a notación decimal y leer cuidadosamente el problema. Nos dicen que Eulerigildo nace el año 597 y se traslada a Madrid a los 24 años. Por tanto se traslada a Madrid el año: 597 + 24 = 621. Dado que murió en Madrid el año 642, vivió en esa ciudad durante: 642 – 621 = 21 años.

16. (C) El número de horas que deben transcurrir hasta que coincidan por primera vez es el mínimo común múltiplo de de 5, 6, 10 y 12: m.c.m.(5, 6, 10, 12) = 60 horas. Pero 60 horas son igual a 2 días más 12 horas. Ahora bien, dado que es el lunes a las 11 de la noche cuando, por vez primera, escuchamos a los cuatro simultáneamente, los volveremos a escuchar juntos de nuevo el jueves a las 11 de la mañana.

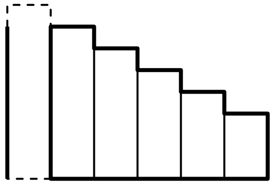
17.(B) Siempre se obtendrá la menor distancia caminando hacia la derecha sin retroceder nunca y subiendo, sin bajar en ninguna ocasión.



Veamos: De A a C puede ir de tres formas distintas, determinadas por los vectores 1, 2 y 3 y, por cada una de estas tres formas, puede ir de C a B de otras tres, determinadas ahora por los vectores 4, 5 y 6.

Tenemos en total: 9 formas $(3\times 3=9)$ de ir de A a B recorriendo la menor distancia posible.

18.(A) Es fácil ver que cada rectángulo añadido incrementa el perímetro en 6 cm, como se observa en los trazos de puntos de la figura (2 cm corresponden a la base, y 1+2+1 al nuevo escalón). Puesto que es necesario añadir 11 piezas rectangulares, tendremos la siguiente lista de perímetros:



1º) $34+6$

2º) $34+2\times 6$

3º) $34+3\times 6$

…

11º) $34+11\times 6=100\,\text{cm}$.

19.(B) Con el primer cambio tenemos, entre las monedas de 50 céntimos y de 1 euro, un total de19,50 euros. Esto hace que el número de monedas de 50 céntimos tenga que ser forzosamente un número impar. Por otra parte, tras el segundo cambio, la hucha contendrá monedas de 20 y de 50 céntimos que suman 9,30 euros. Es fácil comprender que para obtener el “ 0,30” con esas monedas, la única forma de hacerlo es tener un número impar de monedas de 50 céntimos y lograr, además, que las monedas de 20 céntimos sumen (en euros): 0,80; 1,80; 2,80; 3,80… Esto último lleva a que el número de monedas de 20 céntimos deba ser: 4, 9, 14, 19…39, 44. Tenemos entonces que el número de monedas de 20 céntimos será un número impar de la secuencia 4, 9, 14, 19… 44.

Solo resta comprobar si para alguno de esos números (9, 19, 29, 39) se verifican las condiciones del problema:

En el primer cambio, el número de monedas de 1 euro sería: $19{,}5-9\times 0{,}50=15$.

En el segundo cambio, el número de monedas de 1 euro sería: $\left(9{,}30-9\times 0{,}20\right)\times 2=15$.

Afortunadamente el número más pequeño ofrece la solución. Por lo tanto 9 monedas de 20 céntimos y 15 de un euro satisfacen las dos condiciones impuestas en el enunciado y, el dinero de la hucha será: $9\times 0{,}20+15=16{,}80$ euros.

El problema se resuelve, más sencillamente, de forma algebraica.

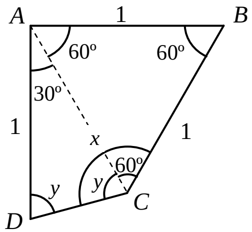
Sea x el número de monedas de 20 céntimos e y el de 1 euro. Planteando sendas ecuaciones para cada uno de los cambios propuestos, tenemos:

$$\left.\begin{array}{r}0{,}50x+y=19{,}50\\0{,}20x+0{,}50y=9{,}30\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+2y=39\\2x+5y=93\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}2x+4y=78\\2x+5y=93\end{array}\right\}\Rightarrow y=93-78=15,$$

que sustituido en $x+2y=39$, da: $x=39-2\cdot 15=9$.

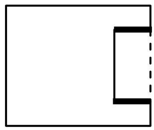
Por tanto, en mi hucha tengo: $0{,}20x+y=0{,}20\cdot 9+15=16{,}80$ euros.

20.(C) El triángulo ABC es isósceles y como el ángulo formado por los dos lados iguales mide 60º, los otros ángulos, que han de ser iguales, suman 120º. Por lo tanto el triángulo es equilátero y el ángulo $\hat{A}$ del triángulo DAC, mide 30º. Además $\overline{AD}=\overline{AC}=1$, lo que hace que el triángulo DAC sea isósceles.
Entonces tenemos:
$2y=180º-30º\Rightarrow y=150º/2=75º$.



Y por fin: $x=y+60º=75º+60º=135º$.

21.(C) Es inmediato ver que en todas las parcelas, salvo en la C, la valla tiene una longitud igual al perímetro del rectángulo. Sin embargo, en la parcela C, la longitud de la valla supera al perímetro del rectángulo en la medida de los dos segmentos señalados en trazo grueso, tal y como se aprecia en la figura.



22.(C) Como los números deben ser impares, tienen que terminar en 1 o en 3.
Para formar todos los que acaban en 1 tenemos que poner delante dos cifras, elegidas entre 2, 3 y 4, de forma que la suma de las tres cifras del número sea múltiplo de 3. A tal efecto formamos todas las parejas posibles con las citadas cifras: (2, 3), (2, 4) y (3, 4). De ellas solo sirve la primera (2 + 3 + 1 = 6, múltiplo de 3), que nos permite formar los números: 231 y 321.
Repetimos el proceso para los números que terminan en 3. Ahora debemos anteponer al 3 dos cifras elegidas entre 2, 1 y 4. Todas las parejas posibles son:
(2, 1), (2, 4) y (1, 4). En esta ocasión sólo las dos primeras pueden formar, con la cifra 3, múltiplos de 3. Podemos, en esta ocasión, formar los siguientes números: 213, 123, 243 y 423, que junto a los dos números anteriores hacen un total de 6.

23.(E) Si al número 2544 le hacemos, en orden inverso, el inverso de las operaciones que Mariquilla realizó con su calculadora, obtendremos el número que había escrito originalmente:

restamos 36: $2544-36=2508$
dividimos entre 12: $2508/12=209$
sumamos 36: $209+36=245$
y multiplicamos por 2: $245\times 2=490$
que es el número que Mariquilla había escrito en la calculadora.
La suma de sus cifras es: $4+9+0=13$.

24.(B) $1\ marcelo\ =\ 3\ m \Rightarrow 1\ m=\dfrac{1}{3}\ marcelos.$

$$1\ jupito=120\ m=120\times\frac{1}{3} marcelos\ =\ 40\ marcelos.$$

25.(C) El problema se aborda, con gran claridad, señalando en una tabla, con V o F, si ese día hace que el enunciado sea verdadero o falso.

	L	M	X	J	V	S	D
Mi cumple es el martes	F	V	**F**	F	F	F	F
Mi cumple no es el miércoles	V	V	**F**	V	V	V	V
Mi cumple es el jueves	F	F	**F**	V	F	F	F
Mi cumple no es el martes	V	F	**V**	V	V	V	V
Mi cumple es el viernes	F	F	**F**	F	V	F	F

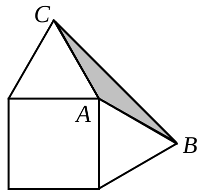
El miércoles es el único día de la semana en el que solamente un enunciado es verdadero. Por lo tanto, mi cumple es el miércoles.

XIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel II

1. (C) Si la proporción entre vocales y consonantes es de 3 a 7, la proporción de vocales respecto al número de letras es de 3 a 3 + 7, es decir $\frac{3}{10} = 30\%$.

2. (C) Seamos corteses y para hablar de él pongamos nombres a los vértices del triángulo sombreado.



Así el ángulo $B\hat{A}C$ mide 360º menos un ángulo de 90º y dos de 60º, es decir 360º – 210º = 150º, dejando 30º para los dos ángulos iguales del triángulo isósceles *ABC*. La respuesta es 15º.

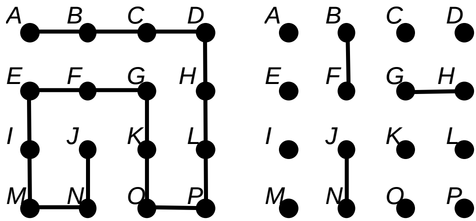
3. (A) Enfoquemos el problema. El espacio recorrido por Miope en sus saltos hacia delante (múltiplo de 8) se diferencia de los 122 m en el espacio recorrido en sus saltos hacia atrás (múltiplo de 5). Es decir que hacia delante ha recorrido (en m) 122 más un múltiplo de 5. Saltemos ahora nosotros de cinco en cinco desde 122 hasta conseguir un primer múltiplo de 8:

122 ➔ 127 ➔ 132 ➔ 137 ➔ 142 ➔ 147 ➔ **152**.

(Con un poco más de vista hubiéramos desde el principio saltado de 10 en 10, y llegados a 132 -múltiplo de 4- habríamos saltado de repente a **152**)
Pero la respuesta es el número de saltos: 152 : 8 = 19 de 8 m y 6 (los hemos saltado nosotros) de 5 m.

4. (D) 1222 será el último. Así que de cuatro cifras son aquellos que empiezan por 1 y las tres cifras siguientes son o 1 ó 2. Podemos escribirlos, pero no por ello dejarán de ser ocho (2 × 2 × 2). Con tres cifras podrán ser éstas o 1 ó 2 en cada posición (otros ocho), cuatro de dos cifras y dos de una. En total 8 + 8 + 4 + 2 = 22.

5. (D) Tratemos de ser deductivos y adelantarnos un poco a la jugada. Si de *B* pasamos a *C*, deberemos a continuación pasar por *D* para no dejarlo aislado y tener que repetir vértice al ir en su busca. Vendrán luego obligados *H*, *G* y *K*. Después pasaremos por *L*, *P* ,*O*, *N* para evitar aislar los vértices del cuadrante inferior derecho. La conexión



obligada *J, I,* no va a permitir acabar el recorrido pues hemos dejado aislado a M. Vuelta a empezar con la lección bien aprendida (no aislar vértices):
F, B, A, E, I, M, N, J, K, O, P, L, H, G, C, D.

6. (D) Resolvamos de cabeza. Un hexágono regular (seis lados) se divide fácilmente en seis triángulos equiláteros de perímetro la mitad (tres lados) pero el área del hexágono es seis veces la del triángulo. Si consideramos un equilátero de perímetro igual al del hexágono tendrá doble perímetro que los equiláteros anteriores y por tanto (aquí está el meollo del problema) su área aumentará cuatro veces, con lo que la antigua relación de áreas de 6 : 1, se convertirá en 6: 4, o simplificando 3 : 2.

7. (C) Acabará en tantos ceros como dieces podamos sacarle descomponiendo. Pero un diez se forma con una pareja de factores 2 y 5.

$15^6 = (3\cdot 5)^6$ tiene seis cincos; $28^5 = (4\cdot 7)^5 = (2^2\cdot 7)^5$ tiene diez doses.

$55^7 = (5\cdot 11)^7$ tiene 7 cincos.

Nuestro número $15^6 \cdot 28^5 \cdot 55^7$ tiene diez doses y trece cincos, es decir diez parejas de dos y cinco. Acaba en diez ceros.

8. (D) Para la franja superior disponemos de 4 colores. Elegido uno para la siguiente sólo disponemos de tres colores (al no poder repetir el de franja superior) y para acabar podemos volver a usar 3 colores (para no repetir el de en medio). En total cuatro comienzos, que pueden ser continuados de tres formas cada uno, y esas banderas acabadas a su vez de tres formas distintas, es decir 4×3×3 = 36 banderas diferentes.

9. (D) Si sabemos poco de triángulos mágicos sumamos las líneas donde sólo interviene la letra *x* e igualamos los resultados:

$3x + 1$	$5x$	$11 - x$
a	$2x + 5$	d
b	$x + 4$	c

$(3x+1)+(5x)+(11-x)=(5x)+(2x+5)+(x+4)$,

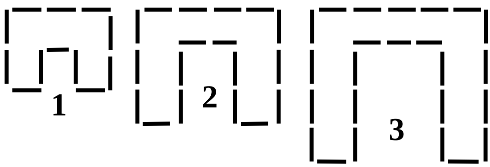
de donde $7x+12=8x+9$; $x=3$.

A continuación rellenamos las casillas con *x* cambiando ésta por 3. La suma mágica es 33, nos vamos a por c en una diagonal , 10 + 11 + *c* = 33; *c* = 12, y después por la *d* pedida en columna, 8 + *d* +12 = 33; *d* =13.

10	15	8
a	11	d
b	7	c

10.(B) Empezamos escribiendo en fila los catorce números: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42 y buscamos la pareja de los aparentemente menos amistosos.
42 que no encuentra el 7 ni el 22 se empareja con 39; 36 no encuentra pareja.
33 debe hacerlo con 3; 30 se va con 6; 27 lo hace con 9 y 24 con 12. 21 lo hace con 15 y 18 se queda descuadrado. Así que se junta con 36 y suman 54.

11.(B) No hay que ser un Holmes para darse cuenta de que un puente añade seis rayitas al anterior (dos por pierna y dos por arco) de forma que en rayitas la serie es 12, 18, 24, ...



¿Cuántas rayitas se aleja del primer puente el decimoquinto?, pues $14 \cdot 6 = 84$, luego tiene $84 + 12 = 96$ rayitas. ¡Elemental, Watson!

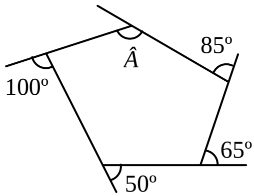
12.(A) Después de S = 8, inmediatamente sabemos que O = 6. También C = 1, pues la suma de un número de cuatro cifras con uno de tres da uno de cinco. Por el mismo motivo T = 9. Por otro lado E + O + 1 (de llevar) acaba en 1, y como O es 6, E debe ser 4. Además I, para no ser igual a T, debe ser 0, y ya sólo nos queda solucionar que la suma R + D + 1 pasa de 9 y acaba en N , siendo R, D y N tres cifras distintas entre sí y de las ya colocadas. Sólo nos quedan para usar las cifras 2, 3, 5 y 7. Las dos posibilidades son que R y D se repartan 7 y 5, y N sea 3.

$$\begin{array}{rccccc} & & T & R & E & S \\ + & & & D & O & S \\ \hline & C & I & N & C & O \end{array}$$

13.(B) $\left(x \cdot \dfrac{115}{100}\right) \cdot \left(y \cdot \dfrac{120}{100}\right) = x \cdot y \cdot \dfrac{115 \cdot 12\cancel{0}}{100 \cdot 10\cancel{0}} = x \cdot y \cdot \dfrac{23 \cdot 6}{100} = x \cdot y \cdot \dfrac{138}{100}$

14.(C) Cuatro de los ángulos interiores del pentágono se calculan como suplementarios de los dados como datos.

Éstos son: 80º, 130º, 115º y 95º.



Para hallar $\hat{A}$, basta con usar que la suma de los ángulos de un pentágono equivale a tres rectos.

Luego:

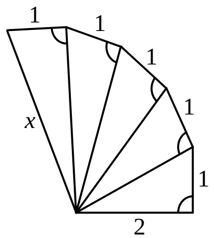
Â = 540º – 80º – 130º – 115º – 95º =120º.

15.(E) Don Retorcido bien sabe que las potencias de 6 siempre acaban en 6, y las potencias de 11 lo hacen en 1. Para el nueve nos dice que el exponente acaba en 5, y por tanto es impar, que es el dato que nos falta para saber la terminación de la potencia del 9, ya que éstas se alternan en 9 ó 1, según el exponente sea impar o par. Nos queda la terminación de las potencias de 2, y éstas siguen el ciclo: 2, 4, 8 y 6 , de forma que si el exponente es múltiplo de 4, la terminación es 6, de forma que $2^{2009} = 2^{2008} \cdot 2$, acaba en lo mismo que $6 \cdot 2$, es decir en 2.

Es el momento de recoger las terminaciones obtenidas y multiplicarlas:

$2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 1$ acaba en 8.

16.(C) Tenemos una sucesión de cinco triángulos rectángulos, con un cateto 1, y el otro la hipotenusa del anterior . Lleguemos a través del teorema de Pitágoras a la quinta hipotenusa.



$h_1 = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$h_2 = \sqrt{5 + 1^2} = \sqrt{6}$

...

Así las hipotenusas son $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}$ y $x = \sqrt{9} = 3$.

17.(E) Un observador astuto puede darse cuenta de que los cuadrados perfectos están separados por paridad en dos sentidos de direcciones diagonales, de forma que los cuadrados impares descansan en las filas negativas (con la inclusión de la fila cero) y los cuadrados pares las filas positivas (también con la fila cero incluida).

FILA 3	37	38	39	40	41	42	43
FILA 2	36	17	18	19	20	21	44
FILA 1	35	16	5	6	7	22	45
FILA 0	34	15	4	1	8	23	46
FILA –1	33	14	3	2	9	24	47
FILA –2	32	13	12	11	10	25	48
FILA –3	31	30	29	28	27	26	49
FILA –4						51	50

Así que 400 que es el cuadrado de 20, ocupará fila positiva. Estudiemos la relación entre cuadrado y fila:

2^2 en la fila 0, 4^2 en la fila 1, 6^2 en la fila 2 , ... **,** 20^2, en la fila 9.

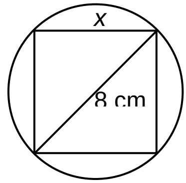
18.(E) Los ángulos de un pentágono suman tres ángulos llanos, es decir $3 \cdot 180º = 540º$, y en este caso esa suma es la de cinco números enteros consecutivos.

Así: $(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2) = 540º \Rightarrow 5n = 540º \Rightarrow n = 108º$

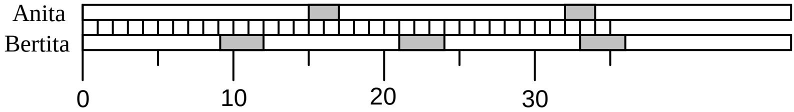
Por lo tanto el menor de ellos es 108º – 2º = 106º.

19.(A) El mayor número de avellanas que pueden quedar se obtiene cuando cada una de las ardillas come el menor número posible de ellas. A saber:
Rita (7) + Petrita (1) + Quitina (2) = 10 avellanas. Por lo tanto el máximo número de avellanas que pueden quedar es 15.

20.(B) El lado del cuadrado es ***x*** y por el teorema de Pitágoras se verifica que: $x^2 + x^2 = 8^2 \Rightarrow 2x^2 = 64 \Rightarrow x^2 = 32$.
Como el área del cuadrado es x^2, entonces la respuesta es 32 cm^2.



21.(B)



El siguiente esquema nos muestra las horas que están descansando en el hormiguero Anita y Bertita (marcado en gris). Al cabo de 33 horas llegará Bertita mientras que Anita está descansando y se volverán a encontrarán por primera vez.

22.(A) La suma de 15 números consecutivos es igual a 15 por el número que ocupa la posición central (mediano), como podemos expresar algebraicamente.

$(x-7)+(x-6)+...+(x-1)+x+(x+1)+...+(x+6)+(x+7)=15x=300$.

Se deduce que el valor central es $x=\dfrac{300}{15}=20$, el mayor $x + 7 = 27$ y el menor $x - 7 = 13$, por lo que la suma pedida será: 300 – (27 + 13) = 260.

23.(E) Si descomponemos los divisores conocidos podemos deducir otros divisores.
$10 = 2 \cdot 5$, $35 = 5 \cdot 7$ y por lo tanto otros divisores además del 1, pueden ser: 2, 5, 7, 10 = (2·5), 14 = (2·7), 35 = (5·7) y 70 = (2·5·7). Como tiene exactamente ocho divisores, han de ser estos necesariamente: 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35 y 70. El cuarto número de esta lista es el 7.

24.(D) Designando por *x*, al trabajo que hace un robot R2alfa en una hora, tenemos que en una hora cada robot haríia:

$R2\alpha \rightarrow x,\quad R2\beta \rightarrow 2x,\quad R2\gamma \rightarrow 3x$ y entre los tres:

$R2\alpha + R2\beta + R2\gamma \rightarrow x+2x+3x=6x$

Entre los tres tardarían la sexta parte que un R2alfa, la tercera parte que un R2beta y la mitad que un R2gamma. Y la respuesta es la D.

25.(B) Aunque se puede hacer multiplicando directamente $37\times n$ y contando el número de veces que se repite la cifra 1, $37\times n$ = 41111…107, es más elegante razonar así:

$37\cdot n=(40-3)\cdot n=40n-3n=444...40-33...33$

Como en el primer número hay 100 cuatros, al restar nos quedarán: 1 cuatro, 98 unos, 1 cero y 1 siete, por lo que la suma de las cifras es 4 + 98 + 7 = 109.

XIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel III

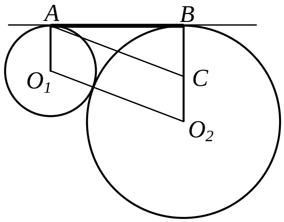
1. (A) Si llamamos x al lado del cuadrado, entonces, el ancho del rectángulo es $2x$ y su largo es $4x$. El área del cuadrado es x^2 y la del rectángulo es $8x^2$, es decir, el cuadrado ocupa un octavo del rectángulo, lo que supone un 12,5 %.

2. (E) Escribimos el numerador y el denominador como diferencia de cuadrados y luego sacamos factor común:

$$\frac{\left(3^{2009}\right)^2-\left(3^{2007}\right)^2}{\left(3^{2008}\right)^2-\left(3^{2006}\right)^2}=\frac{\left(3^{2009}+3^{2007}\right)\cdot\left(3^{2009}-3^{2007}\right)}{\left(3^{2008}+3^{2006}\right)\cdot\left(3^{2008}-3^{2006}\right)}=\frac{3^{2007}\left(3^2+1\right)\cdot 3^{2007}\left(3^2-1\right)}{3^{2006}\left(3^2+1\right)\cdot 3^{2006}\left(3^2-1\right)}=9$$

3. (B) Operamos: $\frac{2x}{3}-\frac{x}{6}=\frac{3x}{6}=\frac{x}{2}$, que será un número entero si x es par.

4. (D) Como en tantísimos problemas geométricos, basta con trazar algunos elementos auxiliares para iluminar la situación. En este caso, dibujamos los radios que van a los puntos de tangencia, que sabemos que son perpendiculares a su tangente. También trazamos el segmento AC paralelo al segmento que une los centros.



Observando el triángulo ABC vemos que es rectángulo en B.

$AC=4+9=13$ cm y $BC=9-4=5$ cm.

Con Pitágoras concluimos que $13^2=AB^2+5^2$, es decir, $AB=12$ cm.

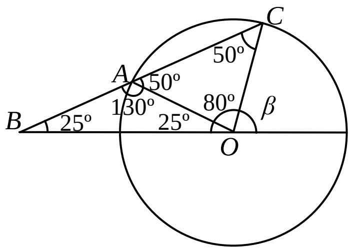
5. (A) Sea el número de tres cifras abc, cuyo valor es $100a+10b+c$, entonces, el enunciado nos asegura que $100a+10b+c=30(10b+c)+4$, es decir, $100a+10b+c=300b+30c+4$, de donde se deduce que $c=4$. Sustituyendo este valor en la última expresión, obtenemos que $100a+10b=300b+120$ y vemos que $b=2$. Con estos dos valores hallados, podemos calcular la primera cifra del número, $a=7$. El número N es 724, cuyas cifras suman 13.

6. (C) Si llamamos x al dinero que no gastó Francisco entonces, a^2-b^2-x es el dinero que gastó y el enunciado del problema queda reflejado en esta ecuación: $a^2-b^2-x=\frac{a}{b}x$. Al resolverla obtenemos que

$$x=\frac{a^2b-b^3}{a+b}=\frac{b(a^2-b^2)}{a+b}=\frac{b(a+b)(a-b)}{a+b}=b(a-b)=ab-b^2$$

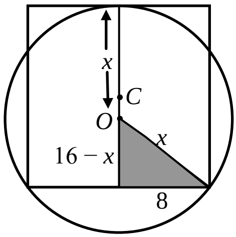
7. (D) En una hora de trabajo, Ana pinta un décimo de habitación y Cati un séptimo de habitación, lo que supone que si ambas pintas juntas completarían $\frac{1}{10}+\frac{1}{7}$ de habitación en una hora. El enunciado dice que han necesitado $t-1$ horas reales de trabajo. Así pues para pintar la habitación completa han necesitado trabajar $\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{7}\right)(t-1)$, es decir, $\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{7}\right)(t-1)=1$.

8. (C) Trazamos el radio OA y ya todo es muy sencillo. Como el triángulo AOB es isósceles y conocemos un ángulo, podemos hallar los restantes. Deducimos entonces que $O\hat{A}C=50^{\circ}$ y de nuevo, como ACB es isósceles, averiguamos sus ángulos.
Por último, $\beta=180^{\circ}-25^{\circ}-80^{\circ}=75^{\circ}$.

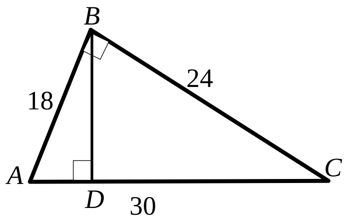


9. (E) Sea C el centro del cuadrado, O el de la circunferencia y x el radio que buscamos.

Trabajando en el triángulo rectángulo sombreado, podemos calcular el valor de x resolviendo la siguiente ecuación: $x^2=(16-x)^2+8^2$.
El radio de la circunferencia mide 10 cm.



10.(A) El triángulo del que se habla es rectángulo ya que las longitudes de sus lados son el séxtuplo de la archiconocida terna pitagórica (3, 4, 5). Por la tanto, la altura menor será la que cae sobre la hipotenusa. Como los triángulos ADB y ABC son semejantes: $\frac{BD}{24}=\frac{18}{30}$, que nos lleva a que $BD=14,4$ m, es decir, 144 decímetros.



11.(B) Si factorizamos m, observamos que $m=n^3-n=n\cdot(n^2-1)=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)$, es decir, m es el producto de tres números consecutivos. Si n es mayor que 1 entonces m es siempre múltiplo de 2 y de 3 ya que en cualquier lista de tres números consecutivos, a la fuerza hay un múltiplo de 2 y un múltiplo de 3. Así pues, m es siempre múltiplo de 6 y el mcd será un múltiplo de 6.
De las soluciones propuestas, B) es la única que es múltiplo de 6.

¿Podría haber otro divisor común mayor que 6?

Si $m=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)$ fuera múltiplo de 4 o de 5, entonces alguno de los tres factores lo sería también. Si lo fuera (n – 1), entonces $m_1=n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$ no lo sería. Si lo fuera n, entonces $m_2=(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)$ no lo sería y si lo fuera (n + 1), en este caso $m_3=(n-2)\cdot(n-1)\cdot n$ tampoco lo sería.

Si $m=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)$ fuera múltiplo de algún factor primo k > 5 el número $m'=(n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+4)$ no lo sería. Por lo tanto no puede haber ningún divisor común mayor que 6.

Obsérvese que la condición $n>2009$ podría cambiarse por $n>1$, cuyo único fin es asegurarse que m no sea cero. Por tanto, el máximo común divisor de todos los m así formados es 6.

12.(C) La rata comió en 9 ocasiones y dejó de comer en 13 ocasiones. Esto hace un total de 22 ocasiones entre mañanas y tardes. Como come todos los días, se deduce que el estudio duró 11 días.

13.(D) Resumamos en una tabla los datos del problema:

	Tiempo (h)	Velocidad (km/h)	Espacio (km)
Pedro	t	v	$v\cdot t$
Alicia	t + 1	v + 5	(v + 5)·(t + 1)
Luisa	t + 2	v + 10	(v + 10)·(t + 2)

Como Alicia condujo 70 km más que Pedro, podemos escribir que

$(v+5)(t+1)=vt+70 \Rightarrow 5t+v=65$

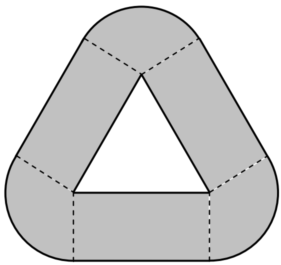
Luisa recorrió:

$(v+10)(t+2)=vt+10t+2v+20=vt+2(5t+v)+20=vt+2\cdot 65+20=vt+150$,

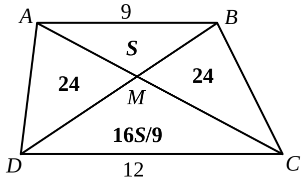
es decir, 150 km más que los recorridos por Pedro.

14.(B) La región pintada de rojo está formada por tres rectángulos iguales, cada uno de ello de área 18 cm^2 y por tres sectores circulares iguales y de 120º de amplitud, que juntados forman un círculo de radio 3 cm y área 9π cm^2.

El área total de la región es $54+9\pi=9(6+\pi)$ cm^2.



15.(D) Los triángulos *ABM* y *CMD* son semejantes ya que sus ángulos son iguales y su razón de semejanza es $\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$. Por tanto si *S* es el área del triángulo menor, *ABM*, el área del mayor, *CMD*, será $\left(\frac{4}{3}\right)^2\cdot S=\frac{16}{9}S$. Además, los triángulos *ACD* y *BCD* tienen la misma área, de lo que se deduce que los triángulos *AMD* y *BCM* también tienen igual área.



Vamos a calcular *S* y así podremos hallar el área del trapecio. Si llamamos *h* a la altura del trapecio tenemos que el área del triángulo *DCB* es: $\frac{12\cdot h}{2}=\frac{16}{9}S+24$ y el área del triángulo *ABD* es $\frac{9\cdot h}{2}=S+24$. Arreglamos este sistema y hallamos *S*:

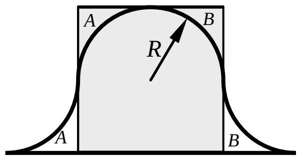
$$\left.\begin{array}{l}54h=16S+216\\ 9h=2S+48\end{array}\right\}\Rightarrow S=18.$$

El área del trapecio es $24+24+18+32=98$.

16.(E) Sea *ab* el número $10a+b$. Debemos encontrar aquellos números que cumplan que $a+b+a\cdot b=10a+b\Rightarrow a\cdot b=9a$, de donde concluimos que, como *a* no puede ser cero, $b=9$ y *a* puede ser cualquier cifra no nula. Así pues, hay nueve números con dicha propiedad: 19, 29,…, 89 y 99.

17.(C) Si llamamos *n* a la medida del ángulo menor, 5*n* será la medida del mayor y $180º-6n$ la del mediano. Tenemos pues que $180º-6n<5n\Rightarrow 180º<11n\Rightarrow n>16º$.
Como las medidas deben ser enteras probamos con los primeros valores posibles:
Si $n=17º$, los ángulos son 17º, 78º y 85º.
Si $n=18º$, el ángulo mayor sería 90º, lo que no puede ser ya que el triángulo es acutángulo (sus ángulos menores de 90º). Ya no seguimos.
La respuesta es por tanto 163º (78º+85º).

18.(C) Si recolocamos las zonas *A* y *B* como indica el dibujo, se observa que la figura se transforma en un cuadrado de lado 2*R* y su área es, por tanto, $4R^2$.

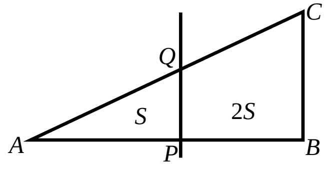


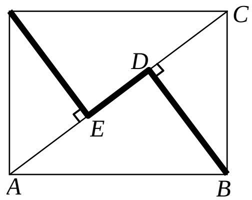
19.(B) En muchos casos es más sencillo estudiar la propiedad contraria de la que piden y luego responder. En este caso estudiaremos cuántos números son divisibles por 2 o por 5, con cuidado de no contar números dos veces por lo que habrá que restar los divisibles por 2 y 5, es decir, los divisibles por 10.
Números divisibles por 2: desde el 102 (2·51) hasta el 998 (2·499), hacen un total de 449 números.
Números divisibles por 5: desde el 105 (5·21) hasta el 995 (5·199), hacen un total de 179 números.
Números divisibles por 10: desde el 110 (10·11) hasta el 990 (10·99), hacen un total de 89 números.
Es decir hay $449+179-89=539$ números divisibles por 2 o por 5.
Como hay 899 números (desde el 101 hasta el 999), los que no son divisibles ni por 2 ni por 5 son: $899-539=360$.

20.(E) Si llamamos a al lado original del cuadrado, los lados del nuevo rectángulo miden $1{,}1a$ y $0{,}9a$. El área del rectángulo es $1{,}1a\times 0{,}9a=0{,}99a^2$, es decir, un 1% menor que el área del cuadrado.

21.(E) Nos dicen que $A=2^b\cdot 3^c\cdot 5^d$, $B=2^f\cdot 3^g\cdot 5^h$ y que $mcd\,(A,B)=720=2^3\cdot 3\cdot 5$ y $mcm(A,B)=18000=2^4\cdot 3^2\cdot 5^3$. Es conocida la propiedad que asegura que el producto de una pareja de números es igual al producto de su mcd por su mcm. Así pues, la potencia de dos en dichos productos es, por una parte, $2^b\cdot 2^f=2^{b+f}$ y por la otra $2^3\cdot 2^4=2^{3+4}=2^7$. Fin del problema: $b+f=7$.

22.(C) Si llamamos S al área del triángulo menor APQ, entonces el área del triángulo mayor ABC es $3S$, sin olvidar que dichos triángulos son semejantes.
Por tanto, la razón de semejanza es $\sqrt{3}$ y podemos calcular la longitud de AP:
$$\frac{AB}{AP}=\sqrt{3}\Rightarrow\frac{3}{AP}=\sqrt{3}\Rightarrow AP=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

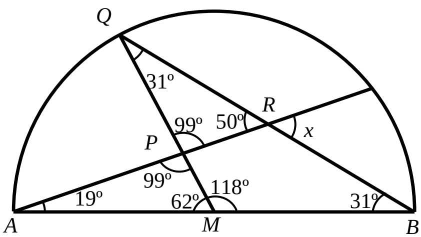




23.(B) En la figura aparecen varios triángulos rectángulos semejantes, entre ellos, *BDC* y *ABC*.
Aprovechándonos de esta semejanza resolveremos el problema.
Primeramente, en el triángulo *ABC* conocemos sus dos catetos y hallamos su hipotenusa, $AC = 10$.
Calculamos ahora *BD* utilizando que *BDC* y *ABC* son semejantes: $\frac{BD}{AB} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{8} = \frac{6}{10} \Rightarrow BD = 4{,}8$
Para hallar *ED* necesitamos calcular antes *CD*, ayudándonos de nuevo de la semejanza entre *BDC* y *ABC*:
$\frac{CD}{BC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{CD}{6} = \frac{6}{10} \Rightarrow CD = 3{,}6$
Por tanto, $DE = AC - 2 \cdot CD = 10 - 2 \cdot 3{,}6 = 2{,}8$
La longitud de la línea quebrada es $2 \cdot BD + DE = 2 \cdot 4{,}8 + 2{,}8 = 12{,}4$

24.(E) El número *aabb* es $1000a + 100a + 10b + b = 1100a + 11b = 11(100a + b)$ y nos dicen que es un cuadrado perfecto, es decir $11(100a + b) = n^2$. Por tanto, el factor $100a + b$ debe ser producto de 11 por un cuadrado y además ser un número de tres cifras de la forma *a*0*b*. Probemos hasta encontrarlo:
11·16 = 176, no vale; 11·25 = 275, no vale; hasta llegar a 11·64 = 704 que sí vale.
Así pues, *a* = 7 y *b* = 4. El número buscado es 7744 (= 88^2), cuyas cifras suman 22.

25.(A) Vamos a calcular ángulos sin prisas y los anotamos en el dibujo.
En el triángulo *APM* conocemos los ángulos *A* y *P* y hallamos *M*.
El triángulo *MBQ* es isósceles y podemos hallar *M* y luego *B* y *Q*.
En el triángulo *PQR* ya conocemos *P* y *Q* y calculamos *R*.
Y así terminamos: $x = 50^{\circ}$.



XIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel IV

1. (B) Escribiendo $\dfrac{n}{20-n}=t^2$ con t entero, llegamos a $n=\dfrac{20t^2}{1+t^2}=20-\dfrac{20}{1+t^2}$. Así pues $1+t^2$ debe ser un divisor de 20 y además ser t entero. Los divisores de 20 son: 1, 2, 4, 5, 10 y 20 y al igualar $1+t^2$ a cada uno de ellos, resulta ser t entero en 1, 2, 5 y 10, lo que da lugar a 4 valores de n.

2. (A) Operando en la expresión dada tenemos que:

$$\frac{x-1-\dfrac{x-1}{x}}{\dfrac{1}{x-1}+1}=\frac{\dfrac{x(x-1)-(x-1)}{x}}{\dfrac{x}{x-1}}=\frac{\dfrac{(x-1)(x-1)}{x}}{\dfrac{x}{x-1}}=\frac{(x-1)^3}{x^2}.$$

3. (C) Con el dato que nos dan llegamos a que el área del triángulo ABC es el triple del área del triángulo APQ y, al ser semejantes, su razón de semejanza es $\sqrt{3}$, por lo que $AP=\dfrac{AB}{\sqrt{3}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.

4. (C) I es verdadera, pues si $x\in Q$, $x^2\in Q$.
II es falsa, como prueba $x = 4$.
III es verdadera, pues al ser $x > 0$, si $x\cdot y\in Q$, como $x\in Q\Rightarrow \dfrac{1}{x}\in Q$, por lo que

$x\cdot y\cdot\dfrac{1}{x}=y\in Q$.

IV es falsa, tomando por ejemplo $x=\sqrt{2},\ y=\sqrt{8}$.

5. (D) Si $2 < a < 3$, entonces $|a-1|=a-1$, $|a-2|=a-2$ y $|a-3|=3-a$, por lo que $|a-1|-|a-2|+|a-3|=(a-1)-(a-2)+(3-a)=4-a$.

6. (E) Si llamamos a_i a los números originales, cada número de los nuevos será:
$b_i = 5(a_i + 20) - 20 = 5(a_i + 16)$ por lo que la nueva suma será:

$$\sum_{i=1}^{i=100} b_i=5\sum_{i=1}^{i=100}(a_i+16)=5\left(\sum_{i=1}^{i=100}a_i+1600\right)=5(1000+1600)=13000.$$

7. (D) Al ser 2009 = 49 · 41 = 7^2 · 41, tenemos:

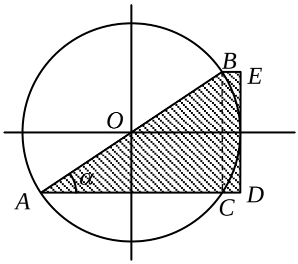
$$T = 2\log_{2009}\left(7^2\right) + \log_{2009}\left(41^2\right) = \log_{2009}\left(7^2 \cdot 41\right)^2 = \log_{2009}(2009)^2 = 2$$

8. (D) Al pasar la gráfica de dicha función polinómica por el punto (0, 0), es $a_0 = 0$, por lo que si a_1 fuese 0, se trataría del polinomio $P(x) = a_{2009}\,x^{2009} + a_{2008}\,x^{2008} + \ldots + a_2\,x^2 = x^2\left(a_{2009}x^{2007} + \ldots + a_2\right)$ que tendría como máximo 2008 ceros reales.

9. (D) Al observar que $7^2 = 49$, parece razonable calcular $\left(7^x + 7^{-x}\right)^2 = 7^{2x} + 7^{-2x} + 2$.
Como $49^x + 49^{-x} = \left(7^2\right)^x + \left(7^2\right)^{-x} = 7^{2x} + 7^{-2x} = 7 \Rightarrow 7^{2x} + 7^{-2x} + 2 = 9$, es decir, $\left(7^x + 7^{-x}\right)^2 = 9$ y como $7^x + 7^{-x} > 0$, resultará ser 3.

10.(A) La función $f(x) = x - \dfrac{x}{|x|}$ la podemos escribir como $f(x) = \begin{cases} x-1 & si \quad x > 0 \\ x+1 & si \quad x < 0 \end{cases}$ que se corresponde con la gráfica A.

11.(A) Dividiendo el trapecio como indica la figura, resulta que al ser AB un diámetro, el área del triángulo ABC será $Área = \dfrac{1}{2} 2\cos\alpha \cdot 2sen\alpha$, y el área del rectángulo $BCDE$ será $(1-\cos\alpha)\cdot 2sen\alpha$, con lo que el área del trapecio será:
$\cos\alpha \cdot 2sen\alpha + (1-\cos\alpha)\cdot 2sen\alpha = 2sen\alpha$



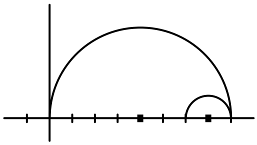
12.(B) Decir que las dos regiones sombreadas tienen igual área es equivalente a decir que el cuadrado tiene igual área que el círculo, así que llamando r y l al radio y al lado, respectivamente, es $\pi r^2 = l^2 \Rightarrow \dfrac{l}{r} = \sqrt{\pi}$.

13.(E) El número *aabb* lo podemos poner como 1100*a* + 11*b*, es decir, 11(100*a* + *b*) y al ser un cuadrado perfecto, es condición necesaria que 100*a* + *b* sea múltiplo de 11. Como 100*a* + *b* es un número de la forma *a*0*b*, deberá ocurrir que *a* + *b* sea múltiplo de 11 y al ser dígitos no ambos cero, la única opción posible es *a*+*b* = 11, por lo que la suma de las cifras de *aabb* es 22.

14.(D) Sabemos que $\log\left(a^5b^{12}\right) - \log\left(a^3b^7\right) = \log\left(a^8b^{15}\right) - \log\left(a^5b^{12}\right)$, es decir, $\log\left(a\ b^{12}\right)^2 = \log\left[\left(a^8b^{15}\right)\cdot\left(a^3b^7\right)\right] \Leftrightarrow a^{10}b^{24} = a^{11}b^{22} \Rightarrow a = b^2$.

Por otra parte, la diferencia de la progresión es $\log\left(a^5b^{12}\right)-\log\left(a^3b^7\right)=\log\left(a^2b^5\right)=\log b^9$ y el primer término, $\log\left(a^3b^7\right)=\log\left(b^{13}\right)$.
Así pues $\log b^n=\log b^{13}+11\log b^9=\log\left(b^{13}\cdot b^{99}\right)=\log b^{112}\Rightarrow n=112$.

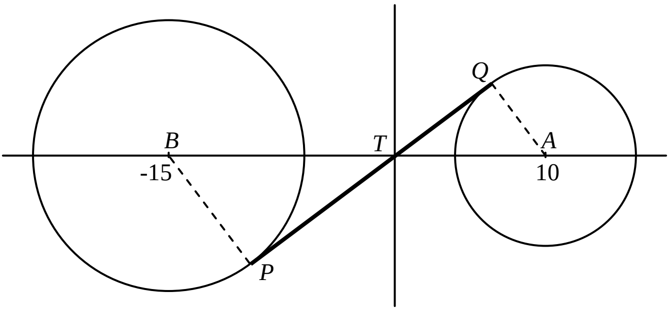
15.(C) Escribiendo $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$ en donde $f_1(x)=\sqrt{8x-x^2}=\sqrt{16-(x-4)^2}$ y $f_2(x)=\sqrt{14x-x^2-48}=\sqrt{1-(x-7)^2}$. Estas funciones son las ecuaciones de las semicircunferencias de ordenada positiva de centros (4, 0) y (7, 0) y radios 4 y 1 respectivamente.



Así pues, la función $f(x)$ con dominio D = [6, 8] representa la diferencia entre las ordenadas de las dos semicircunferencias, siendo el máximo valor de esta diferencia el correspondiente al punto de abscisa x = 6, en el que $f_1(6)=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ y $f_2(6)=0$. Por lo tanto el máximo valor de $f(x)$ es $f(6)=2\sqrt{3}-0=2\sqrt{3}$.

16.(C) Llamando a, c y g al número de horas que emplearían Ana, Cati y Gloria en pintar el mural en solitario, tenemos que:
$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{10}$; $\frac{1}{a}+\frac{1}{g}=\frac{1}{12}$; $\frac{1}{c}+\frac{1}{g}=\frac{1}{15}$. Sumando las tres igualdades se deduce $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{g}=\frac{15}{120}=\frac{1}{8}$ **.** Así pues, trabajando las tres juntas, en una hora pintarían $\frac{1}{8}$ del mural, por lo que entre las tres lo acabarían en 8 horas.

17.(C) Las circunferencias dadas son las de la figura, de radios 6 y 9 y nos piden la longitud del segmento PQ. Como la distancia entre los centros es 25 y los



triángulos *BPT* y *AQT* son semejantes, llamando $AT = x$, tenemos que $\frac{x}{6} = \frac{25 - x}{9}$,

de donde $x = 10$ y al ser dichos triángulos rectángulos, es $TQ = 8$ y $PT = 12$, con lo que la longitud pedida es 20.

18.(E) Sea A el año de nacimiento de Pablo, es $1975 \leq A \leq 2000$ y tenemos que $x^2 - A = x$. Así pues $x(x - 1) = A$ y, por simple observación $x = 45$, con lo que $A = 1980$.

19.(C) Escribamos algunos términos de la sucesión hasta observar un ciclo que se repita: 4, 7, 1, 8, 9, 7, 6, 3, 9, 2, 1, 3, 4, 7, …Así pues se van repitiendo ciclos de longitud 12 en los que su suma es 60.

Para que $S_n > 10\,000$, el número de ciclos debería ser $t \geq \left[\frac{10000}{60}\right] = 166$.

Tenemos entonces que la suma correspondiente a los $12 \cdot 166$ primeros elementos de la sucesión es $60 \cdot 166 = 9960$, con lo que habrá que buscar los siguientes que sumen al menos 41. Los siete primeros del ciclo suman 4+7+1+8+9+7+6 = 42, por lo que el menor valor de n para el que $S_n > 10\,000$ es $12 \cdot 166 + 7 = 1999$.

20. (A) Sabemos que $b = a^2$ y que $a + 3 = 2b$, así que $a + 3 = 2a^2$ y la única solución positiva de esta ecuación es $a = \frac{3}{2}$, de donde $b = \frac{9}{4}$ y la suma pedida es $\frac{15}{4}$.

21.(C) Hallemos en primer lugar la probabilidad de obtener cada uno de los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Llamando p a la probabilidad de obtener 1, nos dicen que la probabilidad de obtener k con k entre 1 y 6 es $k \cdot p$, así que $k \cdot (1+2+3+4+5+6) = 1$,

de donde $k = \frac{1}{21}$. La suma 7 la obtenemos de seis maneras: 1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, y 6+1 y la probabilidad total de obtener alguna de estas parejas es:

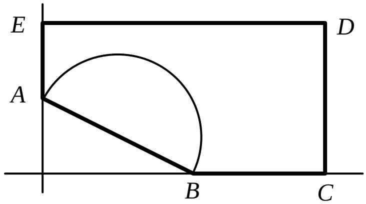
$$(k \cdot 6k + 2k \cdot 5k + 3k \cdot 4k) \cdot 2 = 56k^2 = \frac{56}{21^2} = \frac{8}{63}.$$

22.(A) Llamando x, $3x$ y 15 a los lados, debe ocurrir que $x + 3x > 15$ y que $x + 15 > 3x$, es decir, $\frac{15}{4} < x < \frac{15}{2}$, por lo que los únicos valores enteros de x son 4, 5, 6 y 7, siendo entonces los posibles perímetros del triángulo los números de la forma $4x + 15$ y el mayor posible para ello se da con $x = 7$, es decir, $4 \cdot 7 + 15 = 43$.

23.(C) Nos piden la probabilidad de que $[\log_{10} 4x] = [\log_{10} x]$. Esta igualdad se verifica si y solo si existe algún entero negativo n para el que $n \le \log_{10} x < \log_{10} 4x < n+1$, es decir, $10^n \le x < 4x < 10^{n+1}$, o sea, $10^n \le x < \dfrac{10^{n+1}}{4}$.

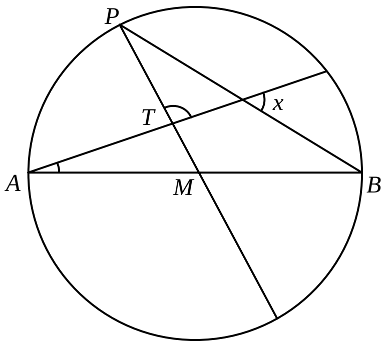
Así pues, en cada intervalo de la forma $\left[10^n, 10^{n+1}\right)$, la condición dada se verificará con probabilidad $p = \dfrac{\dfrac{10^{n+1}}{4} - 10^n}{10^{n+1} - 10^n} = \dfrac{10^n\left(\dfrac{10}{4} - 1\right)}{10^n(10-1)} = \dfrac{\dfrac{3}{2}}{9} = \dfrac{1}{6}$.

Finalmente, como cada número de (0, 1) está en algún intervalo y en uno sólo de la forma $\left[10^n, 10^{n+1}\right)$ y la probabilidad pedida es la misma en cada intervalo, esta será dicha probabilidad $\forall x \in (0,1)$.



24.(C) El pentágono que nos indican es el de la figura y el ángulo $A\hat{P}B$ será obtuso si P es interior al semicírculo de diámetro AB, así que la probabilidad pedida será el cociente entre el área de dicho semicírculo y el área del pentágono, es decir:

$$p = \frac{\dfrac{\pi}{2}\cdot\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2}{(2\pi+1)\cdot 4 - \dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 2} = \frac{\dfrac{\pi}{2}\cdot 5}{8\pi} = \frac{5}{16}.$$



25.(A) Completando la figura con la otra semicircunferencia, observamos que el ángulo $A\hat{M}T = 180º - (19º + 99º) = 62º$,por lo que el ángulo inscrito de vértice P es 31º ya que el arco que abarca es igual al arco AP y su medida es la mitad del ángulo central correspondiente. Por lo tanto el ángulo pedido es $x = 180º - (31º + 99º) = 50º$.

Participantes y relación de ganadores del XI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Y continuamos creciendo. Ya rondamos los 3000 participantes en la 2ª Fase del Concurso de Primavera y como decíamos el año pasado la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid se nos está quedando pequeña y esto, mas que un inconveniente, es un estímulo para continuar con este concurso cuyo objetivo es popularizar el estudio de las Matemáticas y la resolución de problemas.

La distribución por niveles y la relación de los ganadores de cada uno de los cuatro niveles fue la siguiente:

	NIVEL 1		NIVEL 2		NIVEL 3		NIVEL 4	
	5º P	6º P	1º ESO	2º ESO	3º ESO	4º ESO	1º B	2º B
nº de estudiantes	178	488	368	562	333	433	283	150

Los ganadores fueron:

NIVEL I

1. Miguel Barrero Santamaría (6º Primaria) C.E.I.P. Ciudad Pegaso. Madrid
1. Miguel López Rodríguez (6º Primaria) C.E.I.P. Henares. Madrid
1. Joaquín Domínguez de Tena (5º Primaria) C.E.I.P. Ermita del Santo. Madrid

NIVEL II

1. Lorenzo Esteban de la Iglesia (2º ESO) Colegio Fray Luis de León. Madrid
2. Ánder Martínez de la Orden (1º ESO) IES Ramiro de Maeztu. Madrid
3. Arturo Hernández Martín (2º ESO) IES La Serna. Madrid

NIVEL III

1. Ou Zhao Lin (4º ESO) IES Avenida de los Toreros. Madrid
2. Juan Martínez Olondo (3º ESO) Colegio Sta Mª del Pilar. Madrid
3. Moisés Herradón Cueto (4º ESO) Colegio Brains. Madrid

NIVEL IV

1. Gabriel Fürstenheim Milerud (2º Bchto) IES Ramiro de Maeztu. Madrid
2. Diego Izquierdo Arseguet (2º Bchto) Liceo Francés. Madrid
3. Rubén Jiménez Benito (1º Bchto) IES José Hierro. Getafe

IX Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

21 de noviembre de 2009

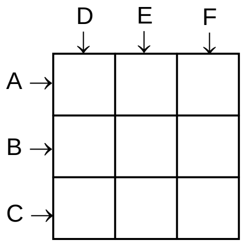
PRUEBA POR EQUIPOS (45 minutos)

1º y 2º de E.S.O.

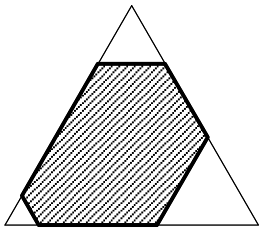
1.- Hallad todos los valores de ***p*** y ***q*** para que el número de cinco cifras ***p* 5 4 3 *q*** sea múltiplo de 36.

2.- Completa el siguiente "crucinúmeros" en el que, como observas, los seis números que tienes que hallar son de tres cifras cada uno.

A: Número primo
B: Número compuesto
C: Cuadrado perfecto
D: Potencia de 5
E: Potencia de 2
F: Potencia de 3



3.- El hexágono de la figura lo hemos construido cortando triangulitos equiláteros en cada una de las esquinas de otro triángulo equilátero. Si los lados de los triangulitos que hemos cortado miden 1, 2 y 3 cm y el cociente entre el perímetro del hexágono y el perímetro del triángulo original es $\frac{5}{7}$, ¿qué fracción del área del triángulo original ocupa el hexágono?



<u>3º y 4º de E.S.O.</u>

1.- Al calcular 23! hemos escrito 2585201□□38884976640000 y las dos cifras que hay entre el 1 y el 3 se nos han borrado. Calcúlalas. (Naturalmente no es válido obtener 23! por cualquier procedimiento)

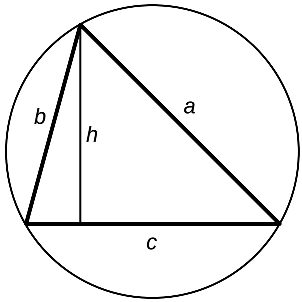
2.- Cuando Esteban elige un número N, le gusta escribir debajo todos sus divisores, exceptuando el 1 y el propio N. Un día observó que el mayor de los divisores que había escrito era igual a 45 veces el menor. ¿Qué números N tienen esa propiedad?

3.- Las longitudes de los lados de un triángulo son 6, 8 y 10 cm. Calcula la distancia entre el centro de la circunferencia inscrita y el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

<u>Bachillerato.</u>

1.- En una bolsa hay bolas azules, rojas y amarillas. El 10 % de las que hay son azules y el 25 % son rojas. Otra bolsa, que contiene solamente bolas rojas y azules, el triple de bolas rojas que de azules, es vaciada en la bolsa anterior. Si ahora hay un 16 % de bolas azules, ¿qué porcentaje de las bolas que hay ahora son rojas?

2.- Demuestra que en cualquier triángulo se verifica que el producto de las longitudes de dos lados cualesquiera es igual al producto del diámetro de la circunferencia circunscrita por la altura relativa al tercer lado.
Como aplicación, calcula el radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo cuyos lados miden 104, 112 y 120 cm.

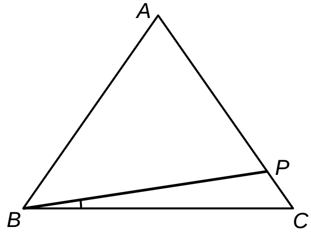


3.- En una reunión hay 5 familias, cada una con sus hijos. Demuestra que siempre se pueden elegir 3 de esas 5 familias de manera que el número total de hijos de las familias elegidas sea múltiplo de 3.

PRUEBA INDIVIDUAL (90 minutos)

1º y 2º de E.S.O.

1. En la figura que ves, el triángulo *ABC* es isósceles con *AB* = *AC*. Tomamos un punto *P* en el lado *AC* de manera que los ángulos $B\hat{P}C$ y $A\hat{B}P$ son de 120º y 50º respectivamente, ¿cuánto mide el ángulo $P\hat{B}C$?

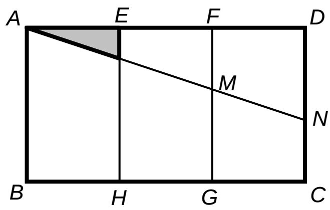


2. Completa el cuadrado de la figura, mágico respecto del producto, es decir, el producto de los números de cada una de las tres filas, de cada una de las tres columnas y de cada una de las dos diagonales es el mismo.

	1	
	4	$\frac{1}{8}$

3. A Isa le van a regalar un teléfono móvil siempre que sea capaz de averiguar el PIN. Le dicen que es un número de cuatro cifras, cuadrado perfecto y tal que da de resto 1 al dividirlo por cualquier número de una cifra mayor que 1.
¿Qué número de PIN tiene que decir Isa para conseguir el móvil?

4. El rectángulo *ABCD* de la figura está dividido en tres regiones iguales. Si el segmento *MN* divide al rectángulo *CDFG* en dos trozos de igual área, ¿qué fracción del área del rectángulo *ABCD* está ocupada por el triángulo sombreado?



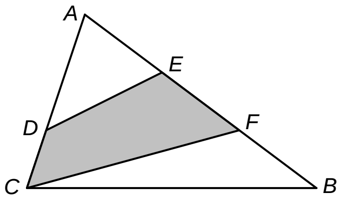
5. En una lista de enteros positivos, cada uno es mayor que el anterior y, a partir del tercero, cada término es la suma de los dos anteriores. Si el octavo término de la lista es 390, ¿cuál es el noveno?

<u>3º y 4º de E.S.O.</u>

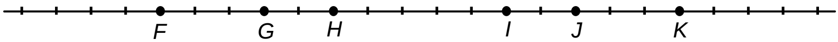
1.- Colocamos cinco números en orden creciente de manera que a medida que avanzamos en la lista, las diferencias entre cada uno y el anterior se van doblando. Si la media de los cinco supera en 11 al número del centro y la suma del segundo y el cuarto es igual al mayor, ¿cuál es el quinto número?

2.- En el rectángulo *ABCD*, la longitud del lado *AB* es $\sqrt{2}$ y la del lado *AD* es 1. La circunferencia con centro en *B* y que pasa por *C* corta a *AB* en el punto *X*. ¿Cuál es la medida del ángulo $A\hat{D}X$?

3.- En la figura que te mostramos, el área del triángulo *ABC* es 9. *DC* es un tercio de *AC* y los puntos *E* y *F* dividen a *AB* en tres partes iguales. ¿Cuál es el área del cuadrilátero *CDEF* sombreado?



4.- En la recta adjunta, con una unidad de separación entre cada dos marcas consecutivas, hemos señalado seis puntos que representan a seis enteros positivos *F, G, H, I, J* y *K* de los que que te decimos que al menos dos de ellos son divisibles entre 3 y al menos dos de ellos son divisibles entre 5. ¿Cuáles son divisibles entre 15?



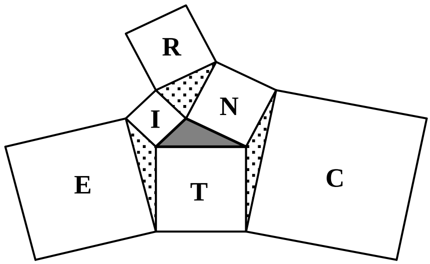
5.- *A* y *B* se mueven uniformemente a lo largo de dos caminos rectilíneos que se cortan perpendicularmente en *O.* Cuando *A* llega a *O,* a *B* le faltan 500 metros para llegar a *O*. Dos minutos más tarde, ambos están a la misma distancia de *O* y en 8 minutos más, vuelven a estar equidistantes de *O*. ¿Cuál es el cociente entre la velocidad de *A* y la de *B.*

<u>Bachillerato</u>

1. Un jardín tiene forma de triángulo rectángulo con lados de longitud 30, 40 y 50 metros. Desde el vértice correspondiente al ángulo recto parte una valla que llega a un punto de la hipotenusa dividiendo el jardín en dos partes del mismo perímetro. ¿Cuál es la longitud de la valla?

2. Los enteros *a, b* y *c* son todos mayores que 20. Dos de ellos tienen exactamente 3 divisores y el otro tiene un número impar de divisores. Si $a + b = c$, calcula el menor valor posible de *c*.

3. Tomando cada lado del triángulo sombreado de la figura, hemos construido los cuadrados *I, N, T* exteriores al triángulo. Uniendo, como indica la figura, los vértices de estos cuadrados, hemos construido los triángulos punteados y, finalmente, tomando los nuevos lados de éstos triángulos, hemos construido los cuadrados exteriores *E, R,* y *C*. Si la suma de las áreas de estos tres cuadrados *E, R* y *C* es *"a"* y la suma de las áreas de los cuadrados *I, N,* y *T* es *"b"*, calcula el cociente $\frac{a}{b}$.

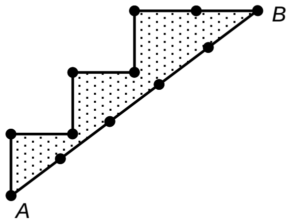


4. Las rectas $y = -x - 1$, $y = 2x - 1$, $y = k$ con *k* entero positivo, determinan un triángulo. Determina el mayor valor de *k* para el que el área de dicho triángulo es menor que 2009.

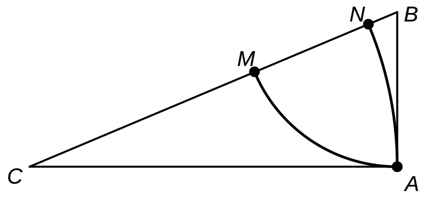
5. Encuentra todos los números de tres cifras, no capicúas, cuadrados perfectos y tales que el valor absoluto de la diferencia entre ellos y el número escrito al revés, es múltiplo de 8.

PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

1º y 2º de ESO.-



1A.- Con 12 segmentos iguales de 1 cm de longitud, formamos el polígono de 7 lados de la figura, en el que todos los ángulos, excepto los de vértices *A* y *B*, son rectos. Calcula, en cm^2, el área del polígono.
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

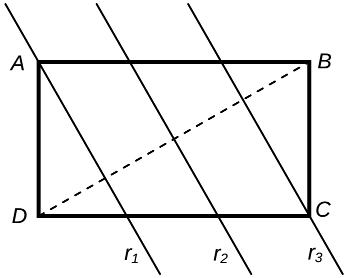


1B.- Sea "T" la respuesta del problema 2B
En el triángulo rectángulo *ABC* de catetos "T" y 12 cm, trazamos con centro en *B* y *C* dos arcos que pasan por el vértice *A* correspondiente al ángulo recto. Estos arcos cortan a la hipotenusa en dos puntos *M* y *N*. ¿Cuál es la longitud del segmento *MN*?
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1C.- Sea "T" la respuesta del problema 2C.
La suma de "T" números impares consecutivos y positivos es un cuadrado perfecto menor que 1000. Si ordenamos, de menor a mayor, esos números impares, ¿cuál estaría en la posición central?
(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

<u>3º y 4º de ESO.-</u>

2A.- Sea "T" la respuesta del problema 3A.
En el rectángulo *ABCD* de la figura las rectas r_1, r_2 y r_3, perpendiculares a la diagonal *BD*, dividen a ésta en cuatro partes iguales. Las rectas r_1 y r_3 pasan por los vértices *A* y *C*, respectivamente. Si la diagonal del rectángulo es "T", calcula su área.
(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)



2B.- En una granja hay vacas, cerdos y patos. El producto del número total de cuernos por el de patas y por el de alas es 520. Si el número de cerdos es menor que el de patos, ¿cuántos animales hay en la granja?
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

2C.- Sea "T" la respuesta del problema 3C.
En un concurso de "T" problemas, cada problema se puntuó con un número entero de 0 a 5. La moda de mis puntuaciones en los problemas ha sido 1 punto más alta que la mediana, que a su vez ha sido 1 punto más alta que la media. Halla la suma de las puntuaciones que he obtenido en los problemas.
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

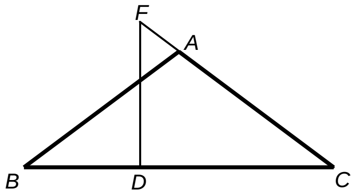
Bachillerato.-

3A.- Sea "T" la respuesta del problema 1A.

¿Cuál es el menor valor posible para $\left|\frac{y}{x}\right|$ donde el par (x, y) corresponde a las coordenadas de los puntos de una circunferencia de centro $C(–3, 5)$ y radio "T".

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

3B.- Sea "T" la respuesta del problema 1B.
En el triángulo isósceles de la figura, $AC = AB =$ "T". Se toma en BC un punto D de tal forma que $DC = AC$. La perpendicular por D a BC corta a la prolongación de CA en un punto F tal que el triángulo CFB es rectángulo en F. ¿Cuál es la longitud de FC?



(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

3C.- Halla la única solución de la ecuación $\sqrt{31-\sqrt{31+x}} = x$

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

CENTROS GANADORES

1. Colegio Alemán de Madrid
2. IES Ramiro de Maeztu
3. Liceo Francés

ESTUDIANTES GANADORES

NIVEL I (1º, 2º ESO)

1. Guillermo Pascual Pérez (Colegio Fray Luis de León)
1. Miguel Barrero Santamaría (IES Alameda de Osuna)

NIVEL II (3º, 4º ESO)

1. Lorenzo Esteban de la Iglesia (Colegio Fray Luis de León)
2. Almudena Carrera (Colegio Ntra. Sra. de las Maravillas)
2. Javier Pliego García (IES San Juan Bautista)

NIVEL III (Bachillerato)

1. Pablo Boixeda (Colegio Alemán de Madrid)
2. Moisés Herradón Cueto (IES San Juan Bautista)

RELACIÓN DE LOS 10 CENTROS CON MAYOR PUNTUACIÓN

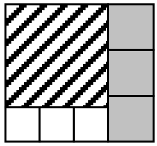
1. Colegio Alemán de Madrid ……………….. 52,1
2. IES Ramiro de Maeztu-A………………….. 51,67
3. Liceo Francés……………………………… 50,4
4. Colegio Fray Luis de León-A……………... 47,97
5. IES San Juan Bautista-A………………….. 42,8
6. Colegio Ntra. Sra. de las Maravillas………. 41,9
7. Colegio San José del Parque-A..…………. 39,3
8. Colegio Brains-B…………………………. 30,5
9. Colegio Retamar………………………….. 29,77
10. IES Alameda de Osuna-A…………………. 29,4
10. Colegio Brains-A………………………….. 29,4

XXVII CONCURSO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
"SOCIEDAD PUIG ADAM"
Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 13 de junio de 2009

NIVEL I (3º de E.S.O.)

Problema 1.

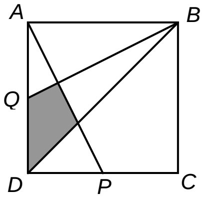
Los tres apartados de este problema están encadenados. La respuesta de cada uno es un dato para el siguiente.



a) El rectángulo que se muestra en la figura está dividido en siete cuadrados. El lado de cada cuadrado gris mide 8 cm. ¿Cuántos centímetros mide el lado del cuadrado rayado?

b) Sea R la respuesta del apartado anterior.
Cuando dividimos los números **272 758** y **273 437** entre el número N, obtenemos como restos $R - 5$ y $R - 1$, respectivamente. Calcula el número N.

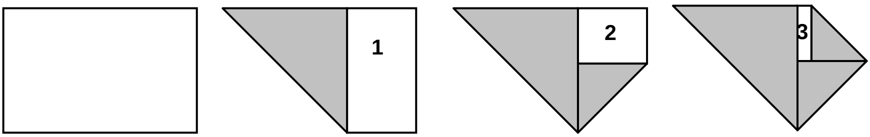
c) Si el área del cuadrilátero sombreado de la figura viene dado por el número N del apartado anterior, obtén el área del cuadrado $ABCD$, sabiendo que P y Q son puntos medios de lados del cuadrado.



d)

Problema 2.

Una hoja rectangular de papel, algo más alargada que una de las habituales DIN A-4, blanca por un lado y gris por el otro, fue doblada tres veces como indica la figura.



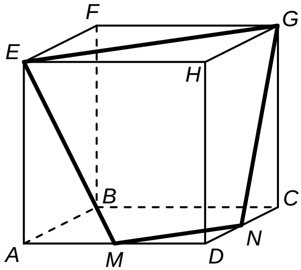
El perímetro del rectángulo 1, que quedó blanco después del primer doblez, mide 20 cm más que el perímetro del rectángulo 2 que quedó blanco después del segundo doblez, y éste, a su vez, es 16 cm mayor que el perímetro del rectángulo 3 que quedó blanco después del tercer doblez. Determina el área de la hoja.

Problema 3.

Algunos de los animales que hay en Madrid están realmente locos. El 10 % de los gatos se creen que son perros y el 10 % de los perros se creen que son gatos. Todos los demás, gatos y perros, son perfectamente normales.
Un día hicimos un test a todos los perros y gatos de Madrid y resultó que el 20 % del total se creían que eran gatos. ¿Qué porcentaje del total de gatos y perros de Madrid son realmente gatos?

Problema 4.

Los vértices de un cubo de 2 cm de arista son *A, B, C, D, E, F, G* y *H* como se indica en la figura. Si *M* y *N* son los puntos medios de las aristas *AD* y *DC* respectivamente, calcula el área del cuadrilátero *MEGN*.



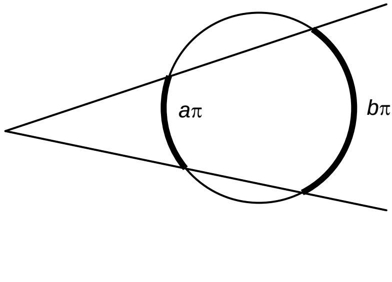
<u>NIVEL II</u> (4º de E.S.O.)

Problema 1.

Los tres apartados de este problema están encadenados. La respuesta de cada uno es un dato para el siguiente.

a) Al sumar todos los números de dos cifras, Javier creyó que había obtenido un capicúa pero, desafortunadamente, luego comprobó que había olvidado uno de los sumandos. ¿Qué número de dos cifras olvidó sumar?

b) Sean ***a*** y ***b*** las cifras del número que olvidó Javier.
Desde un punto exterior a una circunferencia trazamos dos secantes a la misma, que forman entre sí un ángulo de 30º y que determinan en dicha circunferencia arcos de longitudes $\boldsymbol{a}\pi$ y $\boldsymbol{b}\pi$ como indica la figura. Calcula el radio de la circunferencia.



c) Sea R la respuesta del apartado b).
Las dos bases y uno de los otros lados de un trapecio miden respectivamente, R, $4R$ y $R - 1$. Si una de las diagonales mide también $4R$, calcula la longitud de la otra diagonal.

Problema 2.

Encuentra todas las parejas de números reales (a, b) para las que se verifique que hay exactamente tres números iguales entre los cuatro siguientes: $a \cdot b,\ \frac{a}{b},\ a + b\ \ y\ \ a - b.$

Problema 3.

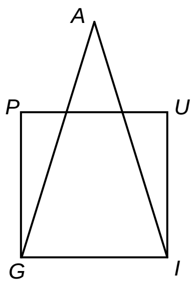
Considera tres enteros positivos consecutivos. Si dejas al pequeño como está, le sumas 10 al mediano y un número primo al mayor, resulta que los tres números que obtienes están en progresión geométrica. Determina razonadamente el número primo que sumaste al mayor.

Problema 4.

Demuestra que cualquier triángulo acutángulo cuyas alturas miden todas menos de 3 cm, su área debe ser menor que $3\sqrt{3}$ cm^2.

NIVEL III (1º de Bachillerato)

Problema 1.



Los tres apartados de este problema están encadenados. La respuesta de cada uno es un dato para el siguiente.

a) El cuadrado *PUIG* de la figura tiene de lado 10 y el triángulo isósceles *AIG* tiene en común con el cuadrado un trapecio de área 80. Calcula la altura de dicho triángulo sobre el lado *GI*.

b) Sea h dicha altura.
En la curva de ecuación $y^2 + 2hy + 2009 = x^2$ hay dos puntos cuyas coordenadas son números enteros positivos. Obtén la suma S de sus abscisas.

c) Sea p el mayor primo que divide a S. El número $p!$ acaba en varios ceros. Si N es el número obtenido al borrar todos esos ceros, calcula el mayor entero k para el que 12^k es un divisor de N.

Problema 2.

Se tienen tres cajas, en cada una de las cuales hay al menos una bola blanca y al menos una bola negra. La probabilidad de que sacada al azar una bola de cada caja se verifique que no son las tres blancas es de $\frac{1}{2}$.

Calcula razonadamente la composición de cada caja, sabiendo que el total de bolas es el menor posible para que se cumpla el enunciado.

Problema 3.

En la parábola $y = x^2$ consideramos los puntos $A(a, a^2), B(b, b^2), C(c, c^2), D(d, d^2)$ cuyas coordenadas son números enteros.

a) Sea k el área del triángulo ABC. Demuestra que, para cualquier elección de a, b y c con las condiciones dadas, el número k viene dado por $k = \frac{1}{2}\left|(a-b)\cdot(b-c)\cdot(c-a)\right|$.

b) Demuestra que k es entero.

c) Prueba que si k es primo, entonces $k = 3$.

d) Demuestra que k nunca es el cuadrado de un primo.

e) Prueba que el área del cuadrilátero $ABCD$ no puede ser nunca 8.

Nota: Puedes utilizar el resultado de cada apartado para hacer los siguientes aunque no hubieras conseguido demostrarlo.

Problema 4.

Calcula tres números reales en progresión geométrica, sabiendo que si al tercero le restamos 4, los nuevos números están en progresión aritmética y que si en estos nuevos restamos 1 tanto del segundo como del tercero, los nuevos números vuelven a estar en progresión geométrica.

XLV OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

2ª FASE LOCAL-COMUNIDAD DE MADRID

Primera sesión, viernes 23 de enero de 2009

No está permitido el uso de calculadoras. Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.

Problema 1

Dado un triángulo acutángulo ABC, determinar para qué puntos de su interior se verifican las siguientes desigualdades:

$$1 \leq \frac{\angle APB}{\angle ACB} \leq 2, \qquad 1 \leq \frac{\angle BPC}{\angle BAC} \leq 2 \quad \text{y} \quad 1 \leq \frac{\angle CPA}{\angle CBA} \leq 2.$$

Problema 2

La igualdad 2008 = 1111 + 444 + 222 + 99 + 77 + 55 es un ejemplo de descomposición del número 2008 como suma de números distintos de más de una cifra, cuya representación (en el sistema decimal) utiliza un sólo dígito.

i) Encontrar una descomposición de este tipo para el número 2009.

ii) Determinar para el número 2009 todas las posibles descomposiciones de este tipo que utilizan el menor número posible de sumandos (el orden de los sumandos no se tiene en cuenta).

Problema 3

Se tienen en el plano $3n$ puntos: n de color blanco, n de color azul y n de color negro. Cada uno de los puntos está unido con puntos de color distinto al suyo mediante $n + 1$ segmentos exactamente. Probar que hay, al menos, un triángulo formado por vértices de distinto color.

Segunda sesión, sábado 24 de enero de 2009

Problema 4

Probar que para todo entero positivo n, $n^{19} - n^7$ es divisible por 30.

Problema 5

Determinar el mayor número de planos en el espacio tridimensional para los que existen seis puntos con las siguientes condiciones:
i) Cada plano contiene al menos cuatro de los puntos.
ii) Cuatro puntos cualesquiera no pertenecen a una misma recta.

Problema 6

Los puntos de una retícula $m \times n$ pueden ser de color blanco o negro. Una retícula se dice que está equilibrada si para cualquier punto P de ella, la fila y columna que pasan por este punto P tienen el mismo número de puntos de igual color que P. Determinar todos los pares de enteros positivos (m, n) para los que existe una retícula equilibrada.

XLVI OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA
Fase local-Comunidad de Madrid

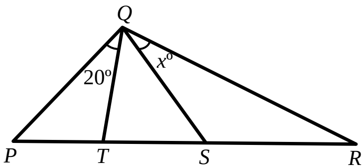
Primera sesión, viernes 27 de noviembre de 2009

- **En la hoja de respuestas, escribe la letra que corresponde a la opción que creas correcta en cada pregunta. Si decides cambiarla, táchala con una cruz y escribe otra.**
- **Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos, cada respuesta en blanco 2 puntos y cada respuesta errónea, 0 puntos.**
- **No están permitidas calculadoras ni ningún instrumento de medida.**
- **Tiempo: 3 horas.**

1 En una lista de siete números, cualesquiera cuatro adyacentes suman 16 y cualesquiera cinco adyacentes suman 19. ¿Cuál es la suma de esos siete números?

A) 21 **B)** 25 **C)** 28 **D)** 32 **E)** 35

2 En el dibujo de la derecha, que no está hecho a escala, se verifica que $PT = QT = TS$, $QS = SR$ y el ángulo $P\hat{Q}T = 20^{\circ}$. ¿Cuál es el valor de x?



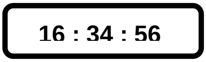
A) 20 **B)** 25 **C)** 30 **D)** 35 **E)** 40

3 En este cuadrado mágico, el producto de los números de cada fila, columna y diagonal es el mismo. ¿Cuál es valor de $r+s$?

p	q	r
s	1	t
u	4	1/8

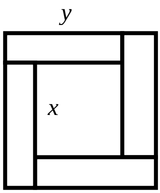
A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{9}{16}$ **C)** $\frac{5}{4}$ **D)** $\frac{33}{16}$
E) 24

4 En un reloj digital, como el del dibujo, en el que aparecen las horas, minutos y segundos, ¿cuántas veces cambian los seis dígitos simultáneamente en 24 horas?



A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

5 El diagrama muestra un cuadrado de lado *y* que se ha dividido en un cuadrado de lado *x* y cuatro rectángulos iguales. ¿Cuál es la longitud del lado largo del rectángulo?



A) $\frac{y-x}{2}$ **B)** $\frac{y+2x}{3}$ **C)** $y-x$ **D)** $\frac{2y}{3}$

E) $\frac{y+x}{2}$

6 En el diagrama que ves, podemos leer dos números de tres cifras cada uno: leyendo de izquierda a derecha y leyendo de arriba a abajo. Hay un único valor del dígito *d* para el que ambos números son primos. ¿Cuál es este valor?

	5	
1	d	3
	7	

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

7 Una lista de diez números está formada por 0, 1, 2, 3, 4, cada uno de ellos dos veces. Los ceros están juntos; los unos separados por 1 número; los doses separados por 2 números; los treses separados por 3 números; y los cuatros separados por 4 números. Si la lista empieza por 3, 4, …, ¿qué número aparece en último lugar?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

8 Las páginas de un libro están numeradas 1, 2, 3, … Si se han empleado 852 dígitos para numerarlas, ¿cuál es el número de la última página?

A) 215 **B)** 314 **C)** 320 **D)** 329 **E)** 422

9 ¿Para cuántos valores de *n* se verifica que $\frac{n}{2}$ y $2n$ son números de tres cifras?

A) 0 **B)** 150 **C)** 200 **D)** 300 **E)** 500

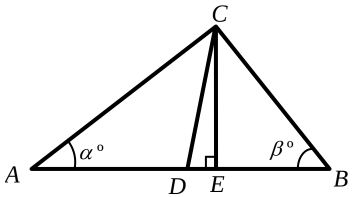
10 Si la suma de tres números primos diferentes es 40, ¿cuál es la diferencia entre los dos mayores?

A) 8 **B)** 12 **C)** 16 **D)** 20 **E)** 24

11 En un festival de Navidad, la entrada infantil cuesta 4,20 € y la de adulto 7,70 €. Un grupo de niños y adultos fue al festival y pagaron entre todos *c* €. De los siguientes números, ¿cuál de ellos es un posible valor para *c*?

A) 91 **B)** 92 **C)** 93 **D)** 94 **E)** 95

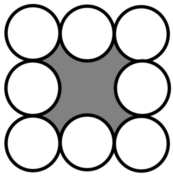
12 En el triángulo *ABC* de la figura, se verifica que $B\hat{A}C = \alpha^{\circ}$ y $A\hat{B}C = \beta^{\circ}$, donde $\alpha < \beta$. Si *CD* es la bisectriz del ángulo $A\hat{C}B$ y *CE* es perpendicular a *AB*, ¿cuál es el valor del ángulo $D\hat{C}E$?



A) $\frac{180-(\alpha+\beta)}{2}$ **B)** $\frac{\beta-\alpha}{2}$

C) $\frac{\alpha+2\beta}{2}$ **D)** $\frac{360-\alpha-2\beta}{2}$ **E)** $\frac{\alpha+\beta}{2}$

13 Con centro en los vértices y puntos medios de los lados de un cuadrado de perímetro 8, hemos construido la región sombreada que observas, en la que todas las circunferencias son iguales. ¿Cuál es el perímetro de dicha región?



A) π **B)** 2π **C)** 8 **D)** 3π **E)** 4π

14 ¿Cuántos conjuntos de tres primos distintos tienen la propiedad de que el producto de los tres es cinco veces su suma?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 4 **E)** 7

15 *F* es el conjunto de todos los números de cinco cifras en los que el producto de éstas es 15. *T* es el conjunto de todos los números de cinco cifras en los que el producto de éstas es 25.
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

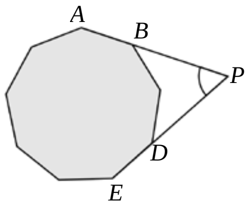
A) El conjunto *F* tiene el doble de elementos que el conjunto *T*.
B) El conjunto *F* tiene la mitad de elementos que el conjunto *T*.
C) El conjunto *F* tiene 5/3 de los elementos del conjunto *T*.
D) El conjunto *F* tiene 3/5 de los elementos del conjunto *T*.
E) Ambos conjuntos tienen el mismo número de elementos.

A) **B)** **C)** **D)** **E)**

16 En una clase el número de chicas es más del 45% pero menos del 50% del total. ¿Cuál es el menor número posible de chicas en esa clase?

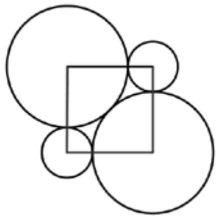
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

17 La figura muestra un polígono regular de nueve lados en el que hemos prolongado los lados AB y DE hasta que se junten en el punto P. ¿Cuál es el valor del ángulo $B\hat{P}D$?



A) 40º **B)** 45º **C)** 50º **D)** 55º **E)** 60º

18 El dibujo muestra cuatro circunferencias, iguales dos a dos, con centros en los vértices de un cuadrado y tangentes entre sí. Si el radio de las circunferencias pequeñas es 1 cm, ¿cuál es, en cm, el radio de las grandes?



A) $1+\sqrt{2}$ **B)** $\sqrt{5}$ **C)** $\sqrt{2}$ **D)** $\frac{5}{2}$ **E)** $\frac{4\pi}{3}$

19 ¿Cuántos números hay, de 10 cifras cada uno, formados solamente por unos, doses y treses y tal que cualquier par de cifras adyacentes difieran en 1?

A) 16 **B)** 32 **C)** 64 **D)** 80 **E)** 100

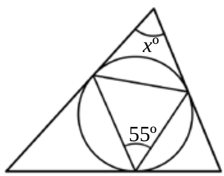
20 ¿Cuál es el máximo número de cifras que puede tener un número si cualquier número formado por dos cifras consecutivas es un cuadrado perfecto?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 10

21 En un triángulo, dos de sus medianas, de longitudes 8 y 12 cm, son perpendiculares. ¿Cuál es, en cm^2, el área de dicho triángulo?

A) 24 **B)** 32 **C)** 48 **D)** 64 **E)** 96

22 En la figura observas una circunferencia inscrita en un triángulo y circunscrita en otro. ¿Cuál es el valor de x?



A) 55 **B)** 60 **C)** 65 **D)** 70 **E)** 75

23 En una circunferencia de centro O marco los puntos A y B siendo el ángulo $A\hat{O}B = 60º$. Una segunda circunferencia es tangente interior a aquella y además tangente a los segmentos OA y OB. ¿Cuál es el cociente entre las áreas de los círculos pequeño y grande?

A) $\frac{1}{16}$ **B)** $\frac{1}{9}$ **C)** $\frac{1}{8}$ **D)** $\frac{1}{6}$ **E)** $\frac{1}{4}$

24 ¿Cuál es el área de la región formada por los puntos (x, y) tales que $|3x-18|+|2y+7|\le 3$?

A) 3 **B)** $\frac{7}{2}$ **C)** 4 **D)** $\frac{9}{2}$ **E)** 5

25 ¿Cuál es el coeficiente de x^{28} en el producto de polinomios

$$\left(1+x+x^2+...+x^{27}\right)\cdot\left(1+x+x^2+...+x^{14}\right)^2 ?$$

A) 195 **B)** 196 **C)** 224 **D)** 378 **E)** 405

26 Colocamos alineadas y al azar tres bolas rojas, dos blancas y una azul. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya dos del mismo color juntas?

A) $\frac{1}{12}$ **B)** $\frac{1}{10}$ **C)** $\frac{1}{6}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** $\frac{1}{2}$

27 En el interior de un rectángulo de dimensiones a y b, enteros, con $a > b$, coloreamos otro rectángulo de lados paralelos a los de aquel y que deja un pasillo sin colorear de anchura uniforme de 1 cm. Si el rectángulo coloreado tiene la mitad de área del rectángulo original, ¿cuántas posibilidades hay para el par ordenado (a, b)?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

28 En el cuadrilátero $ABCD$ con $AB = BC = CD$, los ángulos en B y en C miden 70º y 170º respectivamente. ¿Cuál es la medida, en grados, del ángulo en A?

A) 75 **B)** 80 **C)** 85 **D)** 90 **E)** 95

29 Una encuesta demuestra que el 70% de los encuestados aprueban una determinada medida del gobierno. En tres ocasiones, elegimos un encuestado al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que solo en una de estas tres ocasiones el encuestado sea de los que aprueban la medida del gobierno?

A) 0,063 **B)** 0,189 **C)** 0,233 **D)** 0,333 **E)** 0,441

30 El cuadrado $ABCD$, de área 36, verifica que el lado AB es paralelo al eje horizontal. Si los vértices A, B y C están respectivamente en las gráficas de $y=\log_a x$, $y=2\log_a x$ e $y=3\log_a x$, ¿cuál es el valor de a?

A) $\sqrt[6]{3}$ **B)** $\sqrt{3}$ **C)** $\sqrt[3]{6}$ **D)** $\sqrt{6}$ **E)** 6

XVª OLIMPIADA de MAYO
Primer Nivel
Mayo de 2009

Olimpíada de Mayo
Competencia Juvenil Iberoamericana de Matemática

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

PROBLEMA 1

A cada número natural de dos cifras se le asigna un dígito de la siguiente manera: Se multiplican sus cifras. Si el resultado es un dígito, éste es el dígito asignado. Si el resultado es un número de dos cifras se multiplican estas dos cifras, y si el resultado es un dígito, éste es el dígito asignado. En caso contrario, se repite la operación. Por ejemplo el dígito asignado a 32 es el 6 pues $3 \cdot 2 = 6$; el dígito asignado a 93 es el 4 pues $9 \cdot 3 = 27$, $2 \cdot 7 = 14$, $1 \cdot 4 = 4$.
Halla todos los números de dos cifras a los que se les asigna el 8.

PROBLEMA 2

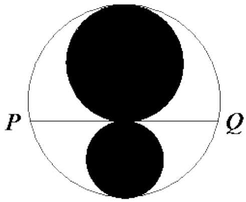
Encuentra números primos p, q, r para los cuales sea $p + q^2 + r^3 = 200$. Da todas las posibilidades.
Recuerda que el número 1 no es primo.

PROBLEMA 3

En la pizarra están escritos todos los números enteros del 1 al 2008 inclusive. Se borran dos números y se escribe su diferencia. Por ejemplo, si se borran 5 y 241, se escribe 236. Así se continúa, borrando dos números y escribiendo su diferencia, hasta que sólo queda un número. Determina si el número que queda al final puede ser 2008. ¿Y 2007? En cada caso, si la respuesta es afirmativa indica una secuencia con ese número final, y si es negativa, explica por qué.
Nota: el 1 no es primo.

PROBLEMA 4

Tres circunferencias son tangentes entre sí, tal y como se muestra en la figura.
La región del círculo exterior que no está cubierta por los dos círculos interiores tiene área igual a 2π.
Determina la longitud del segmento PQ.



PROBLEMA 5

Por las líneas de una cuadrícula formada por 55 líneas horizontales y 45 líneas verticales camina una hormiga. Se quiere pintar algunos tramos de líneas para que la hormiga pueda ir de cualquier cruce hasta cualquier otro cruce, caminando exclusivamente por tramos pintados. Si la distancia entre líneas consecutivas es de 10 cm, ¿cuál es la menor cantidad posible de centímetros que se deberán pintar?

XVª OLIMPIADA de MAYO
Segundo Nivel
Mayo de 2009

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

PROBLEMA 1

Inicialmente en el pizarrón está escrito el número 1. En cada paso, se borra el número del pizarrón y se escribe otro, que se obtiene aplicando una cualquiera de las siguientes operaciones:

- Operación A: Multiplicar el número del pizarrón por $\frac{1}{2}$.
- Operación B: Restarle al 1 el número del pizarrón.

Por ejemplo, si en el pizarrón está el número $\frac{3}{8}$ se lo puede reemplazar por $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}=\frac{3}{16}$ o por $1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$.

Da una secuencia de pasos al cabo de los cuales el número del pizarrón sea $\frac{2009}{2^{2009}}$.

PROBLEMA 2

Sea *ABCD* un cuadrilátero convexo tal que el triángulo *ABD* es equilátero y el triángulo *BCD* es isósceles, con $\hat{C}=90^{\circ}$. Si *E* es el punto medio del lado *AD*, calcula la medida del ángulo $C\hat{E}D$.

PROBLEMA 3

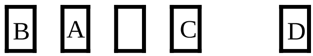
En la siguiente suma: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6, si suprimimos los dos primeros signos “+” obtenemos la nueva suma 123 + 4 + 5 + 6 = 138. Suprimiendo tres signos “+” podemos obtener 1 + 23 + 456 = 480.
Consideremos ahora la suma 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13, en la que se van a suprimir algunos signos “+”. ¿Cuáles son los tres menores múltiplos de 100 que podemos obtener de esta forma?

PROBLEMA 4

Cada casilla de un tablero de 5×5 se pinta de rojo o de azul, de tal forma que se cumple la siguiente condición: “para cualesquiera dos filas y dos columnas, de las 4 casillas que están en sus intersecciones, hay 4, 2 ó 0 pintadas de rojo.” ¿De cuántas formas se puede pintar el tablero?

PROBLEMA 5

Un solitario se inicia con 25 cartas en fila. Algunas están boca arriba, y otras boca abajo. En cada movimiento se debe elegir una carta que esté boca arriba, retirarla, y dar vuelta las cartas vecinas a la que se retiró (si las hay).
El solitario se gana cuando se logra, repitiendo este movimiento, retirar las 25 cartas de la mesa.
Si inicialmente hay *n* cartas boca arriba, halla todos los valores de *n* para los cuales se puede ganar el solitario. Explica cómo se gana, independientemente de la ubicación inicial de las cartas boca arriba, y justifica por qué es imposible ganar para los otros valores de *n*.
Dos cartas son vecinas cuando una está inmediatamente al lado de otra, a la derecha o a la izquierda.
Por ejemplo: la carta marcada con A tiene dos cartas vecinas y la marcada con B una sola. Después de retirar una carta queda un hueco, de modo que la marcada con C tiene únicamente una carta vecina, y la marcada con D no tiene ninguna.



Relación de ganadores en la "XV OLIMPIADA DE MAYO – 2009

PRIMER NIVEL

	Apellidos y nombre	Premio
1	Barrero Santamaría, Miguel	ORO
2	Navajas Díez, Juan Manuel	PLATA
3	Gutiérrez Cuenca, Guillermo	PLATA
4	Didulca Díaz, Alex	BRONCE
5	Navarro Hernández, Adrián	BRONCE
6	Isern Hacher, Marc	BRONCE
7	Cobos del Álamo, Javier	BRONCE
8	Joaquín Domínguez de Tena	BRONCE
9	Alonso Lorenzo, Izar	MENCIÓN
10	Barrueco García, Andrés	MENCIÓN

SEGUNDO NIVEL

1	Esteban de la Iglesia, Lorenzo	PLATA
2	García Herrero, Víctor	PLATA
3	Sardinero Meirás, Paula	PLATA
4	González Molina, Raúl	BRONCE
5	Espósito Bacigalupo, Federico	BRONCE
6	Benito Gorrón, Diego de	BRONCE
7	Rebollo Múgica, Julen	BRONCE
8	Mendizábal Roche, Jaime	BRONCE
9	Peña Castillo, Diego	MENCIÓN
10	Pliego García, Javier	MENCIÓN

Dirección General de Mejora de la Calidad de la Enseñanza
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN
Comunidad de Madrid

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Consejo Social de la UCM

sm

ANAYA

El Corte Inglés

EDUCAMADRID

XV concurso de primavera

MATEMÁTICAS 2011

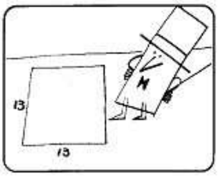
Comunidad de Madrid

Comité organizador del Concurso de Primavera

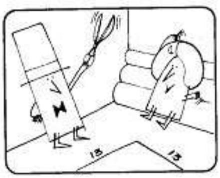
Juan Jesús Donaire Moreno
Jesús García Gual
Joaquín Hernández Gómez
Alfredo Martínez Sanz
Pilar Ruiz Cervigón
Merche Sánchez Benito
Javier Soler Areta
Luis Ferrero de Pablo
María Gaspar Alonso-Vega
Francisco López Álvarez
María Moreno Warleta
Víctor Manuel Sánchez González
Esteban Serrano Marugán
José María Sordo Juanena

A Martín Gardner
(1914-2010)

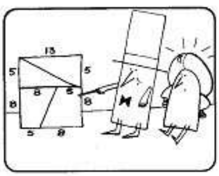
Martin ha convertido miles de niños en matemáticos y miles de matemáticos en niños. (Ronald Graham).



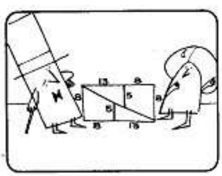
Randi, mago famoso conocido en todo el mundo, tiene una alfombra de 13 por 13 decímetros, y la quiere transformar en otra de 8 por 21. Para ello, Randi llevó su alfombra a Omar, un especialista.



Randi: Omar, amigo mío, quiero que cortes esta alfombra en cuatro piezas, y luego montes con ellas una alfombra rectangular de 8 por 21 decímetros.
Omar: Lo lamento, señor Randi. Es usted un gran mago, pero no anda bien de aritmética. 13 por 13 son 169, mientras que 8 por 21 son 168. No podrá ser.



Randi: Querido Omar, el gran Randi *jamás* se equivoca. Ten la bondad de cortar la alfombra en cuatro piezas como éstas.



Omar hizo como se le dijo. Después Randi reagrupó las piezas, y Omar las cosió, formando una alfombra de 8 por 21.
Omar: ¡No puedo creerlo! El área se ha contraído, de 169 a 168 dm^2! ¿Qué ha ocurrido con el decímetro cuadrado que falta?

Presentación

El Concurso de Primavera cumple quince años y se viste de alto a lo largo y ancho de la Comunidad de Madrid.
En ese tiempo hemos podido comprobar el deseo y la apuesta de padres, alumnos y profesores por una enseñanza escolar cálida y de calidad, en cuyos cimientos deben estar las matemáticas.

Comité Organizador

Agradecimientos:

A los participantes y colaboradores del Concurso.

A la Facultad de Matemáticas., al Consejo Social y al Vicerrectorado de Alumnos de la U. C.M.

Al Área de Formación del Profesorado dentro de la Dir. Gral. de Ordenación Académica de la Consejería de Educación.

A educamadrid

A las editoriales Grupo ANAYA y Ediciones S.M,

Al grupo empresarial El Corte Inglés

A la librería Aviraneta

XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 3 de marzo de 2010

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***2 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

- EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.
- **SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

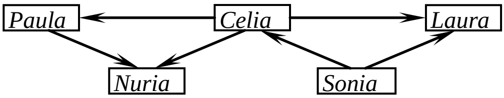
ORGANIZA
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid - El Corte Inglés
Grupo ANAYA - Grupo SM
Librería Aviraneta - www.profes.net

1 ¿Cuánto suman las cifras del número 1 000 000 000 – 123 456 789?

A) 64 **B)** 45 **C)** 46 **D)** 37 **E)** 39

2 Si $\boxed{\textit{Paula}} \longrightarrow \boxed{\textit{Nuria}}$ significa que Paula es mayor que Nuria, ¿quién es la mayor de todas las niñas que aparecen en el diagrama?



A) Celia **B)** Laura **C)** Nuria **D)** Paula **E)** Sonia

3 Alfredo, Francisco, Luis y Víctor quedan todas las tardes para su partida de dominó. Hoy Alfredo ha llegado siete minutos después que Francisco. Luis ha llegado tres minutos después que Francisco y seis minutos antes que Víctor. ¿Cuántos minutos tuvo que esperar el que llegó primero hasta que llegó el último?

A) 6 **B)** 9 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 16

4 Si cada consonante vale 2 y cada vocal vale 1, ¿cuál es el resultado de $[P\cdot(R+I)-(M+A)]:(V:E+R-A)$?

A) $\frac{2}{3}$ **B)** 1 **C)** $\frac{3}{2}$ **D)** $\frac{4}{3}$ **E)** 0

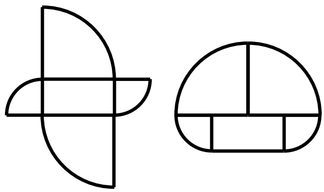
5 El panadero Don Miga es muy hábil cortando barras de pan. Es capaz de cortar una barra en tres trozos en tan solo 12 milésimas de segundo. Siguiendo este ritmo veloz, ¿cuántas milésimas de segundo tardará Don Miga en cortar otra barra de pan en seis trozos?

A) 30 **B)** 28 **C)** 26 **D)** 24 **E)** 20

6 Julián ha ahorrado dos euros y su hermanita Lucía, uno. Deciden comprarse chuches y entre los dos gastan 1,40 €. Si a Julián le queda el triple de dinero que a Lucía, ¿cuántos céntimos gastó Julián?

A) 80 **B)** 60 **C)** 35 **D)** 105 **E)** 30

7 Con cuatro cuartos de círculos y un rectángulo cuya base mide el doble que su altura he formado estas dos figuras. Si la altura del rectángulo mide 5 cm, ¿cuál es, en cm, la diferencia de sus perímetros?

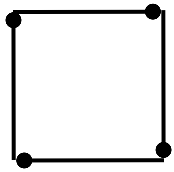


A) 2,5 **B)** 5 **C)** 10
D) 20 **E)** 30

8 Mariquilla ha recortado una **X**, una **I** y una **V** para hacer el cartel del XIV Concurso de Primavera. Se pone a jugar con ellas y piensa: "*Con estas letras puedo escribir el 10, el 11,…*"
¿Cuántos números romanos distintos se pueden formar con esas tres letras?

A) Siete **B)** Nueve **C)** Diez **D)** Doce **E)** Quince

9 Saray puede meter 25 pulgas en este cuadrado construido con cuatro cerillas. ¿Cuántas cerillas necesitará para construir un cuadrado en el que quepan 100 pulgas?



A) 12 **B)** 16 **C)** 8 **D)** 10

E) 15

10 La tabla de la figura está rellena con las letras A, M, O y R, de forma que en cada fila y columna aparecen esas cuatro letras. ¿En qué línea se lee la palabra AMOR?

	C1 ↓	C2 ↓	C3 ↓	C4 ↓
F1→		A		
F2→	M			
F3→				
F4→	R		M	

A) Fila 2 **B)** Columna 4

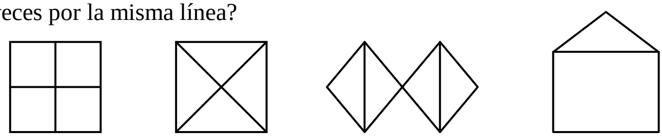
C) Fila 3 **D)** Columna 1

E) Columna 2

11 La ardilla Amarilla se dispone a recorrer una larga fila de pinos. Comienza a saltar de uno a otro y cuando lleva un buen rato, descansa en un pino y recapacita así: "Uf, por delante de mí hay todavía el doble de pinos que los que tengo por detrás". A continuación avanza nueve pinos más y comenta: "Qué bien, ahora tengo por delante la mitad de pinos de los que tengo por detrás". ¿Cuántos pinos hay en la fila?

A) 27 **B)** 28 **C)** 29 **D)** 30 **E)** 31

12 ¿Cuántos de estos dibujos pueden hacerse sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma línea?



A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E) 4**

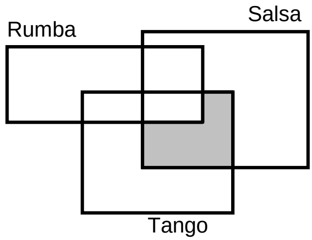
13 Mamá ballena pesa 98,42 toneladas y su ballenato pesó al nacer 2 115 kg ¿Cuántos kilogramos debe engordar el ballenato para pesar la cuarta parte de lo que pesa su madre?

A) 345,5 **B)** 455 **C)** 2 235,5 **D)** 22 490 **E)** 26 720

14 Un año en Marte dura 668 días marcianos. Sus habitantes dividen el año en diecinueve meses de igual número de días y un vigésimo mes que tiene algunos días menos, pero no muchos. ¿Cuántos días tiene el mes corto de Marte?

A) 18 **B)** 22 **C)** 28 **D)** 33 **E)** 34

15 En la academia *Baila que te baila* ofrecen a sus alumnos tres bailes diferentes. En el diagrama están representados los alumnos que se han matriculado en cada baile. ¿Qué alumnos corresponden a los de la zona sombreada?



A) Los que bailan salsa y tango

B) Los que no bailan rumba

C) Los que bailan salsa o tango

D) Los que bailan salsa y tango pero no rumba

E) Los que bailan sólo dos bailes

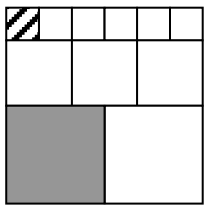
16 El número de cuatro cifras 86✿✹ es divisible entre tres, cuatro y cinco. ¿Cuál es la suma de las dos cifras que faltan?

A) 3 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 14

17 Observa el siguiente diseño: la *Figura* 1 tiene cuatro triángulos y un círculo, la 2 tiene cinco triángulos y dos círculos. ¿Cuántos triángulos y círculos en total tendrá la *Figura* 100?

A) 197 **B)** 200 **C)** 201 **D)** 203 **E)** 205

18 Esta figura está formada juntando once cuadrados. Sabiendo que el cuadrado rayado tiene 1 m^2 de área, ¿qué área, en m^2, tiene el cuadrado sombreado?



A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6

E) 9

19 Los hunos tienen billetes de 1, 11, 111 y 1111 atilanos. ¿Cuál es el menor número de billetes que hay que usar para pagar 3742 atilanos?

A) 13 **B)** 17 **C)** 19 **D)** 20 **E)** 22

20 ¿Cuál de las siguientes fracciones está más próxima a 1?

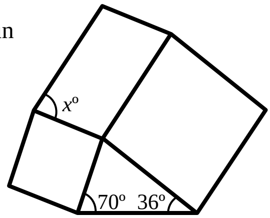
A) $\frac{12}{23}$ **B)** $\frac{23}{34}$ **C)** $\frac{34}{45}$ **D)** $\frac{45}{56}$ **E)** $\frac{56}{67}$

21 Javier, Jesús, Joaquín, José María y Juanje tienen un grupo de rock llamado **5J**. Debido a sus obligaciones laborales, Javier solo puede tocar cada quince días; Jesús, cada seis; Joaquín, cada doce; José María, cada veinte y Juanje, cada dos. Si el 1 de enero dieron su primer concierto, ¿cuántos conciertos darán como máximo los **5J** a lo largo de 2010?

A) 60 **B)** 20 **C)** 18 **D)** 7 **E)** 6

22 En la figura podemos ver un triángulo, dos cuadrados y un romboide. ¿Cuál es la medida del ángulo *x*?

A) 54º **B)** 64º **C)** 70º **D)** 72º **E)** 74º



23 La suma $1+22+333+4\,444+55\,555+5+44+333+2\,222+11\,111$ es igual a:

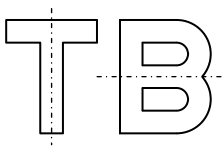
A) $6\times 12\,345$ **B)** $5\times 12\,346$ **C)** 654 321 **D)** $11\times 43\,210$ **E)** 66 666

24 Merche quiere que la probabilidad de sacar una bola blanca de este saco sea 2/5 y para ello añade bolitas grises y blancas. ¿Cuántas bolitas grises como mínimo tiene que añadir?

A) Una **B)** Dos **C)** Tres **D)** Cuatro **E)** Cinco

25 Algunas letras tiene ejes de simetría, como la **T** y la **B**, pero hay otras que no, como la **G** y la **Z**. ¿Cuántas letras distintas de **CONCURSO DE PRIMAVERA** no tienen ejes de simetría?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6



XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 3 de marzo de 2010

NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***2 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

- EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.
- **SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid - El Corte Inglés
Grupo ANAYA - Grupo SM
Librería Aviraneta - www.profes.net

1 ¿Cuál es el menor número, entre monedas y billetes, que debemos reunir para juntar 48, 97 €?

A) 13 **B)** 12 **C)** 11 **D)** 10 **E)** 9

2 Micaela ha dibujado un triángulo y ha unido los puntos medios de sus lados, formando así varios triángulos. En cada uno de esos triángulos ha repetido la misma acción: unir sus puntos medios. ¿En cuántos triangulitos de los más pequeños ha quedado dividido el triángulo inicial de Micaela?

A) Cuatro **B)** Diez **C)** Doce **D)** Dieciséis **E)** Dieciocho

3 Una serpiente mide 4 codos y un cocodrilo mide 6 codos. Si utilizamos palmos, la serpiente mide 6 palmos. ¿Cuántos palmos mide el cocodrilo?

A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 14

4 Si cada consonante vale 2 y cada vocal vale 1, ¿cuál es el resultado de:
$[P+(R+I)^M - A]:[V\cdot(E+R)-A]$?

A) 1 **B)** $\frac{6}{5}$ **C)** $\frac{7}{5}$ **D)** $\frac{10}{7}$ **E)** 2

5 En la siguiente lista de cinco números, los tres primeros suman cien; los tres del medio suman doscientos; y los tres últimos suman trescientos. ¿Qué número está en el centro de la lista?

10				**130**

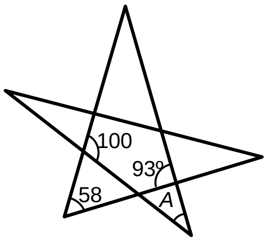
A) 100 **B)** 60 **C)** 70 **D)** 50 **E)** 75

6 Estoy pensando un número de tres cifras que al dividirlo entre 3, entre 5 y entre 11, da resto cero. Además, ninguna de sus cifras es la suma de las otras dos. ¿Cuál es la cifra de las centenas de mi número?

A) 1 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

7 Observa el pentágono estrellado que te mostramos. ¿Cuánto mide el ángulo *A*?

A) 35º **B)** 42º **C)** 51º **D)** 65º
E) 109º



8 Javier dice haber descubierto esta interesante propiedad: "si n es un número primo, entonces $2n+1$ también es primo". Pablo le dice que lo siente mucho pero que eso es falso. ¿Qué valor de n niega la afirmación de Javier?

A) 3 **B)** 11 **C)** 8 **D)** 7 **E)** 5

9 Cuando tus abuelos tenían tu edad seguro que resolvieron este problema: ¿cuántas pesetas cuestan siete sardinas y media a peseta y media la sardina y media?

A) 7 y media **B)** 7 **C)** 6 y media **D)** 6 **E)** 1

10 He olvidado dos cifras del número 28▲75■ que abre mi caja fuerte. Recuerdo que elegí esa clave porque era divisible entre 33. Sólo una de las siguientes igualdades puede ser verdadera. ¿Cuál?

A) ▲= ■ **B)** ▲= 4 **C)** ▲= 5 **D)** ■ = 8 **E)** ▲+ ■ es múltiplo de 3

11 En la siguiente cuadrícula debes colocar todos los números desde el 1 hasta el 9. Para ello te damos estas pistas: la suma de los números de la columna C1 es 24; el producto de los números de la fila F1 es 27; la suma de los números de la fila F2 es 16; la suma de los números de la columna C3 es 14; todos los números de la fila F3 son pares.

	C1 ↓	C2 ↓	C3 ↓
F1⟶			
F2⟶			
F3⟶			

¿Qué número estará colocado en la casilla central del cuadrado?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

12 De los cinco números: 123 456, 123^{456}, 456^{123}, $123 \cdot 456$, $12 \cdot 34 \cdot 56$, ¿cuántos son múltiplos de 9?

A) Uno **B)** Dos **C)** Tres **D)** Cuatro **E)** Cinco

13 Hoy, 3 de marzo de 2010, Goyo celebra dos aniversarios muy especiales: cumple 72 años y además cumple 34 años sin fumar. ¿En qué año celebró o celebrará que lleva la mitad de su vida sin fumar?

A) 2014 **B)** 2016 **C)** 2008 **D)** 2006 **E)** 2012

14 Hay algunos números de tres cifras que tiene esta propiedad: si les quitas la primera cifra queda un cuadrado perfecto y si la cifra que quitas es la última también queda un cuadrado perfecto. ¿Cuánto vale la suma de todos estos números con tan curiosa propiedad?

A) 1013 **B)** 1177 **C)** 1465 **D)** 1993 **E)** 2016

15 Dibuja un cuadrado y nombra sus vértices con las letras *A*, *B*, *C*, *D*, en dicho orden y en sentido antihorario. Encuentra un punto *P*, exterior al cuadrado, tal que las distancias *PA* y *PB* sean iguales al lado del cuadrado. Prolonga el segmento *PA* hasta que corte a la prolongación de la diagonal que parte de *B*. ¿Qué ángulo forman estas dos prolongaciones al cortarse?

A) 15º **B)** 30º **C)** 45º **D)** 60º

E) No se cortan porque son paralelas

16 ¿Cuántas cifras distintas tiene el producto 12 345 · 11 111?

A) Nueve **B)** Ocho **C)** Siete **D)** Seis **E)** Cinco

17 La siguiente barra está dividida en cuatro partes iguales. Hacemos girar la barra 180º tres veces, la primera vez con centro en *A*, la segunda con centro en *B* y la tercera con centro en *E*. ¿Cuál de los puntos vuelve a quedar en la misma posición que al principio?

A) *A* **B)** *B* **C)** *C* **D)** *D* **E)** *E*

18 Te enfrentas ahora a una suma secreta en la que letras diferentes representan cifras diferentes. Ahí van cinco pistas: las letras de la palabra **MORSA** corresponden a las cifras 8, 7, 6, 5, 2, aunque no necesariamente en ese orden. ¿Y no me dices nada de la **L**? No, no quiero, pero sí te diré que el número **OLA** no es múltiplo de 11. ¿A qué cifra corresponde la **S**?

```
   O L A
 + S A L
 -------
   M A R
```

A) 8 **B)** 7 **C)** 6 **D)** 5 **E)** 2

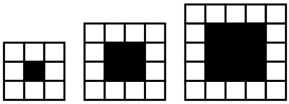
19 Antonio y Beatriz pesan juntos 78 kilos, Beatriz y Carmen 76, Carmen y Daniel 80, Daniel y Enrique 76 kilos, y Enrique y Antonio 80. ¿Cuántos kilos pesan juntos, Antonio, Daniel y Enrique?

A) 117 **B)** 118 **C)** 119 **D)** 120 **E)** 121

20 Don Retorcido dice que 2010 es un número *dobledé* porque el número formado por sus dos primeras cifras es el doble del número formado por sus dos últimas cifras. ¿Cuántos números *dobledés* hay de cuatro cifras?

A) 30 **B)** 35 **C)** 40 **D)** 50 **E)** 45

21 ¿Cuántas baldosas blancas necesitaremos para rodear un cuadrado negro de 18 baldosas de lado?



A) 80 **B)** 76 **C)** 74

D) 72 **E)** 70

22 En un partido de balonmano están ocupadas 748 localidades de un total de 850 plazas disponibles. ¿Qué frases de las siguientes son verdaderas?
I. Han quedado vacíos el 12% de los asientos.
II. De cada 25 asientos, 22 estaban ocupados.
III. La asistencia superó los tres cuartos.

A) Sólo la I **B)** Sólo la I y la III **C)** Todas son ciertas

D) Sólo la I y la II **E)** Sólo la III

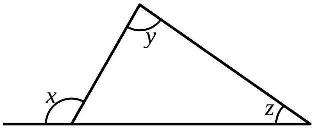
23 Sofía ha encontrado una varilla de 48 dm en el taller de su casa y se ha propuesto construir con ella las aristas necesarias para formar un cubo sin desperdiciar ni un milímetro de varilla. ¿Qué volumen, en dm^3, ocupará el cubo de Sofía?

A) 64 **B)** 96 **C)** 144 **D)** 48 **E)** 16

24 En la figura hemos señalado tres ángulos. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

A) $x = y + z$ **B)** $x > y + z$ **C)** $x < y + z$

D) $x < y$ **E)** $x < z$



25 ¿Cuántos números de cuatro cifras cumplen que la diferencia entre cada dos cifras vecinas siempre es 4?

A) 15 **B)** 16 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 19

XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 3 de marzo de 2010

NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***2 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

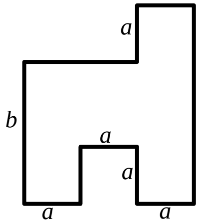
- EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.
- **SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid - El Corte Inglés
Grupo ANAYA - Grupo SM
Librería Aviraneta - www.profes.net

1 El dibujo de la derecha muestra el plano de una habitación en la que cualesquiera de las paredes que se juntan son perpendiculares. Si las longitudes de algunas paredes son a y b, ¿cuál es el área de la habitación?



A) $3ab + b^2$ **B)** $8a + 2b$ **C)** $3ab - a^2$ **D)** $b^2 - a^2$ **E)** $3ab$

2 Un grupo de estudiantes decide contratar un autobús para una excursión. Calculan que si cada uno paga 14 euros, faltarán 4 euros para poder pagar el alquiler del autobús, pero si cada uno paga 16 euros, sobrarán 6 euros. ¿Cuántos euros debe pagar cada uno para recaudar el precio exacto del alquiler del autobús?

A) 14,40 **B)** 14,60 **C)** 14,80 **D)** 15 **E)** 15,20

3 En el cuadrado que observas resulta que cada fila, cada columna y cada diagonal forman una progresión aritmética. ¿Qué número es x?
(Recuerda: en una progresión aritmética, la diferencia entre dos términos consecutivos es constante).

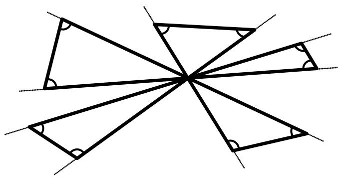
				21
	16			
		27		
				x

A) 49 **B)** 42 **C)** 33 **D)** 28 **E)** 4

4 Llamamos *longitud* de un número natural al número de factores que tiene su descomposición en factores primos. Por ejemplo, la longitud de 30 es 3 pues $30 = 2·3·5$ y la longitud de 90 es 4 pues $90 = 2·3·3·5$. ¿Cuántos números impares mayores que 2 pero menores que 100 tienen longitud 3?

A) 2 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** Nada de lo anterior

5 ¿Cuál es la suma de los diez ángulos señalados en el dibujo en el que los triángulos los hemos construido ayudándonos de cinco rectas concurrentes?

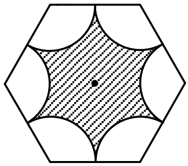


A) 300º **B)** 450º **C)** 360º **D)** 600º **E)** 720º

6 Isa ha olvidado el código del candado de su bicicleta, que era de tres cifras distintas, pero recuerda que si dividía la primera entre la segunda y luego elevaba el resultado al cuadrado, obtenía la tercera. ¿Cuántos códigos tienen esta propiedad?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

7 Si el hexágono de la figura tiene 2 dm de lado, ¿cuál es, en dm^2, el área de la estrella central?



A) $3\sqrt{3}-\pi$ **B)** $6\sqrt{3}-2\pi$ **C)** $2\sqrt{6}-\pi$
D) $3\cdot\left(\sqrt{18}-\pi\right)$ **E)** $6\cdot\left(2\sqrt{3}-\pi\right)$

8 En una circunferencia de radio 5, trazamos una cuerda *AB* de longitud 6. Si *C* es el punto medio del menor de los arcos *AB*, ¿cuál es la longitud de la cuerda *AC*?

A) $\sqrt{10}$ **B)** $\frac{7}{2}$ **C)** $\sqrt{14}$ **D)** $\sqrt{15}$ **E)** 4

9 En una sucesión de números, cada uno de ellos a partir del tercero es igual a la suma del doble del anterior más el anterior a éste, es decir: $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$. Si el tercero es 9 y el sexto es 128, ¿cuál es el valor del quinto?

A) 40 **B)** 53 **C)** 68 **D)** 88 **E)** 104

10 Marta quiere comprar un ordenador y acude a dos tiendas. En la tienda A le rebajan un 15 % del precio y, posteriormente, le descuentan 90 euros. En la tienda B le rebajan un 25 % del precio sin descuento posterior. Si Marta se ahorra 15 euros comprando en la tienda A en lugar de en la B, ¿cuál era, en euros, el precio del ordenador?

A) 750 **B)** 900 **C)** 1000 **D)** 1050 **E)** 1500

11 Los lados de un triángulo rectángulo son números enteros menores que 100. ¿En cuántos de estos triángulos se cumple que el cateto mayor y la hipotenusa son números consecutivos?

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

12 Unimos los puntos medios de los lados de un cuadrado S_1 de área 16, formando así un nuevo cuadrado S_2. Hacemos lo mismo en S_2 para formar un nuevo cuadrado S_3. ¿Cuál es el área de S_3?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

13 ¿Cuánto mide, en cm, la hipotenusa de un triángulo rectángulo de 128 cm de perímetro y 320 cm^2 de área?

A) 57 **B)** 59 **C)** 61 **D)** 63 **E)** 65

14 Si $k = 2^{2010} + 2010^2$, ¿cuál es la cifra de las unidades de $2^k + k^2$?

A) 0 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

15 En el segmento de extremos *A* y *D*, marcamos los puntos *B* y *C*. Si la longitud de *AB* es cuatro veces la de *BD* y la longitud de *AC* es nueve veces la de *CD*, ¿qué fracción de *AD* es *BC*?

A) $\frac{1}{36}$ **B)** $\frac{1}{13}$ **C)** $\frac{1}{10}$ **D)** $\frac{5}{36}$ **E)** $\frac{1}{5}$

16 ¿Cuántas parejas (x, y) de enteros no negativos verifican que $3x + 2y = 50$?

A) 1 **B)** 7 **C)** 9 **D)** 16 **E)** 17

17 Si la ecuación de segundo grado $ax^2 - 2ax + b = 0$ tiene dos soluciones, ¿cuál es la media aritmética de dichas soluciones?

A) 1 **B)** 2 **C)** $\frac{b}{a}$ **D)** $\frac{2b}{a}$ **E)** $\sqrt{2a-b}$

18 Si terminamos de rellenar el cuadrado mágico de la figura (los tres números de cualquier fila, columna o diagonal suman lo mismo), ¿cuál es el mayor número que aparece en el cuadrado?

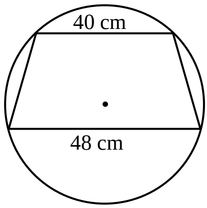
8		4
		10

A) 10 **B)** 13 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 18

19 Un polinomio *P* de grado dos tiene dos raíces enteras distintas. El coeficiente de x^2 es 1 y el coeficiente del término de primer grado es 20. ¿Cuál es el mayor valor numérico que puede tomar para $x = 1$?

A) 120 **B)** 108 **C)** 107 **D)** 96 **E)** 40

20 En una circunferencia de radio 25 cm, inscribimos un trapecio isósceles de bases 40 y 48 cm. ¿Cuál es, en cm^2, su área?



A) 968 **B)** 954 **C)** 944 **D)** 920 **E)** 900

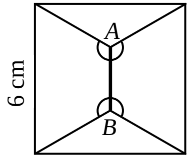
21 ¿Cuántos números de seis cifras distintas *abcdef* formados con las cifras del 1 al 6 son múltiplos de 12?

A) 192 **B)** 48 **C)** 130 **D)** 240 **E)** 18

22 ¿Cuál es la mayor potencia de 3 que divide a 9·99·999·9 999·99 999·999 999?

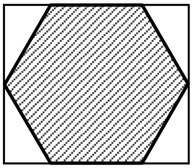
A) 12 **B)** 13 **C)** 14 **D)** 15 **E)** 16

23 En este cuadrado de 6 cm de lado hemos marcado cuatro ángulos que miden 120º cada uno. ¿Cuántos centímetros mide el segmento *AB*?



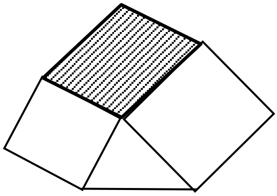
A) $6-2\sqrt{3}$ **B)** $3\sqrt{3}-2$ **C)** 4 **D)** $2\sqrt{3}$ **E)** $3\sqrt{2}$

24 El rectángulo de la figura tiene 64 cm^2 de área. ¿Cuál es, en cm^2, el área del hexágono regular inscrito?



A) 36 **B)** 40 **C)** 42 **D)** 48 **E)** 56

25 La figura está formada por dos cuadrados de lados 4 y 5 cm, un triángulo de área 8 cm^2, y un paralelogramo. ¿Cuál es, en cm^2, el área del paralelogramo?



A) 21 **B)** 20 **C)** 18 **D)** 16 **E)** 15

XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 3 de marzo de 2010

NIVEL IV (Bachillerato)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***2 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

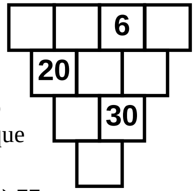
- EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.
- **SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid - El Corte Inglés
Grupo ANAYA - Grupo SM
Librería Aviraneta - www.profes.net

1 En la pirámide invertida de la derecha, se colocan en las casillas números enteros mayores que cero, de forma que el número de una casilla inferior sea suma de los dos números de las casillas superiores que la tocan. Si con este criterio rellenamos el resto de casillas, ¿cuál es el mayor número que puede aparecer en la casilla inferior?



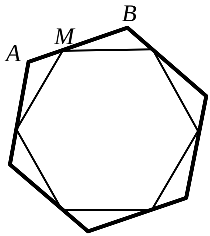
A) 55 **B)** 60 **C)** 73 **D)** 75 **E)** 77

2 Si acabamos de rellenar el cuadrado mágico de la figura (los tres números de cualquier fila, columna o diagonal suman lo mismo), ¿cuál es el número menor que aparece en el cuadrado?

	15	
5		13

A) 5 **B)** 4 **C)** 3 **D)** 2
E) 1

3 En un hexágono regular de lado *AB* inscribimos otro hexágono regular con vértice en *M*, siendo $BM = 2\,MA$. Si el hexágono grande tiene 36 cm^2 de área, ¿cuál es, en cm^2, el área del pequeño?



A) 30 **B)** 28 **C)** 27 **D)** 25
E) 24

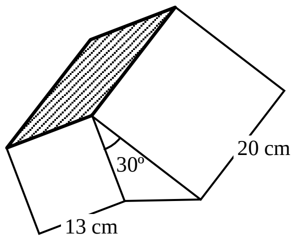
4 De todos los cuadriláteros inscritos en una circunferencia que verifican que dos de sus lados, de longitudes 6 y 8 cm, forman un ángulo recto, ¿cuál es, en cm^2, el área del que tiene área máxima?

A) 48 **B)** 48,5 **C)** 49 **D)** 50 **E)** 52

5 Uno de los números complejos *z* que verifican el sistema $\begin{cases} z \cdot t = 6_{60^\circ} \\ \dfrac{z}{t} = 3_{30^\circ} \end{cases}$ es:

A) $2 + 2\sqrt{3}\,i$ **B)** $2\sqrt{3} - 2i$ **C)** $3 + 3\,i$ **D)** $2 + 2\,i$ **E)** $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$

6 La figura está formada por dos cuadrados de lados 13 y 20 cm, un triángulo con el ángulo marcado de 30º, y un romboide. ¿Cuál es el área, en cm^2, del romboide?

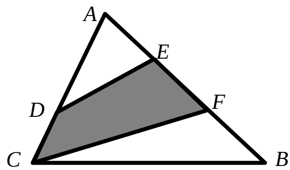


A) 130 **B)** 125 **C)** 115
D) 112 **E)** 111

7 Las soluciones del sistema $\begin{cases} y = x^2 - 7x + 5 \\ x = y^2 - 7y + 5 \end{cases}$ verifican, o bien que $x - y = 0$, o bien que $x + y$ es igual a:

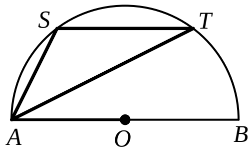
A) 1 **B)** 2 **C)** 6 **D)** – 1 **E)** – 2

8 En la figura que te mostramos, el área del triángulo *ABC* es 9, *DC* es un tercio de *AC* y los puntos *E* y *F* dividen a *AB* en tres partes iguales. ¿Cuál es el área del cuadrilátero sombreado?



A) 3 **B)** 4 **C)** 4,5 **D)** 5 **E)** 6

9 En una semicircunferencia de centro *O* y radio *r*, trazamos una cuerda *ST* paralela al diámetro *AB*. Si llamamos α al ángulo *SOT*, ¿cuál es el área del triángulo *AST* en términos del radio *r* y el ángulo α?

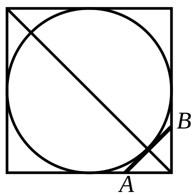


A) $r \cdot sen^2\alpha$ **B)** $r\,(sen\alpha + \cos\alpha)$ **C)** $\frac{r^2 \cos\alpha}{2}$ **D)** $\frac{r^2}{2}$ **E)** $\frac{r^2 sen\alpha}{2}$

10 Lanzamos al aire cinco veces una moneda. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos dos caras?

A) $\frac{3}{16}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{7}{16}$ **D)** $\frac{13}{16}$ **E)** $\frac{27}{32}$

11 ¿Qué longitud tiene el segmento *AB*, tangente a la circunferencia inscrita en un cuadrado de lado 1 y perpendicular a la diagonal?



A) $\sqrt{2} - 1$ **B)** $2 - \sqrt{2}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **E)** $\sqrt{2} + 1$

12 Don Retorcido dice que 2010 es un número *dobledé* porque el número formado por sus dos primeras cifras es el doble del número formado por sus dos últimas cifras. ¿Cuántos números *dobledés* hay de cuatro cifras?

A) 30 **B)** 35 **C)** 40 **D)** 45 **E)** 50

13 Si todos los marcianos veranean en Venus, entonces podemos asegurar que:

A) Un ser que no veranee en Venus no es marciano.
B) Cualquiera que veranee en Venus es un marciano.
C) Ningún ser de Plutón veranea en Venus.
D) Todos los de Venus veranean en Marte.
E) Ningún ser de Plutón veranea en Marte.

14 En una circunferencia señalamos diez puntos. ¿Cuál es la diferencia entre el número de heptágonos y el de triángulos cuyos vértices son algunos de esos puntos?

A) 210 **B)** 35 **C)** 21 **D)** 4 **E)** 0

15 ¿Cuántos polinomios de grado cinco cuyos coeficientes en valor absoluto son todos 1 tienen la raíz 1?

A) 5 **B)** 10 **C)** 15 **D)** 20 **E)** 24

16 ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar dos dados aparezcan en la cara superior números consecutivos?

A) $0{,}1\widehat{4}$ **B)** 0,17 **C)** $0{,}2\widehat{7}$ **D)** $0{,}\widehat{3}$ **E)** 0,5

17 Si $\log_2(x-16) = \log_4(x-4)$, la suma de las cifras de x es:

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 7

18 El conjunto de soluciones de la inecuación $|x| + |x-3| > 3$ es:

A) $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ **B)** $(-3, 3)$ **C)** $(-\infty, -3)$ **D)** $(-3, +\infty)$

E) Todos los números reales.

19 Si $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ y $tg\ x = \dfrac{a}{2}$, cos x es igual a:

A) $\dfrac{2}{\sqrt{a^2-4}}$ **B)** $\dfrac{a}{\sqrt{a^2-4}}$ **C)** $\dfrac{2}{a+2}$ **D)** $\dfrac{2}{\sqrt{a^2+4}}$ **E)** $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+4}}$

20 Si el radio de una circunferencia de longitud log b^4 es log a^2, ¿cuál es el valor de $\log_a b$?

A) $\dfrac{1}{4\pi}$ **B)** $\dfrac{1}{\pi}$ **C)** π **D)** 2π **E)** $10^{2\pi}$

21 Sobre el lado *AB* del cuadrado *ABCD*, de lado 1, dibujamos el triángulo equilátero *ABE*, estando el vértice *E* en el interior del cuadrado. Sea *R* la región formada por los puntos interiores al cuadrado pero exteriores al triángulo equilátero cuya distancia a *AD* está comprendida entre 1/3 y 2/3. ¿Cuál es el área de *R*?

A) $\frac{12-5\sqrt{3}}{72}$ **B)** $\frac{12-5\sqrt{3}}{36}$ **C)** $\frac{\sqrt{3}}{18}$ **D)** $\frac{3-\sqrt{3}}{9}$ **E)** $\frac{\sqrt{3}}{12}$

22 Si $k = 2^{2010} + 2010^{2}$, ¿cuál es la cifra de las unidades de $2^k + k^2$?

A) 0 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

23 Una montaña con forma de cono y altura de 2000 m, tiene su base sobre el suelo del océano. La parte de la montaña que se ve sobre el agua constituye un octavo del volumen de la montaña entera. ¿Cuál es, en metros, la profundidad del océano en ese punto?

A) 1000 **B)** $500\left(4-\sqrt{2}\right)$ **C)** 1500 **D)** 1800 **E)** 1900

24 Sean *A*, *B* y *C* tres puntos de la gráfica de $y = x^2$ tales que la recta *AB* es paralela al eje *OX*, y el triángulo *ABC*, de área 2010, es rectángulo en *C*. ¿Cuál es la suma de las cifras de la segunda coordenada de *C*?

A) 22 **B)** 23 **C)** 24 **D)** 25 **E)** 26

25 La suma de las cifras del menor entero positivo *x* que verifica que 5 es un divisor de *x* + 7 y 7 un divisor de *x* + 5 es:

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 24 de abril de 2010

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***2 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

- EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** X LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.
- **SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid - El Corte Inglés
Grupo ANAYA - Grupo SM
Librería Aviraneta - www.profes.net

1 ¿Cuánto suman las cifras del número 1 000 000 000 – 123 456 789?

A) 34 **B)** 35 **C)** 36 **D)** 37 **E)** 38

2 ¿Qué ángulo recorre la manecilla pequeña de un reloj en tres horas y media?

A) 3,5º **B)** 90º **C)** 105º **D)** 180º **E)** 350º

3 Sofía, Juan y Pinchamé se fueron a pescar. Entre todos consiguieron 34 peces. Sofía pescó cinco más que Juan y Pinchamé pescó tres más que Sofía. ¿Cuántos peces pescaron entre Juan y Pinchamé?

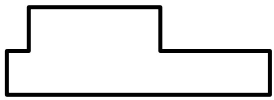
A) 16 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 22 **E)** 24

4 En cada una de las casillas del cuadrado hay un número entero. Si la suma de las tres horizontales, las tres verticales y las dos diagonales es la misma, ¿qué número hay en la casilla marcada con una cruz?

X		
	15	**3**
12		**24**

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

5 La figura que ves está hecha con tres rectángulos iguales que miden 3 cm de base y 1 cm de altura. ¿Cuál es, en cm, el perímetro de la figura?



A) 16 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 24 **E)** Falta información

6 La ardilla Amarilla guarda su botín de otoño en distintos árboles. Hizo seis montones, cinco de avellanas y uno de nueces. Los montones tenían 15, 16, 18, 19, 20 y 31 frutos cada uno. Un día, la urraca Paca le robó unas cuantas avellanas de distintos montones. Al día siguiente, el oso Mañoso le robó el doble de avellanas que la urraca y a la pobre ardilla solo le quedaron nueces. ¿Cuántas nueces tenía la ardilla?

A) 15 **B)** 16 **C)** 19 **D)** 20 **E)** 31

7 En un código numérico de siete cifras, cualquier grupo de cuatro cifras seguidas suman 16 y cualquier grupo de cinco cifras seguidas suman 19. ¿Cuánto vale la suma de las siete cifras?

A) 21 **B)** 25 **C)** 28 **D)** 32 **E)** 35

8 Pilar ha recortado dos triángulos isósceles iguales de 25 cm de perímetro. Con ellos, haciendo coincidir uno de los lados iguales, ha construido un paralelogramo que tiene 32 cm de perímetro. Después, haciendo coincidir los lados desiguales, ha construido un rombo. ¿Cuál es, en cm, el perímetro del rombo?

A) 64 **B)** 57 **C)** 50 **D)** 28 **E)** 36

9 De los cinco relojes que ves, sólo uno indica la hora exacta. Uno de ellos tiene 20 minutos de adelanto, otro 20 de retraso y los otros dos están parados. ¿Cuál es el que marca la hora correcta?

A) 16:00 **B)** 17:25 **C)** 17:40 **D)** 17:05 **E)** 16:45

10 Los puntos *P* y *Q* tienen coordenadas (9, 7) y (9, 1). ¿Cuál de las siguientes coordenadas para *R* hacen que el triángulo *PQR* **no** sea isósceles?

A) (3, 7) **B)** (15, 4) **C)** (2, 4) **D)** (2, 1) **E)** (15, 1)

11 ¿En qué cifra acaba 3^{2010}?

A) 1 **B)** 3 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 9

12 Las taquillas del colegio están colocadas en tres filas. Las casillas están numeradas de izquierda a derecha, en la fila de arriba están del 1 al 40, en la fila del medio están las casillas del 41 al 80 y en la de abajo, del 81 al 120.

…					**Alicia**				…
…							**Marta**		…
…		**Pedro**							…

Las taquillas de Alicia, Marta y Pedro están situadas como en el dibujo y la suma de los tres números es 185, ¿cuánto suman los números de las casillas de Alicia y Pedro?

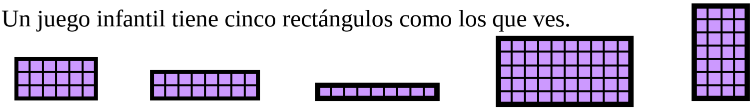
A) 121 **B)** 87 **C)** 163 **D)** 91 **E)** 127

13 Observa la siguiente pirámide numérica.¿Cuánto sumarán los números de la fila 10?

Fila	1
Fila	1 1
Fila	1 2 1
Fila	1 3 3 1
Fila	1 4 6 4 1
Fila	1 5 10 10 5 1
Fila	1 6 15 20 15 6 1

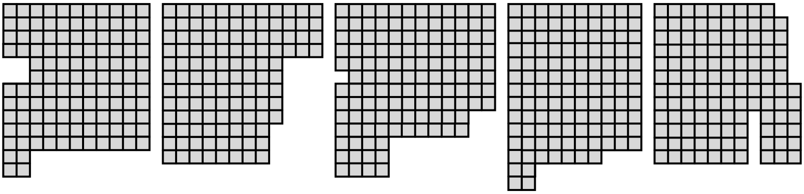
A) 72 **B)** 252 **C)** 512 **D)** 1024 **E)** 2048

14 Un juego infantil tiene cinco rectángulos como los que ves.



¿Cuál de estas figuras puede formarse con esas cinco piezas?

A) **B)** **C)** **D)** **E)**



15 Ana, Irene y Olivia comen juntas todos los días y para beber piden zumo o agua.
Si Ana toma agua, Irene toma lo mismo que Olivia.
Si Irene toma agua, Ana toma la bebida que no toma Olivia.
Si Olivia toma zumo, Ana toma lo mismo que Irene.
¿Cuál de las chicas toma siempre la misma bebida durante la comida?

A) Ninguna **B)** Ana **C)** Irene **D)** Olivia **E)** Todas

16 Si al dividir un número positivo x entre 11 resulta que el cociente es igual que el resto, ¿cuántas posibilidades hay para x?

A) 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** Infinitas

17 En clase había un gran alboroto y Don Retorcido se ha enfadado y nos ha borrado seis números de una división. Muy enojado ha dicho:

"¡Silencio!, ¿cuántas divisiones correctas pueden adaptarse a esta situación?"

1	•	•	1	•	3
	0	9	•	•	7
		0	•		

A) 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1 **E)** Ninguna

18 Alejandro, Belén y Carlos lanzan dos dados y miran la suma de los puntos. Si la suma es par, Alejandro se come una cereza; si la suma es un número primo, Belén se come una cereza y si la suma es mayor que 6, Carlos se come una cereza.
¿Cuántas de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

a) Alejandro y Carlos tienen la misma probabilidad de comer una cereza.
b) Belén nunca comerá una cereza en la misma partida que Alejandro.
c) La probabilidad de que Carlos coma una cereza es 5/9.
d) Alejandro es el que tiene la mayor probabilidad de comer una cereza.

A) Ninguna **B)** Una **C)** Dos **D)** Tres **E)** Todas

19 El pasado 31 de diciembre Esteban y Felisa comenzaron a correr la carrera de San Silvestre Vallecana a la vez. Esteban hizo un magnífico tiempo: 43 minutos y 30 segundos pero Felisa, que estuvo parte del año lesionada, tardó 28 minutos y medio más que Esteban y llegó a la meta a las 19:20. ¿A qué hora comenzaron a correr?

A) 18:16:30 **B)** 18:51:30 **C)** 19:05 **D)** 18:08 **E)** 18: 15

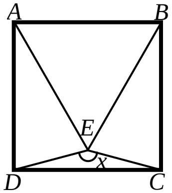
20 Ana ha sacado 6, 9 y 7 en los tres últimos controles de matemáticas. ¿Qué nota debe sacar, como mínimo, en el próximo, si quiere que su nota media sea al menos 7?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

21 En la figura que ves, *ABCD* es un cuadrado y *ABE* un triángulo equilátero. ¿Cuál es el valor de *x*?

A) 130º **B)** 140º **C)** 150º **D)** 160º

E) 170º



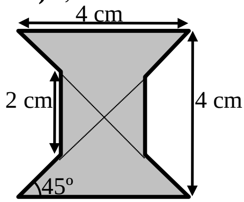
22 Joaquín compró dos refrescos y un pastel por 4,90 euros. Alicia compró un refresco y dos pasteles por 4,70 euros. Pedro compró un refresco y un pastel. ¿Cuántos euros pagó Pedro?

A) 3 **B)** 3,10 **C)** 3,20 **D)** 3,30 **E)** 3,40

23 ¿Cuál es, en cm^2, el área de la figura?

A) 14 **B)** 12 **C)** 11 **D)** 10

E) 18



24 Todas las mañanas Richi tarda 30 minutos en recorrer el perímetro del parque sin alterar el paso. El parque es un cuadrilátero de lados L_1, L_2, L_3, y L_4.
L_2 es el doble de L_1 y L_3 es el doble de L_2. Si tarda 10 minutos en recorrer L_3, ¿qué relación existe entre L_2 y L_4?

A) $3·L_2 = 2·L_4$ **B)** $2·L_2 = 3L_4$ **C)** $5·L_2 = 2·L_4$ **D)** $2·L_2 =5 L_4$ **E)** $4·L_2 = L_4$

25 Inés tiene tres anillos distintos que siempre lleva puestos. Nunca se pone los tres anillos en la misma mano, tampoco se pone dos anillos en un mismo dedo y jamás se pone anillos en los pulgares. ¿De cuántas formas distintas puede ponerse Inés los anillos?

A) 72 **B)** 96 **C)** 144 **D)** 288 **E)** 312

XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 24 de abril de 2010

NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***2 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

- EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{\text{X}}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.
- **SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

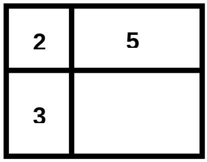
ORGANIZA
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid - El Corte Inglés
Grupo ANAYA - Grupo SM
Librería Aviraneta - www.profes.net

1 Durante el pasado mes de febrero, que fue muy lluvioso, cayeron durante una noche 60 litros por m^2 en uno de los pantanos de la comunidad. ¿Cuánto subió el nivel de agua en ese pantano?

A) 600 cm **B)** 6 cm **C)** 0,6 cm **D)** 0,6 mm
E) Depende de la superficie del pantano

2 Dividimos un rectángulo en cuatro más pequeños y resulta que las áreas, en cm^2, de tres de ellos vienen dadas por los tres primeros números primos, como indica la figura. ¿Cuál es, en cm^2, el área del cuarto rectángulo?



A) 5,5 **B)** 6 **C)** 6,5 **D)** 7 **E)** 7,5

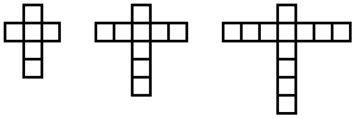
3 En un espectáculo, las entradas de tres adultos y dos niños cuestan 26 €, y las de cuatro adultos y seis niños 48 €. ¿Cuál es la diferencia de precio, en euros, entre la entrada de adulto y la de niño?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

4 En unas elecciones a representante del Consejo Escolar de un centro, Alicia recibió 5/6 de los votos que obtuvo Beatriz, que a su vez, recibió el 80 % de los votos de Carlos. Si Alicia obtuvo 300 votos, ¿cuántos obtuvo Carlos?

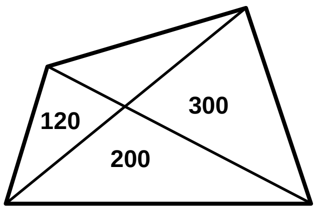
A) 450 **B)** 490 **C)** 500 **D)** 540 **E)** 6000

5 Ana y Cati hacen cruces sin parar usando cuadrados pequeñitos y ya han dibujado las tres primeras. Siguiendo este diseño, ¿cuántos cuadraditos necesitarán para componer la cruz número 50?



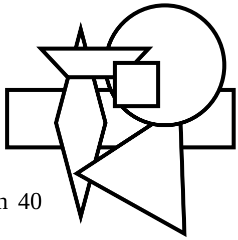
A) 132 **B)** 135 **C)** 150 **D)** 153 **E)** 162

6 Corto una plancha metálica, con forma de cuadrilátero, en cuatro partes por sus diagonales. Retiro un trozo y los tres restantes pesan 120 gramos, 200 gramos y 300 gramos. ¿Cuántos gramos pesaba el trozo que retiré?



A) 120 **B)** 180 **C)** 280
D) 330 **E)** 500

7 Alejandro y Álvaro han pegado sus pegatinas geométricas sobre una hoja. ¿Qué pegatina pegaron en tercer lugar?



A) Rombo **B)** Triángulo **C)** Trapecio

D) Rectángulo **E)** Círculo

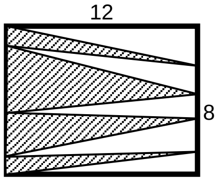
8 Un coche recorre 1 km en un minuto. Para recorrerlo en 40 segundos, ¿en qué porcentaje debe aumentar su velocidad?

A) 40 % **B)** 45 % **C)** 50 % **D)** 66,6 % **E)** Nada de lo anterior

9 En un rectángulo de área 24 se cumple que el doble de la base es igual al triple de la altura. Señalamos dos puntos *A* y *B*, en la base, que la dividen en tres partes iguales y el punto *C*, centro del rectángulo. ¿Qué área tiene el triángulo *ABC*?

A) 2 **B)** 4 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 16

10 ¿Qué fracción del rectángulo de la figura representa la zona sombreada?



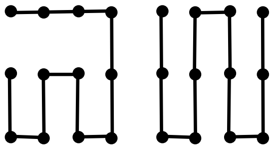
A) $\frac{2}{3}$ **B)** $\frac{2}{5}$ **C)** $\frac{3}{5}$ **D)** $\frac{1}{2}$

E) Nada de lo anterior

11 El número 10^{100} recibe el nombre de *googol*. ¿Cuántos googoles son 1000^{100}?

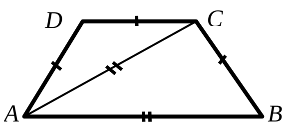
A) 100 **B)** 100^{10} **C)** 900^{100} **D)** 10^{3} **E)** 10^{200}

12 Andarín y Pisapiedras han recorrido todos los puntos de una gran retícula rectangular siguiendo dos caminos distintos, como se aprecia en el esquema. Si Andarín ha caminado 37 kilómetros y Pisapiedras 46, ¿qué longitud tiene el camino más corto posible que pasa por todos los puntos?



A) 16 km **B)** 37 km **C)** 25 km **D)** 28 km **E)** 32 km

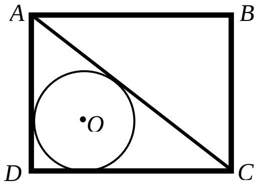
13 En el trapecio isósceles de la figura (*AD* = *BC*) se verifica que además *AD* = *DC* y la diagonal *AC* es igual a la base mayor *AB*. ¿Cuánto mide el ángulo en *D*?



A) 108º **B)** 110º **C)** 112º

D) 114º **E)** Faltan datos para determinarlo

14 En el rectángulo *ABCD* de área 2010 hemos dibujado el círculo de centro *O*, inscrito en el triángulo *ACD*. ¿Cuál es el área del rectángulo de lados paralelos al anterior en el que *O* y *B* son vértices diagonalmente opuestos?



A) 1340 **B)** 335π **C)** 1005

D) $670\sqrt{2}$ **E)** Nada de lo anterior

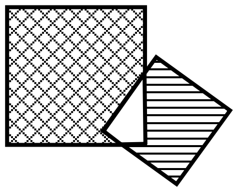
15 Si x e y son dos números positivos cuya suma es 5, ¿cuál es el mínimo valor que puede tomar la expresión $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$?

A) $\frac{5}{6}$ **B)** $\frac{4}{5}$ **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{1}{2}$

16 Trece canicas pesan igual que tres boloncios y una pelota juntos. Cinco canicas y un boloncio juntos pesan lo mismo que dos pelotas. ¿Cuántas canicas hay que reunir para conseguir el mismo peso que un boloncio?

A) Dos **B)** Tres **C)** Cuatro **D)** Cinco **E)** Seis

17 Observa estos dos cuadrados que se solapan. El lado del mayor mide 6 cm y el del menor mide 4 cm. ¿Cuál es, en cm^2, la diferencia entre el área de la zona cuadriculada y la zona rayada?



A) 30 **B)** 12 **C)** 24 **D)** 25 **E)** 20

18 En esta suma, letras diferentes representan cifras diferentes. ¿Cuánto vale la suma **T + Q + M**?

$$\begin{array}{cccc} & M & T & Q \\ + & M & Q & T \\ \hline & T & Q & M \end{array}$$

A) 14 **B)** 16 **C)** 18 **D)** 20 **E)** 22

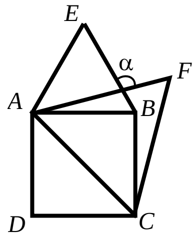
19 Miguel y Raúl están buscando un color que les guste para pintar su habitación. Tienen pintura blanca, verde y amarilla y deciden trabajar así: llenan muchos vasos de yogur con las distintas pinturas y hacen mezclas vertiendo tres de estos vasos en un bote. ¿Cuántos botes necesitarán para conseguir todas las tonalidades distintas que pueden formarse de esta manera?

A) 27 **B)** 10 **C)** 6 **D)** 9 **E)** 12

20 Si p, q, r, son enteros positivos y $p+\dfrac{1}{q+\dfrac{1}{r}}=\dfrac{25}{19}$, el producto $p\cdot q\cdot r$ es igual a:

A) 6 **B)** 10 **C)** 18 **D)** 36 **E)** 42

21 En el siguiente dibujo, *ABCD* es un cuadrado y los triángulos *ABE* y *ACF* son equiláteros. ¿Cuánto vale el ángulo α?



A) 105º **B)** 90º **C)** 120º **D)** 75º **E)** 100º

22 En el triángulo *ABC*, de lados 2, 3 y 4 cm, las bisectrices de los ángulos *A* y *B* se cortan en el punto *I*. ¿Cuál es el valor del cociente entre el área del triángulo *IAB* y el área del triángulo *ABC*?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{2}{9}$ **E)** $\frac{3}{5}$

23 ¿Cuántos números de tres cifras cumplen a la vez estas tres condiciones? UNA: que todas sus cifras sean pares. DOS: que una de sus cifras sea suma de las otras dos. TRES: que la cifra cero no aparezca en dicho número.

A) 10 **B)** 24 **C)** 12 **D)** 4 **E)** 18

24 Dos trenes AVE circulan en sentido contrario por vías paralelas con velocidades de 270 km/h y 306 km/h. Un pasajero sentado en el tren más rápido observa que el otro tarda 0,8 segundos en pasar completamente ante él. La longitud, en metros, del tren más lento es:

A) 128 **B)** 136 **C)** 144 **D)** 152 **E)** 160

25 Tenemos seis cajas llenas de paquetes con huevos. Hay paquetes de seis huevos y paquetes de doce huevos, siendo todos los huevos del mismo peso. Cada caja, que contiene 240 huevos, tiene el doble de paquetes de seis huevos que de doce. Si cada paquete de seis huevos pesa vacío 20 gramos, lleno 380 gramos y cada caja llena pesa 16,8 kg, ¿qué no se puede calcular con estos datos?

A) El número de paquetes de seis huevos de cada caja

B) El número de paquetes de doce huevos de cada caja

C) El peso de cada huevo

D) El peso de cada caja vacía

E) Puede calcularse todo

concurso de primavera MATEMÁTICAS

XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 24 de abril de 2010

NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***2 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

- EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{\text{X}}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.
- **SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

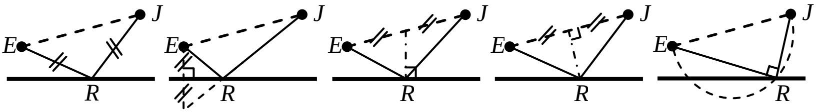
ORGANIZA
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid - El Corte Inglés
Grupo ANAYA - Grupo SM
Librería Aviraneta - www.profes.net

1 En un mes hay tres domingos que caen en día par. ¿En qué día de la semana cae el 20 de ese mes?

A) Lunes **B)** Martes **C)** Miércoles **D)** Jueves **E)** Viernes

2 Esteban está en un campamento base de subida al Aconcagua, en el punto *E*, cerca de Joaquín (punto *J*). Cada mañana le visita porque Joaquín está lesionado, pero se acerca antes al río, punto *R*, para llevarle agua. Cinco veces determina el punto R de forma diferente. ¿Cuál es el trayecto más corto? (los segmentos marcado con || son de igual longitud)



A) **B)** **C)** **D)** **E)**

3 Dos tangentes a una circunferencia en los puntos *Z* e *Y* se cortan en *W*. Una tercera tangente en el punto *Q* corta al segmento *WZ* en *P* y al *WY* en *R*. Si *WZ* = 20, el perímetro del triángulo *WPR* es:

A) 36 **B)** 40 **C)** 42 **D)** 50

E) Depende de la posición del punto *Q*

4 Si a y b son números positivos con a menor que b y llamamos u al número $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}+\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$, ¿qué igualdad es verdadera?

A) $u=2\sqrt{a+b}$ **B)** $u=(a+b)\sqrt{2}$ **C)** $u=a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$

D) $u=2\sqrt{a}$ **E)** $u=2\sqrt{b}$

5 Si se aumenta la velocidad de un tren de mercancías en 10 km/h se ganan 40 minutos de tiempo, pero si se disminuye en 10 km/h, se pierde una hora. ¿Cuál es la longitud del recorrido?

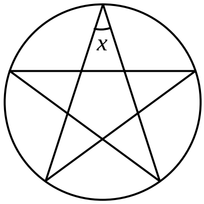
A) 120 km **B)** 200 km **C)** 400 km **D)** 1400 km

E) Los datos son contradictorios

6 ¿Cuánto vale el ángulo interior de un polígono regular convexo de 20 diagonales?

A) 18º **B)** 45º **C)** 72º **D)** 135º **E)** 162º

7 En una circunferencia hemos inscrito un pentágono regular estrellado. ¿Cuál es la medida del ángulo x?



A) 30º **B)** 32º **C)** 34º **D)** 36º **E)** 38º

8 ¿Cuál es la suma de las cifras del cuadrado de 111 111 111?

A) 18 **B)** 27 **C)** 45 **D)** 63 **E)** 81

9 Si $A = 2^{24}$, $B = 3^{16}$, $C = 49^{4}$, entonces se verifica:

A) $A < B < C$ **B)** $A < C < B$ **C)** $B < A < C$ **D)** $B < C < A$ **E)** $C < A < B$

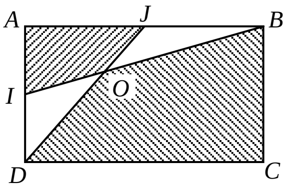
10 En un triángulo isósceles, el ángulo obtuso formado por las bisectrices de los dos ángulos iguales es el triple del ángulo en el tercer vértice. La suma de las cifras del valor de este ángulo, medido en grados sexagesimales, es:

A) 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

11 La torre Eiffel tiene 300 m de altura, está construida enteramente de hierro y pesa exactamente 8000 toneladas. Se quiere construir un modelo reducido de la torre, también de hierro y que pese 1 kg. ¿Cuál debe ser su altura?

A) 8 cm **B)** 80 cm **C)** 8 m **D)** 1,5 m **E)** 0,0375 m

12 *ABCD* es un rectángulo. *I* es el punto medio de *AD* y *J* el de *AB*. Si *O* es el punto de intersección de *IB* y *DJ*, el cociente de las áreas de los cuadriláteros *AIOJ* y *BCDO* es:



A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{3}{4}$

13 ¿Cuántos enteros hay entre 9 999 y 100 000 tales que la suma de sus cifras sea igual a 2?

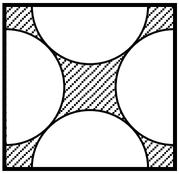
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

14 Las rectas de ecuaciones $y = ax$, $y = -x + b$ se cortan en un punto cuyas coordenadas son estrictamente negativas. Se deduce de ello que:

A) $a > 0,\quad b > 0$ **B)** $a > 0,\quad b < 0$ **C)** $a < 0,\quad b < 0$

D) $a < -1,\quad b < 0$ **E)** $a < -1,\quad b > 0$

15 En la figura se muestra un cuadrado de lado 1 y cuatro semicírculos iguales mutuamente tangentes. ¿Cuál es el área de la parte rayada?



A) $\frac{\pi}{2}$ **B)** $1-\frac{\pi}{4}$ **C)** $4-\pi$ **D)** $\sqrt{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

E) Nada de lo anterior

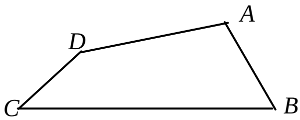
16 Si $P = 2^n$ y $Q = 3^m$, ¿cuál de los siguientes números es 12^{mn} sea cual fuere el par de enteros (m, n)?

A) P^2Q **B)** P^nQ^m **C)** P^nQ^{2m} **D)** $P^{2m}Q^n$ **E)** $P^{2n}Q^m$

17 Si aumentamos en 1 cm una arista de un cubo, disminuimos otra en 1 cm y dejamos la tercera como está, nos da lugar un paralelepípedo cuyo volumen es 5 cm^3 menos que el del cubo original. ¿Cuál era el volumen, en cm^3, del cubo?

A) 8 **B)** 27 **C)** 64 **D)** 125 **E)** 216

18 En el cuadrilátero de la figura, $AB = 5$, $BC = 17$, $CD = 5$, $DA = 9$ y BD un entero. ¿Qué entero es éste?



A) 11 **B)** 12 **C)** 13

D) 14 **E)** 15

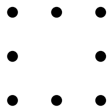
19 Considera el rectángulo $ABCD$ con $AB = 4$ y $BC = 3$. Si el segmento EF, que pasa por B, es perpendicular a la diagonal DB y los puntos E y F están en las prolongaciones de AD y DC respectivamente, ¿cuál es la longitud de dicho segmento EF?

A) 9 **B)** 10 **C)** $\frac{125}{12}$ **D)** $\frac{103}{9}$ **E)** 12

20 En un campamento de verano, el 60% de los estudiantes juega al fútbol, el 30 % hace natación y el 40% de los que juegan al fútbol hace natación. Aproximando al entero más próximo, ¿qué porcentaje de los estudiantes que no hacen natación juega al fútbol?

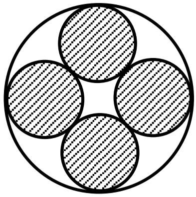
A) 30% **B)** 40% **C)** 49% **D)** 51% **E)** 70%

21 De los ocho puntos de la figura, separados 1 unidad los más cercanos, elegimos dos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que su distancia sea 1?



A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{2}{7}$ **C)** $\frac{4}{11}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{4}{7}$

22 Muchas catedrales góticas tienen ventanas como la de la figura: varios círculos iguales, tangentes dos a dos y un círculo grande tangente exterior a todos. En la figura hay cuatro círculos pequeños. ¿Cuál es el cociente entre la suma de las áreas de los cuatro pequeños y el área del grande?



A) $3-2\sqrt{2}$ **B)** $2-\sqrt{2}$ **C)** $4\left(3-2\sqrt{2}\right)$

D) $\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{2}\right)$ **E)** $2\sqrt{2}-2$

23 Decimos que un número de 3 cifras distintas es un número "geométrico" si sus cifras, leídas de izquierda a derecha, están en progresión geométrica. ¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor números geométricos?

A) 888 **B)** 124 **C)** 718 **D)** 840
E) Nada de lo anterior

24 La probabilidad de que en una moneda trucada obtengamos cara es $p \neq 0$. Tiramos la moneda 8 veces, siendo la probabilidad de obtener 3 caras y 5 cruces $\frac{1}{25}$ de la probabilidad de obtener 5 caras y 3 cruces. El valor de p es:

A) $\frac{2}{3}$ **B)** $\frac{3}{4}$ **C)** $\frac{4}{5}$ **D)** $\frac{5}{6}$ **E)** $\frac{6}{7}$

25 En el rectángulo *ABCD* con *AB* = 8 y *BC* = 6, el punto *M* es el punto medio de la diagonal *AC*; el segmento *ME*, con *E* en *AB*, es perpendicular a dicha diagonal. ¿Cuál es el área del triángulo *AME*?

A) $\frac{65}{8}$ **B)** $\frac{25}{3}$ **C)** 9 **D)** $\frac{75}{8}$ **E)** $\frac{85}{8}$

XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 24 de abril de 2010

NIVEL IV (Bachillerato)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***2 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

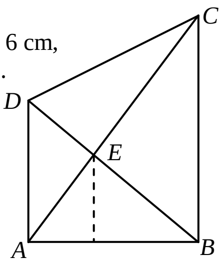
- EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.
- **SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid - El Corte Inglés
Grupo ANAYA - Grupo SM
Librería Aviraneta - www.profes.net

1 En el trapecio rectángulo *ABCD* de la figura, de altura *AB* = 6 cm, las diagonales se cortan en el punto *E*, que dista 3 cm de *AB*. Si la diagonal *AC* mide 10 cm, la longitud, en cm, de la diagonal *BD* es:



A) $\frac{36}{5}$ **B)** $\frac{12\sqrt{10}}{5}$ **C)** $\frac{6\sqrt{41}}{5}$ **D)** $\frac{12\sqrt{11}}{5}$

E) Nada de lo anterior

2 La ecuación, de incógnita *x*, $\ln(x+a) = \ln x + \ln a$ (*x* real, *a* > 1).

A) No tiene solución **B)** Tiene solución única

C) Tiene dos soluciones **D)** Se verifica para todo *x* positivo

E) El número de soluciones depende del valor de *a*.

3 ¿Cuál de las siguientes igualdades puede ser falsa, siendo *x*, *a* y *b* números reales?

A) $x^2 + 2x + 1 = |x+1|^2$ **B)** $x^2 - a^2 = (x-a)\cdot(x+a)$

C) $a^2 - 2ab + b^2 = (-a+b)^2$ **D)** $1 - \sqrt{x^2} = 1 - x$ **E)** Ninguna de ellas

4 Se considera $x = 3,\ y = 1,\ z = 2$. Así pues $x = y + z$. En el siguiente razonamiento hay, evidentemente, un error. ¿En qué paso está el error?

A) Como $x = y + z \Rightarrow x\cdot(x-y) = (y+z)\cdot(x-y)$

B) Si $x\cdot(x-y) = (y+z)\cdot(x-y) \Rightarrow x^2 - xy = yx + zx - y^2 - zy$

C) Si $x^2 - xy = yx + zx - y^2 - zy \Rightarrow x^2 - xy - xz = yx - y^2 - zy$

D) Si $x^2 - xy - xz = yx - y^2 - zy \Rightarrow x\cdot(x-y-z) = y\cdot(x-y-z)$

E) Si $x\cdot(x-y-z) = y\cdot(x-y-z) \Rightarrow x = y$

5 La ecuación, de incógnita *x*, $\left|\left||x|-1\right|-b\right| = 4$ tiene exactamente 5 soluciones reales cuando *b* es:

A) Cualquier número positivo **B)** *b* **=**3 **C)** *b* = 4 **D)** *b* = 5 **E)** 4 **<** *b* < 5

6 Cuando una botella está llena de agua hasta $\frac{2}{3}$ de su volumen, pesa *a* kg. Cuando está llena hasta la mitad, pesa *b* kg. ¿Cuántos kg pesará cuando esté totalmente llena?

A) $\frac{2a}{3} + \frac{b}{3}$ **B)** $\frac{3a}{2} - \frac{b}{2}$ **C)** $\frac{3a}{2} + b$ **D)** $\frac{3a}{2} + 2b$ **E)** 3*a*– 2*b*

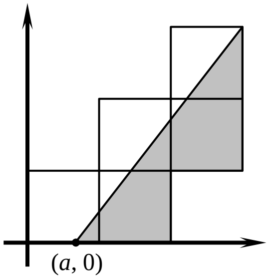
7 En una circunferencia de centro O marcamos dos puntos A y C. Si B es un punto exterior tal que BA y BC son tangentes a la circunferencia y el triángulo ABC es equilátero, ¿cuánto vale el cociente $\frac{BD}{BO}$, siendo D la intersección de BO con la circunferencia?

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **D)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **E)** $\frac{\sqrt{2}}{3}$

8 Si la recta $y = mx$ divide al triángulo de vértices (0, 0), (1, 1) y ($6m$, 0) en dos triángulos de igual área, la suma de todos los valores posibles de m es.

A) $-\frac{1}{3}$ **B)** $-\frac{1}{6}$ **C)** $\frac{1}{6}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** $\frac{1}{2}$

9 Dibujamos cinco cuadrados de lado 1 en el primer cuadrante de un sistema de coordenadas como se muestra en la figura. Si el área de la región sombreada es $\frac{5}{2}$, el valor de a es:



A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{3}{5}$ **C)** $\frac{2}{3}$ **D)** $\frac{3}{4}$

E) $\frac{4}{5}$

10 ¿Cuál es el resto de la división de $3^0 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^{2010}$ entre 8?

A) 0 **B)** 1 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 7

11 ¿Cuántos enteros positivos menores que 1000 son seis veces la suma de sus dígitos?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 4 **E)** 12

12 Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ y $f(x+3) = 3x^2 + 7x + 4$, $a + b + c$ es igual a:

A) – 1 **B)** 0 **C)** 1 **D)** 2 **E)** 3

13 ¿Para qué valor de n se verifica que la suma $i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + \ldots + n\,i^n$ es el número complejo $48 + 49i$?

A) 24 **B)** 48 **C)** 49 **D)** 97 **E)** 98

14 Hay dos circunferencias tangentes a la parte positiva de los ejes de coordenadas y tangentes exteriores a la circunferencia de centro *O* (3, 0) y radio 1. La suma de sus radios es:

A) 9 **B)** $\frac{17}{2}$ **C)** 8 **D)** $\frac{15}{2}$ **E) 7**

15 Sea $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, donde *a, b* y *c* son números complejos. Supongamos que $p(2010 + 102\,i) = p(2010) = p(102) = 0$. ¿Cuántas soluciones reales tiene como máximo la ecuación $0 = x^{12} + ax^8 + bx^4 + c$?

A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 10

16 Para cada entero positivo *n*, sea $f(n) = n^4 - 360n^2 + 400$. ¿Cuál es la suma de todos los valores *f*(*n*) que resultan ser números primos?

A) 794 **B)** 796 **C)** 798 **D)** 800 **E)** 802

17 ¿Cuál es el área del triángulo de vértices *A*(4, 0), *B*(0, 4) y *C*(– 2010, 4020)?

A) 4010 **B)** 4012 **C)** 4014 **D)** 4016 **E)** 4018

18 Una bolsa contiene 3 bolas rojas y 2 blancas. Sacamos las bolas sin mirar una a una. ¿Cuál es la probabilidad de que en algún momento sólo queden bolas blancas?

A) $\frac{2}{5}$ **B)** $\frac{3}{10}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{3}{5}$ **E)** $\frac{7}{10}$

19 Si $sen\ a + sen\ b = \sqrt{\frac{5}{3}}$ y $cos\ a + cos\ b = 1$, $cos(a - b)$ es igual a:

A) $\sqrt{\frac{5}{3}} - 1$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** 1

20 En el interior del triángulo equilátero *ABC* elegimos un punto *P*. ¿Cuál es la probabilidad de que el área del triángulo *ABP* sea mayor que el área del triángulo *ACP* y que el área del triángulo *BCP*?

A) $\frac{1}{6}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{2}{3}$

21 ¿En qué intervalo está el número $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)} + \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{3}\right)}$?

A) (–2, –1) **B)** (1, 2) **C)** (–3, –2) **D)** (2, 3) **E)** (3, 4)

22 En el triángulo *ABC*, con *AB* = *AC*, resulta que tanto la longitud del lado *BC* como la de la altura que parte de *A* vienen dadas por números enteros. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) $sen\hat{A}$ es racional y $cos\hat{A}$ irracional **B)** $sen\hat{A}$ y $cos\hat{A}$ son números racionales

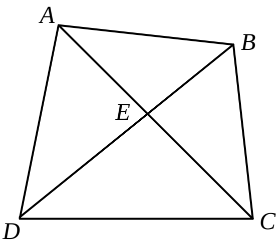
C) $sen\hat{A}$ es irracional y $cos\hat{A}$ racional **D)** $sen\hat{A}$ y $cos\hat{A}$ son irracionales

E) La irracionalidad de $sen\hat{A}$ y $cos\hat{A}$ depende de los valores de *BC* y de la altura

23 Sea $M = \{(x,\ y) /\ y \geq x^2\}$ y $N = \{(x,\ y) /\ x^2 + (y-a)^2 \leq 1\}$. De las siguientes afirmaciones, ¿cuál es condición necesaria y suficiente para que $M \cap N = N$?

A) $a \geq \frac{5}{4}$ **B)** $a = \frac{5}{4}$ **C)** $a \geq 1$ **D)** $0 < a < 1$ **E)** $1 < a < \frac{5}{4}$

24 En el cuadrilátero *ABCD* de la figura, que no está hecho a escala, se verifica que *AB* = 9 y *CD* = 12. Las diagonales *AC* y *BD* se cortan en *E*. Si *AC* = 14 y los triángulos *AED* y *BEC* tienen igual área, ¿cuál es la longitud de *AE*?



A) $\frac{9}{2}$ **B)** $\frac{50}{11}$ **C)** $\frac{21}{4}$

D) $\frac{17}{3}$ **E)** 6

25 El área de la región encerrada por la curva formada por los puntos (*x*, *y*) tales que $|x-1| + |y-1| = 1$ es:

A) 2 **B)** $\frac{5}{2}$ **C)** 3 **D)** π **E)** 4

XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (1ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**D**	1	**D**	1	**E**	1	**C**
2	**E**	2	**D**	2	**C**	2	**C**
3	**B**	3	**B**	3	**B**	3	**B**
4	**B**	4	**E**	4	**C**	4	**C**
5	**A**	5	**B**	5	**E**	5	**C**
6	**A**	6	**E**	6	**D**	6	**A**
7	**D**	7	**C**	7	**B**	7	**C**
8	**C**	8	**D**	8	**A**	8	**B**
9	**C**	9	**A**	9	**B**	9	**E**
10	**C**	10	**B**	10	**A**	10	**D**
11	**B**	11	**C**	11	**A**	11	**A**
12	**B**	12	**C**	12	**E**	12	**D**
13	**D**	13	**A**	13	**B**	13	**A**
14	**B**	14	**D**	14	**B**	14	**E**
15	**D**	15	**A**	15	**C**	15	**D**
16	**B**	16	**C**	16	**C**	16	**C**
17	**D**	17	**D**	17	**A**	17	**A**
18	**E**	18	**E**	18	**C**	18	**A**
19	**E**	19	**C**	19	**A**	19	**D**
20	**E**	20	**E**	20	**A**	20	**C**
21	**E**	21	**B**	21	**A**	21	**B**
22	**E**	22	**C**	22	**C**	22	**B**
23	**A**	23	**A**	23	**A**	23	**A**
24	**B**	24	**A**	24	**D**	24	**E**
25	**C**	25	**D**	25	**D**	25	**B**

XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (2ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**D**	1	**B**	1	**D**	1	**C**
2	**C**	2	**E**	2	**B**	2	**B**
3	**D**	3	**B**	3	**B**	3	**D**
4	**D**	4	**A**	4	**E**	4	**E**
5	**A**	5	**D**	5	**B**	5	**D**
6	**D**	6	**B**	6	**D**	6	**E**
7	**B**	7	**B**	7	**D**	7	**B**
8	**E**	8	**C**	8	**E**	8	**B**
9	**D**	9	**A**	9	**E**	9	**C**
10	**D**	10	**D**	10	**C**	10	**D**
11	**E**	11	**E**	11	**D**	11	**B**
12	**A**	12	**D**	12	**A**	12	**D**
13	**D**	13	**A**	13	**E**	13	**D**
14	**E**	14	**C**	14	**B**	14	**C**
15	**B**	15	**B**	15	**B**	15	**B**
16	**B**	16	**B**	16	**D**	16	**E**
17	**B**	17	**E**	17	**D**	17	**B**
18	**A**	18	**C**	18	**C**	18	**A**
19	**D**	19	**B**	19	**C**	19	**B**
20	**C**	20	**C**	20	**D**	20	**C**
21	**C**	21	**A**	21	**B**	21	**D**
22	**C**	22	**D**	22	**C**	22	**B**
23	**D**	23	**E**	23	**D**	23	**A**
24	**C**	24	**A**	24	**D**	24	**E**
25	**D**	25	**D**	25	**D**	25	**A**

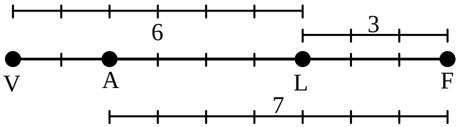
XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel I

1. (D) La diferencia es: 112 345 678. La suma de sus cifras es: $(8 \times 9): 2 + 1 = 37$

2. (E) Observando simplemente las flechas se deduce que Sonia es la mayor de todas las niñas.

3. (B) Con el apoyo de un diagrama lineal se puede apreciar el tiempo de llegada de cada uno:



Tuvo que esperar: $2 + 4 + 3 = 9$ minutos.

4. (B) Sustituyendo las letras por su valor numérico y resolviendo la expresión se obtiene el resultado pedido.

5. (A) Para hacer más comprensible la solución la expresamos de forma gráfica:

___________*__________*__________

←---------12 milésimas----------------→

Con dos cortes obtiene tres trozos y tarda 12 milésimas de segundo; luego en cada corte tarda seis milésimas de segundo.

Para hacer seis trozos necesitará hacer cinco cortes

___________*___________*__________*__________*___________

Por tanto, tardará: $5 \times 6 = 30$ milésimas de segundo.

6. (A) Entre Julián y Lucía tienen 3 €. 3 € − 1,40 € = 1,60 € les quedan.

Como a Julián le queda el triple que a Lucía, la cantidad sobrante se reparte en cuatro partes: tres para Julián y una para Lucía.

1,60: 4 = 0,40 €

A Julián le quedan 0,40 € $\times$ 3 = 1,20 €. A Lucía le quedan 0,40 €

2 € que tenía Julián menos 1,20 € que le quedan, ha gastado 0,80 € = 80 céntimos de euro.

7. (D) Los perímetros de las dos figuras tienen en común la longitud de los cuatro cuadrantes de circunferencia. Las longitudes no comunes son: para la 1ª figura: $2 \times 10 + 2 \times 5 =$ 20 + 10 = 30 cm; para la 2ª figura: 10 cm. La diferencia de sus perímetros es 30 – 10 = 20 cm

8. (C) Puede escribir los siguientes números:

I = 1; V = 5; X = 10; IV = 4; VI = 6; IX = 9; XI = 11; XV = 15;

XVI = 16; XIV = 14

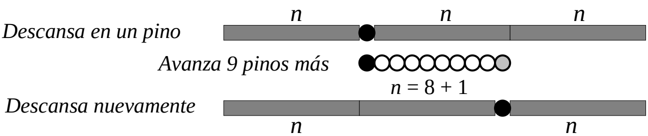
9. (C) Se trata de hacer un cuadrado con dos cerillas en cada lado, total 8 cerillas.

25	**25**
25	**25**

10. (C) Si se completa el cuadrado latino, en el que en cada fila y en cada columna no pueden aparecer letras iguales, la palabra AMOR aparece en la fila 3.

O	**A**	**R**	**M**
M	**R**	**A**	**O**
A	**M**	**O**	**R**
R	**O**	**M**	**A**

11. (B) En la figura, que explica el proceso de solución del problema, puede apreciarse que número de pinos es $3n + 1$ y, además, vemos que n es igual a 9; por lo tanto, en la fila hay 28 pinos.



12.(B) Se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma línea la última figura porque es la única que tiene menos de tres vértices impares.

13. (D) 98,42 t = 98420 kg

98420 : 4 = 24 605 kg que es la cuarta parte de lo que pesa la ballena.

24 605 – 2 115 = 22 490 kg tiene que engordar el ballenato.

14.(B) 668 : 19 = 35,~~15…~~ meses

35 – 1 = 34 meses con el mismo número de días…

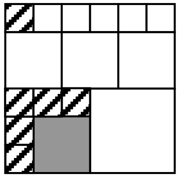
$19 \times 34 = 646$; 668 – 646 = 22 días

15. (D) En el diagrama propuesto se aprecia perfectamente la respuesta D.

16. (B) El número múltiplo de 3, 4 y 5 tiene que terminar en cero porque el producto 4×5 y la suma de sus cifras tiene que ser 3 o múltiplo de 3. El único número que cumple estas condiciones es 8 640. La suma de las dos cifras que faltan es: 4 + 0 = 4

17. (D) En la tabla se aprecia cómo se desarrolla la secuencia:
La figura cien tiene: 103 + 100 = 203 triángulos y círculos.

18. (E) Si dividimos el cuadrado sombreado en cuadrados de unidad uno (cuadrado rayado), obtenemos que el lado del cuadrado sombreado es de 3 m; por tanto, su área es 3 m × 3 m = 9 m^2.



19. (E) Mediante divisiones sucesivas de los restos se obtiene:

3 7 4 2	1 1 1 1	4 0 9	1 1 1	7 6	1 1
4 0 9	3	7 6	3	1 0	6

El resultado es la suma de los cocientes y el último resto. 3 + 3 + 6 + 10 = 22

20. (E) Las diferencias de cada una de las fracciones y la unidad son:

$$1-\frac{12}{23}=\frac{11}{23}\,;\quad 1-\frac{23}{34}=\frac{11}{34}\,;\quad 1-\frac{34}{45}=\frac{11}{45}\,;\quad 1-\frac{45}{56}=\frac{11}{56}\,;\quad 1-\frac{56}{67}=\frac{11}{67}$$

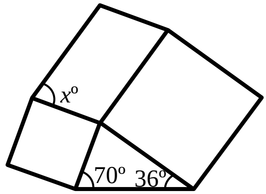
Como todas tienen el mismo numerador, la menor es la de mayor denominador, es decir, $\frac{11}{67}$. Por lo tanto la fracción más próxima a 1 es $\frac{56}{67}$

Un razonamiento más sencillo consiste en expresar cada fracción en forma decimal, dividiendo el numerador entre el denominador, pero el método es más largo ya que no podemos hacer uso de una calculadora:

$$\frac{12}{23}=0{,}5217...\,;\quad \frac{23}{34}=0{,}6764...\,;\quad \frac{34}{45}=0{,}7555...\,;\quad \frac{45}{56}=0{,}8035...\,;\quad \frac{56}{67}=0{,}8358...$$

21. (D) El mínimo común múltiplo de 15, 6, 12, 20 y 2 es 60.
Dividiendo el número de días de un año entre 60 se obtiene 6 enteros que es el mayor número de conciertos que pueden volver a dar todos juntos en ese año. En total podrán dar 7 conciertos como máximo en los díqas:
1 enero, 2 marzo, 1 mayo, 30 junio, 29 agosto, 28 octubre, 27 diciembre.

22. (E) La medida del ángulo que falta en el triángulo es:
180 – (70º + 36º) = 74º
La medida del ángulo obtuso del romboide es:
360º – (90º + 90º +74º) = 106º;
La medida del ángulo “*x*” es: 180º – 106º = 74º



23. (A) El resultado de la suma es 74 070 que corresponde al producto 6 × 12345.

24. (B) La probabilidad actual de sacar bola blanca es 2/6; para que la probabilidad sea 2/5 es necesario añadir 2 bolas grises y 2 bolas blancas.
P = 4/10 = 2/5

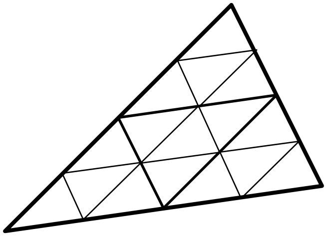
25. (C) Las letras que no tienen eje de simetría son: N, R, S y P.

XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

***Soluciones 1ª Fase Nivel* II**

1. (D) Se consigue con 2 billetes de 20 €, 1 billete de 5 €, 1 moneda de 2 €, 1 moneda de 1 **€,** 1 moneda de 50 céntimos, 2 monedas de 20 céntimos, 1 moneda de 5 céntimos y 1 moneda de 2 céntimos.

2. (D) Como se ve en la figura son $4 \times 4 = 16$.



3. (B) Si llamamos *S* a lo que mide la serpiente, *Co* a lo que mide el cocodrilo, *C* al codo y *P* al palmo, podemos escribir:

$$\left.\begin{array}{ll}(I) & S = 4\,C = 6P \\ (II) & Co = 6\,C\end{array}\right\} \text{ De (I): } C = \frac{6}{4}P \text{ . Sustituyendo en (II): } Co = 6 \cdot \frac{6}{4}P = 9P$$

4. (E) Sustituyendo cada letra por su valor y operando, tenemos:

$$\left[2 + (2+1)^2 - 1\right] : \left[2 \cdot (1+2) - 1\right] = (2+3^2-1) : (2 \cdot 3 - 1) = (2+9-1) : (6-1) = 10 : 5 = 2$$

5. (B) Si llamamos a, b, c (de izquierda a derecha) a los tres números del medio, podemos escribir:

$$\left.\begin{array}{lr} 10 + a + b & = 100 \\ (II) \quad a + b + c & = 200 \\ b + c + 130 & = 300 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} (I) \quad a + b = 90 \\ \\ (III) \; b + c = 170 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = 90 - b \\ \\ c = 170 - b \end{array}\right\} \text{Sustituyendo en (II)}$$

tenemos: $90 - b + b + 170 - b = 200;\ 90 + 170 - 200 = b;\ b = 60.$

Otra forma de resolverlo: (I) + (III) – (II)

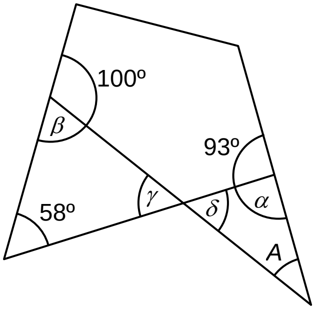
$a + b + b + c - (a + b + c) = 90 + 170 - 200 \Rightarrow b = 60.$

6. (E) El número es múltiplo de 3, 5 y 11. El m.c.m. (3, 5, 11) = $3 \cdot 5 \cdot 11 = 165$.

Este número no cumple la condición impuesta en el enunciado: “ninguna de sus cifras es la suma de las otras dos”.

Múltiplos de 165 (y por tanto de 3, 5 y 11) de tres cifras: 330, 495, 660, 825, 990.

El único que cumple la condición citada es el 825.



7. (C) En la figura vamos calculando los ángulos:

$\alpha = 180º - 93º = 87º$, $\beta = 180º - 100º = 80º$,

$\gamma = 180º - (58º + 80º) = 180º - 138º = 42º$,

$\delta = 42º$ (por opuestos por el vértice)

$\hat{A} = 180º - (42º + 87º) = 180º - 129º = 51º$

8. (D) Probando con n = 3, 5 y 7, vemos que para n = 7 resulta: $2 \cdot 7 + 1 = 15$, que no es primo.

9. (A) $\left(1+\frac{1}{2}\right)$ sardinas $\rightarrow$ $\left(1+\frac{1}{2}\right)$ pesetas $\Rightarrow$ 1 sardina $\rightarrow$ 1 peseta,

por lo tanto, $\left(7+\frac{1}{2}\right)$ sardinas $\rightarrow$ $\left(7+\frac{1}{2}\right)$ pesetas

10.(B) Al ser divisible entre 33, el número es múltiplo de 3 y de 11.

Por ser múltiplo de 3 $\Rightarrow 2 + 8 + ▲ + 7 + 5 + ■ = \dot{3} \Rightarrow 22 + ▲ + ■ = \dot{3}$ (I)

Por ser múltiplo de 11 $\Rightarrow 8 + 7 + ■ - (2 + ▲ + 5) = 0$ o múltiplo de 11 $\Rightarrow$

8 + ■ – ▲ = 0 ó 11 (quedan descartados los restantes múltiplos de 11 ya que ■ puede valer como máximo 9 y ▲ como mínimo 0).

Con la opción 8 + ■ – ▲ = 0 , quedaría: ■ – ▲ = – 8 (que se cumpliría para ■ = 1, ▲ = 9, o ■ = 0, ▲ = 8; sin embargo (I) no se cumple con estos valores).

Veamos ahora con la opción 8 + ■ – ▲ = 11; quedaría:

$$■ + ▲ = \dot{3} - 22$$
$$■ - ▲ = 3$$

Probando distintos múltiplos de 3 (24, 27, 30, 33, 36, 39), para el caso de 33 resulta ▲ = 4 (opción B de las respuestas).

Para el múltiplo 27 resulta ■ = 4, ▲ = 1 que es otra posibilidad (que no viene recogida en las respuestas).

No se prueban múltiplos de 3 inferiores a 24 pues ■ + ▲ resulta negativo, ni superiores a 39 ya que resultan valores de dos cifras. En los restantes casos (24, 30, 36, 39) resultan valores fraccionarios o de dos cifras.

11.(C) Las pistas del problema, llamando a los números de las casillas tal como se indica en la figura, se expresan como:

C1: a + d + g = 24 (I)

F1: a · b · c = 27 (II)

F2: d + e + f = 16 (III)

	C1 ↓	C2 ↓	C3 ↓
F1⟶	a	b	c
F2⟶	d	e	f
F3⟶	g	h	i

C3: c + f + i = 14 (IV)
F3: g, h, i son pares (V)
De (II), deducimos que a, b y c serán 1, 3 y 9 (en este u otro orden)
De (I), deducimos que a, d y g serán 7, 8 y 9 (en este u otro orden). Por (I). (II) y (V) se deduce que a = 9, d = 7, g = 8
De (III), se deduce que e + f = 9, por lo tanto e y f serán 4 y 5 (en este u otro orden)
De (IV), como i es par y c es impar se deduce que f es impar, es decir, f = 5, luego e = 4.

12.(C) 123 456 no es múltiplo de 9 pues la suma de sus cifras no lo es.

123^{456} es múltiplo de 9 ya que 123 es multiplo de 3.

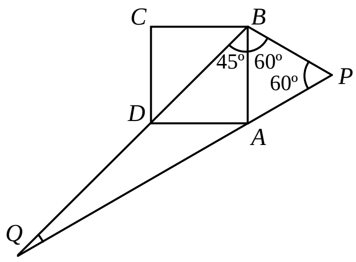
456^{123} es múltiplo de 9 ya que 456 es multiplo de 3.

123 · 456 es múltiplo de 9 ya que 123 y 456 son múltiplos de 3.
12 · 34 · 56 no es múltiplo de 9 ya que 12 es múltiplo de 3 pero 34 y 56 no lo son.

13.(A) Goyo ha fumado durante 38 años (72 – 34). Cuando tenga 38 · 2 = 76 años llevará la mitad de su vida sin fumar, es decir, dentro de 4 años, en el 2014.

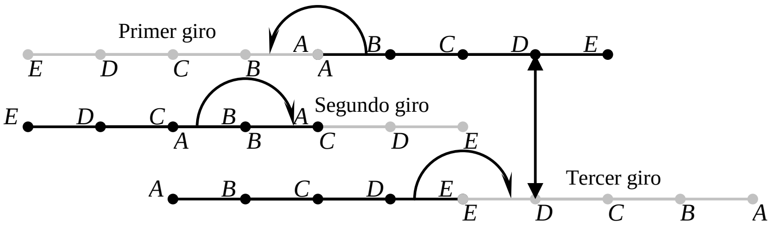
14.(D) Como al quitar la primera cifra tiene que quedar un cuadrado perfecto, estos números tan curiosos tienen que ser de la forma C00 , C01, C04, C09, C16, C25, C36, C49, C64, C81, siendo C la cifra de las centenas; pero como, al quitar la cifra de la unidades, el número resultante también tiene que ser cuadrado perfecto, este número sólo podrá acabar en 0, 1, 4, 5, 6 y 9, lo que nos permite descartar los candidatos C25, C36 y C81. Por otra parte, como no hay ningún cuadrado perfecto de dos cifras que termine en 0, también desecharemos a C00 , C01, C04 y C09. Sin embargo, el C16 da lugar al 816; el C49, al 649;y el C64, al 164 y al 364. Por lo tanto, la suma pedida es 816+649+164+364=1993.

15.(A) Como *PA* = *PB* = *AB*, el triángulo *PAB* es equilátero; por lo tanto, los ángulos *APB* y *PBA* miden, cada uno, 60º, y el ángulo *PQB* será igual a:
180º – (60º+60º+45º) = 180º – 165º = 15º



16.(C) Tomando 12 345 como multiplicando y 11111 como multiplicador, se obtiene enseguida el producto 137 165 295, que, como se ve, tiene 7 cifras distintas.

17.(D)



Después de los tres giros, el punto *D* queda en la misma posición que al principio

18.(E) Por ser A + L = L + A y A distinto de R, la suma de las unidades tiene que ser mayor que 10 (para que nos podamos "llevar" 1).
Luego A = R +1 y L + A +1 = 10 + A; por lo tanto, L =9.
Como al sumar las decenas nos llevamos 1, tiene que ocurrir que O + S +1= M, lo que implica que las letras O y S tienen que representar a las cifras 2 y 5, mientras que M sólo puede ser igual a 8. Nos quedan sólo las cifras 6 y 7 y las letras A y R, pero como A = R +1, A =7 y R =6.
Finalmente, la información que nos dice que OLA no es múltiplo de 11 nos lleva a concluir que la letra O tiene que representar a la cifra 5.
Conclusión: S =2

$$\begin{array}{cccc} & \mathbf{O} & \mathbf{L} & \mathbf{A} \\ + & \mathbf{S} & \mathbf{A} & \mathbf{L} \\ \hline & \mathbf{M} & \mathbf{A} & \mathbf{R} \end{array}$$

19.(C) Designando los pesos de cada persona con su inicial, podemos escribir:
A + B = 78; B + C = 76; C + D = 80; D + E = 76; E + A = 80
Sumando miembro a miembro estas 5 igualdades resulta:
2A + 2B + 2C + 2D + 2E = 390; A +B +C +D +E =195; A +(B +C) +D +E = 195;
A +76 +D +E = 195; A +D +E = 195 – 76 = 119.

20.(E) Los números formados por las dos últimas cifras que al multiplicarlos por 2 dan lugar a números de dos cifras son 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, ... 49, que originan, respectivamente, los 45 números *dobledés* siguientes: 1005, 1206, 1407, ... 9849.

21.(B) Para rodear un cuadrado de 18×18 baldosas negras, necesitaremos colocar 18 baldosas blancas a su derecha, 18 a su izquierda, 18 en la parte superior, 18 en la inferior y una para cada esquina. En total: 18 · 4 + 4 = 72 + 4 = 76.

22.(C) Asientos vacíos: 850 – 748 = 102.
Como $\frac{12 \cdot 850}{100} = 102$, la frase I es cierta.
Si de los 850 asientos, 748 está ocupados, por cada 25 lo estarán *x*. La proporción es: $\frac{850}{748} = \frac{25}{x} \Rightarrow x = \frac{25 \cdot 748}{850} = 22$; por lo tanto, la frase II también es correcta.

Como $\frac{3 \cdot 850}{4} = 636$, que es menor que 748, la frase III también es verdadera.

Conclusión: Las tres frases son ciertas.

23.(A) Como un cubo tiene 12 aristas, cada una medirá 48 : 12 = 4 ; por lo tanto, el volumen del cubo será 4 · 4 · 4 = 64.

24.(A) El ángulo *x* es suplementario del ángulo interior del triángulo que está sin nombrar. Por lo tanto, si le llamamos *t*, por ejemplo, ocurrirá que $x + t = 180^o$. Y como la suma de los tres ángulos de un triángulo es 180º, será $y + z + t = 180^o$.
Luego $x = y + z$.

25.(D) Hay 18 números que cumplen las condiciones pedidas, como puede verse en la siguiente tabla.

<table>
<tr><th>1ª cifra</th><th>2ª cifra</th><th>3ª cifra</th><th>4ª cifra</th><th>Número</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">5</td><td>1</td><td>5</td><td>1515</td></tr>
<tr><td>9</td><td>5</td><td>1595</td></tr>
<tr><td>2</td><td>6</td><td>2</td><td>6</td><td>2626</td></tr>
<tr><td>3</td><td>7</td><td>3</td><td>7</td><td>3737</td></tr>
<tr><td rowspan="4">4</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">4</td><td>0</td><td>4040</td></tr>
<tr><td>8</td><td>4048</td></tr>
<tr><td rowspan="2">8</td><td rowspan="2">4</td><td>0</td><td>4840</td></tr>
<tr><td>8</td><td>4848</td></tr>
<tr><td rowspan="4">5</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">5</td><td>1</td><td>5151</td></tr>
<tr><td>9</td><td>5159</td></tr>
<tr><td rowspan="2">9</td><td rowspan="2">5</td><td>1</td><td>5951</td></tr>
<tr><td>9</td><td>5959</td></tr>
<tr><td>6</td><td>2</td><td>6</td><td>2</td><td>6262</td></tr>
<tr><td>7</td><td>3</td><td>7</td><td>3</td><td>7373</td></tr>
<tr><td rowspan="2">8</td><td rowspan="2">4</td><td>0</td><td>4</td><td>8404</td></tr>
<tr><td>8</td><td>4</td><td>8484</td></tr>
<tr><td rowspan="2">9</td><td rowspan="2">5</td><td>1</td><td>5</td><td>9515</td></tr>
<tr><td>9</td><td>5</td><td>9595</td></tr>
</table>

XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel III

1. (E) El área buscada es igual al área de un rectángulo de base 3*a* y altura *b*, esto es, 3*ab*.

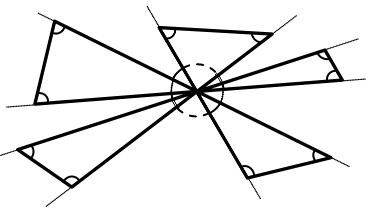
2. (C) Llamando *x* al número de alumnos, podemos calcular el precio del autobús de dos formas: $14x + 4$ ó $16x – 6$. Como esas cantidades deben ser iguales, obtenemos la ecuación $14x + 4 = 16x – 6$ cuya solución es $x = 5$. Así pues, el número de alumnos es 5 y el precio del autobús $14 \cdot 5 + 4 = 74$.
Cada alumno debe pagar 74 : 5 = 14,80 euros.

3. (B) Comencemos por la diagonal: 16 y 27 son dos términos consecutivos de una progresión aritmética luego la razón es 27 – 16 = 11 y eso nos permite rellenar toda la diagonal: 16 – 11 = 5, 27 + 11 = 38 y 38 + 11 = 49. A continuación nos fijamos en la última columna de la que tenemos el primer y el quinto término de la progresión: Como $49 = 21 + 4\,d$ obtenemos que la diferencia es 7 y por tanto $x = 49 – 7 = 42$.

5				21
	16			
		27		
			38	*x*
				49

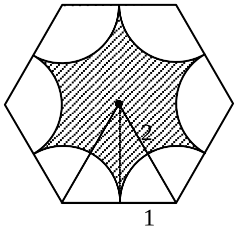
4. (C) Como deben ser impares ninguno de sus factores puede ser 2. Comencemos de menor a mayor: $3·3·3 = 27$, $3·3·5 = 45$, $3·3·7 = 63$, $3·5·5 = 75$, $3·3·11 = 99$ y ya no hay más. En total hay cinco.

5. (E) Observa que los la suma de los ángulos de los vértices concurrentes es 180º pues cada uno de ellos aparece dos veces en el círculo, uno dentro de un triángulo y otro fuera. Como la suma de los ángulos de los cinco triángulos es 5·180º, si quitamos 180º de los ángulos de los vértices concurrentes, la suma de los ángulos que nos piden es 4·180º = 720º.

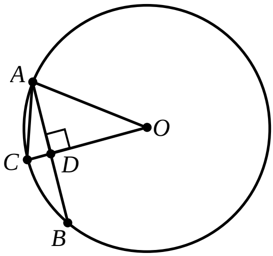


6. (D) Como el cuadro del cociente entre la primera y la segunda solo puede tener una cifra ese cociente puede ser 1, 2 ó 3 y tenemos las siguientes posibilidades:
Si la segunda es 1, la primera puede ser 2 ó 3 y las combinaciones son 214, 319.
Si la segunda es 2, la primera solo puede ser 6 y la combinación es 629.
Si la segunda es 3, la primera solo puede ser 6 y la combinación es 634.
La segunda cifra no puede ser mayor que 3 ya que entonces tendríamos que repetir cifra. En total hay 4 combinaciones.

7. (B) Como los ángulos de un hexágono suman 720º, los sectores circulares blancos forman dos circunferencias de radio 1 dm. Así pues el área buscada es el área del hexágono regular de 2 dm de lado menos el área de dos circunferencias de radio 1 dm: $6\cdot\frac{2\cdot\sqrt{3}}{2}-2\cdot\pi\cdot 1^2=6\sqrt{3}-2\pi$



8. (A) Comenzamos haciendo un dibujo.
Si C es el punto medio del arco AB, el radio OC corta a la cuerda AB perpendicularmente y por su punto medio D (pues los triángulos ACO y BCO son iguales). Observa los triángulos rectángulos OAD y ACD. Del triángulo OAD sabemos que AO = 5 y AD =3, por tanto, sus lados forman la famosa terna pitagórica (3, 4, 5), luego OD = 4. Del triángulo ACD tenemos $CD = CO - DO = 5 - 4 = 1$ y AD = 3 . Así pues, $AC=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$.

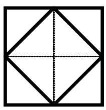


9. (B) Sabemos que $a_6 = 2a_5 + a_4$ y que $a_5 = 2a_4 + a_3$. Sustituyendo los valores que conocemos obtenemos el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas $\begin{cases}128=2a_5+a_4\\ a_5=2a_4+9\end{cases}$ y al resolverlo obtenemos que a_5 = 53.

10.(A) Si el precio inicial de ordenador es x euros, en la tienda A pagará $0{,}85x - 90$ y en la B pagará $0{,}75x$. Como en la A le cuesta 15 euros menos que en la B, escribimos la ecuación $0{,}85x - 90 = 0{,}75x - 15$ cuya solución es $x = 750$.

11.(A) Buscamos ternas de números enteros positivos (n, m, m+1) con $n < m$ y que cumplan que $(m+1)^2=m^2+n^2$. Así pues debe ser $n^2=2m+1$ esto es, $2m + 1$ debe ser un cuadrado perfecto y como es impar, tenemos.
Si $2m + 1 = 3^2$; $m = 4$; si $2m + 1 = 5^2$; $m = 12$…
Como $m < 100$, $2m+1 < 201$, podemos continuar calculando m para cuatro valores más: 7^2, 9^2, 11^2 y 13^2 pues $15^2 > 201$. En total hemos encontrado 6 ternas.

12.(E) No te líes haciendo cuentas. Simplemente hay que observar que al hacer ese proceso el área se reduce a la mitad, como ves en la figura.
Así pues, $S_2=\frac{1}{2}S_1=8$ y $S_3=\frac{1}{2}S_2=4$.



13.(B) Si llamamos x e y a los catetos y z a la hipotenusa, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x\cdot y}{2} = 320 \\ x + y + z = 128 \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$ que parece un poco tedioso de resolver

Reescribimos el sistema del siguiente modo: $\begin{cases} xy = 640 \\ (x+y)^2 = (128-z)^2 \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$.

La segunda ecuación nos dice que $x^2 + y^2 + 2xy = 128^2 - 256z + z^2$. Utilizando la primera y la tercera ecuación tenemos que $z^2 + 1280 = 128^2 - 256z + z^2$ luego $256z = 128(128-10)$ y, por tanto, $z = 59$.

14.(B) Comencemos observando qué ocurre con la última cifra de las potencias de 2:
$2^1 = 2$ $2^2 = 4$ $2^3 = 8$ $2^4 = *6$
$2^5 = *2$; $2^6 = *4$ $2^7 = *8$ $2^8 = *6$…
Como ves, las terminaciones son cíclicas y se van repitiendo de 4 en 4 luego, para saber la última cifra de una potencia de 2, basta conocer el resto de dividir el exponente entre 4.
k es múltiplo de 4: $2^{2010} + 2010^2 = (2^2)^{1005} + (2\cdot 1005)^2 = 4^{1005} + 4 \cdot 1005^2$, así que 2^k acaba en 6.
Por otro lado, k acaba en 4 pues $2010 = 4\cdot 502 + 2$ y, por tanto $2^{2010} = *4$ y 2010^2 acaba en cero, luego k acaba en $4 + 0 = 4$ y, por tanto, k^2 en 6.
Así pues $2^k + k^2$ es $*6 + *6$ que acaba en 2.

15.(C) $AD = AB + BC + CD$ por otro lado,

$AB = 4BD$ y $AB + BD = AD$ entonces, $AB = \dfrac{4}{5}AD$ y

$AC = 9\,CD$ y $AC + CD = AD$ entonces, $CD = \dfrac{1}{10}AD$.

Luego, $AD = AB + BC + CD = \dfrac{4}{5}AD + BC + \dfrac{1}{10}AD$ y, por tanto,

$$BC = \left(1 - \frac{4}{5} - \frac{1}{10}\right)AD = \frac{1}{10}AD.$$

16.(C) Se puede hacer probando, pero si observamos que para que se cumpla la igualdad, x debe ser par y $3x < 50$, obtenemos que x debe ser un número par entre 0 y 16 (ambos incluidos) y, por tanto, hay 9 parejas.

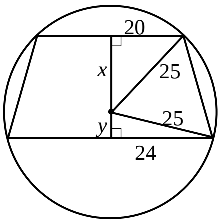
17.(A) Las soluciones de la ecuación son $x = \dfrac{2a+\sqrt{4a^2-4ab}}{2a}$ y $x = \dfrac{2a-\sqrt{4a^2-4ab}}{2a}$ y la media aritmética es $\dfrac{\dfrac{2a+\sqrt{4a^2-4ab}}{2a}+\dfrac{2a-\sqrt{4a^2-4ab}}{2a}}{2}=1$. Observa que la ecuación tendrá dos soluciones distintas siempre que a > b.

18.(C) En un cuadrado mágico de 3×3 el número central es un tercio del valor constante de la suma de las filas, columnas y diagonales (intenta demostrarlo). Si llamamos N al valor constante de las sumas tenemos que $8 + \dfrac{N}{3} + 10 = N$, luego $N = 27$ y el valor central es 9. Con estos datos es fácil continuar completando el cuadrado. El número mayor es 15.

8	15	4
5	9	13
14	3	10

19.(A) Tenemos un polinomio de la forma $x^2 + 20x + a$ y queremos que su valor en 1, que es $21 + a$, sea lo más grande posible. Así pues, buscamos el mayor valor de a de modo que el polinomio tenga dos raíces enteras distintas. Como sus raíces son $\dfrac{-20+\sqrt{20^2-4a}}{2} = -10+\sqrt{100-a}$ y $-10-\sqrt{100-a}$ el mayor valor de a que hace que esos números sean enteros y diferentes es 99 y por tanto el valor en 1 será 120.

20. (A) Para hallar la altura del trapecio tendremos que aplicar dos veces el teorema de Pitágoras:
$x^2 = 25^2 - 20^2 = (25 + 20)\ (25 - 20) = 45 \cdot 5 = 9 \cdot 25$. Luego $x = 15$.
$y^2 = 25^2 - 24^2 = (25 + 24)\ (25 - 24) = 49$. Luego $y = 7$.
La altura del trapecio es 22 y su área
$\dfrac{48+40}{2}\cdot 22 = 968$ cm^2.

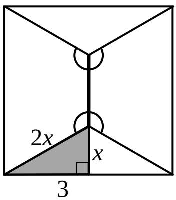


21.(A) Para ser múltiplo de 12 hay que serlo de 3 y de 4. Cualquier número formado con esas cifras es múltiplo de 3 pues la suma de sus cifras es 21 que es múltiplo de 3. Así pues, solo debemos ver cuándo es múltiplo de 4. Un número es múltiplo de 4

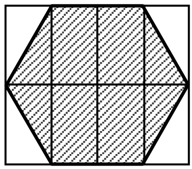
si lo es el número formado por sus dos últimas cifras. Así pues el número podrá tener la forma:
****12; ****16; ****24; ****32; ****36; ****52; ****56; ****64.
Como para cada terminación hay $4·3·2·1 = 24$ combinaciones posibles, en total hay $24 \cdot 8 = 192$ posibilidades.

22.(C) Vamos despacio: $9 \cdot 99 \cdot 999 \cdot 9\,999 \cdot 99\,999 \cdot 999\,999 = 3^2 \cdot (3^2 \cdot 11) \cdot (3^2 \cdot 111) \cdot (3^2 \cdot 1111) \cdot (3^2 \cdot 11111) \cdot (3^2 \cdot 111111)$. Pero 111 y 111111 son ambos múltiplos de 3 y no lo son de 9 lo que nos da un 3^2 más. La potencia máxima es $(3^2)^7 = 3^{14}$.

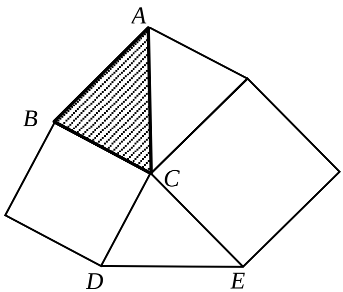
23.(A) Observa que los ángulos del triángulo rectángulo sombreado valen 90º, 30º y 60º, luego el cateto opuesto al ángulo de 30º vale la mitad de la hipotenusa (cae en la cuenta de que este triángulo es la "mitad" de un equilátero y su base es medio lado). Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que:
$4x^2 = 3^2 + x^2$ y por tanto $x = \sqrt{3}$ con lo que el segmento AB mide $6 - 2\sqrt{3}$.



24.(D) Como la base del rectángulo mide el doble del lado del hexágono, podemos dividir la figura en ocho rectangulitos iguales. Como el área del hexágono es 3/4 del área del cuadrado, su área es 48 cm^2.



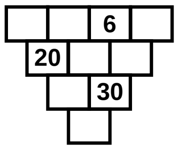
25.(D) Los triángulos ABC y CDE son iguales pues tienen dos lados iguales ($AB = CE = 5$ y $BC = CD = 4$) y el ángulo que forman también es igual (AB es perpendicular a CE y BC es perpendicular a CD) luego sus áreas son iguales y por tanto, el área del paralelogramo es el doble del área del triángulo, 16 cm^2.



XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel IV

1. (C) El número mínimo que podemos colocar en la tercera casilla de la 2ª fila es 7, de modo que el número máximo que puede ocupar la segunda casilla de dicha fila es 23. Así el máximo de primera casilla de la tercera fila será 43 y el máximo de la última fila 73

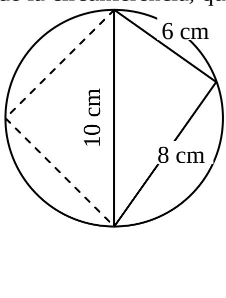


2. (C) En un cuadrado mágico 3×3 el número del cuadro central es la media de los nueve números y también la media de la fila central, de la columna central y de cada una de las dos diagonales, por lo tanto en el cuadro central hay un 9. La suma de cada fila, columna o diagonal es 27. Una vez resuelto, el cuadrado mágico queda:

8	15	4
5	9	13
14	3	10

3. (B) Si llamamos *x* al lado del hexágono mayor e *y* al del menor tenemos, por el teorema del coseno: $y^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{4x^2}{9} - 2\frac{x}{3}\frac{2x}{3}\cos(120^\circ) = \frac{7x^2}{9}$. Puesto que las áreas son proporcionales a los cuadrados de los lados: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{x^2}{y^2} = \frac{9}{7}$ y $A_2 = 28\ cm^2$

4. (C) Una de las diagonales de dicho cuadrilátero es el diámetro de la circunferencia, que vale $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. Dividiendo el cuadrilátero en dos triángulos rectángulos por dicha diagonal, uno de los dos triángulos es fijo de 24 cm^2 de área. Si el otro tiene área máxima, el cuadrilátero tiene área máxima. Esto se produce cuando el triángulo es isósceles. Como la hipotenusa es 10 cada cateto mide $5\sqrt{2}$, y el área total máxima es 24 + 25 = 49



5. (C) Como $\begin{cases} z \cdot t = 6_{60^\circ} \\ \dfrac{z}{t} = 3_{30^\circ} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z \cdot t = 6_{60^\circ} \\ z = 3_{30^\circ} \cdot t \end{cases} \Rightarrow 3_{30^\circ} \cdot t \cdot t = 6_{60^\circ} \Rightarrow t^2 = 2_{30^\circ} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = \left(\sqrt{2}\right)_{15^\circ} \Rightarrow z_1 = 3\sqrt{2}_{\,45^\circ} = 3 + 3i \\ t_2 = \left(\sqrt{2}\right)_{195^\circ} \Rightarrow z_2 = 3\sqrt{2}_{\,225^\circ} = -3 - 3i \end{cases}$

6. (A) El área del romboide es $A = l_1 \cdot l_2 \cdot sen(150^\circ) = 13 \cdot 20 \cdot \dfrac{1}{2} = 130 \text{ cm}^2$

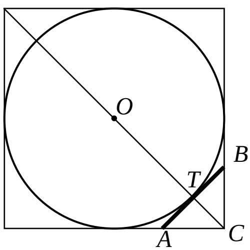
7. (C) Restando miembro a miembro las dos ecuaciones tenemos $y - x = x^2 - y^2 - 7(x - y)$. Es decir: $(x - y)(x + y) - 6(x - y) = 0$, Y sacando factor común $(x - y)\left[(x + y) - 6\right] = 0$. De aquí $x - y = 0$ o $x + y = 6$

8. (B) $A_{CBF} = \dfrac{1}{3} A_{ABC} = 3$ porque tiene la misma base y un tercio de su altura. Por otro lado $A_{ADE} = \dfrac{2}{9} A_{ABC} = 2$ porque su base es dos tercios de la base del mayor y su altura un tercio de la altura del mayor. El área del cuadrilátero es 9 – 3 – 2 = 4.

9. (E) El triángulo *AST* tiene la misma base y la misma altura que el triángulo *SOT*, por tanto su misma área: $\dfrac{r \cdot r \cdot sen(\alpha)}{2} = \dfrac{r^2 sen(\alpha)}{2}$

10.(D) $p(\text{al menos dos caras}) = 1 - p(0 \text{ caras}) - p(1 \text{ cara}) = 1 - \dfrac{1}{32} - \dfrac{5}{32} = \dfrac{13}{16}$

11.(A) $OT = r = \dfrac{1}{2}$



$OC = \dfrac{d}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$TC = OC - OT = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}$

$AB = 2AT = 2TC = \sqrt{2} - 1$

12.(D) El número formado por las dos últimas cifras debe ser tal que su doble también sea de dos cifras. Esto lo cumplen todos los números desde el 05 hasta el 49, que son en total 45 números.

13.(A) La afirmación contrarrecíproca de una afirmación verdadera, también es verdadera. Si $H \Rightarrow T$ es cierto, entonces $no\,T \Rightarrow no\,H$ también es cierto **.** Por tanto, si todos los marcianos veranean en Venus, podemos asegurar que un ser que no veranea en Venus no es marciano.

14.(E) El número de heptágonos es $C_{10,7} = \binom{10}{7}$ El número de triángulos es $C_{10,3} = \binom{10}{3}$

y como $\binom{10}{7} = \binom{10}{3}$, su diferencia es 0.

15.(D) Como los seis coeficientes han de ser 1 o -1, y 1 debe ser raíz, tiene que haber tres 1 y tres -1. Las posibles formas de colocarlos son $PR_6^{3,3} = \dfrac{6!}{3!\cdot 3!} = 20$

16.(C) $p(\text{números consecutivos}) = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18} = 0{,}2\overset{\frown}{7}$.

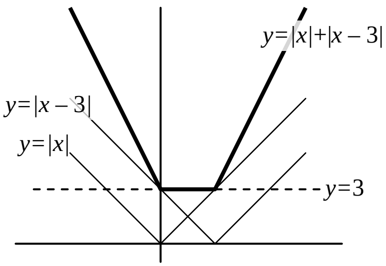
17.(A) Cambiando a base 2 el logaritmo de base 4, tenemos:

$$\log_2(x-16) = \frac{\log_2(x-4)}{2} \quad \Rightarrow \quad (x-16)^2 = x-4 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 33x + 260 = 0 \,.$$

De las dos soluciones de esta ecuación, la primera, 13, es extraña porque no existe $\log_2(-13)$. La segunda es 20, y la suma de sus cifras es 2 + 0 = 2

18.(A) $|x| + |x-3| = \begin{cases} 3-2x & x<0 \\ 3 & 0 \le x \le 3 \\ 2x-3 & x>3 \end{cases}$.

Excepto cuando $x \in [0,\,3]$ en los demás casos resulta mayor que 3, por tanto la solución a la inecuación $|x| + |x-3| > 3$ es $x \in (-\infty,0) \cup (3,\infty)$



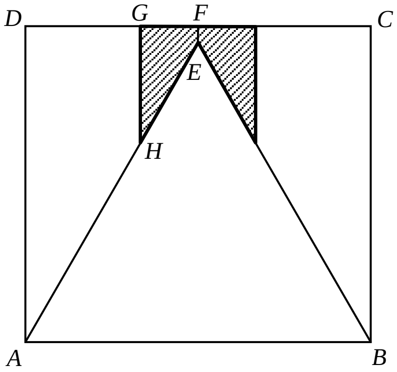
Para verlo mejor podemos representar las funciones $y = |x|$, $y = |x-3|$, $y = |x|+|x-3|$

19.(D) Sabemos que $\sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x = 1 + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{a^2+4}{4} \Rightarrow \cos x = \dfrac{2}{\sqrt{a^2+4}}$

20. (C) $\left.\begin{array}{l} r = \log a^2 \\ L = \log b^4 \end{array}\right\} \Rightarrow \log b^4 = 2\pi \log a^2 \Rightarrow \log b = \pi \log a \Rightarrow \log_a b = \dfrac{\log b}{\log a} = \pi$.

21.(B) El área de la región pedida es el doble del área del trapecio *EFGH*. Es decir

$A_R = 2\cdot\dfrac{GH+EF}{2}\cdot GF = (GH+EF)\cdot GF$.



La altura del trapecio es la mitad de la tercera parte del lado, por tanto $\dfrac{1}{6}$.

Por otro lado,

$GH = 1 - \dfrac{1}{3} tg(60^{\circ}) = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ y

$EF = 1 - \dfrac{1}{2} tg(60^{\circ}) = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Así el área es $A_R = \left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3} + 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{6} = \dfrac{12-5\sqrt{3}}{6}$.

22.(B) Las potencias de 2 acaban en 2, 4, 8 ó 6 periódicamente con periodo 4. Si el exponente es múltiplo de 4, la terminación es 6. Si es múltiplo de 4 más 1, la terminación es 2. Si es múltiplo de 4 más dos, la terminación es 4 y si es múltiplo de 4 más 3 la terminación es 8.

$2^k + k^2 = 2^{2^{2010}+2010^2} + (2^{2010}+2010^2)^2 = 2^{2^{2010}}\cdot 2^{2010^2} + 2^{4020} + 2^{2011}\cdot 2010^2 + 2010^4$

Si en la expresión anterior sustituimos cada número por su residuo módulo 10, tenemos: Residuo $\left(2^k + k^2\right) = \{6\}\cdot\{6\} + \{6\} + \{0\} + \{0\} = \{6\} + \{6\} = \{2\}$

23.(A) El volumen que sobresale del agua es $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{8} V_T = \dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{1}{3}\pi R^2\cdot H$. Por tanto,

$\dfrac{r^2\cdot h}{R^2\cdot H} = \dfrac{1}{8}$. Pero como $\dfrac{r}{R} = \dfrac{h}{H} \Rightarrow \left(\dfrac{h}{H}\right)^3 = \dfrac{1}{8} \Rightarrow \dfrac{h}{H} = \dfrac{1}{2}$

24.(E) Sean los puntos $A(-a,a^2)$ *y* $B(a,a^2)$ y el punto $C(c,c^2)$. Evidentemente $c < a$ para que el ángulo en C pueda ser recto.

El producto escalar de los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ debe ser 0.

Entonces: $(-a-c)\cdot(a-c)+(a^2-c^2)(a^2-c^2)=0 \;\Rightarrow\; (a^2-c^2)^2 = a^2-c^2$

Pero esto solo puede ser si $\begin{cases} a^2-c^2=0 \\ a^2-c^2=1 \end{cases}$.

La primera posibilidad no tiene sentido, por tanto la buena es la segunda.

Como el área del triángulo es $A=\dfrac{2a\cdot(a^2-c^2)}{2}$ y sabemos que vale 2010, resulta que a = 2010, a^2 = 4.040.100 y c^2 = 4.040.099.
La suma de las cifras de c^2 es 4 + 0 + 4 + 0 + 0 + 9 + 9 = 26.

25.(B) Los enteros positivos, x, que cumplen: $\left.\begin{matrix} x+7=5k \\ x+5=7p \end{matrix}\right\}$ son

$$x=5k-7=7p-5 \quad\Rightarrow\quad 5k+5=7p+7 \quad\Rightarrow\quad \frac{p+1}{k+1}=\frac{5}{7}.$$

El menor valor posible para x se obtiene de los menores valores posibles para k y p que son, 6 y 4, respectivamente, lo que producen un menor valor posible de x = 23.
La suma de las cifras de x es 5.

XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel I

1. (D) La diferencia es 876 543 211, y la suma de sus cifras se hace más fácilmente si nos damos cuenta de que $8+1=7+2=6+3=5+4=9$. Con lo que la suma pedida es: $9\cdot 4+1=37$.

2. (C) Como la manecilla recorre $\frac{360}{12}=30^{\text{o}}$ por hora, en 3,5 horas recorrerá $30\cdot 3{,}5=105^{\text{o}}$.

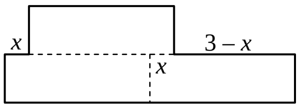
3. (D) Si Juan pescó x peces, Sofía pescó $x+5$ y Pinchamé $x+8$. En consecuencia, entre los tres pescaron $3x+13=34$, que resuelta da $x=7$. Como entre Juan y Pinchamé pescaron $2x+8$ peces, basta sustituir ahí el valor de x para obtener los 22 peces que pescaron entre los dos últimos.

4. (D) Como x pertenece a la vez a una columna y una diagonal, la suma de los dos elementos restantes deberá ser igual. En nuestro caso tendremos: $z+12=15+24\Rightarrow z=27$, y ya con la segunda fila completa podemos calcular la suma común (que llamaremos M): $M=27+15+3=45$, de donde $x=45-15-24=6$.

x		
z	15	3
12		24

En realidad, en este problema "sobran datos", pues si sumamos las dos diagonales más la fila y la columna centrales tendremos $4M$, pero por otra parte vemos que hemos sumado todos los números del cuadrado una vez, excepto el número de la casilla central que lo hemos sumado 4 veces. Tenemos pues: $4M-3\cdot 15=3M\Rightarrow M=45$.

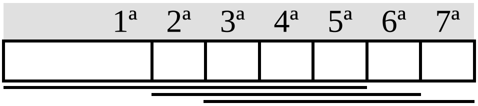
5. (A) Dado que los tres rectángulos miden 3 cm de base y 1 cm de altura, de la figura se desprende que el perímetro es: $1+3+1+(3-x)+1+6+1+x=16$ cm.



6. (D) Si la urraca le quita n avellanas y el oso le roba $2n$, en total le sustraen $3n$ avellanas. Como ardilla se ha quedado sin ninguna avellana deducimos que el número total de avellanas es múltiplo de 3. Además, a la pobre ardilla solo le queda el montón de nueces. Ya no nos queda mas que averiguar cuál de los montones es el de nueces. El número total de frutos era 119 y por tanto, 119 menos el desconocido montón de nueces debe ser igual a $3n$. Entonces, para saber cuantas avellanas tenía,

comprobaremos, de entre todas las posibilidades, cuál hace que el número de avellanas sea múltiplo de 3:
119 – 15 = 104; 119 – 16 = 103; 119 – 18 = 101; 119 – 19 = 100; 119 – 20 = 99;
119 – 31 = 88.
Es muy fácil ver que el único múltiplo de 3 es 99, en consecuencia el número de nueces es 20.

7. (B) Siguiendo el esquema representado por la tabla de abajo hacemos la siguiente suma: (Suma de las 5 primeras cifras) + (suma de la 2ª a la 6ª) + (suma de la 3ª a la 7ª) que, de acuerdo con el enunciado, será igual a $3 \cdot 19$. Pero observamos que hemos sumado todas las cifras, repitiendo en el segundo *paréntesis* un grupo de 4 cifras que ya habíamos sumado en el primero, situación que se repite en el tercer *paréntesis*, pero ahora respecto al 2º. Por lo tanto la suma de las siete cifras será: $3 \cdot 19 - 2 \cdot 16 = 25$.

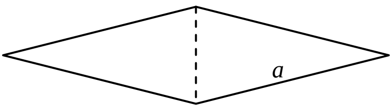


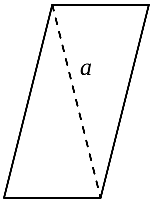
Otra forma de resolver el problema es:
Como 1ª + 2ª + 3ª + 4ª = 16 y 1ª + 2ª + 3ª + 4ª + 5ª = 19, la 5ª cifra es un 3.
Análogamente 3ª + 4ª + 5ª + 6ª + 7ª = 19 y 4ª + 5ª + 6ª + 7ª = 16, la 3ª cifra es un 3.
Análogamente 2ª + 3ª + 4ª + 5ª + 6ª = 19 y 3ª + 4ª + 5ª + 6ª = 16, la 2ª cifra es un 3.
De esta forma se deduce que la clave es:

3	3	3	7	3	3	3

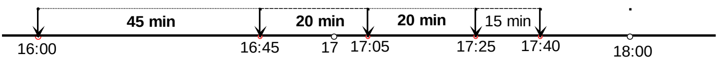
Y la suma de sus cifras es 25.

8. (E) En la figura vemos que $25 + 25 - 2a = 32$ cm, es decir, el doble del lado igual mide 18 cm y dicho lado mide 9 cm, con lo que el perímetro del rombo mide $9 \cdot 4 = 36$ cm.

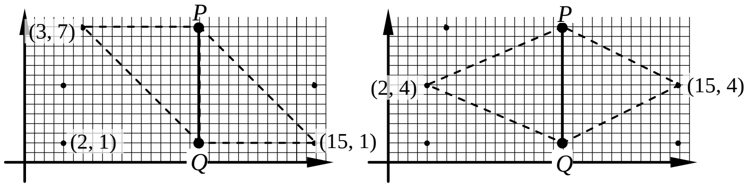




9. (D) Ordenando los tiempos sobre un eje coordenado, nos damos cuenta inmediatamente de que, solo respecto al reloj que marca las 17:05, hay dos relojes que cumplen las condiciones del problema: el que marca las 16:45 y el que marca las 17:25, que estarán, respectivamente, retrasados y adelantados 20 minutos. Por lo tanto, el de las 17:05 marca la hora correcta.



10. (D) Con el punto (3, 7) se forma un triángulo, rectángulo en P. Sus catetos miden 6.
Los puntos (15, 4) y (2, 4) pertenecen a la mediatriz del segmento PQ.
Con el punto (2, 1) se forma un triángulo, rectángulo en Q, cuyos catetos miden 6 y 7 respectivamente. Este no es isósceles.
Con el punto (15, 1) se forma un triángulo, rectángulo en Q. Sus catetos miden 6.



11. (E) Comencemos calculando la última cifra de las primeras potencias de 3:
$3^1, 3^{2,}\ 3^3, 3^4, 3^5, 3^6, \ldots$
3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, …
(Al hacer esto hemos observado que para obtener la última cifra de una potencia de 3 es suficiente multiplicar por 3 la última cifra de la potencia anterior).
Tenemos ahora una sucesión que forma ciclos de longitud 4, lo que nos permite concluir que la última cifra de 3^{2010} será la misma que la de 3 elevado al resto de dividir 2010 entre 4, que resulta ser 2.
Concluimos que la cifra pedida es la última de 3^2, es decir, 9.

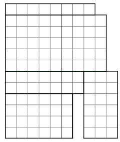
12.(A) Si Alicia está en la casilla número n, Marta estará en la número $n+42$ y Pedro en la $n+77$, como queda claro de la observación de la tabla.

…				**Alicia**				…
…				n + 40	n + 41	**Marta**		…
…	**Pedro**	n + 78	n + 79	n + 80				…

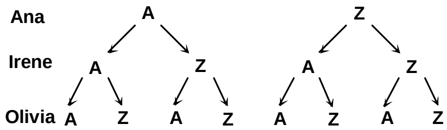
Luego tenemos: $n+(n+42)+(n+77)=185 \Rightarrow 3n+119=185 \Rightarrow n=22$
Y la suma pedida es: $n+(n+77)=121$.

13. (D) Es sencillo percatarse de que la suma de los números de cada fila es el doble que la suma de los de la anterior. Además no es preciso realizar dichas sumas, pues como cualquier número de una fila (excepto el primero y el último) se obtiene sumando los dos que están encima de él a derecha e izquierda, cada número de la fila anterior se suma dos veces (también los unos se suman dos veces) y, en consecuencia, la suma de los números de una fila es el doble que la suma de los de la anterior. Obtenemos así las siguientes sumas: $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, \ldots$ donde el exponente es el número de fila, por tanto la suma de los números de la fila 10 será $2^{10} = 1024$.

14.(E) El número total de cuadraditos de las cinco piezas es: $18+16+9+50+28=121$, lo que limita el estudio a las figuras D y E que son las únicas que cuentan con 121 cuadraditos. Por otra parte es muy fácil -como se muestra en la figura- encontrar una disección de la figura E en los cinco rectángulos de partida.



15. (B) Representando por A el agua y por Z el zumo es sencillo ver todas las posibilidades que tienen Ana, Irene y Olivia mediante un diagrama de árbol. Pero para analizar estas posibilidades es más cómodo representar la situación en una tabla:



	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª
Ana	~~A~~	~~A~~	~~A~~	~~A~~	Z	~~Z~~	Z	Z
Irene	~~A~~	~~A~~	~~Z~~	~~Z~~	A	~~A~~	Z	Z
Olivia	~~A~~	~~Z~~	~~A~~	~~Z~~	A	~~Z~~	A	Z

La primera proposición descarta las columnas 2ª y 3ª.
La segunda descarta la 1ª y la 6ª.
Y la tercera descarta la 4ª columna.
A la vista de la tabla queda claro que Ana siempre toma la misma bebida: zumo.

16. (B) En principio podría pensarse que hay 11 posibilidades, correspondientes a los 11 restos posibles $(x=11\cdot r+r)$, pero como $x>0$, tenemos que descartar $r=0$, con lo que quedan solo 10 posibilidades para x.

17. (B) La cifra de las unidades del primer resto es evidentemente un 1, y como $7\times3=21$ tenemos que la cifra de las unidades del resto es un 0 (la división es exacta). Pero esto obliga a que 7 por el divisor valga 91y esto último, a que el resto sea 13. Ahora bien, que el divisor sea 13 implica que la cifra de centenas del dividendo no sea mayor que 2, es decir, que sea 0, 1 ó 2.
Tras estas consideraciones, el problema queda reducido a encontrar los números de la forma $1\bullet\bullet$, comprendidos entre 100 y 129, que divididos entre 13 den resto 9.
Como 100 dividido entre 13 da resto 9, también lo darán 113, 126, ~~139,~~ …
Podemos pues concluir que los tres números, 1001, 1131 y 1261, son los únicos que se adaptan a la situación impuesta por el problema.

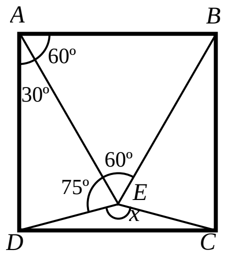
18. (A) Para empezar construimos una tabla con todos los casos posibles y, en ella vemos:
18 casos en los que la suma es par (la probabilidad de que Alejandro se coma una cereza es 18/36 = 6/12),
15 casos en los que la suma es un número primo (la probabilidad de que Belén se coma una cereza es 15/36 = 5/12) y
21 casos en los que la suma es mayor que 6 (la probabilidad de que Carlos se coma una cereza es 21/36 = 7/12).
Todas las afirmaciones son claramente falsas.

	1	2	3	4	5	6
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
3	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
4	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
5	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
6	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

19. (D) Felisa tardó 43 min 30 s + 28 min 30s = 71 min 60 s = 72 min = 1h 12 min.
Como llegó a las 19:20 comenzó a correr a las:
19 h 20 min **–** 1h 12 min = 18 h 8 min, es decir, a las 18:08.

20. (C) Llamando x a la nota de la 4ª evaluación, para que la nota media sea un siete debe cumplirse: $\dfrac{6+9+7+x}{4}=7 \Rightarrow \dfrac{22+x}{4}=7 \Rightarrow x=6.$
Si la nota x es mayor que 6 la media será mayor que 7**.** Como mínimo debe sacar un 6 en la 4ª evaluación.

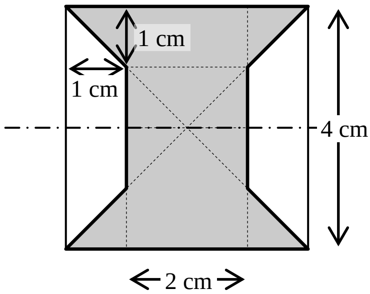
21. (C) Al ser los lados *AE* y *AD* iguales, el triángulo *DAE* es isósceles y cada uno de sus ángulos iguales medirá $\dfrac{180º-30º}{2}=75º$ y, por el mismo motivo, el ángulo *BEC* valdrá también 75º. Por lo tanto, el valor del ángulo x será $360º-(75º+60º+75º)=150º$.

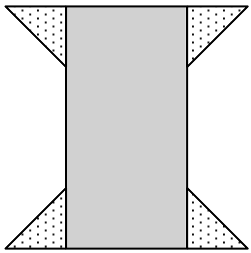


22. (C) Entre Joaquín y Alicia compraron 3 refrescos y 3 pasteles, y pagaron en total $4{,}90+4{,}70=9{,}60$; por lo tanto, un refresco más un pastel (que es lo que pagó Pedro) costarán $9{,}60/3=3{,}20$ €.

23.(D) Por las simetrías del cuadrado se deducen las medidas de los segmentos marcados en la figura inferior.

Seccionando la figura, como se aprecia en la parte derecha, es inmediato ver que el área vale: $4 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 4 = 10$ cm^2.





24. (C) La velocidad constante a la que anda Richi hace que la relación entre L_2 y L_4 sea la misma que la de los tiempos empleados en recorrer esas distancias. Según los datos del enunciado, el tiempo empleado en recorrer L_2 será la mitad del empleado en recorrer L_3, es decir, 5 minutos y, del mismo modo, calculamos que el tiempo para L_1 es 2,5 minutos. En consecuencia el tiempo para L_4 será

$30 - (10 + 5 + 2{,}5) = 12{,}5$ minutos, y la relación entre L_2 y L_4:

$$\frac{L_2}{L_4} = \frac{5}{12{,}5} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5L_2 = 2L_4.$$

25. (D) Supongamos, para empezar, que se pone 1 anillo en la mano izquierda y 2 en la derecha.

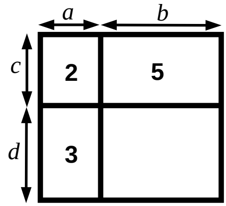
Como en los pulgares no se pone anillos solo tenemos que considerar 4 dedos en cada mano. Así, en la mano izquierda tiene 4 dedos para elegir y 3 anillos para escoger, una vez haya elegido el dedo. Tiene pues, en total, $3 \times 4 = 12$ formas distintas de ponerse un anillo en la mano izquierda.

Una vez hecho eso, tiene 4 formas distintas de elegir 1 dedo de la derecha para el segundo anillo y 3 para el tercero, es decir, tiene $4 \times 3 = 12$ formas distintas para cada una de las 12 de la mano izquierda. En total $12 \times 12 = 144$ formas distintas, que sumadas a las que proporciona la situación simétrica (1 anillo en la derecha y 2 en la izquierda), hacen 288 formas distintas.

XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel II

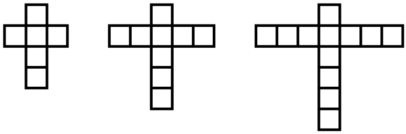
1. (B) 60 l / m^2 = 60 dm^3 / 100 dm^2 = 0,6 dm^3 / dm^2 , lo que significa que en un cubo de un decímetro cuadrado de base habríamos recogido un volumen de 0,6 dm^3 de agua, o lo que es lo mismo tendríamos una columna de agua de 0,6 dm de altura. Este hecho "justifica" el abuso de lenguaje de leer las precipitaciones de lluvia, bien en l / m^2 o bien en mm.



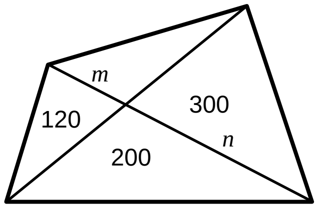
2. (E) Nuestras áreas son el resultado de un producto: $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$, de forma que los dos primeros términos del 2º miembro están en proporción con los dos segundos: $\dfrac{\cancel{a} \cdot c}{\cancel{a} \cdot d} = \dfrac{\cancel{b} \cdot c}{\cancel{b} \cdot d}$, luego leamos la tabla como de proporcionalidad directa. Si a 2 le corresponde 3, a 5 le corresponde 7,5.

3. (B) Típico problema de resolución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3a + 2n = 26 \\ 4a + 6n = 48 \end{cases}$, donde a es el precio de la entrada de un adulto y n el precio de la entrada de un niño, siendo la pregunta el valor de $a – n$. Podemos resolver completamente el sistema, o dedicarnos solamente a la pregunta. Está claro que $2a + 3n = 24$, y si conocemos el precio de tres "adultos" y dos "niños" y el precio de dos "adultos" y tres "niños", la resta de ambos (26 – 24 = 2 €) es la solución buscada.

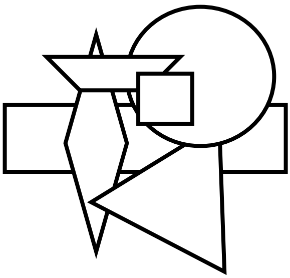
4. (A) Si llamamos respectivamente, a, b y c, a los votos que obtuvieron Alicia, Beatriz y Carlos, tenemos que $a = \dfrac{5}{6} b = 300$, luego $b = \dfrac{6}{5} \cdot 300 = 360$, y como además, $b = 80\% \cdot c = 0{,}8 \cdot c = 360$, $c = \dfrac{360}{0{,}8} = \dfrac{3600}{8} = 450$ votos.



5. (D) Vemos que la primera cruz tiene 6 cuadraditos y que después se añade un cuadrado a cada brazo y otro al palo central, es decir que el número de cuadrados aumenta de tres en tres. Nos piden pues qué número ocupa el lugar 50 en la serie 6, 9, 12, ... Pues llegaremos a él realizando 49 saltos de longitud 3 desde el primer número. La respuesta es 6 + 49 · 3 = 153.



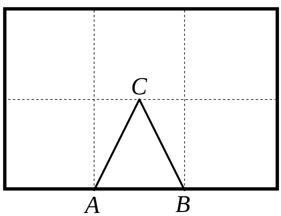
6. (B) Damos por hecho que la plancha es homogénea y por tanto los pesos de los triángulos son proporcionales a sus áreas. Llamemos A, B, C, respectivamente a los triángulos de peso 120, 200 y 300 g, y D al de peso desconocido. B y C comparten un lado que podemos tomar como base de medida *n*, y A y D una base de medida *m*. Por otro lado las alturas de A y B sobre esas bases miden lo mismo *p*, y las de C y D miden *q*. Luego las áreas de A, B, D y C son, respectivamente, $\frac{m\cdot p}{2}$, $\frac{n\cdot p}{2}$, $\frac{m\cdot q}{2}$, $\frac{n\cdot q}{2}$, y por tanto las dos primeras están en igual proporción que las dos últimas, es decir: $\frac{120}{200}=\frac{x}{300}$, de donde $x = 180$ g.



7. (B) Es cuestión de fijarse un poco. La primera etiqueta en pegarse es el rectángulo, luego se puso el rombo, y la tercera fue el triángulo.

8. (C) Para compararlas escribamos las dos velocidades en las mismas unidades:

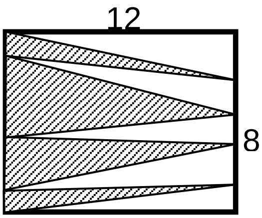
1 *km/min* $=\frac{1}{60}km/s$ y $\frac{1}{40}km/s$. Luego la segunda es $\frac{60}{40}=\frac{3}{2}$ de la primera, es decir un 150% de ella. Hay pues que aumentar en un 50% la primera velocidad.



9. (A) Como el triángulo tiene de base un tercio de la del rectángulo y de altura la mitad, su área (al ser un triángulo) será $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$ de la del rectángulo, es decir, 2.

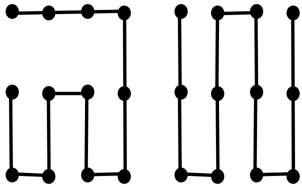
10. (D) Pocos datos para que no haya otra respuesta posible que $\frac{1}{2}$. Efectivamente, el área rayada se obtiene sumando las áreas de triángulos de altura común 12 y cuyas bases suman 8, y por tanto su área es:

$\frac{\text{Suma de bases}}{2} \cdot \text{ altura} = 6 \cdot 8 = 48$ (igual que la de la zona blanca).



11.(E) $1000^{100} = \left(10^3\right)^{100} = 10^{300} = 10^{100} \cdot 10^{200} = 10^{200}$ googoles.

12.(D) *Andarín* ha recorrido 6 tramos horizontales y 5 verticales, $6h + 5v = 37$ mientras que *Pisapiedras* ha andado 3 horizontales y 8 verticales, $3h + 8v = 46$. En ambos casos han recorrido 11 tramos (ya que hay doce puntos y sólo los visitamos una vez). La solución más corta será la que tenga menor número de tramos verticales que son más largos. El trayecto mínimo no es único, pero sí su longitud $9h + 2v$.

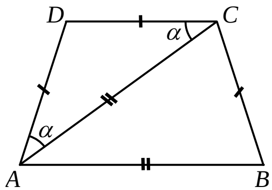


Andarín *Pisapiedras*

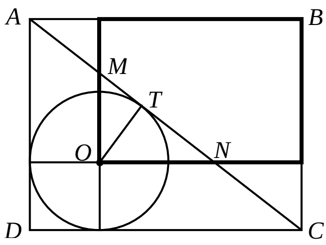
Resolvamos el sistema $\left\{\begin{array}{r} 6h + 5v = 37 \\ 3h + 8v = 46 \;\Rightarrow\; 6h + 16v = 92 \end{array}\right\}$ $11v = 55;\ v = 5;\ h = 2$

$9h + 2v = 18 + 10 = 28$ km.

13.(A) En el triángulo isósceles *ADC* llamamos α al ángulo que se repite. En el otro triángulo isósceles tenemos que: $\hat{A} - \alpha = \hat{B} - \alpha = 180^{\circ} - 2\hat{B}$, y por tanto $3\hat{B} - \alpha = 180^{\circ}$. Por otro lado en el trapecio isósceles: $\hat{B} + \hat{C} = 180^{\circ} = \hat{B} + (\hat{B} + \alpha) = 2\hat{B} + \alpha$. Sumando ambas ecuaciones en α y $\hat{B}$, nos queda que $5\hat{B} = 360^{\circ}$, es decir $\hat{B} = 72^{\circ}$, y por tanto $\hat{D} = 108^{\circ}$.



14.(C) Dibujamos el rectángulo pedido. Si trazamos los radios del círculo en los puntos de contacto con el triángulo *ADC* se vislumbra la posibilidad de tener triángulos repetidos.



Los triángulos *MPA* y *MOT* son iguales. Ambos son rectángulos, tienen en M ángulos opuestos por el vértice, y $\overline{AP} = \overline{OT} = r$. De igual forma son iguales los triángulos *NTO* y *NCQ*. Por tanto el área de *POQB* es igual a la del triángulo *ABC*, mitad de la dl rectángulo de partida.

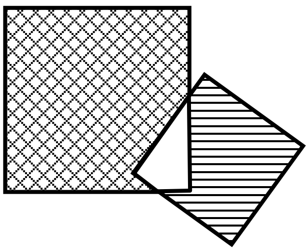
15.(B) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y+x}{x \cdot y} = \frac{5}{x \cdot y}$ ya que $x + y = 5$, y por tanto esa suma será menor cuánto mayor sea $x \cdot y$. Si escribimos x e y respecto a 2,5 , uno es $2,5 + h$ y el otro $2,5 - h$, y así el producto es $(2,5+h)\cdot(2,5-h) = 6,25 - h^2$, con lo que este producto a lo más vale 6,25 cuando $h = 0$. Así tenemos que:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{x \cdot y} \geq \frac{5}{6,25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} .$$

16.(B) Llamando c al peso de una canica, *b* la de un boloncio y *p* al de una pelota. Tenemos el sistema $\begin{cases} 13c = 3b + p \\ 5c + b = 2p \end{cases}$, y queremos eliminar las pelotas para encontrar una relación entre canicas y boloncios. Despejamos *p* de la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$p = 13c - 3b;\; 5c + b = 2\cdot(13c - 3b);\; 5c + b = 26c - 6b;\; 7b = 21c;\; b = 3c .$$

17.(E) El área cuadriculada es 36 – B, el área rayada es 16 – B. La diferencia de las dos es 36 – 16 =20.



18.(C) De la primera columna deducimos que Q + T es M o 10 + M. Como en la segunda aparece de nuevo T + Q y el resultado no es M, deducimos que en la primera suma llevamos una unidad a las decenas y por tanto estas suman 10 + Q –1 y por tanto T = 9 (T + Q = 10 + Q – 1). La suma de las centenas nos dice que M = 4, y volviendo a las unidades Q = 5.
Por lo tanto T + Q + M = 18.

$$\begin{array}{cccc} & \mathrm{M} & \mathrm{T} & \mathrm{Q} \\ + & \mathrm{M} & \mathrm{Q} & \mathrm{T} \\ \hline & \mathrm{T} & \mathrm{Q} & \mathrm{M} \end{array}$$

19.(B) Como hay pocos casos podemos escribirlos todos, es decir igual número que claves de tres letras ordenadas alfabéticamente (una vez escrita una clave no cambiamos el orden de sus letras porque produciría el mismo color) formadas con las letras B, V y A: AAA, AAB, AAV, ABB, ABV, AVV, BBB, BBV, BVV, VVV

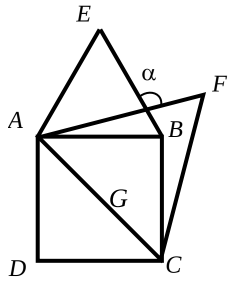
20.(C) $p+\dfrac{1}{q+\dfrac{1}{r}}=\dfrac{25}{19}$ Operemos en el castillo de fracciones:

$p+\dfrac{1}{q+\dfrac{1}{r}}=p+\dfrac{1}{\dfrac{rq+1}{r}}=p+\dfrac{r}{rq+1}=\dfrac{prq+p+r}{rq+1}=\dfrac{25}{19}$. Tentados estamos a decir que $rq + 1 = 19$, y lo diremos si previamente razonamos que $rq +1$ es primo con $prq + p + r$.

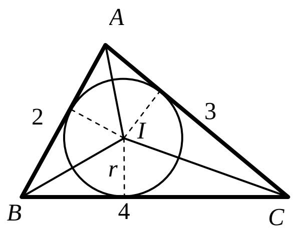
Como $prq + p + r = p(rq + 1)+ r = = p(rq + 1)+ r$, el $\mathrm{mcd}(p(rq + 1) + r, rq + 1) =$ $= \mathrm{mcd}(r, rq + 1) = 1$.

Liberados de escrúpulos puntillosos, podemos afirmar que $rq + 1 = 19$, y $prq + p + r = 25$, luego $rq = 18$, y prq debe ser también 18 (por ser números enteros positivos).

21.(A) α es opuesto por el vértice del ángulo *AGB* . El ángulo *GAB* mide 60º – 45º = 15º, y el ángulo *ABG* también 60º, luego α = 180º – 15º – 60º = 105º



22.(D) El incentro de un triángulo divide a este en tres triángulos de altura común el radio inscrito y bases cada uno de los lados . Así el área del triángulo se descompone como suma de esas tres áreas:



$S = \dfrac{r \cdot a + r \cdot b + r \cdot c}{2} = \dfrac{4r + 3r + 2r}{2} = \dfrac{9}{2} r$. Como el área de *IAB* es $\dfrac{2r}{2}$, el cociente pedido es $\dfrac{2}{9}$.

23.(E) Las cifras que podemos usar son 2, 4, 6 y 8. Formamos tríos a partir de una pareja cuya suma no pase de 8 y de su suma: 224, 246, 268 y 448. Y ahora en esos tríos variamos la posición de las cifras. Si las tres son distintas obtendremos 6 números diferentes, y si dos cifras son iguales obtendremos sólo 3:

Trío	224	246	268	448
Números que genera	3	6	6	3

En total 18 números

24.(A) Al circular en sentido contrario la velocidad de separación es la suma de velocidades, es decir 270 + 306 = 576 km/h. Si tarda 0,8 segundos en ver pasar el tren más lento, durante este tiempo el espacio recorrido es:

$$e = 0{,}8\, s \cdot \frac{5760\cancel{00}}{36\cancel{00}} m/s = 0{,}8 \cdot \frac{640}{4} m = 128\ m .$$

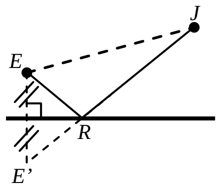
25.(D) Como todas las cajas son iguales podemos referirnos a una sola de ellas. Los paquetes de 6 huevos pesan 20 g vacíos y 380 g llenos, luego cada huevo pesa 60 g. Una caja tiene el doble de paquetes de 6 huevos que de 12, luego contiene el mismo número de huevos en cada tipo de paquete, es decir 120 en paquetes de 6 y 120 en paquetes de 12, luego contiene 20 paquetes de 6 y 10 de 12. El peso de una caja (16,8 kg) se obtiene como la suma de 20 paquetes llenos de 6 huevos, 120 huevos, el peso de los 10 paquetes vacíos de 12 huevos y el peso de la caja vacía. Así: 16 800 = 20 · 380 + 120 · 60 g +10 p + c, y así 10 p + c = 2000 g , no pudiendo calcular ni el peso del paquete vacío de 12 huevos, ni el peso de una caja vacía.

XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

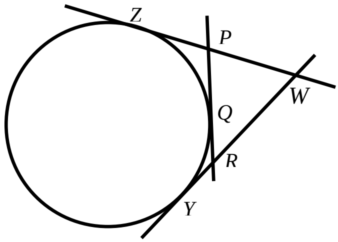
Soluciones 2ª Fase Nivel III

1. (D) Observa que la paridad de los días de la semana va cambiando de semana en semana. Es decir, si hoy martes es par, el martes de la semana que viene será impar. La única manera de que haya tres domingos pares es que el día 2 sea domingo. Así pues, los domingos serán los días 2, 9, 16, 23, 30. El día 20 será jueves.

2. (B) El camino más corto es el B): se ha calculado el simétrico (*E'*) de *E* respecto al río y se une con *J*. El punto de intersección de *E'J* con el río nos da el punto *R*, que es a donde debe dirigirse Esteban.
El trayecto *ER* + *RJ* es el más corto posible ya que *ER* = *E'R* y para ir de *E'* a *J* el camino más corto es la línea recta (que, por construcción, pasa por *R*).



3. (B) Las tangentes trazadas desde un mismo punto tienen igual longitud, así que $WZ = WY = 20$, $PZ = PQ = a$ y $RQ = RY = b$.
Los lados del triángulo *WPR* miden:
$WP = WZ - PZ = 20 - a$
$WR = WY - RY = 20 - b$
$PR = PQ + RQ = a + b$
El perímetro del triángulo *WPR* es $WP + WR + PR = 20 - a + 20 - b + a + b = 40$.



4. (E) Para calcular el valor de $u = \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} + \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$ siendo *a* < *b*, calcularemos u^2 primero:

$$u^2 = a+b+2\sqrt{ab} + a+b-2\sqrt{ab} + 2\sqrt{(a+b+2\sqrt{ab})(a+b-2\sqrt{ab})}$$

$u^2 = 2a+2b+2\sqrt{(a+b)^2-4ab} = 2a+2b+2\sqrt{(a-b)^2}$ y aquí está el paso peligroso: $\sqrt{(a-b)^2} = |a-b| = b-a$ ya que $b > a$.

Así pues, $u^2 = 2a+2b+2(b-a) = 4b$ y entonces, $u = 2\sqrt{b}$

5. (B) Llamamos *e*, *v* y *t* al espacio (km), velocidad (km/h) y tiempo (h) del tren. Según los datos del problema podemos formar este sistema:

$$\left.\begin{array}{l} vt=(v+10)\cdot(t-\frac{2}{3}) \\ vt=(v-10)\cdot(t+1) \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 30t-2v=20 \\ 10t-v=-10 \end{array}\right\} \to v=50 \quad t=4 \; .$$

La longitud del recorrido es $e=v\cdot t=50\cdot 4=200$ km.

6. (C) Un polígono de n lados tiene $\frac{n\cdot(n-1)}{2}-n$ diagonales.

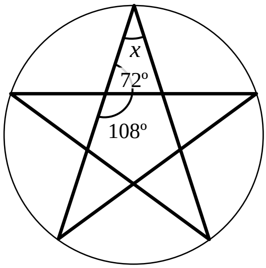
¿De dónde sale esa fórmula? Si tenemos n vértices de un polígono, podemos trazar $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ segmentos (de cada vértice parte un segmento a los restantes n – 1 vértices, pero hay que dividir entre dos porque cada segmento se ha contado dos veces). Como los lados del polígono no son diagonales hay que restar n.

$\frac{n\cdot(n-1)}{2}-n=20 \Rightarrow n^2-3n-40=0 \Rightarrow n=8$ y $n=-5$.

Descartamos la solución negativa y concluimos que nuestro polígono regular tiene 8 lados y la suma de sus ángulos es $180º·(8-2)=1080º$.

Cada uno de sus ángulos mide $1080º:8=135º$.

7. (D) Cada ángulo de un pentágono regular mide 108º, así pues cada ángulo igual de esos cinco triángulos isósceles medirá 180º – 108º = 72º.
El ángulo desigual, x, mide, por tanto,
180º – 2·72º = 36º.



8. (E) Podemos calcular las potencias de los primeros números formados por ‘unos’ e intentar encontrar alguna pauta:

$1^2=1 \qquad 11^2=121 \qquad 111^2=12321 \qquad 1111^2=1234321$

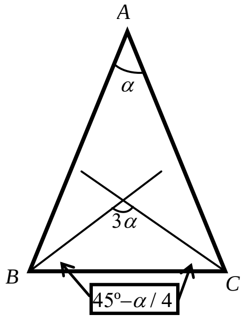
Parece que la formación está clara: 123... hasta llegar a la cifra central que es el número de ‘unos’ y luego a retroceder ...321.

Así pues, $111111111^2=12345678987654321$. Sus cifras suman 81.

9. (E) Para comparar esos números los expresamos como potencias de igual exponente.

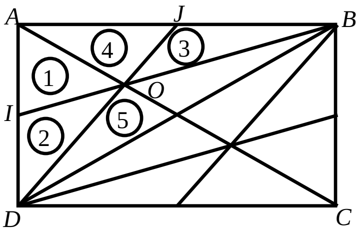
$A=2^{24}=(2^3)^8=8^8 \qquad B=3^{16}=(3^2)^8=9^8 \qquad C=49^4=(7^2)^4=7^8$

De menor a mayor quedan ordenados así: $C < A < B$.



10. (C) Cada uno de los ángulos iguales del triángulo isósceles *ABC* miden $\frac{180^{o}-\alpha}{2}=90^{o}-\frac{\alpha}{2}$. Así pues, la bisectriz los divide en ángulos de $45^{o}-\frac{\alpha}{4}$. En el triángulo interior se cumple esta relación:
$3\alpha+45^{o}-\frac{\alpha}{4}+45^{o}-\frac{\alpha}{4}=180^{o}\Rightarrow\alpha=36^{o}$. Sus cifras suman 9.

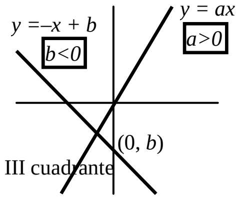
11. (D) Sabemos que el peso es proporcional al volumen y éste es proporcional al cubo de la altura, así pues, si llamamos *x* a la altura de la maqueta, podemos escribir esta proporción, en la que hemos pasado ya las toneladas a kilogramos: $\frac{8000000}{1}=\frac{300^3}{x^3}$, de donde se concluye que $x^3=\frac{300^3}{200^3}=\left(\frac{3}{2}\right)^3\Rightarrow x=\frac{3}{2}=1{,}5$.
La altura de la maqueta debe ser de un metro y medio.



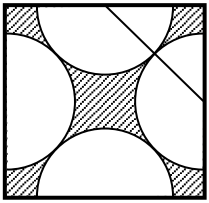
12. (A) Completamos la figura trazando algunos segmentos. Los doce triángulos en los que ha quedado divido el rectángulo tiene igual área. Vamos a justificar esta afirmación en los triángulos 1, 2, 3, 4 y 5 (el resto son iguales por la simetría de la construcción).
Los triángulos 1 y 2 tienen la misma base y la misma altura, por tanto tiene igual área. El mismo razonamiento vale para 3 y 4.
Los triángulos *ABI* y *AJD* ocupan un cuarto del rectángulo, por tanto, si les quitamos la parte común (1 + 4) nos quedarán restos iguales: así pues los triángulos 2 y 3 también tienen igual área. Así pues, los triángulos 1, 2, 3 y 4 tienen igual área: un doceavo del rectángulo.
Por último, el triángulo *ABD* ocupa la mitad del rectángulo y está formado por cinco triángulos de un doceavo más el triángulo número 5, así pues, este triángulo también ocupa un doceavo.
El cuadrilátero *AIOJ* ocupa dos triángulos y el *BCDO* ocupa ocho: el cociente entre sus áreas es $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

13. (E) En total hay cinco números: 10001, 10010, 10100, 11000 y 20000. Muy sencillo si se sigue un orden.

14. (B) Para que esas rectas se corten en un punto con coordenadas estrictamente negativas, ambas deben pasar por el tercer cuadrante. La recta $y = ax$ pasará por el tercer cuadrante si $a > 0$ y la recta $y = -x + b$ pasará por el tercer cuadrante si $b < 0$.



15. (B) Si unimos los centros de dos semicírculos tangentes obtenemos un triángulo rectángulo isósceles, cuya hipotenusa es el diámetro (dos radios) de un semicírculo y los catetos son la mitad del lado del cuadrado.



Así pues, el diámetro D cumple: $D^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$, por lo que $D = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y el radio de cada semicírculo es $r = \frac{D}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. El área de la zona rayada es el área del cuadrado menos dos círculos: $1 - 2 \cdot \pi \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = 1 - \frac{\pi}{4}$.

16. (E) A operar toca:

$$P^2Q = (2^n)^2 \cdot 3^m = 2^{2n} \cdot 3^m$$

$$P^nQ^m = (2^n)^n \cdot (3^m)^m = 2^{n^2} \cdot 3^{m^2}$$

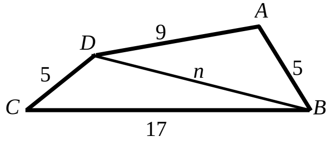
$$P^nQ^{2m} = (2^n)^n \cdot (3^m)^{2m} = 2^{n^2} \cdot 3^{2m^2}$$

$$P^{2m}Q^n = (2^n)^{2m} \cdot (3^m)^n = 2^{2mn} \cdot 3^{mn} = (2^2)^{mn} \cdot 3^{mn} = (2^2 \cdot 3)^{mn} = 12^{mn}$$

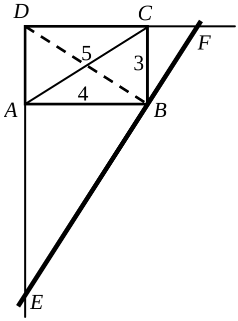
$$P^{2n}Q^m = (2^n)^{2n} \cdot (3^m)^m = 2^{2n^2} \cdot 3^{m^2}$$

17. (D) Si llamamos x a la longitud, en cm, de la arista del cubo, podemos traducir los datos del problema a esta ecuación: $(x+1) \cdot (x-1) \cdot x = x^3 - 5$.
Al resolverla obtenemos que $x = 5$ y el volumen del cubo es, por tanto, $5^3 = 125$ cm³.

18. (C) Trazamos la diagonal *BD* y se forman dos triángulos. Sabemos que dos lados de un triángulo siempre deben sumar más que el tercero. Así pues, en el triángulo *ABD* debe cumplirse que $5+9>n \Rightarrow n<14$. Y en el triángulo *BCD* debe cumplirse que $5+n>17 \Rightarrow 12<n$. Así pues, la longitud *n* del segmento *BD* cumple que $12<n<14$, y como *n* debe ser entero, sólo hay un valor posible: $n=13$.



19. (C) Hacemos el dibujo respetando las condiciones del enunciado. Al momento notamos que la diagonal del rectángulo mide 5 y también observamos que los triángulos *ABC*, *EAB* y *BCF* son semejantes ya que sus ángulos son iguales (la clave está en que los ángulos *DBF* y *DBE* son rectos). Establecemos las proporciones y calculamos *EB* y *BF*:



$$ABC \approx EAB \Rightarrow \frac{BC}{AC}=\frac{AB}{EB} \Rightarrow \frac{3}{5}=\frac{4}{EB} \Rightarrow EB=\frac{20}{3}$$

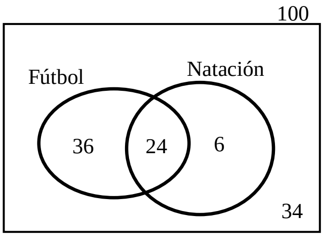
$$ABC \approx BCF \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{BC}{BF} \Rightarrow \frac{4}{5}=\frac{3}{BF} \Rightarrow BF=\frac{15}{4}$$

$$EF=EB+BF=\frac{20}{3}+\frac{15}{4}=\frac{125}{12}$$

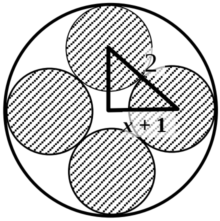
20. (D) Como piden porcentajes podemos suponer que en el campamento hay 100 estudiantes. Los que practican fútbol y natación son el 40% de 60, es decir 24. Con este dato podemos rellenar las cantidades del diagrama como indica el dibujo.

Hay 70 estudiantes que no practican natación, de los cuales 36 juegan al fútbol.

Esto supone una proporción de $\frac{36}{70}=51,43$, es decir, un porcentaje cercano al 51%.



21. (B) Elegido un punto cualquiera, dos de los siete restantes están a distancia 1. Por tanto la probabilidad pedida es $\frac{2}{7}$.



22. (C) Vamos a suponer que el radio de cada círculo pequeño es $r=1$ y calcularemos el radio del círculo grande. Dibujamos un triángulo rectángulo de vértices el centro del círculo grande y los centros de dos círculos pequeños tangentes. La hipotenusa mide 2 y cada cateto 1 + *x*. Vamos a hallar cuánto mide *x*:

$(x+1)^2+(x+1)^2=2^2 \Rightarrow x^2+2x-1=0$. Esta ecuación tiene dos soluciones y, naturalmente, nos quedamos sólo con la positiva: $x=\sqrt{2}-1$. Así pues el radio del círculo grande es $R=\sqrt{2}-1+2=1+\sqrt{2}$. El cociente que nos piden es

$$\frac{4\cdot\pi\cdot 1^2}{\pi(1+\sqrt{2})^2}=\frac{4}{3+2\sqrt{2}}=\frac{4(3-2\sqrt{2})}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}=4(3-2\sqrt{2}).$$

23. (D) El menor número geométrico de tres cifras diferentes es 124 (razón = 2) y el mayor es 964 (razón = 2/3). La diferencia entre ambos es 840. [Observa que no hay números geométricos que comiencen por 98_ ni por 97_]

24. (D) Sabemos que $P(C)=p$ y $P(X)=1-p$, siendo los sucesos *C* (salir cara) y *X* (salir cruz). El enunciado nos indica que $P(3C\ y\ 5X)=\frac{1}{25}\cdot P(5C\ y\ 3X)$. Calculemos las probabilidades de estos dos últimos sucesos:

$P(3C\ y\ 5X)=\binom{8}{3}p^3\cdot(1-p)^5$. (Date cuenta de que 3 caras pueden estar situadas en 8 lugares de $\binom{8}{3}$ formas diferentes). Análogamente:

$P(5C\ y\ 3X)=\binom{8}{5}p^5\cdot(1-p)^3$.

Como además sabemos que $\binom{8}{3}=\binom{8}{5}$, ya podemos escribir la ecuación que resolverá el problema:

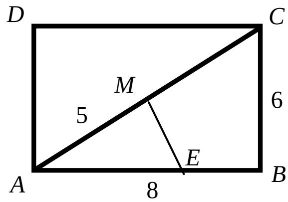
$$P(3C\ y\ 5X)=\frac{1}{25}\cdot P(5C\ y\ 3X)\Rightarrow\binom{8}{3}p^3\cdot(1-p)^5=\frac{1}{25}\binom{8}{3}p^5\cdot(1-p)^3$$

Como p es distinto de cero, podemos dividir ambos miembros entre $\binom{8}{3}p^3 \cdot (1-p)^3$ y nos queda una sencilla ecuación de segundo grado: $(1-p)^2 = \frac{1}{25}p^2 \Rightarrow 24p^2 - 50p + 25 = 0$, cuyas soluciones son $p = \frac{5}{4}$ y $p = \frac{5}{6}$.

Atención: la solución $p = \frac{5}{4}$ hay que descartarla por ser mayor que 1.

Así pues, la respuesta es $p = \frac{5}{6}$.

25. (D) Lo primero que podemos deducir es que la diagonal *AC* mide 10. [Observa que la terna pitagórica (6, 8, 10) es la doble de la archifamosa (3, 4, 5)]
Al ser *ME* perpendicular a la diagonal *AC*, los triángulos *AME* y *ABC* son semejantes ya que sus ángulos son iguales. Establecemos esta proporción:

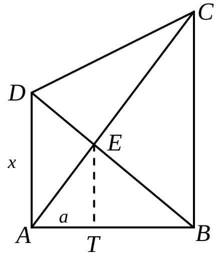


$$AME \approx ABC \Rightarrow \frac{CAT}{cat} = \frac{CAT}{cat} \Rightarrow \frac{AM}{ME} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{5}{ME} = \frac{8}{6} \Rightarrow ME = \frac{15}{4}.$$

El área del triángulo *AME* es $\dfrac{5 \cdot \frac{15}{4}}{2} = \dfrac{75}{8}$.

XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel IV



1. (C) Llamando a al segmento AT, la semejanza de los triángulos AET y ACB, en el que $CB = 8$, $\left(\sqrt{10^2-6^2}\right)$, nos permite escribir $\frac{8}{3}=\frac{6}{a}\Rightarrow a=\frac{9}{4}$ y $6-a=\frac{15}{4}$. Otra vez por semejanza de triángulos, ahora ABD y $ET\ B$, podemos escribir $\frac{x}{3}=\frac{6}{\frac{15}{4}}\Rightarrow x=\frac{24}{5}$ y

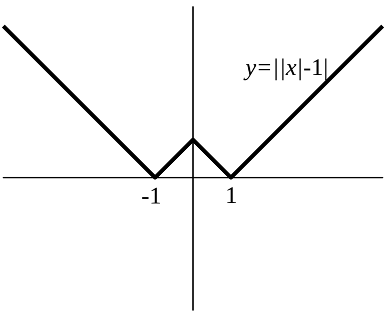
$$BD=\sqrt{x^2+6^2}=\sqrt{\left(\frac{24}{5}\right)^2+6^2}=\frac{6\sqrt{41}}{5}$$, respuesta C.

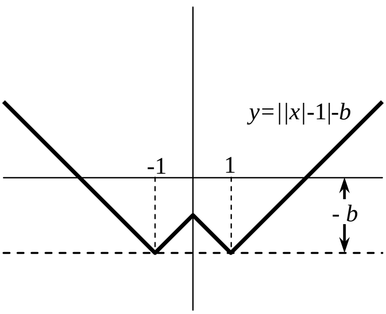
2. (B) La ecuación ln $(x + a)$ = ln x + ln a, es equivalente a ln $(x + a)$ = ln $(x \cdot a)$, de donde $x + a = x \cdot a$, ecuación con una única solución: $x = \frac{a}{a-1}$.

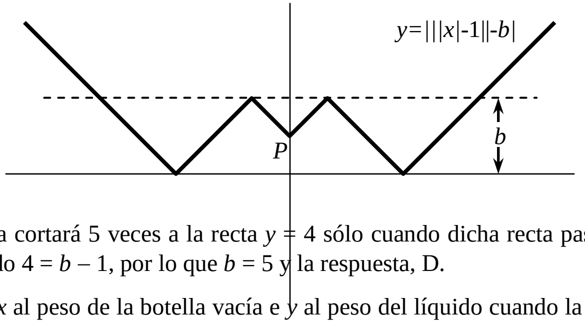
3. (D) La igualdad D es falsa si $x < 0$, pues $\sqrt{x^2}=|x|$.

4. (E) La implicación que aparece en E no es válida pues $x - y - z = 0$ ya que nos dicen que $x = y + z$.

5. (D) La mejor estrategia es dibujar la gráfica de $y = \left||x|-1|-b\right|$, obligando a b a que dicha gráfica corte en 5 puntos a la recta $y = 4$.







Esta gráfica cortará 5 veces a la recta $y = 4$ sólo cuando dicha recta pase por P, es decir cuando $4 = b - 1$, por lo que $b = 5$ y la respuesta, D.

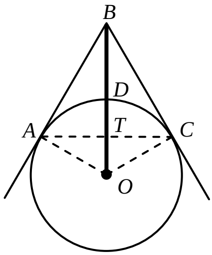
6. (E) Llamando x al peso de la botella vacía e y al peso del líquido cuando la botella está llena, nos piden $x + y$. Sabemos que $\begin{cases} x + \frac{2}{3}y = a \\ x + \frac{1}{2}y = b \end{cases}$. Eliminando x, obtenemos $\frac{1}{6}y = a - b$, y = 6 ($a - b$) por lo que $x = b - \frac{1}{2}y = b - 3(a - b) = 4b - 3a$, con lo que $x + y = 4b - 3a + 6\,(a - b) = 3a - 2b$, respuesta E.

7. (B) Llamando r al radio de la circunferencia y al ser $O\hat{A}B = 90^{o}$ y $T\hat{A}B = 60^{o}$, sigue que $OT = \frac{r}{2}$, $AT = \frac{r\sqrt{3}}{2}$,

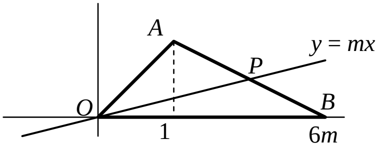
$BT = \frac{r\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3} = \frac{3r}{2}$, $BO = BT + TO = 2r$ y

$BD = BO - r = r$. Así pues, el cociente pedido,

$\frac{BD}{BO} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$, respuesta B.



8. (B) El área del triángulo OPB debe ser la mitad del área de OAB y tomado en ambos como base OB, debe ocurrir que la ordenada de P sea $\frac{1}{2}$.



P es el punto de corte de $y = mx$, $y - 1 = \frac{-1}{6m-1}(x-1)$, sistema en el que,

$x=\dfrac{6m}{6m^2-m+1}$, $y=\dfrac{6m^2}{6m^2-m+1}$, así que $\dfrac{6m^2}{6m^2-m+1}=\dfrac{1}{2}$, es decir, $6m^2+m-1=0$ y la suma de todos los valores de m, soluciones de esta ecuación, es $-\dfrac{1}{6}$, respuesta B.

OTRA RESPUESTA

Como los triángulos *OPB* y *OPA* han de tener la misma área, al tener la misma altura sobre el segmento *AB*, sus bases serán iguales, es decir, *P* es el punto medio de *AB*. Las coordenadas de *P* son: $\left(\dfrac{1+6m}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ y como pertenece a la recta $y = mx$, se verifica que $\dfrac{1}{2}=m\cdot\dfrac{1+6m}{2}\Rightarrow 1=m+6m^2\Rightarrow 6m^2+m-1=0$ y la suma de todos los valores de m, soluciones de esta ecuación, es $-\dfrac{1}{6}$, respuesta B.

9. (C) El área de la región sombreada es $\dfrac{1}{2}(3-a)\cdot 3-1$, así que $\dfrac{1}{2}(3-a)\cdot 3-1=\dfrac{5}{2}$, nos lleva a $3-a=\dfrac{7}{3}$ y $a=\dfrac{2}{3}$, respuesta C.

10. (D) La forma más cómoda de atacar el problema es observar los restos de las divisiones entre 8 de las sucesivas potencias de 3. Así, 3^0 daría 1, 3^1 daría 3, 3^2 daría 1, por lo que comienza a repetirse el ciclo (1, 3). Así pues, el resto de la división de $3^o + 3^1 + 3^2 + 3^3$ entre 8 es 0, por lo que descomponiendo los 2011 sumandos en bloques de 4, basta con que calculemos el resto de la división de $3^{2008} + 3^{2009} + 3^{2010}$ entre 8. Como cada uno de los restos de estos 3 sumandos es 1, 3 y 1, el resto pedido es 5, respuesta D.

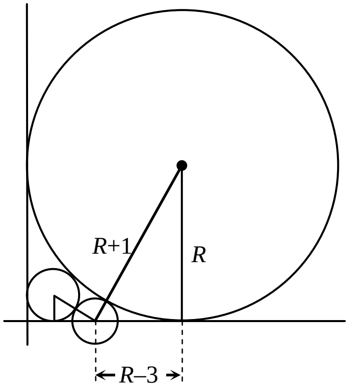
11. (B) La mayor suma posible de dígitos aparece en 999 y es 27, así que los enteros buscados serán menores o iguales que $6 \cdot 27 = 162$.
Si estas son de la forma $100a + 10b + c$, a sólo puede tomar los valores 0 y 1. Si $a = 0$, tenemos $10b + c = 6b + 6c$, así que $4b = 5c$ y la única solución posible es $b = 5$, $c = 4$ y el entero es 54. Si $a = 1$, tenemos $100 + 10b + c = 6 + 6b + 6c$, es decir, $5c - 4b = 94$, ecuación que no tiene solución al ser b y c dígitos. Así pues hay un único entero positivo con esa propiedad: 54.

12. (D) $f(x + 3) = a(x + 3)^2 + b(x + 3) + c = 3x^2 + 7x + 4$. Así pues, $a = 3$, $6a+ b = 7$, $9a + 3b + c = 4$, de donde sigue que $b = -11$ y $c = 10$, por lo que $a + b + c = 2$.

13. (D) Si $i + 2i^2 + 3i^3 + \ldots + ni^n = 48 + 49i$, sigue que (multiplicando ambos términos por i) $i^2 + 2i^3 + \ldots + (n-1)i^n + ni^{n+1} = 48i - 49$.
Así pues $i + i^2 + i^3 + \ldots + i^n - ni^{n+1} = 97 + i$. Ahora, observando que las potencias de i se repiten en ciclos de 4 elementos $(i^1, i^2, i^3, i^4) = (i, -1, -i, 1)$ cuya suma es 0, sigue que si $n = 96$, es $i + i^2 + \ldots + i^{96} = 0$, por lo que para $n = 97$, tenemos que
$i + i^2 + \ldots + i^{97} - 97i^{98} = i^{97} - 97i^{98} = i - 97\left(i^2\right)^{49} = i - 97 \cdot (-1) = 97 + i$, por lo que 97 es el n buscado.

¿Por qué empezamos directamente por 96 y no por 8000?
Propongo:
Si $n = 4k$ (múltiplo de 4), entonces $i + i^2 + i^3 + \ldots + i^n - ni^{n+1} = -ni \neq 97 + i$
Si $n = 4k + 1$, entonces $i + i^2 + i^3 + \ldots + i^n - ni^{n+1} = i - n(-1) = 97 + i \Rightarrow n = 97$
Si $n = 4k + 2$, entonces $i + i^2 + i^3 + \ldots + i^n - ni^{n+1} = i - 1 - n(-i) \neq 97 + i$
Si $n = 4k + 3$, entonces $i + i^2 + i^3 + \ldots + i^n - ni^{n+1} = i - 1 - i - n \neq 97 + i$
Por lo tanto $n = 97$.

14. (C) La situación es como indica la figura. Utilizando la tangencia de la circunferencia grande con la dada, podemos escribir que $(R + 1)^2 = R^2 + (R - 3)^2$ y utilizando la tangencia de la pequeña, $(r + 1)^2 = r^2 + (3 - r)^2$.
Como se observa, R y r son las soluciones de la ecuación $(x + 1)^2 = x^2 + (x - 3)^2$, que es equivalente a $x^2 - 8x + 8 = 0$ cuya suma de soluciones es 8, por lo que C) es la respuesta al problema..



15. (B) Haciendo $x^4 = t$ en la ecuación $x^{12} + ax^8 + bx^4 + c = 0$, tenemos $t^3 + at^2 + bt + c = 0$, ecuación que nos dicen que tiene 2 soluciones reales positivas, 2010 y 102, y una compleja $2010 + 102i$. Al hacer las raíces cuartas de estas soluciones, para obtener x, resultan 2 raíces reales por cada una de las reales y ninguna por la compleja, así que la respuesta es 4.

16. (E) $f(n) = n^4 - 360n^2 + 400 = (n^2 + 20)^2 - 400n^2 = (n^2 + 20 + 20n)\cdot(n^2 + 20 - 20n)$ y $f(n)$ será primo sólo cuando uno de estos factores, que son enteros, sea 1 y además resulte que el otro es primo. El factor $n + 20 + 20n$ nunca es 1 (n es entero positivo) y el otro lo será si $n^2 - 20n + 20 = 1$, es decir, $n^2 - 20n + 19 = 0$, $n = 1, 19$. Si $n = 1$,

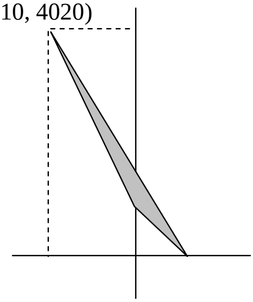
$f(n) = 41 \cdot 1$, primo, y si $n = 19$, $f(n) = 761$ que será primo pues 41 no aparece en las soluciones. Así pues, la suma pedida es 41 + 761 = 802, respuesta E.

17. (B) El triángulo en cuestión es como el de la figura y la manera más cómoda de obtener su área es restar al área de un triángulo rectángulo, el área de un trapecio rectángulo y otro triángulo rectángulo pequeño. Así pues,

$$A = \frac{2014 \cdot 4020}{2} - \left(\frac{(4020+4)}{2} \cdot 2010 + \frac{4 \cdot 4}{2}\right) = .$$

$$= \frac{1}{2} 2010(4028 - 4024) - 8 = 4012.$$

Respuesta B.



18. (A) En algún momento sólo habrá bolas blancas si las tres primeras extraídas son rojas o si en las tres primeras hay 1 blanca y la cuarta es roja. La probabilidad de *RRR* es $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}$ y la probabilidad del otro suceso es $3 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$. Así pues la probabilidad pedida es la suma de estos dos números es decir, $\frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{2}{5}$ respuesta A.

19. (B) Si $sena + senb = \sqrt{\frac{5}{3}}$, elevando al cuadrado, resulta $sen^2 a + sen^2 b + 2 sena\, senb = \frac{5}{3}$

Análogamente, si $cosa + cosb = 1$, es $cos^2 a + cos^2 b + 2\, cosa\, cosb = 1$. Sumando estas dos últimas igualdades, tendremos $2 + 2\,(sena\ senb + cosa\ cosb) = \frac{8}{3}$, por lo que $cosa\ cosb + sena\ senb = \frac{1}{3}$, es decir, $\cos(a - b) = \frac{1}{3}$.

20. (C) Ordenando las áreas de estos tres triángulos de mayor a menor hay 6 ordenaciones posibles de las que el área del triángulo *ABP* estará en primer lugar en 2 ocasiones. Como la elección del punto *P* es aleatoria, la probabilidad pedida es $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

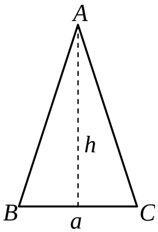
21. (D) Escribamos en base 10 los logaritmos que aparecen:

$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}=t$, es decir $\left(\frac{1}{2}\right)^t=\frac{1}{3}$ por lo que $t\cdot\log\frac{1}{2}=\log\frac{1}{3}$, es decir, $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}=\dfrac{\log\frac{1}{3}}{\log\frac{1}{2}}$

. Análogamente, $\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{3}=\dfrac{\log\frac{1}{3}}{\log\frac{1}{5}}$.

Nos hablan de $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{3}}$, es decir, de $\dfrac{\log\frac{1}{2}+\log\frac{1}{5}}{\log\frac{1}{3}}$, o sea, de $\dfrac{\log\frac{1}{10}}{\log\frac{1}{3}}$, que es lo mismo que $\dfrac{1}{\log 3}$. Como $\frac{1}{3}<\log 3<\frac{1}{2}$ pues $\sqrt[3]{10}<3<\sqrt{10}$, sigue que $2<\dfrac{1}{\log 3}<3$, por lo que la respuesta es D.

22. (B) Nos dicen que en el triángulo isósceles ABC de la figura, h y a son números enteros, así pues $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ es un número racional, $\frac{a}{2h}$.

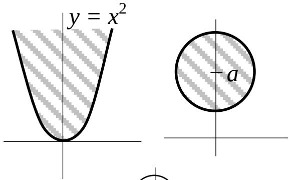


Como $sen A=2sen\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\dfrac{2sen\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}+sen^2\frac{A}{2}}=\dfrac{2tg\frac{A}{2}}{1+tg^2\frac{A}{2}}$,

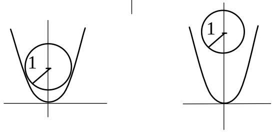
resulta que $senA$ será racional, y al ser

$\cos A=\cos^2\frac{A}{2}-sen^2\frac{A}{2}=\dfrac{\cos^2\frac{A}{2}-sen^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}+sen^2\frac{A}{2}}=\dfrac{1-tg^2\frac{A}{2}}{1+tg^2\frac{A}{2}}$, $cosA$ también será racional, por lo que la respuesta es B.

23. (A) El conjunto M es el conjunto sombreado de la figura, y el conjunto N es el círculo de centro $(0, a)$ y radio 1.



Así pues, $M\cap N$ será N sólo cuando $N\subset M$, es decir, que la situación sea como una de éstas:



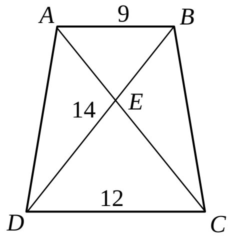
Así pues, el número a debe ser positivo y lo suficientemente grande para que la circunferencia de centro $(0, a)$ y radio 1 no salga de la región encerrada por la parábola $y = x^2$. Analicemos la intersección de la parábola $y = x^2$, con la circunferencia $x^2 + (y - a)^2 = 1$, es decir, estudiemos las soluciones de la ecuación $x^2 + (x^2 - a)^2 = 1$. Llamando $x^2 = t$, tenemos que $t + (t - a)^2 = 1$ y ambas líneas serán tangentes cuando t tome sólo un valor positivo, que corresponderá a 2 valores de x.

Ello ocurrirá cuando el discriminante de dicha ecuación sea 0, es decir, cuando $(2a - 1)^2 - 4(a^2 - 1) = 0$, o lo que es igual, $a = \frac{5}{4}$.

Así pues, si $a < \frac{5}{4}$, la circunferencia se saldrá de la región de la parábola y si $a \geq \frac{5}{4}$, caerá dentro, por lo que $N \subset M$ y la respuesta es A.

24. (E) Añadiendo a cada uno de los triángulos AED y BEC el triángulo AEB, resultará que ambos tendrían igual área cuando los nuevos triángulos, ABD y ABC, tengan igual área, y ello sólo ocurrirá cuando las alturas, tomando como base AB, sean iguales, es decir, cuando AB sea paralela a DC o, lo que es lo mismo, cuando el cuadrilátero $ABCD$ sea un trapecio.

Así pues, nos dicen que en el trapecio $ABCD$, de bases $AB = 9$ y $CD = 12$, una diagonal mide 14. La situación es, pues, como indica la figura, en la que los triángulos ABE y DCE son semejantes, de razón de semejanza $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$, por lo que llamando x a AE y $14 - x$ a EC, sigue que $\frac{x}{14 - x} = \frac{3}{4}$, es decir, $4x = 42 - 3x$, $x = 6$ y la respuesta es E.



25. (A) Dibujemos la curva dada:

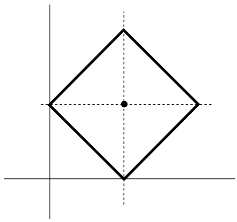
Si $x, y \geq 1$, estamos en $x - 1 + y - 1 = 1$, $x + y = 3$.

Si $x < 1$, $y \geq 1$ tenemos $1 - x + y - 1 = 1$, $-x + y = 1$.

Si $x \geq 1$, $y < 1$, es $x - 1 + 1 - y = 1$, $x - y = 1$.

Si $x < 1$, $y < 1$ resulta $1 - x + 1 - y = 1$, $-x - y = -1$.

Así pues, la curva dada es la de la figura, que encierra un cuadrado de lado $\sqrt{2}$ y área, por tanto, 2.



Participantes y relación de ganadores del XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

La distribución por niveles y la relación de los ganadores de cada uno de los cuatro niveles, en la 2ª Fase, fue la siguiente:

	NIVEL I		**NIVEL II**		**NIVEL III**		**NIVEL IV**	
	5º Prim	**6º Prim**	**1º ESO**	**2º ESO**	**3º ESO**	**4º ESO**	**1º Bach**	**2º Bach**
Inscritos II Fase	297	486	484	628	444	496	378	187
TOTAL INSCRITOS	**3400**							
Participantes II Fase	275	449	421	547	350	397	285	136
TOTAL PARTICIPANTES	**2860**							
Puntuación máxima	92	102	104	110	105	107	90	100
Puntuación media	53,9	57,2	56,2	58,5	52,6	53,8	52,1	55,3
Nº estud. > 85 puntos	4	11	14	16	4	9	2	4
Nº estad. < 50 puntos	95	129	124	130	125	146	123	51
Nº Centros participantes	167		285		256		166	
TOTAL CENTROS	**404**							

Los ganadores fueron:

NIVEL I

1. Daniel Alonso González (6º Primaria) Colegio SEK El Castillo
2. Elena Fernández Rodríguez (5º Primaria) CP Miguel de Cervantes
3. Daniel Puignau Chacón (6º Primaria) C.E.I.P. Ciudad de Guadalajara. Madrid

NIVEL II

1. Miguel Barrero Santamaría (2º ESO) IES Alameda de Osuna. Madrid
2. Álvaro Robledo Vega (1º ESO) Colegio Peñalar. Madrid
3. Ángel Prieto Naslin (2º ESO) Lycée Français. Madrid

NIVEL III

1. Lorenzo Esteban de la Iglesia (4º ESO) Colegio Fray Luis de León
2. Paula Sardinero Meirás (3º ESO) Colegio Virgen de Europa. Madrid
3. Federico Espósito Bacigalupo (4º ESO) Colegio Alemán de Madrid
4. Víctor García Herrero 84º ESO) IES Ortega y Gasset

NIVEL IV

1. Javier García Gómez (2º Bchto.) IES Ramiro de Maeztu
2. Daniel Henry Mantilla (1º Bchto.) Lycée Français. Madrid
3. Alberto Merchante González (2º Bchto.) IES Ramiro de Maeztu

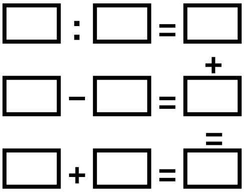
X Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

20 de noviembre de 2010

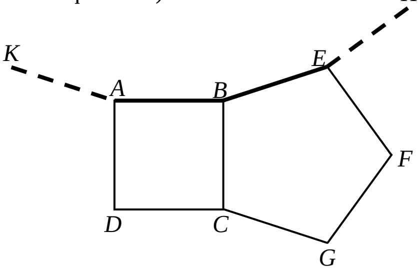
PRUEBA POR EQUIPOS (45 minutos)

1º y 2º de E.S.O.

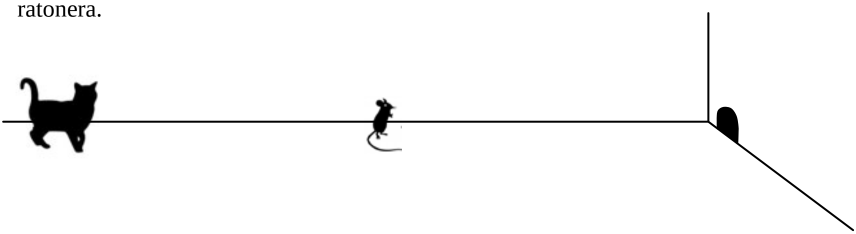
1.- Coloca en las nueve casillas del diagrama los enteros positivos del 1 al 9 de manera que se verifiquen las cuatro igualdades, tres horizontales y una vertical.



2.- En la figura adjunta se muestra un cuadrado *ABCD* y un pentágono regular *BEFGC*. Si *KA, AB, BE, EH,…* son lados de otro polígono regular, ¿de qué polígono se trata? (Indica el número de lados que tiene)

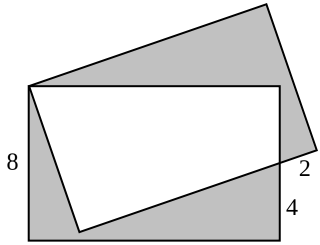


3.- Un ratón está a 20 pasos de su ratonera y un gato está a 5 saltos del ratón. Mientras el gato da un salto el ratón da tres pasos. Un salto de gato equivale a 10 pasos de ratón. Justifica si el gato podrá, o no podrá, alcanzar al ratón antes de que éste entre en su ratonera.



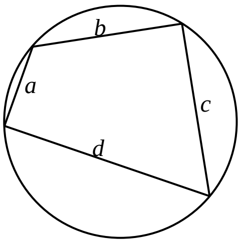
<u>3º y 4º de E.S.O.</u>

1.- Los dos rectángulos de la figura son iguales. ¿Cuál es el área de la zona sombreada?



2.- Sea p un número primo mayor que 3. Pon varios ejemplos y observa el resto de la división de p^2 entre 12. Justifica que siempre ocurre lo que has observado en esos ejemplos.

3.- En un círculo hay inscrito un cuadrilátero en el que los cuadrados de las longitudes de los cuatro lados consecutivos son: $a^2 = 23$, $b^2 = 50$, $c^2 = 58$ y $d^2 = 85$. Calcula el área del círculo.

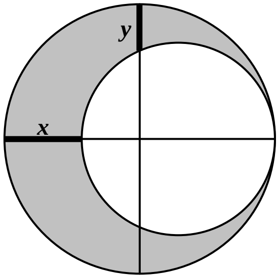


Bachillerato.

1.- Representa gráficamente la función $f(x) = \left|\left|\left|x\right| - 3\right| - 2\right|$

Determina el número de soluciones de la ecuación $\left|\left|\left|x\right| - 3\right| - 2\right| = \cos x$

2.- En la figura se muestran dos circunferencias tangentes interiores y dos diámetros de la mayor. Si x = 16 e y = 10, calcula el área de la región sombreada.

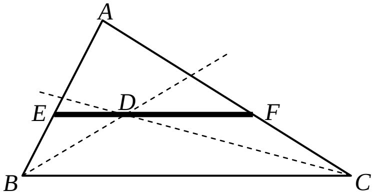


3.- Justifica que un triángulo en el que las distancias de cada uno de sus vértices a dos rectas perpendiculares vengan dadas por números enteros, no puede ser equilátero.

PRUEBA INDIVIDUAL (90 minutos)

1º y 2º de E.S.O.

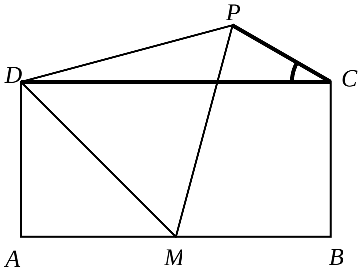
1. En el triángulo ABC las bisectrices interiores de los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$ se cortan en el punto D. Por D se traza la paralela al lado BC y corta al lado AB en E y al lado AC en F. Si $BE = 4{,}5$ cm y $CF = 6{,}7$ cm ¿cuánto mide el segmento EF?



2. Quiero elegir una lista de n números diferentes de entre los 20 números: 1, 2, 3, …19, 20 de manera que no haya en mi lista ninguna pareja de números cuya diferencia sea 5. ¿Cuál es el mayor valor de n para el que esto es posible? Muestra una lista con esa cantidad de números?

3. Calcula el menor entero posible k para el que cada uno de los tres números 24, 42 y k sea divisor del producto de los otros dos.

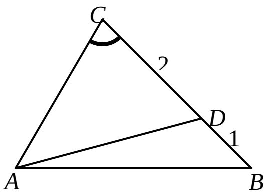
4. En el rectángulo $ABCD$ de la figura AB es el doble de AD, M es el punto medio del lado AB y el triángulo MDP es equilátero. Calcula la medida del ángulo $P\hat{C}D$.



5. Dispones de 10 cajas y 44 monedas. En cada caja pones las monedas que quieras (incluso ninguna). ¿Hay alguna forma de repartir las monedas de manera que no haya dos cajas con igual número de monedas?
Si tu respuesta es afirmativa indica cómo has hecho el reparto y si es negativa justifica por qué no es posible.

3º y 4º de E.S.O.

1.- En el triángulo *ABC*, como muestra la figura, el punto *D* divide al lado *BC* en dos segmentos de longitudes $BD = 1$ y $DC = 2$. Si los ángulos $A\hat{B}C$ y $A\hat{D}C$ miden 45º y 60º, respectivamente, Calcula la medida del ángulo $A\hat{C}B$.

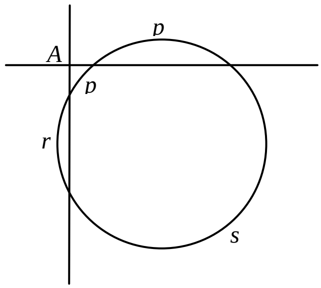


2.- ¿Cuántos números de 4 cifras, todas impares y distintas, son múltiplos de 9?

3.- Contador sale de su casa y va en bicicleta a casa de Perico Delgado a una velocidad media de 24 km/h. Al comprobar que Perico no está, se vuelve a su casa sin perder nada de tiempo. ¿Qué velocidad media debe conseguir a la vuelta si quiere que la velocidad media del viaje completo sea de 30 km/h?

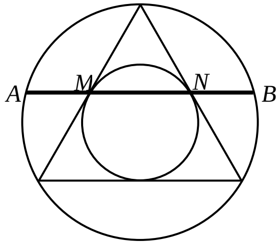
4.- Disponemos de un acuario cúbico con un poco de agua. Sumergiendo un cubito de hierro de 3 cm de arista, el agua llega justamente hasta la cara superior del cubito. Sacamos el cubito de hierro e introducimos otro de aluminio de 10 cm de arista y ¡sorpresa!, el nivel del agua asciende justamente hasta la cara superior del cubito. ¿Hasta qué altura llegaría el nivel del agua si se introdujera un cubito de 7 cm de arista?

5.- La circunferencia de la figura está dividida en cuatro arcos de longitudes *p, q, r* y *s* mediante dos rectas perpendiculares. Expresa *s* en términos de *p, q* y *r*.



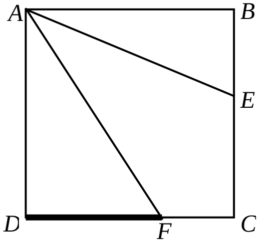
Bachillerato

1. En la figura observas un triángulo equilátero, la circunferencia inscrita y la circunscrita al mismo. La cuerda AB de la circunferencia circunscrita pasa por los puntos M y N que son los de tangencia de la circunferencia inscrita con el triángulo. Calcula $\dfrac{MN}{AM}$.



2. Dos lados consecutivos de un paralelogramo tienen longitudes 9 y 7. Si las longitudes de las diagonales vienen dadas por números enteros, calcula dichas longitudes.

3. La longitud del lado del cuadrado $ABCD$ es 1. Elegimos un punto E en el lado BC para que $AE + EB = \dfrac{3}{2}$ y un punto F en el lado CD para que AF sea la bisectriz del ángulo $D\hat{A}E$. Calcula la longitud DF.



4. Si a y b son números reales tales que $a + b = 1$, prueba que $a^4 + b^4 \geq \dfrac{1}{8}$.

5. Halla todas las soluciones del sistema $\begin{cases} (x+1)yz = 12 \\ (y+1)xz = 4 \\ (z+1)xy = 4 \end{cases}$

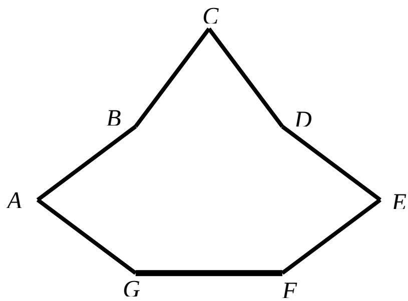
PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

1º y 2º de ESO.-

1A.- ¿Cuántos números de tres cifras (iguales o distintas) verifican que el producto de ellas es 6?
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1B.- Sea "T" la respuesta del problema 2B
María sale en coche hacia el Pirineo a una velocidad constante de 2"T" km/h. Diez minutos más tarde sale Luisa desde el mismo punto y en el mismo sentido y tarda 1 hora y 40 minutos en alcanzar a María. Si Luisa iba también con velocidad constante, ¿a qué velocidad circulaba?
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1C.- Sea "T" la respuesta del problema 2C.
El dibujo muestra un heptágono *ABCDEFG* en el que *FG* mide "T" cm. Los restantes lados son todos iguales entre sí. Si *BDFG* resulta ser un cuadrado cuya área es la mitad del área del polígono entero, calcula el perímetro del heptágono.
(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

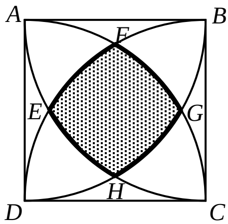


<u>**3º y 4º de ESO.-**</u>

2A.- Sea "T" la respuesta del problema 3A.

Haciendo centro en cada uno de los vértices del cuadrado de la figura de lado "T" - $3\sqrt{3}$ hemos trazado cuatro arcos de radio el lado del cuadrado, formando el cuadrilátero curvilíneo *EFGH*. Calcula el área de este cuadrilátero.

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)



2B.- Ricardo mide los seis ángulos de dos triángulos, uno de ellos obtusángulo y el otro acutángulo, pero sólo recuerda la medida de cuatro de ellos: 120º, 80º, 55º y 10º. ¿Cuál es la medida del menor de los ángulos del triángulo acutángulo?

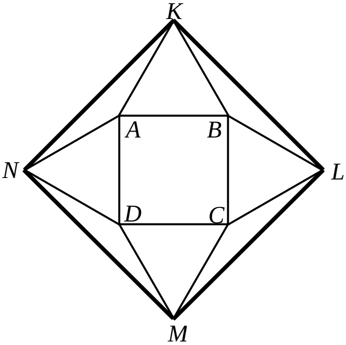
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

2C.- Sea "T" la respuesta del problema 3C.

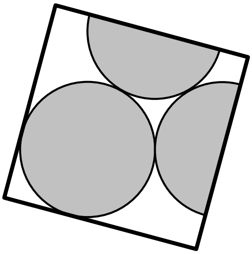
Marta tiene "T" cartas rojas numeradas 1, 2, 3,…, T y (T – 1) cartas azules numeradas, también correlativamente, pero a partir del 3. Las coloca alternando los colores pero de manera que el número de cada carta azul es múltiplo de los números de sus dos cartas vecinas rojas. Calcula la suma de los números de todas las cartas salvo las de los extremos.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

Bachillerato.-



3A.- Sea "T" la respuesta del problema 1A.
En la figura puedes observar un cuadrado *ABCD* y cuatro triángulos equiláteros: *AKB*, *BLC*, *CMD*, y *DNA*. Si el área del cuadrado es $\frac{1}{3}$ T, calcula el área del polígono *KLMN*.
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)



3B.- Sea "T" la respuesta del problema 1B.
El círculo y los dos semicírculos de la figura tienen radio $r = \frac{1+T}{100}$. ¿Cuál es el perímetro del cuadrado?
(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

3C.- Recuerda que n! se define como n! = 1 · 2 · 3 ·…· (n – 1) · n.
Es evidente que el número n! + 1 no tiene ningún divisor primo menor que n.
La proposición, "Si n es primo entonces n! + 1 es también primo", es falsa, aunque efectivamente el número 11! + 1 = 39916801 es también primo. Encuentra el menor primo para el que la proposición anterior es evidentemente falsa.
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

CENTROS GANADORES

1. Colegio Alemán de Madrid
2. IES San Juan Bautista
3. IES Ramiro de Maeztu

ESTUDIANTES GANADORES

NIVEL I (1º, 2º ESO)

1 Roberto Nares Alcalá	(IES Herrera Oria).
2. Carlos Caro Álvarez	(Colegio SEK El Castillo)

NIVEL II (3º, 4º ESO)

1. Miguel Barrero Santamaría	(IES Alameda de Osuna)
2. Guillermo Pascual Pérez	(Colegio Fray Luis de León)

NIVEL III (Bachillerato)

1. Xi Chen	(IES Vallecas 1)
2. Pablo Boixeda	(Colegio Alemán de Madrid)

RELACIÓN DE LOS 10 CENTROS CON MAYOR PUNTUACIÓN

1.	Colegio Alemán de Madrid ………………..	56,5
2.	IES San Juan Bautista-B …………………..	49,9
3.	IES Ramiro de Maeztu-B …………………	47,6
4.	Liceo Francés-A……………...…………..	41
5.	Colegio SEK Ciudalcampo-A……………..	40,5
6.	Colegio Retamar-A..………………..……….	40,1
7.	Colegio Fray Luis de León-A...……………	39,8
8.	Colegio San José del Parque-A ……………	37,2
9.	IES Alameda de Osuna-B …………………	37
10.	IES Ramiro de Maeztu-A …………………	36,3

XXVIII CONCURSO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
"SOCIEDAD PUIG ADAM"
Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 12 de junio de 2010

NIVEL I (3º de E.S.O.)

Problema 1.

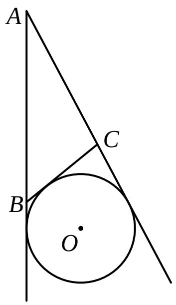
Consideremos en un círculo dos diámetros perpendiculares entre sí. Con centro en un extremo de uno de ellos trazamos un arco que pasa por los extremos del otro diámetro. Calcula el cociente entre el área de la región mayor y el área de la región menor en las que este arco divide al círculo.

Problema 2.

Los dígitos de un entero *n* de cuatro cifras son cuatro enteros consecutivos que están en orden decreciente cuando se lee de izquierda a derecha. ¿Cuál es la suma de todos los restos posibles de la división de *n* entre 37?

Problema 3.

En la figura se observa un triángulo *ABC* y una circunferencia de centro *O* tangente al lado *BC* y a las prolongaciones de los lados *AB* y *AC*. Si el ángulo en *A* es de 22º, calcula el valor del ángulo $B\hat{O}C$.



Problema 4.

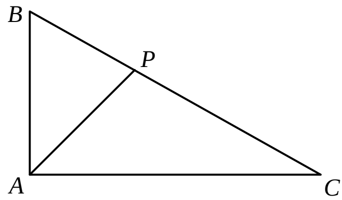
El director de una banda de música observa que si pone a todos sus músicos, que son más de 40, formando el mayor cuadrado posible, le sobran 5 músicos, pero, en cambio, si los pone en disposición rectangular, con 7 filas más que columnas, puede colocarlos a todos. Calcula el número de músicos de la banda.

NIVEL II (4º de E.S.O.)

Problema 1.

Encuentra razonadamente todas las soluciones enteras de la ecuación $x! + 24 = y^2$

Problema 2.



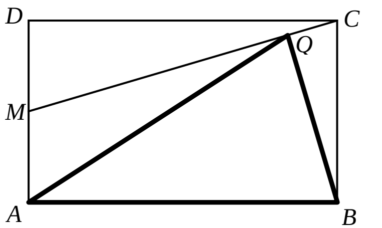
En el triángulo rectángulo *ABC*, sea *P* el punto común a la hipotenusa *BC* y a la bisectriz del ángulo Â. Si $AP = 20\sqrt{2}$, calcula la suma de los inversos de las longitudes de los catetos.

Problema 3.

Sea n un entero positivo. Demuestra que el máximo común divisor de los números $(3n - 1)$ y $(2n - 3)$ es múltiplo de 7 si al dividir n entre 7 se obtiene de resto 5 y que en cualquier otro caso, $(3n - 1)$ y $(2n - 3)$ son primos entre sí.

Problema 4.

En el rectángulo *ABCD*, sea *M* el punto medio del lado *AD* y *Q* el punto del segmento *MC* tal que *BQ* es perpendicular al segmento *MC*. Demuestra que el triángulo *AQB* es isósceles.



NIVEL III (1º de Bachillerato)

Problema 1.

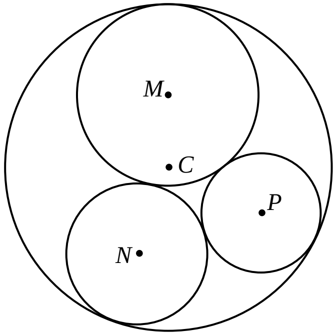
Encuentra todos los enteros positivos *m* y *n*, con *n* impar, tal que $\frac{1}{m}+\frac{4}{n}=\frac{1}{12}$.

Problema 2.

En el triángulo *ABC* con *AB* = 6, *BC* = 4 y *AC* = 3, las bisectrices interior y exterior del ángulo Â cortan a la recta *BC* en los puntos *P* y *Q*. Calcula el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo *APQ*.

Problema 3.

En la figura observas tres circunferencias de centros, *M*, *N* y *P*, tangentes exteriores dos a dos y otra circunferencia de centro *C* tangente a las tres y que las contiene. Demuestra que los triángulos *CMN*, *CMP* y *CNP* tienen todos de perímetro 2*r*, siendo *r* el radio de la circunferencia de centro *C*.



Problema 4.

Una persona visita el Casino de juego en las ciudades por las que pasa. Destina 20 € en cada visita como cantidad máxima a perder. Lo hace en la ruleta a PAR-IMPAR (con probabilidad 1/2 de ganar en cada jugada). Procede así: Apuesta sus 20 € y si pierde se retira a pasear. Si gana, apuesta los 40 € y si los pierde se retira a pasear, pero si vuelve a ganar se juega 60 de los 80 € que ha reunido. Ahora, si gana, se retira con los 140 € que tiene y si pierde está como al principio, con 20 €. Así procede hasta que o bien pierde los 20 € o bien sale con 140 €. ¿Cuál es la probabilidad de salir del Casino con 140 €?
Explica si, a la larga, esta persona ganará o perderá dinero.

XLV OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

2ª FASE LOCAL-COMUNIDAD DE MADRID

Primera sesión, viernes 15 de enero de 2010

No está permitido el uso de calculadoras. Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.

Problema 1

Determina todos los posibles números de seis cifras distintas *abcdef*, formados con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6, que tienen la propiedad de que los números de tres cifras *abc*, *bcd*, *cde* y *def* son divisibles por 4, 5, 3 y 11 respectivamente.

Problema 2

Determina los lados del triángulo rectángulo del que se conocen el perímetro, $p = 96$, y la altura sobre la hipotenusa, $h = \dfrac{96}{5}$.

Problema 3

Dado el polinomio $P(x) = x^4 + \square x^3 + \square x^2 + \square x + \square$, en el que cada rectángulo representa un hueco donde se colocará un coeficiente, se plantea el siguiente juego entre dos jugadores: alternativamente, el primer y el segundo jugador eligen un hueco vacío y colocan en él un entero no nulo hasta rellenar todos los huecos. Si el polinomio resultante tiene al menos dos raíces enteras gana el segundo jugador, en otro caso el ganador es el primero.

Prueba que, eligiendo la estrategia adecuada, el primer jugador siempre puede ganar.

Segunda sesión, sábado 16 de enero de 2010

Problema 4

Se consideran un triángulo ABC, de perímetro 18cm, y su circunferencia inscrita K. La tangente a K paralela al lado AC corta a los lados AB y BC en puntos D y E, respectivamente. Si $DE = 2$cm, determina los posibles valores de la medida de AC.

Problema 5

Supongamos que tenemos un tablero con dieciséis casillas dispuestas en cuatro filas y cuatro columnas.

(a) Prueba que se pueden colocar siete fichas, nunca dos en la misma casilla, de forma que al eliminar dos filas y dos columnas cualesquiera siempre quede alguna ficha sin eliminar.

(b) Prueba que si se colocan seis fichas, nunca dos en la misma casilla, siempre se pueden eliminar dos filas y dos columnas de forma que todas las fichas sean eliminadas.

Problema 6

Decimos que un conjunto E de números naturales es *especial* cuando al tomar dos elementos cualesquiera distintos $a, b \in E$ se tiene que $(a-b)^2$ divide al producto ab.

(a) Encuentra un conjunto especial formado por tres elementos.

(b) ¿Existe algún conjunto especial formado por cuatro números naturales que estén en progresión aritmética?

XLVII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA
Fase local-Comunidad de Madrid

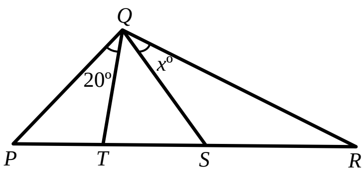
Primera sesión, viernes 26 de noviembre de 2010

- **En la hoja de respuestas, escribe la letra que corresponde a la opción que creas correcta en cada pregunta. Si decides cambiarla, táchala con una cruz y escribe otra.**
- **Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos, cada respuesta en blanco 2 puntos y cada respuesta errónea, 0 puntos.**
- **No están permitidas calculadoras ni ningún instrumento de medida.**
- **Tiempo: 3 horas.**

1 En una lista de siete números, cualesquiera cuatro adyacentes suman 16 y cualesquiera cinco adyacentes suman 19. ¿Cuál es la suma de esos siete números?

A) 21 **B)** 25 **C)** 28 **D)** 32 **E)** 35

2 En el dibujo de la derecha, que no está hecho a escala, se verifica que $PT = QT = TS$, $QS = SR$ y el ángulo $P\hat{Q}T = 20^{\circ}$. ¿Cuál es el valor de *x*?



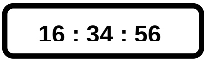
A) 20 **B)** 25 **C)** 30 **D)** 35 **E)** 40

3 En este cuadrado mágico, el producto de los números de cada fila, columna y diagonal es el mismo. ¿Cuál es valor de $r + s$?

p	*q*	*r*
s	1	*t*
u	4	1/8

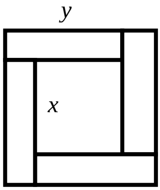
A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{9}{16}$ **C)** $\frac{5}{4}$ **D)** $\frac{33}{16}$ **E)** 24

4 En un reloj digital, como el del dibujo, en el que aparecen las horas, minutos y segundos, ¿cuántas veces cambian los seis dígitos simultáneamente en 24 horas?



A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

5 El diagrama muestra un cuadrado de lado y que se ha dividido en un cuadrado de lado x y cuatro rectángulos iguales. ¿Cuál es la longitud del lado largo del rectángulo?



A) $\frac{y-x}{2}$ **B)** $\frac{y+2x}{3}$ **C)** $y-x$ **D)** $\frac{2y}{3}$

E) $\frac{y+x}{2}$

6 En el diagrama que ves, podemos leer dos números de tres cifras cada uno: leyendo de izquierda a derecha y leyendo de arriba a abajo. Hay un único valor del dígito d para el que ambos números son primos. ¿Cuál es este valor?

	5	
1	d	3
	7	

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

7 Una lista de diez números está formada por 0, 1, 2, 3, 4, cada uno de ellos dos veces. Los ceros están juntos; los unos separados por 1 número; los doses separados por 2 números; los treses separados por 3 números; y los cuatros separados por 4 números. Si la lista empieza por 3, 4, …, ¿qué número aparece en último lugar?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

8 Las páginas de un libro están numeradas 1, 2, 3, … Si se han empleado 852 dígitos para numerarlas, ¿cuál es el número de la última página?

A) 215 **B)** 314 **C)** 320 **D)** 329 **E)** 422

9 ¿Para cuántos valores de n se verifica que $\frac{n}{2}$ y $2n$ son números de tres cifras?

A) 0 **B)** 150 **C)** 200 **D)** 300 **E)** 500

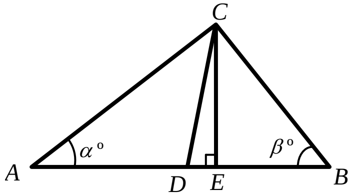
10 Si la suma de tres números primos diferentes es 40, ¿cuál es la diferencia entre los dos mayores?

A) 8 **B)** 12 **C)** 16 **D)** 20 **E)** 24

11 En un festival de Navidad, la entrada infantil cuesta 4,20 € y la de adulto 7,70 €. Un grupo de niños y adultos fue al festival y pagaron entre todos c €. De los siguientes números, ¿cuál de ellos es un posible valor para c?

A) 91 **B)** 92 **C)** 93 **D)** 94 **E)** 95

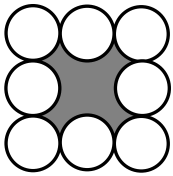
12 En el triángulo *ABC* de la figura, se verifica que $B\hat{A}C = \alpha^{o}$ y $A\hat{B}C = \beta^{o}$, donde $\alpha < \beta$. Si *CD* es la bisectriz del ángulo $A\hat{C}B$ y *CE* es perpendicular a *AB*, ¿cuál es el valor del ángulo $D\hat{C}E$?



A) $\dfrac{180-(\alpha+\beta)}{2}$ **B)** $\dfrac{\beta-\alpha}{2}$

C) $\dfrac{\alpha+2\beta}{2}$ **D)** $\dfrac{360-\alpha-2\beta}{2}$ **E)** $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

13 Con centro en los vértices y puntos medios de los lados de un cuadrado de perímetro 8, hemos construido la región sombreada que observas, en la que todas las circunferencias son iguales. ¿Cuál es el perímetro de dicha región?



A) π **B)** 2π **C)** 8 **D)** 3π **E)** 4π

14 ¿Cuántos conjuntos de tres primos distintos tienen la propiedad de que el producto de los tres es cinco veces su suma?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 4 **E)** 7

15 *F* es el conjunto de todos los números de cinco cifras en los que el producto de éstas es 15. *T* es el conjunto de todos los números de cinco cifras en los que el producto de éstas es 25.
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

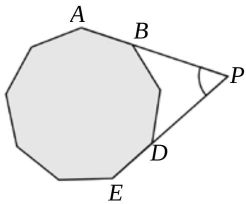
A) El conjunto *F* tiene el doble de elementos que el conjunto *T*.
B) El conjunto *F* tiene la mitad de elementos que el conjunto *T*.
C) El conjunto *F* tiene 5/3 de los elementos del conjunto *T*.
D) El conjunto *F* tiene 3/5 de los elementos del conjunto *T*.
E) Ambos conjuntos tienen el mismo número de elementos.

A) **B)** **C)** **D)** **E)**

16 En una clase el número de chicas es más del 45% pero menos del 50% del total. ¿Cuál es el menor número posible de chicas en esa clase?

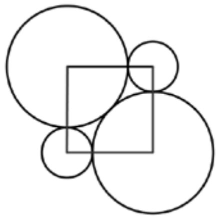
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

17 La figura muestra un polígono regular de nueve lados en el que hemos prolongado los lados AB y DE hasta que se junten en el punto P. ¿Cuál es el valor del ángulo $B\hat{P}D$?



A) 40º **B)** 45º **C)** 50º **D)** 55º **E)** 60º

18 El dibujo muestra cuatro circunferencias, iguales dos a dos, con centros en los vértices de un cuadrado y tangentes entre sí. Si el radio de las circunferencias pequeñas es 1 cm, ¿cuál es, en cm, el radio de las grandes?



A) $1+\sqrt{2}$ **B)** $\sqrt{5}$ **C)** $\sqrt{2}$ **D)** $\frac{5}{2}$ **E)** $\frac{4\pi}{3}$

19 ¿Cuántos números hay, de 10 cifras cada uno, formados solamente por unos, doses y treses y tal que cualquier par de cifras adyacentes difieran en 1?

A) 16 **B)** 32 **C)** 64 **D)** 80 **E)** 100

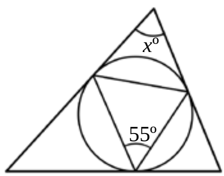
20 ¿Cuál es el máximo número de cifras que puede tener un número si cualquier número formado por dos cifras consecutivas es un cuadrado perfecto?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 10

21 En un triángulo, dos de sus medianas, de longitudes 8 y 12 cm, son perpendiculares. ¿Cuál es, en cm^2, el área de dicho triángulo?

A) 24 **B)** 32 **C)** 48 **D)** 64 **E)** 96

22 En la figura observas una circunferencia inscrita en un triángulo y circunscrita en otro. ¿Cuál es el valor de x?



A) 55 **B)** 60 **C)** 65 **D)** 70 **E)** 75

23 En una circunferencia de centro O marco los puntos A y B siendo el ángulo $A\hat{O}B = 60º$. Una segunda circunferencia es tangente interior a aquella y además tangente a los segmentos OA y OB. ¿Cuál es el cociente entre las áreas de los círculos pequeño y grande?

A) $\frac{1}{16}$ **B)** $\frac{1}{9}$ **C)** $\frac{1}{8}$ **D)** $\frac{1}{6}$ **E)** $\frac{1}{4}$

24 ¿Cuál es el área de la región formada por los puntos (x, y) tales que $|3x-18|+|2y+7| \le 3$?

A) 3 **B)** $\frac{7}{2}$ **C)** 4 **D)** $\frac{9}{2}$ **E)** 5

25 ¿Cuál es el coeficiente de x^{28} en el producto de polinomios

$$(1+x+x^2+...+x^{27})\cdot(1+x+x^2+...+x^{14})^2 \ ?$$

A) 195 **B)** 196 **C)** 224 **D)** 378 **E)** 405

26 Colocamos alineadas y al azar tres bolas rojas, dos blancas y una azul. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya dos del mismo color juntas?

A) $\frac{1}{12}$ **B)** $\frac{1}{10}$ **C)** $\frac{1}{6}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** $\frac{1}{2}$

27 En el interior de un rectángulo de dimensiones a y b, enteros, con $a > b$, coloreamos otro rectángulo de lados paralelos a los de aquel y que deja un pasillo sin colorear de anchura uniforme de 1 cm. Si el rectángulo coloreado tiene la mitad de área del rectángulo original, ¿cuántas posibilidades hay para el par ordenado (a, b)?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

28 En el cuadrilátero *ABCD* con *AB* = *BC* = *CD*, los ángulos en *B* y en *C* miden 70º y 170º respectivamente. ¿Cuál es la medida, en grados, del ángulo en *A*?

A) 75 **B)** 80 **C)** 85 **D)** 90 **E)** 95

29 Una encuesta demuestra que el 70% de los encuestados aprueban una determinada medida del gobierno. En tres ocasiones, elegimos un encuestado al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que solo en una de estas tres ocasiones el encuestado sea de los que aprueban la medida del gobierno?

A) 0,063 **B)** 0,189 **C)** 0,233 **D)** 0,333 **E)** 0,441

30 El cuadrado *ABCD*, de área 36, verifica que el lado *AB* es paralelo al eje horizontal. Si los vértices *A*, *B* y *C* están respectivamente en las gráficas de $y=\log_a x$, $y=2\log_a x$ e $y=3\log_a x$, ¿cuál es el valor de a?

A) $\sqrt[6]{3}$ **B)** $\sqrt{3}$ **C)** $\sqrt[3]{6}$ **D)** $\sqrt{6}$ **E)** 6

Dirección General de Mejora de la Calidad de la Enseñanza
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN
Comunidad de Madrid

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Consejo Social de la UCM

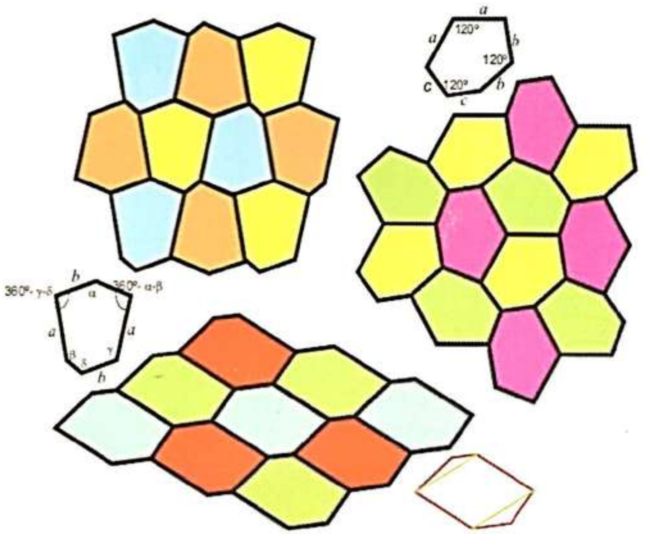
sm

ANAYA

El Corte Inglés

EDUCAMADRID

XVI concurso de primavera



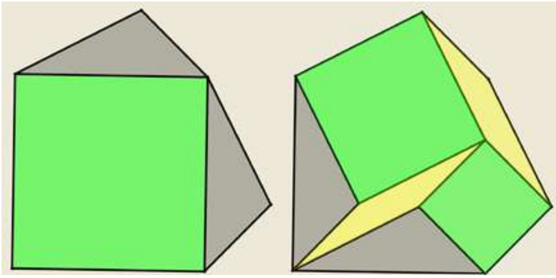
MATEMÁTICAS 2012

Comunidad de Madrid

Comité organizador del Concurso de Primavera

Alfredo Martínez Sanz
Esteban Serrano Marugán
Francisco López Álvarez
Isabel Benito Miguel
Javier Soler Areta
Jesús García Gual
Joaquín Hernández Gómez
José María Sordo Juanena
Juan Jesús Donaire Moreno

Luis Ferrero de Pablo
María Gaspar Alonso-Vega,
María Moreno Warleta
María Olbés Fernández
Merche Sánchez Benito
Miguel Ángel Baeza Alba
Pilar Ruiz Cervigón
Víctor Manuel Sánchez González



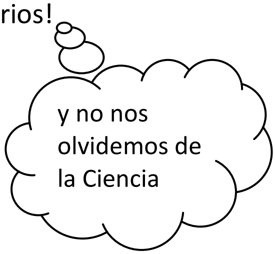
Teorema del coseno para un ángulo obtuso

Presentación

Preguntaron a la rana viajera por el número 16, y ella respondió que era el tercer número.
- Cuando yo iba por la escuela siempre oía contar a algún chico: Tres, catorce, dieciséis, ...
Y dando tres saltos proporcionales se zambulló en la charca.
El sombrerero loco comentó que él nunca pedía opinión a alguien que hablaba de oídas, y se fue al tijerero a preguntarle si su sombrero necesitaba algún recorte.

¡Que esta crisis nos haga más solidarios!
.

Comité Organizador



AGRADECIMIENTOS

A los participantes y colaboradores del Concurso.

A la Facultad de Matemáticas.

Al Consejo Social y al Vicerrectorado de alumnos de la UCM.

Al Área de Formación del Profesorado dentro de la Dirección General de la Mejora de la Calidad de la Enseñanza de la Consejería de Educación.

A Educamadrid.

A las editoriales Grupo **ANAYA** y Ediciones **S.M.**

Al grupo empresarial El Corte Inglés.

A la librería Aviraneta

XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
1ª FASE: 23 de febrero de 2011
NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***2 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

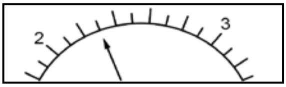
Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Aviraneta
www.profes.net



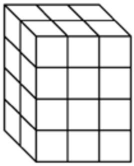
1 ¿Qué número marca la flecha en esta balanza?

A) 2,03 **B)** 2,15 **C)** 2,25 **D)** 2,3 **E)** 2,51

2 La suma de las cifras de 2011 es 4. ¿Cuántos números de cuatro cifras cumplen que la suma de sus cifras es 4?

A) 9 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 15 **E)** 20

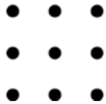
3 Con 24 cubos de un centímetro de lado, Sofía ha construido un bloque como el de la figura cuya base tiene un perímetro de 10 cm y su altura mide 4 cm. Santiago ha formado otro bloque usando 42 cubos. Si el perímetro de la base es 18 cm, ¿cuántos centímetros mide la altura del ortoedro de Santiago?



A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 7

4 Tengo un montonazo de caramelos. Si los repartiera entre mis treinta y cinco amigos del cole, me sobrarían diecisiete. ¿Cuántos me sobrarían si los repartiera entre mis siete primos?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4



5 ¿Cuál es el menor número de puntos que hay que quitar del diagrama para que no haya tres puntos alineados?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 7

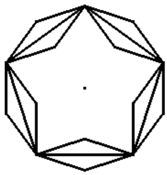
6 ¿Qué valor es el más próximo al resultado de la multiplicación $3{,}75 \times 0{,}28$?

A) 10000 **B)** 100 **C)** 1 **D)** 0,1 **E)** 0,01

7 Mi chinchilla, Bernie, se come cinco paquetes de alfalfa en dos meses. ¿Cuántos paquetes de alfalfa se comerá en un año?

A) 60 **B)** 45 **C)** 30 **D)** 20 **E)** 10

8 En un decágono regular hemos inscrito un pentágono regular y dentro de éste una estrella pentagonal. Si el área del decágono es 25,95 cm^2 y el de la estrella 16,05 cm^2, ¿cuál es, en cm^2, el área del pentágono?



A) 20,4 **B)** 20,45 **C)** 20,5 **D)** 21

E) 21,1

9 Ana le debe veintitrés euros a Emilio; Emilio le debe doce a Inés; Inés le debe diecinueve a Olivia; Olivia le debe quince a Ulises y Ulises le debe diez a Ana. Para saldar sus deudas y quedar en paz, Ana le da cuatro euros a Emilio, otros cuatro a Olivia y cinco a Ulises. ¿Qué les falta hacer para terminar de arreglar este embrollo?

A) Ana le da dos euros a Inés **B)** Emilio le da dos euros a Ulises
C) Inés le da siete euros a Emilio **D)** Inés le da tres euros a Ulises
E) Olivia le da un euro a Ulises

10 Si sustituimos cada una de las letras de la suma OMAR + AMOR + ROMA por los números 1, 3, 8 y 9, distintas letras corresponden a distintos números, ¿cuál es el máximo valor posible de la suma?

A) 21 294 **B)** 19 710 **C)** 22 585 **D)** 14 805 **E)** 29 493

11 En un triángulo isósceles cada uno de los ángulos iguales mide 75º. ¿Cuánto mide el ángulo desigual?

A) 30º **B)** 75º **C)** 90º **D)** 105º **E)** 210º

12 El rey del castillo ha recibido la visita de príncipes y caballeros. Cada príncipe trajo de regalo tres cofres de oro y uno de plata; y cada caballero trajo un cofre de oro y dos de plata. Si en total el rey recibió 34 cofres de oro y 33 de plata, ¿cuántas personas visitaron al rey?

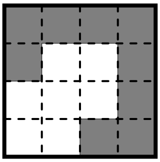
A) 14 **B)** 16 **C)** 18 **D)** 20 **E)** 22

13 Tras un año ahorrando, Juanito ha decidido abrir su hucha y se ha encontrado con dos billetes de diez euros, tres de cinco euros, seis monedas de dos euros, cinco de un euro, siete de cincuenta céntimos, cuatro de veinte, veintitrés de diez céntimos y varias monedas de cinco, de dos y de un céntimo. Si en total tiene 59,08 €, ¿cuál es el número máximo de monedas de cinco céntimos que puede tener?

A) 8 **B)** 9 **C)** 11 **D)** 13 **E)** 21

14 El cuadrado grande tiene 16 cm^2 de área. ¿Cuál es, en cm, el perímetro de la zona sombreada?

A) 24 **B)** 22 **C)** 20 **D)** 18
E) 9



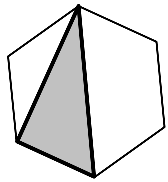
15 Fernando ha medido los ángulos de dos triángulos, uno obtusángulo y el otro acutángulo pero solo recuerda cuatro de las medidas: 120º, 80º, 55º y 10º. ¿Cuál es, en grados, la medida del ángulo menor del triángulo acutángulo?

A) 5º **B)** 10º **C)** 15º **D)** 45º **E)** 55º

16 Diez niños se han presentado a un concurso en el que la máxima nota es 100. Si la media de las diez notas es 92, ¿cuál es la menor nota posible?

A) 0 **B)** 20 **C)** 40 **D)** 90 **E)** 92

17 Si el triángulo sombreado tiene 24 cm^2 de área, el área, en cm^2, del hexágono regular es:



A) 90 **B)** 80 **C)** 72 **D)** 68
E) 64

18 El abuelo ha traído pasteles para sus cuatro nietos. El mayor se come la mitad y medio pastel más, el segundo la mitad de los que quedan y medio pastel más, el tercero hace lo mismo y para el cuarto quedan cinco pasteles. ¿Cuál es la suma de las cifras del número de pasteles que trajo el abuelo?

A) 6 **B)** 9 **C)** 11 **D)** 13 **E)** 15

19 En un espectáculo, las entradas de 3 adultos y 2 niños cuestan 26 € y las de 2 adultos y 3 niños cuestan 24 €. ¿Cuál es la diferencia de precio, en euros, entre la entrada del adulto y la del niño?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

20 Cuando Irene llora se desbordan los ríos. Un lagrimón de Irene llena hasta el borde un dedal de 2 mililitros de capacidad. Un día que estaba muy, muy triste, lloró durante tres horas seguidas y llenó con sus lágrimas una botella de un litro y un tazón de 44 centilitros. ¿Cuántos lagrimones le cayeron a Irene ese día?

A) 7200 **B)** 720 **C)** 522 **D)** 72 **E)** 52

21 Hemos dividido un rectángulo en nueve rectangulitos como ves en la figura (no está a escala). Los números indican el área de algunos de los rectangulitos. ¿Cuánto vale x?

2	**3**	
	6	**8**
x		**20**

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8

E) 10

22 Si en la numeración azteca  = 2420 y  = 4020, ¿cómo se escribe 4620?

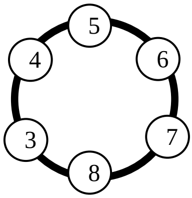
A)  **B)**  **C)** 

D)  **E)** 

23 En la secuencia *ABCDEABCDEABCDE*… ¿qué letra aparecerá en la 2011ª posición?

A) *A* **B)** *B* **C)** *C* **D)** *D* **E)** *E*

24 Seis personas están sentadas en una mesa redonda. Cada persona piensa un número y se lo susurra a las dos que tiene a su lado. Ahora cada uno dice en voz alta la media de los dos números que le han susurrado y estos son los resultados. ¿Cuál fue el mayor número pensado?

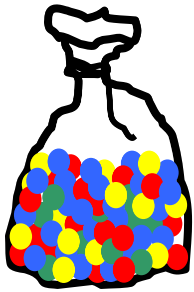


A) 13 **B)** 12 **C)** 11 **D)** 10

E) 9

25 En una bolsa hay varias bolas de colores: rojas, azules, verdes y amarillas. Ainhoa ha realizado lo siguiente: saca una bola, anota su color y la devuelve a la bolsa. Estos son los resultados de 100 extracciones:

BOLA ROJA	25
BOLA AZUL	50
BOLA VERDE	10
BOLA AMARILLA	15



Si en la bolsa hubiera 40 bolas, ¿cuál es el número más probable de bolas rojas que contiene?

A) 25 **B)** 15 **C)** 10 **D)** 5 **E)** 20

XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 23 de febrero de 2011

NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***2 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** X LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

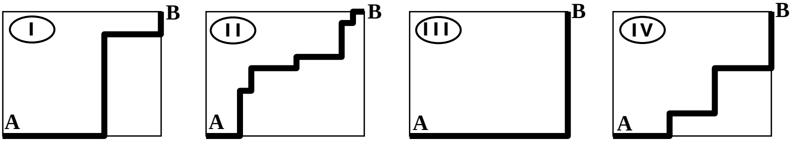
ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Aviraneta
www.profes.net

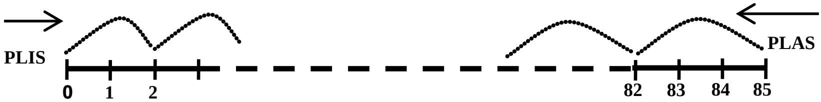
1 Para ir de **A** a **B**, una hormiga duda entre estos cuatro caminos:



¿Cuál de ellos es el más corto?

A) I **B)** II **C)** III **D)** IV **E)** Todos son iguales

2 Plis y Plas son dos pulgas que van como locas la una al encuentro de la otra. Plis empieza en el número 0 y da brincos de longitud 2 y Plas empieza en el número 85 y da saltos de longitud 3. Si empiezan a la vez a saltar y dan los saltos a la vez, ¿en qué número se encontrarán?

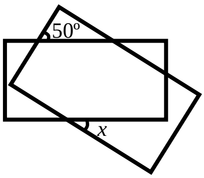


A) 32 **B)** 34 **C)** 38 **D)** 40 **E)** 42

3 Rosa coge un folio y lo parte en cinco trozos; coge uno de estos trozos y lo parte en cinco trocitos; coge uno de estos trocitos y lo parte en cinco mini-trocitos; y coge un mini-trocito y lo parte en cinco micro-trocitos. ¿En cuántos cachitos ha quedado dividida la hoja de Rosa?

A) 17 **B)** 15 **C)** 20 **D)** 14 **E)** 12

4 Dos rectángulos descansan uno sobre otro como muestra el dibujo. ¿Cuánto mide el ángulo x?



A) 50º **B)** 45º **C)** 40º **D)** 30º

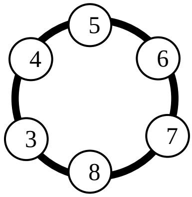
E) 25,5º

5 Rosa hace pulseras de bolitas y tiene un cajón con miles de bolitas de 30 colores diferentes. Decide sacar bolitas sin mirar hasta conseguir tener 68 del mismo color. ¿Cuál es el número mínimo de bolitas que debe coger para estar absolutamente segura de que tendrá 68 bolitas de igual color?

A) 31 **B)** 69 **C)** 98 **D)** 2011 **E)** 2040

6

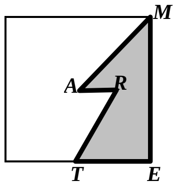
Seis personas están sentadas en una mesa redonda. Cada persona piensa un número y se lo susurra a las dos que tiene a su lado. Ahora cada uno dice en voz alta la media de los dos números que le han susurrado y estos son los resultados. ¿Cuál fue el mayor número pensado?



A) 13 **B)** 12 **C)** 11 **D)** 10 **E)** 9

7

Dentro del cuadrado de centro *A* está *MARTE*. *T* es el punto medio de un lado y *R* está a igual distancia de *A* que del lado *ME*.
Si el área del cuadrado es 1, ¿qué área tiene *MARTE*?



A) $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{3}{8}$ **D)** $\frac{5}{16}$ **E)** $\frac{2}{5}$

8

Don Retorcido os pregunta: ¿cuántas de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

PRIMERA: En todo triángulo rectángulo siempre hay dos ángulos que suman 90º.
SEGUNDA: El área de un triángulo rectángulo es igual a la mitad del producto de los dos lados menores.
TERCERA: No existen triángulos rectángulos equiláteros.
CUARTA: Si divides un rectángulo por una de sus diagonales, se obtienen dos triángulos rectángulos iguales.

A) Ninguna **B)** Sólo una **C)** Sólo dos **D)** Sólo tres **E)** Las cuatro

9

¿Cuántos números enteros puedes escribir en lugar de la *n* para que se cumpla que $\frac{1}{5} < \frac{n}{15} < \frac{11}{12}$?

A) 11 **B)** 10 **C)** 9 **D)** 8 **E)** 7

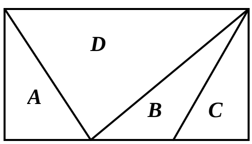
10

Un periódico tiene 56 páginas. Si retiras la hoja que contiene a la página 16, ¿qué otras tres páginas se retiran también?

A) 15-43-44 **B)** 15-41-42 **C)** 17-42-43 **D)** 17-41-42 **E)** 17-43-44

11

Hemos dividido un rectángulo en cuatro triángulos de áreas ***A*, *B*, *C*** y ***D***.
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?



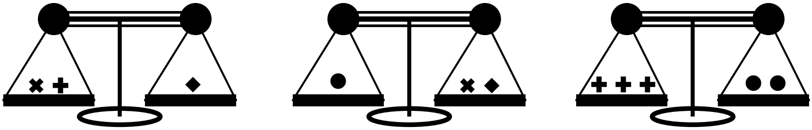
A) $D = B + C$ B) $D = 2\cdot(A + B + C)$

C) $2D = A + B + C$ D) $D = A + B + C$ E) $A + D = B + C$

12 ¿Cuántos minutos son la quinta parte de la mitad de un tercio de hora?

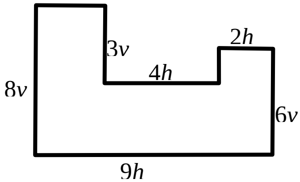
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

13 Las tres balanzas están equilibradas. ¿Cuántas ✚ son necesarias para igualar en peso a ◆◆◆◆?



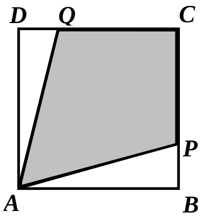
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

14 La figura que ves tiene lados paralelos y lados perpendiculares. Sabiendo que $h \cdot v = 2$, ¿qué área tiene la figura?



A) 112 **B)** 120 **C)** 128 **D)** 130 **E)** 144

15 Queremos pintar de blanco dos triángulos iguales (*ABP* y *ADQ*) en el cuadrado *ABCD* para que el área de la zona gris sea el triple que el área de la zona blanca. Si el lado del cuadrado mide 8, ¿a qué distancia de *B* debemos situar *P* para conseguir nuestro propósito?

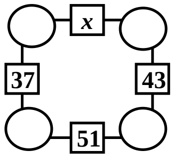


A) 3 **B)** 2,5 **C)** 2,25 **D)** 2 **E)** 1

16 Los bombones favoritos de don Retorcido se venden en cajas de 30 y de 59 unidades. Si quiere conseguir exactamente 2011 bombones, ¿cuántas cajas tendrá que comprar?

A) 41 **B)** 31 **C)** 27 **D)** 35 **E)** 39

17 En los círculos que están en los vértices del cuadrado tienes que escribir cuatro números de forma que el número que aparece en el medio de cada lado sea igual a la suma de los números escritos en sus vértices correspondientes.
¿Cuál debe ser el valor de *x* para que esto sea posible?

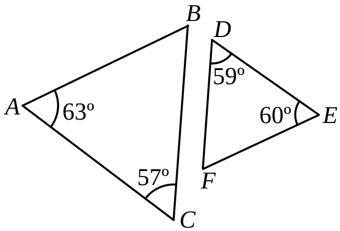


A) 8 **B)** 29 **C)** 31 **D)** 40 **E)** Hay más de uno

18 Doña Paca tiene tres hijos en edad escolar. El producto de las edades de Doña Paca y sus tres hijos es 16 555. La diferencia entre las edades del hijo mayor y el menor es:

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

19 Los triángulos de la figura están a distinta escala pero sabemos que los lados BC y DF miden lo mismo. ¿Cuál de los siguientes segmentos es mayor?



A) AB **B)** AC **C)** DE

D) EF **E)** BC

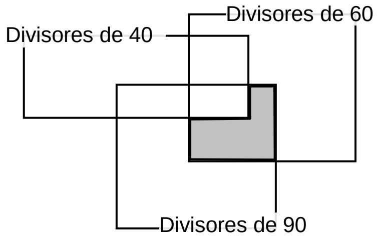
20 ¿Cuántos triángulos isósceles distintos cuyos lados son números enteros tienen perímetro 25?

A) Ninguno **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 12

21 Cada mochuelo en su olivo, pero hay un mochuelo que no tiene olivo. Si se colocan dos mochuelos en cada olivo queda un olivo sin mochuelo. ¿Cuántos olivos hay?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

22 Si rellenas correctamente el diagrama que te mostramos, ¿cuántos números deberás colocar en la zona sombreada?



A) Ninguno **B)** Uno **C)** Dos

D) Tres **E)** Cuatro

23 ¿Cuál de los siguientes enteros se aproxima más a $\sqrt{123456}$?

A) 134 **B)** 245 **C)** 350 **D)** 450 **E)** 617

24 En una cuadrícula 3×3, en cada casilla puedes poner una **S** o una **O**. ¿Cuál es el número máximo de veces que puede aparecer la palabra **OSO** en horizontal, vertical o diagonal?

A) Tres **B)** Cuatro **C)** Seis **D)** Ocho **E)** Nueve

25 La media de una lista de cinco números enteros positivos diferentes es 20. ¿Cuál es el mayor número entero que podría aparecer en esa lista?

A) 100 **B)** 99 **C)** 96 **D)** 92 **E)** 90

concurso de primavera MATEMÁTICAS

XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 23 de febrero de 2011

NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***2 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática

Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid

Educamadrid

El Corte Inglés

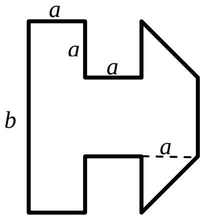
Grupo ANAYA

Grupo SM

Librería Aviraneta

www.profes.net

1 El dibujo de la derecha muestra el plano de una habitación en la que cualesquiera de las paredes que se juntan forman un ángulo múltiplo de 45º. Si las longitudes de algunas paredes son a y b, ¿cuál es el área de la habitación?

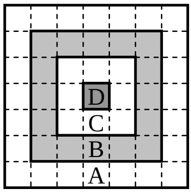


A) $3a(b-a)$ **B)** $8a+2b$ **C)** $3ab-a^2$ **D)** b^2-a^2 **E)** $ab-3a^2$

2 Cada mochuelo en su olivo, pero hay un mochuelo que no tiene olivo. Si se colocan dos mochuelos en cada olivo queda un olivo sin mochuelo. ¿Cuántos olivos hay?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

3 Considera una diana para dardos como se muestra en la figura. La puntuación es inversamente proporcional al área de cada región. Si un impacto en la región B supone obtener 10 puntos, ¿cuántos puntos se obtienen al impactar en la región C?



A) 5 **B)** 8 **C)** 16 **D)** 20

E) 24

4 Un grupo de compañeros de clase está planificando un viaje. Si cada uno de ellos hiciera una aportación de 14 € para los gastos del viaje, faltarían 4 €, pero si cada uno de ellos aportara 16 €, sobrarían 6 €. ¿Qué cantidad debería aportar cada uno para reunir el precio exacto del viaje?

A) 14,40 € **B)** 14,60 € **C)** 14,75 € **D)** 14, 80 € **E)** 14,90 €

5 Las longitudes de los lados de un triángulo, expresadas en centímetros, vienen dadas por tres números pares consecutivos. Si su perímetro es mayor que 2011 cm, ¿cuál es la menor medida posible del perímetro?

A) 2012 cm **B)** 2013 cm **C)** 2014 cm **D)** 2016 cm **E)** 2018 cm

6 La media de una lista de cinco números enteros positivos diferentes es 20. ¿Cuál es el mayor número entero que podría aparecer en esa lista?

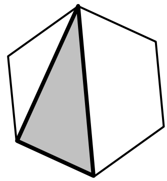
A) 100 **B)** 99 **C)** 96 **D)** 92 **E)** 90

7 El conjunto de todos los números *x*, tales que, $2x - 7 < 3x + 3 < 5 - x$ es:

A) $-2 < x < \frac{1}{2}$ **B)** $-10 < x < \frac{1}{2}$ **C)** $-2 < x < 2$ **D)** $-10 < x < 2$

E) Nada de lo anterior

8 Si el perímetro del hexágono regular de la figura mide 24 cm, el perímetro, en cm, del triángulo sombreado es:



A) 20 **B)** $12 + 3\sqrt{2}$ **C)** $12 + 3\sqrt{3}$ **D)** 21

E) $12 + 4\sqrt{3}$

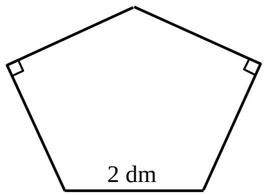
9 El resultado de $\frac{0{,}0025 \cdot 0{,}3051493}{0{,}00021476}$ es un número comprendido entre:

A) 0 y 2 **B)** 2 y 6 **C)** 6 y 10 **D)** 10 y 14 **E)** Más de 14

10 ¿Cuál es la cantidad de euros más cercana a 2750 que se puede repartir inversamente proporcional a 1, 3, 9 y 27, de forma que todas las partes tengan un número entero de euros?

A) 2700 **B)** 2727 **C)** 2748 **D)** 2752 **E)** 2760

11 El pentágono de la figura es equilátero de lado 2 dm y como puede apreciarse en la figura, tiene dos ángulos rectos. ¿Cuál es, en dm, su área?



A) $4 + \sqrt{7}$ **B)** $4 + \sqrt{10}$ **C)** $\frac{20}{3}$

D) $\sqrt{56}$ **E)** $4 + 2\sqrt{2}$

12 Un número formado por tres cifras distintas, *abc*, verifica que 3·*abc* = *bbb*. ¿Cuál es el valor de *a* + *b* + *c*?

A) 6 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 17

13 ¿Cuántos números de tres cifras distintas hay en los que una de las cifras sea la suma de las otras dos?

A) 48 **B)** 50 **C)** 60 **D)** 66 **E)** 96

14 En la siguiente sucesión de números enteros, ¿cuál es el que ocupa la posición 497?
11, 16, 17, 22, 23, 28, 29, 34, …

A) 1499 **B)** 2011 **C)** 2501 **D)** 2573 **E)** 2591

15 Si ordenamos de menor a mayor todos los números de cuatro cifras, todas impares, ¿qué posición ocupa el 5111?

A) 200ª **B)** 251ª **C)** 280ª **D)** 300ª **E)** 3000ª

16 El 80 % de los accidentes suceden al aire libre y el 20 % dentro de los edificios. Si el número de accidentes al aire libre se redujera en un 40 %, ¿en qué porcentaje disminuiría el número total de accidentes?

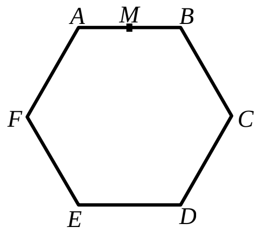
A) 68 % **B)** 52 % **C)** 48 % **D)** 40 % **E)** 32 %

17 Si $a(a-1) \neq 0$ entonces $\dfrac{a(a^3+2a^2-a-2)+a^2-1}{a(a-1)}$ es igual a:

A) $\dfrac{(a+1)^3}{a}$ **B)** $a+2$ **C)** a^3+2a^2-a-1 **D)** a^3+2a^2-a-2

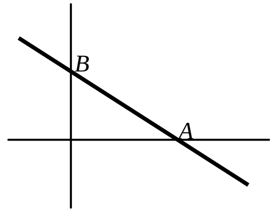
E) $\dfrac{a^3+3a^2-a-3}{a^2-1}$

18 La longitud del lado del hexágono regular *ABCDEF* de la figura es 2 cm. Si *M* es el punto medio de *AB*, ¿cuál de los siguientes segmentos tiene por longitud $\sqrt{13}$ cm?



A) *BD* **B)** *BE* **C)** *EM* **D)** *FM*
E) Ninguno de los anteriores

19 La recta *AB* de la figura tiene pendiente $-\dfrac{1}{k}$ con $k > 1$.
Si la ordenada de *B* es *k*, ¿cuál es la abscisa de *A*?



A) $\dfrac{1}{k^2}$ **B)** $\dfrac{1}{k}$ **C)** 1 **D)** k
E) k^2

20 Si n es un cuadrado perfecto, ¿cuál es el primer cuadrado perfecto mayor que n?

A) $n+\sqrt{n}$ **B)** $n+2\sqrt{n}+1$ **C)** n^2+1 **D)** n^2+n **E)** n^2+2n+1

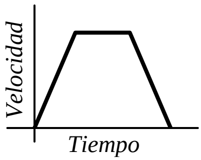
21 Juan compra y vende coches de segunda mano. En la última operación compró dos coches y los vendió al mes siguiente por 9999 € cada uno. Si en uno de ellos ganó un 10 % y en el otro perdió un 10 %, ¿cómo le fue la operación?

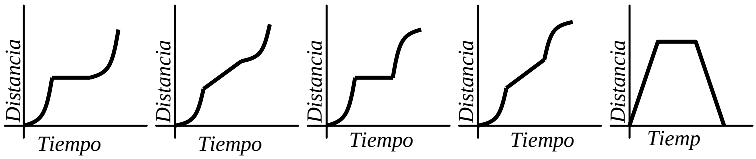
A) Perdió 202 € **B)** Perdió 101 € **C)** Ganó 101 € **D)** Ganó 202 €
E) Ni ganó ni perdió

22 Durante cierto experimento, el radio de una placa circular de metal creció un 3 %. ¿Cuál fue aproximadamente el porcentaje de crecimiento del área?

A) 0,09 % **B)** 6 % **C)** 9 % **D)** 3π % **E)** 9π %

23 El dibujo de la derecha muestra la gráfica, tiempo-velocidad de un viaje de un tren entre dos estaciones. ¿Cuál de las siguientes gráficas puede describir la relación entre el tiempo y la distancia recorrida por el tren en ese viaje?



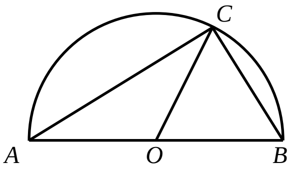


A) **B)** **C)** **D)** **E)**

24 ¿Cuántas cifras tiene el menor número formado exclusivamente por cincos y que sea múltiplo de 99?

A) 9 **B)** 10 **C)** 18 **D)** 36 **E)** 45

25 El dibujo muestra una semicircunferencia de centro O y radio 1 cm. Si C es un punto arbitrario de la semicircunferencia, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?



A) El ángulo $A\hat{C}B$ es recto

B) El triángulo AOC es isósceles

C) El área del triángulo ABC es menor o igual que 1 cm^2

D) El área del triángulo AOC es igual a la del triángulo OBC

E) $AO^2 + OB^2 = AC^2 + BC^2$

XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 23 de febrero de 2011

NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***2 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Aviraneta
www.profes.net

1 En el triángulo *ABC*, la bisectriz del ángulo *B* corta al lado *AC* en el punto *D*. Si el ángulo $B\hat{D}C$ mide 68º, ¿cuál es la diferencia entre los ángulos *C* y *A*?

A) 44º **B)** 120º **C)** 24º **D)** 30º **E)** Es imposible determinarlo

2 En una caja hay 9 tarjetas numeradas del 1 al 9. Antonio y Beatriz sacan cada uno una tarjeta de la caja. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de la tarjeta de Antonio sea el doble o más que el número de la tarjeta de Beatriz?

A) $\frac{7}{18}$ **B)** $\frac{4}{9}$ **C)** $\frac{28}{81}$ **D)** $\frac{5}{18}$ **E)** $\frac{1}{3}$

3 Si *a* y *b* son los catetos de un triángulo rectángulo y *d* y *D* los diámetros de las circunferencias inscrita y circunscrita, $d + D$ es igual a:

A) $a + b$ **B)** $2(a + b)$ **C)** $\frac{a+b}{2}$ **D)** $\sqrt{ab}$ **E)** $\sqrt{a^2+b^2}$

4 El conjunto de todos los números reales *x* que verifican la desigualdad $2^{4^x} < 4^{2^x}$ es:

A) $(-\infty, 1)$ **B)** $(0, 1)$ **C)** $(0, +\infty)$ **D)** $\mathbb{R}$ **E)** $(-\infty, 1)\cup(1, +\infty)$

5 Empezamos con un número, lo duplicamos y luego le restamos 1. Después de aplicar sucesivamente este procedimiento 99 veces se obtiene $2^{100} + 1$. ¿Con qué número empezamos?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

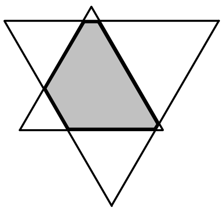
6 ¿Cuántos números formados por tres cifras consecutivas (no necesariamente ordenadas) tienen un número impar de divisores?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

7 El 80 % de los accidentes suceden al aire libre y el 20 % dentro de los edificios. Si el número de accidentes al aire libre se redujera en un 40 %, ¿en qué porcentaje disminuiría el número total de accidentes?

A) 68 % **B)** 52 % **C)** 48 % **D)** 40 % **E)** 32 %

8 Dos triángulos equiláteros de lados paralelos, de perímetros 2011 y 1121 cm, se solapan como se muestra en la figura. ¿Cuál es, en cm, el perímetro del hexágono, común a ambos triángulos?



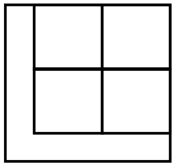
A) 1040 **B)** 1041 **C)** 1042 **D)** 1043

E) 1044

9 La suma de las cifras del mayor número en el que cualquier pareja de cifras consecutivas es un cuadrado perfecto es:

A) 45 **B)** 36 **C)** 28 **D)** 27 **E)** 22

10 Un cuadrado de área 125 cm^2 se divide en cinco trozos de igual área, cuatro cuadrados y un trozo en forma de L como se indica en la figura. La longitud, en cm, del lado más corto de la L es:

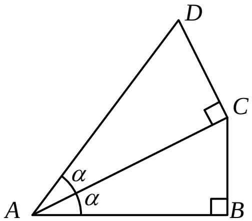


A) 1 **B)** 1,2 **C)** $2(\sqrt{5}-2)$ **D)** $3(\sqrt{5}-1)$ **E)** $5(\sqrt{5}-2)$

11 ¿En cuántos ceros termina el producto de los 2011 primeros números primos?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

12 En la figura adjunta, *AB* tiene longitud 1. ¿Cuál es la longitud de *AD*?



A) $\cos\alpha + \text{tg}\,\alpha$ **B)** $\dfrac{1}{\cos 2\alpha}$ **C)** $\cos^2\alpha$

D) $\cos 2\alpha$ **E)** $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

13 Tres números primos, a, b y c, con $a < b < c$, suman 78. Si $c - a - b = 40$, $c + 3b$ es igual a:

A) 100 **B)** 110 **C)** 120 **D)** 130 **E)** 140

14 ¿Cuál de las siguientes funciones tiene el eje *OY* como eje de simetría?

A) $y = x^2 + x$ **B)** $y = x^2 \text{ sen } x$ **C)** $y = x \cos x$ **D)** $y = x \text{ sen } x$ **E)** $y = x^3$

15 El año pasado, en el Bachillerato de mi centro había 30 chicos más que chicas. Este año, ha aumentado en un 10% el número de estudiantes de Bachillerato, un 20% el número de chicas y un 5% el de chicos. ¿Cuántos estudiantes hay este año en Bachillerato en mi centro?

A) 88 **B)** 99 **C)** 110 **D)** 121 **E)** 132

16 ¿Para cuántos valores del número real b se verifica que la ecuación $x^2 + bx + 80 = 0$ tiene dos soluciones distintas que son números enteros positivos pares?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** Infinitos

17 Para obtener el número 8^8 debemos elevar el número 4^4 al exponente

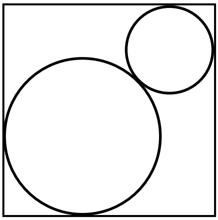
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 8 **E)** 16

18 En un examen de Matemáticas de 1º de Bachillerato, el número de chicos que resolvieron el último problema coincide con el número de chicas que no lo resolvieron. ¿Qué hay más: chicas o estudiantes que han resuelto el problema?

A) Chicas **B)** Estudiantes que resolvieron el problema **C)** Son los mismos

D) Faltan datos para poder contestar **E)** No se puede dar esa situación

19 Dos circunferencias están dentro de un cuadrado de lado 1 y son tangentes entre sí y al cuadrado como se muestra en la figura. ¿Cuál es la suma de los radios de las circunferencias?



A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **C)** $\sqrt{2}-1$ **D)** $2-\sqrt{2}$

E) Depende del tamaño de cada una

20 Las soluciones de la ecuación $x^2 - 3x + 1 = 0$ son a y b. El valor de $a^3 + b^3$ es:

A) 12 **B)** 14 **C)** 16 **D)** 18 **E)** 20

21 Ana nació el día en que su primo Pablo cumplía 20 años. ¿Cuántas veces la edad de Ana será un divisor de la edad de Pablo si ambos viven muchos años?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

22 Si $f(x) = \dfrac{2x}{3x+4}$ y $f\left(g(x)\right) = x$, entonces la función g(x) es.

A) $g(x) = \dfrac{3x+4}{2x}$ **B)** $g(x) = \dfrac{3x}{2x+4}$ **C)** $g(x) = \dfrac{2x+4}{4x}$

D) $g(x) = \dfrac{4x}{2-3x}$ **E)** Nada de lo anterior

23 Ana, Beatriz y Carlos lanzan un dado. Ana gana si sale 1, 2 ó 3; Beatriz gana si saca 4 ó 5 y Carlos gana si saca 6. El dado va pasando de Ana a Beatriz, de Beatriz a Carlos, de Carlos a Ana,…, hasta que alguien gane. ¿Cuál es la probabilidad de que Carlos gane?

A) $\frac{1}{18}$ **B)** $\frac{1}{13}$ **C)** $\frac{1}{11}$ **D)** $\frac{1}{8}$ **E)** $\frac{1}{6}$

24 Las longitudes de las aristas de un ortoedro vienen dadas, en cm, por números enteros y forman una progresión geométrica de razón $q = 2$. ¿Cuál puede ser el volumen del ortoedro?

A) 120 cm^3 **B)** 188 cm^3 **C)** 216 cm^3 **D)** 350 cm^3 **E)** 500 cm^3

25 Si $x + y + z = 1$ y $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$, $x^2 + y^2 + z^2$ es igual a:

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** Faltan datos para saberlo

XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 9 de abril de 2011

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***2 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{\text{X}}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática

Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid

Educamadrid

El Corte Inglés

Grupo ANAYA

Grupo SM

Librería Aviraneta

www.profes.net

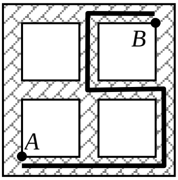
1 ¿Qué número debes escribir en el cuadradito para que se cumpla la siguiente igualdad? $60 \times 60 = 30 \times 20 \times \square$

A) 60 **B)** 40 **C)** 10 **D)** 6 **E)** 4

2 Elenita tiene seis cajas con igual número de cochecitos de juguete. Rebuscando, ha encontrado seis cochecitos más debajo de la cama y ha visto que en total tiene 30 cochecitos. ¿Cuántos cochecitos hay en cada caja?

A) 3 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 24

3 En el centro de la cuidad, la zona peatonal consta de cuatro manzanas. Inés suele recorrerla para ir desde su casa, en el punto *A*, a casa de su abuela, en el punto *B*, y cada día hace un trayecto distinto para ver los escaparates. Hoy ha seguido el camino que ves en la figura. ¿Cuántos recorridos distintos puede hacer Inés si en ninguno quiere pasar dos veces por el mismo tramo?



A) 6 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 16

4 En el primer tiempo de un partido entre el Real Club Primavera y el Atlético Matemático iban 1 a 0 a favor del Real Club Primavera. Si en el segundo tiempo se metieron en total tres goles, ¿cuál de estos no puede ser el resultado final del partido?

A) El Atlético ganó por dos goles **B)** El Real ganó por cuatro goles

C) El Real ganó por dos goles **D)** El Real ganó por un gol **E)** Empataron

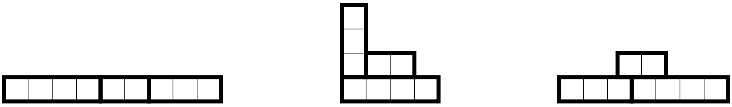
5 Don Caracol parte hacia la costa a visitar a Doña Caracola. Si cada día recorre exactamente 325 metros y sale un lunes, ¿qué día de la semana llegará a la costa que está a 3 km?

A) Martes **B)** Miércoles **C)** Jueves **D)** Viernes **E)** Sábado

6 Un teatro consta de butacas colocadas en filas de igual longitud. Ana tiene tres butacas delante y dieciocho detrás y Juanito tiene ocho butacas a su derecha y once a su izquierda. ¿Cuántas butacas hay en el teatro?

A) 399 **B)** 400 **C)** 418 **D)** 420 **E)** 440

7 Sofía tiene tres rectángulos de madera de 2×1, 3×1 y 4×1 y con ellos hace figuras poniéndolos uno al lado del otro como en estos ejemplos:



Después, Sofía pasa el lápiz por el borde de sus figuras para dibujar sus contornos. ¿Cuánto mide el contorno más corto que puede conseguir utilizando los tres rectángulos?

A) 12 **B)** 14 **C)** 16 **D)** 18 **E)** 20

8 Elvira tiene una memoria prodigiosa. Todos los años felicita a sus 46 amigos en el día de su cumpleaños. Si ninguno de ellos nació en 29 de febrero, ¿cuántos días, como máximo, Elvira no felicitará a ninguno de sus amigos en 2011?

A) 365 **B)** 364 **C)** 342 **D)** 319 **E)** 46

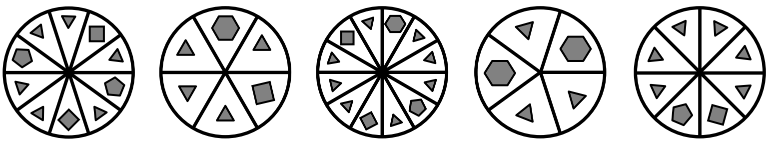
9 ¿Cuál de las siguientes expresiones da como resultado el número menor?

A) $5 + 4 - 3 \times (2 - 1)$ **B)** $5 - 4 + 3 \times 2 + 1$ **C)** $5 + 4 - 3 \times 2 + 1$

D) $5 + 4 - 3 \times 2 \times 1$ **E)** $5 \times (4 + 3) - 21$

10 Cada una de estas ruletas está dividida en partes iguales. ¿Con cuál de ellas es más probable que te salga un triángulo?

A) **B)** **C)** **D)** **E)**



11 En una danza tradicional todos los bailarines están colocados uniformemente alrededor de un círculo. Si los numeramos por orden de colocación con los números 1, 2, 3, etc, el bailarín 3 está justo enfrente del bailarín 15. ¿Cuántos bailarines hay en total?

A) 18 **B)** 20 **C)** 22 **D)** 24 **E)** 26

12 Paz y Puri juegan a lanzar tres dados. Paz multiplica los tres números obtenidos y Puri los suma. Si Paz ha conseguido un 24, ¿cuál es el mayor número que puede haber obtenido Puri en esa jugada?

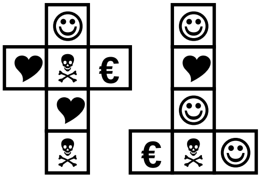
A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

13 En un zoo, la dieta para cada animal es la misma todos los días del año. Furia, el caballo, come al día tantas zanahorias como Tambor, el conejo, en una semana. Si entre los dos juntos se comen 56 al día. ¿Cuántas zanahorias se come Tambor al día?

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

14 Un adivino de pacotilla lanza los dos dados que ves y dice que así adivina tu futuro.

¿Qué probabilidad hay de que salga el fatídico ☠ ☠?



A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{6}$ **C)** $\frac{1}{12}$ **D)** $\frac{1}{18}$ **E)** $\frac{1}{36}$

15 ¿Qué método es el correcto para repartir a partes iguales siete barras de pan idénticas entre doce personas?

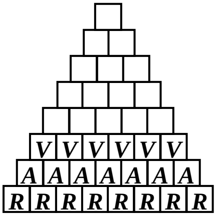
A) Cortar cinco barras en cuartos y dos en tercios
B) Cortar tres barras en tercios y cuatro en cuartos
C) Cortar cinco barras en tercios y dos en cuartos
D) Cortar tres barras en cuartos y cuatro en tercios
E) Cortar cinco barras por la mitad y dos en tercios

16 Olivia se ha inventado una nueva operación: a & b = a · (a + b).
¿Cuántas parejas de números naturales hay para los que la operación & da como resultado 12?

A) Ninguna **B)** Una **C)** Dos **D)** Tres **E)** Cuatro

17

Marta está haciendo una torre con sus 36 cubos de colores. Tiene igual número de cubos rojos (*R*), azules (*A*) y verdes (*V*) y quiere que en cada piso haya cubos de un solo color y que dos pisos seguidos tengan colores distintos. ¿De qué color será el cubo de arriba?



A) Rojo **B)** Azul **C)** Verde

D) Puede ser rojo o verde **E)** Puede ser azul o verde

18

Seis ejecutivos de una corporación europea se reúnen en Madrid para una conferencia.

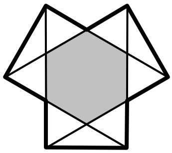
- El Sr. A habla solo español e italiano.
- La Sra. B habla solo español e inglés.
- El Sr. C habla solo inglés e italiano.
- La Sra. D habla solo francés y español.
- El Sr. E habla solo italiano y francés.
- La Sra. F habla solo inglés y francés.

¿De cuántas formas se pueden separar en tres grupos de dos de forma que en todas las parejas las dos personas que las forman puedan hablar entre sí?

A) 4 **B)** 8 **C)** 12 **D) 16** **E)** 24

19

La figura está formada a partir de una estrella de seis puntas y segmentos que unen algunos de sus vértices. Si el área total de la figura es 40 cm^2, ¿cuál es, en cm^2, el área del hexágono regular interior?



A) 12 **B)** 15 **C)** 16 **D)** 18 **E)** 20

20

Al Sr. Naranjo le encanta la fruta. Por cuatro manzanas y dos peras pagó 1,54 € y por dos peras y cuatro plátanos, 1,70 €. ¿Cuántos céntimos le costarán una manzana, una pera y un plátano?

A) 77 **B)** 78 **C)** 79 **D)** 80 **E)** 81

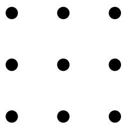
21

Ana, Bea, Carlos, Dani y Elena juegan a un juego que consiste en sacar dos cartas de entre diez. En cada carta hay un número del 1 al 10 y gana el que sume más. Si Ana suma 4, Bea 11, Carlos 12; Dani 13 y Elena 15, ¿quién ha sacado la carta con el número 9?

A) No se puede saber **B)** Bea **C)** Carlos **D)** Dani **E)** Elena

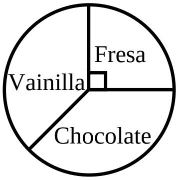
22

¿Cuántos cuadrados se pueden dibujar cuyos vértices sean puntos de esta cuadrícula?



A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 9

23 El diagrama de sectores representa la cantidad de helados de cada sabor que se vendieron en una heladería el año pasado. Si se vendieron sesenta helados de fresa y la misma cantidad de helados de vainilla que de chocolate, ¿cuántos helados de chocolate se vendieron?

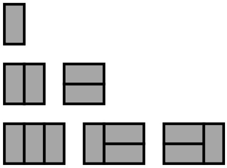


A) 90 **B)** 99 **C)** 100 **D)** 120 **E)** 135

24 Un libro tiene doscientas cincuenta y seis páginas. En cada página hay, por término medio, treinta y tres líneas y en cada línea, unas nueve palabras. ¿Cuál de estas cifras aproxima mejor el número de palabras que hay en el libro?

A) 64 000 **B)** 68 000 **C)** 72 000 **D)** 76 000 **E)** 80 000

25 Si queremos construir una pared de dos centímetros de alto con ladrillos que miden 2 cm × 1 cm, podemos hacerlo de distintas maneras según el largo de la pared. Si queremos que sea de 1 cm de largo, solo podemos hacerlo de una forma. Si la queremos hacer de 2 cm de largo, tenemos dos opciones. ¿Cuántas maneras hay de hacer un muro de 6 centímetros de largo?



A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

concurso de primavera MATEMÁTICAS

XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 9 de abril de 2011

NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***2 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

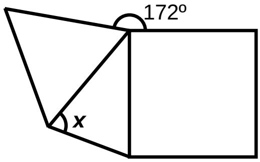
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Aviraneta
www.profes.net

1

Sobre los lados iguales de un triángulo isósceles hemos dibujado un triángulo equilátero y un cuadrado, como se aprecia en la figura. ¿Cuánto mide el ángulo *x*?



A) 38º **B)** 42º **C)** 68º **D)** 71º

E) 72º

2

Al pobre Jacinto siempre se le olvidaba atar la vaca y su padre inventó este acertijo para que no le volviera a ocurrir. Si letras diferentes representan números diferentes, ¿qué número corresponde a la letra **E** en esta resta?

$$\begin{array}{rcccc} & A & M & A & R \\ - & & & R & A \\ \hline & & R & E & S \end{array}$$

A) 1 **B)** 2 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

3

Lucía se encarga de la iluminación de la obra de teatro. Tienen tres focos alineados y cada uno de ellos puede dar luz roja, verde o azul. Si ninguno puede estar apagado y además, dos focos contiguos no pueden lucir el mismo color, ¿de cuántas maneras diferentes pueden iluminar la obra?

A) 12 **B)** 16 **C)** 18 **D)** 20 **E)** 27

4

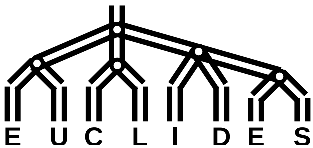
Laura elige un número y suma los diez resultados de su tabla de multiplicar. Patricia suma los diez resultados de la tabla de multiplicar del número siguiente al de Laura. ¿Cuál es la diferencia entre el resultado de Patricia y el de Laura?

A) 10 **B)** 55 **C)** 100 **D)** Cada vez dará una resta distinta

E) No se puede saber si no conocemos el número de Laura

5

He diseñado la bonita fuente EUCLIDES de tal manera que el agua que llega a un nudo se reparte equitativamente por las tuberías que parten de él. Si una mañana entran 108 litros de agua por el canalón superior, ¿cuántos litros llegarán a la **S** de EUCLIDES?



A) 6 **B)** 9 **C)** 12 **D)** 18 **E)** 27

6 Raúl ha cogido tres números *p*, *q*, *r* y con ellos ha realizado esta cuenta: $p - (q - r)$, obteniendo como resultado un número secreto. Después ha aumentado *p* en 7 unidades; ha disminuido *q* en 3 unidades y ha aumentado *r* en 2 unidades. Entonces, el nuevo número secreto…

A) Aumenta en 12 **B)** Aumenta en 2 **C)** Disminuye en 2
D) Aumenta en 6 **E)** Aumenta en 8

7 En una gran caja hay 1000 garbanzos, 200 lentejas y 360 guisantes. El afamado mago Hortalizo convierte, en cada golpe de tambor, tres garbanzos en dos lentejas y un guisante. ¿En qué golpe de tambor conseguirá Hortalizo tener el mismo número de cada una de las tres legumbres?

A) 150 **B)** 155 **C)** 156 **D)** 158 **E)** 160

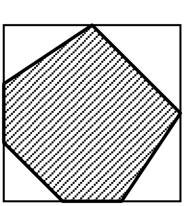
8 Según don Retorcido el número 2011 es *veinte-once* porque sus dos primeras cifras forman un múltiplo de 20 y sus dos últimas cifras forman un múltiplo de 11. También es *veinte-once* el número 4000 porque sus dos primeras cifras forman un múltiplo de 20 y sus dos últimas cifras forman un múltiplo de 11.¿Cuántos números de cuatro cifras son *veinte-once*?

A) 18 **B)** 27 **C)** 32 **D)** 36 **E)** 40

9 Dos hormigas caminan alrededor del reloj de la torre de la iglesia, en sentidos contrarios y aunque a velocidades diferentes, cada una mantiene su ritmo constantemente. La primera vez que se encontraron fue en la marca de las 3; y la segunda vez en la marca de las 10. Cuando se volvieron a ver dijeron: “pararemos cuando nos hayamos cruzado 100 veces en total”. ¿En qué marca se pararon?

A) 12 **B)** 11 **C)** 9 **D)** 6 **E)** 4

10 Hemos hecho algunas marcas en los lados de un cuadrado de área 1. Unas dividen el lado en dos partes iguales y otras en tres partes iguales. Después, aprovechando estas marcas, hemos dibujado un hexágono como ves en la figura. ¿Qué área tiene este hexágono?



A) $\frac{3}{4}$ **B)** $\frac{21}{36}$ **C)** $\frac{47}{72}$ **D)** $\frac{15}{36}$

E) $\frac{31}{72}$

11 A Francisco solo le gustan los rectángulos cuyos lados miden un número entero de centímetros. Con esta condición, se ha propuesto dibujar todos los rectángulos de perímetro 890 cm. ¿Cuántos rectángulos distintos tendrá que dibujar Francisco?

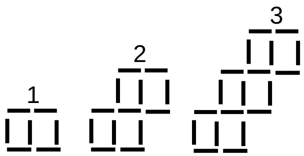
A) 221 **B)** 222 **C)** 223 **D)** 889 **E)** 890

12 Don Retorcido elige su ropa de cada día de esta extraña manera. Cada mañana lanza un dado: solo se pondrá corbata si sale impar y únicamente no llevará vaqueros si sale par. ¿Cuáles de estas cuatro combinaciones no podrá vestir nunca don Retorcido?

UNA: Vaqueros y corbata **DOS:** Vaqueros sin corbata
TRES: Sin vaqueros y con corbata **CUATRO:** Sin vaqueros y sin corbata

A) La UNA y la DOS **B)** Solo la DOS **C)** Solo la TRES
D) La TRES y la CUATRO **E)** La DOS y la TRES

13 Juan Jesús está construyendo una gran escalera con palitos y en el dibujo se observa cómo está levantando la escalera. ¿Cuántos palitos necesitará Juan Jesús para formar una escalera con 148 escalones?



A) 1036 **B)** 900 **C)** 889 **D)** 872 **E)** 836

14 Si $A=\dfrac{1-\frac{1}{3}}{2}$ y $B=\dfrac{1-\frac{1}{2}}{3}$, ¿cuánto vale $\dfrac{A-B}{A\cdot B}$?

A) 3 **B)** $\frac{13}{6}$ **C)** 2 **D)** $\frac{1}{6}$ **E)** $\frac{1}{18}$

15 Cuatro parejas de novios fueron a comprar pasteles para una fiesta. Ana compró tres pasteles, Bárbara compró dos, Cati compró cuatro y Daniela solo uno. Eugenio compró tantos pasteles como su novia, Fermín compró el doble que la suya, Gerardo el triple que la suya y Héctor el cuádruple que la suya. Sabiendo que en total compraron 32 pasteles, ¿cuál de estas parejas es una pareja de novios?

A) Cati y Héctor **B)** Cati y Gerardo **C)** Ana y Fermín
D) Ana y Eugenio **E)** Daniela y Héctor

16 Ana Sarai ha cogido una rabieta y ha sacado unas cuantas hojas centrales del periódico. En concreto se ha llevado todas las páginas que van desde la 11 hasta la 26. ¿Cuántas páginas tenía el periódico?

A) 36 **B)** 38 **C)** 34 **D)** 40 **E)** 52

17 TRES anillos, DOS pendientes y CINCO collares pesan lo mismo que DOS anillos, TRES pendientes y TRES collares. UN anillo, DOS pendientes y TRES collares pesan lo mismo que DOS anillos, DOS pendientes y UN collar. Si ordenas los pesos de un anillo (a), un pendiente (p) y un collar (c) en orden creciente, ¿cuál es la ordenación correcta?

A) $c < p < a$ **B)** $p < c < a$ **C)** $c < a < p$ **D)** $p < a < c$ **E)** $a < c < p$

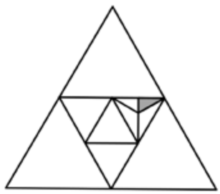
18 Raúl se ha inventado este sencillo programa: introduce un número entero positivo, lo multiplica por su siguiente y halla la mitad de este producto. Si el resultado es par le suma cuatro y si es impar le resta cuatro. Al terminar este proceso, ¿cuál de estos números no puede ser el resultado final?

A) 10 **B)** 11 **C)** 41 **D)** 46 **E)** 51

19 Los siete enanitos han ido a un karaoke para celebrar un concurso de dúos entre ellos. Para ser justos, deciden formar todas las parejas posibles y que cada una de ellas cante una canción diferente. ¿Cuántas canciones necesitan para celebrar el concurso?

A) 13 **B)** 21 **C)** 41 **D)** 42 **E)** 49

20 Hemos conseguido un retrato de la cara de don Retorcido y parece que os está guiñando un ojo. ¿Qué fracción de su cara representa la parte sombreada?



A) $\frac{1}{10}$ **B)** $\frac{1}{48}$ **C)** $\frac{1}{64}$ **D)** $\frac{1}{72}$

E) $\frac{1}{96}$

21 Queremos dividir un rectángulo en 108 partes iguales. ¿Cuál es el menor número de rectas paralelas a los lados del rectángulo que hay que dibujar para conseguirlo?

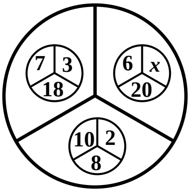
A) 23 **B)** 21 **C)** 19 **D)** 54 **E)** 24

22

Dados tres números, *a*, *b*, *c*, hemos inventado la operación tricírculo.

= ***a·b – c***

Estudia el gran tricírculo que te mostramos y averigua cuál debe ser el valor de la *x* para que el gran tricírculo valga 0.



A) 7 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 4

E) 3

23

Una pirámide tiene 28 aristas. ¿Cuántos vértices tiene esa pirámide?

A) 28 **B)** 27 **C)** 15 **D)** 14

E) No existe una pirámide con 28 aristas

24

¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor número capicúa, ambos de cuatro cifras, con la particularidad de que los dos tienen que ser múltiplos de cuatro?

A) 6776 **B)** 6666 **C)** 8888 **D)** 4444 **E)** 8448

25

Ya estás a punto de terminar el decimoquinto Concurso de Primavera y sabes que se celebran dos fases. Cada una de las fases tiene cuatro niveles diferentes y cada nivel consta de veinticinco problemas. Un robot se ha propuesto resolver todos los problemas de los quince concursos y ha calculado que emplea una media de cinco minutos por problema. ¿Cuántos días tardará en completar su reto?

A) Entre 6 y 7 **B)** Entre 7 y 8 **C)** Entre 8 y 9

D) Entre 9 y 10 **E)** Entre 10 y 11

XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 9 de abril de 2011

NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***2 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Aviraneta
www.profes.net

1 Aumentamos en un 10% una de las medidas de un rectángulo y disminuimos en un 10% la otra. ¿Qué porcentaje del área original es la nueva área?

A) 90% **B)** 99% **C)** 100% **D)** 101% **E)** 110%

2 ¿Cuál es la probabilidad de que un cuadrado del ajedrez, escogido al azar entre los 64, no toque a ningún lado del tablero?

A) $\frac{1}{16}$ **B)** $\frac{7}{16}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{9}{16}$ **E)** $\frac{49}{64}$

3 Con las cifras 1, 2, 3 y 5, ¿cuántos números de tres cifras distintas hay que sean múltiplos de tres?

A) 9 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 15

4 Los enteros positivos x e y son los más pequeños que verifican que $360 \cdot x$ es un cuadrado perfecto y $360 \cdot y$ es un cubo perfecto. ¿Cuál es la suma de x e y?

A) 80 **B)** 85 **C)** 115 **D)** 165 **E)** 610

5 Antonio y David están jugando con su calculadora. Tienen delante de ellos una tabla de 3 000 números, ordenados en 40 filas y 75 columnas. Antonio suma los de cada fila, siendo A la media de sus cuarenta sumas. Beatriz suma los de cada columna, siendo B la media de sus 75 sumas. ¿Cuál es el valor de $\frac{A}{B}$?

A) $\frac{64}{225}$ **B)** $\frac{8}{15}$ **C)** 1 **D)** $\frac{15}{8}$ **E)** $\frac{225}{64}$

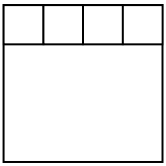
6 Las letras A, B, C y D representan cifras distintas. Si se verifica que

$$\begin{array}{r} A\ B \\ +\ C\ A \\ \hline D\ A \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} A\ B \\ -\ C\ A \\ \hline A \end{array}$$

¿qué cifra representa la letra D?

A) 3 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E) 9**

7 Colocamos cuatro cuadrados idénticos y un rectángulo para formar un cuadrado como se muestra en la figura. ¿Cuál es el cociente entre el lado mayor y el menor del rectángulo?



A) $\frac{5}{4}$ **B)** $\frac{4}{3}$ **C)** $\frac{3}{2}$ **D)** 2

E) 3

8 Si el área de un círculo cuya circunferencia mide 24π es $t\pi$, ¿cuál es el valor de t?

A) 6 **B)** 12 **C)** 24 **D)** 36 **E)** 144

9 Cada día que Ingo colabora en las tareas domésticas recibe tantos euros como años tiene. Durante un periodo de 6 meses trabajó 50 días y ganó 630 €. ¿Qué edad tenía al final del sexto mes?

A) 9 años **B)** 11 años **C)** 12 años **D)** 13 años **E)** 14 años

10 Si x es un número capicúa de tres cifras y $(x + 32)$ es otro número capicúa de cuatro cifras, ¿cuál es la suma de las cifras de x?

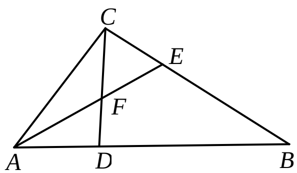
A) 20 **B)** 21 **C)** 22 **D)** 23 **E)** 24

11 Alicia conduce a una velocidad media de 80 km/h y luego se detiene 20 minutos para echar gasolina y comprar unas galletas. Después de la parada conduce otro rato a una media de 100 km/h. Al final resulta que ha hecho 250 km en un total de 3 horas, contando la parada que hizo. ¿Qué ecuación deberías utilizar para obtener el tiempo t, en horas, que condujo antes de la parada?

A) $80t + 100\left(\frac{8}{3} - t\right) = 250$ **B)** $80t = 250$ **C)** $100t = 250$

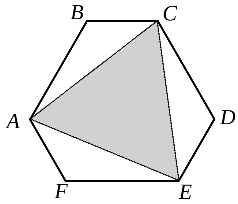
D) $90t = 250$ **E)** $80\left(\frac{8}{3} - t\right) + 100t = 250$

12 En el triángulo ABC, la longitud del lado AB es doble que la del lado AC. Sean D y E puntos de los lados AB y BC respectivamente, para los que $B\hat{A}E = A\hat{C}D$ y sea F el punto de corte de los segmentos AE y CD. Si el triángulo CFE es equilátero, ¿cuánto mide el ángulo $A\hat{C}B$? (El dibujo es orientativo)



A) 60º **B)** 75º **C)** 90º **D)** 105º **E)** 120º

13 Los ángulos del hexágono *ABCDEF* son todos iguales y los lados verifican que $AB = CD = EF = 1$ y $BC = DE = FA = r$. Si el área del triángulo *ACE* es el 70% del área del hexágono, ¿cuál es la suma de todos los posibles valores de *r*?



A) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ **B)** $\frac{10}{3}$ **C)** 4 **D)** $\frac{17}{4}$ **E)** 6

14 Un mes de 31 días tienen el mismo número de lunes que de miércoles. ¿Cuántos de los siete días de la semana podrían ser el primer día de ese mes?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

15 Las longitudes de los lados de un triángulo son 10, 10 y 12. Un rectángulo de anchura 4 tiene la misma área que el triángulo. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo?

A) 16 **B)** 24 **C)** 28 **D)** 32 **E)** 36

16 La entrada para un recital de rock en el instituto cuesta *x* €, siendo *x* un número entero. Un grupo de estudiantes de 3º asistió al recital y pagaron entre todos 48 €, y un grupo de estudiantes de 4º pagaron entre todos 64 €. ¿Cuántos valores de *x* puede haber?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

17 Nico es un estudiante de 3º con mucha suerte. Un día le propuso su profe que sustituyera las letras *a, b, c, d* y *e* en la expresión $a-(b-(c-(d+e)))$ por los números que él quisiera y que obtuviera el resultado. Nico olvidó los paréntesis, sumó y restó como si no los hubiera pero, por casualidad, el resultado obtenido coincidió con el correcto. Si las letras *a, b, c* y *d* las sustituyó por 1, 2, 3 y 4 respectivamente, ¿por qué número sustituyó la letra *e*?

A) –5 **B)** –3 **C)**0 **D)** 3 **E)** 5

18 Miguel conduce una vespa a 45 km/h cuando no llueve y a 30 km/h cuando llueve. Hoy, hacía sol por la mañana y llovía por la tarde e hizo un total de 24 km en 40 minutos. ¿Cuántos minutos condujo por la tarde?

A) 18 **B)** 21 **C)** 24 **D)** 27 **E)** 30

19 A comienzo de curso María preguntó a sus estudiantes "*¿Os gustan las Mates?*". La mitad de los estudiantes respondieron sí y la otra mitad no. A final de curso, ante la misma pregunta, el 70% respondió sí y el 30% no. Si hubo un x% de estudiantes que dio respuesta diferente al principio y al final, ¿cuál es la diferencia entre el máximo y el mínimo de todos los valores posibles de x?

A)0 **B)** 20 **C)** 40 **D)** 60 **E)** 80

20 ¿Cuál es la suma de las soluciones de la ecuación $x = \left|2x - \left|60 - 2x\right|\right|$?

A) 32 **B)** 60 **C)**92 **D)** 120 **E)** 124

21 Un cuadrado de lado 1 y un círculo de radio $\frac{\sqrt{3}}{3}$ tienen el mismo centro. ¿Cuál es el valor del área de la superficie interior al círculo pero exterior al cuadrado?

A) $\frac{\pi}{3} - 1$ **B)** $\frac{2\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3}$ **C)** $\frac{\pi}{18}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{25}{90}$

22 En Matematilandia se ha organizado un concurso de Matemáticas y participan ¡todos los centros de esa ciudad! Cada uno envía un equipo de tres estudiantes y en la primera edición del concurso todos los estudiantes obtuvieron diferente puntuación. La puntuación de Alicia fue la mediana de las puntuaciones y fue la más alta de la puntuaciones de su equipo. Sus compañeras de equipo Beatriz y Carolina quedaron en los puestos 37º y 64º respectivamente. ¿Cuántos centros hay en Matematilandia?

A) 22 **B)** 23 **C)** 24 **D)** 25 **E)** 26

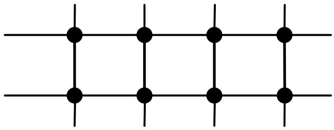
23 Elegimos al azar un capicúa entre 1000 y 10000. ¿Cuál es la probabilidad de que sea múltiplo de 7?

A) $\frac{1}{10}$ **B)** $\frac{1}{9}$ **C)** $\frac{1}{7}$ **D)** $\frac{1}{6}$ **E)** $\frac{1}{5}$

24 Si $x < 0$, ¿cuál de los siguientes números es positivo?

A) $\frac{x}{|x|}$ **B)** $-x^2$ **C)** -2^x **D)** $-x^{-1}(1-x)$ **E)** $\sqrt[3]{x}$

25 ¿Cuántos triángulos distintos tienen sus vértices en tres de los ocho vértices de esta cuadrícula?



A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

concurso de primavera MATEMÁTICAS

XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 9 de abril de 2011

NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

Cada respuesta ***correcta*** *te aportará*	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes ***en blanco***	***2 puntos***
Cada respuesta ***errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Aviraneta
www.profes.net

1 Cuando dividimos los números 272 758 y 273 437 por un determinado número N, de dos cifras, obtenemos como restos 13 y 17 respectivamente. La suma de los dígitos de N es:

A) 6 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

2 ¿Cuál es el valor de la suma $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+.....+\frac{99}{100!}$?

A) $\frac{1}{2}-\frac{1}{100!}$ **B)** $1-\frac{1}{100!}$ **C)** $1-\frac{1}{99!}$ **D)** $\frac{1}{2}-\frac{1}{99!}$ **E)** 1

3 Si $\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+x}}$, x es igual a:

A) $\sqrt{2}-2$ **B)** $\sqrt{2}+2$ **C)** $\sqrt{2}$ **D)** $\sqrt{2}+1$ **E)** $\sqrt{2}-1$

4 La suma y el producto de dos números coinciden. Si uno de ellos es x, ¿cuál es el valor de la suma?

A) $\frac{x^2+1}{x-1}$ **B)** $\frac{x^2+1}{x+1}$ **C)** $\frac{x^2}{x+1}$ **D)** $\frac{x^2}{x-1}$ **E)** $\frac{x^2-1}{x^2+1}$

5 ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $x+\sqrt{x^2+\sqrt{x^3+1}}=0$?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

6 Supón que sustituimos a, b y c por enteros positivos (no necesariamente distintos). De las siguientes expresiones, ¿cuál no puede representar al número 24?

A) ab^3 **B)** a^2b^3 **C)** a^cb^c **D)** ab^2c^3 **E)** $a^bb^cc^a$

7 Si x, y, z son números reales arbitrarios, el menor valor posible de la expresión $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(y-x)^2+4}+\sqrt{(z-y)^2+1}+\sqrt{(10-z)^2+9}$ es:

A) 7 **B)** 13 **C)** $4+\sqrt{109}$ **D)** $3+\sqrt{2}+\sqrt{90}$ **E)** $\sqrt{149}$

8 Hoy es el cumpleaños de Alicia, Beatriz y Carlos. La suma de sus edades es 23 y el producto de sus edades supera en 113 al producto de sus edades hace justamente un año. ¿Cuál es la suma de los cuadrados de sus edades?

A) 209 **B)** 185 **C)** 189 **D)** 241 **E)** 259

9 Si $f(11)=11$ y $f(n+3)=\dfrac{f(n)-1}{f(n)+1}$, $f(2012)$ es:

A) 11 **B)** $\dfrac{5}{6}$ **C)** $-\dfrac{6}{5}$ **D)** $-\dfrac{1}{11}$ **E)** 2011

10 La función $y = f(x)$ verifica que $f(f(x)) = 6x - 2011$ para cualquier número real x. Si el número t verifica la igualdad $f(t) = 6t - 2011$, el valor de t es:

A) $\dfrac{2011}{5}$ **B)** 0 **C)** 2011 **D)** $\dfrac{2011}{2}$ **E)** Nada de lo anterior

11 En cierta sucesión, la suma S_n de los n primeros términos viene dada por $S_n = n^3+3$. El décimo término de la sucesión es:

A) 1000 **B)** 1003 **C)** 271 **D)** 274 **E)** 997

12 Cada signo ♣ en la expresión 1♣2♣3♣4♣5♣6♣7♣8♣9♣10 se sustituye por un signo “más” (+) o por un signo “por” ($\times$) obteniéndose una expresión aritmética cuyo mayor valor posible es N. ¿Cuál es el menor divisor primo de N?

A) 2 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** Nada de lo anterior

13 Sea n el menor entero positivo que es divisible por 20, con n^2 cubo perfecto y además n^3 cuadrado perfecto. ¿Cuántas cifras tiene n?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

14 ¿Para qué valor de x se verifica que

$$\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x}+\log_2 x+\log_4 x^2+\log_8 x^3+\log_{16} x^4=40\,?$$

A) 8 **B)** 16 **C)** 32 **D)** 256 **E)** 1024

15 En el triángulo ABC se verifica que $\cos(2A-B)+sen(A+B)=2$. Si el lado AB mide 4, ¿cuánto mide el lado BC?

A) $\sqrt{2}$ **B)** $\sqrt{3}$ **C)** 2 **D)** $2\sqrt{2}$ **E)** $2\sqrt{3}$

16 Los cuatro primeros términos de una progresión aritmética son a, 9, $3a–b$ y $3a+b$. ¿Cuál es el número que ocupa el lugar 2011 en esta progresión?

A) 8041 **B)** 8043 **C)** 8045 **D)** 8047 **E)** 8049

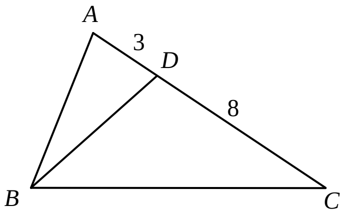
17 Escribimos la solución de la ecuación $7^{x+7}=8^x$ como $x=\log_b 7^7$. ¿Cuál es el valor de b?

A) $\frac{7}{15}$ **B)** $\frac{7}{8}$ **C)** $\frac{8}{7}$ **D)** $\frac{15}{8}$ **E)** $\frac{15}{7}$

18 ¿Para cuántos valores enteros de k resulta que las gráficas de $x^2+y^2=k^2$ y $xy=k$ no se cortan?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 4 **E)** 8

19 En el triángulo ABC de la figura, BD es la bisectriz del ángulo B. Si AD = 3, DC = 8 y las longitudes de todos los lados del triángulo vienen dadas por números enteros, ¿cuál es el menor valor posible para el perímetro del triángulo ABC?



A) 30 **B)** 33 **C)** 35
D) 36 **E)** 37

20 Una moneda está trucada de forma que la probabilidad de obtener cara al lanzarla es menor que $\frac{1}{2}$. Si la probabilidad de obtener igual número de caras que de cruces al lanzarla 4 veces es $\frac{1}{6}$, ¿cuál es la probabilidad de obtener cara?

A) $\frac{\sqrt{15}-3}{6}$ **B)** $\frac{6-\sqrt{6\sqrt{6}+2}}{12}$ **C)** $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ **D)** $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ **E)** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

21 Sean a, b, c, d y e enteros positivos tales que $a + b + c + d + e = 2011$ y sea M la mayor de las sumas $a + b$, $b + c$, $c + d$, $d + e$. ¿Cuál es el menor valor posible para M?

A) 503 **B)** 671 **C)** 802 **D)** 803 **E)** 804

22 En una progresión geométrica (a_n) se verifica que $a_1 = \operatorname{sen} x$, $a_2 = \cos x$ y $a_3 = \operatorname{tg} x$ para algún número x. ¿Para qué valor de n es $a_n = 1+\cos x$?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

23 ¿Cuántas ternas ordenadas (x, y, z) de enteros no negativos menores que 20 verifican que hay justamente dos elementos distintos en el conjunto $\left\{i^x, (1+i)^y, z\right\}$, siendo $i^2 = -1$

A) 149 **B)** 205 **C)** 215 **D)** 225 **E)** 235

24 En el interior de un cuadrado de lado 1 se escoge al azar un punto P. Sea $d(P)$ la distancia de P al lado del cuadrado que se encuentre más cerca. La probabilidad de que $\frac{1}{5} \leq d(P) \leq \frac{1}{3}$ es:

A) $\frac{56}{225}$ **B)** $\frac{53}{225}$ **C)** $\frac{49}{225}$ **D)** $\frac{47}{225}$ **E)** Nada de lo anterior

25 Escribimos en la pizarra los números 1, 2, 3,……, 100. ¿Cuántos hay que borrar, como poco, para que el producto de los que queden termine en 2?

A) 20 **B)** 21 **C)** 22 **D)** 23 **E)** 24

XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (1ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**D**	1	**E**	1	**A**	1	**A**
2	**E**	2	**B**	2	**B**	2	**D**
3	**B**	3	**A**	3	**D**	3	**A**
4	**D**	4	**C**	4	**D**	4	**A**
5	**C**	5	**D**	5	**D**	5	**C**
6	**C**	6	**D**	6	**E**	6	**B**
7	**C**	7	**D**	7	**B**	7	**E**
8	**D**	8	**E**	8	**E**	8	**E**
9	**C**	9	**B**	9	**B**	9	**C**
10	**A**	10	**B**	10	**E**	10	**E**
11	**A**	11	**D**	11	**A**	11	**B**
12	**D**	12	**B**	12	**D**	12	**E**
13	**B**	13	**C**	13	**E**	13	**B**
14	**C**	14	**A**	14	**A**	14	**D**
15	**D**	15	**D**	15	**B**	15	**B**
16	**B**	16	**E**	16	**E**	16	**D**
17	**C**	17	**B**	17	**A**	17	**B**
18	**C**	18	**E**	18	**C**	18	**C**
19	**B**	19	**C**	19	**E**	19	**D**
20	**B**	20	**C**	20	**B**	20	**D**
21	**E**	21	**B**	21	**A**	21	**C**
22	**E**	22	**E**	22	**B**	22	**D**
23	**A**	23	**C**	23	**D**	23	**B**
24	**D**	24	**C**	24	**C**	24	**C**
25	**C**	25	**E**	25	**E**	25	**B**

XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (2ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**D**	1	**D**	1	**B**	1	**B**
2	**B**	2	**B**	2	**D**	2	**B**
3	**E**	3	**A**	3	**B**	3	**E**
4	**D**	4	**B**	4	**B**	4	**D**
5	**B**	5	**A**	5	**D**	5	**B**
6	**E**	6	**A**	6	**E**	6	**B**
7	**B**	7	**E**	7	**B**	7	**E**
8	**B**	8	**E**	8	**E**	8	**E**
9	**D**	9	**A**	9	**D**	9	**C**
10	**E**	10	**C**	10	**E**	10	**A**
11	**D**	11	**B**	11	**A**	11	**C**
12	**D**	12	**E**	12	**C**	12	**E**
13	**C**	13	**C**	13	**E**	13	**E**
14	**D**	14	**A**	14	**B**	14	**D**
15	**D**	15	**D**	15	**D**	15	**C**
16	**D**	16	**A**	16	**E**	16	**C**
17	**A**	17	**C**	17	**D**	17	**C**
18	**B**	18	**D**	18	**C**	18	**C**
19	**C**	19	**B**	19	**D**	19	**B**
20	**E**	20	**E**	20	**C**	20	**D**
21	**A**	21	**C**	21	**B**	21	**B**
22	**C**	22	**D**	22	**B**	22	**E**
23	**A**	23	**C**	23	**E**	23	**D**
24	**D**	24	**A**	24	**D**	24	**A**
25	**D**	25	**E**	25	**D**	25	**B**

XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel I

1. (D) Entre el 2 y el 3 hay 10 divisiones. Por tanto, la flecha de la balanza marca 2,3.

2. (E) La primera cifra deberá ser forzosamente 1, 2, 3 o 4. Si es 1, la suma de las otras cifras será 3, y tres se puede obtener como suma de (3, 0, 0), (2, 1, 0) o (1, 1, 1): la primera forma proporciona 3 números, la segunda 6 y la tercera 1.
Si la primara cifra es un 2, la suma de las otras tres es 2, que puede obtenerse como suma de (2, 0, 0) o (1, 1, 0) y cada una de esas dos formas proporciona 3 números más. Si es 3, la suma de las otras cifras será 1, que solo pude obtenerse como suma de (1, 0, 0), lo que da 3 números más. Por último, si es un 4 las otras tres cifras deben ser cero, es decir únicamente proporciona un número.
Tenemos pues, $(3+6+1)+(3+3)+(3)+(1)=20$ números.

3. (B) Si el perímetro de la base es 18, la suma de los dos lados de la base será 9. Por otra parte, descomponiendo 42 en factores primos tenemos: $42=2\times 3\times 7$. Como la suma de los lados de la base es 9 y el producto de los lados de la base por la altura debe ser 42, los lados de la base serán necesariamente 2 y 7, y la altura 3.

4. (D) El número de caramelos será: (múltiplo de 35) + 17, pero como 35 es múltiplo de 7, también será igual a (múltiplo de 7) + 17 = (múltiplo de 7) + $2\times 7+3=$
= (múltiplo de 7) + 3. Por lo tanto, si los reparte entre sus 7 primos, le sobrarán 3 caramelos.

5. (C) Si quito los tres puntos de una diagonal ya no quedan tres puntos alineados, pero si quito solo dos puntos –cualesquiera, tanto de una diagonal como de un lado- siempre quedan tres puntos alineados. Por consiguiente el mínimo número de puntos que hay que quitar es tres.

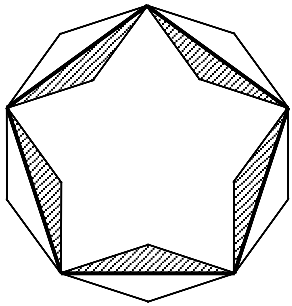
6. (C) $3{,}75\times 0{,}28=1{,}0500=1{,}05.$ Como consecuencia, difiere de 1 en cinco centésimas. Claramente es menor que la diferencia con cualquiera de los otros números. Luego el valor más próximo es 1.

7. (C) Dado que se come 5 paquetes en dos meses, en un mes consumirá $\frac{5}{2}$ paquetes y en 12 meses se comerá $12\times\frac{5}{2}=30$ paquetes de alfalfa.

8. (D) Según se desprende de la figura, el área del pentágono es igual a la de la estrella más la mitad de la diferencia entre la del decágono y la de la estrella, es decir:

$$16{,}5+\frac{25{,}95-16{,}06}{2}=\frac{16{,}05+25{,}95}{2}=\frac{42}{2}=21$$

Que como puede observarse es la media aritmética de las áreas de los dos decágonos, el estrellado y el convexo.



9. (C) Ana debe pagar 23 € y recibe 10, es decir, debe 13. Emilio debe recibir 23 € y paga 12, en consecuencia se le deben 11. De igual modo podemos ver que a Inés se le deben 7 €, que a Olivia se le deben 4 y que, finalmente, a Ulises se le deben 5.

Como Ana paga 4 € a Olivia y 5 a Ulises, estos dos quedan en paz. Dado que además paga 4 € a Emilio, a este todavía se le deben 7 y ella (Ana) queda en paz pues ha pagado en total 13 €, que es lo que debía. Tenemos ahora que todos están en paz, menos Inés que debe 7 € y Emilio, al que se le deben 7. Por tanto, el embrollo se arreglará si Inés paga 7 € a Emilio.

10. (A) Desarrollando nuestros "números" tenemos:

$$OMAR = O\times 1000 + M\times 100 + A\times 10 + R$$

$$AMOR = A\times 1000 + M\times 100 + O\times 10 + R$$

$$ROMA = R\times 1000 + O\times 100 + M\times 10 + A$$

Y efectuando la suma:

$$OMAR + AMOR + ROMA = O\times 1110 + A\times 1011 + R\times 1002 + M\times 210.$$

A la vista de este resultado, es claro que se obtendrá el valor máximo asignando a las letras los siguientes valores: $\mathrm{O}=9$, $\mathrm{A}=8$, $\mathrm{R}=3$ y $\mathrm{M}=1$.

Ahora, para obtener la suma máxima, basta sustituir dichos valores en la expresión de la suma: $9\times 1110+8\times 1011+3\times 1002+1\times 210 = 21\,294$.

Esta suma corresponde a 9183 + 8193 + 3918 = 21 294

11. (A) El ángulo desigual medirá: $180º-2\times 75º=30º$.

12.(D) Designemos por P al número de príncipes y por C al número de caballeros. Queremos averiguar cuántas personas visitaron al rey, es decir, P + C.
El número de cofres de oro, que es 34, se obtiene así: $3P + C = 34$.

Si cada uno de los visitantes hubiera traído el doble de cofres de plata, es decir, cada príncipe 2 y cada caballero 4, la cantidad de cofres de plata sería el doble. Esto lo podemos expresar así: 2*P* + 4*C* = 66.
En este caso el total de cofres contando los de oro y los de plata sería:
(3*P* + *C*) + (2*P* + 4*C*) = 34 + 66, es decir, 5*P* + 5*C* = 100. Dividiendo entre 5 se obtiene que *P* + *C* = 20.
Este resultado también puede obtenerse resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones, pero que no es propio de este nivel.

$$\left.\begin{array}{r}3p+c=34\\ p+2c=33\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{r}p=7\\ c=13\end{array}\Rightarrow p+c=20$$

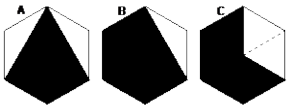
13. (B) En la hucha hay $2\times 10+3\times 5+6\times 2+5\times 1+7\times 0{,}5+4\times 0{,}2+23\times 0{,}1=58{,}6$ euros más cierta cantidad de monedas de 5, de 2 y de 1 céntimo, haciendo un total de 59,08 euros.
Tenemos entonces que entre las monedas de 5, de 2 y de 1 céntimo suman $59{,}08-58{,}6=0{,}48\,\text{euros}=48\,\text{céntimos.}$ Como 48 entre 5 da 9 de cociente y 3 de resto, se sigue que el máximo número de monedas de 5 céntimos que puede haber en la hucha es 9.

14. (C) Si el área del cuadrado mide 16 cm^2 su lado medirá 4 cm, lo que implica que el lado de cada cuadradito mide 1 cm. Solamente resta ahora contar el número de lados de los cuadraditos sombreados que tienen frontera con el exterior (16 – 4 =12) y con el interior (8). La respuesta es: 20 cm.

15. (D) De entrada, por definición, el ángulo de 120º pertenece al triángulo obtusángulo. El ángulo de 80º pertenece al triángulo acutángulo, pues no puede pertenecer al obtusángulo porque 120 + 80 es superior a 180. El ángulo de 10º pertenece al obtusángulo, pues de no ser así el otro triángulo sería rectángulo. Tenemos entonces que 120º, 10º y 60º son los ángulos del triángulo obtusángulo. Por tanto los del acutángulo serán: 80º, 55º y $180º-80º-55º=45º.$ Entonces, 45º será el menor de sus ángulos.

16. (B) Como 92 es igual a la suma de las 10 notas dividido entre 10, la suma de todas las notas será 920. Uno de los niños tendrá la menor nota posible si los otros nueve tienen la mayor posible, es decir 100, lo que implica que el décimo niño habrá obtenido 20 puntos, la menor nota posible.

17. (C) En A, el área sombreada mide 48 cm^2 y en B el área sombreada más oscura también tiene un área de 48 cm^2, pues T y T´ son iguales. En C se ha



dividido esta última superficie en 4 triángulos iguales de área 48/4 = 12 cm^2 cada uno. Por tanto, el área del hexágono es $6 \times 12 = 72\ cm^2$.

18.(C) Primer método. (Planteando y resolviendo una ecuación de primer grado)

Si hay N pasteles, el mayor come $\frac{N}{2} + \frac{1}{2} = \frac{N+1}{2}$ y quedan $N - \frac{N+1}{2} = \frac{N-1}{2}$.

El segundo come $\frac{N-1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{N+1}{4}$ y quedan $\frac{N-1}{2} - \frac{N+1}{4} = \frac{N-3}{4}$.

El tercero come $\frac{N-3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{N+1}{8}$ y quedan $\frac{N-3}{4} - \frac{N+1}{8} = \frac{N-7}{8}$.

Para el cuarto quedan $\frac{N-7}{8} = 5$, de donde $N = 47$. La suma de sus cifras es 11.

Segundo método.

Empezando por el final, es decir, por el cuarto nieto que se comió 5 pasteles. El tercero de los nietos se encontró con 11 pasteles. La mitad es 5,5 y como se comió medio más, resulta que se comió 6 y dejó 5.

Puesto que el segundo dejó 11 pasteles eso nos indica que se encontró con 23. Se comió la mitad de los pasteles (11,5) y medio más. En total 12 y dejó 11.

De manera análoga deducimos que cuando el primero empezó a comer había 47, se comió 23,5 + 0,5 = 24 y dejó 23.

Luego la respuesta es N = 47 y la suma de sus cifras 4 + 7 = 11.

19. (B) Si resto 26 menos 24, estoy restando lo que pagan 2 adultos más 3 niños a lo que pagan 3 adultos más 2 niños, es decir, obtengo lo que paga un adulto (3 – 2) menos lo que paga un niño (2 – 3). Por consiguiente, la diferencia es de 2 euros.

20. (B) Irene logró ocupar con sus lágrimas de 2 mililitros, por una parte, 1000 mililitros y por otra, 44 centilitros o, lo que es lo mismo, 440 mililitros. Un total de 1440 mililitros. Basta pues dividir 1440 entre 2 para encontrar los 720 lagrimones que ese día le cayeron.

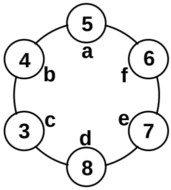
21. (E) Como el rectángulo central tiene área doble del rectángulo que tiene encima (6 = 2×3), significa que la segunda fila de rectángulo es el doble de alta que la primera. Comparando después los rectángulos de la primera columna con los de la tercera, se deduce que x es la mitad de 20. Es decir, x = 10. Las áreas quedarán así

2	3	4
4	6	8
10	15	20

22. (E) Si escribimos 2420 como $2000+200+200+20$ y si en la numeración azteca, ese número, se representa como: 
y, si hacemos lo mismo con 4020: $4020=2000+2000+20=$ 
es inmediato identificar los símbolos 
con 2000, 200 y 20 respectivamente.
Entonces, $4620=2000+2000+200+200+200+20$ se escribirá: 
Por lo tanto, la solución es la E.

23.(A) Como el patrón que se repite, *ABCDE,* tiene 5 letras y la división de 2011 entre 5 da 402 de cociente y 1 de resto, vemos que tras 402 repeticiones se alcanza la 2010ª posición con la letra *E*. La siguiente letra, en la 2011ª posición, será la *A*.

24. (D) Llamando *a, b, c, d, e , f* a los números que han pensado, de manera correlativa, tenemos que: $\frac{a+c}{2}=4 \Rightarrow a+c=8$; análogamente $c+e=12$; $e+a=16$. Sumando las tres igualdades se obtiene: $2(a+c+e)=36 \Rightarrow a+c+e=18$. Si a esta igualdad la restamos la primera se obtiene $e=10$ y como consecuencia $c=2$, $a=6$. Procediendo de manera análoga (aunque no hace falta ya que su suma es menor) se obtienen los otros valores, $b=5$, $d=1$, $f=9$. El mayor valor es 10.



25. (C) Llamemos R al número de bolas rojas entre las 40 de la bolsa. Si $\frac{R}{40}$ fuese igual a $\frac{25}{100}$, entonces, R sería el número de bolas rojas tal que la probabilidad de extraer una bola roja entre las 40 fuese $\frac{25}{100}$, es decir, de cada 100 extracciones, lo más probable es que 25 fuesen de bola roja. Ahora bien, como $\frac{25}{100}=\frac{5}{20},=\frac{10}{40}$, tendremos que R = 10.

XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

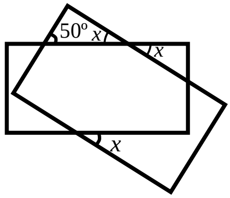
Soluciones 1ª Fase Nivel II

1. (E) Son todos iguales ya que la suma de todos los tramos horizontales es el lado mayor del rectángulo y la suma de todos los tramos verticales es el lado menor del rectángulo. Por lo tanto cada uno de los caminos es el semiperímetro del rectángulo.

2. (B) En cada salto se aproximan la una a la otra 5 unidades (2 + 3 = 5). Como están a 85 unidades de distancia, cada una de ellas tendrá que dar 85 : 5 = 17 brincos. Plis empieza en el cero y después de 17 brincos se encontrará en el 34.

3. (A) Quedan: 4 trozos, 4 trocitos, 4 mini-trocitos y 5 micro-trocitos. Total 17.

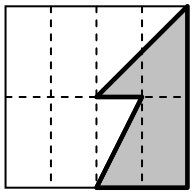
4. (C) Los ángulos marcados con x son iguales entre sí por ser opuestos por el vértice y correspondientes entre paralelas. Además x es complementario de 50º, por lo tanto x = 40º.



5. (D) La peor de las situaciones que se le pueden presentar a Rosa es tener 67 bolitas de cada uno de los 30 colores, es decir, sacar 67 · 30 = 2010. Al sacar una más, coincidirá necesariamente con uno de los 30 colores y habrá 68 de ese color. Por lo tanto necesita sacar 2011 bolitas para estar completamente segura.

6. (D) Llamando a, b, c, d, e, f a los números que han pensado, de manera correlativa, tenemos que: $\frac{a+c}{2} = 4 \Rightarrow a + c = 8$; análogamente $c + e = 12$; $e + a = 16$. Sumando las tres igualdades se obtiene: $2(a + c + e) = 36 \Rightarrow a + c + e = 18$. Si a esta igualdad la restamos la primera se obtiene $e = 10$ y como consecuencia $c = 2$ $a = 6$. Procediendo de manera análoga (aunque no hace falta ya que su suma es menor) se obtienen los otros valores, $b = 5$, $d = 1$, $f = 9$. El mayor valor es 10.

7. (D) Descomponiendo la figura como se muestra, tenemos que el área sombreada es: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}$



8. (E) La primera es cierta porque la suma de los 3 ángulos de un triángulo es 180º; y al ser uno de ellos de 90º, los otros dos tienen que sumar 90º. La segunda es cierta, pues si tomamos como base uno de los catetos, la altura será el otro cateto, y, como sabemos, el área de un triángulo es igual a la mitad de la base por la altura. Por otra parte, cada uno de los catetos es menor que la hipotenusa. La tercera es cierta porque cada uno de los ángulos de un triángulo equilátero mide 60º, y los triángulos rectángulos, por definición, tienen que tener un ángulo de 90º. La cuarta, evidentemente, también es cierta. Conclusión: las cuatro afirmaciones son verdaderas.

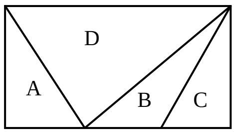
.

9. (B) Reduciendo a común denominador las tres fracciones se obtiene: $\frac{12}{60} < \frac{4n}{60} < \frac{55}{60}$

Por lo tanto $12 < 4n < 55 \Rightarrow 3 < n < 13{,}75$.
Los únicos valores enteros de *n* son: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 y 13. Hay 10 valores posibles de *n.*

10.(B) En la primera hoja, la exterior, están las páginas 1-2-55-56. En la siguiente 3-4-53-54. Si nos fijamos, la suma de las dos páginas que hay en cada una de las caras de todas las hojas es 57. En la hoja que tiene la página 16 estarán: 16 y (57 – 16) = 41 y por la otra cara 15-42.

11.(E) El triángulo de área **D** tiene la mitad del área del rectángulo, ya que tiene la misma base y la misma altura. Por lo tanto **A + B + C** es la otra mitad y se concluye que **D = A + B + C.**



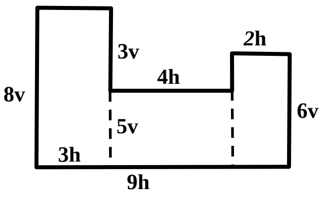
12.(D) $\frac{1}{5}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(60)\right]\right\} = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{2}(20)\right] = \frac{1}{5}(10) = 2$ También $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 60 = \frac{1}{15}\cdot 60 = 2$.

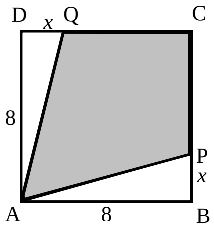
13.(C) ◆◆◆◆ ↔ ◆◆(✖✚)(✖✚) ↔ (✖◆)(✖◆)✚✚ ↔ ●●✚✚ ↔ ✚✚✚✚✚
Luego 4 rombos equivalen a 5 signos ✚.

14.(A) Se ha descompuesto la figura inicial en tres rectángulos tal como se ve aquí:

Área = $3h\cdot 8v + 4h\cdot 5v + 2h\cdot 6v$ =

= $24h\cdot v + 20h\cdot v + 12h\cdot v = 56h\cdot v = 56\cdot 2 = 112$.



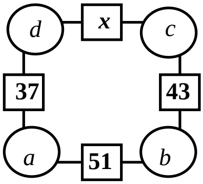


15.(D) Si llamamos x al segmento BP, podemos escribir:

$$A_{\text{zona gris}} = 8^2 - 2\cdot\frac{8\cdot x}{2} = 3\cdot 2\cdot\frac{8\cdot x}{2}$$

$64 - 8x = 24x$; $64 = 24x + 8x$; $64 = 32x$; $x = 64 : 32 = 2$

16.(E) 2011 **=** múltiplo de 30 **+** múltiplo de 59 [I]
Como los múltiplos de 30 terminan en cero, para que la cifra de las unidades de la suma anterior sea 1, será necesario que el múltiplo de 59 termine en 1. Podría ser:
$59 \cdot 9 = 531$, $59 \cdot 19 = 1121$, $59 \cdot 29 = 1711$.
De [I]: múltiplo de 30 = 2011 – múltiplo de 59
Si probamos cada uno de los múltiplos de 59 anteriores, tendremos:
$2011 - 531 = 1480$, $2011 - 1121 = 890$, $2011 - 1711 = 300$.
El único resultado de los anteriores que es múltiplo de 30 es 300, luego don Retorcido tendrá que comprar 300 : 30 = 10 cajas de 30 unidades y 1711 : 59 = 29 cajas de 59 unidades, lo que hace un total de 39 cajas.



17.(B) Llamando a, b, c, d a los números, tal como aparece en la figura, podemos escribir:

$$\left.\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ \ a+b=51\\ (\mathrm{II})\ \ b+c=43\\ (\mathrm{III})\ c+d=x\\ (\mathrm{IV})\ d+a=37\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l} b=51-a\\ c=43-b\\ \\ \\ \end{array}\right\}\text{ Sustituyendo en (III) tenemos:}$$

$$x = c+d = 43-b+d = 43-(51-a)+d = 43-51+a+d == 43-51+37 = 29.$$

Otra forma de resolverlo: $(\mathrm{I})-(\mathrm{II})+(\mathrm{III})-(\mathrm{IV})$

$$a+b-(b+c)+c+d-(d+a) = 51-43+x-37 \Rightarrow x = 29.$$

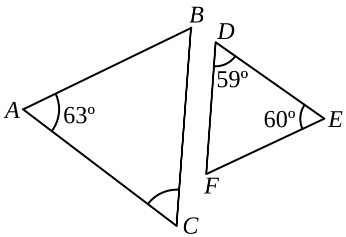
18.(E) Descomponiendo el número 16 555 en factores:
$16\,555 = 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 43$, luego la diferencia entre las edades del hijo mayor y el menor es $11 - 5 = 6$ años.

19.(C) Calculamos los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{F}$:

$\hat{B} = 180^{\circ} - (63^{\circ} + 57^{\circ}) = 60^{\circ}$

$\hat{F} = 180^{\circ} - (59^{\circ} + 60^{\circ}) = 61^{\circ}$

En el triángulo ABC, el lado mayor es BC, pues a mayor ángulo se opone mayor lado.



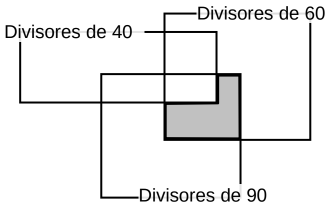
Se nos dice que *DF* es igual a *BC*. El lado mayor en el triángulo *DEF* es *DE*, luego éste es el mayor de todos los segmentos.

20.(C) Hay 6 triángulos que cumplen las condiciones del problema; sus lados miden: (1, 12, 12), (3, 11, 11), (5, 10, 10), (7, 9, 9), (9, 8, 8), (11, 7, 7).

21.(B) Si llamamos *x* al número de mochuelos e *y* al número de olivos, escribiremos:

$$\left.\begin{array}{l} x = y+1 \\ 2(y-1) = x \end{array}\right\} 2y-2 = y+1;\ 2y-y = 1+2;\ y = 3.$$

22.(E) En la zona sombreada estarán los números que son divisores de 60 y de 90 (a la vez) pero que no sean divisores de 40.



div. 60 = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60}
div. 90 = {1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90}
div. 40 = {1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40}
Luego en la zona sombreada estarán los números 3, 6, 15 y 30.

23.(C) Método 1º.- Calculamos la raíz cuadrada entera de 123 456 y se obtiene 351 con un resto de 255.

Método 2º.- Elevamos al cuadrado las opciones propuestas como respuesta:
A) $134^2 = 17956$, B) $245^2 = 60025$, C) $350^2 = 122500$, D) $450^2 = 202500$,
E) No hace falta probarlo.

Método 3º.- Si nos fijamos en las dos primeras cifras del número dado, se observa que $3^2 < 12 < 4^2$, por lo que las únicas opciones posibles son 350 ó 450. Bastaría calcular $350^2 = 122\,500$ y $450^2 = 202\,500$.

24.(C) Como la **S** es la letra central de la palabra, se deduce inmediatamente que en la casilla central deberá ponerse una **S**. En las esquinas que son los extremos de las posibles líneas pondremos la O. Finalmente en las casillas que nos quedan, casillas centrales de cuatro líneas pondremos la **S**. Se obtiene 6 veces la palabra **OSO**.

O	**S**	**O**
S	**S**	**S**
O	**S**	**O**

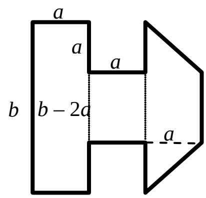
25.(E) Para obtener el mayor número entero que cumpla las condiciones del problema podemos escribir:

$$\frac{1+2+3+4+x}{5} = 20, \text{ y de aquí}: \frac{10+x}{5} = 20;\ 10+x = 20\cdot 5;\ 10+x = 100;$$

$$x = 100-10;\ x = 90.$$

XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel III



1. (A) Podemos dividir la figura en dos rectángulos y un trapecio. El área buscada es
$$A = a\cdot b + a\cdot(b-2a) + \frac{b+b-2a}{2}\cdot a = 3a(b-a) \textbf{.}$$

2. (B) Aunque es muy fácil resolver el problema tanteando, podemos plantear una ecuación. Si llamamos x al número de mochuelos, sabemos que hay x – 1 olivos.

Además, $x-1=\frac{x}{2}+1$, luego x = 3.

3. (D) Como la zona B ocupa el doble de la zona C, su puntuación es la mitad de la de la zona C. Luego, al impactar en la zona C se obtienen 20 puntos.

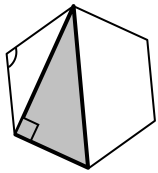
4. (D) Si llamamos x al número de compañeros, por un lado sabemos que el precio del viaje es 14x + 4 y, por el otro que es 16x – 6. Luego, 14x + 4 = 16x – 6. Así pues, hay x = 5 compañeros, el precio es 14·5 + 4 = 74 euros y cada uno debe aportar 74/5 = 14,80 euros.

5. (D) Si los lados miden 2x, 2x +2 y 2x+4, por un lado sabemos que 6x + 6 > 2011 luego, x > 334. Así pues, el menor valor entero para x es 335 y el perímetro será 6·335 + 6 = 2016 cm.

6. (E) Para que la media de cinco números sea 20, su suma debe ser 20 · 5 = 100.
El mayor valor del quinto número se alcanzará si los otros cuatro son lo más pequeños posibles, esto es, 1, 2, 3, 4 y, en ese caso, el quinto número valdría 100 – (1 + 2 + 3 + 4) = 90.

7. (B) Por un lado se debe cumplir que $2x-7<3x+3$, luego – 10 < x. Por otro, $3x+3<5-x$, luego 4x < 2; $x < \frac{1}{2}$. Así pues, debe ser $-10<x<\frac{1}{2}$.

8. (E) Todo consiste en darse cuenta de que el triángulo es rectángulo pues, como los ángulos de un hexágono regular miden 120º y el triángulo blanco es isósceles, sus otros dos ángulos miden 30º. Como el triángulo gris (30º, 60º, 90º) es la "mitad" de un equilátero, deducimos que su hipotenusa mide 8 cm. El otro cateto mide $x=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$ y, por tanto, el perímetro es 12 + $4\sqrt{3}$ cm.



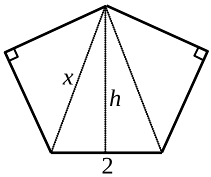
9. (B) Por el método del sándwich:

$$2=\frac{2\cdot 10^{-3}\cdot 3\cdot 10^{-1}}{3\cdot 10^{-4}}<\frac{0{,}0025\cdot 0{,}3051493}{0{,}00021476}<\frac{3\cdot 10^{-3}\cdot 4\cdot 10^{-1}}{2\cdot 10^{-4}}=6$$

Luego el número está entre 2 y 6.

10.(E) Como el primero recibirá $\frac{x}{1+3+9+27}=\frac{x}{40}$ y, el resto, un múltiplo de ese número, la cantidad debe ser divisible entre 40 y solo 2760 lo es.

11.(A) Dividimos el pentágono en tres triángulos, dos de ellos rectángulos de área 2 dm^2. Para calcular el área del tercero, debemos aplicar Pitágoras dos veces: una para calcular el lado y la otra para la altura.



$x^2=2^2+2^2$; $x=2\sqrt{2}$. $h^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2-1^2=7$, $h=\sqrt{7}$.

Así pues, el área del pentágono es

$$A=2+2+\frac{2\cdot\sqrt{7}}{2}=4+\sqrt{7}\text{ dm}^2.$$

12.(D) Lo primero que observamos es que *a* debe ser menor que 4 para que el producto tenga tres cifras.

Si $a = 1$, b puede ser 3, 4 o 5.

Si $b = 3$, entonces c = 1 no puede ser pues deben ser cifras distintas.

Si $b = 4$, entonces $c = 8$ y $148 \cdot 3 = 444$ y $a + b + c = 13$.

Animamos al estudiante a que verifique que el resto de los casos, $a = 2$ y $a = 3$, dan a lugar a casos que no verifican las condiciones del problema.

13.(E) Si las cifras menores son a y b (con $a < b$), la tercera debe ser $a + b$. Como son cifras distintas, a y b no pueden ser cero y $a + b$ debe ser menor que 10. Además, por cada combinación de cifras tendremos 6 números posibles. Por ejemplo, si $a = 1$, $b = 3$, $a + b = 4$ y tendremos los números 134, 143, 314, 341, 413, 431.

Para $a = 1$ habrá 7 valores de b: 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8, lo que hacen $7 \cdot 6 = 42$ números distintos.

Para a =2 hay 5 valores de b y $5 \cdot 6 = 30$ números.

Para $a = 3$ hay 3 valores de b y $3 \cdot 6 = 18$ números.

Y para $a = 4$ solo hay un valor de b y 6 números.

En total hay 42 + 30 + 18 + 6 = 96 números que cumplen la condición.

14.(A) Si dividimos la sucesión en términos impares y términos pares, vemos que los términos impares forman una progresión aritmética de diferencia 6 comenzando con el 11: $a_1 = 11$, $a_3 = 17$, $a_5 = 23$, …. La fórmula general es $a_{2n-1} = 11 + 6(n - 1)$.

Como 497 = 2 · 249 – 1, $a_{497} = a_{2\cdot 249-1} = 11 + 6\cdot(249 - 1) = 1499$.

15.(B) Contemos los números que empiezan con 1: eso es equivalente a contar cuántos números de tres cifras se pueden formar con los números 1, 3, 5, 7 y 9; y eso da $5^3 = 125$. Que empiecen con 3 hay otros 125 y 5111 es el primero de los que empiezan con 5 así que ocupa la posición 125 + 125 +1 = 251.

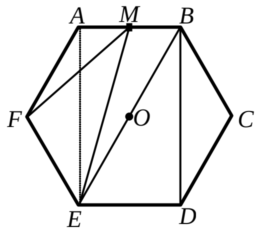
16.(E) En total se han reducido el 40% del 80% = 32% de los accidentes

17.(A) Lo mejor es operar en el numerador y factorizar el polinomio obtenido:

$$\frac{a(a^3+2a^2-a-2)+a^2-1}{a(a-1)}=\frac{a^4+2a^3-2a-1}{a(a-1)}=\frac{(a-1)(a^3+3a^2+3a+1)}{a(a-1)}$$

$$=\frac{a^3+3a^2+3a+1}{a}=\frac{(a+1)^3}{a}$$

18.(C) *BE* mide 4 cm (porque es igual a dos lados, podemos calcular *BD* aplicando Pitágoras como ya se hizo en el problema 8: $BD=\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}$ cm.



Una vez visto esto, nuestro candidato es *EM*. Comprobémoslo:

Aplicando Pitágoras al triángulo rectángulo *AME*, donde $AE = BD = \sqrt{12}$ tenemos que

$EM=\sqrt{1^2+\sqrt{12}^2}=\sqrt{13}$ cm.

Si te quedas con las ganas de saber cuánto mide *FM*, considera el triángulo rectángulo isósceles *FOM* y aplica Pitágoras, $FM=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$ cm.

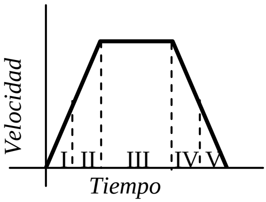
19.(E) La pendiente de la recta que corta a los ejes en $B(0, k)$ y $A(a, 0)$ es $-\frac{k}{a}$, que debe ser igual a $-\frac{1}{k}$. Es decir, $-\frac{k}{a} = -\frac{1}{k}$, de donde $a = k^2$.

20.(B) El número n es el cuadrado de $\sqrt{n}$ que es un número entero. El siguiente cuadrado perfecto será el cuadrado de $\sqrt{n}$ +1, esto es $\left(\sqrt{n}+1\right)^2 = n + 2\sqrt{n} + 1$

21.(A) El primer coche le costó 9999:0,9 = 11110 euros y el segundo, 9999:1,1 = 9090 euros. Así pues, invirtió 11110 + 9090 = 20200 euros y obtuvo 2·9999 = 19998 euros de la venta por lo que perdió 20200 – 19998 = 202 euros.

22.(B) Si el radio se multiplica por 1,03, el área queda multiplica por $(1{,}03)^2 \cong 1{,}06$ así pues, el área aumenta un 6% aproximadamente.

23.(D) Dividimos la gráfica en 5 tramitos. Comenzamos con el tramos III. Como allí la velocidad es constante y no nula, la gráfica tiempo-espacio debe ser una recta no horizontal. Eso elimina las gráficas **A)**, **C)** y **E)**. Como en las gráficas **B)** y **D)** los tramos I y II son iguales, nos fijamos en los tramos IV y V: en el tramo IV la velocidad es mayor y, por tanto el espacio recorrido también debe ser mayor. Esto elimina la gráfica **B)** Así pues, la gráfica tiempo-espacio es la **D)**.



24.(C) Para ser múltiplo de 99 debe serlo de 9 y de 11. Si llamamos n al número de cifras: para ser múltiplo de 9, la suma de sus cifras ($5n$) debe ser múltiplo de 9 por lo que n tiene que ser múltiplo de 9. Por otro lado, un número formado por cifras iguales es múltiplo de 11 si tiene un número par de cifras, así pues n debe ser par. El menor número par que es múltiplo de 9 es 18.

25.(E) **A)** es verdadera pues el ángulo $A\hat{C}B$ abarca media circunferencia.
B) es verdadera pues AO y CO son radios.
C) Es verdadera pues la base del triángulo es 2 cm y la altura es menor o igual que 1 cm.
D) Es verdadera pues las bases miden 1 cm y las alturas coinciden.
Así pues, por descarte, **E)** debe ser falsa. Comprobémoslo:

Como el triángulo *ABC* es rectángulo, sabemos que $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Y, sustituyendo $AB = AO + OB$,

$AB^2 = (AO + OB)^2 = AO^2 + 2AO \cdot OB + OB^2 = AC^2 + BC^2$, como $2AO \cdot OB = 2$, obtenemos la igualdad $AO^2 + OB^2 + 2 = AC^2 + BC^2$.

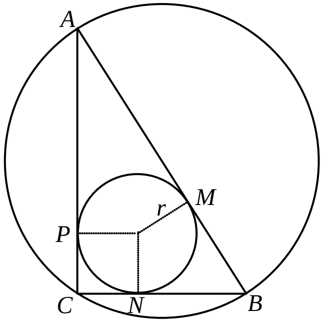
XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel IV

1. (A) Sea α la mitad del ángulo $\hat{B}$. En el triángulo *BDC*, se tiene que $\hat{C}+\alpha = 180^{\circ}-68^{\circ}=112^{\circ}$, mientras que en el triángulo *BDA* se tiene que $\hat{A}+\alpha = 180^{\circ}-112^{\circ}=68^{\circ}$, de donde se sigue que $\hat{C}-\hat{A}=112^{\circ}-68^{\circ}=44^{\circ}$.

2. (D) En total hay 72 (9×8) posibles resultados. De ellos hay 8 en los que la tarjeta de Beatriz es 1 y la de Antonio mayor o igual que 2; 6 en los que la tarjeta de Beatriz es 2 y la de Antonio mayor o igual que 4; 4 en los que la tarjeta de Beatriz es 3 y la de Antonio mayor o igual que 6 y por último 2 en los que la tarjeta de Beatriz es 4 y la de Antonio mayor o igual que 8. $p(A \geq 2B)=\dfrac{8+6+4+2}{72}=\dfrac{5}{18}$.

3. (A) Por ser el incentro el punto de corte de las bisectrices interiores del triángulo, los segmentos *AP* y *AM* son iguales, así como los segmentos *BN* y *BM*.
Como *AM* + *BM* = *D*, y *AP* = *b* – *r* así como *BN* = *a* – *r*, tenemos que *b* – *r* + *a* – *r* = *D* y por tanto *a* + *b* = *D* + 2*r* = *D* + *d*.



4. (A) $2^{4^x} < 4^{2^x} \Leftrightarrow 2^{4^x} < 2^{2^{x+1}} \Leftrightarrow 4^x < 2^{x+1} \Leftrightarrow 2x < x+1 \Leftrightarrow x<1$.

5. (C) Sea *x* el número del comienzo. Después de 99 repeticiones habremos obtenido el número $2^{99}x-2^{98}-2^{97}-...-1=$ $2^{99}x-\left(2^{99}-1\right)=2^{99}(x-1)+1$. Si este número es igual a $2^{100}+1$, *x* – 1 = 2, y *x* = 3.

6. (B) Sólo tienen un número impar de divisores los cuadrados perfectos. Y cuadrados perfectos formados por tres cifras consecutivas sólo hay dos: 324 y 576.

7. (E) El total de accidentes se reduce en un 40% del 80%, es decir, en un 32%.

8. (E) El perímetro del hexágono común a ambos triángulos coincide con la suma de los lados de los dos triángulos, es decir, $\frac{2011}{3}+\frac{1121}{3}=\frac{3132}{3}=1044$.

9. (C) Los cuadrados perfectos de dos cifras son 16, 25, 36, 49, 64 y 81. El mayor número que se puede formar con ellos es 81649, cuyas cifras suman 28.

10. (E) Como el lado del cuadrado es $5\sqrt{5}$ cm y cada uno de los dos lados de los cuadrados pequeños miden 5 cm, el lado corto de la L mide $5\sqrt{5}-10=5\left(\sqrt{5}-2\right)$.

11. (B) En el producto de los 2011 primeros primos sólo hay un 2 y un 5. Por tanto sólo hay un 0 en el final del producto.

12. (E) $AD=\dfrac{AC}{\cos(\alpha)}=\dfrac{\frac{AB}{\cos(\alpha)}}{\cos(\alpha)}=\dfrac{AB}{\cos^2(\alpha)}=\dfrac{1}{\cos^2(\alpha)}$.

13. (B) $\left.\begin{array}{l} a+b+c=78 \\ c-a-b=40 \end{array}\right\} \Rightarrow 2c=118 \Rightarrow c=59 \quad y \quad a+b=19$. Ahora, como la suma de tres enteros sólo puede ser par si al menos uno de ellos es par, y son primos, el menor de los tres números, a, debe ser necesariamente 2, y entonces b = 17, por lo que c + 3b = 59 + 3 ·17 = 110.

14. (D) La función $f(x)=x\cdot sen(x)$ es la única de las cinco que es par, es decir, que cumple $f(-x)=f(x), \forall x\in\Re$, que es la condición para que resulte simétrica respecto del eje OY.

15. (B) Sea n el número de chicas en bachillerato en mi centro el año pasado; el número de chicos era 30 + n, y el número total de estudiantes era 30 + 2n.
Así podemos plantear la ecuación: $1{,}05\cdot\left(30+n\right)+1{,}2n=1{,}1\cdot\left(30+2n\right)$, de donde se despeja n = 30. El número de estudiantes que había el año pasado es 90, y el de este año es 99.

16. (D) El coeficiente b coincide con la suma de las soluciones de la ecuación cambiada de signo, y el término independiente, 80, con el producto. Como 80 tiene diez divisores de los cuales tres parejas de ellos son pares y complementarios (2 y 40, 4 y 20, 8 y 10), hay tres posibles valores para b (– 42, – 24 y –18).

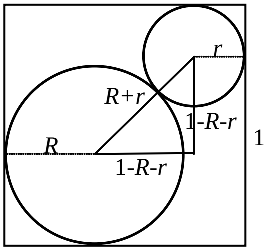
17. (D) $\left(4^4\right)^x = 8^8 \quad \Rightarrow \quad 2^{8x} = 2^{24} \quad \Rightarrow \quad 8x = 24 \quad \Rightarrow \quad x = 3$.

18. (C)

	Resuelven	**No resuelven**	
Chicas	y	x	$\boldsymbol{x+y}$
Chicos	x		
	$\boldsymbol{x+y}$		

19. (D) Obsérvese en la figura el triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden $1-(R+r)$ y cuya hipotenusa mide $R+r$.

Por tanto $R+r = [1-(R+r)]\sqrt{2}$, y despejando $R+r$, tenemos, $R+r = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{2-1} = 2-\sqrt{2}$



20. (D) Si a y b son las soluciones de la ecuación $x^2 - 3x + 1 = 0$, entonces se cumple que $a^2 = 3a - 1$, $b^2 = 3b - 1$, $a + b = 3$ y $a \cdot b = 1$, de modo que

$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) = 3(3a - 1 - 1 + 3b - 1) = 3(3 \cdot 3 - 3) = 18$.

21. (C) Si n es la edad de Ana, la edad de Pablo será múltiplo de la de Ana tantas veces como n sea divisor de 20, es decir, 6, que es el número de divisores de 20. Obsérvese que $\dfrac{n+20}{n} = 1 + \dfrac{20}{n}$.

22. (D) Si $f(g(x)) = x$ entonces $\dfrac{2g(x)}{3g(x)+4} = x \quad \Rightarrow \quad 2g(x) = 3xg(x) + 4x \quad \Rightarrow \quad g(x) = \dfrac{4x}{2-3x}$.

23. (B) La probabilidad de que gane cada uno de los tres se puede calcular sumando los infinitos términos de una progresión geométrica cuya razón es, para los tres, $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{18}$. En el caso de Ana el primer término es $\dfrac{1}{2}$, y la probabilidad de que gane es $\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{5}{18}} = \dfrac{9}{13}$. En el caso de Beatriz, el primer término es $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$ y su probabilidad es $\dfrac{\frac{1}{6}}{1-\frac{5}{18}}=\dfrac{3}{13}$. Por último en el caso de Carlos, el primer término es $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{18}$ y la probabilidad de que gane es $\dfrac{\frac{1}{18}}{1-\frac{5}{18}}=\dfrac{1}{13}$.

24. (C) Si las aristas del ortoedro forman una progresión geométrica de razón $q=2$, las aristas serán, $a, a\cdot q, a\cdot q^2$; es decir, $a, 2a, 4a$, y el volumen será $8a^3$, siendo a entero. El resultado debe ser un cubo perfecto, y el único cubo perfecto que aparece entre las soluciones es 216 = 6^3.

25. (B) Si $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{yz+xz+xy}{xyz}=0$ entonces $yz+xz+xy=0$

Como $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)$, tenemos que $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2=1^2=1$.

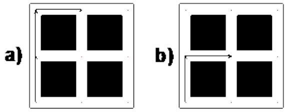
XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel I

1. (D) $60 \times 60 = (30 \times 2) \times (20 \times 3) = 30 \times 20 \times (2 \times 3)$.

2. (B) En las cajas tendrá $30 - 6 = 24$ cochecitos, de modo que en cada una de las 6 cajas habrá 4 cochecitos.

3. (E) Notemos en primer lugar que, por razones de simetría respecto a la diagonal *AB*, no es necesario calcular mas que la mitad de los recorridos. Nosotros elegiremos los que comienzan hacia arriba y, además tomaremos dos formas *fundamentales* de empezar:



a) Da origen a: 1) ↑↑→→ 2) ↑↑→↓→↑ y 3) ↑↑→↓↓→↑↑

b) Da origen a: 4) ↑→↑→ 5) ↑→→↑ 6) ↑→↓→↑↑ 7) ↑→↓→↑←↑→

y 8) ↑→→↓←↑↑→

En consecuencia, Inés puede hacer 16 recorridos distintos.

4. (D) Los posibles resultados del segundo tiempo son:

Real Primavera	3	2	1	0
Atlético Matemático	0	1	2	3

y como en el primer tiempo iban 1 a 0 a favor del Real, los posibles resultados finales son:

Real Primavera	4	3	2	1
Atlético Matemático	0	1	2	3

Por lo que el Real no pudo ganar por un gol.

5. (B) Teniendo en cuenta que 3000 dividido entre 325 da 9 de cociente y 75 de resto, don Caracol emplea 9 días en recorrer 3 km menos 75 metros. Por tanto necesitará un día más para completar los 3000 m y como sale un lunes y emplea, en el recorrido, 9 días y parte del décimo, entonces llegará un miércoles.

6. (E) Si Ana tiene 3 butacas delante y 18 detrás, quiere decir que hay $3 + 1 + 18 = 22$ filas y como Juanito tiene 8 butacas aun lado y 11 al otro, tendremos $8 + 1 + 11 = 20$ columnas, es decir, habrá $20 \times 22 = 440$ butacas.

7. (B) Está claro que se conseguirá el contorno más corto uniendo los bloques por su lado más largo y logrando, además, la máxima longitud de contacto bloque con bloque. Dado que las respectivas longitudes de los bloques son 2, 3 y 4, tendremos que el máximo contorno que podremos ocultar, poniendo las piezas en contacto, es:
$2 \times 2 + 3 \times 2 = 10$.
Como, por otra parte, la suma total de los contornos es $6 + 8 + 10 = 24$, tendremos que el contorno más corto es $24 – 10 = 14$.

8. (B) Dado que ninguno nació el 29 de febrero, es posible, aunque poco probable, que todos hayan nacido el mismo día. En cuyo caso no felicitará a nadie 364 días que, obviamente, es el máximo número posible de no felicitaciones.

9. (D) Se trata de usar correctamente la jerarquía de las operaciones. La D) proporciona el menor valor (3).

10. (E) Contando triángulos y divisiones de las ruletas obtenemos, respectivamente, las siguientes probabilidades:
$\frac{6}{10}, \frac{4}{6}, \frac{8}{12}, \frac{3}{5}$ y $\frac{6}{8}$ o, lo que es igual: $\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}$ y $\frac{3}{4}$.
Si una de ellas es la mayor, ésta debe ser forzosamente $\frac{3}{4}$, no obstante vamos a comprobarlo: es evidente que $\frac{3}{4}$ es mayor que $\frac{3}{5}$ y, reduciendo a común denominador $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{3}$ obtenemos: $\frac{9}{12}$ y $\frac{8}{12}$, por lo que, como era de esperar, la ruleta E da la máxima probabilidad.

11. (D) Contando los bailarines en el sentido numérico creciente, tenemos que entre el 3 y el 15 habrá $15-3-1=11$ bailarines. Simétricamente, entre el bailarín 15 y el 1 tendremos otros 11. Por tanto, en total tendremos $11+11+2=24$ bailarines.

12.(D) Como Paz consigue un 24 y $24=2\times2\times2\times3$, el resultado de los tres dados sólo puede ser o (2, 4, 3) ó (2, 2, 6) ó (4, 6, 1), con lo que Puri obtendría respectivamente: $2+4+3=9$ ó $2+2+6=10$ ó $4+6+1=11$. El mayor número que puede obtener Puri es 11.

13. (C) Si el conejo come x zanahorias en un día, el caballo, en el mismo tiempo, debe comer $7x$, con lo que entre los dos comerán diariamente $8x$. Dado que entre ambos comen diariamente 56 zanahorias, el conejo comerá $\frac{56}{8}=7$.

14.(D) El número de casos posibles es $6\times 6=36$ y el de casos favorables $2\times 1=2$. Por consiguiente, la probabilidad pedida será: $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$.

15. (D) Si cortamos tres barras en cuartos y cuatro en tercios, tendremos doce trozos iguales de un cuarto y otros doce de un tercio, con lo que el reparto entre doce es inmediato; un trozo de un cuarto y otro de un tercio para cada uno de los doce. El método correcto es el D.

16. (D) Nos dicen que el producto de dos números naturales, *a y* (*a* + *b*) da como resultado 12, pero 12 se puede poner como producto de dos números únicamente de las tres formas siguientes:
$1\cdot(12)=12$, $2\cdot(6)=12$ y $3\cdot(4)=12$, que escritos en la forma $a\cdot(a+b)$ quedan como:
$1\cdot(1+11)=12$, $2\cdot(2+4)=12$ y $3\cdot(3+1)=12$, es decir, solo con las tres parejas, (1, 11), (2, 4) y (3, 1), la operación, da como resultado 12.

17. (A) Como Marta tiene 12 cubos de cada color, para completar los 5 pisos superiores, dispone todavía de 4 cubos rojos, 5 azules y 6 verdes. Para el 4º piso tiene que emplear, necesariamente, 5 cubos azules, con lo que le quedan solo 4 rojos y 6 verdes. Para el 5º piso podría usar los 4 rojos, pero entonces no podría completar la construcción, así que debe utilizar 4 cubos verdes, y le quedan 4 rojos y 2 verdes. Para el 6º piso gastará forzosamente 3 rojos; para el 7º, los 2 verdes que le restan y, finalmente, terminará el 8º piso con el cubo rojo que le sobraba.

18. (B) Para empezar construimos una tabla con los datos del problema; ponemos SI cuando ambos hablan un idioma común y NO en caso contrario.

A						
B	**SI**					
C	**SI**	**SI**				
D	**SI**	**SI**	**NO**			
E	**SI**	**NO**	**SI**	**SI**		
F	**NO**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	
	A	B	C	D	E	F

La tabla proporciona todas las parejas posibles, de forma que puedan hablar entre si las dos personas de cada pareja.

(A, B)				
(A, C)	(B, C)			
(A, D)	(B, D)	(C, E)	(D, E)	
(A, E)	(B, F)	(C, F)	(D, F)	(E, F)

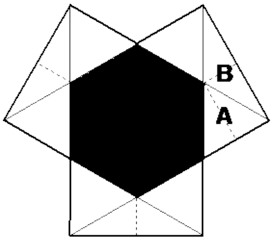
Ahora no queda sino rastrear sistemáticamente esta tabla de parejas, para separar a las seis personas, en tres grupos de dos, de todas las formas posibles.

Comenzando con (A, B): (A, B), (C, E), (D, F) y (A, B), (C, F), (D, E)
Con (A, C): (A, C), (B, D), (E, F) y (A, C), (B, F), (D, E)
Con (A, D): (A, D), (B, C), (E, F) y (A, D), (B, F), (C, E)
Con (A, E): (A, E), (B, C), (D, F) y (A, E), (B, D), (C, F)

Tenemos pues, ocho formas de separarlos.

Nota. Se puede llegar a esta solución, de forma menos explícita, teniendo en cuenta que uno de los ejecutivos, por ejemplo el A, sólo puede estar con otro de cuatro casos posibles; en este caso con B, C, D y E. En cada uno de estos casos quedan dos formas de agrupar los cuatro restantes. En total $4 \times 2 = 8$.

19. (C) Seccionando la figura como se ve en la imagen, observamos en primer lugar que los triángulos equiláteros, A, tienen la misma área que los triángulos isósceles, B. Contemos entonces los triángulos que forman la figura; 6 en el hexágono, más $3 \times 3 = 9$ en el exterior, lo que arroja 15 triángulos de igual área en total. Tenemos entonces que cada triángulo tiene un área de $\frac{40}{15}$ cm^2, por lo que el área del hexágono será: $\frac{40}{15} \times 6 = 16$ cm^2.



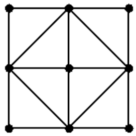
20. (E) Basta darse cuenta de que el señor Naranjo compra, en total, 4 manzanas, 4 peras y 4 plátanos y paga por ellos $154 + 170 = 324$ céntimos. Por lo tanto, por una pera, una manzana y un plátano, pagará $\frac{324}{4} = 81$ céntimos.

21. (A) Construyamos una tabla con todos los resultados y las distintas posibilidades de obtenerlos.

	Suma	Posibilidades
Ana	4	1+3
Bea	11	2+9, 3+8 …
Carlos	12	3+9 …
Dani	13	4+9…
Elena	15	6+9…

Vemos que, con estos resultados, cualquiera menos Ana ha podido sacar la carta con el 9 o, incluso, no sacarla nadie. En consecuencia, no se puede saber.

22. (C) En la figura se muestran los 6 cuadrados que se pueden dibujar: el cuadrado mayor, el formado con lo puntos medios de los lados del anterior y los cuatro pequeños.

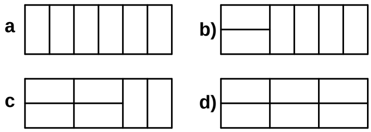


23.(A) Según muestra el diagrama, la cuarta parte de los helados eran de fresa, por lo que en total se vendieron 240 (4 × 60). De los 180 restantes la mitad eran de vainilla y la otra mitad, 90, de chocolate.

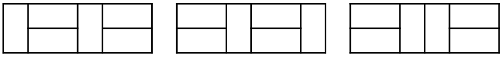
24. (D) El número de palabras del libro será aproximadamente: $256 \times 33 \times 9 = 76\ 000$, de modo que la respuesta es la D.

25. (D) Comencemos por las cuatro formas básicas de conseguir un muro de 6 cm de largo:

a) todos los ladrillos verticales
b) 2 ladrillos horizontales
c) 4 ladrillos horizontales
d) los 6 ladrillos horizontales.



Vemos que a) y d) solo se pueden colocar de una forma. Sin embargo, b) se puede colocar de 5 formas distintas; intercalando los 2 ladrillos horizontales entre los verticales hasta llegar a colocarlos a la derecha del muro y, por último, c) se puede poner de 3 formas; intercalando, juntos, los 4 horizontales entre los 2 verticales hasta llegar a colocarlos a la derecha del muro y, de otras 3 más, si permitimos separar los ladrillos horizontales según la figura siguiente:

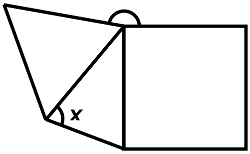


Por lo tanto, tenemos $2+5+6=13$ maneras distintas de hacer el muro.

XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel II

1. (D) El ángulo de 172º junto con uno de 60º, uno de 90º y el ángulo desigual de nuestro isósceles suma 360º. Así el ángulo desigual mide 38º, y por tanto 2x =180º-38º = 142º, siendo x = 71º.



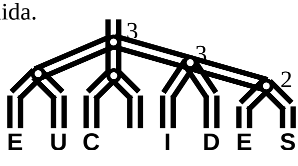
2. (B) Primero deducimos que **A** es 1, **M** es 0 y **R** es 9, ya que al quitar un número de dos cifras a uno de cuatro se obtiene uno de tres. Así **R** – **A** = 8 = **S** y E es el resultado de restar 11 menos 9.

$$\begin{array}{rcccc} & A & M & A & R \\ - & & & R & A \\ \hline & & R & E & S \end{array}$$

3. (A) El primer foco puede dar luz de tres colores diferentes. Encendido el primero, el segundo puede tener dos colores solamente para no coincidir con aquel. Y el tercero también puede lucir de los dos colores que no sean el del segundo. Así tenemos tres comienzos que pueden bifurcarse en dos continuaciones y a su vez volverse a bifurcar en otras dos. Luego hay 3 · 2 · 2 =12 "caminos".

4. (B) Laura suma los números *a*, 2*a*, 3*a*,..., 9*a*, 10*a*. Patricia los números (*a* + 1), 2(*a* + 1), 3(*a* + 1),…, 9(*a* + 1), 10(*a* + 1). Las diferencias uno a uno son 1, 2, 3, …, 9, 10; ; luego la diferencia de las sumas es: 1 + 2 + 3 +…+ 9 + 10 = 55.

5. (A) Asignamos a cada nudo relacionado con S el número de caños que salen de él. Después basta con ir dividiendo los caudales de entrada por esos números hasta llegar a la salida.



Así los 108 litros después del trayecto se habrán dividido por (3 · 3 · 2).

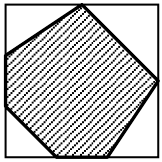
6. (A) El nuevo número secreto es $p + 7 - (q - 3 - (r + 2))$ que puede ser separado como $p - (q - r) + 7 + 3 + 2$, luego este número es 12 unidades mayor.

7. (E) El número de piezas leguminosas se mantiene constante con los redobles del tambor. Como hay 1560, cuando se igualen tendremos 520 de cada tipo. Pero los guisantes aumentan de uno en uno y empiezan en 360. Luego habrá que dar 160 golpes de tambor.

8. (E) Para ser *veinte-once* tenemos cuatro posibilidades para las dos primeras cifras (20, 40, 60 y 80) y diez para las dos últimas (los múltiplos de 11 de dos cifras, incluyendo al 00), luego en total hay $4 \cdot 10 = 40$ *veinte-onces.*

9. (A) En el tiempo que tardan en encontrarse, una hormiga (la que camina en el sentido de las agujas del reloj avanza siete “horas” y la otra retrocedido cinco. Después de 99 encuentros después del primero habrá avanzado 693 “horas” que divididas entre 12 dan un resto de 9. Así como en el primer encuentro estaba en las tres, en el centésimo estará en las doce

10.(C) Como el cuadrado tiene una unidad de área, el lado del cuadrado tiene una unidad de longitud. Buscaremos el área del hexágono como complementaria a la de los triángulos rectángulos exteriores a aquel. Así:

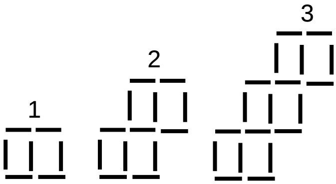


$$A = 1-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{47}{72}.$$

11.(B) Francisco tendrá que dibujar rectángulos de lados a y b, siendo $a + b = 445$. Para ello tendrá que dibujar desde que el lado menor valga 1 hasta que valga 222.

12.(E) Podemos parafrasear las decisiones de don Retorcido. Impar significa que lleva corbata y vaqueros, y par que no lleva corbata ni vaqueros. Es decir o las dos piezas a la vez o ninguna de las dos. Luego no son posibles las combinaciones DOS y TRES.

13.(C) Fijémonos que una escalera añade a la anterior un escalón que se traduce en seis palillos. Cuando tengamos 148 escalones habremos añadido $147 \cdot 6 = 882$ palillos a los 7 iniciales.



14.(A) Uno menos un tercio son dos tercios y la mitad es un tercio, luego A es un tercio. Uno menos un medio es un medio y la tercera parte un sexto. Así B es un sexto.

$$\frac{A-B}{A\cdot B}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{18}}=3$$

15.(D) Las chicas compraron 10 pasteles y por tanto los chicos 22. Se trata de emparejar los números del 1 al 4 con ellos mismos, calcular el producto de cada pareja y sumar los resultados para obtener suma 22. Habrá que tantear un poco. Por tamaño un 4 no puede emparejarse consigo mismo ni con el 3. Con, $4\cdot1+3\cdot3+2\cdot4+1\cdot2=23$ nos pasamos y con $4\cdot1+3\cdot2+2\cdot4+1\cdot3=21$ no llegamos. $4\cdot2+3\cdot1+2\cdot4+1\cdot3=22$, y las parejas de novios son: Bárbara y Héctor, Cati y Fermín, Ana y Eugenio, Daniela y Gerardo (el poder resolver el problema conlleva la simetría de la solución).

16.(A) Al llevarse desde la 11 hasta la 26, se ha llevado las dos de en medio, que son las medias por defecto y exceso de 11 y 26; es decir 18 y 19. Luego la mitad del periódico es hasta la página 18, y tiene por tanto 36 hojas.

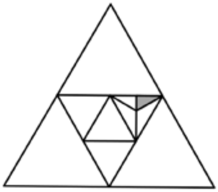
17.(C) Traducimos a ecuaciones las condiciones del problema y simplificamos:

$$\begin{cases}3a+2p+5c=2a+3p+3c\\1a+2p+3c=2a+2p+1c\end{cases};\qquad\begin{cases}a+2c=p\\2c=a\end{cases}.$$

La segunda ecuación dice que un anillo pesa el doble que un collar, y la primera que un pendiente pesa igual que un anillo y dos collares.

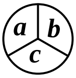
18.(D) Los números obtenidos, si son pares, al quitarles 4 y multiplicarles por 2 deben ser producto de consecutivos, e igual los impares, al sumarles 4 y multiplicarles por 2. 10 – 4 = 6; 6 · 2 = 3 · 4; 11 + 4 =15; 15 · 2 = 5 · 6; 41 + 4 =45; 45 · 2 = 10 · 9; 46 - 4 = 42; 42 · 2 = 84; 51 + 4 =55; 55 · 2 = 10 · 11.

19.(B) Hay que contar el número de parejas distintas a formar. Cada enanito puede formar pareja con otros seis, y así parece que hay 7 · 6 = 42 parejas, pero hemos contado de más pues cada pareja ha sido contada dos veces.



20.(E) La cara de don Retorcido se ha obtenido empezando por dividir un triángulo equilátero en cuatro iguales. El triángulo central se ha vuelto a dividir en cuatro partes iguales y la zona sombreada es un sexto de una de ellas. Así que le corresponde: $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{96}$

21.(C) Se trata de obtener 108 como producto de dos naturales lo más parecido posible. Descomponemos 108 en factores primos: $108 = 2^2 \cdot 3^3$. La factorización más equilibrada en dos factores es 12 · 9. Hay que dividir el rectángulo en doce filas y 9 columnas (o viceversa). Para ello emplearemos 11 rectas paralelas a un lado y ocho al otro. En total 19 rectas.

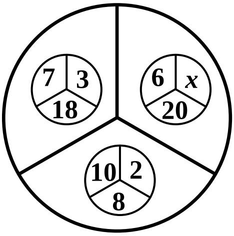
22.(D) 

$= a \cdot b - c$; 

$= 7 \cdot 3 - 18 = 3$; 

$= 6x - 20$;

$= 10 \cdot 2 - 8 = 12$;



$= 3 \cdot (6x\text{-}20) - 12 = 18x - 72 = 0$; $x = 4$

23.(C) Si la base de una pirámide tiene n vértices, la pirámide tiene 2n aristas y viceversa. Luego si tiene 28 aristas su base es un polígono de 14 vértices. La pirámide, al añadir la cúspide, tiene 15 vértices.

24.(A) El menor número capicúa de cuatro cifras múltiplo de 4 acabará en 2 (la menor terminación par no nula). Luego vemos que la terminación debe ser 12 y el número es 2112. El mayor número capicúa de cuatro cifras acabará en 8, y después debe hacerlo en 88, siendo el número 8888. la diferencia de ambos números es 6776.

25.(E) El robot tardará 15 · 2 · · 4 · 25 · 5 = 15 000 minutos.
15 000 minutos = 250 horas = 10 días y 10 horas.

XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel III

1. (B) Si las dimensiones del rectángulo inicial son $a \times$ b, las del nuevo rectángulo serán $1{,}1\cdot a \times 0{,}9\cdot b$ y su área $0{,}99\cdot ab$ lo que supone un 99% del área original.

2. (D) De las 64 casillas del tablero 28 están en el borde. La probabilidad de escoger una de las 36 restantes es $\frac{36}{64} = \frac{9}{16}$.

3. (B) Un número es múltiplo de 3 si lo es la suma de sus cifras. Así pues, debemos escoger tres de esos números de forma que su suma sea múltiplo de 3: (1, 2, 3) y (1, 3, 5). Como con cada una de las ternas podemos formar 6 números distintos, habrá 12 números en total.

4. (B) Observa que en la descomposición en factores primos de un cuadrado todos los primos deben estar elevados a una potencia par y, en la de un cubo, todas las potencias deben ser múltiplos de 3.
Como $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, para completar al menor cuadrado hacen falta un 2 y un 5 y para el menor cubo, un 3 y dos 5.
Así pues, $x = 2 \cdot 5 = 10$, $y = 3 \cdot 5^2 = 75$ y $x + y = 85$.

5. (D) Si llamamos N a la suma de los 3000 números, $A = \frac{N}{40}$ y $B = \frac{N}{75}$.

Así pues $\frac{A}{B} = \frac{N}{40} : \frac{N}{75} = \frac{75}{40} = \frac{15}{8}$.

6. (E) Observando las unidades de la suma, como $B + A = A$, deducimos que $B = 0$. Ahora, de las unidades de la resta deducimos que $A = 5$ y, de las decenas de la resta, que $C = 4$. Por lo tanto, $D = 9$.

7. (B) Si llamamos a al lado de los cuadrados pequeños, el lado del cuadrado grande, que coincide con el lado mayor del rectángulo, es $4a$ y el lado pequeño del rectángulo es $4a - a = 3a$. El cociente pedido es 4/3.

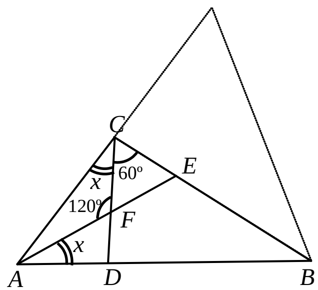
8. (E) Como $2\pi r = 24\pi$, el radio de la circunferencia es 12 y su área, $12^2\pi = 144\pi$. Así pues, $t = 144$.

9. (D) Si durante todo el periodo hubiera tenido la misma edad, esta sería 630: 50 = 12,6. Como esto no es posible, en el primer periodo tenía 12 años y en el segundo, 13 años.

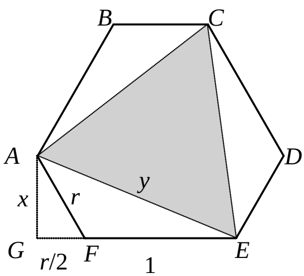
10.(E) Como x + 32 tiene cuatro cifras, $x \geq 968$ y. por tanto es de la forma 9a9 donde a puede valer 6, 7, 8 ó 9. Probando, vemos que x + 32 es capicúa sólo si a = 6. Por tanto, x = 969 y la suma de sus cifras es 24.

11.(A) Como paró 20 minutos, que son 1/3 de hora, en total Alicia estuvo conduciendo 3 – 1/3 = 8/3 de hora. En el primer tramo recorrió 80t kilómetros y, tras la parada, $100\left(\frac{8}{3}-t\right)$. Así pues, $80t+100\left(\frac{8}{3}-t\right)=250$.

12.(C) Llamamos x al ángulo $A\hat{C}D$ y anotamos en un dibujo los datos que nos dan. El ángulo $A\hat{F}C = 120^{\circ}$ por ser el suplementario de $C\hat{F}E = 60^{\circ}$. Observando el triángulo ACF deducimos que $C\hat{A}F = 60^{\circ}-x$, por tanto, $C\hat{A}B = 60^{\circ}$. Ya casi estamos. Como AB es el doble de AC y $C\hat{A}B = 60^{\circ}$, el triángulo ABC es “la mitad” de un triángulo equilátero cortado por su altura. Así pues, $A\hat{C}B = 90^{\circ}$ **.**



13.(E) Todos los ángulos del hexágono miden 120º y el triángulo gris es equilátero. Además, los tres triángulos blancos son iguales y el área del triángulo gris es 7 veces mayor que el área de los triángulos blancos.



Calculemos dichas áreas. En primer lugar calculamos la altura x del triángulo AEF aprovechando que el triángulo AGF es la mitad de un triángulo equilátero (pues el ángulo

$A\hat{F}G = 180º - 120º = 60º$). $x = \frac{\sqrt{3}}{2}r$ y el área de los triángulos blancos es $\frac{\sqrt{3}}{4}r$. Utilizando ahora el triángulo rectángulo *AEG* podemos calcular el lado del triángulo gris y su área: $y^2 = \left(1+\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}r\right)^2 = r^2 + r + 1$. El área del triángulo equilátero gris es $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(r^2 + r + 1\right)$.

Finalmente planteamos la ecuación $7\frac{\sqrt{3}}{4}r = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(r^2 + r + 1\right) \Rightarrow r^2 - 6r + 1 = 0$. La suma de sus soluciones es 6.

14.(B) En un mes de 31 días hay cuatro semanas completas (con sus lunes y sus miércoles) y tres días más. Para que el lunes y el miércoles aparezcan la misma cantidad de veces en el mes, deben aparecer ambos una vez o ninguna en los tres últimos días. Si el mes empieza en lunes, el 29 será lunes y el 31 miércoles. Si empieza en jueves o viernes, entre el 29 y el 31 no habrá ni lunes, ni miércoles. Sin embargo, si empieza en martes o miércoles habrá cinco miércoles y cuatro lunes y si empieza en sábado o domingo, habrá cinco lunes y cuatro miércoles. Así pues, el mes debe empezar en lunes, jueves o viernes.

15.(D) Aplicando Pitágoras, obtenemos que la altura sobre el lado desigual del triángulo isósceles es 8 y, por tanto, su área es 48.
El otro lado del rectángulo debe ser 48:4 = 12 y su perímetro es 32.

16.(E) Como tanto el precio de la entrada como el número de alumnos que asisten son números enteros, el precio de la entrada debe ser un divisor común de 48 y 64. La lista de todos los divisores comunes es: 1, 2, 4, 8 y 16. Así pues, hay 5 valores posibles para *x*.

17.(D) La expresión sin paréntesis es $a - b - c - d + e$ y, si aplicamos la propiedad distributiva para quitar paréntesis, tenemos $a - \left(b - \left(c - \left(d + e\right)\right)\right) = a - b + c - d - e$.
Para que $a - b - c - d + e = a - b + c - d - e$ debe ser $e = c$ y, por tanto, e = 3.

18.(C) Comencemos pasando los minutos a horas: 40 minutos = 2/3 de hora. Si llamamos t al tiempo (en horas) que Miguel condujo con lluvia, tenemos que $45\left(\frac{2}{3}-t\right)+30t=24$ cuya solución es $t=\frac{2}{5}=\frac{24}{60}$ horas, es decir, 24 minutos.

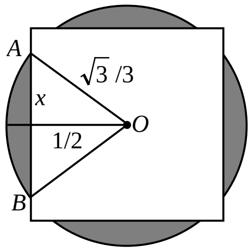
19.(D) Pensemos que hay 100 alumnos. El máximo número de cambios se dará si todos los que dijeron que *no* después dicen que *sí* y 30 de los que dijeron que *sí* dicen que *no*, esto es: 80. El mínimo número se dará si todo los que dijeron que *sí* se mantiene y 20 de los que dijeron que *no* ahora dicen *sí*. Entonces, la diferencia es 80 – 20 = 60.

20.(C) Comencemos estudiando $|60-2x|=\begin{cases}60-2x & \text{si } x<30\\ 2x-60 & \text{si } x\geq 30\end{cases}$

Por tanto, $\left|2x-|60-2x|\right|=\begin{cases}|4x-60| & \text{si } x<30\\ 60 & \text{si } x\geq 30\end{cases}=\begin{cases}60-4x & \text{si } x<12\\ 4x-60 & \text{si } 12\leq x<30\\ 60 & \text{si } x\geq 30\end{cases}$

De la primera parte obtenemos x =60 – 4x si x < 30, que nos da la solución x = 12.
De la segunda, x = 4x – 60 y 12 ≤ x < 30, nos da la solución x = 20.
De la tercera, x = 60 si x ≥ 30 tenemos x = 60.
La suma de todas las soluciones es 12 + 20 + 60 = 92.

21.(B) La situación es la que muestra la figura y debemos hallar el área de la zona gris. Comenzamos calculando el valor de x:



$x^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{12}$. Así pues,

$x=\sqrt{\frac{1}{12}}=\sqrt{\frac{12}{12^2}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$. ¡Estamos de suerte! El triángulo AOB es equilátero y, por tanto, el área del sector circular AOB es 1/6 del área del círculo.

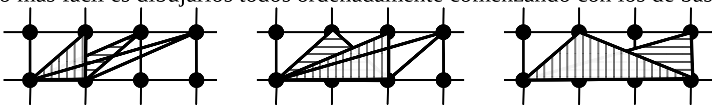
El área gris es $4\cdot\left(\frac{1}{6}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-\frac{\sqrt{3}/3\cdot 1/2}{2}\right)=4\cdot\left(\frac{\pi}{18}-\frac{\sqrt{3}}{12}\right)=\frac{2\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

22.(B) Si hay N centros, en total participan $3N$ estudiantes.
Como Carolina ocupa la 64ª posición, debe ser $3N \geq 64$, es decir, N > 21.
N debe ser impar pues todas las puntuaciones son distintas y una de ellas es la mediana. Así pues, Alicia ocupa el puesto $\frac{3N+1}{2}$ y, como obtuvo más puntos que Beatriz, debe ser $\frac{3N+1}{2} < 37$ por lo que $N \leq 24$.
Solo el 23 cumple las tres condiciones: es impar y $21 < N \leq 24$.

23.(E) Los capicúas de cuatro cifras son de la forma "*abba*" donde a puede tomar valores del 1 a 9 y b del 0 a 9. En total hay 90 números capicúas entre 1000 y 10000.
Para ver cuántos son múltiplos de 7 escribamos el valor del número
$1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b = 7\cdot 143a + (7\cdot 15 + 5)b =$
$= 7\cdot 143a + 7\cdot 15b + 5b$. Para que este número sea múltiplo de 7, $5b$ debe ser 0 o múltiplo de 7. Es decir b= 0 o b = 7. En total hay 18 números con esta condición. Así pues, la probabilidad de que sea múltiplo de 7 es $\frac{18}{90} = \frac{1}{5}$.

24.(D) Los números $-x^2$ y -2^x son negativos para cualquier valor de x. Los números $\frac{x}{|x|}$ y $\sqrt[3]{x}$ tiene el mismo signo de x, luego, en nuestro caso, son negativos. Así que solo nos queda $-x^{-1}(1-x)$. Comprobemos que es cierto: Si x es negativo $x^{-1} = \frac{1}{x}$ es negativo y $1-x$, positivo. Por tanto $-x^{-1}(1-x)$ es positivo.

25.(D) Lo más fácil es dibujarlos todos ordenadamente comenzando con los de base 1:



En total hay 3 + 3 + 2 =8 posibilidades.

XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel IV

1. (B) En primer lugar obsérvese que N ha de ser múltiplo de 675.

En efecto: $\left.\begin{array}{l} 272758 = k \cdot N + 13 \\ 273437 = k' \cdot N + 17 \end{array}\right\} \Rightarrow 679 = k'' \cdot N + 4 \Rightarrow N \cdot k'' = 675$

Como N es un divisor de dos cifras de 675 mayor que 17, las posibilidades son 25, 27, 45 y 75. Pero si fueran 25 ó 75, los restos no podrían ser 13 y 17, sino 8 y 12 para 25, y 58 y 62 para 75. Por tanto N sólo puede ser 27 ó 45, y en los dos casos la suma de sus cifras es 9

2. (B) Si añadimos $\frac{1}{100!}$ a la suma pedida resulta 1, ya que

$$\left(\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{98}{99!}+\frac{99}{100!}\right)+\frac{1}{100!}=\left(\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{98}{99!}\right)+\frac{100}{100!}=$$

$$=\left(\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{98}{99!}\right)+\frac{1}{99!}=\ldots=\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}=1.$$

Por tanto nuestra suma vale $1-\frac{1}{100!}$

3. (E) $\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+x}} \Rightarrow \sqrt{2}=1+\frac{2+x}{4+2x+1}=\frac{3x+7}{2x+5} \Rightarrow x=\frac{7-5\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-3}=\sqrt{2}-1$.

4. (D) Recordando que conocidas la suma y el producto de las soluciones de una ecuación de 2º grado, *s* y *p*, podemos escribir la ecuación de la forma $x^2 - sx + p = 0$, si llamamos *s* a la suma de los dos números, que, como nos indican, coincide con su producto, *x* debe verificar la ecuación $x^2 - sx + s = 0$. Y de aquí, $s=\frac{x^2}{x-1}$

5. (B) $x+\sqrt{x^2+\sqrt{x^3+1}}=0 \Rightarrow x^2+\sqrt{x^3+1}=(-x)^2 \Rightarrow \sqrt{x^3+1}=0$, que tiene una única solución real, $x = -1$.

6. (B) $ab^3 \to 3\cdot 2^3 = 24$

$a^2b^3 \to ?$

$ab^2c^3 \rightarrow 3 \cdot 1^2 \cdot 2^3 = 24$
$a^c b^c \rightarrow 3^1 \cdot 8^1 = 24$
$a^b b^c c^a \rightarrow 1^2 \cdot 2^3 \cdot 3^1 = 24$.

7. (E) Sean los puntos O(0,0), P(x,1), Q(y,3), R(z,4) y S(10,7). La expresión pedida coincide con la suma de las distancias d(O,P) + d(P,Q) + d(Q,R) + d(R,S), que es mínima cuando los cinco puntos están alineados. En ese caso la suma coincide con la distancia entre O y S, es decir $d(O,S) = \sqrt{(10-0)^2 + (7-0)^2} = \sqrt{149}$

8. (E) Si el producto de las edades supera en 113 el producto de las edades hace un año, llamando x, y, z a las edades de los tres tenemos:
$xyz = (x-1)(y-1)(z-1) + 113 \Rightarrow xy + xz + yz = x + y + z + 112$.
Como nos indican que $x + y + z = 23$
y sabemos que $x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy + xz + yz)$,
podemos escribir $x^2 + y^2 + z^2 = 23^2 - 2 \times (23 + 112) = 529 - 270 = 259$

9. (C) En primer lugar observamos que 2012 es el 668º término de una progresión aritmética que comienza en 11 y tiene diferencia 3: 2012 = 11 + 667 · 3.

Por otro lado $f(11) = 11;\ \ f(14) = \frac{5}{6};\ \ f(17) = \frac{-1}{11};\ \ f(20) = \frac{-6}{5};\ \ f(23) = 11 \ldots etc$

Esto implica que si a_n es un término de la p. a. 11, 14, 17, 20,…

$$f(a_n) = \begin{cases} 11 & si\ n = 4k-3 \\ \frac{5}{6} & si\ n = 4k-2 \\ \frac{-1}{11} & si\ n = 4k-1 \\ \frac{-6}{5} & si\ n = 4k \end{cases} \quad k \in N \ .$$

Como 2012 = a_{668} y 668 = 4·k (k = 167), $f(2012) = \frac{-6}{5}$

10. (A) Si $f(f(x)) = 6x - 2011$ entonces $f(x) = 6f^{-1}(x) - 2011$.

Como $f(t) = 6t - 2011$ entonces $t = f^{-1}(t) = \frac{t + 2011}{6} \Rightarrow t = \frac{2011}{5}$

11. (C) Obsérvese que en cualquier sucesión, conocida la expresión general de la suma de los n primeros términos, es posible calcular a_n restando $S_n - S_{n-1}$. Si $S_n = n^3 + 3$ entonces $a_{10} = S_{10} - S_9 = 1003 - 732 = 271$.

12. (E) El mayor valor posible para la expresión se consigue sustituyendo el primer símbolo ♣ por un signo + y el resto de símbolos ♣ por el signo ×. El valor obtenido para N es 10! + 1, que no es divisible por 2 ni por 3 ni por 5 ni por 7, pues da resto 1 al dividirlo por cada uno de esos cuatro números primos.

13. (E) Si n^2 debe ser cubo perfecto y n^3 cuadrado perfecto y $n = 20 \cdot k$, el valor mínimo para k es $2^4 \cdot 5^5$, de modo que $n = 2^6 \cdot 5^6 = 1000000$, que tiene 7 cifras.

14. (D) Obsérvese que $\log_{2^n} x^n = \dfrac{\log_2 x^n}{\log_2 2^n} = \dfrac{n \log_2 x}{n} = \log_2 x$. Así pues:

$$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{x} + \log_2 x + \log_4 x^2 + \log_8 x^3 + \log_{16} x^4 = 40 \Rightarrow$$

$$\log_2 x + \log_2 x + \log_2 x + \log_2 x + \log_2 x = 40 \Rightarrow$$

$$5\log_2 x = 40 \Rightarrow \log_2 x = 8 \Rightarrow x = 2^8 = 256$$

15. (C) La suma de un seno con un coseno sólo puede valer 2 si ambos valen 1.Para el coseno implica que el ángulo ha de ser 0º, mientras que para el seno, el ángulo ha de ser 90º. Por tanto

$$\left.\begin{array}{l} 2A - B = 0^{\circ} \\ A + B = 90^{\circ} \end{array}\right\} \Rightarrow A = 30^{\circ} \ y \ B = 60^{\circ}.$$

Como el triángulo ABC es rectángulo $BC = AC \cdot \cos(60^{\circ}) = 4 \cdot \dfrac{1}{2} = 2$.

16. (C) Observando los términos 3º y 4º, la diferencia de la progresión es $2b$. Por tanto $\begin{cases} a + 2b = 9 \\ 9 + 2b = 3a - b \end{cases}$. De aquí deducimos $a = 5$ y $b = 2$, de modo que la progresión es 5, 9, 13, 17,…

El término que ocupa el lugar 2011 es $a_{2011} = 5 + 4 \cdot 2010 = 8045$

17. (C) $7^{x+7} = 8^x \Rightarrow 7^x \cdot 7^7 = 8^x \Rightarrow \dfrac{8^x}{7^x} = 7^7 \Rightarrow \log_{\frac{8}{7}} 7^7 = x \Rightarrow b = \dfrac{8}{7}$.

18. (C) Los puntos de intersección de las dos curvas se consiguen resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=k^2 \\ x\cdot y=k \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+\dfrac{k^2}{x^2}=k^2 \Rightarrow$ $x^4-k^2x^2+k^2=0$. Esta ecuación no tiene solución si su discriminante es negativo, $k^4-4k^2<0$, lo que se cumple para los valores de k que verifiquen $k^2-4<0$. Hay tres valores enteros que cumplen dicha condición: – 1, 0 y 1; pero para $k = 0$ no existen las curvas, por tanto sólo hay 2 valores enteros para los cuales las curvas no se cortan, – 1 y 1.

19. (B) Según el teorema de la bisectriz, los segmentos determinados por la bisectriz interior sobre su lado opuesto son proporcionales a los lados correspondientes. Así $\dfrac{3}{c}=\dfrac{8}{a} \Rightarrow a=\dfrac{8c}{3}$.
Como nos piden que los lados sean enteros, el valor mínimo para c es 6. (3 no es posible porque no verifica la desigualdad triangular). Por tanto el valor mínimo posible para a es 16. Y el valor mínimo posible para el perímetro es:
11 + 6 + 16 = 33.

20. (D) Sea p la probabilidad de obtener cara con dicha moneda. La probabilidad de obtener en cuatro tiradas tantas caras como cruces es $p(2C,2X)=6\cdot p^2\cdot(1-p)^2$, que nos dicen vale $\dfrac{1}{6}$. Por tanto $p\cdot(1-p)=\dfrac{1}{6}$.
$6p^2-6p+1=0 \Rightarrow p=\dfrac{6-\sqrt{36-24}}{12}=\dfrac{6-2\sqrt{3}}{12}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$. Nota: En la solución de la ecuación se ha tenido en cuenta sólo el signo "–" porque el valor de p es menor que $\dfrac{1}{2}$.

21. (B) En primer lugar repartimos la mayor cantidad posible entre *a*, *c* y *e*. Para ello, dividimos 2011 entre 3, lo que da cociente 670 y resto 1. Como *b* y *d* deben ser positivos, asignamos 669 para *a*, *c* y *e* respectivamente y quedan 4 para repartir entre *b* y *d*. El mínimo valor del máximo de las sumas *a* + *b*, *b* + *c*, *c* + *d* y *d* + *e* resulta ser 669 + 2 = 671.

22. (E) La razón de la progresión se puede escribir como $\dfrac{\cos(x)}{sen(x)}$, y también como $\dfrac{tg(x)}{\cos(x)} = \dfrac{sen(x)}{\cos^2(x)}$. Por tanto, para el valor x, se cumple: $\dfrac{\cos(x)}{sen(x)} = \dfrac{sen(x)}{\cos^2(x)} \Rightarrow$ $\cos^3(x) = 1 - \cos^2(x) \Rightarrow \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \cos(x)$.

Los primeros términos de la progresión geométrica, simplificados a potencias de *sen*(x) y *cos*(x) son:

$$a_1 = sen(x), \quad a_2 = \cos(x), \quad a_3 = \frac{sen(x)}{\cos(x)}, \quad a_4 = 1, \quad a_5 = \frac{\cos(x)}{sen(x)},$$

$$a_6 = \frac{1}{\cos(x)}, \quad a_7 = \frac{1}{sen(x)}, \quad a_8 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Como el término 8º es $\dfrac{1}{\cos^2(x)}$, también es $1 + \cos(x)$.

23. (D). Las ternas que cumplen que hay dos valores y sólo dos iguales son de cuatro formas:

$\{1, 1, z\}$ de las que hay un total de 5×19 = 95.

$\{1, y, 1\}$ de las que hay un total de 5×19 = 95.

$\{x, 1, 1\}$ de las que hay un total de 15 = 15.

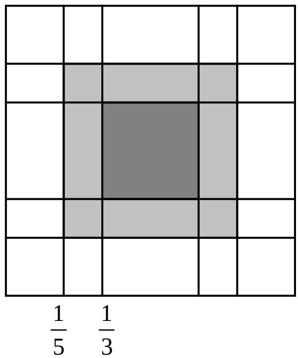
$\{x, 16, 16\}$ de las que hay un total de 20 = 20.

En total son 95 + 95 + 15 + 20 = 225 ternas

24. (A) .Obsérvese el cuadrado de la figura:

La probabilidad pedida es la probabilidad de que el punto se encuentre en la zona sombreada de color gris claro, que se puede calcular como cociente de áreas:

$$p = \frac{Area\ gris\ claro}{Area\ Total} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}{1} = \frac{9}{25} - \frac{1}{9} = \frac{56}{225}$$



25. (B) Para que el producto termine en 2 hay que eliminar todos los múltiplos de 5, que "fuerzan" la terminación a 0 ó 5. Estos son 20. De este modo quedan 10 números que terminan en 1, 10 en 2, 10 en 3, 10 en 4, 10 en 6, 10 en 7, 10 en 8 y 10 en 9, por lo que el producto termina en 6. Es necesario quitar un número que termine en 3 para que el producto termine en 2. En total, hay que borrar como mínimo 21 números.

Participantes y relación de ganadores del XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

En esta convocatoria del Concurso de Primavera la participación de estudiantes en la primera fase fue superior a 35000. De los 483 centros participantes se inscribieron 3679 estudiantes para la segunda fase aunque finalmente realizaron la prueba 3117. La estadística de participación por niveles y puntuaciones obtenidas puede consultarse en la página de la Sociedad Puig Adam así como la relación de todos los ganadores del concurso y la relación de los centros con mayor puntuación en cada uno de los niveles.

La distribución por niveles de los participantes en la segunda fase, que como siempre tuvo lugar en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, fue la siguiente:

	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
	5º P y 6º P	1º ESO, 2º ESO	3º ESO, 4º ESO	1º B, 2º B
nº de estudiantes	773	1092	807	445

Los tres ganadores en cada uno de los niveles fueron:

NIVEL I

1. Diego González Villar (5º Primaria) Colegio Mirabal. Boadilla del Monte
2. Andrés Ruiz Benito (6º Primaria) CEIP Federico García Lorca. Leganés
3. Hugo García González (5º Primaria) Colégio Padre Poveda. Madrid

NIVEL II

1. Álvaro Robledo Vega (2º ESO) Colegio Peñalar. Torrelodones
2. Berta García González (1º ESO) IES San Juan Bautista. Madrid
3. Álvaro Arenas González (1º ESO) Liceo Francés. Madrid

NIVEL III

1. Pablo Esteban de la Iglesia (4º ESO) Colegio Fray Luis de León. Madrid
2. Miguel Barrero Santamaría (3º ESO) IES Alameda de Osuna. Madrid
3. Guillermo Gutiérrez Cuenca (4º ESO) IES Ramiro de Maeztu. Madrid

NIVEL IV

1. Jaime Mendizábal Roche (1º Bchto) IES Ramiro de Maeztu. Madrid
2. Pablo Boixeda Álvarez (2º Bchto) Colegio Alemán. Madrid
3. Diego Peña Castillo (2º Bchto) Colegio Santa María del Yermo. Madrid

XI Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

19 de noviembre de 2011

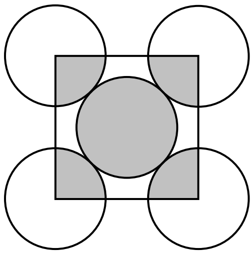
PRUEBA POR EQUIPOS (45 minutos)

1º y 2º de E.S.O.

1. Antonio escribe en la pizarra un número N de cinco cifras. Marta copia el número de Antonio y le añade un 1 a la derecha y obtiene un número de seis cifras. Elena toma también el número de Antonio y le añade un 1 a la izquierda, obteniendo otro número de seis cifras. Si resulta que el número que escribió Marta es el triple del que escribió Elena, ¿cuál era el número N que escribió Antonio?

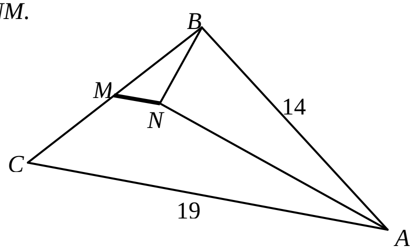
2. Encuentra todos los números enteros positivos "*a*", menores que 25, tales que $a \cdot (a+1) \cdot (a+2)$ sea múltiplo de 84.

3. Los cinco círculos de la figura tienen el mismo radio y se tocan como puedes observar. Los vértices del cuadrado son los centros de los cuatro círculos exteriores. ¿Cuál es el cociente entre el área de la zona sombreada y el área de la zona no sombreada ocupada por los cinco círculos?



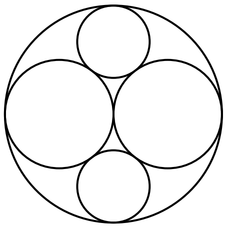
<u>3º y 4º de E.S.O.</u>

1. En el triángulo *ABC* de la figura, *M* es el punto medio del lado *BC*, *AN* es bisectriz del ángulo $\hat{A}$ y *BN* es perpendicular a *AN*. Si los lados *AB* y *AC* miden 14 y 19, respectivamente, calcula la longitud de *NM*.



2. Si $16^x - 16^y = 192$ y $4^x - 4^y = 8$, calcula el par (*x*, *y*).

3. En el dibujo de la figura hay cinco circunferencias: 2 pequeñas iguales, 2 medianas también iguales y una grande. Las dos medianas son tangentes entre sí, las dos pequeñas son tangentes a las medianas y la grande es tangente a las otras cuatro. Calcula el cociente entre el radio de las pequeñas y el radio de la grande.



Bachillerato.

1. Calcula la siguiente suma de 2011 sumandos en los que únicamente se utiliza la cifra 7. Cada sumando tiene una cifra más que el anterior.

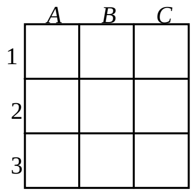
$$7 + 77 + 777 + 7\,777 + 77\,777 + \ldots + 777\ldots7$$

2. Completa este cuadro colocando en cada cuadrícula el dígito adecuado.
(Todas las respuestas son números de 3 cifras, por lo que no pueden empezar por cero)

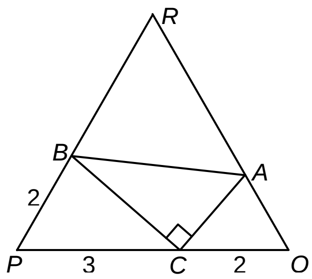
Horizontales:
1. Múltiplo de 8.
2. Factorial de cierto número.
3. Producto de primos consecutivos.

Verticales:

A. Múltiplo de 11.
B. Potencia de 2. (2^n en donde n es un entero positivo).
C. Múltiplo de 11.



3. El triángulo rectángulo *ABC*, de hipotenusa *AB*, está inscrito en el triángulo equilátero *PQR*, como se muestra en la figura. Si *PC* = 3, *BP* = *CQ* = 2, calcula *AQ*.

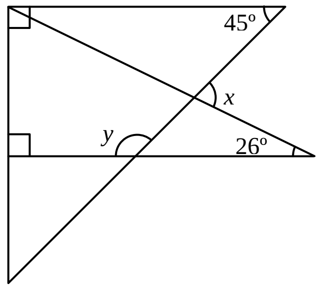


PRUEBA INDIVIDUAL (90 minutos)

1º y 2º de E.S.O.

1. En mi colegio hay un/a estudiante que se llama Yik. Deduce, de las siguientes pistas, si Yik es un chico o una chica.
Si Yik es un chico entonces es más joven que Joaquín.
Si Yik tiene 13 años entonces es una chica.
Si Yik no tiene 13 años entonces tiene más o el mismo número de años que Joaquín.
¿Es Yik un chico o una chica? Justifícalo.

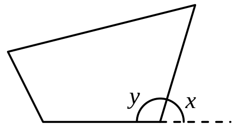
2. En el dibujo de la figura determina la medida de los ángulos *x* e *y*.



3. Encuentra todos los números de cuatro cifras de la forma *aabb*, (las dos primeas cifras iguales y las dos últimas también) que sean cuadrado perfecto. Si consideras que no hay ninguno debes justificar por qué.

4. En un polígono cualquiera, llamamos "*ángulo exterior*" del polígono al determinado por un lado y la prolongación de otro lado adyacente, es decir, al suplementario del interior correspondiente.

Por ejemplo, en la figura el ángulo *x* es exterior, pues es suplementario del ángulo interior *y*.



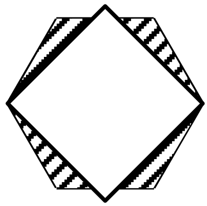
¿Cuánto suman los ángulos exteriores de un polígono de 2011 lados?

5. Entre los 5000 primeros números enteros positivos, ¿cuántos son divisibles por 2, 3, 5 y 7 a la vez?

3º y 4º de E.S.O.

1. N es un entero positivo que verifica $N^2 - 2000$ es un cuadrado perfecto. Halla todos los posibles valores de N.

2. En la figura se observa un hexágono regular y un cuadrado cuya diagonal coincide con la diagonal mayor del hexágono. ¿Qué fracción del área del hexágono no tapa el cuadrado?



3. ¿Cuál es el menor entero positivo que puede expresarse como suma de 9, de 10 y de 11 enteros consecutivos?

4. Un triángulo equilátero y un círculo tienen el mismo centro. Si el área de la parte del triángulo que cae fuera del círculo es igual que el área de la parte del círculo que cae fuera del triángulo, calcula el cociente entre el lado del triángulo y el radio del círculo.

5. A es el menor entero positivo tal que $10 \cdot A$ es un cuadrado perfecto y $6 \cdot A$ es un cubo perfecto. ¿Cuántos divisores (positivos) tiene A?

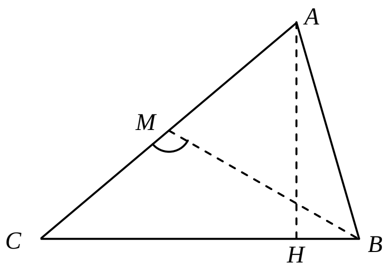
Bachillerato

1. ¿Hay algún triángulo rectángulo cuyos lados estén en progresión aritmética que no sea semejante al de lados 3, 4 y 5? Justifica la respuesta.

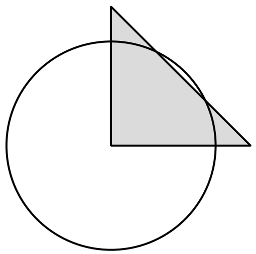
2. El número $N = 85^9 - 21^9 + 6^9$ es divisible por un entero comprendido entre 2000 y 3000. ¿De qué entero se trata?

3. Javier y su nieto celebran su cumpleaños el mismo día. Durante 6 años consecutivos la edad que cumple Javier es múltiplo de la edad que cumple su nieto. ¿Cuántos años le lleva Javier a su nieto?

4. En el triángulo *ABC* el ángulo $\hat{C}$ es de 40º y la altura *AH* mide lo mismo que la mediana *BM*. Calcula la medida del ángulo $B\hat{M}C$.



5. Una circunferencia de radio 10 tiene su centro en el vértice de un triángulo rectángulo isósceles correspondiente al ángulo recto. La circunferencia corta a la hipotenusa en dos puntos determinando tres segmentos de igual longitud. ¿Cuál es el área del triángulo?



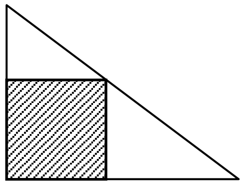
PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

1º y 2º de ESO.-

1A.- ¿Cuál es el resto de la división del número 2011^{2011} entre 5?
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1B.- Sea "T" la respuesta del problema 2B

¿Para cuántos enteros positivos *n* se verifica que $\frac{37}{T}n$ y $\frac{T}{37}n$ son enteros de cuatro cifras?
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)



1C.- Sea "T" la respuesta del problema 2C.
En el triángulo rectángulo de hipotenusa *T* cm y catetos de longitud entera, en cm, está inscrito un cuadrado, como se muestra en la figura. ¿Cuál es, en cm^2, el área de este cuadrado?
(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

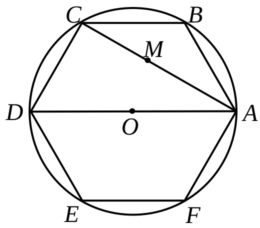
<u>3º y 4º de ESO.-</u>

2A.- Sea "T" la respuesta del problema 3A.

La respuesta T es de la forma $a - b\sqrt{2}$.

En la circunferencia de centro O se ha inscrito un hexágono regular. M es un punto de la cuerda AC tal que $A\hat{M}O = 60º$ y $MO = a + b$. Calcula la longitud de DC.

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)



2B.- ¿Cuál es el valor del entero positivo n que verifica $888 \cdot 111 = 2 \cdot (2n)^2$?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

2C.- Sea "T" la respuesta del problema 3C.

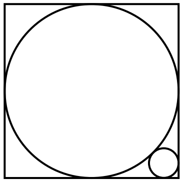
La media de los números x, 3, $4x - 3$, $x + 4$, -16, 9, $x - 4$ es $\dfrac{5}{T}$.

¿Cuál es la mediana de estos siete números?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

Bachillerato.-

3A.- Sea "T" la respuesta del problema 1A.
Las dos circunferencias de la figura son tangentes entre sí y también tangentes al cuadrado de lado *2T*. Halla el radio de la circunferencia pequeña.
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º-4º de ESO)



3B.- Sea "T" la respuesta del problema 1B.
Sea n la suma de las cifras de T.
En una progresión aritmética de números reales la suma de los dos primeros términos es 7 y la suma de los seis primeros es 91. Calcula la suma de los n primeros términos de la progresión.
(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

3C.- La expresión $\log_c(a+b)=\log_c a+\log_c b$ suele ser una barbaridad pero hay un número x para el que $\log_{2011}(5+x)=\log_{2011}5+\log_{2011}x$. Calcula ese número x.
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

CENTROS GANADORES

1. IES San Juan Bautista
2. Colegio Alemán de Madrid A
3. Colegio Fray Luis de León A

ESTUDIANTES GANADORES

NIVEL I (1º, 2º ESO)

1.	Alberto Alonso González	Colegio SEK EL Castillo.
2.	Berta García González	IES San Juan Bautista
2.	Alfonso Olalla Santamaría	Colegio SEK EL Castillo
2.	Daniel Puignau Chacón	IES Alameda de Osuna

NIVEL II (3º, 4º ESO)

1.	Álvaro Robledo Vega	Colegio Peñalar
2.	Adrián Navarro Hernández	Colegio SEK EL Castillo.

NIVEL III (Bachillerato)

1.	Lorenzo Esteban de la Iglesia	Colegio Fray Luis de León
2.	Javier Pliego García	IES San Juan Bautista

RELACIÓN DE LOS 10 CENTROS CON MAYOR PUNTUACIÓN

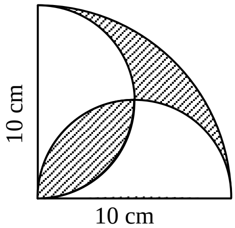
1.	IES San Juan Bautista-A…………………..	57,8
2.	Colegio Alemán de Madrid A………………..	48,5
3.	Colegio Fray Luis de León A……………...	43,2
4.	Colegio Ntra. Sra. de las Maravillas……….	38,8
5.	IES Ramiro de Maeztu A…………………..	37,7
6.	IES Alameda de Osuna A………………….	37,1
7.	Colegio Internacional SEK Ciudalcampo A..	34,2
8.	Colegio Alemán de Madrid B………………..	34,1
9.	Colegio Marista San José del Parque A...….	32,5
10.	Colegio Peñalar A…………………………..	31,1

XXIX CONCURSO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
"SOCIEDAD PUIG ADAM"
Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 11 de junio de 2011

NIVEL I (3º de E.S.O.)

Problema 1.

Calcula el área de la zona rayada en la que, como observas, los arcos son semicircunferencias y un cuarto de circunferencia.



Problema 2.

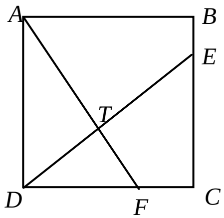
Encuentra, si existen, números enteros x e y tales que $7 + x^2 = 3y \cdot (y+1)$

Problema 3.

Vidal intenta multiplicar un número de dos cifras por uno de tres, pero se le ha olvidado todo lo referente a la multiplicación y escribe, simplemente, el número de dos cifras seguido por el de tres, resultando un número de cinco cifras, que es exactamente 9 veces el producto que debería haber obtenido. ¿Cuál es la suma de los dos números que quería multiplicar?

Problema 4.

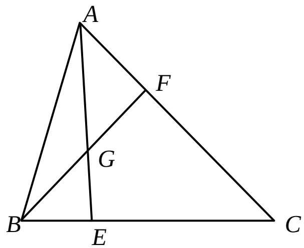
En el cuadrado *ABCD* de la figura, de lado *12 cm*, los puntos *E* y *F* son tales que *3BE = EC* y *2FC = DF*. Si *T* es el punto de intersección de *DE* y *AF*, calcula el área del triángulo *DFT*.



NIVEL II (4º de E.S.O.)

Problema 1.

En el triángulo ABC, el punto F verifica que $2AF = FC$. Si G es el punto medio del segmento BF y E es la intersección de las rectas BC y AG, calcula el cociente entre BE y EC.

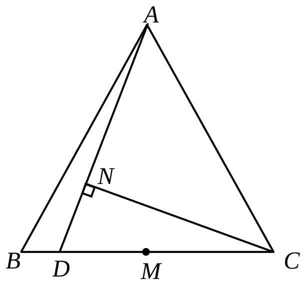


Problema 2.

Hallar dos números primos p y q tales que $p - q = 436$ y la media aritmética de p y $(q - 4)$ sea el cubo de un entero.

Problema 3.

En el triángulo isósceles ABC, con $AB = AC$, M es el punto medio de BC. El punto D, en el lado BC, verifica que $B\hat{A}D = \frac{1}{6} B\hat{A}C$. Además, la recta perpendicular a AD por C, corta a AD en N, verificándose que $DN = DM$. Calcula el valor de los ángulos del triángulo ABC.



Problema 4.

Marta llega a un aeropuerto que tiene 12 puertas de acceso a vuelos, alineadas y a 100 m de distancia entre cada dos consecutivas. Le asignan una de las doce al azar y, después de estar esperando, le comunican que su vuelo ha cambiado a otra puerta de salida, también elegida con igual probabilidad entre las restantes. Calcula la probabilidad de que Marta tenga que recorrer una distancia inferior o igual a 400 m para llegar a su nueva puerta de salida.

NIVEL III (1º de Bachillerato)

Problema 1.

Encuentra todos los enteros positivos *m* y *n*, con *n* impar, tales que $\frac{1}{m}+\frac{4}{n}=\frac{1}{12}$

Problema 2.

Todo número primo *p*, mayor que 2, se puede expresar como suma de dos enteros consecutivos (la mitad del anterior más la mitad del siguiente). Si el número no es primo hay más posibilidades, y muchos se pueden expresar, de varios modos, como suma de enteros consecutivos.
Encontrar todas las soluciones de este problema para $n = 300$.

Problema 3.

En el triángulo *ABC*, con $AC = 450$ y $BC = 300$, marcamos los puntos *M* y *L* en los lados *AC* y *AB* respectivamente, siendo *M* el punto medio de *AC* y *L* el pie de la bisectriz del ángulo *C*. Sea *P* el punto de intersección de *BM* y *CL* y *K* el simétrico de *P* respecto de *M*. Si $AK = 180$, calcula *LP*.

Problema 4.

Si *a, b, c* y *d* son números reales tales que $a^2+b^2=c^2+d^2=1$ y $ac+bd=0$, determina el valor de $ab+cd$.

REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

XLVII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

FASE LOCAL-COMUNIDAD DE MADRID

Primera sesión, viernes 21 de enero de 2011

No está permitido el uso de calculadoras. Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.

Problema 1

Los vértices del cuadrilátero convexo *ABCD* son puntos de una circunferencia de centro *O*. Las diagonales *AC* y *BD* del cuadrilátero son perpendiculares. Demuestra que los cuadriláteros *AOCD* y *ABCO* tienen la misma área.

Problema 2

Determina todos los números enteros *a*, *b* y *c* tales que $a^2 = 2b^2 + 3c^2$.

Problema 3

Un cuadrado *C* se recubre completamente con un número entero de cuadrados de lado unidad, sin solapamientos. Si uno coloca dentro del cuadrado tantos cuadrados de área 2 como sea posible con los lados paralelos a los lados de *C*, se pueden cubrir las 8 novenas partes de del área del cuadrado. Determina todas las posibles dimensiones de tales cuadrados *C*.

Segunda sesión, sábado 22 de enero de 2011

Problema 4

Consideramos un alfabeto de n letras con el que formaremos palabras. Diremos que una palabra contiene un palíndromo si un trozo de esa palabra, de más de una letra, se lee igual al derecho que al revés. Por ejemplo, la palabra OLIMPIADA contiene el palíndromo ADA. Siendo k un entero mayor que 2, determina cuántas palabras de longitud k se pueden formar, con nuestro alfabeto de n letras, que no contengan ningún palíndromo de longitud impar.

Problema 5

Se ordenan los números naturales en forma de tabla triangular, es decir:

				1				
			2	3	4			
		5	6	7	8	9		
	10	11	12	13	14	15	16	
17	…..	……	……	……	……	….	……	…..

Diremos que la posición de un número N en la tabla viene dada por dos "coordenadas": el primer número de la fila en que está N y el primer número de la columna en que está N. Por ejemplo, si N = 15, su posición es (10,9). Cuando un número N, en la posición (n, m) verifica $N = n + m$ diremos que N está *bien colocado* en la tabla; así 12 y 14 están bien colocados y 15 no lo está. ¿Está 2^{2011} bien colocado?

Problema 6

El punto I es el incentro del triángulo ABC. La recta r que pasa por I y es paralela a AB corta a los lados AC y CB en los punto A_1 y B_2, respectivamente; la recta s que pasa por I y es paralela a CB corta a los lados BA y AC en puntos B_1 y C_2 respectivamente; la recta t que pasa por I y es paralela a CA corta a los lados CB y BA en los puntos C_1 y A_2 respectivamente. Determina el valor de

$$\frac{A_1B_2}{AB}+\frac{B_1C_2}{BC}+\frac{C_1A_2}{CA}$$

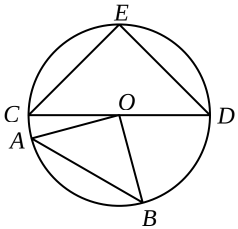
REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

XLVIII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA
Comunidad de Madrid

FASE CERO: viernes 25 de noviembre de 2011

- En la hoja de respuestas, escribe la letra de la opción que creas correcta.
- Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos; cada respuesta en blanco 1 punto, y cada respuesta errónea, 0 puntos.
- No está permitido el uso de calculadoras, instrumentos de medida o de cualquier aparato electrónico.
- TIEMPO: 3 HORAS

1. En la figura adjunta, CE y DE son cuerdas de igual longitud de la circunferencia de centro O de la que CD es un diámetro. Si el arco AB es un cuarto de circunferencia, ¿cuál es el cociente entre las áreas de los triángulos CED y AOB?



   A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 4 D) 3 E) 2

2. En una carrera de 10 km, Víctor supera a Segundo en 2 km y a Lentini en 4 km. Si los corredores mantienen una velocidad constante a lo largo de toda la prueba, ¿cuántos kilómetros le sacará Segundo a Lentini?

   A) 2 B) $\frac{9}{4}$ C) $\frac{5}{2}$ D) $\frac{11}{4}$ E) 3

3. A partir de un triángulo rectángulo ABC de hipotenusa AB, construimos otro triángulo rectángulo ABD con la misma hipotenusa AB. Si $BC = 1$, $AC = b$ y $AD = 2$, BD es igual a:

   A) $\sqrt{b^2+1}$ B) $\sqrt{b^2-3}$ C) $\sqrt{b^2+1}+2$ D) b^2+5 E) $\sqrt{b^2+3}$

4. Pedro anduvo una determinada distancia a velocidad constante. Si hubiera ido 0,5 km/h más rápido, habría recorrido la misma distancia en $\frac{4}{5}$ del tiempo original, pero si

hubiera ido 0,5km/h más despacio, habría tardado $\frac{5}{2}$ de hora más. ¿Cuál fue, en km, la distancia recorrida por Pedro?

A) $\frac{27}{2}$ B) 15 C) $\frac{35}{2}$ D) 20 E) 25

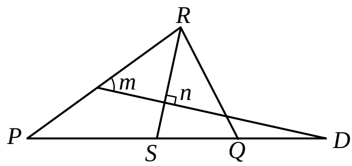
5. En el triángulo *ABC* de la figura, el ángulo *C* es de 90º, *D* es el punto medio de *AB*, *DE* es perpendicular a *AB* y *AB* = 20, *AC* = 12. ¿Cuál es el área del cuadrilátero *ADEC*?
A) 75 B) 58,5 C) 48 D) 37,5 E) Nada de lo anterior

6. Hay dos números positivos que, colocados entre el 3 y el 9, hacen que los tres primeros estén en progresión geométrica y los tres últimos en progresión aritmética. La suma de estos dos números positivos es:
A) $\frac{27}{2}$ B) $\frac{45}{4}$ C) $\frac{21}{2}$ D 10 E) $\frac{19}{2}$

7. Consideramos dos circunferencias: la mayor, de centro *P* y radio *R*; la otra, de centro *Q* y radio *r*, y dibujamos el segmento *PQ*. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?
A) $R - r$ puede ser igual a *PQ*. B) $R + r$ puede ser igual a *PQ*
C) $R + r$ puede ser menor que *PQ* D) $R - r$ puede ser menor que *PQ*
E) Nada de lo anterior.

8. Al colorear *n* bolas, numeradas de 1 a *n*, en rojo y en negro, resulta que entre las primeras 50 hay 49 rojas y entre las restantes 7 de cada 8 son rojas. Si el número de bolas rojas es mayor o igual que el 90% del total de bolas, el valor máximo de *n* es:
A) 225 B) 210 C) 200 D) 180 E) 175

9. En el triángulo *PQR* de la figura, *RS* es bisectriz del ángulo *R* y *D* está en la prolongación de *PQ* de modo que el ángulo *n* es recto. Entonces:



A) $m = \frac{1}{2}\left(\hat{P} - \hat{Q}\right)$ B) $m = \frac{1}{2}\left(\hat{P} + \hat{Q}\right)$

C) $\hat{D} = \frac{1}{2}\left(\hat{P} + \hat{Q}\right)$ D) $\hat{D} = \frac{1}{2}m$ E) Nada de lo anterior es correcto

10. El resto de la división del polinomio $p\ (x) = x^{100}$ entre x^2 - $3x + 2$ es:
A) $2^{200} - 1$ B) $2^{100}(x-1)-(x-2)$ C) $2^{100}(x-3)$
D) $(2^{100}-1)x + 2(2^{99}-1)$ E) $2^{100}(x+1)-(x+2)$

11. En el rombo *ABCD* dibujamos segmentos paralelos a la diagonal *BD* y de extremos en los lados del rombo. Consideremos una gráfica que muestre la posible longitud de cada segmento en función de su distancia al vértice *A*. La gráfica es:
A) Una recta que pasa por el origen B) Una recta que corta a los semiejes positivos
C) Dos segmentos formando una V D) Dos segmentos formando una V invertida
E) Nada de lo anterior

12. ¿Cuál de los siguientes números es la suma de 11 enteros consecutivos?
A) 7 B) 77 C) 777 D) 7770 E) 7771

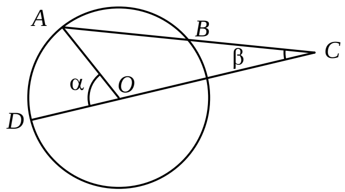
13. Si el cociente entre las medidas de los dos catetos de un triángulo es $\frac{1}{2}$, el cociente entre las medidas de los correspondientes segmentos de hipotenusa determinados por la altura sobre la misma es:
A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3+\sqrt{2}}$ C) $\frac{1}{2\sqrt{5}-1}$ D) $\frac{1}{2+\sqrt{5}}$ E) $\frac{1}{5}$

14. Si *S* es la suma de los restos de la división de 30, 31, 32, 33, 34 y 35 entre 6, ¿cuál es el resto de la división de *S* entre 6?
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5

15. Isa sale de excursión cuando las agujas de su reloj están juntas entre las 8 y las 9 y llega a su destino entre las 2 y las 3, cuando las agujas forman un ángulo de 180º. ¿Cuánto duró su excursión?
A) 6 horas B) 6 horas y 43 + $\frac{7}{11}$ minutos C) 5 horas y 16+ $\frac{4}{11}$ minutos
D) 6 horas y media E) Nada de lo anterior

16. Si x e y son números reales con $|x| + y = 3,\ |x|y + x^3 = 0$, ¿cuál es el entero más próximo a $x - y$?
A) – 3 B) –1 C) 2 D) 3 E) 5

17. En la circunferencia de la figura, de centro O, prolongamos la cuerda AB hasta que corte en C al diámetro OD, de manera que BC sea igual al radio, y llamamos α y β a los ángulos que se indican. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones expresa la relación entre α y β?



A) $\alpha = 3\beta$ B) $\alpha = 2\beta$ C) $\alpha = 60^{o}$

D) No hay relación especial entre α y β

E) $\alpha = 3\beta$ o $\alpha = 2\beta$ según la longitud de AB

18. Si $1 < x < 10$, $1 < y < 10$, ¿qué afirmación de las siguientes es necesariamente verdadera?

A) $y < \frac{10}{x}$ B) $x > \frac{y}{10}$ C) $y < \frac{x}{10}$ D) $x < \frac{y}{10}$ E) $\frac{100}{x} < y$

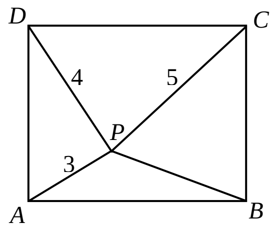
19. El número de triángulos con los tres lados desiguales, de longitud entera y de perímetro menor que 13 es:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 18

20. La función $f(n) = \frac{7n+18}{2n+3}$ toma valores enteros para ciertos valores enteros de n. La suma de todos estos $f(n)$ enteros es:

A) 14 B) 21 C) 24 D) 28 E) 30

21. Si P es un punto interior al rectángulo $ABCD$ tal que PA = 3 cm, PD = 4 cm, PC = 5 cm, PB, en cm, es igual a:



A) $2\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{3}$

D) $4\sqrt{2}$ E) 2

22. Si a, b, c, d y e son enteros distintos y $(4-a)(4-b)(4-c)(4-d)(4-e) = 12$, $a+b+c+d+e$ es igual a:

A) 12 B) 16 C) 17 D) 24 E)32

23. Si la base mayor de un trapecio isósceles es igual a la diagonal y la base más pequeña igual a la altura, el cociente entre la base pequeña y la grande es:

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{2}{5}$

24. Pedro tiene una caja fuerte con un código de tres cifras. Ha olvidado el código, pero sabe que las tres cifras son diferentes y que la primera cifra es igual al cuadrado del cociente de la segunda entre la tercera cifra. ¿Cuántas combinaciones deberá probar, en el peor de los casos, hasta encontrar el código?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 8

25. Dos segmentos verticales de 20cm y 80cm (están apoyados sobre el suelo) y separados 1 m. El punto de intersección de las rectas que unen el punto de más altura de un segmento con el más bajo del otro (el extremo superior de un segmento con el inferior del otro) está a una altura de

A) 50 cm B) 40 cm C) 16 cm D) 60 cm E) Nada de lo anterior

26. En una caja hay 9 tarjetas numeradas del 1 al 9. Antonio y Beatriz sacan cada uno al mismo tiempo una tarjeta de la caja. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de la tarjeta de Antonio sea el doble o más que el número de la tarjeta de Beatriz?

A) $\frac{7}{18}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{28}{81}$ D) $\frac{5}{18}$ E) $\frac{1}{3}$

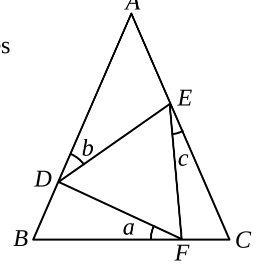
27. El segmento que une los puntos medios de las diagonales de un trapecio tiene 3 unidades de longitud. Si la base mayor mide 97 unidades, la base menor mide:

A) 94 B) 92 C) 91 D) 90 E) 89

28. ¿Cuántos divisores de cuatro cifras tiene el número 102^2?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

29. En el dibujo que ves, *AB* y *AC* son lados del triángulo isósceles *ABC* en el que inscribimos el triángulo equilátero *DEF*. Si los ángulos *a*, *b* y *c* son los que hemos marcado, entonces:



A) $b=\frac{1}{2}(a+c)$ B) $b=\frac{1}{2}(a-c)$ C) $a=\frac{1}{2}(b-c)$

D) $a=\frac{1}{2}(b+c)$ E) Nada de lo anterior

30. Escribimos en la pizarra todos los enteros del 1 al 2011. María subraya los múltiplos de 2, luego los múltiplos de 3, y luego los múltiplos de 4. ¿Cuántos números ha subrayado exactamente dos veces?

A) 1005 B) 1004 C) 503 D) 336 E)169

XLVIII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

1ª FASE LOCAL-COMUNIDAD DE MADRID

Primera sesión, viernes 16 de diciembre de 2011

No está permitido el uso de calculadoras. Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.

Problema 1

Sean a, b y c tres números reales positivos cuyo producto es 1. Demostrar que si la suma de estos números es mayor que la suma de sus recíprocos, entonces exactamente uno de ellos es mayor que 1.

Problema 2

En un triángulo rectángulo de hipotenusa unidad y ángulos respectivos de 30º, 60º y 90º, se eligen 25 puntos cualesquiera. Demostrar que siempre habrá 9 entre ellos que podrán cubrirse con un semicírculo de radio 3/10.

Problema 3

Sea P un punto interior a un triángulo ABC y sean H_A, H_B, H_C los ortocentros de los triángulos PBC, PAC y PAB respectivamente. Demostrar que los triángulos $H_AH_BH_C$ y ABC tienen igual área.

Segunda sesión, sábado 17 de diciembre de 2011

Problema 4

Dado un entero positivo n, hallar la suma de todos los enteros positivos inferiores a $10n$ que no son múltiplos de 2 ni de 5.

Problema 5

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y P un punto interior. Determinar qué condiciones deben cumplir el cuadrilátero y el punto P para que las áreas de los triángulos PAB, PBC, PCD y PDA sean iguales.

Problema 6

Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo ABC. Si

$$b(a+b)(b+c)=a^3+b\left(a^2+c^2\right)+c^3,$$

demostrar que la medida (en radianes) de los ángulos A, B y C cumple la relación

$$\frac{1}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}+\frac{1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}}=\frac{2}{\sqrt{A}+\sqrt{C}}.$$

XVIIª OLIMPIADA de MAYO
Primer Nivel
Mayo de 2011

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

PROBLEMA 1

Las cuatro palabras codificadas □*⊗ ⊕#● *□● ⊗♦⊕ son, en algún orden AMO SUR REO MAS. Descifrar ⊗♦□*⊕#□●⊗.

PROBLEMA 2

Utilizando una sola vez cada uno de los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 se escriben el cuadrado y el cubo de un número entero positivo. Determinar cuánto puede valer dicho número.

PROBLEMA 3

En el rectángulo $ABCD$, $BC = 5$, $EC = \frac{1}{3}CD$ y F es el punto donde se cortan AE y BD. El triángulo DEF tiene área 12 y el triángulo ABF tiene área 27. Hallar el área del cuadrilátero $BCEF$.

PROBLEMA 4

Utilizando varios cubitos blancos de arista 1 Guille arma un cubo grande. Luego elige cuatro caras del cubo grande y las pinta de rojo. Finalmente desarma el cubito y observa que los cubitos con al menos una cara pintada de rojo son 431. Halla la cantidad de cubitos que utilizó para armar el cubo grande. Analiza todas las posibilidades.

PROBLEMA 5

Consideramos todos los números enteros positivos, de 14 dígitos, divisibles por 18, cuyos dígitos son exclusivamente 1 y 2, pero no hay dígitos 2 consecutivos. ¿Cuántos números de estos hay?

XVIIª OLIMPIADA de MAYO
Segundo Nivel
Mayo de 2011

Olimpíada de Mayo
Competencia Juvenil Iberoamericana de Matemática

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
<u>Justifica cada una de tus respuestas.</u>
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

PROBLEMA 1

Hallar un número entero positivo x tal que la suma de los dígitos de x sea mayor que 2011 veces la suma de los dígitos del número $3x$ (3 por x) .

PROBLEMA 2

Decimos que un número de cuatro dígitos $abcd$ $(a \neq 0)$ es *porá* si se cumplen las siguientes condiciones: $a \geq b$ y $ab - cd = cd - ba$

Por ejemplo, 2011 es porá porque 20 – 11 = 11 – 02. Hallar todos los números porás.

PROBLEMA 3

En un triángulo rectángulo ABC tal que $AB = AC$, M es el punto medio de BC. Sea P un punto de la mediatriz de AC que pertenece al semiplano determinado por BC que no contiene a A. Las rectas CP y AM se cortan en Q. Calcular el ángulo que forman AP y BQ.

PROBLEMA 4

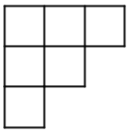
Dados n puntos en una circunferencia se escribe al lado de uno de ellos un 1 y al lado de cada uno de los otros un 0. La operación permitida consiste en elegir un punto que tenga un 1 y cambiar el número de ese punto y también los números de sus dos vecinos, el de la izquierda y el de la derecha (donde hay 1 se escribe 0 y donde hay 0 se escribe 1).

a) Si n = 101, mostrar que se puede lograr, mediante una sucesión de operaciones permitidas, que cada uno de los n puntos tenga escrito un 0.

b) Si n = 102, demostrar que es imposible lograr que todos los números escritos sean 0.

PROBLEMA 5

Determinar para qué números naturales n es posible cubrir completamente un tablero de n×n, dividido en casillas de 1×1, con piezas como la de la figura, sin huecos ni superposiciones y sin salirse del tablero. Cada una de las piezas cubre exactamente seis casillas.



Nota: Las piezas se pueden girar.

Relación de ganadores en la "XVII OLIMPIADA DE MAYO – 2011

PRIMER NIVEL

	Apellidos y nombre	Premio
1	Didirka Díaz, Alex	ORO
2	Mourel Serrano, Alberto	PLATA
3	García Miguel, Alejandro	PLATA
4	Puignau Chacón, Daniel	BRONCE
5	García González, Berta	BRONCE
6	Sánchez Ibáñez, Enrique	BRONCE
7	Olalla Santamaría, Alfonso	BRONCE
8	Carbajo Temprano, Miguel	MENCIÓN
9	Ramiro Aguirre, Miguel	MENCIÓN
10	Loureiro García, Santiago	MENCIÓN

SEGUNDO NIVEL

1	Barrero Santamaría, Miguel	ORO
2	Peña Queralta, Laura	PLATA
3	Prieto Naslin, Ángel	PLATA
4	Isern Hacker, Marc	BRONCE
5	Musicó Cortés, Mario	BRONCE
6	Espa Torres, Carlos	BRONCE
7	Alonso Lorenzo, Izar	BRONCE
8	Yu, Ruizhe	MENCIÓN
9	Pascual Pérez, Guillermo	MENCIÓN
10	Navarro Hernández, Adrián	MENCIÓN

Dirección General de Mejora de la Calidad de la Enseñanza
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN
Comunidad de Madrid

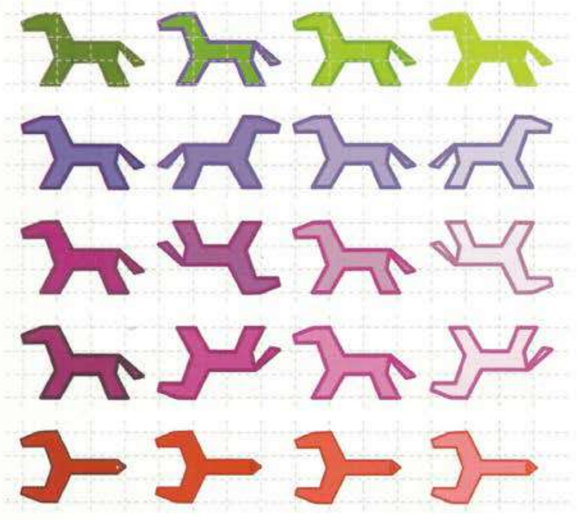
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Consejo Social de la UCM

sm

ANAYA

El Corte Inglés

XVII concurso de primavera



MATEMÁTICAS 2013

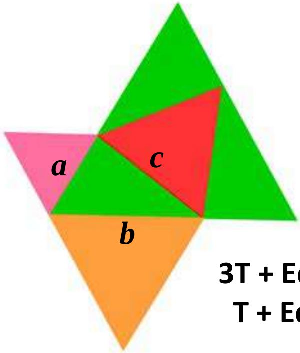
Comunidad de Madrid

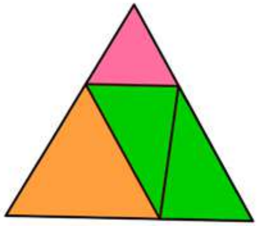
Comité organizador del Concurso de Primavera

Alfredo Martínez Sanz
Esteban Serrano Marugán
Francisco López Álvarez
Hugo Fernández Hervás
Isabel Benito Miguel
Javier Soler Areta
Jesús García Gual
Joaquín Hernández Gómez
José María Sordo Juanena

Juan Jesús Donaire Moreno
Luis Ferrero de Pablo
María Gaspar Alonso-Vega,
María Moreno Warleta
María Olbés Fernández
Merche Sánchez Benito
Miguel Ángel Baeza Alba
Pilar Ruiz Cervigón
Víctor Manuel Sánchez González

*Poema para un triángulo **T***
con un ángulo γ de 60º





$$3T + Eq(c) = 2T + Eq(a) + Eq(b)$$
$$T + Eq(c) = Eq(a) + Eq(b)$$

(Demostración visual original de Manuel Morán Cabré)

Presentación

"El cambio es lo único que perdura"

Sí, Heráclito, tú siempre tan paradójico. Ya sé que no me bañaré dos veces en el mismo río, pero el problema es ya otro. No me apetece bañarme en él,... porque está contaminado.

El fin de la Educación no debe ser el adecuar los individuos al Sistema. La Educación debe servir para adecuar el Sistema a las personas.

Comité Organizador

AGRADECIMIENTOS

A los participantes y colaboradores del Concurso.

A la Facultad de Matemáticas.

Al Consejo Social y al Vicerrectorado de alumnos de la UCM.

Al Área de Formación del Profesorado dentro de la Dirección General de la Mejora de la Calidad de la Enseñanza de la Consejería de Educación.

A Educamadrid.

A las editoriales Grupo **ANAYA** y Ediciones **S.M.**

Al grupo empresarial El Corte Inglés.

A la librería Aviraneta.

XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 29 de febrero de 2012

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** X LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática

Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid

Educamadrid

El Corte Inglés

Grupo ANAYA

Grupo SM

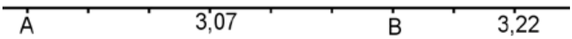
Librería Aviraneta

www.profes.net

1 Bob Esponja vive en una piña a 1200 metros bajo el nivel del mar y justo por encima, Dora la exploradora está volando en globo a 35,4 hectómetros sobre el nivel del mar. Si Dora deja caer una piedra, ¿qué distancia recorre la piedra hasta llegar a Bob Esponja?

A) 2340 m **B)** 846 dam **C)** 4,74 km **D)** 1554 m **E)** 3,66 km

2 ¿Cuánto vale B – A?



A) 0,12 **B)** 6,14 **C)** 0,15 **D)** 0,6 **E)** 0,18

3 Esteban corrió la San Silvestre Vallecana del año 2011 en 49 minutos y 29 segundos. En el año 2010 tardó 54 minutos y 20 segundos. ¿En cuánto tiempo ha reducido su marca?

A) 4,09 min **B)** 5 min 9 s **C)** 201 s **D)** 4 min 51 s **E)** 103 min 49 s

4 Ana y Bea tienen entre las dos 20 euros. Ana y Clara tienen 18. Ana y Dunia tienen 15. Bea, Clara y Dunia tienen entre las tres 29 euros. ¿Cuántos euros tiene Dunia?

A) 10 **B)** 9 **C)** 8 **D)** 7 **E)** 6

5 Ana, Elena e Inés son tres amigas. Sus novios se llaman Andrés, Enrique e Ignacio y todas ellas tienen una mascota: una tiene una ardilla, otra un erizo y otra una iguana. Si las iniciales de cada chica, su novio y su mascota, son diferentes, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es falsa sabiendo que la novia de Enrique no tiene una iguana?

A) Elena tiene una iguana **B)** Ana es novia de Ignacio **C)** La ardilla es de Inés
D) La novia de Ignacio tiene una ardilla **E)** Ana no tiene una iguana.

6 Los números 343, 1221 y 37873 son capicúas porque se leen igual del derecho que del revés. ¿Cuál es la distancia mayor entre dos capicúas de tres cifras?

A) 10 **B)** 454 **C)** 888 **D)** 898 **E)** 999

7 Seis leones se comen cuatro gacelas en dos días. ¿Cuántas gacelas se comerán tres leones en cuatro días?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

8 El hombre del saco ha metido en su saco los cincuenta primeros números, desde el 1 hasta el 50. María se coge todos los números cuyas cifras suman diez y también todos los que tengan un cero; a continuación Merche saca todos los números que tengan todas sus cifras pares; Pilar se coge los números que puedan dividirse entre tres sin sobrar nada. De los números que quedan, el hombre del saco te regala solo los que tienen la cifra 1. ¿Cuánto suman tus números?

A) 72 **B)** 127 **C)** 130 **D)** 144 **E)** 162

9 Una cruz compuesta por cinco cuadrados iguales está inscrita (como se ve en la figura) en un cuadrado. Si el perímetro de la cruz es de 24 cm, ¿cuál es, en cm^2, el área del cuadrado?

A) 24 **B)** 32 **C)** 36 **D)** 40 **E)** 48

10 En un reloj digital que indica horas, minutos y segundos, ¿cuántas veces cambian los seis dígitos a la vez en 24 horas?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 24

11 ¿Cuántos números primos de dos cifras puedes formar usando las tarjetas?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 6

12 Luca va al parque de la mano de su abuela María. A la ida, como va contento, Luca va dando saltitos y da dos saltitos por cada paso que da su abuela. A la vuelta, como está muy cansado, va dando pasitos y da tres pasitos por cada paso que da su abuela. Si María da los mismos pasos a la ida que a la vuelta y Luca hace 1860 movimientos en total entre saltos y pasos, ¿cuántos pasos da María para llegar al parque?

A) 93 B) 124 **C)** 186 **D)** 372 **E)** 465

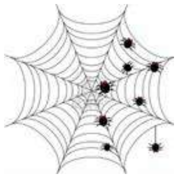
13 Lucía se ha especializado en dibujar triángulos y cuadrados que pueden ser o bien verdes o bien naranjas. Una tarde dibuja un montón de figuras y al recontarlas observa que hay 13 triángulos; 16 cuadrados; 6 cuadrados verdes; 11 figuras verdes. ¿Cuántos triángulos naranjas dibujó Lucía esa tarde?

A) 8 **B)** 7 **C)** 6 **D)** 5 **E)** 4

14 Andresito se ha obsesionado con la flor de la amapola y escribe sin parar esas siete letras: AMAPOLAAMAPOLAAMAPOLA... cientos y cientos de veces. Cuando había escrito 7004 letras, su madre le dijo que parara de una vez. ¿Cuál fue la última letra que escribió Andresito?

A) A **B)** M **C)** P **D)** O **E)** L

15 En una tela de araña se han reunido ocho arañas.
Cada araña tiene ocho patas.
Cada pata, ocho pelos.
Y en cada pelo, ocho lazos.
¿Cuántos lazos había en tan ilustre reunión?

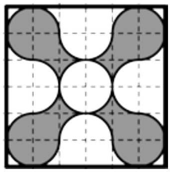


A) 8888 **B)** 32 **C)** $2 \cdot 8^8$ **D)** 8^4 **E)** $4 \cdot 8^8$

16 Ariel es pequeño y escribe algunos números al revés. Cuando quiere escribir un 2, escribe un Ƨ y cuando quiere escribir un 6, le sale un ∂, los demás los escribe bien. Su padre le ha pedido que escriba todos los números del 1 al 100. ¿Cuántos números estarán mal en esa lista?

A) 36 **B)** 34 **C)** 20 **D)** 38 **E)** 22

17 ¿Qué fracción del cuadrado está sombreada?

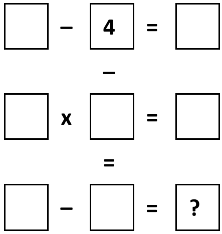


A) $\frac{7}{18}$ **B)** $\frac{15}{36}$ **C)** $\frac{4}{9}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{2}{3}$

18 Marta es muy deportista y todos los días hace algo de ejercicio. Lo que más le gusta es nadar y lo que menos, correr. Para no tener que decidir a diario qué hacer, ha ideado una estrategia. Cada día tira un dado: si sale par, va a nadar y, si sale impar, vuelve a tirar el dado; si en el segundo lanzamiento sale par, va a nadar, si sale un cinco, va a correr y si no ocurre nada de lo anterior, va al gimnasio. ¿Qué probabilidad tiene Marta de ir a nadar?

A) $\frac{3}{4}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{5}{8}$ **D)** $\frac{2}{7}$ **E)** $\frac{25}{36}$

19 Víctor tiene nueve cartulinas numeradas desde el 1 hasta el 9 y debe colocarlas para que se cumplan las cuatro operaciones indicadas. ¿Qué número colocará en la interrogación?

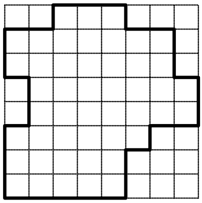


A) 7 **B)** 8 **C)** 5 **D)** 3 **E)** 6

20 Mi abuela dice que el abuelo es un glotón. Según ella, come el triple que mi madre y tanto como mi padre, mi hermano y yo juntos. Yo como el doble que mi hermano y mi padre come lo mismo que mi madre y yo juntos. Si mi hermano merienda dos galletas, ¿cuántas galletas merendará mi abuelo?

A) 15 **B)** 8 **C)** 20 **D)** 34 **E)** 12

21 Ana ha construido esta figura con cuadrados de 4 y 9 cm^2. ¿Cuántos cuadrados como mínimo ha utilizado?



A) 8 **B)** 16 **C)** 5 **D)** 14 **E)** 64

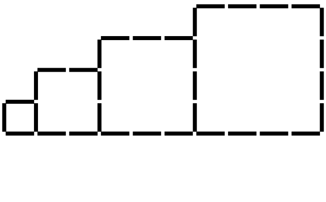
22 Para celebrar la fiesta de mi cumpleaños compré caramelos. Pensé hacer bolsas con catorce caramelos y los diez caramelos que sobraran serían para mí. Como no vinieron dos niños, pude meter dos caramelos más en cada bolsa y ya solo sobraron cuatro para mí. ¿Cuántos niños vinieron a mi fiesta?

A) 22 **B)** 24 **C)** 19 **D)** 20 **E)** 17

23 En un triángulo cada ángulo mide 12 grados más que el anterior. ¿Cuánto mide el ángulo mayor de ese triángulo?

A) 36º **B)** 60º **C)** 68º **D)** 70º **E)** 72º

24 A Mariquilla le han regalado una caja de palillos y se entretiene haciendo cuadrados cada vez más grandes, como los que ves en la figura. Cuando lleva 99 cuadrados se pregunta, ¿cuántos palillos más necesitaré para hacer el cuadrado número 100 y terminar mi gran obra?



A) 400 **B)** 301 **C)** 99 **D)** 299 **E)** 399

25 Don Retorcido te ha pedido que le digas un número. A continuación él le suma 2; divide el resultado entre 3; suma 5; multiplica por 2 y, por último, resta 7. Don Retorcido dice: *Me ha salido 17, pero ¡ay! qué cabeza tengo, ya olvidé el número que me dijiste*. Por favor, aclárale cuál era tu número.

A) 1 **B)** 17 **C)** 30 **D)** 22 **E)** 19

XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 29 de febrero de 2012

NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** X LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Aviraneta
www.profes.net

1 De una sola sentada Juanito se ha comido 3/5 de sus gominolas y Olivia, 5/8 de las suyas. Ahora cada uno tiene 18 gominolas y un fuerte dolor de barriga. ¿Cuántas gominolas tenían entre los dos antes del atracón?

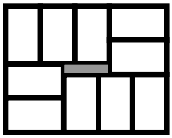
A) 93 **B)** 98 **C)** 100 **D)** 200 **E)** 234

2 Casandra no se atrevía a pedir sal para la sopa, así que le propuso este acertijo al camarero. Si letras diferentes representan cifras también diferentes, ¿cuánto vale la letra **A**?

$$\begin{array}{cccc} & M & A & S \\ + & S & A & L \\ \hline S & O & S & O \end{array}$$

A) 9 **B)** 8 **C)** 7 **D)** 6 **E)** 5

3 Con diez rectángulos iguales de 5 cm × 3cm hemos cubierto un gran rectángulo pero en el centro se nos ha quedado un rectangulito sin cubrir. ¿Qué área, en cm^2, tiene ese rectangulito central?



A) 3 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 10

4 ¡Las cinco ranitas ya están situadas en el punto CERO de la salida! La competición va a comenzar. La que caiga justo en el punto 2012 ganará la prueba. Bang da un salto de longitud 1 seguido de un salto de longitud 5, y así todo el rato; Beng da saltos de longitud 3; Bing da un salto de longitud 2 y luego otro de 4, y así siempre; Bong empieza con un salto de longitud 4 y luego uno de 2, y sigue así toda la carrera; Bung salta primero 5 unidades y luego 1 unidad, y así continúa. ¿Qué ranita ganará esta emocionante prueba?

A) Bang **B)** Beng **C)** Bing **D)** Bong **E)** Bung

5 Ya sabemos que Don Retorcido es bastante especial. Resulta que ahora ha decidido que a partir de hoy, durante mil días se vestirá sin repetir combinación. En su armario tiene ocho pantalones y diez camisas ¿Cuál es el mínimo número de sombreros que debe comprar para asegurarse de que no repetirá combinación en los próximos mil días?

A) 12 **B)** 13 **C)** 14 **D)** 982 **E)** 983

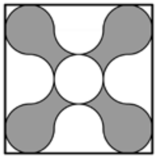
6 Cada vez que Santiago recoge la cocina sus padres le dan 1,50 € y cuando tiende la ropa le dan 75 céntimos. El año pasado Santiago ganó en total 61,50 € haciendo esas tareas. Si recogió la cocina en cinco ocasiones más que las que tendió la ropa, ¿cuántas veces ayudó a sus padres en total?

A) 53 **B)** 27 **C)** 54 **D)** 45 **E)** 43

7 La suma de cuatro números enteros positivos es 10. ¿Cuál es el mayor producto posible?

A) 100 **B)** 18 **C)** 14 **D)** 40 **E)** 36

8 Para diseñar esta baldosa, todos los arcos que se han empleado corresponden a circunferencias de igual radio que la central. ¿Qué fracción de baldosa está sombreada?

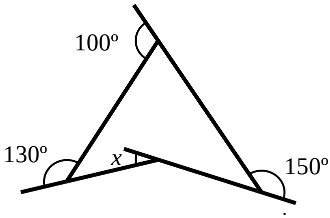


A) $\frac{7}{18}$ **B)** $\frac{15}{36}$ **C)** $\frac{4}{9}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{2}{3}$

9 Ana, Bea, Clara y Dunia se quieren pesar de dos en dos. Ana y Bea pesan 88 kilos, Bea y Clara pesan 91, Clara y Dunia pesan 86. En ese momento, Dunia dice que no hace falta hacer más pesadas. ¿Cuánto pesan Ana y Dunia juntas?

A) 83 kg **B)** 84 kg **C)** 85 kg **D)** 87 kg **E)** 88 kg

10 ¿Cuántos grados mide el ángulo *x* de la figura?



A) 20º **B)** 24º **C)** 25º

D) 30º **E)** 35º

11 Una fotocopia de una fotografía está hecha a tamaño doble del original, doble de ancha y doble de larga. Si la superficie que ocupa Ana en la fotografía es de 16 cm^2, ¿qué superficie, en cm^2, tendrá en la fotocopia?

A) 16 **B)** 32 **C)** 24 **D)** 144 **E)** 64

12 Fíjate como se forma la siguiente serie:

1	2	3		9	10	11		17	18	19		…		**A**		
4		5		12		13		20		21		…		**B**		**C**
6	7	8		14	15	16		22	23	24		…			**D**	**E**

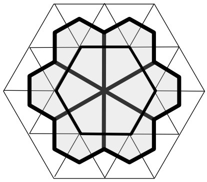
Si continuamos colocando números, ¿en qué posición caerá el número 2012?

A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

13 Marta es muy deportista y todos los días hace algo de ejercicio. Lo que más le gusta es nadar y lo que menos, correr. Para no tener que decidir qué hacer a diario, ha ideado lo siguiente: cada día tira un dado. Si sale par, va a nadar y si sale impar, vuelve a tirar el dado. Si en el segundo lanzamiento sale par, va a nadar, si sale un cinco, va a correr y si no ocurre nada de lo anterior, va al gimnasio. ¿Qué probabilidad tiene Marta de ir a nadar?

A) $\frac{3}{4}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{5}{8}$ **D)** $\frac{2}{7}$

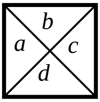
E) $\frac{25}{36}$



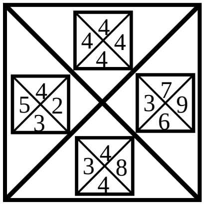
14 Como se ve en la figura hemos rodeado un hexágono regular por triángulos equiláteros, y luego aprovechando sus centros hemos dibujado una flor de seis pétalos. Si el área de un triángulo es de 3 dm^2, ¿cuál es, en dm^2, el área de la flor?

A) 36 **B)** 42 **C)** 45 **D)** 54 **E)** 60

15 Los habitantes de Cuadripón operan los números de cuatro en cuatro del siguiente modo:



$= \frac{a \cdot b - c}{d}$



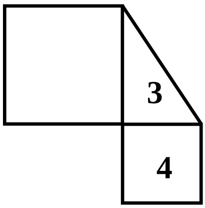
¿Qué resultado obtuvo Cuadripín cuando realizó la operación de la derecha?

A) 0 **B)** 4 **C)** 8 **D)** 16 **E)** 24

16 Ana compra tres manzanas por 1 € y vende cinco manzanas por 2 €. ¿Cuántas manzanas tiene que comprar para que cuando las venda todas gane 10 €?

A) 250 **B)** 225 **C)** 150 **D)** 75 **E)** 100

17 En la figura ves dos cuadrados y un triángulo rectángulo. Los números indican el área de la figura correspondiente. ¿Cuál es el área del cuadrado grande?



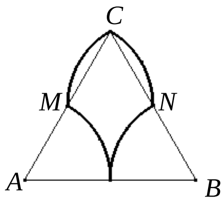
A) 9 **B)** 8 **C)** 7 **D)** 6

E) 5

18 En el club de tenis hay ocho chicas y seis chicos. Si el club necesita elegir un equipo formado por dos chicos y dos chicas, el número de posibles equipos que se pueden formar es:

A) 480 **B)** 420 **C)** 560 **D)** 580 **E)** 620

19 En un triángulo equilátero *ABC*, hemos dibujado una punta de lanza usando arcos con centros en los vértices *A* y *B*, y en los puntos medios, *M* y *N*, de los lados *AC* y *BC*. Todos los arcos tienen como radio la mitad del lado del triángulo. Si el triángulo tiene 12 dm^2 de área, ¿cuál es, en dm^2, el área de la punta de lanza?



A) 9 **B)** 7,5 **C)** 6 **D)** 4 **E)** 3

20 El equipo de ajedrez de mi barrio consta de cuatro jugadores. Como hemos ganado la competición nacional, nos han regalado cuatro bicicletas del mismo modelo, dos rojas, una verde y una azul. Dos niños del equipo son gemelos y quieren bicicletas de distinto color. ¿De cuántas formas diferentes podemos hacer el reparto?

A) 6 **B)** 24 **C)** 20 **D)** 10 **E)** 8

21 Los casilleros del colegio tienen una etiqueta con el nombre de su propietario. Rafa es muy travieso y ha cambiado todos los libros de casillero, de manera que ahora nadie tiene sus libros donde corresponde.

Álvaro	Belén	Carlos
Dani	Elvira	Fátima

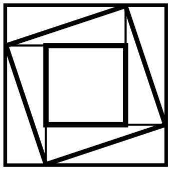
Elvira ha encontrado en su casillero los libros de Carlos; los de Álvaro se han intercambiado con los de una chica y los de Fátima están encima de los de Dani. ¿De quién son los libros que están en el casillero de Dani?

A) Álvaro **B)** Belén **C)** Carlos **D)** Fátima **E)** Elvira

22 Blancanieves quiere regalar un montón de monedas a los siete enanitos siguiendo estas normas: la media de los siete ha de ser siete; todos recibirán una cantidad diferente; ninguno se quedará sin monedas; y Gruñón recibirá la máxima cantidad posible de monedas. ¿Cuántas monedas debe dar a Gruñón?

A) 14 **B)** 28 **C)** 49 **D)** 43 **E)** 77

23 Con ocho triángulos rectángulos iguales hemos construido esta figura en la que se aprecian tres cuadrados. El lado del cuadrado mayor mide 17 cm y el del pequeño, 7cm. ¿Cuánto mide, en cm, el lado del cuadrado mediano?



A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13

E) 14

24 ¿Cuál es la suma de las cifras del menor múltiplo de 24 que acaba en 24 y que no es 24?

A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

25 Silencio en el estadio, escuchad lo que está diciendo Don Retorcido a sus alumnos: los 7/10 de vosotros me tenéis frito; los 7/8 habéis suspendido; los 13/18 no hacéis los deberes; y además, 44/45 de vosotros no vais a saber resolver este problema. ¿Cuántos alumnos tiene Don Retorcido si sabemos que tiene más de 2200 y menos de 2800?

A) 2520 **B)** 2400 **C)** 2360 **D)** 2600 **E)** 2850

XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 29 de febrero de 2012

NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

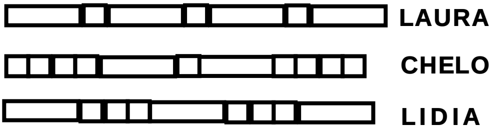
ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

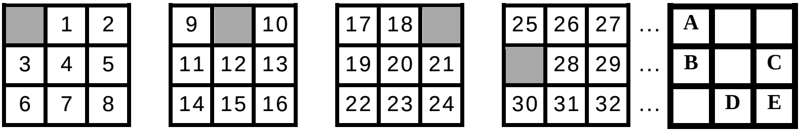
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Aviraneta
www.profes.net

1 Tres amigas han diseñado sus cinturones con piezas de cuero de dos tamaños diferentes. Si el cinturón de Laura mide 102 cm y el de Chelo mide 96 cm, ¿cuántos cm mide el cinturón de Lidia?



A) 97 **B)** 98 **C)** 99 **D)** 100 **E)** 101

2 Fíjate como se forma la siguiente serie:



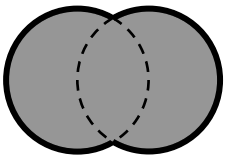
Si continuamos colocando números, ¿en qué posición caerá el número 2012?

A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

3 Raúl completó el trayecto desde Principio a Final en tres horas. Su hermano Carlos empezó a la vez, pero como su velocidad era 5 km/h más lenta que la de Raúl, llegó a Final 20 minutos más tarde que su hermano. ¿Cuántos kilómetros separan Principio de Final?

A) 300 **B)** 250 **C)** 200 **D)** 150 **E)** 100

4 En la figura se aprecian dos circunferencias de perímetro 6, colocadas de tal manera que cada una pasa por el centro de la otra. ¿Qué perímetro tiene la figura sombreada?



A) 12 **B)** 10 **C)** 6 **D)** 9

E) 8

5 ¡Maldita sea!, mi impresora ha soltado un manchón redondo en mi ecuación:

$\frac{x}{2}-\frac{x+\bullet}{4}=x-10$. Recuerdo que la solución era $x=12$ y entonces, si pienso un poco, puedo asegurar que el número oculto por la mancha es el...

A) 4 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 14 **E)** 16

6 Felisa elige seis números primos distintos y menores que 20: A, B, C, D, E, F. Jugando con ellos observa que $A + B = C + D = E + F$.
¿Cuál es el valor de $E + F$?

A) 24 **B)** 22 **C)** 20 **D)** 18 **E)** 17

7 Para celebrar mi cumpleaños compré nueces, hice bolsas de quince y me sobraron diez. Como no vinieron dos amigos, repartí dos nueces más por cabeza y me comí las cuatro que quedaron. ¿Cuántos amigos vinieron a mi fiesta?

A) 25 **B)** 24 C) 22 **D)** 20 **E)** 18

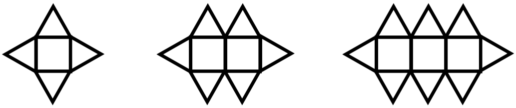
8 Si a y $b$son enteros positivos tales que $(a + 2b)(a - b) = 10$, ¿cuál es el valor de $(2a - b)$?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

9 Merche reparte su fortuna de 192 euros en tres partes proporcionales a las edades de sus primos que tienen 2, 4 y 6 años. ¿Cuántos euros recibe el menor?

A) 7,50 **B)** 33 **C)** 32 **D)** 16 **E)** 22

10 Juanje se ha jubilado y dedica su tiempo a hacer construcciones con palillos siguiendo la pauta que ves en la figura:



Una tarde construyó una inmensa, batiendo su propio récord. Francisco le preguntó: *¿Cuántos palillos has utilizado para batir tu récord?* Juanje, socarrón, contestó: *Adivínalo tú, la respuesta solo puede ser uno de estos cinco números*.

A) 7 165 **B)** 176 **C)** 3 514 **D)** 2 483 **E)** 10 000

11 Las rectas $x - y = 2$ y $mx - y + 3 = 0$ se cortan en un punto cuyas coordenadas (x, y) son ambas positivas. En este caso se puede asegurar que:

A) $m = 1$ **B)** $m < 1$ **C)** $m > \frac{-3}{2}$ **D)** $\frac{-3}{2} < m < 1$ **E)** $m = 2$

12 Cuatro amigas, Ana, Bárbara, Clara y Daniela, forman un cuarteto musical y sabemos que:

a) La que toca el clarinete tiene pecas.
b) Ni Ana ni Clara tocan la guitarra.
c) Solo la flautista, la violinista y Ana practican natación.
d) Ni Clara ni Daniela tocan instrumentos de viento.

¿Cuál de estas afirmaciones es cierta?

A) Ana no tiene pecas **B)** Bárbara toca la flauta **C)** Clara toca la flauta
D) Daniela hace natación **E)** Bárbara toca el clarinete

13 Dos triángulos isósceles distintos tienen igual área. En ambos, sus lados iguales miden 26 cm. Si la base de uno de ellos mide 48 cm, la longitud de la base del otro, en cm, es:

A) 24 **B)** 22 **C)** 21 **D)** 20 **E)** 18

14 ¿Cuántos números de tres cifras cumplen que una de sus cifras es el producto de las otras dos?

A) 48 **B)** 49 **C)** 51 **D)** 52 **E)** 55

15 De los siguientes números, $\frac{17}{2^{10}}$, $\frac{1001}{999}$, $\frac{7821}{110}$, $\frac{5^{-3}}{3^{-5}}$, $\frac{625}{85}$, ¿cuántos son decimales exactos?

A) 5 **B)** 4 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 1

16 Consideramos el primer número natural que es múltiplo de 36 y que la suma de sus cifras es 36. ¿Cuántas cifras impares tiene?

A) 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1 **E)** Ninguna

17 Esteban tira un dado y, a continuación, María vuelve a tirarlo. ¿Cuál es la probabilidad de que el número obtenido por Esteban sea mayor que el de María?

A) $\frac{5}{6}$ **B)** $\frac{5}{12}$ **C)** $\frac{5}{18}$ **D)** $\frac{5}{24}$ **E)** $\frac{1}{6}$

18 Los lados de un trapecio miden $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ y $2\sqrt{3}$. Si escribimos su área como $\dfrac{a\sqrt{b}}{c}$, siendo a, b y c enteros positivos, b el menor posible y $\dfrac{a}{c}$ irreducible, entonces $a+b+c$ es:

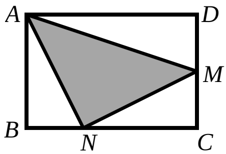
A) 12 **B)** 13 **C)** 14 **D)** 15 **E)** 16

19 Si el cociente de $a+2b$ entre $5b-a$ es $\dfrac{3}{5}$, ¿cuánto vale el cociente $\dfrac{a}{b}$?

A) $\dfrac{3}{8}$ **B)** $\dfrac{1}{2}$ **C)** $\dfrac{5}{8}$ **D)** $\dfrac{3}{4}$ **E)** $\dfrac{7}{8}$

20 El rectángulo *ABCD* tiene área 48; *M* es el punto medio del lado *CD*;

y $3 \cdot BN = BC$. ¿Cuál es el área del triángulo *AMN*?

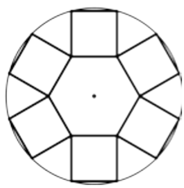


A) 24 **B)** 22 **C)** 20 **D)** 18 **E)** 16

21 Con esto de la crisis, los padres de Fernando le han bajado un 20% su paga mensual y los de Sofía, un 12% la suya. Si antes entre los dos sumaban 55 € al mes y ahora solo 46 €, ¿cuántos euros recibía Fernando más que Sofía antes de los recortes?

A) 2 **B)** 5 **C)** 10 **D)** 25 **E)** 30

22 Hemos pegado cuadrados exteriores a los lados de un hexágono regular. Si el perímetro del hexágono es 12 cm, ¿cuál es el radio de la circunferencia circunscrita a todos los cuadrados?



A) $\sqrt{8+4\sqrt{3}}$ **B)** 4 **C)** $2\sqrt{3}+1$ **D)** $\dfrac{5}{2}$

E) $3+\sqrt{3}$

23 Las caras de un cubo están marcadas con los seis divisores de 2012. Si lanzamos el dado dos veces, ¿cuál es la probabilidad de que la suma obtenida sea también un divisor de 2012?

A) 0 **B)** $\frac{1}{18}$ **C)** $\frac{1}{9}$ **D)** $\frac{1}{6}$ **E)** $\frac{1}{4}$

24 ¿Cuál es la razón del área de un cuadrado inscrito en un semicírculo de radio *R* y el área del cuadrado inscrito en un círculo completo con el mismo radio *R*?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{2}{3}$ **C)** $\frac{2}{5}$ **D)** $\frac{3}{4}$ **E)** $\frac{1}{4}$

25 La fracción $\frac{61}{40}$ puede escribirse en cascada de esta manera:

$$\frac{61}{40} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{a}{b}}}$$

en donde la fracción $\frac{a}{b}$ es irreducible. ¿Cuál es el valor de $a + b$?

A) 21 **B)** 20 **C)** 19 **D)** 18 **E)** 17

concurso de primavera MATEMÁTICAS

XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 29 de febrero de 2012

NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Aviraneta
www.profes.net

1 Si X e Y representan las siguientes sumas de progresiones aritméticas:

$$X = 10 + 12 + 14 + \ldots + 100, \qquad Y = 12 + 14 + \ldots + 102,$$

¿cuál es el valor de $Y - X$?

A) 92 **B)** 98 **C)** 100 **D)** 102 **E)** 112

2 JOSÉ: He pensado tres números positivos y quiero que adivines su suma.

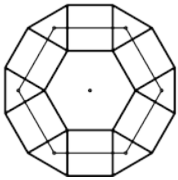
IVÁN: ¿Me darás alguna pista?

JOSÉ: Sí, si los multiplicas por parejas obtienes 156, 168 y 182.

IVÁN: (tic tac tic tac) Ya lo tengo, la suma de los tres es...

A) 34 **B)** 35 **C)** 36 **D)** 38 **E)** 39

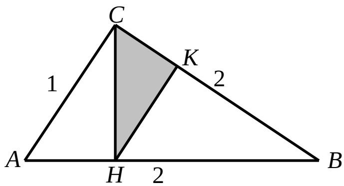
3 Hemos rodeado el hexágono regular central de la figura con cuadrados y triángulos equiláteros. Si el lado de ese hexágono mide 2 cm, ¿cuál es el área, en cm^2, del hexágono regular cuyos vértices son los centros de los triángulos equiláteros?



A) $18+6\sqrt{3}$ **B)** $24+3\sqrt{3}$ **C)** $12+8\sqrt{3}$

D) 24 **E)** $6+12\sqrt{3}$

4 En el triángulo rectángulo ABC de lados 15, 20 y 25 cm, los segmentos CH y HK son perpendiculares a la hipotenusa AB y al cateto BC, respectivamente. ¿Cuál es el área, en cm^2, del triángulo CHK?



A) 37,21 **B)** 34,56 **C)** 36

D) 37,5 **E)** 40

5 En un triángulo acutángulo, un lado mide 7 m, su ángulo opuesto 60º y otro lado 8 m. ¿Cuántos metros mide el tercer lado?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

6 Escribimos de menor a mayor las claves formadas usando dos unos, un tres, y dos cincos. ¿Qué clave ocupa el lugar decimoquinto?

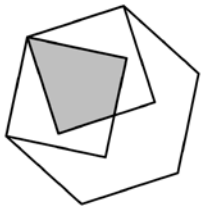
A) 15351 **B)** 31551 **C)** 35151 **D)** 35511 **E)** 55113

7 Don Retorcido te pide que calcules esta suma $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + 99^2$ pero, consciente de su dificultad, te sopla esta fórmula $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$.

¿Cuánto vale la suma pedida?

A) 250250 **B)** 198500 **C)** 187650 **D)** 166650 **E)** 156 650

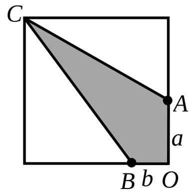
8 Sobre dos lados contiguos de un hexágono regular de lado 1 construimos dos cuadrados. ¿Qué área tiene la zona que comparten estos dos cuadrados?



A) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ **B)** $\frac{2}{3}$ **C)** $2\sqrt{3}$ **D)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

9 En un cuadrado de lado 1, los puntos A y B se mueven sobre sendos lados del cuadrado, determinando así dos segmentos $a = OA$ y $b = OB$. ¿Cuánto debe valer $a + b$ para que el área de la zona sombreada sea la mitad del área del cuadrado?



A) 1 **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\sqrt{2}$ **D)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

E) $\sqrt{2}-1$

10 El área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $y = |x-1|$ e $y = 2$ es:

A) 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1 **E)** $\frac{1}{2}$

11 En una prueba deportiva de mi instituto, estudiantes de 3º ESO, 4º ESO y 1º de Bachillerato, han obtenido una puntuación media de 12, 15 y 10, respectivamente. Si participaron el doble de estudiantes de 3º que de 4º y el doble de 4º que de 1º Bachillerato, ¿cuál es la puntuación media de los participantes?

A) 12 **B)** $\frac{37}{3}$ **C)** $\frac{88}{7}$ **D)** 13 **E)** 14

12 Si un conjunto A tiene 20 elementos y otro conjunto B tiene 15 elementos, ¿cuál es el menor número posible de elementos del conjunto $A \cup B$, es decir, el conjunto unión de A y B?

A) 5 **B)** 15 **C)** 20 **D)** 35 **E)** 300

13 Una de las ecuaciones siguientes no tiene solución. ¿Cuál?

A) $(x+7)^2 = 0$ **B)** $|-3x| + 5 = 0$ **C)** $\sqrt{-x} - 2 = 0$

D) $\sqrt{x} - 8 = 0$ **E)** $|-3x| - 4 = 0$

14 ¿Cuál de las siguientes funciones tiene el eje OY como eje de simetría?

A) $y = x^2 + x$ **B)** $y = x^2 \operatorname{sen} x$ **C)** $y = x \cos x$ **D)** $y = x \operatorname{sen} x$ **E)** $y = x^3$

15 Las rectas $y = a$, $y = -b$, $x = -c$, $x = d$, con a, b, c y d números positivos, delimitan un rectángulo. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa el área de dicho rectángulo?

A) $ac + ad + bc + bd$ **B)** $ac - ad + bc - bd$ **C)** $ac + ad - bc - bd$

D) $-ac - ad + bc + bd$ **E)** $ac - ad - bc + bd$

16 Ya sabes que en un partido de baloncesto hay tiros de 3 puntos, tiros de 2 puntos y tiros libres, que valen 1 punto cada uno. En un extraño partido, un equipo hizo tantos puntos con tiros de 3 como con tiros de 2 puntos y el número de aciertos en tiros libres superó en 1 al número de aciertos en tiros de 2 puntos. Si al final sumaron 61 puntos, ¿cuántos tiros libres encestaron?

A) 13 **B)** 14 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 17

17 En la lista de ocho números, A, B, C, D, E, F, G, H, tres seguidos cualesquiera suman 30. Si $C = 5$, ¿cuál es el valor de $A + H$?

A) 17 **B)** 18 **C)** 25 **D)** 26 **E)** 43

18 ¿Qué número de los siguientes es $\sqrt{9-6\sqrt{2}} + \sqrt{9+6\sqrt{2}}$?

A) $3\sqrt{2}$ **B)** $2\sqrt{6}$ **C)** $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$ **D)** $3\sqrt{3}$ **E)** 6

19 Lanzamos dos dados. La suma de los números obtenidos determina el diámetro, en metros, que tendrá un círculo de a m^2 de área y b m de perímetro. ¿Cuál es la probabilidad de que a sea menor que b?

A) $\frac{1}{36}$ **B)** $\frac{1}{12}$ **C)** $\frac{1}{6}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{5}{18}$

20 ¿Cuál es el mayor de los siguientes números?

A) $\cos 50º$ **B)** $sen\,50º$ **C)** $tg\,50º$ **D)** $\frac{1}{sen\,50º}$ **E)** $\frac{1}{\cos 50º}$

21 Si $x-\frac{1}{x}=y-\frac{1}{y}$ y $x\neq y$, ¿cuál es el valor de $x\cdot y$?

A) 4 **B)** 1 **C)** – 1 **D)** – 4 **E)** Falta información

22 En el triángulo *ABC*, las longitudes de los lados *AB*, *BC* y *AC* son 12, 24 y 18, respectivamente. La recta que pasa por su incentro y es paralela al lado *BC*, corta al lado *AB* en el punto *M* y al lado *AC* en el punto *N*. ¿Cuál es el perímetro del triángulo *AMN*?

A) 27 **B)** 30 **C)** 33 **D)** 36 **E)** 42

23 Luisa ha decidido ir andando a la oficina. El camino desde casa es llano durante un trecho, donde va a 4 km/h, y termina en un repecho en el que va a 10/3 km/h. A la vuelta, por el mismo camino baja a 5 km/h y mantiene los 4 km/h en la parte llana. Si entre la ida y la vuelta tarda dos horas y media, ¿a qué distancia, en km, está la oficina de su casa?

A) 7 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 3

24 Isa tiene un perro cuya edad actual, en meses, es la mitad que la edad de Isa, en años. Pero dentro de cinco años, la edad del perrito, en meses, será cinco unidades más que el doble de la edad de Isa, en años, en ese momento. ¿Cuál es la edad actual del perrito en meses?

A) 13 **B)** 14 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 17

25 En el rombo *ABCD*, de lado 2, el ángulo *B* mide 120º. ¿Cuál es el área de la región interior del rombo formada por los puntos que están más cerca del vértice *B* que de cualquier otro vértice?

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **B)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **D)** $1+\frac{\sqrt{3}}{3}$ **E)** 2

XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 21 de abril de 2012

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{\text{X}}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Aviraneta
www.profes.net

1

¿Cuántos puntos ha obtenido Calamardo en esta prueba de hoy si ha contestado correctamente a doce preguntas y mal a siete?

A) 60 **B)** 67 **C)** 95 **D)** 73 **E)** 66

2

¿Cuál de estas operaciones da como resultado el número mayor?

A) 20 – 12 **B)** $2 \times (0 + 1 +2)$ **C)** $(2 + 0) \times (1 + 2)$

D) $2 \times 0 \times 1 \times 2$ **E)** $(2 + 0 + 1)^2$

3

¿Qué fracción del triángulo está pintada de blanco?

A) $\frac{10}{37}$ **B)** $\frac{37}{64}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{23}{32}$

4

Lucía tiene 600 € y cada semana recibe 25 €. Julián tiene 1200 € y gasta 25 € por semana. ¿Dentro de cuántas semanas, a partir de ahora, los dos tendrán la misma cantidad de dinero?

A) Menos de 3 **B)** Entre 3 y 7 **C)** Entre 7 y 11 **D)** Entre 11 y 15 **E)** Más de 15

5

Don Retorcido es así, se ha inventado un doble Sudoku. En cada casilla hay que colocar una de las vocales, A, E, I, O y una de las consonantes, B, C, D, F, de tal manera que en cada fila y en cada columna aparezcan las cuatro vocales y las cuatro consonantes. Completa el doble Sudoku de don Retorcido y averigua qué combinación hay en la casilla gris.

AB	EC		
		OD	
			AF
I			

A) OB **B)** AD **C)** OF **D)** AF **E)** OD

6

Fernando entró en un ascensor de unos grandes almacenes. El ascensor, primero bajó tres plantas, a continuación bajó dos, después subió siete plantas, bajó cuatro y subió seis. Si, tras todo esto, Fernando se bajó en la 3ª planta, ¿en qué planta tomó el ascensor?

A) – 7 **B)** – 2 **C)** – 1 **D)** 1 **E)** 7

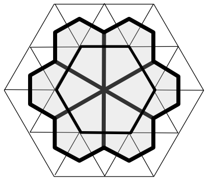
7

Los hermanos Pepitón son muy chistosos. Cuando les pregunté cuál era el mayor, respondieron así:

Ángel: *Yo no soy el mayor.*
Blas: *Carlos es mayor que yo.*
Carlos: *Dani es el mayor.*
Dani: *En mi familia no hay gemelos.*
Esteban: *Ángel nació el primero.*
Si solo uno de ellos mintió, ¿cuál es el mayor?

A) Ángel **B)** Blas **C)** Carlos **D)** Dani **E)** Esteban

8 Como se ve en la figura hemos rodeado un hexágono regular por triángulos equiláteros y luego, aprovechando sus centros, hemos dibujado una flor de seis pétalos. Si el área de un triángulo es de $3\ dm^2$, ¿cuál es, en dm^2, el área de la flor?

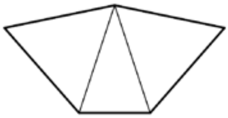


A) 54 **B)** 45 **C)** 42 **D)** 36 **E)** 30

9 Pedro tiene siete caramelos más que Alicia y Luisa tiene el doble de caramelos que Pedro. Si *n* representa el número de caramelos que tiene Alicia, ¿qué expresión representa el número de caramelos que tiene Luisa?

A) $(n+7)^2$ **B)** $2n + 7$ **C)** $n^2 + 7$ **D)** $n^2 + 14$ **E)** $2n + 14$

10 Ana dibuja dos triángulos equiláteros sobre los dos lados iguales de un triángulo isósceles obteniendo así un pentágono. Si el perímetro del triángulo isósceles es 18 cm y el perímetro del pentágono es 32 cm, ¿cuál es, en cm, el perímetro de uno de esos triángulos equiláteros?



A) 28 **B)** 20 **C)** 25 **D)** 24 **E)** 21

11 ¿Qué número se ha comido el Comenúmeros?

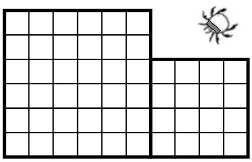
$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{\quad}{4}+\frac{5}{12}$$

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 7

12 Hemos juntado cuatro cuerdas que miden 4 metros, 33 decímetros, 222 centímetros y 1111 milímetros. ¿Cuántos milímetros nos faltan para llegar a 11 metros?

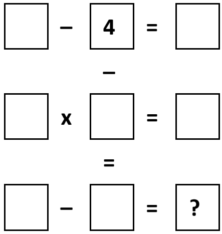
A) 369 **B)** 3690 **C)** 3,69 **D)** 36,9 **E)** 0,369

13 Una pulga salta con los ojos vendados a una casilla de una figura formada por dos tableros. Uno es de 6×6 y el otro de 4×4. Hemos puesto comidita en un tercio de las casillas del tablero grande y en un cuarto de las del pequeño. ¿Qué probabilidad tiene la pulguita de encontrar comida?



A) $\frac{2}{7}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{5}{12}$ **D)** $\frac{4}{13}$ **E)** $\frac{7}{24}$

14 La tía de Ana y Martita les ha dado dinero para ir a merendar y les ha dicho que, como buenas hermanas, ambas deben gastar exactamente lo mismo. Se sabe que una hamburguesa y cinco refrescos cuestan lo mismo que cinco chocolatinas y que dos hamburguesas cuestan tanto como dos refrescos y una chocolatina. Si Martita sólo comió chocolatinas y Ana merendó una hamburguesa y un refresco, ¿cuántas chocolatinas se comió la golosa de Martita?



A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

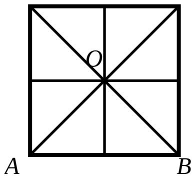
15 En la sonata de las matemáticas, cada instrumento va entrando poco a poco y en el compás número doce suenan todos juntos por primera vez. El violín toca cada cuatro compases; la viola cada seis; el violonchelo cada ocho; y el contrabajo cada diez. Si la sonata termina cuando los cuatro instrumentos vuelven a sonar a la vez, ¿cuántos compases tiene la sonata?

A) 24 **B)** 60 **C)** 72 **D)** 120 **E)** 132

16 El lagarto está llorando, la lagarta está llorando… Si por cada siete lágrimas que vierte el lagarto, la lagarta vierte cuatro, ¿cuántas lágrimas ha vertido la lagarta si entre los dos llevan 5533 lágrimas?

A) 503 **B)** 2011 **C)** 2012 **D)** 1006 **E)** 3521

17 Echando un vistazo a la figura enseguida vemos ocho triángulos, pero si seguimos observando, descubrimos otros más grandes, como por ejemplo, el *OAB*. ¿Cuántos triángulos hay en total?



A) 12 **B)** 14 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 18

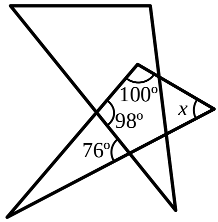
18 Todos en mi familia hemos nacido un 21 de abril. Si mi madre nació cuando mi abuela tenía 25 años, yo nací cuando mi madre tenía 36 años y hoy cumplo 11 años, ¿en qué año nació mi abuela?

A) 1925 **B)** 1940 **C)** 1937 **D)** 1929 **E)** 1951

19 ¿Cuántos números menores de mil cumplen que la suma de sus cifras es tres?

A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

20 ¿Cuánto mide el ángulo x en la figura de la derecha?

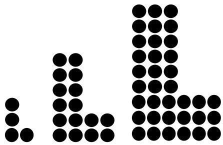


A) 58º **B)** 80º **C)** 56º **D)** 42º
E) 52º

21 Se sabe que las gallinas viven diez años y que su corazón late 400 veces por minuto. ¿Cuál de estas cantidades se aproxima más al número de veces que late el corazón de una gallina a lo largo de su vida?

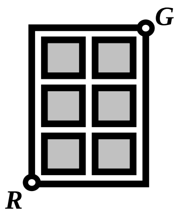
A) Veinte mil millones **B)** Dos mil millones **C)** Quinientos millones
D) Mil doscientos millones **E)** Doscientos millones

22 Lucía hace *eles* con moneditas de un céntimo. Primero hizo una pequeña, después otra un poco más grande y siguiendo este diseño una tercera… ¿Cuántas monedas necesitará para hacer la quinta **L**?



A) 100 **B)** 68 **C)** 125 **D)** 96 **E)** 250

23 Un gato quiere ir de G a R por el camino más corto recorriendo un segmento cada segundo y un ratón quiere ir de R a G de la misma forma. Si los dos comienzan su recorrido en el mismo instante y ninguno sabe por dónde va el otro, ¿en cuántos puntos del recorrido pueden encontrarse para desgracia del ratón?

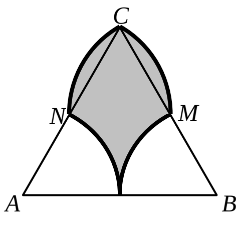


A) 2 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 8

24 Santi va a repartir chucherías entre sus cinco primos. A Laura le dio el doble que a Carolina; a Pablo cuatro más que a Laura; y a Manolo le dio el doble que a Elvira. Si en total repartió cuarenta chuches, veinte para las primas y otras veinte para los primos, ¿cuántas chuches se llevó Pablo?

A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 12 **E)** 16

25 En un triángulo equilátero ABC, hemos dibujado una punta de lanza usando arcos con centros en los vértices A y B, y en los puntos medios, M y N, de los lados AC y BC. Todos los arcos tienen como radio la mitad del lado del triángulo. Si el triángulo tiene 12 dm^2 de área, ¿cuál es, en dm^2, el área de la punta de lanza?



A) 9 **B)** 7,5 **C)** 6 **D)** 4 **E)** 3

XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 21 de abril de 2012

NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Aviraneta
www.profes.net

1 En el concurso del año pasado, por cada respuesta correcta obtenías 5 puntos; 2 si la dejabas en blanco; y cero si fallabas. Como ves, este año ha cambiado el sistema de puntuación. Carmencita ha salido contenta de la prueba de hoy porque sabe que ha obtenido 88 puntos. Su profesora le ha dicho que con el sistema del pasado año hubiera llegado a 91 puntos. ¿Cuántas preguntas ha dejado en blanco Carmencita?

A) 5 **B)** 0 **C)** 9 **D)** 7 **E)** 3

2 Hace muchos años, el primer día de curso y antes de que don Retorcido entrara en clase, los estudiantes del Club de Matemáticas de su Instituto hicieron cábalas sobre su edad, escribiendo en la pizarra: 24, 28, 30, 32, 36, 39, 42, 44, 47 y 49. Cuando don Retorcido apareció en el aula y encontró las predicciones en la pizarra dijo: "la mitad por lo menos me creéis más joven; dos os habéis equivocado por un año; ah, y mi edad es un número primo". ¿Qué edad tenía don Retorcido en aquel curso?

A) 29 **B)** 31 **C)** 37 **D)** 43 **E)** 48

3 Los números a, b y c verifican $0 < a < b < c$. De las siguientes desigualdades, ¿cuál es imposible que se dé?

A) $a \cdot b < c$ **B)** $a \cdot c < b$ **C)** $a + b < c$ **D)** $b : c < a$ **E)** $a + c < b$

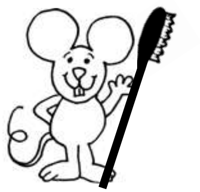
4 ¿De cuántas formas puede escribirse el número 100 001 como suma de dos números primos?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

5 La base menor de un trapecio mide 50 cm, la altura 12 cm y los lados no paralelos miden 15 cm y 20 cm. ¿Cuál es su área en cm^2?

A) 600 **B)** 650 **C)** 700 **D)** 750 **E)** 800

6 El cepillo de dientes del ratoncito Pérez está fabricado con el mismo material y tiene idéntica forma que el de Súper Ratón. Si el cepillo de Súper Ratón pesa 54 gramos y es tres veces más largo que el de Pérez, ¿cuántos gramos pesa el cepillito de Pérez?

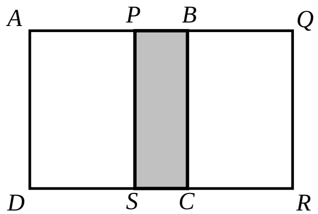


A) 10 **B)** 18 **C)** 51 **D)** 2 **E)** 1

7 María, Joaquín, Esteban y Carmen están comiendo en una mesa cuadrada festejando que Esteban tiene novia. ¿Cuál es la probabilidad de que Carmen esté sentada enfrente de Esteban?

A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{3}{4}$

8 Los cuadrados *ABCD* y *PQRS* son iguales, de lado 15. Si las dimensiones del rectángulo *AQRD* son 25 y 15, ¿qué porcentaje del área de dicho rectángulo representa la figura sombreada?



A) 15% **B)** 18% **C)** 20%
D) 24% **E)** 25%

9 Don Retorcido ha pedido a cada uno de sus diez millones de alumnos que traiga un cubito de un milímetro de arista lleno de agua. Les hace vaciarlos en un gran cubo de un metro de arista. ¿A qué altura llega el agua en el gran cubo?

A) 1 mm **B)** 1 cm **C)** 1 dm **D)** 1 m **E)** El agua rebosa

10 Juanje mide uno de los ángulos de un triángulo isósceles y le sale 70º. Francisco mide otro ángulo. ¿Cuál es la suma de los tres posibles valores del ángulo medido por Francisco?

A) 180º **B)** 165º **C)** 140º **D)** 125º **E)** 95º

11 En un sombrero hay cuatro tarjetas numeradas: 1, 2, 3, 4. Sacamos a la vez tres de ellas y formamos un número de tres cifras. ¿Cuál es la probabilidad de que el número formado sea múltiplo de tres?

A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{3}{4}$

12 En un cubo que contiene 30 litros de pintura, el 25% es pintura roja, el 30% pintura amarilla y el 45% agua. Si añadimos 5 litros de pintura amarilla, ¿cuál es el porcentaje de pintura amarilla en la nueva mezcla?

A) 25% **B)** 35% **C)** 40% **D)** 45% **E)** 50%

13 ¿Cuántos números enteros de cuatro cifras diferentes verifican que son múltiplos de 5 y que la mayor de sus cifras es un 5?

A) 24 **B)** 48 **C)** 60 **D)** 84 **E)** 108

14 Si *A*, *B*, *C* y *D* son cifras diferentes y el producto del número de tres cifras *ABA* por el número de dos cifras *CD* es el número de cuatro cifras *CDCD*, entonces *A* + *B* es igual a...

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

15 Con los números 1, 2, 3, 4 y 6, ¿cuántas fracciones distintas (es decir, que no sean equivalentes) puedes formar?

A) 25 **B)** 21 **C)** 18 **D)** 15 **E)** 13

16 Si x e y son números enteros positivos, lo más pequeños posibles para que $360 \cdot x$ sea un cuadrado perfecto y $360 \cdot y$ sea un cubo perfecto, entonces $x + y$ debe ser igual a:

A) 80 **B)** 85 **C)** 115 **D)** 165 **E)** 610

17 Un distribuidor vende cajas de bolígrafos a 5 euros y para aumentar la venta hace las siguientes ofertas: "A partir de 20 cajas, te cobro 4 euros por cada caja extra y, además, por cada seis cajas que compres te regalo una más". ¿Cuántas cajas de bolígrafos conseguirás por 228 euros?

A) 52 **B)** 60 **C)** 57 **D)** 66 **E)** 45

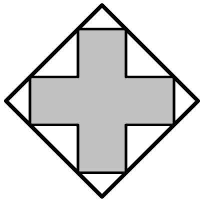
18 Al dividir un número entre 60 obtenemos cociente impar y 12 de resto. Si dividimos el mismo número por 120, el resto será:

A) 12 **B)** 24 **C)** 48 **D)** 60 **E)** 72

19 Al tirar un dado normal dos veces, ¿cuál es la probabilidad de que el primer número sea mayor o igual que el segundo?

A) $\frac{1}{6}$ **B)** $\frac{5}{12}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{7}{12}$ **E)** $\frac{5}{6}$

20 Una cruz compuesta por cinco cuadrados iguales está inscrita en un cuadrado. Si el área de la cruz es de 25 cm^2, ¿cuál es, en cm^2, el área del cuadrado?



A) 30 **B)** 32 **C)** 36 **D)** 40 **E)** 48

21 ¿Cuál es el dígito de las unidades del número 7^{2012}?

A) 0 **B)** 1 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 7

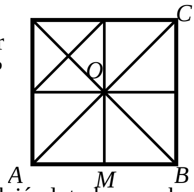
22 El resto que queda al dividir $2 \cdot 10^{10} + 1$ entre 6 es:

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 5

23 Rubén se ha encontrado un cajón lleno de palillos y se ha puesto a construir una cuadrícula de dos filas para colocar su colección de insectos, como puedes apreciar en la figura. Cuando haya colocado el palillo número 2012, ¿cuántos insectos podrá guardar?

A) 2012 **B)** 402 **C)** 2005 **D)** 4024 **E)** 804

24 Al observar la figura, vemos muchos triángulos, como por ejemplo, *AMO*, *ABC* y *ABO*. ¿Cuántos triángulos hay en total?



A) 18 **B)** 20 **C)** 22 **D)** 24 **E)** 26

25 Don Retorcido quiere despedirse hasta el próximo concurso dejándote buen sabor de boca. Te regala una cesta con fresas. Fíjate, faltan 132 fresas para que el número de fresas sea múltiplo de 195 y sobran 5 para que sea múltiplo de 37. Si la respuesta correcta es una de estas cinco, ¿cuántas fresas te ha regalado don Retorcido?

A) 2208 **B)** 2013 **C)** 1855 **D)** 1818 **E)** 1781

XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 21 de abril de 2012

NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{\text{X}}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

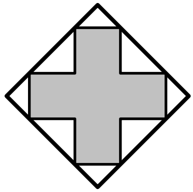
COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Aviraneta
www.profes.net

1 ¿Cuántas parejas de enteros (m, n) satisfacen la ecuación $m + n = mn$?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** Más de 4

2 Una cruz compuesta por cinco cuadrados iguales está inscrita (como se ve en la figura) en un cuadrado. Si el área de la cruz es de 40 cm^2, ¿cuál es, en cm, el perímetro del cuadrado?



A) 30 **B)** 32 **C)** 36 **D)** 40 **E)** 48

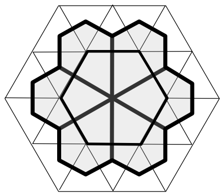
3 El precio de un piso ha tenido las siguientes variaciones en los últimos 5 años: sube el 10%, sube el 20%, baja el 5%, baja el 10%, baja el 5%. ¿Qué porcentaje se aproxima mejor a la variación total?

A) Sube el 5 % **B)** Sube el 10 % **C)** Baja el 20 % **D)** Baja el 2 % **E)** Sube el 7 %

4 Ángel, Bea y Carlos tienen entre los tres 37 euros. Ángel y Dani tienen 20. Carlos y Dani 25. Bea, Carlos y Dani tienen 43 euros. ¿Cuántos euros tiene Ángel?

A) 7 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 16 **E)** 18

5 Como se ve en la figura hemos rodeado un hexágono regular por triángulos equiláteros, y luego aprovechando sus centros hemos dibujado una flor de seis pétalos. Si el área del hexágono interior de partida es de 24 dm^2, ¿cuál es, en dm^2, el área de la flor?



A) 42 **B)** 45 **C)** 48 **D)** 56 **E)** 60

6 Si m y n son las soluciones de $2x^2 - 12x + 3 = 0$, el valor de $\frac{n}{m} + \frac{m}{n}$ es:

A) 11 **B)** $\frac{9}{4}$ **C)** 22 **D)** 2 **E)** $\frac{4}{9}$

7 El patio de una casa andaluza mide 10 m × 6 m. Queremos cubrirlo con baldosines cuadrados de igual tamaño. ¿Qué número mínimo de éstos habría que emplear si los hay de las siguientes medidas: 5, 6, 7, 8, 9 y 12 cm de lado?

A) 6000 **B)** 9375 **C)** 10 **D)** 6 **E)** 60

8 Si a y b son números positivos tales que $a < b$, $a \cdot b = 6$ y $a + b = 5$, la suma de las cifras del resultado de $a^a\left(\left(a^b\right)^b - b^a\right)$ es:

A) 9 **B)** 8 **C)** 7 **D)** 6 **E)** 5

9 Una esfera de volumen $a\pi$ m^3 tiene una superficie exterior de $b\pi$ m^2, donde a y b son números enteros de cuatro cifras cada uno. ¿Cuál es el radio de dicha esfera?

A) 18 **B)** 17 **C)** 15 **D)** 12 **E)** 9

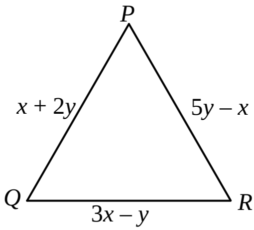
10 La solución entera de la ecuación $2^{2x^2-9x+4} = 5^{x^2-x-12}$ es:

A) 7 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 0

11 Hay solamente dos números de dos cifras que son el triple del producto de sus cifras. ¿Cuál es el producto de estos dos números?

A) 300 **B)** 360 **C)** 420 **D)** 540 **E)** 288

12 Las longitudes de los lados del triángulo equilátero PQR son las que se muestran en la figura. ¿Cuál de las siguientes parejas **no** es posible que represente a valores de x e y?



A) $x = 18$, $y = 12$ **B)** $x = 15$, $y = 10$

C) $x = 12$, $y = 8$ **D)** $x = 10$, $y = 6$

E) $x = 3$, $y = 2$

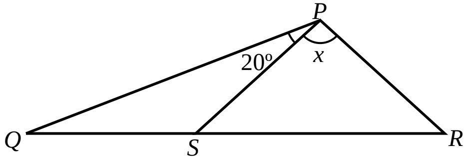
13 ¿Cuál es valor de la suma $P + Q + R$ en la multiplicación de la derecha?

$$\begin{array}{rcccccc} & & & \mathbf{P} & \mathbf{Q} & \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \times & & & & \mathbf{R} & \mathbf{R} & \mathbf{R} \\ \hline & \mathbf{6} & \mathbf{3} & \mathbf{9} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{7} \end{array}$$

A) 13 **B)** 12 **C)** 11

D) 10 **E)** 9

14 En el triángulo PQR, S es un punto del lado QR tal que $QS = SP = PR$. Si el ángulo $QPS = 20º$, ¿cuál es el valor del ángulo marcado con x?

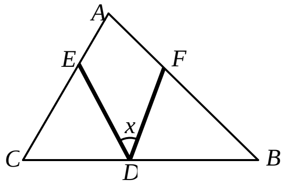


A) 80º **B)** 85º **C)** 90º **D)** 95º **E)** 100º

15 Si $4x - y = 5$, $4y - z = 7$ y $4z - x = 18$, ¿cuál es el valor de $x + y + z$?

A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

16 En el triángulo *ABC*, el ángulo $A = 80º$. Si los puntos *D*, *E* y *F*, en los lados *BC*, *AC* y *AB* respectivamente verifican que $CE = CD$ y $BF = BD$, el ángulo *x* es igual a:



A) 30º **B)** 40º **C)** 50º
D) 65º **E)** 70º

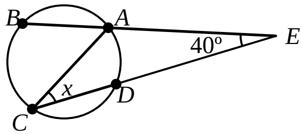
17 Si *x* e *y* son positivos, entonces $\left(2x+\frac{y}{2}\right)^{-1}\cdot\left[(2x)^{-1}+\left(\frac{y}{2}\right)^{-1}\right]$ es igual a:

A) 1 **B)** xy^{-1} **C)** $x^{-1}y$ **D)** $(xy)^{-1}$ **E)** $x + y^{-1}$

18 Si $a\cdot b\cdot c$ K 0, el conjunto de los valores que puede tomar el número $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$ es:

A) {0} **B)** {–4, 0, 4} **C)** {–4, –2, 0, 2, 4} **D)** {–4, –2, 2, 4} **E)** {–2, 0, 2}

19 En la figura que ves, el ángulo *E* es de 40º y los arcos *AB*, *BC* y *CD* son de igual longitud. ¿Cuál es el valor del ángulo *x*?



A) 10º **B)** 15º **C)** 20º
D) 22,5º **E)** 30º

20 Si $(3x-1)^7 = a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, entonces la suma de los coeficientes $a_7 + a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$ es igual a:

A) 0 **B)** 1 **C)** 64 **D)** –64 **E)** 128

21 Dentro de unos meses, la edad de Joaquín será 16 años más que la suma de las edades de María y Mar y además el cuadrado de la edad de Joaquín será 1632 más que el cuadrado de la suma de las edades de María y Mar. ¿Cuál será, en ese momento, la suma de las edades de Joaquín, María y Mar?

A) 64 **B)** 94 **C)** 96 **D)** 102 **E)** 140

22 El resto de dividir 7^{25} entre 9 es

A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 8

23 Las gráficas de $y = -|x + 8| + 6$, $y = 0$ e $y = x + k$ determinan en el segundo cuadrante un trapecio. Si el área de dicho trapecio es 20, el valor de k es:

A) 10 **B)** 9 **C)** 8 **D)** 7 **E)** 6

24 En el rectángulo $ABCD$, de lados $AB = 12$ y $BC = 8$, elegimos al azar un punto P. ¿Cuál es la probabilidad de que el área del triángulo PBC sea mayor que 20?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{7}{12}$ **C)** $\frac{19}{24}$ **D)** $\frac{5}{6}$ **E)** 1

25 La suma de los 50 primeros términos de la sucesión 1, 3, –5, 7, 9, –11, 13, 15, –17, 19,… es:

A) 101 **B)** 799 **C)** 900 **D)** 775 **E)** 250

XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 21 de abril de 2012

NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Aviraneta
www.profes.net

1 Al intentar multiplicar los enteros positivos a y b, siendo a un número de dos cifras, Errol cambió el orden de las cifras de a y obtuvo como resultado 161. ¿Cuál es el resultado correcto de $a \cdot b$?

A) 116 **B)** 161 **C)** 204 **D)** 214 **E)** 224

2 Si $f(x) = 3^x + 5$, el dominio de f^{-3} es:

A) $(0, +\infty)$ **B)** $(5, +\infty)$ **C)** $(8, +\infty)$ **D)** $(-\infty, +\infty)$ **E)** $(3, +\infty)$

3 ¿Cuál es el producto de las soluciones de la ecuación $\sqrt{5|x|+8} = \sqrt{x^2 - 16}$?

A) – 64 **B)** – 24 **C)** – 9 **D)** 24 **E)** 576

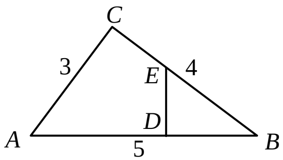
4 Sea $f(x)$ una función tal que $f(x) + 2f(-x) = sen\, x$ para todo número real x. ¿Cuál es el valor de $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$?

A) -1 **B)** $-\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** 1 **E)** 2

5 De una larga lista de problemas, los alumnos de Marta hicieron en clase un tercio del total y dos más en casa. Al día siguiente volvieron a hacer en clase un tercio de los que les quedaban y en casa otros cuatro más. Si para el tercer día solamente quedaban ocho problemas por hacer, ¿cuántos problemas había en la lista?

A) 30 **B)** 39 **C)** 48 **D)** 57 **E)** 66

6 En el triángulo ABC de la figura, de lados 3, 4 y 5, el segmento DE es perpendicular al segmento AB. Si el área del triángulo EBD es un tercio del área del triángulo ABC, ¿cuál es la longitud del segmento DB?



A) $\frac{4}{3}$ **B)** 5 **C)** $\frac{9}{4}$ **D)** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ **E)** $\frac{5}{2}$

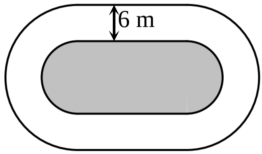
7 Considera el conjunto de números $\{1, 10, 10^2, \ldots, 10^{10}\}$. ¿Cuál es el entero más próximo al cociente entre el mayor elemento del conjunto y la suma de los diez restantes?

A) 1 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 101

8 En una reunión de 52 personas, ¿cuál es el mayor valor de n para el que la afirmación "Al menos n personas de esta reunión cumplen años el mismo mes" sea siempre verdadera?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 12

9 Esteban corre cada día, siempre a la misma velocidad, dando vueltas a una pista como la de la figura, de 6 m de ancha, rectangular y cerrada por semicircunferencias. Si corre "por fuera" tarda 6 segundos más que si lo hace "por dentro" en dar una vuelta completa. ¿Cuál es la velocidad de Esteban en m/s?



A) π **B)** 2π **C)** $\frac{7\pi}{3}$ **D)** $\frac{8\pi}{3}$ **E)** 3π

10 Seleccionamos al azar dos números reales del intervalo [–20, 10]. ¿Cuál es la probabilidad de que su producto sea positivo?

A) $\frac{1}{9}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{4}{9}$ **D)** $\frac{5}{9}$ **E)** $\frac{2}{3}$

11 ¿Cuál es el perímetro de un parking rectangular de 25 m de diagonal y 168 m^2 de área?

A) 52 m **B)** 58 m **C)** 62 m **D)** 68 m **E)** 70 m

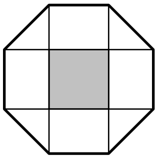
12 Representamos con @ la operación $a@b = \frac{a+b}{2}$ siendo a y b números reales cualesquiera. De las siguientes propiedades, ¿cuáles verifica esta operación?

I: $x@(y+z) = (x@y) + (x@z)$; II: $x + (y@z) = (x+y)@(x+z)$;

III: $x@(y@z) = (x@y)@(x@z)$

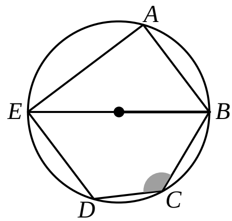
A) Solamente I **B)** Solamente II **C)** Solamente III
D) Solamente I y III **E)** Solamente II y III

13 En una tirada de dardos, la diana tiene forma de octógono regular. Si el dardo puede caer con igual probabilidad en cualquier punto de la diana, ¿cuál es la probabilidad de que caiga en el cuadrado sombreado?



A) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ **D)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **E)** $2-\sqrt{2}$

14 En la circunferencia de diámetro EB las cuerdas AB y ED son paralelas. Si el cociente entre la medida de los ángulos $A\hat{E}B$ y $A\hat{B}E$ es $\frac{4}{5}$, ¿cuál es la medida del ángulo $B\hat{C}D$?



A) 120º **B)** 125º **C)** 130º **D)** 135º **E)** 140º

15 Las rectas r_1 y r_2 son simétricas respecto de la recta $y = x$. Si la ecuación de r_1 es $y = ax + b$ con $a \neq 0$, la ecuación de r_2 es:

A) $y = \frac{1}{a}x + b$ **B)** $-y = -\frac{1}{a}x + b$ **C)** $y = -\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$

D) $y = \frac{1}{a}x + \frac{b}{a}$ **E)** $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$

16 Si las longitudes de los tres lados de un triángulo rectángulo vienen dadas por números enteros en progresión aritmética, la longitud de uno de ellos podría ser:

A) 22 **B)** 58 **C)** 81 **D)** 91 **E)** 361

17 Si p, q y M son números positivos y $q < 100$, el número obtenido al crecer M el p % y, posteriormente, bajar el resultado en el q %, es mayor que M si y solo si:

A) $p > q$ **B)** $p > \frac{q}{100 - q}$ **C)** $p > \frac{q}{1 - q}$ **D)** $p > \frac{100q}{100 + q}$

E) $p > \frac{100q}{100 - q}$

18 Si $b > 1$, $x > 0$ y $(2x)^{\log_b 2} - (3x)^{\log_b 3} = 0$, x es igual a:

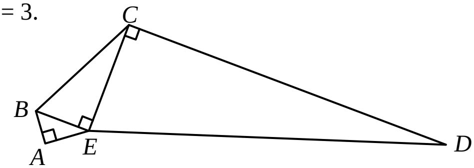
A) $\frac{1}{216}$ **B)** $\frac{1}{6}$ **C)** 1 **D)** 6

E) No se puede determinar

19 En un triángulo de lados a, b y c se verifica que $(a + b + c)\cdot(a + b - c) = 3ab$. El valor del ángulo opuesto al lado c es:

A) 15º **B)** 30º **C)** 45º **D)** 60º **E)** 150º

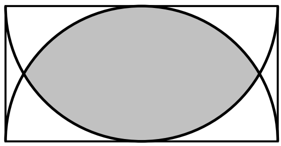
20 En la figura se ven tres triángulos rectángulos. Ninguno de estos triángulos es semejante a ninguno de los otros dos y todos los segmentos de la figura tienen longitud entera, siendo $AB = 3$.



Si el área del pentágono $ABCDE$ viene dada por un número de tres cifras, la suma de las cifras de dicho número es:

A) 6 **B)** 12 **C)** 14 **D)** 16 **E)** 18

21 Si la base del rectángulo mide 4 y la altura 2, ¿cuál es el área de la región sombreada limitada por dos semicircunferencias?



A) $\frac{4\pi}{3}+2\sqrt{3}$ **B)** $\frac{4\pi}{3}-2\sqrt{3}$ **C)** $\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}$

D) $\frac{8\pi}{3}+2\sqrt{3}$ **E)** $\frac{2\pi}{3}+2\sqrt{3}$

22 En el rectángulo $ABCD$ con $AB = 6$ y $BC = 3$, elegimos un punto M en el lado AB de forma que el ángulo $A\hat{M}D$ sea igual que el ángulo $C\hat{M}D$. ¿Cuánto mide este ángulo?

A) 71º **B)** 72º **C)** 73º **D)** 74º **E)** 75º

23 El área de la corona circular determinada por las circunferencias inscrita y circunscrita al cuadrado cuyos vértices son los afijos de raíces cuartas de – 4 es:

A) 2π **B)** 2 **C)** $\frac{2\pi}{3}$ **D)** π **E)** $\frac{3\pi}{2}$

24 En un torneo de tenis en el que participan N jugadores, el número de jugadores de élite viene dado por la fórmula $2^{1+[\lg_2(N-1)]} - N$, donde $[x]$ significa el mayor entero menor o igual que x. Si en dicho torneo hay 19 jugadores de élite y el número total de jugadores es menor que 120, calcula la suma de todos los posibles valores de N.

A) 38 **B)** 90 **C)** 154 **D)** 406 **E)** 1024

25 Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ con a, b y c enteros. Si $f(1) = 0$, $50 < f(7) < 60$, $70 < f(8) < 80$ y $5000k < f(100) < 5000(k + 1)$ para algún entero k, el valor de k es:

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (1ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**C**	1	**A**	1	**C**	1	**A**
2	**E**	2	**E**	2	**B**	2	**E**
3	**D**	3	**B**	3	**D**	3	**C**
4	**D**	4	**C**	4	**E**	4	**B**
5	**D**	5	**B**	5	**A**	5	**D**
6	**D**	6	**A**	6	**A**	6	**B**
7	**C**	7	**E**	7	**E**	7	**D**
8	**D**	8	**C**	8	**E**	8	**D**
9	**B**	9	**A**	9	**C**	9	**A**
10	**D**	10	**A**	10	**D**	10	**A**
11	**B**	11	**E**	11	**D**	11	**C**
12	**D**	12	**B**	12	**B**	12	**C**
13	**A**	13	**A**	13	**D**	13	**B**
14	**C**	14	**B**	14	**D**	14	**D**
15	**D**	15	**D**	15	**C**	15	**A**
16	**A**	16	**C**	16	**C**	16	**A**
17	**C**	17	**A**	17	**B**	17	**C**
18	**A**	18	**B**	18	**E**	18	**B**
19	**A**	19	**C**	19	**C**	19	**B**
20	**A**	20	**D**	20	**C**	20	**E**
21	**A**	21	**E**	21	**B**	21	**C**
22	**E**	22	**B**	22	**A**	22	**B**
23	**E**	23	**D**	23	**C**	23	**C**
24	**B**	24	**C**	24	**C**	24	**C**
25	**E**	25	**A**	25	**A**	25	**C**

XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (2ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**E**	1	**E**	1	**B**	1	**E**
2	**E**	2	**D**	2	**B**	2	**B**
3	**B**	3	**E**	3	**E**	3	**A**
4	**D**	4	**A**	4	**A**	4	**A**
5	**C**	5	**D**	5	**D**	5	**A**
6	**C**	6	**D**	6	**C**	6	**D**
7	**D**	7	**B**	7	**B**	7	**B**
8	**C**	8	**C**	8	**E**	8	**D**
9	**E**	9	**B**	9	**A**	9	**B**
10	**E**	10	**B**	10	**D**	10	**D**
11	**C**	11	**C**	11	**B**	11	**C**
12	**A**	12	**C**	12	**D**	12	**E**
13	**D**	13	**D**	13	**A**	13	**A**
14	**B**	14	**A**	14	**E**	14	**C**
15	**E**	15	**E**	15	**C**	15	**E**
16	**C**	16	**B**	16	**C**	16	**C**
17	**D**	17	**B**	17	**D**	17	**E**
18	**B**	18	**E**	18	**B**	18	**B**
19	**C**	19	**D**	19	**B**	19	**D**
20	**A**	20	**D**	20	**E**	20	**B**
21	**B**	21	**B**	21	**D**	21	**C**
22	**A**	22	**D**	22	**D**	22	**E**
23	**C**	23	**E**	23	**A**	23	**D**
24	**E**	24	**C**	24	**B**	24	**C**
25	**C**	25	**D**	25	**C**	25	**C**

XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel I

1. (C) Expresamos todas las longitudes en la misma unidad.
35,4 hm = 3,54 km 1200 m = 1,2 km
Por lo tanto la distancia que recorre la piedra es 3,54 + 1,2 = 4,74 km..

2. (E) 3,22 – 3,07 = 0,15 es el valor que corresponde a cinco intervalos.
0,15: 5 = 0,03 es el valor de cada intervalo de la recta.
Desde el punto A hasta el punto B hay 6 intervalos, luego B – A = 0,03 G 6 = 0,18.

3. (D) 54 min 20 s es lo mismo que 53 min 80 s.
53 min 80 s – 49 min 29 s = 4 min 51 s ha reducido su marca.

4. (D) Designemos a cada niña con la letra de su nombre y realicemos esta suma:
Entre Ana y Bea tienen 20 € → A + B = 20 €
Entre Ana y Clara tienen 180 € → A + C = 18 €
Entre Ana y Dunia tienen 15 € → <u>+ A + D = 15 €</u>
3 A + B + C + D = 53 €
Entre Bea, Clara y Dunia tienen 29 € → B + C + D = 29 €
Por lo tanto 3A + 29 = 53. Es decir, tres veces la cantidad que tiene Ana es:
53 – 29 = 24 € , luego Ana tiene 24: 3 = 8 € tiene Ana.
Como entre Ana y Dunia tienen 15 € resulta que Dunia tiene 15 – 8 = 7 €.

5. (D) Una tabla de doble entrada facilita la resolución del problema.
Empezamos a elaborar la tabla buscando la novia de Enrique que tiene una mascota que no es una iguana y su inicial no puede ser una E, es decir una ardilla, por lo tanto su novia ha de ser Inés.
Si continuamos buscando el novio de Ana deducimos que es Ignacio y su mascota tiene que ser un erizo. La tabla queda así:

	novios			mascotas		
	ANDRÉS	ENRIQUE	IGNACIO	ARDILLA	ERIZO	IGUANA
ANA	no	no	SI	no	SI	no
ELENA	SI	no	no	no	no	SI
INÉS	no	SI	no	SI	no	no

La única respuesta correcta es la D: "La novia de Ignacio tiene una ardilla"

6. (D) El menor número capicúa de tres cifras es 101.
El mayor número capicúa de tres cifras es 999.

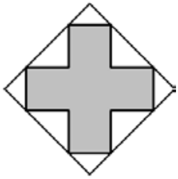
La diferencia es: 999 – 101 = 898.

7. (C) Si 6 leones se comen 4 gacelas en dos días, la mitad de leones con el doble número de días se comerán la misma cantidad de gacelas.
Tres leones se comerán 4 gacelas en cuatro días.

8. (D) Primero, eliminamos los números que cogen María, Merche y Pilar.
- María coge los números: 19, 28, 37, 46, 10, 20, 30, 40, 50
- Merche coge los números: 4, 6, 8, 22, 24, 26, 42, 44, 48
- Pilar coge los números: 3, 9, 12, 15, 18, 26, 27, 33, 36, 39, 45

Después, buscamos los números que lleven la cifra 1, que son los que regala el hombre del saco, y los sumamos.
1 + 11 + 13 + 14 + 16 + 17 + 31 + 41 = 144
La suma de los números que regala el hombre del saco es 144.

9. (B) El área del cuadrado es igual a la suma de las áreas de estas figuras:



- Los 5 cuadrados que forman la cruz.
- Los 4 triángulos rectángulos (grandes) cuyos catetos son segmentos de la cruz.
- Los 4 triángulos rectángulos (pequeños) cuya hipotenusa es un segmento de la cruz.

Cada uno de los segmentos de la cruz mide 24 : 12 = 2 cm
El área de la cruz es: $2 \times 2 \times 5 = 20$ cm^2
El área de los 4 triángulos grandes es $[(2 \times 2): 2] \times 4 = 8$ cm^2
El área de cada uno de los 4 triángulos pequeños es 1/4 del área de un cuadrado de la cruz; es decir, 1 cm^2 .
El área de los 4 triángulos pequeños es: 1 cm^2 $\times 4 = 4$ cm^2
El área del cuadrado es: 20 + 8 + 4 = 32 cm^2.

10. (D) De 09:59:59 a 10:00:00 cambian las seis cifras.
Lo mismo ocurre con 19:59:59 y 23:59:59 que cambian, respectivamente a 20:00:00 y 00:00:00.

11. (B) Sólo se pueden formar dos números primos: el 23 y el 53.

12.(D) Designemos por x al número de pasos que da la abuela a la ida. A la vuelta da los mismos.
A la ida Luca dará $2x$ saltitos y a la vuelta $3x$ pasitos, en total $5x$ movimientos.
$5x = 1860$ movimientos $\rightarrow x = 1860 : 5 = 372$.
María da 372 pasos.

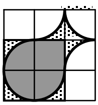
13.(A) 11 figuras verdes – 6 cuadrados verdes = 5 triángulos verdes.
13 triángulos – 5 triángulos verdes = 8 triángulos naranjas.

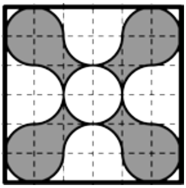
14.(C) La palabra AMAPOLA tiene 7 letras y como $7004 = 7 \times 1000 + 4$, escribirá 1000 veces la palabra AMAPOLA completa y 4 letras más de la siguiente palabra.
La última letra escrita es la 4ª, que corresponde a la letra P.

15.(D) 8 arañas × 8 patas por araña × 8 pelos por pata × 8 lazos por pelo = $8 \times 8 \times 8 \times 8 =$
$= 8^4$ lazos.

16.(A) Los números con la cifra 2 son:
2, 12, 22, 32, 42, 52, 62, 72, 82, 92, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29.
En total 19 números.
Los números con la cifra 6 son:
6, 16, 36, 46, 56, 66, 76, 86, 96, 60, 61, 63, 64, 65, 67, 68, 69.
En total 17 números.
19 + 17 = 36 números mal escritos.

17.(C) El cuadrado está dividido en 36 casillas.
Si nos fijamos en la figura observamos que cada una de las aspas cubre 4 casillas.
Las 4 aspas cubren $4 \times 4 = 16$ casillas.
16 casillas son $\frac{16}{36}$ del cuadrado y simplificando:
$\frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.





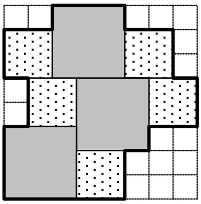
18.(A) Irá a nadar si ocurre una de estas dos cosas:
En la 1ª tirada sale un número par o en la 1ª tirada sale número impar y en la 2ª par.
Por lo tanto la probabilidad de ir a nadar es: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

19.(A) Utilizando la estrategia de ensayo y error se obtiene esta solución:

$\boxed{9}$	–	$\boxed{4}$	=	$\boxed{5}$
		–		
$\boxed{2}$	×	$\boxed{3}$	=	$\boxed{6}$
		=		
$\boxed{8}$	–	$\boxed{1}$	=	$\boxed{7}$

20.(A) El abuelo (a) come el triple que mi madre (m) → $a = 3m$
El abuelo come lo mismo que mi padre (p), mi hermano (h) y yo (y) → $a = p + h + y$
Yo como el doble que mi hermano → $y = 2h$
Mi padre come lo mismo que mi madre y yo → $p = m + y$
Si mi hermano merienda 2 galletas yo meriendo 4 galletas → $h = 2; y = 4$
$a = p + h + y$ → $a = p + 2 + 4$ → $a = p + 6$
$p = m + y$ → $p = m + 4$; como $a = 3m$ y $a = p + 6$, entonces $3m = p + 6$, sustituyendo p por su valor obtenemos: $3m = m + 4 + 6$ → $2m = 10$ → $m = 5$
Como $a = 3m$, entonces el abuelo merienda 3 × 5 = 15 galletas.

21.(A) Ana ha utilizado 5 cuadrados de 4 cm^2 y 3 de 9 cm^2, en total 8 cuadrados. Ver figura.



22.(E) Aplicamos la propiedad de la división entera:
Dividendo (D) = divisor (d) × cociente (c) + resto (r)
D = d × 14 + 10 D = (d – 2) × 16 + 4
Como el dividendo (D) es la cantidad de caramelos que se reparten, igualamos
D × 14 + 10 = (d – 2) × 16 + 4 → d × 14 + 10 = d × 16 – 32 + 4 → d = 38: 2 = 19.
19 – 2 = 17 niños vinieron a la fiesta.

23.(E) Si x es la medida del ángulo menor, los otros dos ángulos medirán, uno $x + 12$, y el otro $x + 24$. Como la suma de los tres ángulos de un triángulo es 180 grados, planteamos: $x + x + 12 + x + 24 = 180$ → $3x = 144$ → $x = 144: 3 = 48$.
El ángulo menor mide 48 grados, el ángulo mayor mide 48 + 24 = 72 grados.

24.(B) Para el primer cuadrado se necesitan 4 palillos, Cada uno de los siguientes cuadrados se forman multiplicando la medida del lado por 3 y añadiendo una unidad. Así, para formar el segundo cuadrado se necesitan 7 palillos (3 × 2 + 1), para formar el tercer cuadrado se necesitan 10 palillos (3 × 3 + 1, para formar el cuarto cuadrado se necesitan 13 palillos (4 × 3 + 1), ..., para formar el cuadrado número 100 se necesitan 301 palillos (100 × 3 + 1).

25.(E) Si hacemos el proceso inverso llegaremos al número inicial.

Sumamos 7.	17 + 7 = 24
Dividimos entre 2.	24 : 2 = 12
Restamos 5.	12 – 5 = 7
Multiplicamos por 3.	7 × 3 = 21
Restamos 2.	21 – 2 = 19

De donde se deduce que el número que le dijiste es 19.

También podemos plantear la igualdad $[(x + 2): 3 + 5] \times 2 - 7 = 17$ y de aquí deducir el valor de x.

XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel II

1. (A) Después del banquete de chuches, a Juanito le quedan 2/5 de sus gominolas que son 18 gominolas. De aquí deducimos que 1/5 de sus gominolas iniciales son 9 gominolas, por lo que al principio Juanito tenía un total de 45 gominolas. De manera similar podemos deducir: 3/8 de las gominotas de Olivia suponen 18 gominolas; 1/8 de sus gominotas son 6 gominolas; Olivia acudió con 48 gominolas. En total tenían 93 gominolas.

2. (E) La letra S corresponde a la cifra 1 ya que al sumar dos cifras como máximo puedo "llevarme una". La suma quedaría pues como se muestra a la derecha.

$$\begin{array}{rcccc} & & M & A & 1 \\ + & & 1 & A & L \\ \hline & 1 & O & 1 & O \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} & & 8 & 5 & 1 \\ + & & 1 & 5 & 9 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

La letra A ya solo puede ser 0 o 5 y además habernos "llevado una" de la suma precedente. Pero 0 no puede ser porque de esta manera la M sería 9 y la O sería también cero. Así pues, la letra A es 5 y la suma final queda como se ve a la izquierda.

3. (B) El área del rectangulito central es la resta entre el área del gran rectángulo y de los diez rectángulos iguales. La base del rectángulo grande mide $3 \cdot 3 + 5 = 14$ y la altura $2 \cdot 3 + 5 = 11$. Así, el gran rectángulo tiene área $14 \times 11 = 154$ cm^2 y cada rectángulo tiene área $5 \times 3 = 15$ cm^2. El área del rectangulito es $154 - 150 = 4$ cm^2.

4. (C) ¡Qué extraña competición! No tan extraña si se observa que todas las ranitas caen cada dos saltos en un punto que es múltiplo de 6. Aquí está la clave: en los múltiplos de 6. ¿Cuál es el múltiplo de 6 menor y más cercano a 2012? Si divides 2012 entre 6, podrás encontrarlo.

$$\begin{array}{r|l} 2012 & 6 \\ \cline{2-2} 2 & 335 \end{array}$$

El múltiplo que buscamos es $335 \times 6 = 2010$. Es decir, en el punto 2010 coinciden todas las ranitas y en el próximo salto la que caerá justo en el 2012 será Bing ya que su siguiente salto es de dos unidades y ¡zas! cae en el 2012.

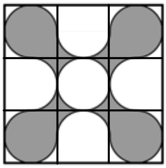
5. (B) Con ocho pantalones y diez camisas Don Retorcido puede combinarse de $8 \times 10 = 80$ maneras diferentes. Para llegar a mil utilizando sombreros, tendrá que buscar el menor número que multiplicado por 80 llegue o se pase de mil. Este número se calcula dividiendo $1000 : 80 = 12{,}5$. El menor número es 13. (Observa que $12 \times 80 = 960$ y $13 \times 80 = 1040$).

Don Retorcido debe comprarse un mínimo de trece sombreros.

6. (A) Las cinco ocasiones de más en las que Santi recogió la cocina suponen 5 × 1,50 = 7,50 euros. De esta manera, el resto de la ganancia, 61,50 – 7,50 = 54 euros, se obtuvo recogiendo la cocina y tendiendo la ropa el mismo número de veces. Como por estas dos tareas Santiago se lleva 1,50 + 0,75 = 2,25 euros, si dividimos, 54 : 2,25 = 24, concluimos que Santiago tendió la ropa 24 veces y recogió la cocina 29 veces, lo que hacen un total de 53 tareas.

7. (E) Parece lógico pensar que para obtener productos altos ninguno de los cuatro números debe ser 1.Busquemos ahora los grupos de cuatro números positivos distintos de 1 que sumen 10:
2, 2, 2, 4, su producto es 32.
2, 2, 3, 3, su producto es 36. ¡Este es el mayor producto!
Si te quedas con dudas por si algún cuarteto con unos tiene producto mayor...
1, 1, 1, 7, su producto es 7.
1, 1, 2, 6, su producto es 12.
1, 1, 3, 5, su producto es 15.
Los demás casos los dejamos para ti.

8. (C) Trazando unos segmentos auxiliares que dividen a los lados en tres partes iguales, vemos que ya es facilísimo resolver el problema. Cada una de las cuatro ánforas ocupa uno de los nueve cuadraditos interiores que se nos han formado. Como hay cuatro ánforas, la respuesta es 4/9.

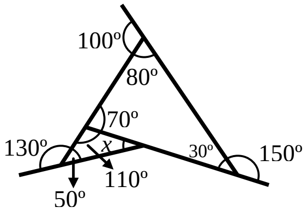


9. (A) Representando el peso de cada niña por su inicial podemos formar estas igualdades:

$$\left.\begin{aligned} A+B&=88\\ B+C&=91\\ C+D&=86 \end{aligned}\right\}$$

Queremos averiguar el valor de $A + D$ y, ¿cómo podemos deducirlo de las tres igualdades anteriores? A ver, hum,..., ¡ya está!, sumaremos la primera y la tercera igualdad y luego les restaremos la segunda igualdad:
$A+B+C+D-B-C=88+86-91$, es decir:
$A+D=83$. Ana y Dunia pesan juntas 83 kilogramos.

10.(A) En muchos problemas en los que piden calcular el valor de un ángulo cuando conocemos otros es muy socorrido formar triángulos ya que sabemos que los tres ángulos de un triángulo suman siempre 180º. Hagamos pues caso a este buen consejo prolongando un segmento como se muestra en el dibujo.



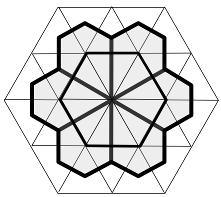
Y ya vamos calculando el valor de los ángulos interiores de esos dos triángulos formados hasta llegar a *x*, que vale 20º (180º – 50º –110º).

11.(E) Podemos razonar así: si la fotografía de Ana ocupa 16 cm^2, puede medir, por ejemplo, 8 cm de largo y 2 cm de ancho ya que 8 cm × 2 cm = 16 cm^2. La fotocopia tendrá medidas duplicadas, es decir, 16 cm de largo y 4 cm de ancho, lo que supone una superficie de 16 cm × 4 cm = 64 cm^2.
Observa que si supones otras medidas para la foto de 16 cm^2, como por ejemplo, 4 cm de largo y 4 cm de ancho, también vale el razonamiento. La superficie de la fotocopia es la de la fotografía multiplicada por 2^2. ¿Y si la fotocopia hubiera sido el triple de tamaño? Pues su superficie quedaría multiplicada por 3^2.

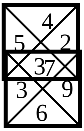
12.(B) En la cuadrícula inferior derecha de cada cuadrado caen siempre los múltiplos de ocho ordenados: 8, 16, 24, ... ¡Ya tenemos la pista! El múltiplo de ocho más cercano a 2012 y menor que él es 2008 = 251 × 8. Así pues, 2008 cae en la esquina inferior derecha, y basta con ir colocando 2009, 2010, 2011 y 2012, que cae en la casilla B

13.(A) Como en el peor de los casos Marta debe lanzar dos dados para decidir la actividad física que va a realizar, podemos suponer que Marta lanza siempre dos dados y actúa en consecuencia. (Puede que digas “pero si sale par el primero ya no hace falta lanzar el segundo” y es cierto, pero también aceptarás que no pasa nada por lanzar el segundo dado ya que no influye si salió par el primero. De esta manera pueden salir 36 resultados y nos aseguramos de que todos tienen la misma probabilidad de ocurrir.) Y ya podemos trabajar como sabemos, contaremos los casos totales (que son 36 = 6 × 6) y los casos favorables y responderemos. Los casos favorables empiezan por estos: (1,2) (1,4) (1,6) (2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6).... y ya vemos que van a salir 27 casos favorables, así que la probabilidad de que Marta vaya a nadar es $\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$.

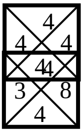
14.(B) En este tipo de problemas siempre buscamos subdividir la figura en partes iguales y luego basta con contar cuántas partes hay. Añadiendo las pocas líneas que mostramos vemos que la parte interior de la flor es un hexágono formado por seis triángulos, por lo que tiene 18 dm^2 de área. Y los pétalos de la flor lo forman 24 cuadriláteros como este: . Además cada tres de estos pétalos ocupan un triángulo, por tanto, los 24 pétalos ocuparán 8 triángulos, es decir, 24 cm^2. Así pues, el área de la flor es 24 + 18 = 42 cm^2.



15.(D) Hagamos primero cada una de las cuatro operaciones que aparecen en el cuadrado grande:

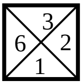


$$= \frac{5 \cdot 4 - 2}{3} = 6 \qquad = \frac{3 \cdot 7 - 9}{6} = 2$$



$$= \frac{4 \cdot 4 - 4}{4} = 3 \qquad = \frac{3 \cdot 4 - 8}{4} = 1$$

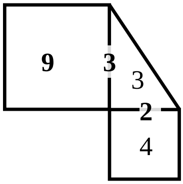
Por último, Cuadripín tuvo que hacer la operación final:



$$= \frac{6 \cdot 3 - 2}{1} = 16$$

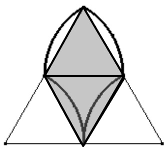
16.(C) Cada manzana que compra Ana le cuesta 1/3 de euro y luego vende cada manzana por 2/5 de euro, así pues en cada manzana gana 1/15 de euro (es la resta del precio de venta menos el precio de coste). Por tanto para ganar un euro debe comprar y vender 15 manzanas y para ganar los diez euros necesitará comprar y vender 150 manzanas,

17.(A) Como el área del cuadrado chico es 4, su lado (que coincide con la base del triángulo) es 2. Por tanto, la altura del triángulo debe ser 3 para que su área $\frac{2 \times 3}{2}$ sea 3, como indica el problema.
Ya está: el área del cuadrado grande es 3^2, es decir, 9.



18.(B) Vamos a calcular cuántas parejas distintas pueden formarse con ocho chicas. La primera chica puede emparejarse con las siete restantes; la segunda chica con las seis restantes ya que ya estaba emparejada con la primera; la tercera con las cinco restantes; etc. Así se forman 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28 parejas.
Con razonamiento similar vemos que pueden formarse 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 parejas con seis chicos.
Por tanto, podrán formarse un total de 28 × 15= 420 equipos.

19.(C) Si cogemos los dos lóbulos de la punta exteriores al triángulo y los colocamos en el interior del triángulo, vemos que la lanza ocupa justo la mitad del triángulo.
Así pues, el área de la lanza es 6 dm^2.



20. (D) Lo mejor es buscar con orden todos los posibles repartos respetando las condiciones del problema:

Gemelo 1	**A**	**A**	**A**	**R**	**R**	**R**	**R**	**V**	**V**	**V**
Gemelo 2	**R**	**R**	**V**	**A**	**A**	**V**	**V**	**A**	**R**	**R**
Jugador 3	**R**	**V**	**R**	**R**	**V**	**A**	**R**	**R**	**A**	**R**
Jugador 4	**V**	**R**	**R**	**V**	**R**	**R**	**A**	**R**	**R**	**A**

Hay un total de diez posibles repartos.

21.(E) En el casillero de Elvira están los libros de Carlos, así que ya podemos asignar con seguridad el primer casillero:

(F) Álvaro (V)	(F) Belén (V)	(F) Carlos (V)
(F) Dani (V)	(F) Elvira (V) Carlos	(F) Fátima (V)

En el casillero de Álvaro pueden estar los libros de Fátima o Belén pero examinando la última pista, deducimos que debemos descartar la opción de Fátima porque dice que sus libros están encima de los de Dani y si Fátima se coloca donde Álvaro quedaría ya encima de Dani pero Dani no puede estar en un casillero correcto. ¿Se entendió?

(F) Álvaro (V) Belén	(F) Belén (V) Álvaro	(F) Carlos (V)
(F) Dani (V)	(F) Elvira (V) Carlos	(F) Fátima (V)

Así pues, tenemos:
Como los libros de Fátima deben quedar por encima de los de Dani, entonces:
De esta forma el casillero de Dani quedará ocupado por los libros de Elvira.

(F) Álvaro (V) Belén	(F) Belén (V) Álvaro	(F) Carlos (V) Fátima
(F) Dani (V)	(F) Elvira (V) Carlos	(F) Fátima (V) Dani

22.(B) Como para que Gruñón tenga la máxima cantidad de monedas posibles, los otros seis de los enanitos deben recibir el menor número de monedas posible y además diferentes, éstos serán: 1, 2, 3, 4, 5 y 6, cuya suma es 21. Como la media de los siete debe ser 7, la suma total ha de ser 49, así pues, Blancanieves debe dar a Gruñón 28 monedas.

23.(D) Si llamamos A al cateto mayor y B al menor, los datos del problema nos aportan estas igualdades: $A + B = 17$ y $A - B = 7$. Si sumamos dichas igualdades vemos que: $A + B + A - B = 17 + 7$, es decir, $2A = 24$, o sea $A = 12$ y ya podemos deducir que $B = 5$.
El lado del cuadrado que nos piden es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 12 cm y 5 cm, que con el teorema de Pitágoras concluimos que mide 13 cm.

24.(C) Este problema puede resolverse rebuscando entre los números de tres cifras que acaban en 24 hasta encontrar alguno que sea múltiplo de 24. El único que encontramos es 624, cuyas cifras suman doce.

25.(A) El número total de alumnos debe ser múltiplo de todos los denominadores de las fracciones que aparecen, es decir múltiplo de su mcm (8, 10, 18, 45) = 360.
El único múltiplo de 360 comprendido entre 2200 y 2800 es $2520 = 7 \times 360$.

XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel III

1. (C) Si llamamos *x* a la longitud de la pieza más larga e *y* a la de la más corta, escribiremos:

$$\left.\begin{aligned} 4x + 3y &= 102 \\ 2x + 9y &= 96 \end{aligned}\right\}$$ Resolviendo el sistema, resulta $x = 21$, $y = 6$.

El cinturón de Lidia mide: $3x + 6y = 3 \cdot 21 + 6 \cdot 6 = 99$.

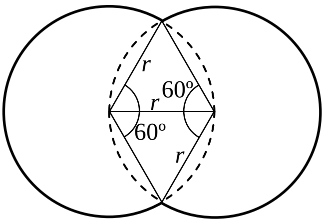
2. (B) Vemos que en cada cuadrado hay 8 números consecutivos. Si dividimos 2012 entre 8 obtenemos 251 de cociente y 4 de resto, luego el número 2012 está en el cuadrado nº 252 en la posición 4ª o 5ª (en esta última si estuviese libre una posición entre la 1ª y la 4ª).

Veamos cuál es la casilla que está libre en el cuadrado nº 252. En el cuadrado nº 1 está libre la posición 1, en el nº 2 la posición 2,…, en el nº 9 la posición 9, y vuelta a repetirse la situación anterior en los cuadrados 10º al 18º, y así sucesivamente cada 9 cuadrados. Si dividimos 252 entre 9 obtenemos 28 de cociente y 0 de resto, lo que nos dice que tenemos exactamente 28 grupos de 9 cuadrados, de lo que se deduce que el cuadrado nº 252 tiene libre la posición 9ª. Por tanto el nº 2012 ocupa la posición B.

3. (D) Podemos escribir: $e = v_r \cdot t_r = v_c \cdot t_c$
(los subíndices r y c corresponden a datos de Raúl y Carlos, respectivamente).
Con la información del problema, escribimos: $v_r \cdot 3 = (v_r - 5) \cdot (3 + 20/60)$
Resolviendo esta ecuación obtenemos: $v_r = 50$, luego $e = 50 \cdot 3 = 150$ km

4. (E) A la vista de la figura, el perímetro de la zona de trazo discontinuo (formada por 4 arcos de 60º) es:

$$\left.\begin{aligned} 360^\circ \;\ldots\ldots\; & 6 \\ 4 \cdot 60^\circ \;\ldots\ldots\; & p \end{aligned}\right\} \quad p = \frac{4 \cdot 60^\circ \cdot 6}{360^\circ} = 4$$



El perímetro de la zona sombreada lo obtenemos como diferencia entre el perímetro de las 2 circunferencias y el perímetro antes calculado: $2 \cdot 6 - 4 = 8$.

5. (A) Si sustituimos *x* por 12 y manchón ● por *M* tenemos:

$\frac{12}{2} - \frac{12+M}{4} = 12 - 10$. Resolviendo esta ecuación, obtenemos: $M = 4$.

6. (A) Los números primos menores que 20 son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19.
Jugando con ellos, podemos escribir: 5+19 = 7+17 = 11+13, luego E + F = 24.

7. (E) Si llamamos *x* al nº de amigos inicialmente previsto e *y* al nº de nueces, escribiremos:

$\left.\begin{array}{r} 15x + 10 = y \\ 17(x-2) + 4 = y \end{array}\right\}$ Resolviendo el sistema por igualación, obtenemos $x = 20$.

Por tanto, el nº de amigos que vinieron a la fiesta fue: $x - 2 = 20 - 2 = 18$.

8. (E) De $(a+2b)(a-b)=10$, si *a* y *b* son enteros positivos, se tienen dos opciones:

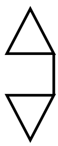
1) $\left.\begin{array}{r} a + 2b = 10 \\ a - b = 1 \end{array}\right\}$ Resolviendo: $a = 4$, $b = 3$.

2) $\left.\begin{array}{r} a + 2b = 5 \\ a - b = 2 \end{array}\right\}$ Resolviendo: $a = 3$, $b = 1$.

El valor de $2a - b$, en la opción 1 es: $2 \cdot 4 - 3 = 5$; igual resultado se obtiene en la opción 2.

9. (C) El menor recibe $\frac{192}{2+4+6} \cdot 2 = 32$ €

10. (D) De la observación de las tres construcciones Francisco ve que en la 1ª se han empleado 12 palillos, y que para obtener las siguientes se han añadido 7 palillos a la anterior:
Tenemos por tanto una progresión aritmética en la que $a_n = 12 + (n-1) \cdot 7$
Francisco prueba las cinco posibles respuestas que ofrece Juanje:



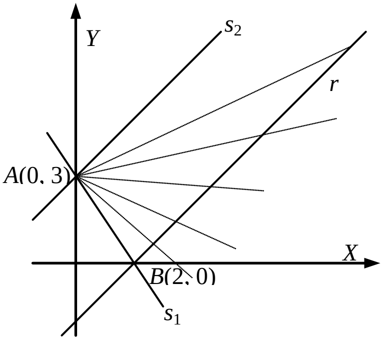
A) $7165 = 12 + (n-1) \cdot 7 \Rightarrow n - 1 = \frac{7165 - 12}{7} = 1021{,}8$

…, sólo en la opción **D** obtiene para n – 1, y por tanto para n, un valor entero, luego ésta es la única respuesta posible.

11. (D) Representamos la recta *r*: $y = x - 2$

Todas las rectas de ecuación $y = mx + 3$ pasan por el punto (0, 3).

Para que el punto de corte (x, y) de estas dos rectas tenga ambas coordenadas positivas, dicho punto ha de pertenecer al primer cuadrante.



Las rectas $y = mx + 3$, que pasan por el punto $A(0, 3)$, serán cualquiera de las rectas cuyas pendientes estén comprendidas entre las de las rectas s_1 y s_2 de la figura.

La recta s_1 pasa por el punto $B(2, 0)$ $\Rightarrow m\cdot 2 + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{3}{2}$.

La recta s_2 es paralela a la recta $y = x - 2$, luego tiene la misma pendiente que ésta, es decir, $m = 1$.

Por tanto, $-3/2 < m < 1$.

12. (B) Analizamos las distintas afirmaciones:

A. Según **c** Ana tendría que tocar el clarinete o la guitarra. Por **b** no puede tocar la guitarra. Si fuese cierta **A,** por **a** no podría tocar el clarinete.

B. Según **d** Bárbara tendría que tocar un instrumento de viento (la flauta o el clarinete). Según **c** Ana tocaría el clarinete o la guitarra; esta última queda descartada por **b**, luego tocaría el clarinete, y por tanto Bárbara tocaría la flauta, siendo cierta la afirmación **B**.

Al ser cierta solo una de las afirmaciones, no sería necesario seguir probando.

No obstante, si seguimos analizando llegamos a las siguientes conclusiones:

C. Según **d** Clara no toca un instrumento de viento, luego la afirmación **C** no es cierta.

D. Según **c**, si **D** es cierta, Daniela tocaría la flauta o el violín. Según **d** Daniela tendría que tocar el violín o la guitarra; esta última no, por lo anterior, y Clara tocaría la guitarra, lo que contradice **b**.

E. No es cierta pues ya se vio que Bárbara toca la flauta.

13. (D) La altura del triángulo cuya base mide 48 cm es: $\sqrt{26^2 - 24^2} = 10$

Área de este triángulo: $\dfrac{48 \cdot 10}{2} = 240$

Como los dos triángulos tienen la misma área, la del 2º podemos expresarla como:

$$\frac{b \cdot h}{2} = 240, \text{ y de aquí : } \; b = \frac{480}{h}$$

Como $h = \sqrt{26^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$, la expresión anterior queda: $b = \dfrac{480}{\sqrt{26^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}}$.

De aquí se deduce que $b\sqrt{676 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = 480 \Rightarrow b^2\left(676 - \frac{b^2}{4}\right) = 480^2$.

Operando nos queda: $b^4 - 676 \cdot 4\, b^2 + 230\ 400 \cdot 4 = 0$.

Resolviendo esta ecuación bicuadrada resulta: $b^2 = 400 \Rightarrow b = 20$.

14. (D) Elaboramos una tabla teniendo en cuenta cuál es la cifra producto.

Cifra producto	Las otras cifras	Las tres cifras	Nº de casos
0	01, 02,…, 09	100, 200,…, 900	**9**
1	11	111	**1**
2	12	212 {122, 212, 221}	**3**
3	13	313	**3**
4	14, 22	414, 422	3 + 3 = **6**
5	15	515	**3**
6	16, 23	616, 623	3 + 6 = **9**
7	17	717	**3**
8	18, 24	818, 824	3 + 6 = **9**
9	19, 33	919, 933	3 + 3 = **6**

En total hay 9 + 1 + 3 + 3 + 6 + 3 + 9 + 3 + 9 + 6 = 52

15. (C) Veamos en qué casos el denominador de la fracción irreducible equivalente sólo tiene como factores primos el 2 y/o el 5:

$\dfrac{17}{2^{10}} = \dfrac{17 \cdot 5^{10}}{2^{10} \cdot 5^{10}} = \dfrac{17 \cdot 5^{10}}{10^{10}}$ es decimal exacto.

$\dfrac{1001}{999}$ no es decimal exacto porque el denominador es múltiplo de 3, pero no lo es el numerador.

$\dfrac{7821}{110} = \dfrac{11 \cdot 711}{11 \cdot 10} = \dfrac{711}{10}$ es decimal exacto.

$\frac{5^{-3}}{3^{-5}} = \frac{3^5}{5^3} = \frac{3^5 \cdot 2^3}{5^3 \cdot 2^3} = \frac{3^5 \cdot 2^3}{10^3}$ es decimal exacto.

$\frac{625}{85} = \frac{125}{17}$ no es decimal exacto porque 125 no es múltiplo de 17.

La respuesta es 3.

16. (C) El menor número natural cuya suma de cifras es 36 es 9 999, pero no es múltiplo de 36, porque, a simple vista se ve, que no lo es de 4. El siguiente número a considerar sería el 19 998, pero tampoco es múltiplo de 4. Si ahora consideramos los números comprendidos entre 20 000 y 30 000, la suma de sus 4 últimas cifras tendrá que ser 34 y el número formado por sus dos últimas cifras tendrá que ser múltiplo de 4, condiciones que sólo cumple el número 29 988. Como este número tiene 2 cifras impares, la respuesta es 2.

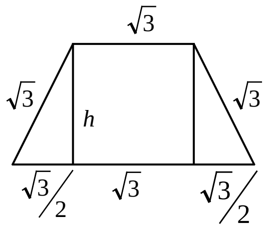
17. (B) Número de casos posibles: $6 \times 6 = 36$

Casos favorables: (2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5)

Número de casos favorables: 15

Probabilidad pedida: $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

18. (E) El trapecio tiene que ser isósceles como se muestra en la figura.



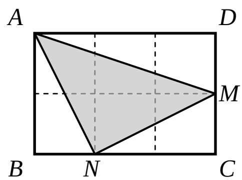
$$h = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3 - \frac{3}{4}} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Área} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{b}}{c}.$$

Luego $a + b + c = 9 + 3 + 4 = 16$.

19. (C) $\frac{a+2b}{5b-a} = \frac{3}{5}$; $5a + 10b = 15b - 3a$; $8a = 5b$; $\frac{a}{b} = \frac{5}{8}$.

20. (C) Área del triángulo ANB = $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 48 = 8$.



Área del triángulo ADM = $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 48 = 12$.

Área del triángulo *NMC* = $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 48 = 8$.

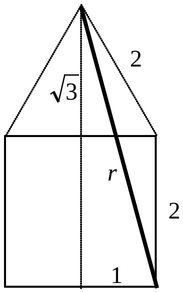
Área del triángulo *AMN* = $48-(8+12+8)=48-28=20$.

21. (B) Llamando *F* a la paga mensual de Fernando y *S* a la de Sofía, antes de los recortes, podemos escribir:

$$\left\{\begin{array}{c} F+S=55 \\ \left(F-\frac{20F}{100}\right)+\left(S-\frac{12\cdot S}{100}\right)=46 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} F+S=55 \\ 100F-20F+100S-12S=4600 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} S=25 \\ F=30 \end{array}\right\}$$

Respuesta: $F - S = 5$.

22. (A) Lado del hexágono = $\frac{12}{6}$ = 2 = Radio del hexágono.



Apotema del hexágono: $Ap=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

Radio de la circunferencia:

$r=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}$.

23. (C) Como $2\,012 = 2\times 2\times 503$, los divisores de $2\,012$ son: 1, 2, 4, 503, $1\,006$ y $2\,012$

Número de casos posibles: $6\times 6=36$

Casos favorables: (1, 1), (2, 2), (503, 503) y ($1\,006, 1\,006$)

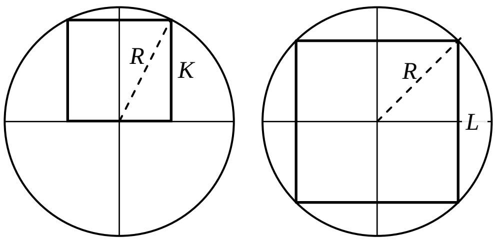
Número de casos favorables: 4

Probabilidad pedida $=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

24. (C) Como se observa en la primera figura,

$R^2=K^2+\left(\frac{K}{2}\right)^2=\frac{5K^2}{4}$;

$K^2=\frac{4R^2}{5}$



Por lo tanto, el área del cuadrado inscrito en el semicírculo es igual a $K^2 = \dfrac{4R^2}{5}$.

Observando la segunda figura, vemos que $R^2 = \left(\dfrac{L}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{L}{2}\right)^2 = \dfrac{L^2}{2}$; $L^2 = 2R^2$.

Por lo tanto, el área del cuadrado inscrito en el círculo es igual a $L^2 = 2R^2$.

La razón pedida es: $\dfrac{\frac{4}{5}R^2}{2R^2} = \dfrac{2}{5}$.

25. (A) Primer método.

$$\frac{61}{40} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{a}{b}}} = 1 + \frac{1 + \frac{a}{b}}{\left(1 + \frac{a}{b}\right) + 1} = \frac{2 + \frac{a}{b} + 1 + \frac{a}{b}}{2 + \frac{a}{b}} = \frac{2b + a + b + a}{2b + a} = \frac{3b + 2a}{2b + a};$$

$61(2b + a) = 40(3b + 2a)$; $2b = 19a$; $\dfrac{a}{b} = \dfrac{2}{19}$.

Como estas dos fracciones son irreducibles, a = 2 y b = 19; por lo tanto a + b = 21.

Segundo método.
También puede obtenerse por sucesivas divisiones

$$\begin{array}{r|l} 61 & 40 \\ \hline 21 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 40 & 21 \\ \hline 19 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 21 & 19 \\ \hline 2 & 1 \end{array}$$

$$\frac{61}{40} = 1 + \frac{21}{40} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{40}{21}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{19}{21}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{21}{19}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{19}}}$$

Por lo tanto a = 2, b = 19 y a + b = 21.

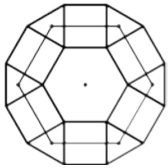
XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel IV

1. (A) Obsérvese que X e Y tienen los sumandos 12, 14, 16,... 100 en común, que al restar $Y – X$ se cancelan, por lo que $Y – X = 102 – 10 = 92$.

2. (E) Sean a, b y c los números que ha pensado José. Descomponiendo en factores primos tenemos que $a\cdot b = 156 = 2^2\cdot 3\cdot 13$, $a\cdot c = 168 = 2^3\cdot 3\cdot 7$ y $b\cdot c = 182 = 2\cdot 7\cdot 13$. Multiplicando los tres números $(a\cdot b\cdot c)^2 = 2^6\cdot 3^2\cdot 7^2\cdot 13^2$ y tomando la raíz cuadrada $a\cdot b\cdot c = 2^3\cdot 3\cdot 7\cdot 13$. Con estos datos ya podemos hallar los números, $c = \dfrac{a\cdot b\cdot c}{a\cdot b} = \dfrac{2^3\cdot 3\cdot 7\cdot 13}{2^2\cdot 3\cdot 13} = 2\cdot 7 = 14$ y de forma análoga $b = 13$ y $a = 12$, de modo que $a+b+c = 39$.

3. (C) La relación entre la apotema y el lado de un hexágono regular es la misma que entre la altura y el lado de un triángulo equilátero, esto es, $\cos 60^{o} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Obsérvese que en la figura, la apotema del hexágono grande es una unidad mayor que la del pequeño. Como sabemos el lado del hexágono pequeño, podemos calcular el lado y la apotema del grande.



$A_P = L_P\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ y por tanto $A_G = A_P + 1 = \sqrt{3}+1$, así que

$L_G = \dfrac{2}{\sqrt{3}}A_G = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot(\sqrt{3}+1)$. Luego el área del hexágono es:

$$\frac{1}{2}Perimetro\cdot Apotema = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot L_G\cdot A_G = 3\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot(\sqrt{3}+1) =$$

$$= 2\sqrt{3}(3+2\sqrt{3}+1) = 8\sqrt{3}+12.$$

4. (B) Calculamos el área del triángulo ABC de dos maneras. Como es rectángulo:
$2\cdot Area(ABC) = BC\cdot AC = 15\cdot 20 = 300$
Tomando como base AB su altura es CH y por tanto:
$2\cdot Area(ABC) = AB\cdot CH = 25\cdot CH$
Igualando ambas expresiones deducimos que $CH = 12$. Ahora bien, el triángulo CHK es semejante al ABC y la razón de semejanza es la razón de las hipotenusas,

esto es, $\dfrac{CH}{BC} = \dfrac{12}{25}$.

El área de *ABC* es 150 por lo que el área de *CHK* se obtiene multiplicando este valor por el cuadrado de la razón de semejanza.

$$Area(CHK) = 150 \cdot \left(\frac{12}{25}\right)^2 = \frac{864}{25} = 34{,}56\ .$$

5. (D) Sea *x* la longitud del tercer lado, por el teorema del coseno,

$$7^2 = x^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \cos 60^\circ$$

Reorganizando los términos y teniendo en cuenta que $\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$ obtenemos la ecuación $0 = x^2 - 8 \cdot x + 15 = (x-3)(x-5)$ cuya única solución válida es $x = 5$ pues $x = 3$ resulta en un triángulo obtusángulo al ser $8^2 > 7^2 + 3^2$.

6. (B) Empezando con 11, hay tres claves, pues hay tres formas de colocar dos cincos y un tres.
Empezando con 13 hay tres claves, pues hay tres formas de colocar dos cincos y un uno.
Empezando con 15 hay seis claves, pues hay seis maneras de colocar un uno, un tres y un cinco.
Empezando con 31 hay tres claves, pues hay tres maneras de colocar dos cincos y un uno.
Por tanto, las 15 primeras claves se corresponden a las que empiezan con 11, 13 ,15 y 31 en ese orden, y la mayor de esas es 31551.

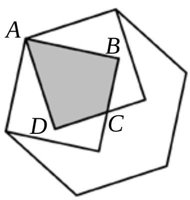
7. (D) Sea $S = (1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + 99^2)$

$$\frac{99 \cdot 100 \cdot (2 \cdot 99 + 1)}{6} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 99^2 = S + (2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + 98^2) =$$
$$= S + 4(1^2 + 2^2 + \ldots + 48^2) = S + 4 \cdot \frac{48 \cdot 49 \cdot (2 \cdot 48 + 1)}{6}.$$

Despejando y calculando se obtiene fácilmente que $S = 166\ 650$.

8. (D) La figura sombreada es un cuadrilátero en el que *A* es un vértice del hexágono, *B* y *D* son vértices de los cuadrados y *C* es la intersección de ambos cuadrados. Obsérvese que los triángulos *CAB* y *CAD* son iguales, por lo que

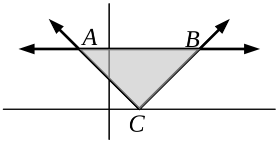
$$Area(ABCD) = 2 \cdot Area(CAB)$$



Como el ángulo interno de un hexágono regular es 120º, el ángulo *CAB* mide 30º. Así, *CAB* es un triángulo rectángulo en *B*, en el que el ángulo en *A* mide 30º y el cateto contiguo mide 1. Así pues, el otro cateto mide $tg30^{o} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y por tanto $Area(ABCD) = 2Area(CAB) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

9. (A) La altura de *OAC* sobre *OA* es 1, por lo que el área de este triángulo es $\frac{a}{2}$. Por la misma razón, el área de *OBC* es $\frac{b}{2}$. El área del cuadrado es 1. Así pues el área del cuadrilátero *OACB* es $\frac{1}{2}$ cuando $a + b = 1$.

10.(A) El recinto limitado por las gráficas es un triángulo con vértices en *A*(-1, 2), *B*(3, 2) y *C*(1, 0). Si tomamos como base *AB*, cuya longitud es 4, su altura es 2, por lo que su área es 4.



11.(C) Sea *n* el número de alumnos de primero de bachillerato. El número de alumnos de 4º ESO es $2n$ y el de 3º ESO es $4n$. Como la media de las puntuaciones de los alumnos de 3º ESO es 12, la suma de todas sus puntuaciones es $12 \cdot 4n$. De manera análoga las sumas de las puntuaciones de 4º ESO y 1º de bachillerato son $15 \cdot 2n$ y $10n$ respectivamente. Solo queda sumar todas las puntuaciones y dividirlas por el número total de alumnos $\frac{48n + 30n + 10n}{4n + 2n + n} = \frac{88n}{7n} = \frac{88}{7}$.

12.(C) Como *A* tiene 20 elementos, la unión de ambos conjuntos tendrá al menos 20 elementos. Esta cota se puede alcanzar si $B \subset$ A, cosa posible pues *B* tiene menos elementos que *A*.

13.(B) Puesto que $|-3x| \geq 0$ se verifica que $|-3x| + 5 > 5$ y la ecuación $|-3x| + 5 = 0$ no puede tener solución.

14.(D) Una función *f*(*x*) tiene *OY* como eje de simetría si $f(x) = f(-x)$. La única función, de las propuestas, que lo cumple es $f(x) = x \cdot senx$ pues $sen(-x) = -sen(x)$ y por tanto $f(-x) = -x \cdot sen(-x) = -x \cdot (-senx) = x \cdot senx$.

15.(A) El lado paralelo al eje *OX* se corresponde con la distancia entre las rectas $x = d$ y $x = -c$ por lo que la longitud de dicho lado es $d - (-c) = d + c$, análogamente la longitud de su otro lado es $a + b$ y su área es por tanto $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

16.(A) Sea x el número de triples, y el número de canastas de dos y z el número de tiros libres.

El número de puntos con triples 3x, es igual al número de puntos con tiros de dos, es decir $3x = 2y$, por lo que $x = \frac{2}{3}y$ (1)

El número de aciertos en tiros libres z, superó en una unidad al número de aciertos en tiros de dos, luego $z = y + 1$ (2)

Como el número total de puntos es 61, $3x + 2y + z = 61$ (3).

Sustituyendo (1) y (2) en (3), obtenemos $61 = 3\frac{2}{3}y + 2y + y + 1 = 5y + 1 \Rightarrow y = 12$

Para terminar, usamos (3): $z = y + 1 = 13$ que es el número de tiros libres.

17.(C) $C + D + E = 30 = D + E + F$ por lo que $C = F = 5$.

$30 = F + G + H = 5 + G + H$ y por tanto $G + H = 25$.

18.(B) Calculando y desarrollando:

$$\sqrt{9-6\sqrt{2}} = \sqrt{3(3-2\sqrt{2})} = \sqrt{3(2-2\sqrt{2}+1)} = \sqrt{3(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{3}(\sqrt{2}-1)$$

De forma análoga $\sqrt{9+6\sqrt{2}} = \sqrt{3}(\sqrt{2}+1)$.

Y la suma de ambos términos es $\sqrt{3}((\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)) = 2\sqrt{6}$.

19.(B) Si S es la suma de los puntos obtenidos en los dos dados, entonces el área de un círculo de diámetro S es $a = \pi\left(\frac{S}{2}\right)^2$ y el perímetro es $b = \pi S$. Por lo que $a < b$ sí y sólo sí $\left(\frac{S}{2}\right)^2 < S \Leftrightarrow 0 < S < 4$. Ahora bien, al tirar dos dados sólo hay tres formas de que la suma sea menor que 4: (1,1), (1,2) y (2,1). Como hay 36 resultados posibles, la probabilidad es $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

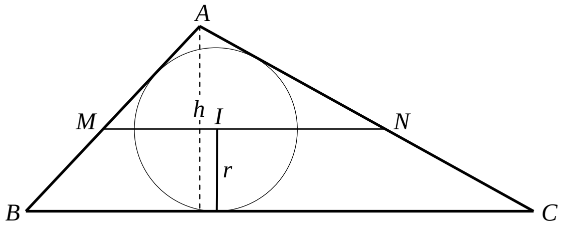
20.(E) Obsérvese que como 50º > 45º, entonces

$1 > sen(50^o) > sen(45^o) = \cos(45^o) > \cos(50^o) > 0$.

Por lo que $\frac{1}{\cos(50^o)} > \frac{1}{sen(50^o)} > 1 > sen(50^o) > \cos(50^o)$. Además, al ser $sen(50^o) < 1$ tenemos que $\frac{1}{\cos(50^o)} > \frac{sen(50^o)}{\cos(50^o)}$ y por tanto $\frac{1}{\cos(50^o)}$ es el mayor de los valores.

21.(C) Como $x-\frac{1}{x}=y-\frac{1}{y}$ entonces $x-y=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{y-x}{x\cdot y}$. Puesto que $x\neq y$ podemos dividir entre $x-y$, y deducir que $x\cdot y=-1$.

22.(B) Como *MN* es paralelo a *BC* los triángulos *ABC* y *AMN* son semejantes. Sea *h* la altura de *ABC* sobre *BC*.



Como *MN* es paralelo a *BC* por el incentro de *ABC*, la altura de *AMN* sobre *MN* es $h-r$ siendo *r* el radio de la circunferencia inscrita. Por tanto, la razón de semejanza de ambos triángulos es $\frac{h-r}{h}$. Hallemos esta razón.

El perímetro del triángulo *ABC* es $2p = 12 + 24 + 18 = 54$ y su área $S = rp = 27r$. Pero también $S=\frac{1}{2}BC\cdot h=12h$, por lo tanto $27r = 12h$ y como consecuencia $\frac{r}{h}=\frac{12}{27}=\frac{4}{9}$. Entonces la razón de semejanza será, $\frac{h-r}{h}=1-\frac{r}{h}=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$.

Como el perímetro de *ABC* es 54, entonces el de *AMN* es $54\cdot\frac{5}{9}=30$.

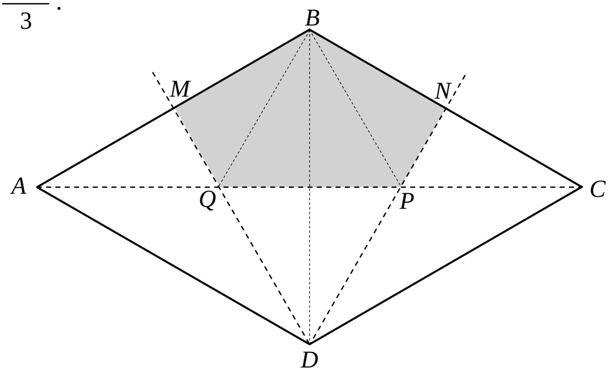
23.(C) Sea *x* la longitud de la cuesta e *y* la longitud de la parte llana. Tanto a la ida como a la vuelta, la parte llana la recorre en $\frac{y}{4}$ horas, ahora bien, en el repecho tarda $\frac{x}{\frac{10}{3}}=\frac{3x}{10}$ horas a la ida mientras que a la vuelta tarda $\frac{x}{5}$ horas. Así pues el tiempo total es $\frac{y}{4}+\frac{y}{4}+\frac{x}{5}+\frac{3x}{10}=\frac{y}{2}+\frac{2x+3x}{10}=\frac{y}{2}+\frac{x}{2}$ que sabemos que es 2,5 horas y por tanto $x+y=5$ kilómetros.

24.(C) Sea *P* la edad del perro en meses e *I* la edad de Isa en años. Como la edad actual en meses del perro es la mitad que la de Isa en años $I=2P$. Dentro de 5 años el perro tendrá $P+5\cdot 12 = P+60$ meses e Isa tendrá $I+5$ años. En ese momento la edad del perro (en meses) será cinco unidades mayor que el doble de la edad de Isa (en años). Es decir, $P+60=5+2\cdot(I+5)$ y sustituyendo $I=2P$ tenemos que $P+60=5+2\cdot(2\cdot P+5)=4P+15 \Rightarrow 3P=45 \Rightarrow P=15$.

25.(B) Las mediatrices de los segmentos *AB*, *BC* y *BD* determinan el conjunto de puntos que están más cerca de *B* que de cualquier otro vértice. Debemos hallar el área del pentágono *BNPQM*.

Como el ángulo en *B* es de 120º el rombo se compone de dos triángulos equiláteros de lado 2 y altura $\sqrt{3}$. Las diagonales del rombo son por lo tanto 2 y $2\sqrt{3}$ y su área $\frac{2\cdot 2\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$. Como *P* y *Q* son los baricentros de los triángulos equiláteros *BCD* y *BDA*, $PC=PD=PQ=\frac{1}{3}AC=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

El área de $QPD=\frac{1}{3}ACD=\frac{1}{6}ABCD=\frac{1}{6}\cdot 2\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. El área del pentágono *BNPQM*, como se observa fácilmente, es el doble del área del triángulo *QPD*, es decir, $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



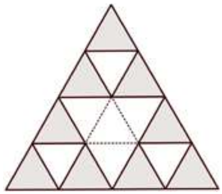
XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel I

1.(E) Como ha dejado en blanco $25 - (12 + 7) = 6$ problemas y contestado bien a 12, ha obtenido $12 \times 5 + 6 \times 1 = 66$ puntos.

2.(E) Se trata de respetar la jerarquía de las operaciones. El número mayor se obtiene con $(2 + 0 + 1)^2 = 9$.

3.(B) El triángulo original está dividido en 4 triángulos de igual área y, cada uno de los 4 puede ser dividido en 16 pequeños triangulitos iguales. Así mismo vemos que el central tiene sus 16 triangulitos pintados de blanco, mientras que los otros tres, que son como el de esta figura, solo tienen 7 blancos cada uno. Tenemos pues $4 \times 16 = 64$ triangulitos, de los que $16 + 7 \times 3 = 37$ son blancos. En consecuencia, la fracción pintada de blanco es: $37/64$.



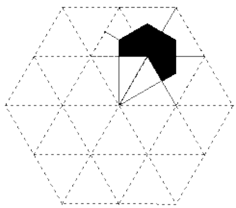
4.(D) Para lo que nos interesa todo sucede como si Julián regalase a Lucía 25 € por semana hasta que los dos tuviesen la misma cantidad de dinero. Dado que en total tienen 1800 €, al final cada uno tendrá 900. Lucía tiene 300 más que al principio y Julián 300 menos, por lo que, a razón de 25 € por semana, tenemos $300/25 = 12$ semanas.

5.(C) Comencemos por las vocales. La casilla gris tendrá que tener una A o una O. Supongamos que es la A. Entonces en la segunda columna tendríamos, forzosamente, de arriba abajo: E, I, O, A, lo que nos conduciría a no poder colocar la O en la primera columna, luego en la casilla gris está la O. Para las consonantes parece más sencillo completar el cuadro, así que describiremos esquemáticamente el camino seguido: en la 1ª fila colocamos la F y la D; en la 3ª columna la B; en la 4ª columna la C y la B; en la 2ª fila la F y la B; en la 3ª fila la C y la D y, por fin, en la 4ª fila la D y la F, quedando OF en la casilla gris.

6.(C) Si tomó el ascensor en la planta x tendremos: $x - 3 - 2 + 7 - 4 + 6 = 3$, es decir, $x + 4 = 3$ y $x = -1$.

7.(D) Carlos dice que Dani es el mayor. Por el contrario, Esteban afirma que Ángel es el mayor. Uno de los dos miente y todos los demás dicen la verdad. Como ahora sabemos que Ángel dice la verdad, él no es el mayor, Esteban miente y Carlos dice verdad, por tanto Dani es el mayor.

8.(C) En la figura hemos resaltado uno de los 6 pétalos y la división en tres trapezoides de uno de los triángulos equiláteros. El pétalo se compone de 4 trapezoides y dos triángulos rectángulos. Por razones de simetría deducimos que cada cuadrilátero mide 1dm^2 y, por otra parte, vemos que cada uno de los dos triángulos rectángulos es la mitad de un triángulo equilátero. Se deduce que el área de un pétalo es de 4 + 3 = 7 dm^2, con lo que el área de la flor será de 42 dm^2.



9.(E) Pedro tiene 7 + n caramelos. Como Luisa tiene el doble que Pedro, tendrá $2(7+n)=14+2n.$.

10.(E) Si resto el perímetro del triángulo al del pentágono, le estoy quitando a éste dos lados iguales y el lado desigual, con lo que quedan dos lados iguales (dos lados de triángulo equilátero). Es decir dos lados miden 32 – 18 = 14 cm y el perímetro de uno de los triángulos será 3 × 7 = 21 cm.

11.(C) Por comodidad designaremos con C al número que se comió el comenúmeros. La igualdad quedará $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{C}{4}+\frac{5}{12}$ que equivale a $\frac{7}{6}=\frac{3C+5}{12}$ lo que nos dice que $3C + 5 = 14$ y de aquí $C = 3$.

12.(A) Si expresamos todas las longitudes en milímetros tenemos:
4000 + 3300 + 2220 + 1111 = 10631 milímetros entre las cuatro cuerdas.
11000 – 10631 = 369 milímetros.

13.(D) En total hay 36 + 16 = 52 casillas, de las cuales $\frac{1}{3}\cdot 36+\frac{1}{4}\cdot 16=16$ tienen comida.

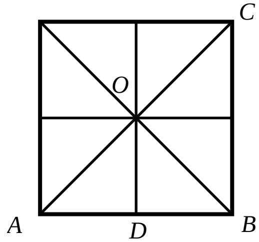
Por lo tanto la probabilidad de que caiga en una casilla con comida es $\frac{16}{52}=\frac{4}{13}$.

14.(A) Designamos por sus iniciales, H, R y C el precio de las hamburguesas, refrescos y chocolatinas, respectivamente.
Podemos escribir: 1H + 5R = 5C y 2H = 2R + 1C. Si consideramos el doble de la primera igualdad tenemos que 2H + 10R = 10C y mediante la segunda sabemos que 2H = 2R + 1C, luego 2R + 1C + 10R = 10C que equivale a 12R = 9C o bien 4R = 3C.
Retomando la primera igualdad, 1H + (1R + 4R) = 5C resulta que 1H + 1R + 3C = = 5C, es decir, 1H + 1R = 2C.

15.(E) El mínimo común múltiplo de 4, 6, 8 y 10 es 120 luego 120 compases después del 12 termina la sonata que tiene en total 132 compases.

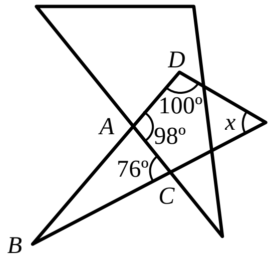
16.(C) De cada 11 lágrimas 7 son del lagarto y 4 de la lagarta. Dividimos las 5533 lágrimas en bloques de 11 lágrimas. 5533 : 11 = 503 bloques de 11 lágrimas. Como en cada bloque la lagarta vierte 4, en total habrá vertido 503 × 4 = 2012.

17.(D) En efecto hay 8 triángulos pequeños como el *ADO*. Hay otros 4 como el *ABO* y otros 4 grandes como el *ABC*, en total hay 8 + 4 + 4 = 16.



18.(B) El problema está propuesto el 21 de abril de 2012. La persona que habla nació en 2001, su madre 36 años antes y su abuela, 25 + 36 = 61 años antes. Por lo tanto su abuela nació en 2001 – 61 = 1940.

19.(C) De una cifra solamente el 3.
De dos cifras, 12, 21 y 30.
De tres cifras, 102, 111, 120, 201, 210 y 300.
En total 10.



20.(A) El ángulo en *A* es $B\hat{A}C = 180º - 98º = 82º$.

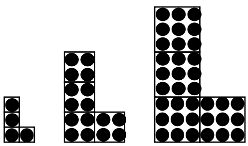
El ángulo en *B* es $A\hat{B}C = 180º - (82º + 76º) = 22º$.

Como $x + \hat{D} + \hat{B} = 180º$ deducimos que

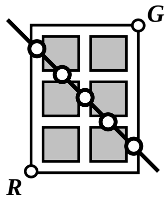
$x = 180º - (22º + 100º) = 58º$

21.(E) Si consideramos todos los años de 360 días, el número aproximado de latidos será: 360 × 24 × 60 × 400 = 207 360 000. Aproximadamente doscientos millones.

22.(A) Cada una de las eles está formada por cuatro bloques cuadrados de lados, 1, 2, 3,… monedas, es decir, los bloques de cada letra tienen 1^2, 2^2, 3^2,… monedas. En la quinta L, habrá por lo tanto cuatro bloques de 5^2 monedas. En total $4 \times 5^2 = 100$.

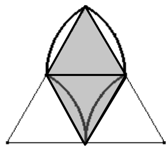


23.(C) Entre los dos tienen que recorrer en total 5 segmentos y como los dos llevan la misma velocidad recorrerán dos segmentos y medio cada uno. Basta buscar los puntos a los que se puede llegar recorriendo dos segmentos y medio desde *R* o desde *G*, da lo mismo.
La figura adjunta nos ayuda a encontrarlos, en total 5.



24.(E) Designamos mediante las iniciales de sus nombres a las cantidades de chucherías que Santi reparte entre sus primos. Entonces podemos escribir:
L = 2C, P = 4 + L o lo que es lo mismo P = 4 + 2C y M = 2E.
Como P + M = 20 resulta que 4 + 2C + 2E = 20. Dividiendo entre 2 los dos miembros obtenemos 2 + C + E = 10 luego C + E = 8.
Pero también L + C + E = 20, de donde L = 12 y entonces P = 16.

25.(C) Si cogemos los dos lóbulos de la punta exteriores al triángulo y los colocamos en el interior del triángulo, vemos que la lanza ocupa justo la mitad del triángulo.
Así pues, el área de la lanza es 6 dm^2.



XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel II

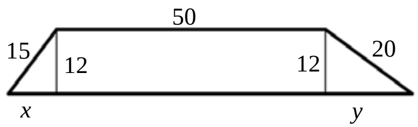
1. (E) Las respuestas acertadas no han variado su puntuación, siguen contando cinco puntos. La única diferencia es que este año cada respuesta en blanco vale un punto menos que el año pasado, Carmencita ha dejado en blanco 91 – 88 = 3 respuestas.

2. (D) Como al menos la mitad lo cree más joven, Don Retorcido tiene más de 36 años. Como dos de ellos se han equivocado por un año, podría tener 43 o 48 años pero como es un número primo, Don Retorcido tiene 43 años.

3. (E) No te dejes engañar y vamos poco a poco:
A) Está claro que $a \cdot b < c$ sí es posible, por ejemplo si $a = 1$, $b = 2$ y $c = 4$.
B) Tal vez esta te cueste más pero si $a = 0{,}1$; $b = 1$ y $c = 2$, se cumple $a \cdot c < b$.
C) $a + b < c$ es fácil de conseguir, por ejemplo, si $a = 1$, $b = 2$ y $c = 5$.
D) También es fácil ver que $b : c < a$ puede ser cierta, basta tomar $a = 1$, $b = 2$ y $c = 3$.
E) La única que es imposible es $a + c < b$, pues si $c > b$ y $a > 0$, $a + c > 0 + b = b$.

4. (A) Como todos los números primos son impares salvo el 2 y la suma de dos impares es par, tendremos que usar el 2. Pero 100 001 – 2 = 99 999 que es múltiplo de 9. Así pues 100 001 no puede escribirse como suma de dos primos.

5. (D) Hagamos un dibujito.



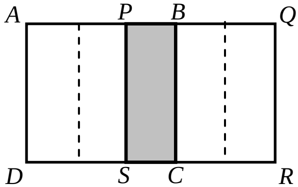
Si conoces la terna pitagórica (3, 4, 5) te será fácil deducir que $x = 9$ e $y = 16$ y el área es: $\frac{9 \cdot 12}{2} + 50 \cdot 12 + \frac{16 \cdot 12}{2} = 54 + 600 + 96 = 750$ cm^2.

Si no conocías la terna (3, 4, 5), también pueden calcularse los valores de x e y sin más que aplicar el teorema de Pitágoras.

6. (D) En el cálculo del volumen intervienen las tres dimensiones y como cada una de ellas se multiplica tres, el volumen ha quedado multiplicado por 3·3·3=27. Así pues, el cepillo del ratón Pérez pesa $\frac{54}{3^3} = 2$ gr.

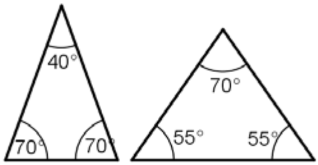
7. (B) Carmen puede estar a la derecha de Esteban, a su izquierda o enfrente de él. Como para cada una de estas posiciones hay dos posiciones posibles para María y Joaquín, la probabilidad de que esté enfrente es 1/3.

8. (C) Como $AQ = 25$ y $AB = PQ = 15$, entonces $AP = BQ = AQ – AB = 10$ y $PB = 5$.
El rectángulo gris es la quinta parte del rectángulo *AQDR* luego representa 1/5 =20/100 = 20% del área total.



9. (B) Si todos los alumnos hacen sus deberes, Don Retorcido tendrá 10 000 000 mm^3 de agua que son 10 litros. Pero hagamos el cambio de unidades poco a poco:
$10\ 000\ 000\ mm^3 = 10\ 000\ cm^3 = 10\ dm^3 = 0{,}01\ m^3$
Como el cubo de Don Retorcido es de 1 m de lado, el agua alcanzará una altura de 0,01 m = 1 cm.

10.(B) Pueden ocurrir tres cosas:
Que el ángulo de 70º sea el desigual, en cuyo caso Juanje habrá medido uno de los iguales que miden 55º.
Que el ángulo de 70º sea uno de los iguales. Entonces Juanje puede medir el otro igual y obtendría 70º o puede medir el desigual, que mide 40º.
La suma de todos los valores posibles es 55 + 70 + 40 = 165º



11.(C) Un número es múltiplo de tres si la suma de sus cifras lo es. Es fácil ver que las tarjetas que nos valen para formar múltiplos de tres son: (1, 2, 3) y (2, 3, 4).
Para calcular la probabilidad de sacar esos tríos vamos a pensar “al revés”. Elegir tres tarjetas es equivalente a descartar una. Como hay cuatro posibilidades de descartar una tarjeta y solo nos valen dos de ellas (descartar el 4 o descartar el 1), la probabilidad de obtener esas ternas es 2/4 = 1/2.

12.(C) Antes había el 30% de 30 = 9 litros de pintura amarilla en un total de 30 litros.
Ahora hay 9 + 5 = 14 litros de pintura amarilla de un total de 30 + 5 = 35 litros.
14/35 = 2/5 = 40/100 = 40%.

13.(D) Pensemos un momento antes de empezar. Solo podemos usar las cifras 0, 1, 2, 3, 4 y 5 sin repetir. Para ser múltiplo de 5 la última cifra tendrá que ser 0 o 5. Además, la primera cifra no puede ser 0 y como la mayor de sus cifras tienen que ser 5, todos ellos deben tener un 5.

Si acaba en 5 es fácil pues ya nos aseguramos que está el 5: ._ _ _ 5 para la primera cifra tenemos 4 posibilidades (1, 2, 3 y 4). Una vez elegida la primera, para la segunda volvemos a tener 4 posibilidades (ahora sí vale el 0) y para la tercera tenemos 3. En total $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ posibilidades acabando en 5.
Si acaba en 0: _ _ _ 0 comencemos colocando el 5 que es obligatorio. Tengo 3 posibles posiciones para ponerlo. Un vez colocado el 5, me quedan 4 posibles números para colocar en una de las posiciones que aún está libre y, después me quedarán 3 posibles números para la otra posición. En total ay $3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$ posibilidades acabando en 0.
Así pues, hay en total $48 + 36 = 84$ números que cumplen esas condiciones.

14.(A) Como $CDCD = 101 \cdot CD$, entonces, $ABA = 101$ y, por tanto, $A = 1$, $B = 0$ y la suma pedida es $A + B = 1$.

15.(E) Debemos contar con cuidado:
Si el denominador es 1 tenemos cinco fracciones diferentes:
$\frac{1}{1} = 1$; $\frac{2}{1} = 2$; $\frac{3}{1} = 3$; $\frac{4}{1} = 4$; $\frac{6}{1} = 6$.
Si el denominador es 2 tenemos dos nuevas fracciones diferentes:
$\frac{1}{2}$; $\cancel{\frac{2}{2} = 1}$; $\frac{3}{2}$; $\cancel{\frac{4}{2} = 2}$; $\cancel{\frac{6}{2} = 3}$.
Si el denominador es 3 obtenemos otras tres:
$\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\cancel{\frac{3}{3} = 1}$; $\frac{4}{3}$; $\cancel{\frac{6}{3} = 2}$.
Si el denominador es 4 obtenemos dos más:
$\frac{1}{4}$; $\cancel{\frac{2}{4} = \frac{1}{2}}$; $\frac{3}{4}$; $\cancel{\frac{4}{4} = 1}$; $\cancel{\frac{6}{4} = \frac{3}{2}}$.
Por último, si el denominador es 6 solo obtenemos una nueva fracción:
$\frac{1}{6}$; $\cancel{\frac{2}{6} = \frac{1}{3}}$; $\cancel{\frac{3}{6} = \frac{1}{2}}$; $\cancel{\frac{4}{6} = \frac{2}{3}}$; $\cancel{\frac{6}{6} = 1}$.
Así pues, podemos formar 13 fracciones distintas.

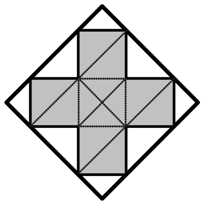
16.(B) En la descomposición en factores primos de un cuadrado perfecto todos los exponentes deben ser pares y en la de un cubo perfecto todos deben ser múltiplos de tres.
Como $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$:
- para lograr un cuadrado debemos añadir un 2 y un 5, entonces $x = 2 \cdot 5 = 10$ y el cuadrado perfecto es 3600.
- para lograr un cubo debemos añadir un 3 y dos 5, entonces $y = 3 \cdot 5^2 = 75$ y el cubo perfecto es 27000.
El número pedido es $x + y = 10 + 75 = 85$.

17.(B) Por las primeras veinte cajas pago $5 \cdot 20 = 100$. Me quedan 128 con las que puedo comprar las cajas a 4 € así que compraré $128 : 4 = 32$ cajas más.
En total pagaré $20 + 32 = 52$ cajas. Además, por cada seis me regalan una. Como $52 : 6 = 8{,}66\ldots$ me regalarán 8 cajas.
En total me llevaré $52 + 8 = 60$ cajas de bolígrafos.

18.(E) Un número impar tienen la forma $2k + 1$, así que nuestro número se puede escribir como $60 \cdot (2k + 1) + 12 = 120k + 60 + 12 = 120k + 72$. Así pues, si lo dividimos entre 120 el resto será 72.

19.(D) Al lanzar dos dados hay 36 casos posibles. Contemos los casos favorables:
Si en el primer dado sale un 1, solo hay un caso favorable: (1, 1).
Si en el primer dado sale un 2, hay dos casos favorables (2, 1) y (2, 2).
Igualmente, si en el primer dado sale un 3, hay tres casos favorables, si sale un 4, hay cuatro, si sale un 5, hay cinco y, por último, si sale un 6, hay seis.
Así pues, hay $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ casos favorables de 36 posibles y, por tanto, la probabilidad pedida es $\frac{21}{36} = \frac{7}{12}$.

20.(D) Tracemos algunas líneas estratégicas. Se observa sin dificultad que la cruz está compuesta de cinco cuadrados iguales, cada uno de ellos de $25:5 = 5$ cm^2 y que el en el cuadrado hay 8 de esos cuadrados (los cinco de la cruz, uno que se forma con los cuatro triangulitos blancos de los vértices y otros dos que se forman con los cuatro triángulos blancos de los lados). Luego el área del cuadrado es $5 \cdot 8 = 40$ cm^2.



21.(B) Calculemos las unidades de las primeras potencias de 7 para ver si observamos alguna pauta:

$7^1 = 7$	$7^2 = *9$	$7^3 = **3$	$7^4 = ***1$
$7^5 = ****7$	$7^6 = *****9$	$7^6 = *****3$	$7^8 = ******1$
$7^9 = *\ldots*7$	$7^{10} = *\ldots*9$	$7^{11} = *\ldots*3$	$7^{12} = *\ldots*1$

Las unidades se van repitiendo en bloques de 4, así que solo nos resta ver qué lugar ocupa 7^{2012} en esta distribución.
Observa que en la primera columna están las potencias cuyo exponente da resto 1 al dividirlo entre 4, en la segunda las que dan resto 2, en la tercera las que dan resto 4, y en la cuarta, las que dan resto 0 al dividirlas entre 4. Como $2012 = 4 \cdot 503$, el resto de la división es 0 y, por tanto, la cifra de las unidades de 7^{2012} es 1.

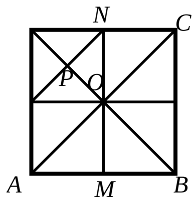
22.(D) Comenzamos a hacer la división y observamos qué pasa:

```
20000000001 | 6
 20           33… 3
  20
 ……
        21
         3
```

Es fácil darse cuenta de lo que pasa y, por tanto, sabemos que la última cifra que tendremos que dividir es 21, por tanto, el resto será 3.

23.(E) Imagina que empiezas con los dos palillos de la izquierda. Para hacer la primera columna de dos casillas tendrás que añadir 5 palillos (2 + 5), para la segunda, otros 5, (2 + 5 + 5= 2 + 5 · 2), para la tercera, otros 5 palillos (2 + 5 + 5 + 5 = 2 + 5 · 3) y así sucesivamente.

Así pues, para hacer la enésima casilla usaremos 2 + 5*n* palillos. Si hemos usado 2012 palillos, como 2 + 5*n* = 2012, 5*n* = 2010 y, por tanto *n* = 402 lo que significa que hemos hecho 402 columnas de dos filas cada una y, por tanto, podremos guardar 2 · 402 = 804 insectos.



24.(C) Tenemos que contar con cuidado. Hay 4 triángulos de pequeños (como el *ONP*), 10 triángulos medianos (como el *AMO*), otros 4 algo más grandes (como el *ABO*) y 4 cuadrados muy grandes (como el *ABC*). Así pues, en total hay 4 + 10 + 4 + 4 = 22 triángulos.

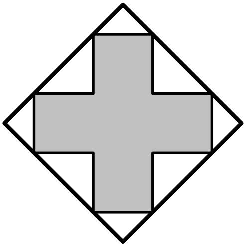
25.(D) Primero observamos que 195 = 3 · 5 · 13 así que para ser múltiplo de 195 hay que serlo de 3, de 5 y de 13. Ahora vamos probando con cada una respuestas:
Como 2208 + 132 = 2340 que es múltiplo de 3 y 5 (se ve a ojo) y también lo es de 13 de manera que la opción **A**) que cumple la primera condición.
Pero 2208 – 5 = 2203 no es múltiplo de 37, de manera que no nos sirve.
El número 2013 + 132 = 2145 también cumple la primera condición pero no la segunda pues el resto de 2013 entre 37 es 15 así que tampoco vale.
1855 + 132 = 1987 que no es múltiplo de 5.
1818 + 132 = 1950 = 195 · 10 y 1818 – 5 = 1813 = 37 · 49 de manera que sí nos vale.
Por último comprobamos que la opción **E**) no cumple la condición puesto que 1781 + 132 = 1913 no es múltiplo de 5.
La única opción posible es la **D**).
Agradecemos a Don Retorcido el dulce final.

XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel III

1. (B) Tenemos que $m+n=m\cdot n$, y así, $n=mn-m=m\cdot(n-1)$, y así n es 0 (0 es un número especial en la teoría de la divisibilidad) o es divisible por $n-1$, lo cual obliga a que $n-1=\pm1$, y de ahí $n=2$ o de nuevo $n=0$. El ser $n=0$ conlleva que también $m=0$. Si $n=2$ entonces $m+2=2m$, y de ahí, $m=2$. Luego hay dos soluciones.

2. (B) El área de uno de los cuadraditos que forman la cruz es de 8 cm^2**.** Para llenar el cuadrado circunscrito debemos añadir los cuatro triángulos esquinas que equivalen a un cuadradito y los cuatro triángulos intermedios que ocupan como otros dos cuadraditos. Luego el área del cuadrado es de $8\cdot 8=64$ cm^2**.** Luego el lado es 8 y el perímetro 32 cm.

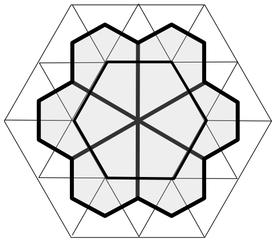


3. (E) El precio del piso ha sido multiplicado por $1{,}1\cdot 1{,}2\cdot 0{,}95\cdot 0{,}9\cdot 0{,}95=1{,}07217$, luego su precio ha aumentado un poco más del 7%.

4. (A) Llamando a al dinero que tiene Ángel, y b, c, d a los dineros de Bea, Carlos y Dani, tenemos el sistema
$$\begin{cases} a+b+c = 37 \\ a+d = 20 \\ c+d = 25 \\ b+c+d = 43 \end{cases}$$

Echando una ojeada vemos que de las dos últimas ecuaciones podemos deducir fácilmente que b = 18 €. Entonces a + c = 19, y restando esta ecuación a la tercera obtenemos $d-a=6$. Y como, $a+d=20$, resulta ser $d=13$, y $a=7$.

5. (D) Un pétalo de la flor está compuesto por un sexto del hexágono (lo que equivale a un triángulo) y cuatro tercios de un triángulo. Así el área de un pétalo es $\frac{7}{3}$ de la de un triángulo, y por tanto la flor tiene un área equivalente a 14 triángulos. Como nos dicen que el hexágono (6 triángulos) tiene de área 24 dm^2**,** a nuestra flor le corresponden 56.



6. (C) $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}=\frac{m^2+n^2}{m\cdot n}$, y sabemos que $m+n=-\frac{b}{a}=\frac{12}{2}=6$; $m\cdot n=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$, de forma que $m^2+n^2=\left(m+n\right)^2-2m\cdot n=36-3=33$, y el cálculo pedido es 22.

7. (B) Habrá que usar menos baldosines cuanto más grandes sean estos. Pero al ser cuadrados el lado deberá ser divisor del largo y ancho del patio, si bien midiendo todo en cm. Así el baldosín fetén tendrá por lado el máximo común divisor de 1000 y 600 es decir 200 cm. Como no hay de ese tamaño, cogemos el mayor de los posibles divisor de 200, es decir 8. Como $1000\times 600=8\times 125\times 8\times 75$, el número de baldosines necesarios es 125 $\times$ 75 = 9375.

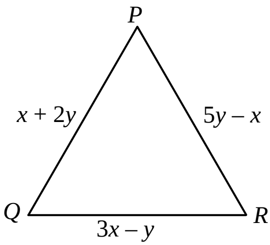
8. (E) A ojo vemos que a = 2 y b = 3, y el cálculo, $2^2\cdot\left(\left(2^3\right)^3-3^2\right)=4\cdot(512-9)=2012$, da un número cuyas cifras suman 5.

9. (A) El volumen de una esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$, y el área de la superficie esférica es $4\pi r^2$. Así, según el enunciado, debemos buscar un entero r que su cuadrado multiplicado por 4 tenga cuatro cifras, y que $\frac{4}{3}r^3$ sea también un entero de cuatro cifras. Lo primero sitúa r entre $\sqrt{250}$ y $\sqrt{2500}$ (debe ser mayor que 15) y lo segundo nos indica que r es múltiplo de 3 y que está entre $\sqrt[3]{750}$ y $\sqrt[3]{7500}$ (debe ser menor que 20). La divisibilidad por 3 hace que r sea 18.

10. (D) La única forma de que una potencia de 2 coincida con una potencia de 5, es que el exponente de ambas sea 0. Así que buscamos una raíz común en ambos exponentes. Podemos resolver ambas ecuaciones y hallar la solución común, pero al ser una raíz entera deberá ser divisor de 4 y –12. Un poco de tanteo nos hace caer en la cuenta de que la solución es 4.

11.(B) Debemos resolver 10 a + b = 3 $a\cdot b$, siendo a *y* b cifras. Así que b = a (3b – 10).
Entonces b debe ser mayor que 3 y menor que 7. Para b = 4 se obtiene a = 2.
Para b = 5 se obtiene a = 1. Sin embargo para b = 6 no hay solución para a.
Luego los dos números son 24 y 15, cuyo producto es 360.

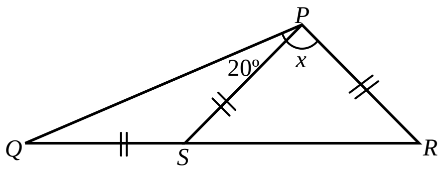
12.(D) Podemos resolver sustituyendo los valores propuestos en las expresiones algebraicas de los lados. Otra forma de hacerlo será estudiando el sistema $\begin{cases} x+2y=5y-x \\ x+2y=3x-y \end{cases}$, o el equivalente, $\begin{cases} 2x-3y=0 \\ 2x-3y=0 \end{cases}$, en el que sobra una ecuación y nos dice que las soluciones son aquellas en las que $2x = 3y$, lo que excluye como solución: $x = 10$, $y = 6$.



13.(A) Estamos multiplicando un número PQPQ por otro RRR, es decir multiplicando PQ·101 por R·111. Ahora bien 101·111 =11211. Tanteando o dividiendo llegamos a la conclusión de que PQ·R = 57. Dos descomposiciones en dos factores son posibles: 19·3 y 57·1, y así tenemos que o bien, P = 1, Q = 9, R = 3, o bien, P = 5, Q = 7, R = 1. En ambos casos la suma P + Q + R =13.

		P	**Q**	**P**	**Q**
×			**R**	**R**	**R**
6	**3**	**9**	**0**	**2**	**7**

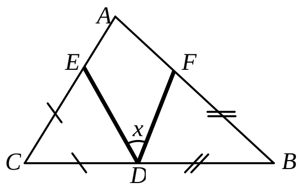
14.(E)



El ángulo en *Q* es de 20º ya que *PQS* es isósceles, y eso hace que en ese mismo triángulo el ángulo en *S* sea de140º. El ángulo en *S* del triángulo *PSR* mide 40º, igual que el ángulo en *R* y de ahí el ángulo *x* es de 100º.

15.(C) Sumando las tres ecuaciones: $4x - y = 5$, $4y - z = 7$ y $4z - x = 18$, obtenemos $3x + 3y + 3z = 30$. Así que la respuesta es 10.

16.(C) Los ángulos *C* y *B* suman 100º. *C* y *D* son los ángulos distintos en los triángulos isósceles *CDE* y *DBF*. Los ángulos iguales dos a dos de esos triángulos suman 360º – 100º = 260º, y por tanto 130º la pareja de ángulos que con *x* forman un ángulo llano. Así $x = 50$º.

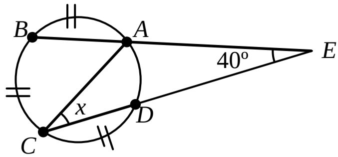


17.(D) $\left(2x+\dfrac{y}{2}\right)^{-1}\cdot\left[(2x)^{-1}+\left(\dfrac{y}{2}\right)^{-1}\right]=\dfrac{2}{4x+y}\cdot\left[\dfrac{1}{2x}+\dfrac{2}{y}\right]=\dfrac{2}{4x+y}\cdot\left[\dfrac{y+4x}{2xy}\right]=\dfrac{1}{xy}$

siempre que x, y , $4x+y$ sean distintos de 0.

18.(B) $\dfrac{a}{|a|}+\dfrac{b}{|b|}+\dfrac{c}{|c|}+\dfrac{abc}{|abc|}$**.** Los sumandos de esta expresión son 1 o -1, pero el valor del cuarto sumando está asociado al producto de los otros tres. Por tanto no puede haber un número impar de signos negativos. Las posibilidades son cuatro unos, dos unos positivos y dos negativos, y cuatro unos negativos.

19.(B) Como el ángulo exterior E mide 40º, la diferencia entre los arcos BC y AD es de 80º. Por otro lado 3 BC + AD = 360º. Así 240º + 4 AD = 360º. Tenemos entonces que AD = 30º = $2x$.



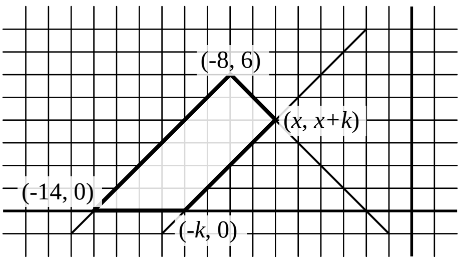
20.(E) Si $(3x-1)^7=a_7x^7+a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$**,** la suma $a_7+a_6+a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0$, se obtiene cuando sustituimos x por 1 en el segundo miembro de la identidad y por tanto cuando lo hacemos en el primer miembro. La suma pedida es $2^7=128$.

21.(C) La edad de Joaquín, x, será 16 + y + z, siendo, y, z , las edades de María y Mar. Además $x^2=1632+(y+z)^2$, o lo que es igual, $x^2-(y+z)^2=1632$, o bien,

$1632=(x+y+z)\cdot(x-(y+z))=(x+y+z)\cdot 16$, luego $(x+y+z)=102$.

22.(D) Vemos los restos de las primeras potencias de 7 con respecto a 9.
7 $\longrightarrow$ 7, 49 $\longrightarrow$ 4, 343 $\longrightarrow$ 1. Al dividir 343 entre 9 da resto 1 y así $343^8=7^{24}$ también dará resto 1, luego 3^{25} da resto 7.

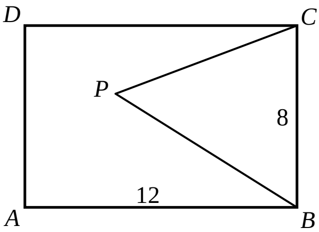
23.(A) Hacer un dibujo nos aclarará un poco las cosas. El trapecio se puede obtener como diferencia de dos triángulos, el grande de base 12 y altura 6, y el pequeño de base $k-2$ y altura, $-1+\dfrac{k}{2}$ (altura del punto de intersección de las rectas, $y=x+k$, $y=-x-2$) Así el área



del trapecio es $36-\frac{(k-2)^2}{4}$.

Si esta área debe ser 20, entonces $\frac{(k-2)^2}{4}=16$, y de ahí k = 10.

24.(B) Entendemos que el punto *P* tiene con igual probabilidad cualquier longitud entre 0 y 12. Para que el triángulo *PBC* tenga área mayor que 20, la altura de *P* sobre *BC* debe ser mayor que 5, y por tanto la longitud de P debe ser menor que 7. Esta probabilidad es de $\frac{7}{12}$.



25.(C) En los 50 términos de la sucesión, 1, 3, –5, 7, 9, –11, 13, 15, –17, 19,…, están los 17 primeros de 1, 7, 13, ... ; los 17 primeros de 3, 9, 15, ...; y los 16 primeros de -5, -11, -17, ...

$$1+7+13+...+97=\frac{97+1}{2}\cdot 17=49\cdot 17=833$$

3 + 9 + 15 + ...+ 99 = 833 + 34 = 867

- 5 – 11 – 17 - ... – 95 = - 867 + 101 – 34 = - 800

La suma de esos resultados es 833 + 867 – 800 = 900

También podríamos obtener la suma como:

$$1+3+(-5+7+9)+(-11+13+15)+...+(-95+97+99)=4+11+17+...+101=$$

$$=4+\frac{101+11}{2}\cdot 16=900\ .$$

XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel IV

1. (E) Si cambió el orden de las cifras de a y obtuvo para el producto 161, multiplicó 23 por 7, cuando debía haber multiplicado 32 por 7; de modo que el resultado correcto es 224.

2. (B) Teniendo en cuenta que el dominio de la función inversa de una función coincide con el recorrido (o imagen) de ésta, como 3^x es un número positivo, el recorrido de $f(x) = 3^x + 5$ es el conjunto $(5,+\infty)$, y este es también el dominio de su inversa .

3. (A) La ecuación $\sqrt{5|x|+8} = \sqrt{x^2-16}$ es equivalente a $x^2 - 5|x| - 24 = 0$.

Si $x > 0$, la ecuación es $x^2 - 5x - 24 = 0$, que tiene como soluciones 8 y –3, no siendo válida esta última porque no es mayor que 0.

Si $x < 0$, la ecuación es $x^2 + 5x - 24 = 0$, que tiene como soluciones –8 y 3, no siendo válida esta última porque no es menor que 0.

El producto de las soluciones de la ecuación original es –8×8 = –64

4. (A) Si $f(x) + 2f(-x) = sen\ x$ para todo número real *x*, entonces:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{I} & f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ \mathrm{II} & f\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) = sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \end{array}\right\}.$$ Si sumamos estas dos ecuaciones obtenemos: $3f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, de donde $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Sustituyendo en II, tenemos $-f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

5. (A) El primer día hicieron $\frac{1}{3}x+2$. El segundo día hicieron $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}x-2\right)+4$. Finalmente el tercer día hicieron 8 problemas, por tanto $\frac{1}{3}x+2+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}x-2\right)+4+8=x$. De aquí $x=30$.

6. (D) Los triángulos ABC y EDB son semejantes, así tenemos que $\frac{ED}{3}=\frac{DB}{4}$.

El área del triángulo ABC es $\frac{3\times 4}{2}=6$. De modo que el área del triángulo EDB es

$$\frac{ED\times DB}{2}=\frac{6}{3} \quad\Rightarrow\quad \frac{DB\times\frac{3}{4}DB}{2}=2 \quad\Rightarrow\quad DB^2=\frac{16}{3} \quad\Rightarrow\quad DB=\frac{4\sqrt{3}}{3}2.$$

7. (B) El mayor elemento del conjunto es 10^{10} , y la suma de los 10 restantes es $\frac{10^{10}-1}{10-1}=\frac{10^{10}-1}{9}$. Por tanto el cociente pedido es $\frac{10^{10}}{\frac{10^{10}-1}{9}}=9\times\frac{10^{10}}{10^{10}-1}\approx 9$

8. (D) Puesto que 12 × 4 = 48, **p**or el “Principio del Palomar” podemos afirmar que al menos 5 personas de entre 52 cumplen años el mismo mes.

9. (B) En una vuelta completa, la diferencia entre la distancia recorrida por fuera y la recorrida por dentro es $2\pi(R+6)-2\pi R=12\pi$. Si tarda 6 s. más en recorrer la vuelta por fuera, lleva una velocidad de 2π m/s.

10. (D) El producto es positivo si se multiplican dos números positivos o dos negativos. La probabilidad de que el producto sea de dos números positivos es $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$ mientras que la probabilidad de que el producto sea de dos negativos es $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$. Por tanto, la probabilidad de que el producto sea positivo es $\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$

11. (C) Llamando x al largo del parking e y a su ancho, tenemos $\left.\begin{array}{r} x\cdot y=168 \\ x^2+y^2=625 \end{array}\right\}$.Si a la segunda ecuación le sumamos el doble de la primera, tenemos $(x+y)^2=961$. Por tanto $x+y=31$, y el perímetro es 62.

12. (E) La propiedad I es falsa, puesto que

$$x@(y+z)=\frac{x+(y+z)}{2}\neq\frac{x+y}{2}+\frac{x+z}{2}=(x@y)+(x@z).$$

La propiedad II es verdadera, puesto que

$$x+(y@z)=x+\frac{y+z}{2}=\frac{2x+y+z}{2}=\frac{x+y+x+z}{2}=(x+y)@(x+z).$$

Por último, la propiedad III también es verdadera, ya que

$$x@(y@z)=x@\frac{y+z}{2}=\frac{x+\frac{y+z}{2}}{2}=\frac{\frac{x+y}{2}+\frac{x+z}{2}}{2}=\frac{(x@y)+(x@z)}{2}=(x@y)@(x@z)$$

13. (A) Se puede calcular la probabilidad de que el dardo caiga en la zona sombreada haciendo el cociente entre el área del cuadrado y el área total del octógono. El lado del cuadrado es el mismo que el lado del octógono, l. Y el área del octógono es $A=\frac{2l^2}{\sqrt{2}-1}$. Por tanto la probabilidad es $p=\frac{l^2}{\frac{2l^2}{\sqrt{2}-1}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

14. (C) Como el triángulo ABE es rectángulo, recto en A, al ser el cociente entre los dos ángulos agudos 4/5, estos miden 40º y 50º respectivamente. Como las cuerdas AB y ED son paralelas, el ángulo DEB mide también 50º. Por tanto los arcos DE, EA y AB suman 80º + 100º + 80º = 260º. Y el ángulo BCD es la mitad de esta suma, es decir 130º.

15. (E) La ecuación de r_2 corresponde a la función inversa (ya que es simétrica respecto de la gráfica de la función identidad). Así $x = a\cdot y + b \Rightarrow \quad y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$

16. (C) Si las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo son números enteros que están en progresión aritmética, los lados son de la forma 3k, 4k, 5k. De los números propuestos sólo hay uno que sea múltiplo de 3 ó 4 ó 5. Ese número es 81

17. (E) Cuando M crece un p% y después decrece un q%, se convierte en $M \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{q}{100}\right)$. Para que esta cantidad sea mayor que M debe ser

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{q}{100}\right) > 1 \Rightarrow 1+\frac{p}{100}-\frac{q}{100}-\frac{pq}{10000} > 1 \ \Rightarrow \ \frac{p}{100}\cdot\left(1-\frac{q}{100}\right) > \frac{q}{100}$$

$$\Rightarrow \quad p > \frac{100q}{100-q}$$

18.(B). Si $(2x)^{\log_b 2} - (3x)^{\log_b 3} = 0$, entonces $(2x)^{\log_b 2} = (3x)^{\log_b 3}$ y tomando logaritmos tenemos: $\log_b 2\cdot\log(2x) = \log_b 3\cdot\log(3x)$. Dividiendo por $\log_b 10$, cambiamos los logaritmos en base b a logaritmos decimales, y así tenemos

$$\log 2\cdot(\log 2+\log x) = \log 3\cdot(\log 3+\log x) \quad\Rightarrow\quad \log x = -\log 2-\log 3 \Rightarrow x = \frac{1}{6}$$

19.(D) $(a+b+c)\cdot(a+b-c)=3ab \quad \Rightarrow \quad (a+b)^2-c^2=3ab \quad \Rightarrow \quad a^2+b^2-c^2=ab$,

siendo entonces $\cos\hat{C}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{1}{2}$. El ángulo vale 60º

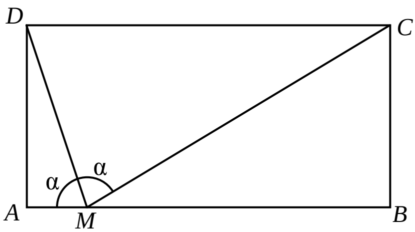
20.(B) Puesto que los tres triángulos son rectángulos y tienen longitudes de sus lados enteras, estos forman ternas pitagóricas. Siendo AB = 3, la única terna en la que interviene 3 es 3, 4, 5.Así AE = 4 y BE = 5. Además de en esta, 5 interviene en la terna 5, 12, 13, de modo que EC = 12 y BC = 13. Por último 12 interviene en las ternas de la forma 3k, 4k, 5k y en 12, 35, 37. Como dicen que no hay triángulos semejantes, no puede ser 3k,4k,5k, siendo CD = 35 y ED = 37. El área resulta $A=\dfrac{3\cdot 4}{2}+\dfrac{5\cdot 12}{2}+\dfrac{12\cdot 35}{2}=246$. Y la suma de sus cifras es 12

21.(C) El área de la región sombreada es el doble del área de un segmento circular de ángulo central $\dfrac{2\pi}{3}rad$ en un círculo de radio R = 2. $A_{segmento}=A_{\sec tor}-A_{triángulo}$

$$\Rightarrow A_{segmento}=\frac{s_{arco}\cdot R}{2}-\frac{b\cdot h}{2}=\frac{\alpha\cdot R\cdot R}{2}-\frac{b\cdot h}{2}=\frac{\frac{2\pi}{3}\cdot 4}{2}-\frac{2\sqrt{3}\cdot 1}{2}=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$$

Y el área sombreada es el doble: $A=\dfrac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}$

22.(E) Si $A\hat{M}D=C\hat{M}D=\alpha$, en la figura tenemos $C\hat{M}B=M\hat{C}D=180º-2\alpha$, por ser alternos internos. Así $C\hat{D}M=\alpha$ y el triángulo CMD es isósceles, siendo CM = 6. En BMC, $sen\ C\hat{M}B=\dfrac{3}{6}\Rightarrow C\hat{M}B=30º\Rightarrow \alpha=75º$



23.(D) Las raíces cuartas de – 4 son $\left(\sqrt{2}\right)_{45^{o}}$, $\left(\sqrt{2}\right)_{135^{o}}$, $\left(\sqrt{2}\right)_{225^{o}}$, $\left(\sqrt{2}\right)_{315^{o}}$. Por tanto el radio de la circunferencia circunscrita al cuadrado es $\sqrt{2}$ mientras que el radio de la circunferencia inscrita es 1. El área de la corona circular pedida es $\pi\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2-\pi\cdot 1^2=\pi$

24.(C) Si hay 19 jugadores de élite y este número viene dado por la fórmula $2^{1+[\log_2(N-1)]}-N$, al número total de jugadores le falta 19 para ser una potencia de 2. Como hay menos de 120 jugadores, los valores posibles son:

128 – 19 = 109; 64 – 19 = 45; 32 – 19 = 13.

Pero la parte entera del logaritmo en base 2 de 12 es 3, que sumado a 1 da 4, que no coincide con el exponente de 2 para 32. Por tanto, la tercera posibilidad no es válida, y la suma de todas las posibilidades válidas es 109 + 45 = 154

25.(C) Tenemos los siguientes datos:

$$\left.\begin{array}{r} f(1)=a+b+c=0 \\ f(7)=49a+7b+c\in[51,59]\subset Z \\ f(8)=64a+8b+c\in[71,79]\subset Z \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{c} 48a+6b\in[51,59]\subset Z \\ 15a+b\in[12,28]\subset Z \end{array}\right\}\Rightarrow 42a\in[13,117]\subset Z$$
.

Esta última condición la cumplen sólo dos valores de *a*, *a* = 1 y *a* = 2.

Si $a=1,\quad 6b\in[3,11]\subset Z$, y *b* sólo puede ser 1, de modo que c sólo puede ser – 2, pero esta solución no vale porque $f(8)=64+8-2=70\notin[71,79]$.

Si $a=2,\quad 6b\in[-45,-37]\subset Z$, y *b* sólo puede ser – 7, de modo que c = 5. La función es $f(x)=2x^2-7x+5$, y $f(100)=19305\in(15000,20000)\Rightarrow k=3$

Participantes y relación de ganadores del XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

En esta convocatoria del Concurso de Primavera la participación de estudiantes en la primera fase fue superior a 35000. De los 428 centros participantes se inscribieron 3490 estudiantes para la segunda fase aunque finalmente realizaron la prueba 2966. La estadística de participación por niveles y puntuaciones obtenidas puede consultarse en la página de la Sociedad Puig Adam así como la relación de todos los ganadores del concurso y la relación de los centros con mayor puntuación en cada uno de los niveles.

La distribución por niveles de los participantes en la segunda fase, que como siempre tuvo lugar en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, fue la siguiente:

	NIVEL 1		NIVEL 2		NIVEL 3		NIVEL 4	
	5º P y 6º P		1º ESO, 2º ESO		3º ESO, 4º ESO		1º B, 2º B	
nº de inscripciones	223	574	449	662	510	506	354	212
nº de participantes	207	521	399	566	430	399	280	164
nº centros	105	172	236	265	224	224	150	96

Los tres, y en algún caso cuatro, ganadores en cada uno de los niveles fueron:

NIVEL I

1. Pablo Soto Martín (5º Primaria) CEIP Miguel de Cervantes
2. Miguel Miret Ortega (6º Primaria) Liceo Francés
3. Lucas Cuesta Araujo (5º Primaria) CEIP La Latina

NIVEL II

1. Berta García González (2º ESO) IES San Juan Bautista. Madrid
2. Pablo del Olmo de Casas (1º ESO) IES Las Canteras
3. Marcos Vázquez Verdejo (1º ESO) Colegio Divina Pastora
3. Daniel Puignau Chacón (2º ESO) Liceo Francés

NIVEL III

1. Miguel Barrero Santamaría (4º ESO) IES Alameda de Osuna. Madrid
2. Álvaro Robledo Vega (3º ESO) Colegio Peñalar. Torrelodones
3. Álvaro Rodríguez García (4º ESO) Colegio Gredos San Diego
3. Ángel Prieto Nastlin (4º ESO) Liceo Francés

NIVEL IV

1. Jaime Mendizábal Roche (2º Bchto) IES Ramiro de Maeztu. Madrid
2. Pablo Esteban de la Iglesia (1º Bchto) Colegio Fray Luis de León. Madrid
3. Víctor García Herrero (2º Bchto) IES Ortega y Gasset

XXXI CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 8 de junio de 2013

NIVEL I (3º de E.S.O.) Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1.

La suma de dos números naturales es 371 y el cociente entre su mínimo común múltiplo y su máximo común divisores 430. ¿Cuáles son esos números?

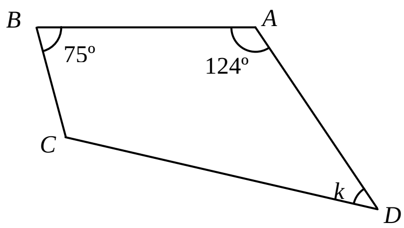
Problema 2.

En un triángulo rectángulo el radio de la circunferencia inscrita es de 2,8 cm y el radio de la circunferencia circunscrita es de 9,1 cm. Calcula el perímetro del triángulo.

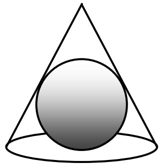
NIVEL I (3º de E.S.O.) Segunda parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1A. (1 punto)
¿Cuál es el mayor número de seis cifras, representado por *ELEVEN*, en el que letras distintas representan cifras distintas y letras iguales cifras iguales, que verifica que es múltiplo de 11?

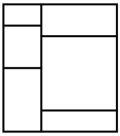
Problema 2A. (1,5 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior y k la suma de las cifras de T.
En el cuadrilátero *ABCD* de la figura, que no está a escala, $AB = AC$, $\hat{A} = 124^{\circ}$, $\hat{B} = 75^{\circ}$ y $\hat{D} = k^{\circ}$. ¿Cuánto mide el ángulo $B\hat{D}C$?



Problema 3A. (2 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior. Una esfera de T cm de radio está inscrita (perfectamente ajustada) en un cono cuya generatriz es igual al diámetro de su base. ¿Cuál es, en cm, la altura del cono?



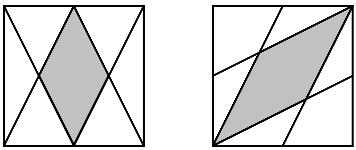
Problema 1B. (1 punto)
Dividimos un cuadrado en seis rectángulos como se indica en la figura. Si la suma de los perímetros de los seis rectángulos es 120 cm, ¿cuál es. en cm^2, el área del cuadrado?



Problema 2B. (1,5 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior y n la suma de las cifras de T. El número de cinco cifras 24X8Y es divisible por 4, 5 y n. ¿Cuál es la suma de las cifras X e Y?

Problema 3B. (2 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior. El cuadrilátero $PQRS$ está inscrito en una circunferencia de tal manera que PR es un diámetro. Si las longitudes de PQ, QR y RS son 60, 25 y $13 \cdot T$, ¿cuál es la longitud del lado SP?

Problema 4. (5 puntos)
Sean a y b las respuestas de los problemas **3A** y **3B**, respectivamente. La figura muestra dos rombos sombreados inscritos en cuadrados iguales de lado $a - b$. Cada uno de ellos se han formado mediante segmentos de extremos un vértice del cuadrado y el punto medio de uno de los lados. ¿Cuál es la diferencia entre las áreas de dichos rombos?

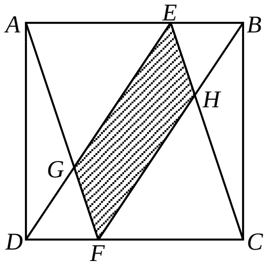


NIVEL II **(4º de E.S.O.)** Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1.

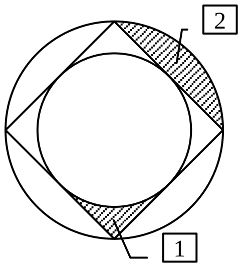
Al escribir una a continuación de otra las edades de Alicia y Bruno resulta un número de cuatro cifras que es un cuadrado perfecto. Si hiciéramos lo mismo, en ese orden, dentro de 31 años resultaría un número también de cuatro cifras y también cuadrado perfecto.
¿Cuáles son las edades actuales de Alicia y de Bruno?

Problema 2.



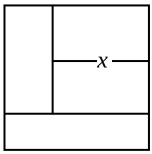
En el cuadrado *ABCD* de la figura $AE = 2 \cdot EB$ y $FC = 2 \cdot DF$. ¿Cuál es el cociente entre el área del paralelogramo *EGFH* y el área del cuadrado *ABCD*?

NIVEL II **(4º de E.S.O.)** Segunda parte (1 hora 30 minutos)



Problema 1A. (1 punto)
Calcula el cociente entre el área de la región $\boxed{1}$ y el área de la región $\boxed{2}$.

Problema 2A. (1,5 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior, que en la forma más simplificada es $T = \dfrac{a-\pi}{2\pi - b}$ con a y b enteros.



La figura, que no está a escala, muestra un cuadrado de lado $\dfrac{a}{b}$ dividido en cuatro rectángulos de igual área. Calcula la longitud del segmento marcado con x.

Problema 3A. (2 puntos)

Sea $T = \dfrac{c}{d}$ la respuesta del problema anterior expresada en forma de fracción irreducible y $n = 2(c+d)$. En una clase de 4º de ESO hay n chicas. Si seleccionamos al azar dos estudiantes de esa clase la probabilidad de que ambos sean chicas es 0,15. ¿Cuántos chicos hay en esa clase?

Problema 1B. (1 punto)

¿Cuántas soluciones enteras tiene la inecuación $\left||x| - 2013\right| < 5$?

Problema 2B. (1,5 puntos)

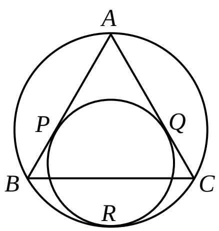
Sea T la respuesta del problema anterior. Calcula cuántos números de cuatro cifras verifican que la suma de los cuadrados de sus cifras es T.

Problema 3B. (2 puntos)

La respuesta del problema anterior es un número T de dos dígitos, p y q. En el triángulo ABC la mediana que parte de A es perpendicular a la mediana que parte de B. Si las longitudes de los lados AC y BC son $p+q$ y $p\cdot q$, respectivamente, ¿cuál es la longitud del lado AB?

Problema 4. (5 puntos)

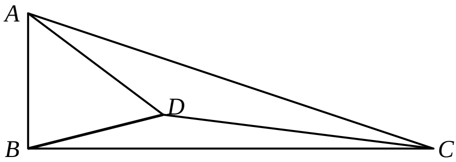
Sean a y b las respuestas de los problemas **3A** y **3B**, respectivamente y sea $x = a\cdot b^2$.
En una circunferencia hay inscrito un triángulo equilátero ABC. Una segunda circunferencia es tangente interior a la primera en R y tangente a AB y AC en P y Q respectivamente. Si $BC = x$ calcula PQ.



NIVEL III (1º de Bachillerato) Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1.

En el interior del triángulo rectángulo *ABC*, con ángulo recto en *B*, tomamos un punto *D* tal que el área del triángulo *ABD* es la tercera parte del área del triángulo original y el área del triángulo *BDC* es la cuarta parte del área del triángulo original. Si las distancias de *D* a los vértices *A* y *C* son, respectivamente, 3 y 4 cm, calcula la distancia de *D* al vértice *B*.



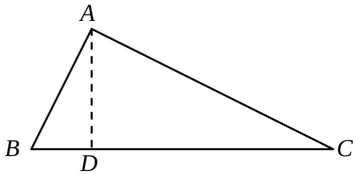
Problema 2.

Encuentra todos los enteros positivos que escritos en notación usual (base 10) son una unidad mayor que la suma de los cuadrados de sus cifras.

NIVEL III (1º de Bachillerato) Segunda parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1A. (1 punto)
Calcula el menor primo p tal que $(p - 1)$ es la diferencia de los cuadrados de dos múltiplos de 4, ambos positivos.

Problema 2A. (1,5 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior y k la suma de los dígitos de T.
En el triángulo rectángulo *ABC* de la figura *AD* es perpendicular a *BC*. Si el área del triángulo *ABD* es 1 y el área del triángulo *ADC* es k, calcula $tg^2\hat{B}$.



Problema 3A. (2 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior.
Calcula el mayor entero positivo n para el que $n^2 - Tn + 6$ resulta ser un número primo.

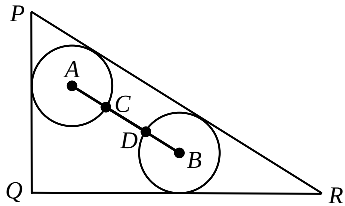
Problema 1B. (1 punto)
Calcula el valor de T si $\lg_2 4$, $\lg_{\sqrt{2}} 8$, $\lg_3 9^{T-1}$ están en progresión geométrica.

Problema 2B. (1,5 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior.
Calcula el número de valores enteros de x que verifican el sistema de inecuaciones:
$x^2 > x + 6$, $\quad |x| < T^2$.

Problema 3B. (2 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior.
Una enorme cesta de frutas tiene un gran número de naranjas, peras, manzanas y limones, más de 10000 de cualquiera de ellas. Calcula el menor valor de k para que cualquier elección de k de piezas de frutas tenga al menos una de las siguientes características:

- Que haya al menos 1001 naranjas
- Que haya al menos 2013 peras
- Que haya al menos 219 manzanas
- Que haya al menos T limones.

Problema 4. (5 puntos)
Sea a la respuesta del problema **3A** y b la suma de los dígitos del problema **3B**.
En el triángulo rectángulo PQR de la figura, en el que $PQ = \frac{b}{2}$ y $QR = 2a$, dibujamos dos circunferencias iguales, de centros A y B, cada una de ellas tangente a un cateto y a la hipotenusa. Si las intersecciones de las circunferencias con el segmento AB dividen a éste en tres partes iguales, $AC = CD = DB$, calcula el radio de las circunferencias.



XII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

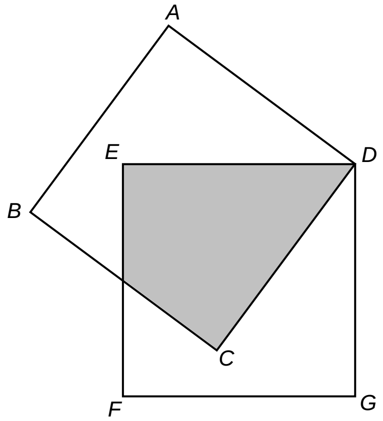
17 de noviembre de 2012

PRUEBA POR EQUIPOS 1º y 2º de E.S.O. (45 minutos)

1. Encuentra todos los números de cuatro cifras que empezando por 4 y acabando en 8 son múltiplos de 2, 3, 4, 6, 8 y 9.

2. En el segmento *AB* marcamos el punto *C* tal que $AC = 3 \cdot CB$. Con diámetros *AC* y *CB* dibujamos sendas circunferencias cuyas tangentes exteriores cortan a la prolongación de *AB* en el punto *D*. Demuestra que *BD* es igual al radio de la circunferencia pequeña.

3. En el dibujo de la figura *ABCD* y *DEFG* son cuadrados iguales de área 16. *D* es un vértice común a ambos y el cuadrilátero *EBFC* es un rectángulo. Calcula el área de la región sombreada común a ambos cuadrados



XII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

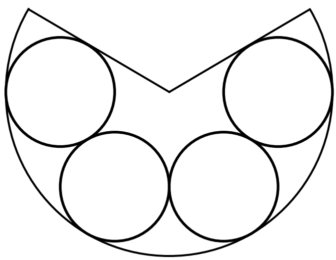
17 de noviembre de 2012

PRUEBA POR EQUIPOS 3º y 4º de E.S.O. (45 minutos)

1. ¿Cuál es el menor múltiplo de 84 entre cuyas cifras aparecen exclusivamente "6" y "7"?

2. Si $x + \dfrac{1}{x} = 3$, ¿cuál es el valor de $x^6 + \dfrac{1}{x^6}$?

3. En el dibujo de la figura hay cuatro circunferencias iguales, tangentes entre sí, y un sector circular que corresponde al desarrollo de la superficie lateral de un cono cuyo radio de la base es $\dfrac{2}{3}$ de su generatriz. Las circunferencias son a su vez tangentes al arco y a los radios del sector. Calcula el cociente entre la generatriz de dicho cono y el radio de las circunferencias.



XII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

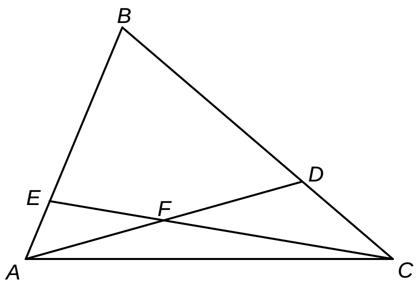
17 de noviembre de 2012

PRUEBA POR EQUIPOS Bachillerato. (45 minutos)

1. Representamos por P_k al producto de los k primeros números primos. Demuestra que, sea cual fuere k, $P_k + 1$ nunca es un cuadrado perfecto.

2. Si $z^2 + \dfrac{1}{z^2} = 14$ y $z > 0$, ¿cuál es el valor de $z^5 + \dfrac{1}{z^5}$?

3. En el lado AB del triángulo ABC marcamos el punto E de tal manera que $\dfrac{AE}{EB} = \dfrac{1}{3}$ y en el lado BC marcamos el punto D con $\dfrac{CD}{DB} = \dfrac{1}{2}$. Si F es el punto de intersección de AD y CE, calcula $\dfrac{EF}{FC} + \dfrac{AF}{FD}$.



XII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

17 de noviembre de 2012

PRUEBA INDIVIDUAL 1º y 2º de E.S.O. (90 minutos)

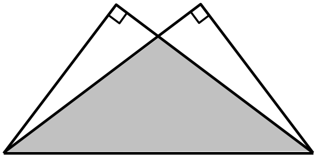
1. En la siguiente expresión *a, b* y c representan tres cifras cualesquiera, no todas nulas. Calcula el valor de dicha expresión.

$$\frac{0'\overset{\frown}{abc}+0'\overset{\frown}{acb}+0'\overset{\frown}{bac}+0'\overset{\frown}{bca}+0'\overset{\frown}{cab}+0'\overset{\frown}{cba}}{0'\overset{\frown}{a}+0'\overset{\frown}{b}+0'\overset{\frown}{c}}$$

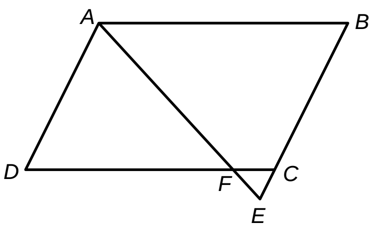
2. En el conjunto $\{1, 2, 3, ..., 50\}$ hay muchos conjuntos formados por cinco enteros consecutivos, por ejemplo $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ o $\{13, 14, 15, 16, 17\}$ ¿Cuántos de estos conjuntos verifican que el producto de sus cinco elementos es múltiplo de 12 y de 21 simultáneamente?

3. En un triángulo isósceles de lados *AB* = 5, *AC* = 5 y *BC* = 8, calcula la distancia del vértice *A* al centro de la circunferencia inscrita en dicho triángulo.

4. Dos triángulos rectángulos iguales, de catetos 24 y 32 cm, se colocan como indica la figura. Calcula el área de la región sombreada común a ambos triángulos.



5. Prolongamos el lado *BC* del paralelogramo *ABCD* de forma que el área del triángulo *ADF* es 81 cm^2 y el área del triángulo *FCE* es 4 cm^2. Calcula el área del paralelogramo *ABCD*.



XII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

17 de noviembre de 2012

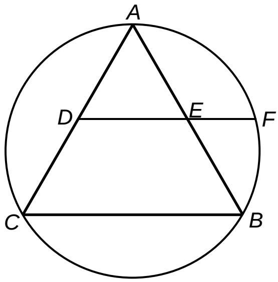
<u>PRUEBA INDIVIDUAL</u> 3º y 4º de E.S.O. (90 minutos)

1. Si $[abc]$ representa el número de tres cifras, a, b y c, con a K 0, calcula el mínimo valor de la expresión $[abc]-\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

2. Determina todos los números primos p tales que $p^{2012}+p^{2013}$ sea un cuadrado perfecto.

3. El triángulo ABC es semejante al triángulo MNP con BC = 60, AB = 12, MP = 8 y $BC > AC > AB$. Calcula la suma de todos los posibles valores enteros para el cociente entre el área de ABC y el área de MNP.

4. En el triángulo equilátero ABC de la figura, D y E son puntos medios de los correspondientes lados. Expresa el cociente $\dfrac{DE}{EF}$ como $\dfrac{a+\sqrt{b}}{c}$ con a, b y c enteros.



5. En una competición un equipo gana 3 partidos seguidos, luego pierde 1, luego vuelve a ganar 3 seguidos, luego pierde 2, gana 3, pierde 3, etc., es decir, gana 3 seguidos y pierde cada vez un partido más que la vez anterior. Si N es el número total de partidos jugados, calcula el menor valor de N para el que el porcentaje de partidos ganados sea inferior al 25 %.

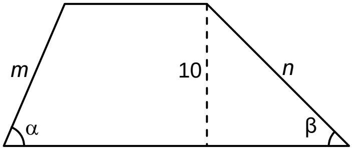
XII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

17 de noviembre de 2012

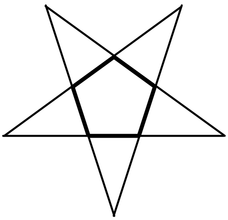
PRUEBA INDIVIDUAL **Bachillerato** (90 minutos)

1. En el triángulo *ABC* la longitud del lado *BC* es la media de las longitudes de los otros dos. Si $\cos\hat{C} = \frac{AB}{AC}$, calcula el valor de dicho coseno.

2. En el trapecio de la figura, de altura 10, las longitudes de los lados *m* y *n* vienen dadas por números enteros. Si la suma de los senos de los ángulos agudos α y β es $\frac{1}{2}$, calcula el mayor valor posible para la suma *m* + *n*.



3. Prolongamos los lados de un pentágono regular hasta formar una estrella de cinco puntas como indica la figura. Si el cociente entre el área del pentágono y el área de la estrella es $sen\varphi$, calcula el valor de φ.



4. Un entero positivo *N* decimos que es "*autodescriptivo*" si cada uno de sus dígitos aparece tantas veces como indica su valor. Por ejemplo: 1, 22, 212, 122333 son "*autodescriptivos*". Calcula la suma de los dígitos de todos los números "*autodescriptivos*" de seis dígitos.

5. Sea *P*(*x*) un polinomio de grado 2010. Si $P(n) = \frac{1}{n}$ para *n* = 1, 2, 3,…, 2011, calcula el valor de *P*(2012).

XII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

17 de noviembre de 2012

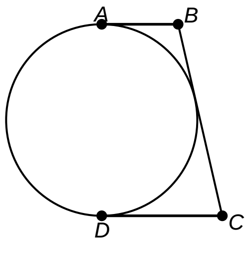
PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

1º y 2º de ESO.-

1A.- Calcula la cifra de las unidades del número 1234567^{89}.
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1B.- Sea "T" la respuesta del problema 2B
En el triángulo *ABC* en el que los tres ángulos son agudos, $\hat{A} = \left(x + \dfrac{T}{3}\right)^0$, $\hat{B} = (2x - 6)^0$ y el ángulo exterior en *C* mide $(3x + 9)^0$. Calcula el número de posibles valores enteros de *x*.
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1C.- Sea "$T = \dfrac{a}{b}$" la respuesta del problema 2C, expresada en forma de fracción irreducible.
En la figura, los segmentos *AB* y *DC* son paralelos y tangentes a la circunferencia, siendo *A* y *D* los puntos de tangencia. El segmento *BC* también es tangente a la circunferencia. Si *AB* = *b* y *DC* = *a*, calcula el área del trapecio *ABCD*.
(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)



XII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

17 de noviembre de 2012

PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

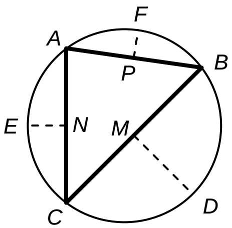
3º y 4º de ESO.-

.

2A.- Sea "T" la respuesta del problema 3A.

El radio de la circunferencia de la figura adjunta es $\frac{T}{5}$ y el perímetro del triángulo *ABC* inscrito es *T*. Los segmentos *DM, EN* y *FP* pertenecen a las mediatrices de los lados del triángulo. Calcula el área del hexágono *AFBDCE*.

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)



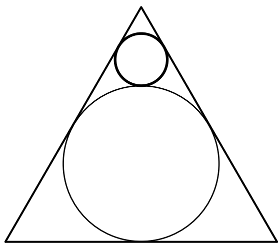
2B.- En un concurso de problemas el 40 % de los chicos y el 60 % de las chicas obtuvieron una puntuación superior a 80 puntos. Si había el triple de chicos que de chicas participantes, ¿qué porcentaje de los participantes obtuvieron una puntuación superior a 80 puntos?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

2C.- Sea "T" la respuesta del problema 3C.

En un triángulo equilátero de lado *T* se dibujan dos circunferencias tangentes como se muestran en la figura. Calcula el cuadrado del radio de la circunferencia pequeña.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)



XII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

17 de noviembre de 2012

PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

Bachillerato.-

3A.- Sea "T" la respuesta del problema 1A.
En el cuadrado *ABCD* las coordenadas de los vértices *A* y *B* son, respectivamente, $(\log_{15} 5,\ 0)$ y $(0,\ \log_{15} x)$. Si las coordenadas de los otros dos vértices son positivas y la suma de las ocho coordenadas de los cuatro vértices es $T + 1$, calcula x.
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

3B.- Sea "T" la respuesta del problema 1B.
En una circunferencia de radio T inscribimos un triángulo *ABC* en el que $\hat{B} = 30º$. Con centro en B se traza otra circunferencia tangente a la recta que pasa por *A* y *C*. Calcula el máximo valor para el área de la región exterior a la circunferencia de centro *B* pero interior al triángulo *ABC*.
(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

3C.- ¿Cuántas palabras capicúas (que se leen igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda) pueden formarse utilizando en cada una todas las letras de la palabra “MISSISSIPPI”.
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

CENTROS GANADORES

1. Colegio Fray Luis de León A
2. IES San Juan Bautista B
3. IES Ramiro de Maeztu A

ESTUDIANTES GANADORES

NIVEL I (1º, 2º ESO)

1.	Alejandro García Miguel	IES Luis García Berlanga A
2.	Jorge Elvira	Colegio Ntra. Sra. de las Maravillas

NIVEL II (3º, 4º ESO)

1.	Gonzalo Gómez Abejón	IES Ramiro de Maeztu
2.	Álvaro Robledo Vega	Colegio Peñalar

NIVEL III (1º, 2º Bachillerato)

1.	Miguel Barrero Santamaría	IES Alameda de Osuna
2.	Izar Alonso Lorenzo	IES Diego Velázquez

RELACIÓN DE LOS 10 CENTROS CON MAYOR PUNTUACIÓN

1.	Colegio Fray Luis de León A	32’5
2.	IES San Juan Bautista B	30,8
3.	IES Ramiro de Maeztu A	24,4
4.	Colegio Alemán de Madrid B	23,93
5.	IES Cardenal Herrera Oria	20,2
6.	IES San Juan Bautista A	20,1
7.	Colegio Alemán de Madrid A	19,43
8.	IES Fortuny	17,6
9.	IES Alameda de Osuna A	17,4
10.	Colegio Brains A	16,93

REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

XLIX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Comunidad de Madrid

FASE CERO: viernes 23 de noviembre de 2012

- En la hoja de respuestas, escribe la letra de la opción que creas correcta
- Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos; cada respuesta en blanco 1 punto, y cada respuesta errónea, 0 puntos.
- No está permitido el uso de calculadoras, instrumentos de medida o de cualquier aparato electrónico.
- TIEMPO: 3 horas.

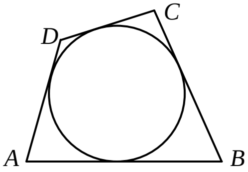
1. ¿Cuántos números reales satisfacen la ecuación $\left(x^2+4x-2\right)^2=\left(5x^2-1\right)^2$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

2. ¿Cuál es el menor de los siguientes números?

A) $\frac{3}{2}$ B) $\log_3 2$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\log_4 10$ E) $\sqrt[3]{4}$

3. El cuadrilátero *ABCD* es circunscrito a una circunferencia. Si *AB* = 16 y *CD* = 10, ¿cuál es el perímetro del cuadrilátero?



A) 50 B) 52 C) 54 D) 56 E) 58

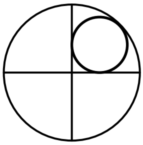
4. Si $\left[\sqrt{x}\right]=9$ y $\left[\sqrt{y}\right]=12$, ¿cuál es el mayor valor posible para $[x+y]$?
Recuerda: $[a]$ es el mayor entero menor o igual que a.

A) 268 B) 225 C) 242 D) 270 E) 256

5. Si a y b son enteros positivos para los que $a^2-b^2=2017$, ¿cuál es el valor de a^2+b^2?

A) 2 026 081 B) 2 026 082 C) 2 026 083 D) 2 029 545 E) 2 034 145

6. Dos rectas perpendiculares, que se cortan en el centro de un círculo de radio 1, dividen a éste en cuatro partes iguales. En una de estas partes inscribimos una circunferencia, como se muestra en la figura. ¿Cuál es su radio?



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\sqrt{2}-1$ D) $\frac{1}{2}$ E) $2-\sqrt{2}$

7. Si x e y son números distintos de cero tales que $x\cdot y=\frac{x}{y}=x-y$, ¿cuál es el valor de $x+y$?

A) $-\dfrac{3}{2}$ B) $-\dfrac{1}{2}$ C) 0 D) $\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{3}{2}$

8. a, b y c son números positivos que verifican $a+b^2+2ac=29$, $b+c^2+2ab=18$, $c+a^2+2bc=25$. ¿Cuál es el valor de $a+b+c$?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

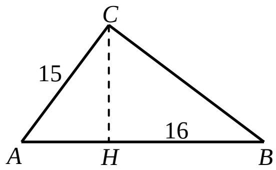
9. Una función f, definida para cualquier número distinto de cero, verifica que $f\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{x}\cdot f(-x)=2x$. Calcula $f(2)$.

A) 2,5 B) 3 C) 3,5 D) 4 E) 4,5

10. N = [xyz] es un número de tres cifras, todas distintas de cero. Si $N^2=(x+y+z)^5$ entonces $x^2+y^2+z^2$ es igual a:

A) 21 B) 23 C) 29 D) 33 E) 37

11. En el triángulo rectángulo ABC de hipotenusa AB, el cateto AC mide 15. Si la altura CH divide a AB en dos segmentos AH y HB, con HB = 16, el área del triángulo ABC es:



A) 120 B) 144 C) 150 D) 216 E) $144\sqrt{5}$

12. Una bolsa contiene 11 bolas numeradas con: 1, 2, 3,…, 11. Sacamos simultáneamente seis bolas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números de estas seis bolas sea impar?

A) $\dfrac{133}{231}$ B) $\dfrac{115}{231}$ C) $\dfrac{1}{2}$ D) $\dfrac{118}{231}$ E) $\dfrac{6}{11}$

13. El número de soluciones enteras positivas del sistema $\left.\begin{array}{l} xy+yz=44 \\ xz+yz=23 \end{array}\right\}$ es:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

14. En el triángulo rectángulo ABC el ángulo $\hat{A}$ = 30º. La circunferencia de diámetro el cateto AB corta a la hipotenusa en un punto D. Si $CD=\sqrt{3}$, ¿cuánto mide el cateto AB?

A) $3\sqrt{3}$ B) 6 C) $4\sqrt{3}$ D) 8 E) $5\sqrt{3}$

15. El discriminante de una ecuación de segundo grado con coeficientes enteros nunca puede ser:

A) 23 B) 24 C) 25 D) 28 E) 33

(Recuerda: el discriminante de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ es b^2-4ac)

16. Lanzamos ocho veces un dado equilibrado de seis caras. Si el número 3 aparece exactamente 3 veces, ¿cuál es la probabilidad de que no aparezca dos veces consecutivas?

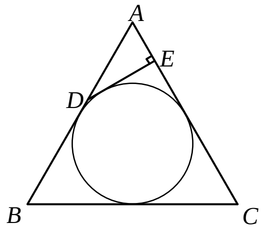
A) $\frac{5}{14}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{9}{14}$

17. Si a, b, c son distintos de cero las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ vienen dadas por la expresión:

A) $\dfrac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$ B) $\dfrac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}$ C) $\dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

D) $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$ E) Nada de lo anterior

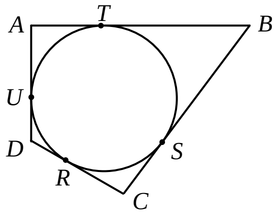
18. La figura adjunta muestra el triángulo equilátero ABC, su circunferencia inscrita y el segmento DE perpendicular al lado AC y tangente a la circunferencia inscrita; el punto D sobre el lado AB y el E sobre el lado AC. Si $AE = 1$, la longitud del lado del triángulo ABC es:



A) $3\sqrt{3}$ B) $3+\sqrt{3}$ C) $6-\sqrt{3}$

D) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$ E) $\sqrt{6}+\sqrt{3}$

19. La circunferencia de la figura está inscrita en el cuadrilátero $ABCD$, siendo R, S, T y U los puntos de tangencia con los lados. Si $\hat{A} = 90º$, $DR = 3$ y el arco RST es de 210º, el área del círculo es:



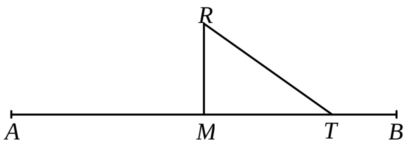
A) 36π B) 32π C) 27π D) 18π

E) Nada de lo anterior

20. Determina el número n, de manera que los últimos siete dígitos de $n!$ sean 8 000 000.

A) 24 B) 25 C) 26 D) 27 E) 28

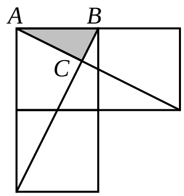
21. Desde el punto medio, M, del segmento AB, de p unidades de longitud, trazamos el segmento MR, de q unidades de longitud, perpendicular a AB. Si $RT = \dfrac{p}{2}$, las longitudes de los segmentos AT y TB son las soluciones de la ecuación:



A) $x^2 + px + q^2 = 0$ B) $x^2 - px + q^2 = 0$

C) $x^2 + px - q^2 = 0$ D) $x^2 - px - q^2 = 0$ E) $x^2 - px + q = 0$

22. Los tres cuadrados de la figura son iguales y de lado 1. ¿Cuál es el área del triángulo ABC?



A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{2}{9}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

23. El valor de $201\ 220\ 112\ 010^2 - 2 \cdot 201\ 220\ 112\ 007^2 + 201\ 220\ 112\ 004^2$ es:

A) 48 B) 38 C) 28 D) 18 E) 8

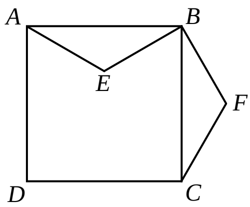
24. La base de un triángulo isósceles mide $\sqrt{2}$. Si las medianas sobre los dos lados iguales son perpendiculares entre sí, el área del triángulo es:

A) 1,5 B) 2 C) 2,5 D) 3,5 E) 4

25. En el triángulo *ABC*, *BD* es una mediana y *E* su punto medio. Si la prolongación de CE corta a AB en F con BF = 5, la longitud del lado AB es:

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

26. Sobre dos de los lados del cuadrado *ABCD* de la figura, se construyen dos triángulos isósceles e iguales, *AEB* y *BCF* con uno de sus ángulos de 120º. Si $EF = \sqrt{2}$, el área del cuadrado *ABCD* es:



A) $2\sqrt{2}$ B) 3 C) $2\sqrt{3}$ D) 4

E) Nada de lo anterior

27. Si los lados de un triángulo isósceles, no rectángulo, son: sen*x*, cos*x* y tg*x*, el valor de sen*x* es:

A) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$ C) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ E) Nada de lo anterior

28. Colocados en orden creciente los números *a* = 1000!, *b* = (400!)·(400!)·(200!), *c* = (500!)·(500!), *d* = (600!)·(300!)·(100!) y *e* = (700!)·(300!), la respuesta correcta sería:

A) $a < b < c < d < e$ B) b < c < d < e < a C) b < d < c < e < a

D) b < d < c < a < e E) c < b < a < d < e

29. Elegido al azar un número *x* en el intervalo [0, 3], la probabilidad de que el número elegido verifique $15x^2 + 3 < 14x$ es:

A) $\dfrac{3}{5}$ B) $\dfrac{4}{15}$ C) $\dfrac{4}{45}$ D) $\dfrac{1}{9}$ E) $\dfrac{1}{3}$

30. El valor de la suma de la siguiente serie de infinitos sumandos es:

$$S = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} - \frac{1}{256} + \frac{1}{512} - \frac{1}{1024} - \frac{1}{2048} + \ldots$$

A) 0 B) $\dfrac{2}{7}$ C) $\dfrac{6}{7}$ D) $\dfrac{9}{32}$ E) $\dfrac{27}{32}$

XLIX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

1ª FASE LOCAL-COMUNIDAD DE MADRID

Primera sesión, viernes 14 de diciembre de 2012

No está permitido el uso de calculadoras. Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.

Problema 1

Tenemos dos cubos de agua de volúmenes respectivos 4 y 9 litros, inicialmente vacíos. Queremos conseguir que el cubo mayor contenga exactamente 6 litros de agua repitiendo, todas las veces que haga falta y en el orden que queramos, las operaciones siguientes:

(a) Llenar completamente uno de los dos cubos;
(b) Vaciar completamente uno de los dos cubos;
(c) Verter parte o el total del contenido de un cubo al otro cubo hasta que el primero quede vacío o el segundo lleno.

Indicar qué sucesión de estas operaciones tenemos que realizar para conseguir nuestro objetivo.
(Se supone que disponemos de una fuente que mana constantemente y de un sitio donde tirar toda el agua sobrante.)

Problema 2

Sea H el ortocentro de un triángulo acutángulo ABC de alturas h_a ,h_b y h_c respectivamente. Demostrar que:

$$\frac{HA}{h_a}+\frac{HB}{h_b}+\frac{HC}{h_c}=2$$

Problema 3

Determinar todas las soluciones enteras de la ecuación: $x^3-y^3=xy+61$.

Segunda sesión, sábado 15 de diciembre de 2012

Problema 4

Los gráficos de las curvas $y = x^2 - a$, $x = y^2 - b$ $(a > 0, b > 0)$ se cortan en cuatro puntos de abscisas x_1, x_2, x_3 y x_4. Demostrar que:

$$(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4) = 1.$$

Problema 5

Consideramos n puntos del plano ($n > 3$), tales que tres cualesquiera de ellos no están alineados, y sea k un entero con $\frac{n}{2} < k < n$. Dibujamos una colección de segmentos de manera que:

- Cada uno de ellos tiene por extremos puntos de los inicialmente dados, y
- Cada uno de los n puntos es extremo, al menos, de k de los segmentos dibujados.

Demostrar que, como mínimo, tres de los segmentos dibujados son los lados de un triángulo.

Problema 6

Demostrar que existe un número natural que expresado en base diez contiene 2012 nueves consecutivos y que es el cuadrado de otro número natural.

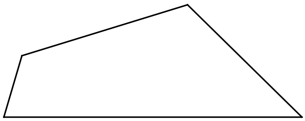
XVIII^{a} OLIMPIADA de MAYO
Primer Nivel
Mayo de 2012

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

PROBLEMA 1
Pablo dice: "Al día de mi cumpleaños le sumo 2 y multiplico el resultado por 2. Al número obtenido le sumo 4 y multiplico el resultado por 5. Al nuevo número obtenido le sumo el número del mes de mi cumpleaños (por ejemplo, si es junio, le sumo 6) y obtengo 342."
¿Cuál es la fecha del cumpleaños de Pablo? Dar todas las posibilidades.

PROBLEMA 2
Llamamos $S(n)$ a la suma de las cifras del entero n. Por ejemplo, $S(327) = 3 + 2 + 7 = 12$.
Hallar el valor de $A = S(1) - S(2) + S(3) - S(4) + \ldots + S(2011) - S(2012)$.
(A tiene 2012 términos).

PROBLEMA 3
De un cuadrilátero de papel como el de la figura, hay que recortar un nuevo cuadrilátero cuya área sea igual a la mitad del área del cuadrilátero original. Solo se puede doblar una o más veces y cortar por algunas de las líneas de los dobleces.



Describir los dobleces y los cortes y justificar que el área es la mitad.

PROBLEMA 4
Pedro tiene 111 fichas azules y 88 fichas blancas. Hay una máquina que por cada 14 fichas azules entrega 11 fichas blancas y por cada 7 fichas blancas entrega 13 azules. Decidir si Pedro puede lograr, mediante sucesivas operaciones con la máquina, aumentar en 33 el número total de fichas, de modo que la cantidad de fichas azules sea igual a $\frac{5}{3}$ de la cantidad de fichas blancas.
Si se puede, indicar cómo hacerlo. Si no se puede, indicar porqué.

PROBLEMA 5

En una reunión hay 12 personas. Se sabe que para cada dos personas A y B de la reunión hay (al menos) otra persona C de la reunión que es amiga de A y de B. Determinar el mínimo número de pares de amigos que hay en la reunión.
Cada persona puede integrar varios pares. Si X es amigo de Y entonces Y es amigo de X.

XVIIIª OLIMPIADA de MAYO
Segundo Nivel
Mayo de 2012

Olimpíada de Mayo
Competencia Juvenil Iberoamericana de Matemática

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

PROBLEMA 1

Un número de cuatro cifras es *tartamudo* si tiene las dos primeras cifras iguales entre sí y las dos últimas cifras iguales entre sí, por ejemplo 3311 y 2222 son números tartamudos. Hallar todos los números tartamudos de cuatro cifras que son cuadrados perfectos.

PROBLEMA 2

Se tienen dos octógonos regulares de cartulina. Los vértices de cada octógono se numeran de 1 a 8, en cualquier orden (el orden para un octógono puede ser diferente al del otro). Luego los octógonos se superponen, de modo que cada vértice de uno quede en contacto con un vértice del otro. Los números de los vértices en contacto se multiplican, y los 8 productos obtenidos se suman.
Demostrar que, cualquiera sea el orden en que hayan sido numerados los vértices, siempre es posible superponer los octógonos de manera que esa suma sea mayor o igual que 162.

PROBLEMA 3

En el triángulo *ABC*, se verifica que $\hat{B} = 2\hat{C}$ y $\hat{A} > 90º$. Llamamos *M* al punto medio de *BC*. La perpendicular por *C* al lado *AC* corta a la recta *AB* en el punto *D*. Demostrar que $A\hat{M}B = D\hat{M}C$.

PROBLEMA 4

Se dan seis puntos de manera que no haya tres sobre una misma recta y que las longitudes de los segmentos determinados por estos puntos sean todas distintas. Consideramos todos los triángulos que tienen sus vértices en estos puntos. Demostrar que hay un segmento que es a la vez el lado más corto de uno de esos triángulos y el lado más largo de otro.

PROBLEMA 5

Hay 27 cajas ubicadas en una fila; cada una contiene por lo menos 12 bolitas. La operación permitida es transferir una bolita desde una caja hacia su vecina de la derecha, siempre y cuando dicha vecina contenga más bolitas que la caja desde la que se hará la transferencia. Diremos que una distribución inicial de las bolitas es *feliz* si es posible lograr, mediante una sucesión de operaciones permitidas, que todas las bolitas queden en una misma caja. Determinar cuál es el menor número total de bolitas con el que se puede tener una distribución inicial feliz.

XVIII OLIMPIADA DE MAYO – 2012. RESULTADOS DE ESPAÑA

PRIMER NIVEL

	Apellidos y nombre	Premio
1	Sánchez Ibáñez, Enrique	ORO
2	Cendón Palomo, Pablo	PLATA
3	Gómez Toribio, Pablo	PLATA
4	Mondra Terol, Teresa	BRONCE
5	Andrés Gorrachategui, Víctor	BRONCE
6	Arranz Tors, Diego	BRONCE
7	Sierra Corredera, Diego	BRONCE
8	Rodrigo Albert, Daniel	MENCIÓN
9	Olmo de Casas, Pablo del	MENCIÓN
10	García González, Hugo	MENCIÓN

SEGUNDO NIVEL

1	Carbajo Temprano, Miguel	ORO
2	Navarro Hernández, Adrián	PLATA
3	Olalla Santamaría, Alfonso	PLATA
4	Yu, Ruizhe	BRONCE
5	García González, Berta	BRONCE
6	Robledo Vega, Álvaro	BRONCE
7	Musicó Cortés, Mario	BRONCE
8	Barrero Santamaría, Miguel	MENCIÓN
9	Hevia Rodríguez, David de	MENCIÓN
10	Alonso González, Alberto	MENCIÓN

Dirección General de Mejora de la Calidad de la Enseñanza
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN
Comunidad de Madrid

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Consejo Social de la UCM

sm

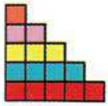
ANAYA

El Corte Inglés

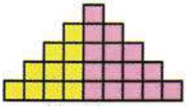
XVIII concurso de primavera

$1+1+1+\ldots+1=n=\binom{n}{1}$

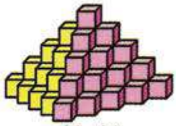
$1+(1+1)+(1+1+1)+\ldots+(1+1+\ldots+1)=\binom{n}{2}$



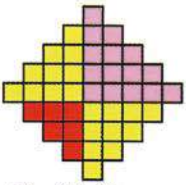
$1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots+(1+2+\ldots+n)=\binom{n}{3}$



$\binom{6}{2}+\binom{5}{2}=5^2$

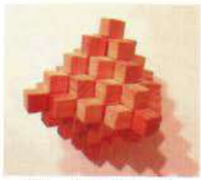


$\binom{7}{3}+\binom{6}{3}$



$\binom{6}{2}+2\binom{5}{2}+\binom{4}{2}=5^2+4^2$

$\binom{7}{3}+2\binom{6}{3}+\binom{5}{3}$



$\binom{7}{3}+3\binom{6}{3}+3\binom{5}{3}+\binom{4}{3}$

MATEMÁTICAS 2014

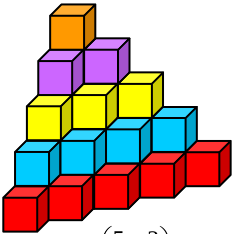
Comunidad de Madrid

Comité organizador del Concurso de Primavera

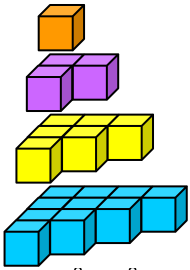
Alfredo Martínez Sanz
Esteban Serrano Marugán
Francisco López Álvarez
Hugo Fernández Hervás
Isabel Benito Miguel
Javier Soler Areta
Jesús García Gual
Joaquín Hernández Gómez
José María Sordo Juanena
Juan Jesús Donaire Moreno
Luis Ferrero de Pablo
María Gaspar Alonso-Vega,
María Moreno Warleta
María Olbés Fernández
Merche Sánchez Benito
Miguel Ángel Baeza Alba
Pilar Ruiz Cervigón
Víctor Manuel Sánchez González

(Viene de la portada)

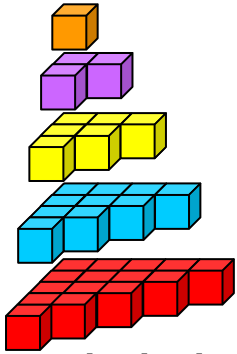
(Una observación de nuestra compañera Inmaculada Muñoz de Pablo)



$\binom{5+2}{3}$



$2^2 + 4^2$



$1^2 + 3^2 + 5^2$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \binom{2n+1}{3}$$

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2 = \binom{2n+2}{3}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{4}\binom{2n+2}{3}$$

Presentación

La tortuga perdió la apuesta con Aquiles. Zenón insistía en que hiciera una nueva. Ahora Aquiles iría un kilómetro por delante, y ella tendría que darle alcance. “Pero si él es más rápido. Nunca le cogeré” “ No seas tonta, el mundo es redondo. Sólo tienes que andar en dirección contraria”.

Hoy a la tortuga todos la llaman “Deuda”.

El Comité Organizador

AGRADECIMIENTOS

A los participantes y colaboradores del Concurso.

A la Facultad de Matemáticas.

Al Consejo Social y al Vicerrectorado de alumnos de la UCM.

Al Área de Formación del Profesorado dentro de la Dirección General de la Mejora de la Calidad de la Enseñanza de la Consejería de Educación.

A Educamadrid.

A las editoriales Grupo **ANAYA** y Ediciones **S.M.**

Al grupo empresarial El Corte Inglés.

A la librería Aviraneta.

XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 27 de febrero de 2013

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{\text{X}}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Aviraneta
Libros Guijarro

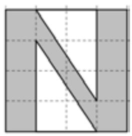
1 La abuela Rosario nació en el año 1939, ¿cuántos años cumplirá en 2013?

A) 52 B) 64 C) 74 D) 75 E) 84

2 La guía telefónica de Madrid capital cuenta con 1207 páginas. En cada página hay cinco columnas y en cada columna caben 160 teléfonos. ¿Qué cifra aproxima mejor la cantidad de números de teléfono que hay en la guía?

A) 99 000 B) 900 000 C) 950 000 D) 990 000 E) 1 000 000

3 Nicolás ha dibujado su inicial en una cuadrícula sobre un cuadrado, como ves en la figura. ¿Qué fracción del cuadrado ocupa la N?

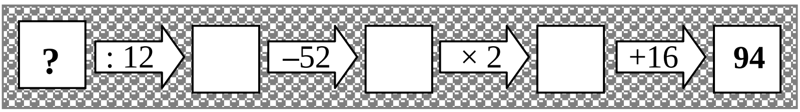


A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{9}{16}$

4 Quince vacas, tres ciempiés, treinta y siete gallinas y once serpientes bailan alegremente celebrando la llegada de la primavera. ¿Cuántas patas y cabezas hay en total en esta curiosa reunión?

A) 434 B) 489 C) 500 D) 537 E) 574

5 Un número ha entrado en la máquina transformanúmeros y ha salido convertido en 94.



¿Cuál es la suma de las cifras del número que entró?

A) 5 B) 7 C) 12 D) 13 E) 21

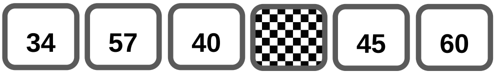
6 Justin Bieber está de gira por Madrid. Ayer firmó la friolera de 11782 autógrafos. Si tarda dos segundos en firmar cada autógrafo, ¿cuánto tiempo invirtió ayer en ello?

A) Menos de cuatro horas B) Entre 4 y 5 horas C) Entre 5 y 6 horas
D) Entre 6 y 7 horas E) Más de siete horas

7 Tres gominolas y dos chupachups cuestan lo mismo que dos chicles y cuatro gominolas. Cuatro chupachups cuestan lo mismo que seis chicles. ¿Cuántos chicles cuestan lo mismo que una gominola?

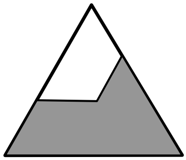
A) Uno B) Dos C) Tres D) Cuatro E) Seis

8 Juanito ha colocado seis tarjetas con números de dos cifras pero una se ha quedado boca abajo. Solo recuerda que el número que había en ella no es ni el mayor ni el menor de los seis; que sus cifras coinciden con las cifras de otro de los números pero en distinto orden y que es múltiplo de 3. ¿Cuál es la suma de las cifras del número de la tarjeta que está boca abajo?



A) 7 B) 12 C) 4 D) 9 E) 6

9 Desde el centro de un triángulo equilátero de 36 cm^2 de área, trazamos paralelas a dos de sus lados y construimos la figura sombreada que llamamos esfinge. ¿Cuál es, en cm^2, el área de la esfinge?



A) 18 B) 20 C) 21 D) 24 E) 27

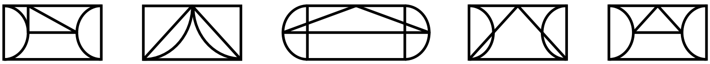
10 Pilar ha hecho una multiplicación gigante: 78453400555343 × 34502313458.

¿Qué cifra ha obtenido en la posición de las decenas?

A) 0 B) 4 C) 6 D) 8 E) 9

11 ¡A dibujar se ha dicho!, anunció Don Retorcido a sus alumnos. ¡Concentraos y mirad el papel! Dibujad un rectángulo cuya base sea doble que su altura; los dos lados menores son los diámetros de dos circunferencias; borrad las partes de las circunferencias que queden fuera del rectángulo; dibujad ahora el segmento más corto que une esos dos arcos; ese segmento es la base de un triángulo isósceles cuya altura es la mitad de la altura del rectángulo ¡Y no repito! ¿Quién de estos cinco alumnos dibujó correctamente lo que pidió Don Retorcido?

A) B) C) D) E)



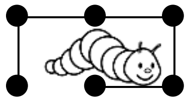
12 Jesús y Silvia son pareja de baile desde hace muchos años y tienen ciertas manías: si un día bailan Chotis no bailan Pasodoble; si bailan Rock & Roll no bailan Fox-Trot y si no bailan Pasadoble bailan Fox-Trot. Siempre que bailan Merengue bailan Chotis y cuando bailan Tango, también bailan Rock & Roll. Hoy han comenzado la velada bailando un alegre Merengue. Si a lo largo de la noche bailaron solamente dos bailes más, ¿cuáles fueron?

A) Chotis y Rock & Roll B) Fox-Trot y Chotis C) Tango y Rock & Roll
D) Pasodoble y Tango E) Chotis y Tango

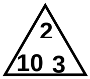
13 Esteban y Joaquín están lesionados y no pueden ir al monte, así que han decidido hacer un puzle de 1500 piezas mientras se recuperan. Hoy han celebrado que solo les queda por poner dos tercios de las piezas que ya llevan puestas. ¿Cuántas piezas les quedan aún sin colocar?

A) 300 B) 500 C) 600 D) 900 E) 1000

14 La oruga Tepica vive en Seis Puntos y se entretiene en recorrer los seis puntitos, sin pasar dos veces por el mismo, mediante tramos horizontales o verticales. Luego dibuja el trazado dejado por su rastro. Aquí puedes ver uno de los dibujos que ha formado su rastro. ¿Cuántos dibujos diferentes puede conseguir Tepica?

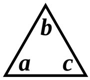


A) 16 B) 10 C) 6 D) 15 E) 8

15 ¿Qué resultado obtuvo Triangupín cuando realizó 

?

¡Ah!, se nos olvidaba deciros que los habitantes de Triangupón operan los números de tres en tres del siguiente modo:



$= (a + b \times c) : (a - b \times c)$

A) 1,5 B) 4 C) 5 D) 9 E) 36

16 ¿Cuántos números de dos cifras tienen una cifra par y la otra impar? (Recuerda que 0 es par)

A) 20 B) 25 C) 40 D) 45 E) 50

17 Martita dice: “Tengo en mi bolsillo una moneda de un euro, tres monedas de 50 céntimos, seis monedas de 20 céntimos y tres monedas de 5 céntimos. Su hermana Mariquilla dice: “Pues yo tengo exactamente la misma cantidad de dinero que tú pero muchas menos monedas.” ¿Cuántas monedas debe tener, como mínimo Mariquilla?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

18 Los puntos *A*, *B*, *C*, *D* y *E*, están colocados en ese orden a lo largo de un segmento. El segmento *AE* mide 20 cm. Si *B* es el punto medio de *AC*, *C* es el punto medio de *BD* y *D* es el punto medio de *BE*, ¿cuántos centímetros mide el segmento *DE*?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) Faltan datos

19 Jaime es un genio haciendo operaciones combinadas. En su cuaderno ha escrito esta operación pero el Comenúmeros se ha zampado uno de los números. Si Jaime tenía bien la operación, ¿qué número se ha comido esta vez el Comenúmeros?

$48 - (6 + 2 \times$  $) = 16$

A) 4 B) 8 C) 13 D) 16 E) 61

20 Juanje sumó tres lados de un rectángulo y obtuvo como resultado 44 cm. Francisco sumó tres lados del mismo rectángulo y obtuvo como resultado 40 cm. Si ambos sumaron bien, ¿cuántos centímetros mide el perímetro de ese rectángulo?

A) 42 B) 56 C) 64 D) 84 E) 112

21 El pobre Richi tiene insomnio y su prima Ana le ha sugerido que cuente corderitos. El método funciona y cada día Richi necesita contar cinco corderitos menos que el día anterior para quedarse dormido. El día treinta de tratamiento Richi no ha necesitado contar ningún corderito para dormirse. ¿Cuántos corderitos contó el primer día?

A) 140 B) 145 C) 150 D) 155 E) Más de 1000

22 Rafa sale a correr todas las mañanas, de tal manera que cada día par corre tres kilómetros más que cada día impar. Si en los 28 primeros días del año recorrió en total 210 km, ¿cuántos kilómetros completará del 21 al 27 de abril?

A) 31,5 B) 48 C) 49,5 D) 51 E) 52,5

23 Luis tiene cuatro pares distintos de zapatos y metió los del pie derecho en una caja y los del izquierdo en otra. Sin mirar, coge con la mano derecha uno del pie derecho y con la izquierda, uno del pie izquierdo. ¿Qué probabilidad tiene de obtener dos zapatos del mismo par?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{1}{16}$

24 Olivia sale de viaje. Durante la primera media hora va a 50 km/h. Después sale a la autopista y conduce durante cuatro horas y media a 120 km/h. Finalmente, en el último tramo va a 60 km/h durante un cuarto de hora. ¿Cuántos kilómetros ha recorrido en total?

A) 160 B) 230 C) 520 D) 565 E) 580

25 Don Retorcido hizo grupos de cuatro con los estudiantes de una clase y le sobraron dos. Después hizo grupos de cinco y le sobró uno. Si en la clase hay quince chicas y hay más chicas que chicos, ¿cuántos chicos hay?

A) 6 B) 7 C) 9 D) 10 E) 11

XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 27 de febrero de 2013

NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática

Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Aviraneta
Libros Guijarro

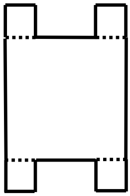
1 Cuatro animales amigos corren por un camino recto. Anfibio va primero y le siguen en este orden, Batracio, Croador y Delfín. Al cabo de un rato, Delfín grita ¡STOP!, todos se detienen y miden algunas distancias entre ellos: dist (Anf, Del) = 306 m, dist (Anf, Cro) = 180 m y dist (Bat, Del) = 174 m. ¿Cuántos metros separan a Batracio de Croador?

A) 14 **B)** 48 **C)** 72 **D)** 90 **E)** 96

2 ¿Cuál es el menor número natural que multiplicado por 35613,475 da como resultado un entero?

A) 1000 **B)** 500 **C)** 200 **D)** 40 **E)** 20

3 Adrián ha recortado un gran cuadrado de perímetro 80 cm y ha diseñado una H añadiéndole cuatro cuadraditos iguales. Si el perímetro de su H son 136 cm, ¿cuántos centímetros mide el perímetro de cada uno de los cuadraditos?



A) 28 **B)** 30 **C)** 32 **D)** 40

E) 56

4 Está comprobado que con 750 m de hilo de oro pueden vestirse 90 hadas o 150 ninfas. Si en el almacén del reino cuentan con 2250 m de hilo de oro y se presentan 225 hadas pidiendo hilo para sus vestidos mágicos, ¿cuántas ninfas podrán vestirse con el hilo sobrante?

A) 45 **B)** 60 **C)** 75 **D)** 95 **E)** 135

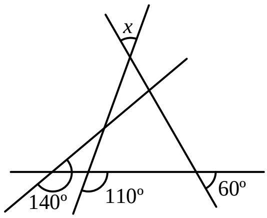
5 Pilar ha hecho una multiplicación gigante: 78453400555343 × 34502313458.

¿Cuántas cifras tiene el número que ha obtenido?

A) 13 **B)** 14 **C)** 24

D) 25 **E)** 143

6 ¿Cuánto mide el ángulo x?



A) 60º **B)** 50º **C)** 45º

D) 40º **E)** 30º

7 Don Retorcido te pone a prueba con sus frases-trampa.

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I. Si dos fracciones “hermanas” de números positivos tienen el mismo numerador, yo te aseguro que la mayor es la del menor denominador.

II. La mitad del doble de la mitad es la mitad.

III. Si en una división entera al dividendo le restas el resto y divides esta resta entre el divisor, ¡tachán!, obtendrás el mismo cociente.

A) Solo la I **B)** Solo la II **C)** Solo la I y II **D)** Solo la I y III **E)** I, II y III

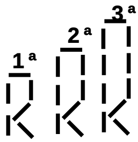
8 ¿Cuál es el mayor de los siguientes números?

A) $2^5 \cdot 3^5 \cdot 5^5$ **B)** $3^5 \cdot 5^6 \cdot 7$ **C)** $2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^5$ **D)** $2 \cdot 3^6 \cdot 5^6$ **E)** $3^8 \cdot 5^5$

9 Este año, 2013, es múltiplo de 11 y acaba en 13. ¿Cuántos números de cuatro cifras son múltiplos de 11 y terminan en 13?

A) 9 **B)** 8 **C)** 7 **D)** 6 **E)** 5

10 Don Retorcido diseña con palitos la inicial de su nombre sin parar. ¿Cuántos palitos necesitará para diseñar la R número 2013?



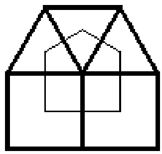
A) 2013 **B)** 3580 **C)** 4028

D) 4030 **E)** 12078

11 Índice se comió la mitad de pasteles que Corazón, Anular se comió tres pasteles más que Índice, Meñique sólo quiso un pastelito y el goloso de Pulgar se zampó tantos pasteles como sus cuatro hermanos juntos. Si en total se comieron 80 pasteles, ¿cuántos se comió Anular?

A) 12 **B)** 14 **C)** 16 **D)** 18 **E)** 20

12 A dos cuadrados unidos por un lado les hemos añadido “de tejado” tres triángulos equiláteros. Después, uniendo los centros de los cinco polígonos, hemos creado el pentágono que ves en la figura. Si el área de cada cuadrado es a y la de cada triángulo es b, el área del pentágono es:



A) $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$ **B)** $\frac{3a}{5}+\frac{2b}{5}$ **C)** $\frac{a}{2}+b$ **D)** $\frac{a}{2}+\frac{3b}{4}$ **E)** $\frac{2a}{3}+b$

13 La mula y el buey se han mudado a un establo no muy lejos del portal. La mula va al trotecito y recorre 10 km en una hora pero como es muy saltarina se cansa mucho y cada dos horas debe descansar una. El buey va con paso firme recorriendo 8 km en una hora y no necesita descansar. Si salen a la vez del portal y llegan a la vez al establo, ¿a cuántos kilómetros se encuentra su nuevo hogar?

A) 16 **B)** 24 **C)** 35 **D)** 40 **E)** 52

14 Los números enteros positivos A, B y C son diferentes y puedes elegirlos desde el 1 hasta el 100, ambos inclusive. ¿Cuál es el mayor valor posible de $\frac{A+B+C}{A-B-C}$?

A) 100 **B)** 150 **C)** 189 **D)** 199 **E)** 297

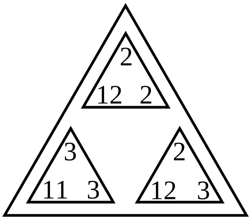
15 Una amiga le dice a otra: "la mitad del triple de mi edad es justamente el doble de la tercera parte de tu edad". Si dividimos la edad de la mayor entre la de la menor, obtenemos...

A) 1,20 **B)** 1,35 **C)** 1,50 **D)** 1,66 **E)** 2,25

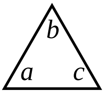
16 Al dividir un número entre 60 obtenemos 42 de resto. Si dividimos el mismo número entre 20, el resto será:

A) 12 **B)** 14 **C)** 18 **D)** 6 **E)** 2

17 ¿Qué resultado obtuvo Triangupín cuando realizó la operación de la derecha?



¡Ah!, se nos olvidaba decir que los habitantes de Triangupón operan los números de tres en tres del siguiente modo:



$$= \frac{a+b\cdot c}{a-b\cdot c}$$

A) 1,5 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 9 **E)** 36

18 El 14 se puede escribir como suma de dos números primos de dos formas distintas:

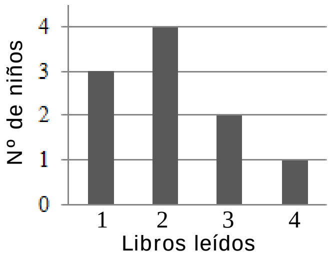
14 = 3 + 11 y 14 = 7 + 7. ¿De cuántas formas distintas puede escribirse 40 como suma de dos números primos?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

19 Santiago ha dibujado dos triángulos acutángulos y ha medido cuatro de sus ángulos: 28º, 47º, 51º y 73º. ¿Cuál es la diferencia entre los dos ángulos que no ha medido?

A) 3º **B)** 5º **C)** 9º **D)** 12º **E)** 15º

20 José María ha preguntado a algunos de sus amigos cuántos libros han leído en el último mes y ha representado los datos en este diagrama de barras. ¿Cuál es la media del número de libros leídos en dicho mes por este grupo de amigos?

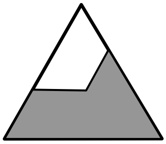


A) 2 **B)** 2,1 **C)** 2,2
D) 2,5 **E)** 2,7

21 En mi instituto se han vendido quinientas papeletas para sortear un viaje para dos personas. Doraemon ha comprado siete papeletas y su amigo Nobita trece, y acuerdan entre ellos que si a alguno le toca llevará al otro al viaje. Dora ha comprado dieciséis papeletas y su amigo Botas catorce y acuerdan lo mismo. ¿Qué probabilidad hay de que alguna de esas dos parejas vaya al viaje?

A) $\frac{1}{25}$ **B)** $\frac{3}{50}$ **C)** $\frac{2}{25}$ **D)** $\frac{1}{5}$ **E)** $\frac{1}{10}$

22 Desde el centro de un triángulo equilátero de 360 mm de perímetro, trazamos paralelas a dos de sus lados y construimos la figura sombreada que llamamos esfinge. ¿Cuál es, en mm, el perímetro de la esfinge?



A) 330 **B)** 320 **C)** 300 **D)** 270

E) 240

23 Jaime es un genio haciendo operaciones combinadas. En su cuaderno ha escrito esta operación pero el Comenúmeros se ha zampado uno de los números. Si Jaime tenía bien la operación, ¿qué número se ha comido esta vez el Comenúmeros?

$(6+2\cdot$  $):4\cdot 2=16$

A) 4 **B)** 8 **C)** 13 **D)** 16 **E)** 61

24 En el comité organizador del XVII Concurso de Primavera hay el doble de hombres que de mujeres. La mitad de las mujeres se llaman María; ninguna mujer está jubilada; hay el doble de hombres jubilados que de “Marías”. ¿Cuál es la proporción de jubilados en el comité?

A) $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{2}{5}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{3}{5}$

25 Zipi y Zape siempre la están montando. Ahora uno va a decir siempre la verdad y el otro va a mentir siempre pero no sabemos cuál de los dos es el mentiroso. Un día ven en la nevera cinco pasteles y deciden comérselos a escondidas. Don Pantuflo los pilla en plena faena y pregunta "¿Cuántos pasteles os habéis comido?" Zipi contesta: “Hemos comido 4 pasteles". Zape dice: "Hemos comido un número par de pasteles". Don Pantuflo los mandó al cuarto de los ratones. ¿Cuántos pasteles se comieron?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

concurso de primavera MATEMÁTICAS

XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 27 de febrero de 2013

NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

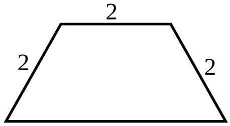
COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Aviraneta
Libros Guijarro

1 Si $2^4 \cdot 3^8 = n \cdot 6^4$, el valor de n es:

A) 12 **B)** 24 **C)** 27 **D)** 54 **E)** 81

2 El área de este trapecio es:



A) 6 **B)** $3\sqrt{3}$ **C)** $4\sqrt{2}$

D) $4\sqrt{3}$ **E)** $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$

3 Si n es un número natural, ¿qué número natural está más cerca del cuadrado de $n+\dfrac{1}{2}$?

A) n^2 **B)** $n^2 + 1$ **C)** $n^2 + n$ **D)** $(n + 1)^2$ **E)** $n^2 + n + 1$

4 El valor del producto $\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{2013^2}\right)$ es:

A) $\dfrac{2015}{4016}$ **B)** $\dfrac{1006}{2013}$ **C)** $\dfrac{1}{2}$ **D)** $\dfrac{1007}{2013}$ **E)** $\dfrac{2013}{4014}$

5 Alicia tarda 30 segundos en hacer un bizcocho e Isabel tarda 20 segundos en hacer otro igual. Si trabajan las dos juntas, ¿cuántos bizcochos harán en 5 minutos?

A) 10 **B)** 15 **C)** 20 **D)** 25 **E)** 30

6 Don Retorcido no deja nada al azar y rellena cada uno de los cuadraditos de la figura colocando una cifra de forma que en cada fila y en cada columna aparecen el 1, 2, 3, 4 y 5. ¿Qué cifra ocupará el lugar marcado con x?

	5	4		
1	3			
		5	3	
2		3	1	
				x

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

7 En una bolsa con canicas, los tres quintos del total son canicas azules y el resto rojas. Si duplicamos el número de canicas rojas y mantenemos el número de canicas azules, ¿qué fracción de las canicas serán ahora rojas?

A) $\dfrac{5}{2}$ **B)** $\dfrac{3}{7}$ **C)** $\dfrac{4}{7}$ **D)** $\dfrac{3}{5}$ **E)** $\dfrac{4}{5}$

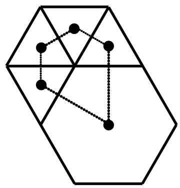
8 ¿Cuál es el número natural menor que multiplicado por $9{,}34\overset{\frown}{6}$ da como resultado un entero?

A) 900 **B)** 300 **C)** 225 **D)** 75 **E)** 15

9 Entre los diez empleados de Mercafour se va a hacer un sorteo para elegir a los cuatro que trabajan este domingo. A Puri le viene fatal y Rubén le ha dicho que no se preocupe, que si le toca a ella, él irá en su lugar salvo, claro está, si los dos salen elegidos en cuyo caso Puri se tendrá que aguantar. ¿Qué probabilidad tiene Rubén de trabajar el domingo?

A) $\frac{2}{3}$ **B)** $\frac{1}{5}$ **C)** $\frac{3}{10}$ **D)** $\frac{8}{15}$ **E)** $\frac{13}{90}$

10 A un hexágono regular le hemos adosado cuatro triángulos equiláteros alrededor de un vértice. Usando los centros de esas cinco figuras hemos construido un pentágono. Si el área del hexágono es de 72 cm^2, el área del pentágono, en cm^2, es:



A) 24 **B)** 27 **C)** 28

D) 32 **E)** 36

11 Los radios de dos circunferencias tangentes exteriores, de centros A y B son 5 y 3 respectivamente. Una recta tangente exterior a ambas corta a la recta AB en el punto C. ¿Cuánto mide el segmento BC?

A) 4,8 **B)** 9 **C)** 10,2 **D)** 12 **E)** 14,4

12 En el triángulo ABC, de lados BC = 13, CA = 14 y AB = 15, ¿cuánto mide la altura que parte de B?

A) 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** 13

13 Nueve monos pesan lo mismo que cuatro osos. Ocho osos pesan lo mismo que quince pumas y diez pumas pesan lo mismo que veintisiete ciervos. ¿Cuántos ciervos pesan como cuatro monos?

A) 6 **B)** 3 **C)** 8 **D)** 4 **E)** 9

14 ¿Para cuántos valores del número real x, la media y la mediana del conjunto de cinco números x, 6, 4, 1, 9 es la misma?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 5

15 En una circunferencia de centro O, AB es un diámetro y BC una cuerda. Si $O\hat{B}C = 58º$, ¿cuánto mide el ángulo $O\hat{C}A$?

A) 58º **B)** 61º **C)** 64º **D)** 32º **E)** 30º

16 En un examen de Matemáticas de 3º ESO aprobaron la misma cantidad de chicos que de chicas, pero de chicos solo aprobaron los $\frac{2}{3}$ de los chicos que había, mientras que de chicas aprobaron el 75% de las que había. ¿Qué fracción del total de los estudiantes aprobaron el examen?

A) $\frac{11}{16}$ **B)** $\frac{12}{17}$ **C)** $\frac{13}{18}$ **D)** $\frac{14}{19}$ **E)** $\frac{17}{23}$

17 Si el producto de dos números positivos es 9 y el inverso de uno es el cuádruple del inverso del otro, ¿cuál es la suma de los dos números?

A) $\frac{10}{3}$ **B)** $\frac{20}{3}$ **C)** 7 **D)** $\frac{15}{2}$ **E)** 8

18 Si el número de 9 cifras 197 000 19*d* es primo, ¿qué cifra es la representada por *d*?

A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

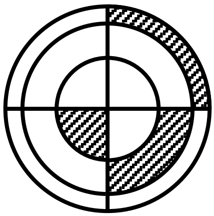
19 En el triángulo equilátero *ABC* de lado 4, *D* es un punto del lado *BC*. Si S_1 es el área del triángulo *ABD* y S_2 el área del triángulo *ADC*, ¿cuál es el mayor valor posible para el producto $S_1 \cdot S_2$?

A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 16

20 Dibuja un triángulo equilátero; dibuja la circunferencia que pasa por sus tres vértices; traza las tangentes a la circunferencia que pasan por cada uno de los tres vértices; prolonga las tres tangentes hasta que se corten formando un triángulo final. Si el área del triángulo con el que empezaste es *A*, ¿qué área tiene el triángulo final?

A) $\frac{A}{2}$ **B)** A **C)** $2A$ **D)** $3A$ **E)** $4A$

21 En la figura se observan tres círculos concéntricos y dos diámetros perpendiculares. Si las tres figuras sombreadas tienen igual área y el radio del círculo pequeño es 1, ¿cuál es el producto de los tres radios?



A) $\sqrt{6}$ **B)** 2,5 **C)** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ **D)** $2\sqrt{2}$

E) π

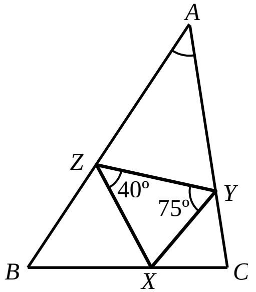
22 ¿Cuál es el mayor resto posible cuando divides un número de dos cifras entre la suma de éstas?

A) 9 **B)** 13 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 17

23

En el triángulo *ABC*, $AY = AZ$, $BX = BZ$, $CX = CY$.

Si $X\hat{Z}Y = 40º$ y $X\hat{Y}Z = 75º$, ¿cuánto mide el ángulo $\hat{A}$ del triángulo?



A) 50º **B)** 60º **C)** 55º **D)** 52,5º **E)** 57,5º

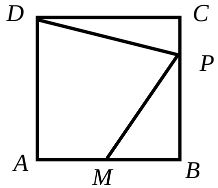
24

En el año 2010, el número de estudiantes de mi centro fue un cuadrado perfecto. Al año siguiente, hubo 100 estudiantes más y el nuevo número resultó ser un cuadrado perfecto más uno y al siguiente año, con otros 100 estudiantes más, volvió a ser un cuadrado perfecto. El número de estudiantes de mi centro en ese año 2010 era múltiplo de:

A) 3 **B)** 7 **C)** 9 **D)** 11 **E)** 17

25

En un cuadrado *ABCD* de 2 cm de lado, *M* es el punto medio del lado *AB* y *P* es un punto variable del lado *BC*. ¿Cuál es el mínimo valor de $DP + PM$?



A) $\sqrt{13}$ **B)** $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ **C)** $2\sqrt{3}$

D) $1+2\sqrt{2}$ **E)** $\sqrt{15}$

XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 27 de febrero de 2013

NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{\text{X}}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática

Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid

El Corte Inglés

Grupo ANAYA

Grupo SM

Librería Aviraneta

Libros Guijarro

1 Si a, b, c y d son números reales con $a-1=b+2=c-3=d+4$, el mayor de los cuatro es:

A) a **B)** b **C)** c **D)** d **E)** No se puede determinar

2 Si m y n son enteros con $2m - n = 3$, $m - 2n$ debe ser:

A) Igual a –3 **B)** Igual a 0 **C)** Múltiplo de 3 **D)** Un entero impar

E) Un entero par

3 De un triángulo obtusángulo sabemos que un lado a mide 7 metros, su ángulo opuesto $\hat{A}$ mide 60º, y otro lado b mide 8 metros. ¿Cuántos metros mide el tercer lado?

A) 2 **B) 3** **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

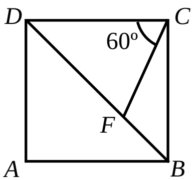
4 Calcula el valor de la suma $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + 19^3$ ayudándote de la fórmula de la suma los primeros cubos: $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\dfrac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$

A) 19 900 **B)** 19 850 **C)** 19 500 **D)** 19 750 **E)** 19 250

5 ¿Cuántos enteros mayores que 5000 pueden formarse con las cifras 3, 4, 5, 6 y 7 de manera que en cada número no aparezcan cifras repetidas?

A) 174 **B)** 144 **C)** 84 **D)** 192 **E)** 202

6 Si el lado del cuadrado $ABCD$ mide 2 cm, el área, en cm^2, del triángulo FBC es:



A) $2\sqrt{3}-3$ **B)** $\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$ **C)** $\sqrt{3}-1$

D) $2\sqrt{2}-2$ **E)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

7 Esteban preguntó a cinco de sus estudiantes cuántos de ellos habían trabajado las Matemáticas en casa la tarde anterior.

Emilio dijo: Ninguno, profe. Eligio dijo que solo uno de los cinco, Elisa respondió que dos de los cinco, Eugenio que tres de los cinco y Elia contestó que cuatro de los cinco habían trabajado.

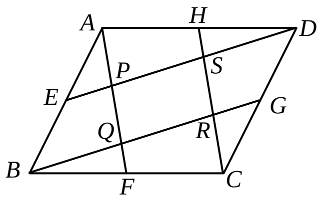
Esteban sabía que quienes no habían trabajado mentían, mientras que los que sí habían trabajado decían la verdad. ¿Cuántos estudiantes de estos cinco habían hecho los deberes?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

8 Si *ABCD* es un paralelogramo y *E, F, G* y *H* son los puntos medios de los lados, el cociente entre el área de *ABCD* y el área de *PQRS* es:

A) 3 **B)** 3,5 **C)** 4

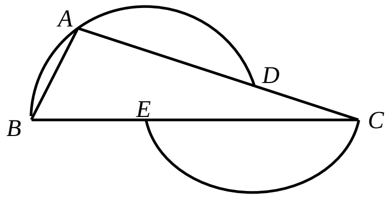
D) 4,5 **E)** 5



9 Para numerar las páginas de un cuadernillo de 12 páginas hacen falta 15 dígitos, a saber: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 0, 1, 1, 1, 2. ¿Cuál de los siguientes números **no** puede ser la cantidad de dígitos necesarios para numerar todas las páginas de un libro?

A) 31 **B)** 543 **C)** 2012 **D)** 2013 **E)** 2016

10 En la figura adjunta se observa un triángulo *ABC* y dos arcos de circunferencia: uno de centro *E* y que pasa por *A, B* y *D* y otro de centro *D* y que pasa por *E* y *C*. Si el ángulo $\hat{B}$ del triángulo es de 63º, ¿cuál es el valor del ángulo $\hat{C}$?



A) 17º **B)** 18º **C)** 19º **D)** 20º **E)** 21º

11 Cinco amigos se aburrían y deciden ponerse a contar. Se colocan en fila y empiezan así: Maite (¡uno!), Virginia (¡dos!), Christian (¡tres!), Iván (¡cuatro!) y Jose (¡cinco!) y cambian el sentido y siguen contando: Iván (¡seis!), Christian (¡siete!), Virginia (¡ocho!) y Maite (¡nueve!) y de nuevo cambian de sentido y siguen divertidos: Virginia (¡diez!), Christian (¡once!), Iván (¡doce!). ¿Qué amigo gritará ¡dos mil trece!?

A) Maite **B)** Virginia **C)** Christian **D)** Iván **E)** José

12 Un granjero tiene ovejas y gallinas. Si la media del número de patas por animal es *l*, el cociente entre el número de ovejas y el número de gallinas es:

A) $\dfrac{l}{3(4-l)}$ **B)** $\dfrac{l-2}{4-l}$ **C)** $\dfrac{3(l-2)}{l}$ **D)** $\dfrac{(l-2)^2}{16-l^2}$ **E)** $\dfrac{7\left(l^2-4\right)}{5\left(16-l^2\right)}$

13 En un triángulo rectángulo, la mediana sobre la hipotenusa vale 2. ¿Cuál es el valor de la suma de los cuadrados de las otras dos medianas?

A) 5 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 20 **E)** 25

14 Sea *N* el menor entero positivo que al dividirlo entre 5 da resto 2, al dividirlo entre 7 da resto 3 y al dividirlo entre 9 da resto 4. ¿Cuál es la suma de los dígitos de *N*?

A) 4 **B)** 8 **C)** 13 **D)** 22 **E)** 40

15 Sea n un número mayor que 2013. Si $n^2 + 4$ y $n + 3$ **no** son primos entre sí, ¿cuál es su máximo común divisor?

A) 11 **B)** 13 **C)** 14 **D)** 17 **E)** 23

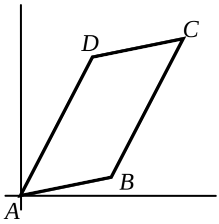
16 La función $f(x)=\begin{cases} 2x+5 & si \quad x \le 3 \\ 4x-1 & si \quad x>3 \end{cases}$ puede ser definida mediante una sola fórmula como $f(x)=a|x+b|+cx+d$. El valor de *d* es:

A) –5 **B)** –4 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 1

17 ¿Cuántos puntos reticulares (es decir, puntos con coordenadas enteras) hay en el interior del paralelogramo limitado por las rectas $x = 100$, $x = 300$, $y=\frac{1}{3}x+0{,}1$; $y=\frac{1}{3}x+0{,}6$?

A) 73 **B)** 71 **C)** 69 **D)** 67 **E)** 65

18 En la figura de la derecha se observa un paralelogramo *ABCD* en el que *A*(0, 0), *B*(20, 10) y *D*(10, *y*). Si el área de dicho paralelogramo es 600, ¿cuál es el valor de *y*?



A) 32 **B)** 33 **C)** 34 **D)** 35 **E)** 36

19 Si $\log_x y + \log_y x = 7$, $(\log_x y)^2 + (\log_y x)^2$ es igual a:

A) 40 **B)** 43 **C)** 45 **D)** 47 **E)** 49

20 Las gráficas de $y = x - 2$ e $y = mx + 3$ se cortan en un punto de coordenadas positivas si y solo si:

A) $m = 1$ **B)** $m < 1$ **C)** $m > -\frac{3}{2}$ **D)** $-\frac{3}{2} < m < 0$ **E)** $-\frac{3}{2} < m < 1$

21 Uno de los siguientes enteros **no** divide a $2^{1650} - 1$. ¿Cuál?

A) 3 **B)** 7 **C)** 31 **D)** 127 **E)** 2047

22 Si sen15º y cos15º son las raíces de la ecuación $x^2 + ax + b = 0$, ¿cuál es el valor de $a^4 - b^4$?

A) –1 **B)** 1 **C)** $\frac{35}{16}$ **D)** $1+\sqrt{2}$ **E)** $3\sqrt{2}-1$

23 Se han borrado dos dígitos *a* y *b* en esta multiplicación:
29*a* 031 × 342 = 100 900 *b*02. ¿Cuál es el valor de la suma *a* + *b*?

A) 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

24 ¿Cuál es la longitud del camino más corto que partiendo del punto *A*(2, 5) pasa por el eje de abscisas y acaba en algún punto de la circunferencia de ecuación: $(x + 6)^2 + (y - 10)^2 = 16$?

A) 12 **B)** 13 **C)** $4\sqrt{10}$ **D)** $6\sqrt{5}$ **E)** $4+\sqrt{89}$

25 ¿Cuál es el valor de $sen\frac{\pi}{32}\cdot\cos\frac{\pi}{32}\cdot\cos\frac{\pi}{16}\cdot\cos\frac{\pi}{4}$?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{1}{8}$ **D)** $\frac{1}{16}$ **E)** $\frac{1}{32}$

concurso de primavera MATEMÁTICAS

XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 20 de abril de 2013

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática

Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick
Libros Guijarro

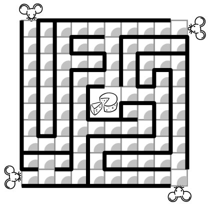
1

Daniel tiene cincuenta y seis libros de cuentos y Alberto tiene ventiocho. ¿Cuántos libros tendría que regalarle Daniel a Alberto para que ambos tuvieran la misma cantidad de libros?

A) 6 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 14

2

Cuatro ratones bien entrenados están en las cuatro puertas de un laberinto y en el centro les espera un delicioso queso. Todos van a la misma velocidad y llegan al centro por el camino más corto posible. Si el que llega primero tarda quince segundos en recorrerlo, ¿cuántos segundos tardará el último?



A) 35 **B)** 40 **C)** 45 **D)** 50 **E)** 55

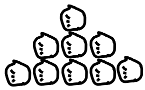
3

Ana tiene dos cajitas forradas de terciopelo, una blanca y la otra negra, y tres perlas de colores: una roja, otra azul y la tercera verde. ¿De cuántas formas diferentes puede guardar sus tres perlas en las dos cajitas?

A) 10 **B)** 9 **C)** 8 **D)** 7 **E)** 6

4

Treinta amigos juegan a construir triángulos con garbanzos de esta manera: Ana coloca un garbanzo, Braulio coloca debajo tres garbanzos, Clara aumenta la base poniendo cinco garbanzos, Daniel añade una fila de siete,... ¿Cuántos garbanzos tendrá que colocar el último?



A) 61 **B)** 60 **C)** 57 **D)** 58 **E)** 59

5

En esta multiplicación letras distintas representan cifras distintas y letras iguales, cifras iguales. ¿Cuánto vale **T**?

$$\begin{array}{cccc} & & A & L \\ \times & & A & L \\ \hline & C & A & L \\ & L & E & \\ \hline & T & A & L \end{array}$$

A) 6 **B)** 3 **C)** 8 **D)** 4 **E)** 9

6

-¡Julián, te he dicho mil veces que hagas tu cama! le dice su madre muy enfadada.
-¡Pero si solo llevo levantado ocho minutos! No te ha dado tiempo a decirlo tantas veces.
-¡Anda que no! Y voy a seguir a este ritmo hasta que la hagas.
Si Julián tardó una hora y media en ponerse a hacer la cama, ¿cuántas veces repitió su madre que la hiciera?

A) 250 **B)** 5600 **C)** 10500 **D)** 11250 **E)** 90000

7

¿Cuál es la diferencia entre la suma de los diez primeros números pares positivos y la suma de los diez primeros números impares?

A) 12 **B)** 10 **C)** 8 **D)** 7 **E)** 6

8 Sofía de mayor quiere ser como Baumgartner y saltar desde la estratosfera. Ha hecho planes y entrenará del siguiente modo: el primer día saltará desde diez metros de altura, el segundo desde veinte metros, el tercero desde cuarenta metros, el cuarto desde ochenta metros y así, cada día saltará desde el doble que el día anterior. Según sus alocados planes, ¿cuántos días tendrá que entrenar para superar por primera vez los 39 kilómetros conseguidos por Baumgartner?

A) 13 **B)** 30 **C)** 130 **D)** 3000 **E)** 13000

9 ¿Cuántos números capicúas de cuatro cifras hay, de forma que la suma de las dos cifras centrales sea el doble que la suma de las cifras de los extremos?

A) 4 **B)** 14 **C)** 6 **D)** 20 **E)** 18

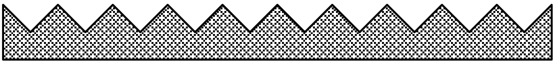
10 ¿Qué número sigue en esta serie: 3600, 1800, 600, 150,…?

A) 15 **B)** 75 **C)** 60 **D)** 30 **E)** 18

11 Hemos colocado nueve letras en una cuadrícula y nos ha salido el nombre del gran PITÁGORAS. Luego las hemos removido y ha resultado que: en la fila superior están las letras de TOP; en la columna de la derecha sólo hay vocales; debajo de una A hay una S; en las esquinas están las letras de PISO; sólo quedan dos letras que no se han movido. ¿Qué letra aparecerá en la casilla central?

A) P **B)** T **C)** G **D)** R **E)** A

12 Con un rectángulo de cartulina, Orlandito se ha hecho la corona del "*Rey de la casa"* recortando triángulos isósceles iguales hasta la mitad de la altura de la cartulina, como ves en la figura.



¿Qué fracción del rectángulo inicial ocupa la corona?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{2}{3}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{3}{4}$

13 Un cuadrado tiene seis metros de lado. Si disminuimos dos lados paralelos en dos metros cada uno, ¿cuántos metros tenemos que aumentar cada uno de los otros dos para obtener un rectángulo de igual área que el cuadrado inicial?

A) $\frac{8}{3}$ **B)** 2 **C)** $\frac{11}{3}$ **D)** 3 **E)** 9

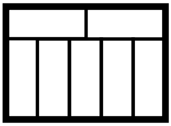
14 ¿Cuántos granos de arena son necesarios, aproximadamente, para cubrir un cuadrado de 2 cm de lado si cada grano de arena ocupa 5 mm^2?

A) 8 **B)** 60 **C)** 40 **D)** 80 **E)** 800

15 Glotón se comió dos tercios de una tarta, llegó Listín y se comió la mitad de lo que quedaba. Así que Buenazo, Tranquilo y Tontín se repartieron el resto como buenos hermanos. ¿Qué fracción de la tarta comió Tontín?

A) $\frac{1}{8}$ **B)** $\frac{1}{12}$ **C)** $\frac{1}{16}$ **D)** $\frac{1}{18}$ **E)** $\frac{1}{36}$

16 El rectángulo de la figura está formado por siete rectangulitos iguales. Si el perímetro del rectángulo grande es 68 cm, ¿cuál es, en cm, el perímetro de cada rectangulito?



A) 9,7 **B)** 14 **C)** 17 **D)** 24 **E)** 28

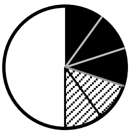
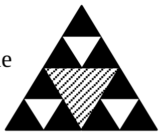
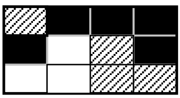
17 De los veinticinco alumnos de mi clase, quince tocan la guitarra y once tocan la flauta. Solo hay tres niños en mi clase que no tocan ningún instrumento. ¿Cuántos niños saben tocar los dos instrumentos?

A) 0 **B)** 7 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 13

18 Carlos, Eva, Lucas y Pilar forman el grupo de *Los Adivinanzas* y esta mañana hablaban así: Lucas dice "tengo la misma cantidad de monedas que Carlos"; Eva añade "y yo tengo la mitad que Carlos"; Pilar dice "pues yo tengo la mitad que Eva". Si el total de monedas de *Los Adivinanzas* es un número múltiplo de tres menor que 50, ¿cuántas monedas tiene Lucas?

A) 8 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 16 **E)** 20

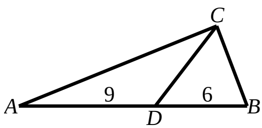
19 Alfredo (A), Merche (M) y Luis (L) han dibujado un círculo, un triángulo y un rectángulo, respectivamente, todos ellos de igual área. Luego los han coloreado y no se ponen de acuerdo en cuál de ellos ha usado más rotulador negro.

Alfredo  Merche  Luis 

Si ordenamos de menor a mayor la parte de cada figura que es negra, ¿cómo quedarían?

A) $A < M < L$ **B)** $A < L < M$ **C)** $L < A < M$ **D)** $L < M < A$ **E)** $A = L < M$

20 El área del triángulo *ABC* es 30 cm^2. El punto *D* está en el segmento *AB*, como ves en la figura. Si *AD* = 9 cm y *DB*= 6 cm, ¿cuál es, en cm^2, el área



del triángulo *ADC*?

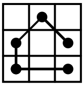
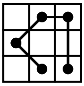
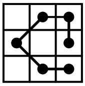
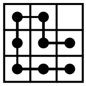
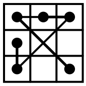
A) 18 **B)** 18,25 **C)** 20 **D)** 22 **E)** 22,5

21 El móvil de Don Retorcido tiene los números colocados como en los nuestros pero el suyo va haciendo operaciones a medida que se teclean los números. La operación que realiza depende de cómo estén colocados los dos números:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

SUMA  RESTA  MULTIPLICA  DIVIDE 

Estas cinco secuencias de teclas empiezan en el 9. ¿Cuál de ellas arroja el mayor resultado en el móvil de Don Retorcido?

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

22 Inés, Lucía y Rosario se han ido de rebajas. En la tienda todas las prendas iguales tiene el mismo precio. Inés ha comprado dos pantalones y tres camisetas; Lucía un pantalón, dos camisetas y dos sombreros y Rosario una camiseta y cuatro sombreros. Si Inés ha pagado 5 € más que Lucía, Rosario ha pagado:

A) Lo mismo que Lucía **B)** 20 € menos que Inés **C)** Lo mismo que Inés

D) 10 € menos que Lucía **E)** 5 € menos que Lucía

23 De nuevo los "Comenúmeros" han hecho de las suyas y se han comido la tercera cifra de los sumandos de esta operación: 23,3 + 52, 8 + 342 = 3725,28. . ¿Cuánto suman las tres cifras desaparecidas?

A) 13 **B**) 14 **C**) 20 **D**) 22 **E**) 23

24 Hoy han coincidido en el gallinero tres gallinas poniendo huevos: Catalina los pone cada doce días, Brígida cada nueve días y Silvina cada quince. ¿Dentro de cuántos días volverán a coincidir las tres gallinas poniendo huevos?

A) 60 **B)** 120 **C)** 180 **D)** 240 **E)** 360

25 Don Retorcido está triste porque no os verá hasta el próximo año. Os deja este último reto: ¿Quién de vosotros será capaz de adivinar en qué año nací? Nací en el siglo XVII; si al año de mi nacimiento le suprimís la cifra de las unidades queda un número cuya raíz cuadrada no tiene decimales; ¡ah!, y la cifra de las unidades es una unidad menor que la de las decenas. Pero para chinchar aún más, cambio la pregunta: ¿cuánto suman las cifras de mi año de nacimiento?

A) 21 **B)** 22 **C)** 23 **D)** 24 **E)** 25

XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 20 de abril de 2013

NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Aviraneta
Libros Guijarro

1 ¿Cuál es la diferencia entre el mayor número de cuatro cifras diferentes, todas pares, y el menor número de cuatro cifras diferentes, todas impares?

A) 7285 **B)** 7777 **C)** 7531 **D)** 7707 **E)** 1111

2 Un grupo de personas decide viajar por América y eligen tres países: México, Guatemala y Honduras. Al volver se muestran sus pasaportes y observan que: en 16 pasaportes está el sello de México; en 16 está el sello de Guatemala; en 11 el de Honduras; en 5 está el sello de México y Honduras; 5 tienen únicamente el sello de Honduras; 8 tienen sólo el sello de Guatemala; 3 tienen los tres sellos. ¿Cuántos viajeros tienen solamente el sello de México?

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

3 Dos diminutos quedan para dar vueltas alrededor de un reloj de agujas. Minimino se coloca en las 12 y Minimina se sitúa en las tres; Minimino gira en sentido contrario a las agujas pero Minimina va en el mismo sentido que las agujas; dicen ¡una, dos y tres! y salen a la vez; tris tras tris tras, se encuentran en las 9. Si cada diminuto mantiene su propia velocidad, ¿en qué hora se encontrarán por segunda vez?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

4 Cinco hermanas tienen todas edades diferentes: la media de sus edades es 5; Emilia, la mediana, tiene 5 años y es la única que tiene edad impar; Carlota tiene el doble de edad que Ana; Berta tiene dos años menos que Daniela. ¿Cuántos años tiene Berta?

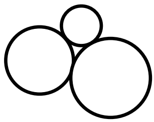
A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 10

5 Isabel llama *número repe* al que está formado por una o varias cifras que se repiten de izquierda a derecha. Por ejemplo: 333333, 262626, 135135 son números repes de seis cifras.

¿Cuántos *números repes* de seis cifras hay?

A) 981 **B)** 990 **C)** 991 **D)** 998 **E)** 999

6 Tres circunferencias de radios 1, 2 y 3 se colocan de tal manera que sean tangentes dos a dos como ves en la figura. ¿Qué área tiene el triángulo cuyos vértices son los centros de las circunferencias?



A) 6 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 12

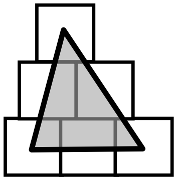
7 Si cada consonante la cambias por el número 2 y cada vocal por el número 1, ¿qué RETORCIDO vale más?

A) $R^E+T^O–R^C+I^D–O$ **B)** $(R–E)^T+(O–R)×(C–I)+D–O$

C) R+E–T+O–R+C–I+D–O **D)** R:E+T:O+R:C–I–D+O

E) R×E+T×O+R–C– (I+D):O

8 Ayudándome de seis cuadrados iguales, he dibujado un triángulo cuyos vértices son los centros de tres de esos cuadrados. Si el área del triángulo mide 24 cm^2, ¿cuántos cm^2 mide el área de un cuadrado?

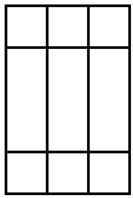


A) 12 **B)** 8 **C)** 16 **D)** 10 **E)** 4

9 Para escribir las medidas de los tres ángulos de un triángulo hemos utilizado estas seis cifras: 7, 7, 7, 6, 5 y 4. Además, uno de los ángulos mide 20 grados más que otro. ¿Cuánto mide el ángulo menor?

A) 45º **B)** 46º **C)** 47º **D)** 54º **E)** 57º

10 Con seis cuadrados iguales y con tres rectángulos iguales hemos diseñado una zona de paseo para hormigas. Guoquin pasea siempre a la misma velocidad y piensa en voz alta: "ayer recorrí el perímetro exterior pero hoy sólo completé el perímetro del rectángulo central y he necesitado 56 minutos menos que ayer. ¡Uf, qué agotamiento!, mañana solo pienso recorrer el lado menor del gran rectángulo". ¿Cuántos minutos paseará mañana Guoquin?

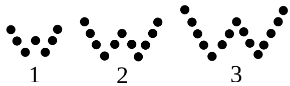


A) 32 **B)** 30 **C)** 18 **D)** 21 **E)** 28

11 Reordenando las cuatro sílabas del nombre de nuestro héroe (RE TOR CI DO), podemos formar unas cuantas palabrejas rarísimas. Si ordenamos alfabéticamente esas palabrejas, ¿cuál ocupa la posición decimoquinta?

A) Redotorci **B)** Recitordo **C)** Retorcido **D)** Redocitor **E)** Recidotor

12 Wally diseña con puntitos la inicial de su nombre, más y más grande cada vez. ¿Cuántos puntitos necesitará Wally para formar la **W** número 100?

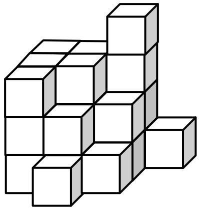


A) 380 **B)** 107 **C)** 601 **D)** 403 **E)** 398

13 En la siguiente igualdad $2^A \times 6^B = 8^C \times 9^D$, conocemos el valor de dos exponentes: $A = 8$ y $D = 5$. ¿Cuánto vale el exponente C?

A) 3 **B)** 8 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 6

14 Sara había construido un gran cubo de 4 × 4 × 4 con unos dados que tenía pero ha llegado su hermano Adrián y ha destruido su obra. ¿Cuántos dados necesita Sara para arreglar el desastre que ha provocado Adrián?



A) 28 **B)** 38 **C)** 26
D) 40 **E)** 37

15 Ya está aquí Don Retorcido con sus frases trampa:

I. Todo número primo es impar.

II. Todo número impar es primo.

III. La suma de dos números impares nunca es primo.

IV. La suma de dos números impares siempre es par.

V. El producto de dos números impares siempre es impar.

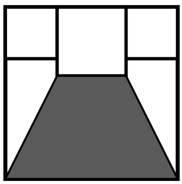
¿Cuántas de estas frases son verdaderas?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

16 Tengo tres tetrabricks rectangulares de bases 4 × 6 cm, 3 × 6 cm y 2 × 6 cm, cuyas alturas respectivas son *a*, *b* y *c*. Sabiendo que el primero tiene doble capacidad que el segundo y el segundo doble que el tercero, ¿qué relación deben cumplir sus alturas?

A) $2a = 3b = 4c$ **B)** $a = 2b = 4c$ **C)** $a = b = c$
D) $a = 3b = 6c$ **E)** $2a = 4b = 3c$

17 El cuadrado grande contiene tres cuadrados más pequeños de áreas 9 cm^2, 9 cm^2 y 16 cm^2. ¿Qué área, en cm^2, tiene la región sombreada?



A) 33 **B)** 22 **C)** 42
D) 34 **E)** 40

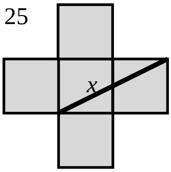
18 De las 24 horas que tiene el día, Roque Ronquidos pasa la mitad en la cama. Del resto del tiempo, pasa la mitad bostezando en el pupitre del colegio y, del tiempo que le queda, pasa la mitad dormitando mientras “hace los deberes”. Y aún pasa la mitad del tiempo que le queda apoltronado en el sofá delante de la tele, y la mitad de lo que le queda cabeceando en el autobús. El resto del tiempo que le queda, el bueno de Roque lo emplea en leer cuentos a su abuela para que concilie el sueño. ¿Cuántos minutos al día dedica Roque a leerle a su abuela?

A) 0 **B)** 15 **C)** 30 **D)** 45 **E)** 60

19 A ver, Merche, dime qué notas crees que has sacado en los cuatro exámenes. Pues 4, 6, 9 y 9. Fíjate que no has acertado ni una nota pero la media sí te coincide y, por supuesto, no has obtenido ningún 10 ni tampoco has sacado la misma nota en los cuatro exámenes. Si descartamos la peor nota de Merche, ¿cuánto suman los otros tres exámenes?

A) 21 **B)** 22 **C)** 23 **D)** 24 **E)** 25

20 Si el segmento x mide 5 cm, ¿cuánto mide, en cm^2, el área de la cruz?



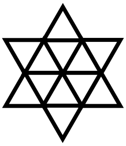
A) 16 **B)** 18 **C)** 20

D) 21 **E)** 25

21 La diana de la feria sólo tiene dos regiones, la naranja y la verde. Cuando el dardo cae en la naranja te dan 3 puntos, cuando cae en la verde 5 puntos y si cae fuera 0 puntos. Si puedes lanzar tantas veces como quieras, ¿cuántas puntuaciones menores que 100 son imposibles de conseguir?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 7

22 ¡A contar se ha dicho! ¡Y sin dejarse ninguno! ¿Cuántos triángulos hay en la figura?

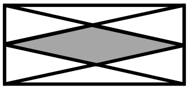


A) 12 **B)** 20 **C)** 18 **D)** 14 **E)** 24

23 Siete cebollas y cinco tomates cuestan 4,50 euros. Cinco cebollas y tres tomates valen 3,10 euros. Si necesito para mi receta tres cebollas y dos tomates, ¿cuántos euros me gastaré?

A) 1,90 **B)** 2 **C)** 2,10 **D)** 2,15 **E)** 2,60

24 En un rectángulo cuyos lados miden 4 y 12 centímetros, hemos formado un rombo ayudándonos de los vértices del rectángulo y de puntos medios de sus lados. ¿Qué área, en cm^2, tiene el rombo?



A) 10 **B)** 8 **C)** 12 **D)** 9 **E)** 14

25 Don Retorcido está triste porque no os verá hasta el próximo año. Os deja este último reto: ¿Quién de vosotros será capaz de adivinar cuántos años tengo? Es un número de tres cifras, múltiplo de 3 y de 5, si le borras la cifra de las unidades queda un número primo, ¡y no quiero comentarios sobre mi edad! Os dejo cinco posibilidades, sólo una es la correcta.

A) 210 **B)** 235 **C)** 275 **D)** 315 **E)** 379

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 20 de abril de 2013

NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

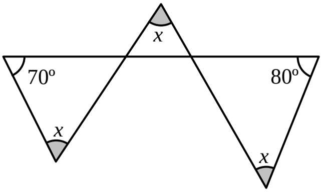
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Aviraneta
Libros Guijarro

1 Un día observé que el cuentakilómetros de mi coche marcaba el 24942, un número capicúa, y unos días más tarde me di cuenta de que marcaba el siguiente capicúa. La suma de las cifras del número de km que recorrí entre esos dos días es:

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

2 Los ángulos de un triángulo son proporcionales a los números 2, 3 y 5. ¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor?

A) 9º **B)** 18º **C)** 36º
D) 45º **E)** 54º



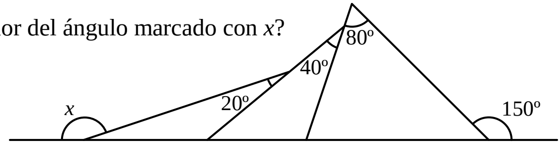
3 ¿Cuál es el valor de x en el siguiente dibujo, que no está hecho a escala?

A) 30º **B)** 35º **C)** 40º
D) 45º **E)** 50º

4 Tres atletas comienzan a correr simultáneamente desde el mismo punto en una pista circular de 500 m de longitud. Todos corren en el mismo sentido alrededor de la pista, manteniendo velocidades constantes de 4,4 m/s, 4,8 m/s y 5 m/s. Acuerdan detenerse cuando vuelvan a coincidir los tres en algún punto de la pista. ¿Cuántos segundos corren?

A) 1000 **B)** 1250 **C)** 2500 **D)** 5000 **E)** 10 000

5 ¿Cuál es el valor del ángulo marcado con x?

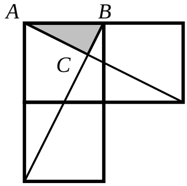


A) 170º **B)** 160º **C)** 150º **D)** 140º **E)** 130º

6 El número 6 es la media aritmética del número entero 3 y de su cuadrado. ¿Cuál de los siguientes números no es la media aritmética de ningún entero positivo y su cuadrado?

A) 3 **B)** 10 **C)** 15 **D)** 21 **E)** 30

7 En la figura observas tres cuadrados de lado 1 y dos segmentos que unen dos pares de vértices. ¿Cuál es el área del triángulo *ABC*?

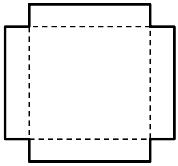


A) $\frac{1}{6}$ **B)** $\frac{1}{5}$ **C)** $\frac{2}{9}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$

8 Dos hermanos gemelos sacan siempre la misma nota en los exámenes de Matemáticas. A lo largo del curso pasado, uno de ellos obtuvo en los ocho exámenes que hizo: 8,5; 6,5; 2,5; 5; 7; 4,5; 6 y 8 y el otro, que no pudo hacer dos exámenes de esos ocho, obtuvo la misma media que su hermano. ¿Qué nota obtuvo éste en los dos exámenes que hizo sólo?

A) 6 y 8,5 **B)** 2,5 y 8,5 **C)** 4,5 y 8 **D)** 5 y 6 **E)** 5 y 7

9 En una hoja cuadrada cortamos en cada esquina un cuadrado de 2 cm de lado y doblamos por las líneas a trazos que se observan en la figura para formar una caja sin tapa de 180 cm^2 de superficie total. ¿Cuál es el volumen, en cm^3, de esa caja?



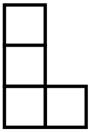
A) 100 **B)** 128 **C)** 162

D) 180 **E)** 200

10 Supón que la cotización del euro es 1,30 dólares. Si Hillary tiene 500 dólares y Antonio tiene 400 euros, Hillary tiene algo menos que Antonio. Sobre el total del dinero de Hillary, ¿qué porcentaje supone esa diferencia?

A) 2% **B)** 4% **C)** 6,5% **D)** 8% **E)** 13%

11 La figura que ves está hecha con cuatro cuadraditos iguales. María quiere añadir un cuadradito más para formar una figura con 5 cuadraditos y que tenga al menos un eje de simetría. ¿De cuántas formas podrá hacerlo?



A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

12 Joaquín se comió 12 naranjas en tres días. Cada día comió más naranjas que el día anterior y el tercer día comió menos que la suma de los dos días anteriores. ¿Cuántas naranjas se comió Joaquín el tercer día?

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

13 Berta hace una lista con todos los números de tres cifras cuyas cifras suman 8. ¿Cuál es la suma del menor y el mayor número de la lista?

A) 707 **B)** 907 **C)** 916 **D)** 1000 **E)** 1001

14 Isa tiene nueve perlas de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 gramos de peso. Un día hizo cuatro collares con dos perlas en cada collar, así que dejó una perla sin utilizar. Si la suma de los pesos de los cuatro collares es múltiplo de 5, ¿cuál es el peso en gramos de la perla que no utilizó?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

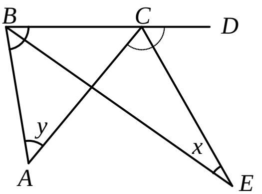
15 La suma de los primeros m enteros positivos impares es 212 más que la suma de los n primeros enteros positivos pares. ¿Cuál es la suma de todos los valores que puede tomar n?

A) 255 **B)** 256 **C)** 257 **D)** 258 **E)** 252

16 En un triángulo rectángulo de hipotenusa 4 cm, la suma de sus catetos es $\sqrt{18}$ cm. ¿Cuál es, en cm^2, el área de dicho triángulo?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** 1 **C)** 2 **D)** 4 **E)** 18

17 En el dibujo que observas, los ángulos $A\hat{B}E$ y $E\hat{B}C$ son iguales, así como también son iguales los ángulos $A\hat{C}E$ y $E\hat{C}D$. Si llamamos $B\hat{E}C = x$, el ángulo $y = B\hat{A}C$ es igual a:



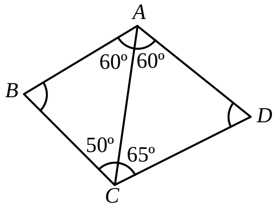
A) $90º - x$ **B)** $90º - \frac{x}{2}$ **C)** $2x$

D) x **E)** $180º - 2x$

18 Al sumar 329 con el número de tres cifras 2A4 obtenemos como resultado 5B3. Si 5B3 es divisible por 3, el mayor valor posible para la cifra A es:

A) 1 **B)** 4 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

19 En el dibujo siguiente, que no está hecho a escala, la mayor longitud debe ser:



A) CD **B)** AC **C)** AD

D) AB **E)** BC

20 Si n es un entero mayor que 2013^{2013}, cuando dividimos $n(n + 1)$ entre 3, el resto puede ser:

A) Solo 0 **B)** Solo 2 **C)** Solo 0 o 1 **D)** Solo 0 o 2 **E)** 0, 1 o 2

21 El menor entero positivo que da restos 1, 4 y 1 al dividirlo entre 3, 5 y 11, respectivamente, está entre:

A) 11 y 20 **B)** 21 y 30 **C)** 31 y 40 **D)** 41 y 50 **E)** 61 y 70

22 El mayor entero positivo que divide a todos los términos de la sucesión $13^5 - 13$, $14^5 - 14$, $15^5 - 15$, …, $n^5 - n$, … es:

A) 60 **B)** 30 **C)** 20 **D)** 12 **E)** 6

23 Al restarle a un número su cuadrado, el mayor resultado posible es:

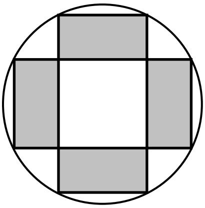
A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{1}{5}$ **E)** $\frac{1}{6}$

24 Esteban escribe un número de cinco cifras, todas distintas, y tal que la primera por la izquierda es la suma de las otras cuatro. ¿Cuántos números puede escribir con estas características?

A) 72 **B)** 144 **C)** 168 **D)** 216 **E)** 288

25 Los cuatro rectángulos sombreados de la figura son iguales y con un lado doble que el otro. Si el círculo tiene radio 1, ¿cuál es el área de cada rectángulo?

A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{2}{5}$ **C)** $\frac{5}{12}$ **D)** $\frac{4}{9}$ **E)** $\frac{1}{2}$



XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 20 de abril de 2013

NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática

Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Aviraneta
Libros Guijarro

1 ¿Cuántos primos de dos cifras cumplen además que sus cifras son números primos? (Por ejemplo, 23 sería uno de ellos, pero 71 no, pues 1 no es primo)

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 8 **E)** 15

2 Tengo seis pares de calcetines, de diferente color cada par, estando los doce calcetines sueltos guardados en un cajón. ¿Cuántos calcetines debo sacar, como mínimo, del cajón para asegurar que me puedo poner un par del mismo color?

A) 3 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 11

3 En la primera fase de un concurso de matemáticas, la media de las puntuaciones fue de 76 sobre 100. La nota media de los estudiantes que se clasificaron para la segunda fase fue de 83 y la media de los que no se clasificaron fue de 55. ¿Qué porcentaje de los estudiantes se clasificó para la segunda fase?

A) 44% **B)** 66% **C)** 68% **D)** 72% **E)** 75%

4 ¿Qué número es $\sqrt{10-4\sqrt{6}}-\sqrt{10+4\sqrt{6}}$?

A) – 1 **B)** – 4 **C)** $-2\sqrt{6}$ **D)** $-\sqrt{8\sqrt{6}}$ **E)** $-8\sqrt{6}$

5 En el triángulo de lados AB = 24, BC = 7 y AC = 25, ¿cuál es la longitud de la mediana que parte de C?

A) 10 **B)** $\sqrt{139}$ **C)** 12 **D)** $\sqrt{193}$ **E)** 16

6 Si las dos raíces de la ecuación $x^2-85x+c=0$ son números primos, ¿cuál es la suma de las cifras de c?

A) 12 **B)** 13 **C)** 14 **D)** 15 **E)** 21

7 Si $sen\, x+\cos x=\frac{1}{2}$, ¿cuánto vale $sen^3 x+\cos^3 x$?

A) $\frac{1}{8}$ **B)** $\frac{5}{16}$ **C)** $\frac{3}{8}$ **D)** $\frac{5}{8}$ **E)** $\frac{11}{16}$

8 ¿Cuál es el mayor entero n para el que $\frac{n^2-38}{n+1}$ es entero?

A) 36 **B)** 38 **C)** 72 **D)** 76 **E)** – 2

9 Una circunferencia pasa por dos vértices contiguos de un cuadrado de lado 2 y es tangente al lado opuesto. ¿Cuál es su radio?

A) $\frac{3}{2}$ **B)** $\frac{4}{3}$ **C)** $\frac{5}{4}$ **D)** $\frac{6}{5}$ **E)** $\frac{7}{6}$

10 Para cada entero positivo n definimos $S(n)$ como la suma de los divisores de n. Así pues $S(8)=1+2+4+8=15$. ¿Cuál de los siguientes números es el más pequeño?

A) $S(2010)$ **B)** $S(2011)$ **C)** $S(2012)$ **D)** $S(2013)$ **E)** $S(2014)$

11 ¿Cuántos términos de la sucesión 1, 4, 7, 10, 13, 16, … tienen menos de cinco cifras?

A) 3003 **B)** 3331 **C)** 3332 **D)** 3333 **E)** 3524

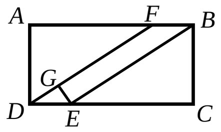
12 En una lista de seis números, el primero es 4 y el último 47, siendo cada número, a partir del tercero la suma de los dos precedentes. Si S es la suma de los seis números de la lista, S está en el intervalo:

A) [51, 90] **B)** [91, 100] **C)** [101, 110] **D)** [111, 120] **E)** [121, 160]

13 El perímetro de un rectángulo es x cm y el cociente de sus dos longitudes es $\frac{a}{b}$ con $a > b$. ¿Cuál es la longitud, en cm, del lado más corto?

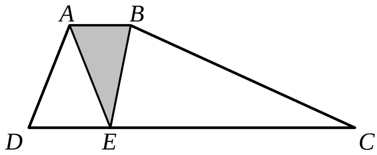
A) $\frac{bx}{a+b}$ **B)** $\frac{x}{2}-2a$ **C)** $\frac{2bx}{a+b}$ **D)** $\frac{ax}{2(a+b)}$ **E)** $\frac{bx}{2(a+b)}$

14 En el rectángulo de la figura, de dimensiones 12 y 6, los segmentos DF y BE son paralelos y EG es perpendicular a ambos. Si el área del paralelogramo $DEBF$ es 12, la longitud de EG es:



A) $\frac{3\sqrt{34}}{17}$ **B)** $\frac{2\sqrt{34}}{34}$ **C)** $\frac{3}{2}$ **D)** 2 **E)** Nada de lo anterior

15 El área del trapecio $ABCD$ de la figura es 18, $AB = 4$ y $DE = \frac{1}{4}DC$. Si la altura del trapecio es un entero y el lado DC es un entero impar, el área del triángulo ABE es:



A) 9 **B)** 6 **C)** $\frac{18}{5}$ **D)** 8 **E)** Nada de lo anterior

16 Si $tgx = 3$, siendo $0º \le x \le 90º$, entonces:

A) $0º \le x \le 30º$ **B)** $30º \le x \le 45º$ **C)** $45º \le x \le 60º$

D) $60º \le x \le 75º$ **E)** $75º \le x \le 90º$

17 ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $x = 10 \cdot cosx$?

A) 3 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 10

18 El valor de $25^{\frac{1}{2} - \log_5 \sqrt{2}}$ es:

A) $\frac{5}{2}$ **B)** $\frac{5}{\sqrt{2}}$ **C)** $5 - \sqrt{2}$ **D)** $\frac{5}{2\sqrt{2}}$ **E)** 3

19 ¿Cuántos puntos tienen en común las gráficas de $y = |x|$ e $y = |x^2 - 4|$?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

20 La distancia más corta entre un punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ y otro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 41 = 0$ es:

A) $3\sqrt{5} - 5$ **B)** $3\sqrt{5}$ **C)** $3\sqrt{5} - 1$ **D)** 5 **E)** 1

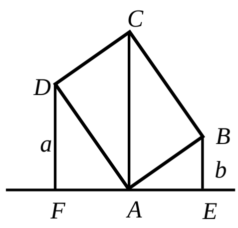
21 ¿Cuál es el mínimo valor que toma la función $f(x) = 2^{x^2 - 2x}$?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** –1 **C)** 0 **D)** 2 **E)** 1

22 El menor entero positivo *x* para el que la suma *x* + 2*x* + 3*x* +…+ 100*x* es un cuadrado perfecto es:

A) 100 **B)** 101 **C)** 202 **D)** 5050 **E)** Nada de lo anterior

23 En la figura que observas, *ABCD* es un rectángulo y los segmentos *DF*, *BE* y *CA* son perpendiculares a la recta *FE*. Si *DF* = *a* y *BE* = *b*, la longitud *FE* es:



A) $a + b$ **B)** $2\sqrt{ab}$ **C)** $\sqrt{2a^2 + 2b^2}$

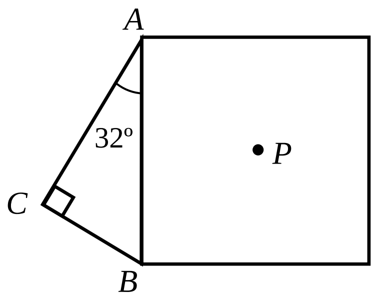
D) $\frac{2a + 4b}{3}$ **E)** Nada de lo anterior

24 ¿Cuál es el valor de $\log(tg\,1^{o}) + \log(tg\,2^{o}) + ... + \log(tg\,88^{o}) + \log(tg\,89^{o})$?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** $\log\frac{\pi}{2}$ **E)** $\log\frac{\pi}{4}$

25 En la figura se observa un triángulo rectángulo *ABC* con $\hat{A} = 32^{o}$ y un cuadrado de centro *P* y que comparte el lado *AB* con el triángulo. ¿Cuánto mide el ángulo $P\hat{C}B$?

A) 32º **B)** 44º **C)** 45º **D)** 48º **E)** 58º



XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (1ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**C**	1	**B**	1	**E**	1	**C**
2	**C**	2	**D**	2	**B**	2	**C**
3	**D**	3	**A**	3	**C**	3	**B**
4	**C**	4	**C**	4	**D**	4	**A**
5	**C**	5	**D**	5	**D**	5	**D**
6	**D**	6	**B**	6	**C**	6	**C**
7	**A**	7	**E**	7	**C**	7	**B**
8	**D**	8	**C**	8	**D**	8	**E**
9	**D**	9	**B**	9	**A**	9	**C**
10	**E**	10	**D**	10	**C**	10	**B**
11	**E**	11	**A**	11	**D**	11	**E**
12	**B**	12	**C**	12	**D**	12	**B**
13	**C**	13	**D**	13	**E**	13	**D**
14	**E**	14	**D**	14	**D**	14	**C**
15	**B**	15	**E**	15	**D**	15	**B**
16	**D**	16	**E**	16	**B**	16	**D**
17	**D**	17	**B**	17	**D**	17	**D**
18	**C**	18	**C**	18	**A**	18	**D**
19	**C**	19	**A**	19	**D**	19	**D**
20	**B**	20	**B**	20	**E**	20	**E**
21	**B**	21	**E**	21	**A**	21	**D**
22	**D**	22	**B**	22	**C**	22	**C**
23	**C**	23	**C**	23	**A**	23	**E**
24	**E**	24	**A**	24	**B**	24	**B**
25	**E**	25	**B**	25	**A**	25	**D**

XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (2ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**E**	1	**A**	1	**B**	1	**B**
2	**B**	2	**B**	2	**E**	2	**D**
3	**C**	3	**D**	3	**A**	3	**E**
4	**E**	4	**C**	4	**C**	4	**B**
5	**A**	5	**A**	5	**A**	5	**D**
6	**D**	6	**A**	6	**E**	6	**B**
7	**B**	7	**D**	7	**B**	7	**E**
8	**A**	8	**A**	8	**E**	8	**A**
9	**A**	9	**B**	9	**E**	9	**C**
10	**D**	10	**D**	10	**B**	10	**B**
11	**D**	11	**D**	11	**C**	11	**D**
12	**E**	12	**D**	12	**A**	12	**D**
13	**D**	13	**E**	13	**B**	13	**E**
14	**D**	14	**B**	14	**E**	14	**A**
15	**D**	15	**B**	15	**A**	15	**D**
16	**E**	16	**A**	16	**A**	16	**D**
17	**D**	17	**C**	17	**C**	17	**D**
18	**B**	18	**D**	18	**B**	18	**A**
19	**B**	19	**C**	19	**C**	19	**E**
20	**A**	20	**E**	20	**D**	20	**A**
21	**A**	21	**C**	21	**C**	21	**A**
22	**E**	22	**B**	22	**B**	22	**C**
23	**A**	23	**A**	23	**C**	23	**B**
24	**C**	24	**C**	24	**C**	24	**A**
25	**D**	25	**D**	25	**B**	25	**C**

XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel I

1. (C) Nos piden que hagamos la resta 2013 – 1939 = 74.

2. (C) Como en la guía caben 1207 × 160 × 5 = 965 600 teléfonos, 950 000 es claramente la cifra que mejor aproxima el número de teléfonos de la guía.

3. (D) El cuadrado ocupa 16 unidades cuadradas. Por su parte, la **N** se puede descomponer en dos rectángulos de 4 unidades cada uno y un paralelogramo de base unidad y altura 2, con lo que el área de la **N** es de 8 + 2 = 10 unidades cuadradas y la fracción pedida es $\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$.

4. (C) Si organizamos lo datos en una tabla como la siguiente:

	Patas	Cabezas
15 vacas	60	15
3 ciempiés	300	3
37 gallinas	74	37
11 serpientes	0	11
SUMA	434	66

Vemos con facilidad que hay 434 + 66 = 500 patas y cabezas en total.

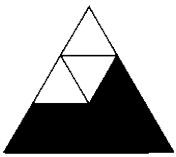
5. (C) Haciendo funcionar a la máquina en sentido inverso tendremos: $94 - 16 = 78;\ 78 : 2 = 39;\ 39 + 52 = 91;\ 91 \times 12 = 1092$ y por lo tanto 1 + 9 + 2 = 12.

6. (D) Dado que 11782 : 3600 = 6,5 , la respuesta es: entre 6 y 7 horas.

7. (A) Sabemos que 3 gominolas + 2 chupachups valen igual que 4 gominolas + 2 chicles, y que la igualdad se mantendrá si quitamos 3 gominolas en *ambos lados.*
Entonces <u>2 chupachups valen lo mismo que 1 gominola + 2 chicles</u>.
Por otra parte, si 4 chupachups cuestan lo mismo que 6 chicles, es claro que <u>2 chupacups valen lo mismo que 3 chicles</u>.
Como consecuencia 1 gominola + 2 chicles cuestan lo mismo que 3 chicles, es decir, una gominola cuesta lo mismo que un chicle.

8. (D) El único número que tiene sus cifras en distinto orden a los dados y que es menor que 60 y mayor que 34 es 54. La suma de sus cifras es 9

9. (D) A la vista de la figura es evidente que el área de cada triangulito Mide 36 : 9 = 4 cm^2. Luego el área de la figura sombreada es: 6 × 4 = 24 cm^2.



10.(E) Sin importar lo gigantescos que sean los dos números, en su multiplicación, la cifra de las decenas será la misma que la del producto de 43 por 58. Haciendo la operación encontramos que la cifra es 9.

11.(E) El único que hizo caso a Don Retorcido fue el alumno E.

12.(B) Si bailan Merengue también bailan Chotis, pero si bailan Chotis no bailan Pasodoble y si no bailan Pasodoble, entonces bailan Fox-Trot. Por lo tanto, además del Merengue, bailaron Fox-Trot y Chotis.

13.(C) Empecemos por representar esquemáticamente las piezas que llevan puestas, de la siguiente forma:

Lo dividimos en tres partes iguales para determinar fácilmente lo que representan dos tercios.

Y ahora añadimos los dos tercios que faltan por poner.

Como el total de las piezas es de 1500, entonces cada cuadradito representa $\frac{1500}{5} = 300$ piezas y por lo tanto les quedan por colocar $300 \times 2 = 600$ piezas.

14.(E) Si hace el recorrido en forma *circular* (como en la figura del enunciado), puede hacer seis dibujos diferentes; uno por cada uno de los Puntos desde los que puede comenzar el recorrido. Además puede hacer otros dos dibujos distintos, desviándose a la vertical en los dos Puntos centrales, como muestra la figura:

Luego, puede hacer ocho dibujos diferentes.

15.(B) Sustituyendo cada letra por su número correspondiente tenemos:
$(20 + 2 \times 3) : (10 - 2 \times 3) = (10 + 6) : (10 - 6) = 16 : 4 = 4$.

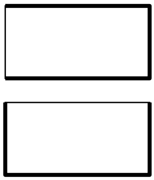
16.(D) Si la primera cifra es par, la podemos elegir de cuatro formas (2, 4, 6, 8) y la segunda de cinco (1, 3, 5, 7, 9). En total tenemos $4 \times 5 = 20$ números.
Si la primera es impar, podemos elegirla de 5 maneras, pero ahora la segunda cuenta también con cinco opciones, de modo que tenemos $5 \times 5 = 25$ números. En consecuencia hay 45 números que cumplen las condiciones impuestas.

17.(D) Para empezar calcularemos el dinero que tiene cada una de las hermanas:
$1 + 3 \times 0{,}5 + 6 \times 0{,}20 + 3 \times 0{,}05 = 3{,}85$ €
Mariquilla tendrá el mínimo número de monedas si tiene el máximo número de monedas de mayor valor: con una de 2 € otra de 1 € ya completa 3 € Los 0,85 € restantes los debe completar con una moneda de 50 céntimos, una de 20, una de 10 y una de 5 céntimos. Tiene pues, en total, seis monedas.

18.(C) Fijémonos en la figura**:** si *B* es el punto medio de *AC* y *C* el punto medio de *BD*, tenemos que los segmentos *AB*, *BC* y *CD* miden lo mismo, y si *D* es el punto medio de *BE*, entonces el segmento *DE* mide igual que el *BD*. Esto nos permite dividir el segmento *AB* en cinco partes iguales; 3 para los segmentos *AB*, *BC* y *CD* y 2 para el segmento *DE*, con lo que, $\frac{20}{5}\times 2 = 8\ cm$ será lo que mide *DE*.

19.(C) Como 48 menos el paréntesis es igual a 16, el paréntesis tiene que ser 48 – 16 = 32, es decir, 6 más el doble del número comido es igual a 32, luego el doble de ese número es igual 32 – 6 = 26 y por tanto el número comido es 13.

20.(B) Evidentemente, como se aprecia en la figura, la suma de Juanje es igual al perímetro, P, menos el lado menor, *b*, y la suma de Francisco equivale al perímetro menos el lado mayor, *a*. Entre los dos sumaron 44 + 40 = *P* – *b* + *P* – *a* = 2*P* – (*a* + *b*) y como (*a* + *b*) es igual al semiperímetro, tenemos: 84 = 1,5*P*, con lo que $P = \frac{84}{1{,}5} = 56\ cm$.



21.(B) El día 1º necesita contar *X* corderitos. El día 2º necesita *X* – 5. El 3º día *X* – 2 × 5. El 4º día *X* – 3 × 5… El 30º día *X* – 29 × 5 = 0, de donde *X* = 29 × 5 = 145 corderitos.

22.(D) Si agrupamos los 28 primeros días del año en 14 parejas, día par más día impar, tendremos que cada par de días corre $\frac{210}{14} = 15\ km.$ Dado que el día par corre tres kilómetros más que el día impar, basta descomponer 15 en dos sumandos tales que su diferencia sea 3. Tras un breve tanteo encontramos: 15 = 9 + 6.
Como entre los días 21 y 27 tenemos tres parejas: impar, par, más el impar 27, concluimos que correrá 3 × 15 + 6 = 51 *km*.

23.(C) En realidad el problema se reduce a elegir un zapato entre 4. Saque el que saque con una mano, tiene cuatro opciones para sacar un zapato con la otra mano, y solo una de ellas será favorable. Por lo tanto la probabilidad pedida es 1/4.

24.(E) Basta multiplicar, en cada tramo, la velocidad en *km/h* por el tiempo correspondiente en horas y realizar la suma de kilómetros:
(50 × 0,5) + (120 × 4,5) + (60 × 0,25) = 25 + 540 + 15 = 580 *km.*

25.(E) El número de chicos que puede haber en la clase de Don Retorcido está comprendido entre 0 y 14. Imaginemos que son 14, esto es, en la clase hay 29 estudiantes. Entonces, si hace grupos de cinco le sobrarán cuatro. Para que le sobre uno basta con eliminar a tres chicos. De esta forma, en la clase, hay 26 alumnos de los que 11 son chicos. Si ahora hace grupos de cinco, tendrá cinco grupos y le sobrará un estudiante y si los hace de cuatro, habrá seis grupos y le sobrarán dos. Por lo tanto, si hay once chicos, problema solucionado.

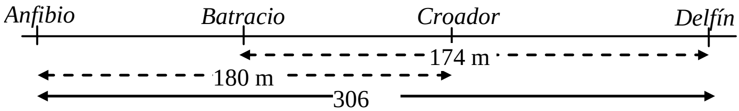
Es muy fácil ver que esta es la única solución.

Consideremos que hay en la clase 26 – 5 = 21 ó 21 – 5 = 16 estudiantes (las otras dos únicas posibilidades de hacer grupos de cinco y que sobre uno). Vemos inmediatamente que ninguna de estas opciones cumple la otra condición del problema.

XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

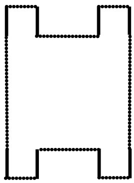
Soluciones 1ª Fase Nivel II

1. (B) Lo más sencillo es alinear a los corredores y escribir los datos que nos dan:



Así es fácil ver que la distancia de Anfibio a Batracio es 306 – 174 = 132 m y la distancia de Batracio a Croador es 180 – 132 = 48 m.

2. (D) Como $35613{,}475 = \dfrac{35613475}{1000} = \dfrac{1424539}{40}$ el menor número natural por el que debemos multiplicar para obtener un entero es 40.

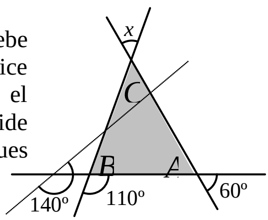


3. (A) Como el perímetro del cuadrado es igual a la suma de todos los trazos punteados, lo único nuevo que hemos añadido son ocho lados del cuadrado (es decir, el doble del perímetro de un cuadradito). Así pues, el perímetro de cada cuadradito es (136 – 80) : 2 = 56 : 2 = 28 cm.

4. (C) Si para vestir a 90 hadas hacen falta 750 m de hilo, para vestir a 225 necesitaremos $225 \cdot \dfrac{750}{90} = 225 \cdot \dfrac{25}{3} = 75 \cdot 25 = 1875$ m. Así pues, tras vestir a las hadas nos quedarán 2250 – 1875 = 375 m de hilo con los que podremos vestir a $375 : \dfrac{750}{150} = 375 : 5 = 75$ ninfas.

5. (D) El resultado será aproximadamente igual a ochenta billones (un ocho seguido de 13 ceros por treinta mil millones (un tres seguido de 10 ceros) luego será aproximadamente igual a 24 seguido de 13 + 10 = 23 ceros.
Así pues, el número tendrá 2 + 23 = 25 cifras.

6. (B) Observa el triángulo sombreado. La suma de sus ángulos debe ser 180º. El ángulo *A* mide 60º (pues es opuesto por el vértice al de 60º), el ángulo *B* mide 180º – 110º = 70º pues es el suplementario del ángulo de 110º. Así pues el ángulo *C* mide 180º – (60 + 70) = 50º y por tanto *x* debe ser también 50º (pues son opuestos por el vértice).
Como ves, el dato de 140º no es necesario.



7. (E) La afirmación I es verdadera. Los denominadores nos indican la cantidad de partes iguales en que dividimos la unidad. Si el denominador es menor, la unidad estará dividida en menos partes y cada una de esas partes será más grande. Por tanto, si $\frac{a}{b} < \frac{a}{c}$ es porque $c < b$.

La "mitad del <u>doble de la mitad</u>" es la "mitad de la <u>unidad</u>", que es claramente la mitad. La afirmación II es verdadera.

La afirmación III también es verdadera pues, si llamamos D al dividendo, d al divisor, c al cociente y r al resto, sabemos que $D = d\cdot c + r$. Por tanto $D - r = d\cdot c$ así pues, al dividir $D - r$ entre d obtendremos como cociente c y como resto, 0.

Hemos visto que todas las afirmaciones son verdaderas.

8. (C) Vamos comparando poco a poco: comparemos primero A) con B).

$2^5\cdot 3^5\cdot 5^5 = 32\cdot(3^5\cdot 5^5)$y $3^5\cdot 5^6\cdot 7 = (3^5\cdot 5^5)\cdot 5\cdot 7 = (3^5\cdot 5^5)\cdot 35$. Así que es mayor la opción B).

Entre B) y C) $2^4\cdot 3^6\cdot 5^5 = 16\cdot 3\cdot(3^5\cdot 5^5) = 48\cdot(3^5\cdot 5^5) > (3^5\cdot 5^5)\cdot 35$ así que la opción C) es mayor.

Entre C) y D) $2^4\cdot 3^6\cdot 5^5 = 8\cdot(2\cdot 3^6\cdot 5^5)$ y $2\cdot 3^6\cdot 5^6 = (2\cdot 3^6\cdot 5^5)\cdot 5$ y C) sigue siendo mayor.

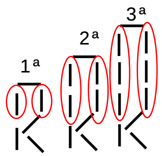
Por último, entre la opción C) y E) tenemos que $2^4\cdot 3^6\cdot 5^5 = 16\cdot(3^6\cdot 5^5)$ y $3^8\cdot 5^5 = 9\cdot(3^6\cdot 5^5)$ y, por tanto, el número mayor es $2^4\cdot 3^6\cdot 5^5$.

9. (B) El número de cuatro cifras "*abcd*"es múltiplo de 11 si $(a + c) - (b + d)$ es múltiplo de 11. Seguro que conoces este resultado pero, ¿sabes por qué? Pues verás, el número "*abcd*" es, en realidad, $1000\cdot a + 100\cdot b + 10\cdot c + d = 1001\cdot a - a + 99\cdot b + b + 11\cdot c - c + d = 11\cdot 91\cdot a - a + 11\cdot 9\cdot b + b + 11\cdot c - c + d = 11(91\cdot a + 9\cdot b + c) - a + b - c + d$ y este número será múltiplo de 11 si lo es $- a + b - c + d$.

Bueno, pues vamos ahora a resolver el problema: Nuestro número debe ser de la forma "*ab*13" con $(a + 1) - (b + 3)$ múltiplo de 11.

Así que queremos que a – b – 2 sea un múltiplo de 11. Como a y b son cifras, solo pueden tomar valores enteros de 0 a 9 (y a no puede ser 0) así que ese número estará entre –10 y 7 y el único múltiplo de 11 que hay es 0.

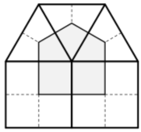
Queremos que $a - b - 2 = 0$, es decir $a - b = 2$. Los valores posibles son 2013, 3113, 4213, 5313, 6413, 7513, 8613 y 9713. En total hay 8.



10.(D) Observa que para formar la primera letra usamos $2\cdot 1 + 4$ palillos, para la segunda, $2\cdot 2 + 4$, para la tercera $2\cdot 3 + 4$… Así que para la letra número 2013 usaremos $2\cdot 2013 + 4 = 4030$ palillos.

11.(A) Si llamamos x al número de pasteles que se comió Índice, tenemos que:
Corazón se comió $2x$
Anular se comió $x + 3$
Meñique se comió 1.
Pulgar se comió $x + 2x + (x + 3) + 1 = 4x + 4$.
Como entre todos se comieron 80 pasteles, Pulgar se comió 40 así que $4x + 4 = 40$.
Resolviendo la ecuación tenemos que $x = 9$ y Anular se comió $9 + 3 = 12$ pasteles.

12.(C) Observa que el pentágono ocupa 1/4 de cada cuadrado y 1/3 de cada triángulo. Así pues su área es $2 \cdot \frac{a}{4} + 3 \cdot \frac{b}{3} = \frac{a}{2} + b$



13.(D) Veamos cómo va la cosa: en las tres primeras horas la Mula ha recorrido 20 km y el Buey 24 km (coinciden cuando la Mula está descansando después de dos horas de trote). En la siguiente hora la Mula llevará recorridos 30 km y el Buey 32 km y en la siguiente hora ambos coincidirán. Así pues tardarán 5 horas en coincidir y habrán recorrido 40 km.

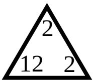
14.(D) Nos conviene que el denominador sea 1 y que el numerador sea grande. Si $A = 100$ y $B + C = 99$ se cumplen las dos cosas y el resultado es 199.

Como tal vez creas que podría haber una solución mejor, para terminar de convencerte observa que si llamas $D = B + C$, la expresión se escribe como $\frac{A+D}{A-D}$ donde A va de 1 a 100 y D de 3 a 199. Si D es mayor que A el número será negativo, así que te conviene tomarlo de 3 a 100 y ahora está claro que lo mejor es tomar $A = 100$ y $D = 99$.

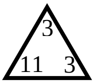
15.(D) Si la primera tiene x años y la segunda tiene y años podemos escribir que $\frac{1}{2}(3x) = 2\left(\frac{y}{3}\right)$ o lo que es lo mismo: $\frac{3}{2}x = \frac{2}{3}y$. La mayor es la que tiene y años y el cociente pedido es $\frac{y}{x} = \frac{3/2}{2/3} = \frac{9}{4} = 2{,}25$.

16.(E) Si llamamos c al cociente de la división, el número es $D = 60 \cdot c + 42 = 20 \cdot 3 \cdot c + 20 \cdot 2 + 2 = 20(3 \cdot c + 2) + 2$ y, por tanto, el resto de dividirlo entre 20 es 2.
También puedes pensarlo de una forma más intuitiva. Si al repartir una cantidad de caramelos entre 60 amigos nos han sobrado 42, si los hubiéramos repartido entre 20 amigos, ¿cuántos nos sobrarían? Pensando un rato te darás cuenta que sobran 2.

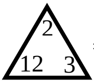
17.(B) Comencemos haciendo las operaciones de los triángulos pequeños:



$$= \frac{12+2\cdot 2}{12-2\cdot 2} = \frac{12+4}{12-4} = 2$$

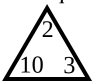


$$= \frac{11+3\cdot 3}{11-3\cdot 3} = \frac{11+9}{11-9} = 10$$



$$= \frac{12+2\cdot 3}{12-2\cdot 3} = \frac{12+6}{12-6} = 3$$

Así que el triángulo grande es:



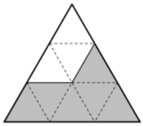
$$= \frac{10+2\cdot 3}{10-2\cdot 3} = 4.$$

18.(C) Vamos mirando todas las posibilidades tomando como primer sumando los números primos 2, 3, 5, 7, 11, etc.
40 = 2 + 38 = <u>3 + 37</u> = 5 + 35 = 7 + 33 = <u>11 + 29</u> = 13 + 27 = <u>17 + 23</u> = 19 + 21.
Hemos subrayado las sumas en las que ambos números son primos. Así pues, hay 3 posibilidades.

19.(C) Como la suma de los tres ángulos de un triángulo es 180º, veamos qué ángulos pertenecen a cada triángulo.
Primero observa que cualesquiera tres de esos números sumados no da 180º, luego dos ángulos son de un triángulo y los otros dos del otro.
Si 28º y 47º fueran ángulos del mismo triángulo, el tercer ángulo debería medir 180º – (28º + 47º) = 105º y no sería acutángulo. Lo mismo ocurre con 28º y 51º. Así que en un triángulo los ángulos son 28º, 73º y 180º – (28º + 73º)= 79º y en el otro son 47º, 51º, y 180º – (47º + 51º) = 82º.
La diferencia entre los ángulos que no midió es 82º – 79º = 3º.

20. (B) Como tres niños han leído un libro, cuatro niños han leído 2, dos niños han leído 3 y uno ha leído 4, en total le ha preguntado a diez niños y la media del número de libros leídos es: $\frac{3\cdot 1+4\cdot 2+2\cdot 3+1\cdot 4}{10} = 2{,}1.$

21.(E) Como entre los cuatro tienen 7 + 13 + 16 +14 = 50 papeletas, la probabilidad de que viaje alguno es $\frac{50}{500} = \frac{1}{10}$.



22.(B) Dividimos el triángulo grande en nueve triangulitos pequeños semejantes a él.
Como el lado del triángulo grande mide 360:3 = 120 mm, el lado de un triángulo pequeño mide 120:3 = 40 mm y el perímetro de la esfinge es $40 \cdot 8 = 320$ mm.

23.(C) Hay que tener cuidado en "deshacer" las cuentas en el orden correspondiente. Al resultado del paréntesis lo dividiré entre 4 y después lo multiplicaré por 2 y quiero que me dé 16. El número que dividido entre 4 y multiplicado por 2 da 16 es 32. Así que el resultado del paréntesis debe ser 32 y, por tanto, el número que se comió el Comenúmeros es (32 – 6) : 2 = 13.

24.(A) Si llamamos M al número de Marías que hay tenemos que:
El número de jubilados es $2M$
El número de mujeres es $2M$
El número de hombres es $2(2M) = 4M$
En total hay $2M + 4M = 6M$ miembros del comité organizador y $2M$ jubilados así que la proporción es 2/6 = 1/3.

25.(B) Como uno dice la verdad y el otro miente, está claro que Zipi miente y Zape dice la verdad. Luego buscamos un número par que no sea 4 y la única posibilidad es 2.

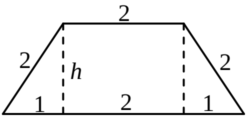
XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel III

1. (E) $2^4 \cdot 3^8 = n \cdot 6^4$, $2^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 = n \cdot 6^4$, $6^4 \cdot 3^4 = n \cdot 6^4$, $3^4 = n$; por lo tanto, $n = 81$.

2. (B) Altura del trapecio: $h = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$

Área del trapecio: $\frac{4+2}{2} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.



3. (C) $\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 = n^2 + \frac{1}{4} + n = n^2 + n + \frac{1}{4}$.

Es evidente que: $n^2 < n^2 + 1 \le n^2 + n < n^2 + n + \frac{1}{4} < n^2 + n + 1 < (n+1)^2$

Como $n^2 + n + \frac{1}{4} - (n^2 + n) = \frac{1}{4}$ es menor que $n^2 + n + 1 - \left(n^2 + n + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$, el número natural más cercano es $n^2 + n$.

4. (D) $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2013^2}\right) = \frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\frac{4^2-1}{4^2}\cdot\ldots\cdot\frac{2012^2-1}{2012^2}\cdot\frac{2013^2-1}{2013^2} =$

$= \frac{(2-1)\cdot(2+1)}{2\cdot 2}\cdot\frac{(3-1)\cdot(3+1)}{3\cdot 3}\cdot\frac{(4-1)\cdot(4+1)}{4\cdot 4}\cdot\ldots\cdot\frac{(2012-1)\cdot(2012+1)}{2012\cdot 2012}\cdot\frac{(2013-1)\cdot(2013+1)}{2013\cdot 2013}$

Observamos que el primer factor del numerador de cada fracción también es factor del denominador de la fracción anterior y que el segundo factor de dicho numerador también lo es del denominador de la fracción siguiente. Por lo tanto, al simplificar, resulta que la expresión anterior es igual a $\frac{1}{2}\cdot\frac{2014}{2013} = \frac{1007}{2013}$.

5. (D) 5 minutos $= 5 \cdot 60 = 300$ segundos.

En 300 segundos, Alicia hará $\frac{300}{30} = 10$ bizcochos e Isabel hará $\frac{300}{20} = 15$ bizcochos.

Entre las dos harán $10 + 15 = 25$ bizcochos.

6. (C) Llamemos $C_{i,j}$ a la celda determinada por la fila i y la columna j. A simple vista observamos que la celda $C_{1,1}$ sólo puede estar ocupada por la cifra 3.
Una vez colocada esta cifra en $C_{1,1}$, observamos que tanto en las 4 primeras columnas como en las 4 primeras filas está el 3, por lo tanto, esta cifra sólo puede ocupar la celda $C_{5,5}$; es decir $x = 3$.

	5	4		
1	3			
		5	3	
2		3	1	
				x

7. (C) Llamemos t al número total de canicas. Entonces, $\frac{3}{5}\cdot t$ son azules y $\frac{2}{5}\cdot t$ son rojas.

Si duplicamos el número de rojas, en la bolsa habrá $\frac{4}{5}\cdot t$ canicas rojas, dentro de

un total de $\frac{3}{5}\cdot t+\frac{4}{5}\cdot t=\frac{7}{5}\cdot t$. Por lo tanto, la fracción pedida es: $\dfrac{\frac{4}{5}\cdot t}{\frac{7}{5}\cdot t}=\frac{4}{7}$

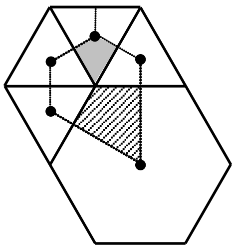
8. (D) $9{,}34\overset{\frown}{6}=\dfrac{934{,}\overset{\frown}{6}}{100}=\dfrac{\frac{9346-934}{9}}{100}=\dfrac{8412}{9\cdot 100}=\dfrac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 701}{3\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 25}=\dfrac{701}{3\cdot 25}$

Por lo tanto, el menor número natural que multiplicado por $9{,}34\overset{\frown}{6}$ da como resultado un entero es 3·25 = 75.

9. (A) Número de casos posibles: $\binom{10}{4}=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=210$.

Dentro de esas 210 posibilidades, Rubén aparecerá, con Puri o sin ella, $\binom{9}{3}=\dfrac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1}=84$ veces, y Puri, sin Rubén, lo hará $\binom{8}{3}=\dfrac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}=56$ veces.
Por lo tanto, la probabilidad que tiene Rubén de trabajar el domingo es $\dfrac{56+84}{210}=\dfrac{140}{210}=\dfrac{2}{3}$.

10. (C) Como los 4 triángulos adosados son equiláteros, y sus lados son iguales a los del hexágono, el área de cada uno de ellos es $\frac{1}{6}\cdot 72=12\ \text{cm}^2$.

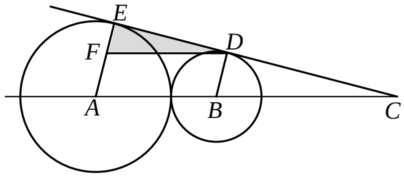


Área del cuadrilátero sombreado $=\frac{1}{3}\cdot 12=4\ \text{cm}^2$

Área del cuadrilátero rayado $= \frac{1}{6} \cdot 72 = 12\ \text{cm}^2$

Área del pentágono $= 4 \cdot 4 + 12 = 16 + 12 = 28\ \ \text{cm}^2$

11. (D) Trazamos *FD* paralela a *AB*, con lo que *AF* = 3, *FE* = 2 y *FD* = 8.
Como el triángulo sombreado *DEF* es semejante al triángulo *CEA*, se cumple que $\frac{EF}{EA} = \frac{FD}{AC} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{8}{AC} \Rightarrow AC = 20$
y $BC = 20 - 8 = 12$.

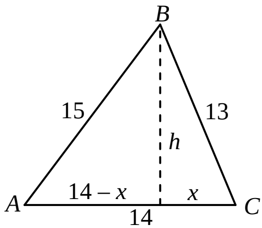


12. (D) $h^2 = 15^2 - (14 - x)^2 = 13^2 - x^2$

$15^2 - 14^2 - x^2 + 28x = 13^2 - x^2$

$28x = 13^2 + 14^2 - 15^2 \Rightarrow x = \frac{13^2 + 14^2 - 15^2}{28} = 5$

$h = \sqrt{13^2 - x^2} = \sqrt{169 - 25} = 12$



13. (E) Llamando *m*, *s*, *p* y *c* a lo que pesa, respectivamente, un mono, un oso, un puma y un ciervo, podemos escribir:
$9m = 4s$, $8s = 15p$, $10p = 27c$. Y a simple vista vemos que, si en vez de figurar 10*p* en el primer miembro de la tercera igualdad, figurase 30*p*, podríamos enlazar las igualdades así:
$3 \cdot 27c = 3 \cdot 10p = 2 \cdot 8s = 4 \cdot 9m = 36m$; pero si 36 monos pesan lo mismo que $3 \cdot 27$ ciervos, entonces 4 monos pesarán lo mismo que $\frac{3 \cdot 27}{9} = 9$ ciervos.

14. (D) Media aritmética = $\frac{x+6+4+1+9}{5} = \frac{x+20}{5} = \frac{x}{5} + \frac{20}{5} = \frac{x}{5} + 4$

Mediana: Ordenamos los números de menor a mayor (1, 4, 6, 9) y analizamos qué posición puede ocupar el número *x*.

x, 1, 4, 6, 9 : Me = 4; $\frac{x}{5} + 4 = 4$; $x = 0$

$1, x, 4, 6, 9$: Me = 4; $\frac{x}{5}+4=4$; $x=0$ (posición no válida ya que tendría que ser $1 \le x \le 4$).

$1, 4, x, 6, 9$: Me = x; $\frac{x}{5}+4=x$; $\frac{x}{5}-x=-4$; $-\frac{4}{5}x=-4$; $x=5$

$1, 4, 6, x, 9$: Me = 6; $\frac{x}{5}+4=6$; $x=10$ (posición no válida pues tendría que ser $6 \le x \le 9$).

$1, 4, 6, 9, x$: Me = 6; $\frac{x}{5}+4=6$; $x=10$

Luego para tres valores de x (0, 5 y 10) se cumple la condición del enunciado.

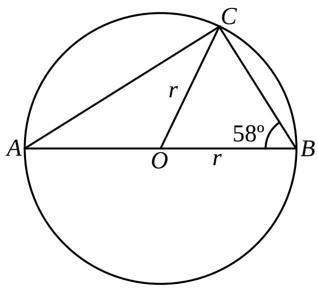
15. (D) En la figura se observa que:

$O\hat{C}A = A\hat{C}B - O\hat{C}B$

$A\hat{C}B = \frac{180^o}{2} = 90^o$ (es un ángulo inscrito que abarca media circunferencia).

$O\hat{C}B = 58^o$, pues el triángulo OBC es isósceles.

Luego, $O\hat{C}A = 90^o - 58^o = 32^o$.



16. (B) Llamemos x al número de chicos e y al número de chicas que había en 3º ESO.

Chicos que aprobaron $=\frac{2}{3}x$; chicas que aprobaron $=\frac{75}{100}y$.

De acuerdo con el enunciado: $\frac{2}{3}x=\frac{75}{100}y \Rightarrow \frac{2}{3}x=\frac{3}{4}y$; $y=\frac{2}{3}x\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{9}x$

Estudiantes que aprobaron (como fracción del total):

$$\frac{\frac{2}{3}x+\frac{75}{100}y}{x+y}=\frac{\frac{2}{3}x\cdot 2}{x+\frac{8}{9}x}=\frac{\frac{4}{3}x}{\frac{17}{9}x}=\frac{4}{3}:\frac{17}{9}=\frac{12}{17}.$$

17. (D) Llamemos *x* e *y* a los dos números. Según el enunciado:

$$\left.\begin{array}{l}\text{(I)} \quad x \cdot y = 9 \\ \text{(II)} \ \dfrac{1}{x} = 4 \cdot \dfrac{1}{y}\end{array}\right\}$$ De (II): $x = \dfrac{y}{4}$. Sustituyendo en (I) tenemos:

$\dfrac{y}{4} \cdot y = 9;\ y^2 = 36;\ y = 6$ (en el enunciado se dice que son números positivos).

$x = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$. La suma es: $x + y = \dfrac{3}{2} + 6 = \dfrac{15}{2}$.

18. (A) Analicemos las distintas opciones que se dan como posible valor de la cifra *d*.
No puede ser 3 pues la suma de las cifras sería 30 y por tanto el número sería divisible por 3; no puede ser 5 pues entonces el número sería múltiplo de 5; no puede ser 7 pues la división del número entre 197 es exacta; tampoco puede ser 9 pues la suma de las cifras sería 36 y el número sería divisible por 9.
Luego *d* es 1.

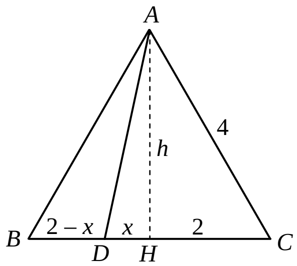
19. (D) La altura *AH* del triángulo *ABC* es $h = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}$.

Área de *BDA* = $S_1 = \dfrac{(2-x)\cdot h}{2}$

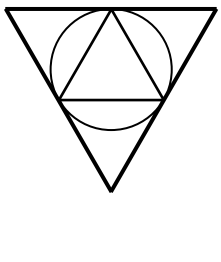
Área de *CDA* = $S_2 = \dfrac{(2+x)\cdot h}{2}$

$S_1 \cdot S_2 = \dfrac{(2-x)\cdot(2+x)\cdot h^2}{4} = \dfrac{(4-x^2)\cdot h^2}{4}$

El mayor valor de este producto se alcanza cuando $x = 0$ y es $S_1 \cdot S_2 = \dfrac{4\cdot\left(\sqrt{12}\right)^2}{4} = 12$.



20. (E) En la figura observamos que el triángulo final está formado por el triángulo inicial y otros tres iguales a éste, luego su área es 4*A*.

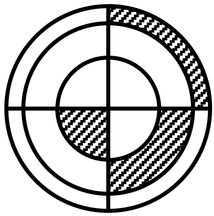


21. (A) Llamemos r_1, r_2 y r_3 a los radios (en orden de menor a mayor) de las tres circunferencias.

Áreas de las zonas sombreadas:

$$A_1 = \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = \frac{\pi}{4},\ A_2 = \frac{\pi \cdot r_2^2}{4} - \frac{\pi}{4},\ A_3 = \frac{\pi \cdot r_3^2}{4} - \frac{\pi \cdot r_2^2}{4}$$

En el enunciado se dice que las tres figuras sombreadas tienen la misma área, o sea $A_1 = A_2 = A_3$.



De $A_2 = A_1 \Rightarrow \frac{\pi \cdot r_2^2}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow r_2^2 = 2;\ r_2 = \sqrt{2}$

De $A_3 = A_1 \Rightarrow \frac{\pi \cdot r_3^2}{4} - \frac{\pi \cdot 2}{4} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow r_3^2 = 3;\ r_3 = \sqrt{3}$

Luego: $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$.

22. (C) En una división el resto ha de ser menor que el divisor. Como se pide el mayor resto posible, vamos a comenzar probando con el mayor divisor posible: 9+9 = 18.
Haciendo la división de 99 entre 18 se obtiene de resto 9.
El siguiente mayor divisor sería 17 (= 9+8 = 8+9); haciendo las divisiones de 98 y 89 entre 17 obtenemos de resto 13 y 4, respectivamente.
El siguiente mayor divisor sería 16 (= 9+7 = 8+8 = 7+9); haciendo las divisiones de 97, 88 y 79 entre 16 se obtiene como restos 1, 8 y 15.
Llegado a este punto no es necesario seguir probando: el mayor resto posible es 15; la razón es que el siguiente mayor divisor sería el 15, luego el resto de las correspondientes divisiones sería menor que 15.

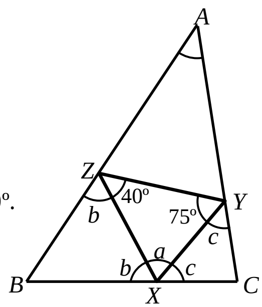
23. (A) De acuerdo con la figura podemos escribir:

$a = 180º - (40º + 75º) = 65º$

$b + 65º + c = 180º;\ b + c = 115º$

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180º;\ \hat{A} + 180º - 2b + 180º - 2c = 180º;$

$\hat{A} = 2b + 2c - 180º = 2(b + c) - 180º = 2 \cdot 115º - 180º = 50º.$



24. (B) Llamando *N* al número de estudiantes en el año 2010, podemos escribir:

$$\left.\begin{array}{l} N = x^2 \\ N + 100 = y^2 + 1 \\ N + 200 = z^2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \text{(I)}\ \ x^2 + 100 = y^2 + 1 \\ \text{(II)}\ x^2 + 200 = z^2 \end{array}\right\} \text{(II)} - \text{(I)}:\ \ 100 = z^2 - y^2 - 1$$

$$101 = z^2 - y^2;\ (z+y)\cdot(z-y) = 101 = 1\cdot 101 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z + y = 101 \\ z - y = \ \ 1 \end{array}\right. \left\{ 2z = 102;\ z = 51 \right.$$

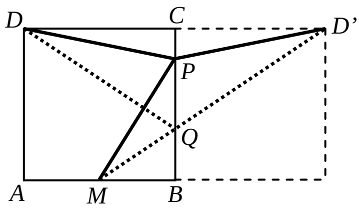
Sustituyendo en (II): $x^2 + 200 = 51^2;\ x^2 = 51^2 - 200 = 2\,401$

Luego $N = 2401$.

Este número no es múltiplo de 3 (ni por tanto de 9), ni de 11, ni de 17 (la división de 2401 entre 17 no es exacta). Es múltiplo de 7.

25. (A) Si consideramos el punto *D'*, simétrico de *D* respecto de la recta *BC*, tendremos que *DP* + *PM* = *D'P* + *PM* >*D'M* para cualquier punto *P* del segmento *BC*.

Por lo tanto la mínima suma de distancias será la que se obtiene con el punto *Q* y con el que *DQ* + *QM* = *D'M* $= \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$



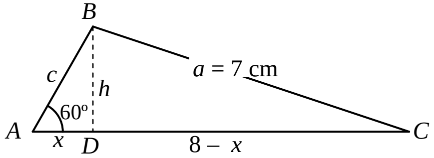
XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel IV

1. (C) La solución es *c*, ya que se trata del número al que hay que restar mayor valor para que sea igual que los demás.

2. (C) Despejamos n en la primera igualdad, $2m - n = 3 \Rightarrow n = 2m - 3$. Sustituimos en la segunda igualdad: $m - 2(2m-3) = 3m + 6 = 3(m+2) = \dot{3}$.

3. (C) Aplicando Pitágoras en los triángulos rectángulos *ADB* y *CDB* obtenemos:



$$\begin{cases} c^2 = h^2 + x^2 \\ 7^2 = (8-x)^2 + h^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h^2 = c^2 - x^2 \\ h^2 = -x^2 + 16x - 15 \end{cases} \Rightarrow c = \sqrt{16x - 15}$$

Por otro lado $\cos 60º = \dfrac{x}{c} \Rightarrow x = \dfrac{c}{2}$ y sustituyendo en la relación anterior se obtiene $c = \sqrt{16 \cdot \dfrac{c}{2} - 15} \Rightarrow c^2 = 8c - 15 \Rightarrow c = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-60}}{2} = \dfrac{8 \pm 2}{2} = \begin{cases} c = 5 \\ c = 3 \end{cases}$.

Como el triángulo es obtusángulo, $b^2 > a^2 + c^2$ es decir, $c^2 < 64 - 49 = 15$. Por lo tanto el valor de *c* ha de ser 3.

Otro método.-

Por el teorema de los senos en el triángulo *ABC*,

$$\frac{7}{sen 60º} = \frac{8}{sen\hat{B}} \Rightarrow sen\hat{B} = \frac{8}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$ y como $\hat{B} > 90º$, $\cos\hat{B} = -\sqrt{1 - \left(\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\right)^2} = -\dfrac{1}{7}$.

$$\cos\hat{C} = \cos\left(180º - 60º - \hat{B}\right) = \cos 120º \cdot \cos\hat{B} + sen 120º \cdot sen\hat{B} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$$

Obtenemos que $\cos\hat{C} = \frac{13}{14}$. Por el teorema del coseno en el triángulo *ABC*, $c^2 = 8^2 + 7^2 - 2\cdot 8\cdot 7\cdot\frac{13}{14} = 9 \Rightarrow c = 3.$

4. (A) La suma pedida corresponde a hacer

$$S_{19} - \left(2^3 + 4^3 + ... + 18^3\right) = \frac{19^2\cdot 20^2}{4} - 2^3\left(1^3 + 2^3 + .. + 9^3\right) = 36100 - 8\frac{9^2\cdot 10^2}{4} =$$

$$= 36100 - 16\,200 = 19\,900.$$

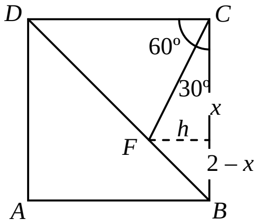
5. (D) Todos los números de cinco cifras son mayores que 5000, y son 5! = 120.
Los de cuatro cifras deben empezar por 5,6 ó 7, la siguiente cifra puede ser cualquiera de las cuatro restantes, etc., en total, 3·4·3·2 = 72.
En total habrá 120 + 72 = 192 números mayores que 5000 con las condiciones exigidas.

6. (C) La altura del triángulo *FBC*, h, cumple:

$$tg30^o = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x\cdot tg30^o$$

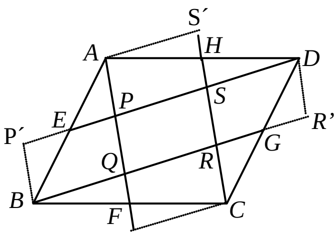
$$2 - x = h \Rightarrow h = (2-h)tg30^o \Rightarrow h = \frac{2tg30^o}{1 + tg30^o} = \frac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$$

$$A = \frac{2\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\left(3-\sqrt{3}\right)}{9-3} = \frac{6\sqrt{3}-6}{6} = \sqrt{3} - 1$$



7. (B) Como solo uno de ellos dice la verdad, dado que todas las respuestas son diferentes, solamente ha podido hacer los deberes uno de ellos. No es posible que ninguno haya hecho los deberes ya que en este caso Emilio no habría dicho ninguno. El único que hizo los deberes fue Eligio.

8. (E) Completando la figura con los triángulos *AHS'*, *BEP'*, *CFQ'* y *DGR'*, observamos que el paralelogramo *ABCD* tiene un área que equivale a cinco paralelogramos como el *PQRS*. Luego el cociente pedido es 5.



9. (C) Para numerar las páginas de un libro con un número, *k*, de páginas de dos cifras se necesitan 9 + 2(*k* – 9) dígitos, con $k \in \mathrm{N}; 10 \le k \le 98$, que como mucho es 187.

Revisamos, de entre las soluciones propuestas, la que es menor que 187 para ver si verifica la expresión anterior.

$31 = 9 + 2(k - 9) \Rightarrow k = 20 \in \mathrm{N}$. Número entero y par de páginas.

Si el número de páginas, *k*, es de tres cifras se necesitan 187 + 2 + 3(*k* – 99) dígitos, con $k \in \mathrm{N}; 100 \le k \le 998$.

Comprobamos las otras posibles respuestas.

$543 = 189 + 3(k - 99) \Rightarrow k = 217 \in \mathrm{N}$

$2012 = 189 + 3(k - 99) \Rightarrow k = \dfrac{2120}{3} \notin \mathrm{N}$

$2013 = 189 + 3(k - 99) \Rightarrow k = 707 \in \mathrm{N}$

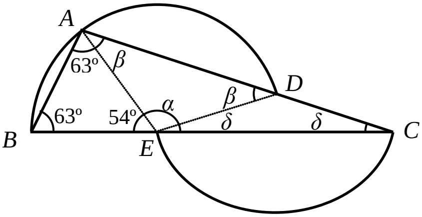
$2016 = 189 + 3(k - 99) \Rightarrow k = 708 \in \mathrm{N}$

Conviene hacer una observación en este problema. El número de páginas de un libro siempre es par, pues cada hoja tiene anverso y reverso. Por lo tanto las respuestas B y D tampoco serían posibles, pero ese detalle se nos escapó en la propuesta de respuestas.

10.(B) Los triángulos *ABE***,** *ADE* y *ECD* son isósceles y se cumple

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 180º \\ \beta = 2\delta \\ \alpha + 54º + \delta = 180º \Rightarrow \alpha = 126º - \delta \end{cases}$$

$$\Rightarrow 126º - \delta + 4\delta = 180º \Rightarrow \delta = \hat{C} = 18º$$

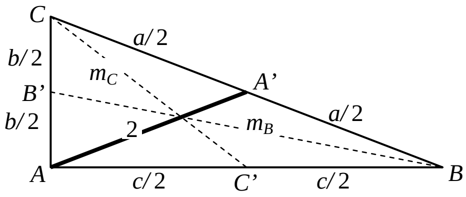


11.(E) Desde que dice un número Maite hasta que la vuelve a tocar decir el siguiente número, se dicen 8 números consecutivos y como 2013 = 251·8+5, se dan 251 vueltas completas de Maite a Maite, y sobran 5, que corresponde a José.

12.(B) Si el número de ovejas es *o,* y el número de gallinas *g* $\Rightarrow l = \dfrac{4 \cdot o + 2 \cdot g}{o + g}$

$$l = \frac{4o + 2g}{o + g} \Rightarrow ol + og = 4o + 2g \Rightarrow o(l - 4) = g(2 - l) \Rightarrow \frac{o}{g} = \frac{2 - l}{l - 4} = \frac{l - 2}{4 - l} .$$

13.(D) Queremos calcular el valor de $(m_B)^2 + (m_C)^2$, sabiendo que $m_A = 2$



En el triángulo rectángulo $AA'C'$ se tiene que $2^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = 16$

En el triángulo rectángulo ACC' se tiene que $m_C{}^2 = b^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$

En el triángulo rectángulo ABB' se tiene que $m_B{}^2 = c^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$

Sumando estas dos últimas expresiones $m_B{}^2 + m_C{}^2 = \frac{5}{4}\left(b^2 + c^2\right) = \frac{5}{4} \cdot 16 = 20$.

14.(C) Utilizamos las dos condiciones primeras ***N*** **=** $5k + 2$, pero además
$N = 7k' + 3 \Rightarrow (5+2)k' + 3 = 5k' + 2k' + 3$, luego $3 + 2k' = 5q + 2 \Rightarrow 5q = 2k' + 1$.

Probando los valores de k' convenientes, se obtiene: $\begin{cases} k' = 2 \Rightarrow N = 17 \neq \dot{9} + 4 \\ k' = 7 \Rightarrow N = 52 \neq \dot{9} + 4 \\ k' = 12 \Rightarrow N = 87 \neq \dot{9} + 4 \\ k' = 17 \Rightarrow N = 122 \neq \dot{9} + 4 \\ k' = 22 \Rightarrow N = 157 = \dot{9} + 4 \end{cases}$

Luego el número pedido es 157 y la suma de sus cifras es 13.

Otro método.- Sea N el número buscado, entonces $N = 5a + 2$. Si sumamos a ambos miembros un múltiplo de 7 que sea múltiplo de 5 más 1, como el 21, tendremos:
$N = 7b + 3 \Rightarrow N + 21 = 7(b + 3) + 3 = 5(a + 4) + 3$.
Como $N = 9c + 4 \Rightarrow N + 21 = 9(c + 2) + 7$.
Sumando a ambos miembros un múltiplo de 5 y 7, que sea múltiplo de 9 menos 4, (sus cifras deberán sumar 5 o múltiplo de 9 más 5), como 35·4 = 140 = 9·16 – 4, resulta que,

N + 21 + 140 = 9(c + 2 + 16) – 4 + 7 = 9(18 + c) + 3, es decir, N + 161 – 3 es múltiplo de 5, 7 y 9. El menor de ellos es el mcm(5, 7, 9) = 315, por lo tanto,
$N + 158 = 315 \Rightarrow N = 157$.

15.(B) Si dividimos n^2 + 4 entre n + 3 obtenemos: $n^2+4=(n+3)(n-3)+13$. Por el algoritmo de Euclides, el MCD(n^2 + 4, n + 3) divide al resto de dicha división, y como n^2 + 4 y n + 3, no so primos entre sí quiere decir que su máximo común divisor no es 1, luego tiene que ser 13.

16.(D) Si $f(x)=a|x+b|+cx+d=\begin{cases}-ax-ab+cx+d, x\le b\\ ax+ab+cx+d, x>b\end{cases}=\begin{cases}2x+5, x\le 3\\ 4x-1, x>3\end{cases}$, por tanto

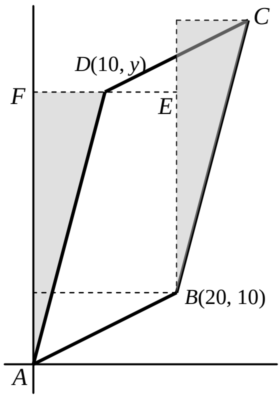
$\begin{cases}-ab+d=5\\ ab+d=-1\end{cases}\Rightarrow 2d=4\Rightarrow d=2$.

17.(D) Observamos en ambas funciones los valores que se obtienen para, 101, 102, etc. $y_1(101)=\frac{1}{3}\cdot 101+0{,}1=33.7\overset{\frown}{6}$; $y_2(101)=\frac{1}{3}\cdot 101+0.6=34.2\overset{\frown}{6}$, luego para el valor x = 101 hay un punto reticular. Probamos con 102: $y_1(102)=34.1; y_2(102)=34.6$, luego no existe punto reticular para x = 102. $y_1(103)=34.4\overset{\frown}{3}; y_2(103)=34.9\overset{\frown}{3}$, que tampoco contiene ningún punto reticular, pero al hacer $y_1(104)=34.7\overset{\frown}{6}$; $y_2(104)=35.2\overset{\frown}{6}$ observamos, no solo que contiene un punto reticular, sino que además la estructura comienza a repetirse, luego para los valores de x de la forma $x=3k+2$, se cumple que existe un punto reticular.
Entre x = 100 y x = 300 hay 67 números que sean múltiplos de 3 más dos, que corresponden a los 67 puntos reticulares.

18.(D) El área pedida es equivalente al área del trapecio $ABEF$ (véase la figura). Por lo tanto,

$$S=(y-10)\cdot 20+\frac{10\cdot 20}{2}=(y-10)\cdot 20+100=600$$

$$(y-10)\cdot 20=500\Rightarrow y=35$$



19.(D) Hallamos $\left(\log_x y + \log_y x\right)^2 = \left(\log_x y\right)^2 + \left(\log_y x\right)^2 + 2\left(\log_x y\right)\left(\log_y x\right) \Rightarrow$

$\left(\log_x y\right)^2 + \left(\log_y x\right)^2 = \left(\log_x y + \log_y x\right)^2 - 2\left(\log_x y\right)\left(\log_y x\right) = 7^2 - 2\cdot 1 = 47$

20.(E) Hallamos el punto de corte de las gráficas resolviendo el sistema $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = mx + 3 \end{cases}$

$x - 2 = mx + 3 \Rightarrow x(1-m) = 5 \Rightarrow x = \dfrac{5}{1-m}$, $y = \dfrac{5}{1-m} - 2 = \dfrac{2m+3}{1-m}$.

Como las coordenadas han de ser positivas, $x = \dfrac{5}{1-m} > 0 \Rightarrow m < 1$ pero además $y = \dfrac{2m+3}{1-m} > 0$ Como $1 - m > 0$ debe verificarse que $2m + 3 > 0 \Rightarrow m > -\dfrac{3}{2}$

Por tanto debe cumplirse que $-\dfrac{3}{2} < m < 1$.

21.(D) Los números N que dividen a $2^{1650} - 1$ tienen que ser de la forma $2^k - 1$ siendo k un divisor de 1650, ya que si $1650 = ak$ entonces $2^{1650} - 1 = 2^{ak} - 1 = \left(2^k\right)^a - 1$ que es divisible entre $2^k - 1$. También pueden ser de la forma $2^k + 1$ si $2k$ es un divisor de 1650 ya que si $1650 = 2bk$ entonces $2^{1650} - 1 = 2^{2bk} - 1 = \left(2^k\right)^{2b} - 1$ que es divisible entre $2^k + 1$.
Como $3 = 2^2 - 1$, $7 = 2^3 - 1$, $31 = 2^5 - 1$ y $2047 = 2^{11} - 1$, todos ellos son divisores de $2^{1650} - 1$ puesto que 2, 3, 5 y 11 son divisores de 1650. Pero $127 = 2^7 - 1$ no es un divisor de $2^{1650} - 1$ puesto que 7 no es un divisor de 1650.

22.(C) Si sen15º y cos15º son raíces de la ecuación dada, se cumple:

$$b = sen15º\cos 15º = \frac{1}{2} sen30º = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow b^2 = \frac{1}{16}$$

$$a = -\left(sen15º + \cos 15º\right) \Rightarrow a^2 = sen^2 15º + 2sen15º\cos 15º + \cos^2 15º = 1 + sen30º = \frac{3}{2}$$

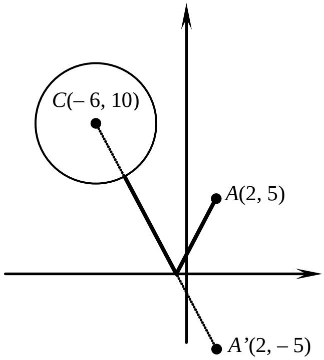
Hallamos $a^4 - b^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{9}{4} - \dfrac{1}{16} = \dfrac{35}{16}$.

23.(E) Como 342 es múltiplo de 9 $\Rightarrow$ (1 + 9 + b + 2) tiene que ser múltiplo de 9 $\Rightarrow$ b = 6. En este caso 100900602 es múltiplo de 11 y como 342 no lo es, tendrá que serlo 29a031. Pero esto ocurre cuando 1 + 0 + 9 = 3 + a + 2 $\Rightarrow$ a = 5.
Por lo tanto $a + b = 11$.

24.(C) El camino más corto es el que corresponde a la dirección que tendría un rayo que partiendo del centro de la circunferencia se reflejara en el eje de abscisas y pasara por A. Esta distancia sería la misma que la distancia al punto $A'(2, -5)$ simétrico de A respecto del eje de abscisas.

$$d(C, A') = \sqrt{(2+6)^2 + (-5-10)^2} =$$
$$= \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17$$

Como esta distancia es 17, la distancia más corta desde el punto A al punto más cercano de la circunferencia será 17 – 4 = 13, dado que el radio de la circunferencia es 4.



25.(D) Este ejercicio se resuelve aplicando la fórmula del seno del ángulo doble: $sen(2\alpha) = 2 sen\alpha \cdot \cos\alpha \Rightarrow sen\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2} sen(2\alpha)$. Así:

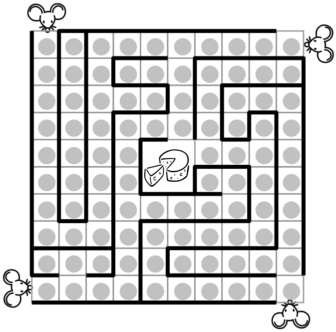
$$sen\frac{\pi}{32}\cdot\cos\frac{\pi}{32}\cdot\cos\frac{\pi}{16}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} sen\frac{\pi}{16}\cdot\cos\frac{\pi}{16}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{4} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} sen\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} sen\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} sen\frac{\pi}{2} = \frac{1}{16}$$

XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel I

1. (E) Primero, calculamos el número de libros que tienen Daniel y Alberto juntos.
56 + 28 = 84 libros tienen entre los dos.
Después, hallamos el número de libros que tienen que tener cada uno.
84: 2 = 42 libros tienen que tener cada uno.
Por último, calculamos el número de libros que tiene que dar Daniel a Alberto.
56 – 42 = 14 libros.

2. (B) Para facilitar el desarrollo nombramos a los ratones con las letras: a, b, c, y d, comenzando por el que está en el vértice superior izquierdo, "a", y seguimos la dirección de las agujas del reloj; a continuación, contamos el número de pasos (puntos más uno) que cada ratón emplea para llegar al queso.
El primero en llegar, es el ratón "b" con 9 "pasos" y el último el ratón "a" con 24 "pasos".
Si con 9 "pasos" tarda 15 segundos, con 24 "pasos" tardará: $(15 \times 24): 9 = 40$ segundos.



3. (C) Evidentemente hay dos formas de tener cero perlas en una caja y tres en la otra. También es inmediato ver que hay tres formas de tener una perla en la caja blanca y dos en la negra y, simétricamente, otras tres si intercambiamos las cajas. Con esto tenemos todas las posibles formas de colocar las tres perlas, esto es, 0, 1, 2 o 3 perlas en cada caja. Por lo tanto Ana tiene en total ocho formas de guardar las perlas.
En la tabla se pueden apreciar las ocho posibles formas de colocar las tres perlas en las dos cajas.

CAJA B	R, V, A	-	R	V	A	V, A	R, A	R, V
CAJA N	-	R, V, A	V, A	R, A	R, V	R	V	A

4. (E) El número de garbanzos que colocan los amigos de forma consecutiva es un número impar; por tanto, se trata de hallar el trigésimo número impar.
$30 \times 2 = 60$
$60 – 1 = 59$

5. (A) Siguiendo los pasos del producto “AL” por “AL”, observamos que:
- Para que el producto de “L” por “L” se obtenga “L”, la única cifra que corresponde a “L” es 5.
- Para que el producto “L” por “A” se obtenga “A”, la cifra que corresponde a “A” es necesariamente 2.
- Conociendo los valores de “L” y “A”, las cifras correspondientes a las restantes letras se obtiene realizando el producto 25 × 25.

$$\begin{array}{rrr} & 2 & 5 \\ \times & 2 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ 5 & 0 & \\ \hline 6 & 2 & 5 \end{array}$$

Con lo que a la letra “T” le corresponde la cifra 6.

6. (D) 1 hora y media = 90 minutos.
En 8 minutos le ha dicho 1000 veces que “haga su cama”.
En un minuto la ha dicho: 1000: 8 = 125 veces.
En 90 minutos lo ha dicho: 125 × 90 = 11 250 veces.

7. (B) La diferencia de dos números consecutivos (par e impar) es siempre 1.
La diferencia de la suma de los 10 primeros números pares y la suma de los 10 números impares es 10.
Comprobación:
Suma de los 10 primeros números pares:
2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 = 110.
Suma de los 10 primeros números impares:
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 1000
110 – 100 = 10

8. (A) En esta progresión, cada término es doble del anterior.

Día 1 → 10 m
Día 2 → 20 m
Día 3 → 40 m
Día 4 → 80 m
Día 5 → 160 m
Día 6 → 320 m
Día 7 → 640 m
Día 8 → 1280 m = 1,28 km
Día 9 → 2560 m = 2,56 km
Día 10 → 5120 m = 5,12 km
Día 11 → 10240 m = 10,24 km
Día 12 → 20480 m = 20,48 km
Día 13 → 40 960 m = 40,960 km

Como 39 km es menor que 40,960, tendrá que entrenar 13 días.

9. (A) Los únicos números capicúas de cuatro cifras que cumplen las condiciones del problema son estos cuatro: 1221-2442-3663-4884.

10. (D) En esta secuencia los sucesivos términos se dividen entre la sucesión de números a partir del 2.
La serie sigue esta secuencia.
3600: 2 = 1800;   1800: 3 = 600; 600: 4 = 150; 150: 5 = 30

11. (D) En la fila superior, siguiendo las instrucciones, tenemos:
En la tercera columna la vocal, O. En la esquina de la izquierda, la P de PISO. La P no se ha movido.

P	T	O

La tercera vocal de la tercera fila tiene que ser la I y, en consecuencia, la columna completa queda:

P	T	O
		A
		I

Como debajo de una de las A hay una S, tenemos:
Donde la A no se ha movido.

P	T	O
A		A
S		I

La G central se ha movido necesariamente, por tanto tenemos finalmente:

P	T	O
A	R	A
S	G	I

12.(E) Los triángulos ocupan 1/4 del rectángulo y la tira sobre la que están apoyados 1/2:
1/4 + 1/2 = 3/4

13.(D) Área del cuadrado inicial: $6 \times 6 = 36$ m^2
Longitud de un lado del rectángulo que se obtenga: 6 cm – 2 cm =   4 cm.
Área del rectángulo: 36 m^2 = $4 \times l \rightarrow l = 36 : 4 = 9$ cm
Los lados del rectángulo de igual área que el cuadrado inicial miden: 4 m y 9 m.
9 m actuales – 6 m iniciales = 3 m.

14.(D) Área del cuadrado: $2 \times 2 = 4$ cm^2
4 cm^2 = 400 mm^2
400 mm^2: 5 mm^2 = 80 granos

15.(D) 3/3 – 2/3 = 1/3 de tarta deja Glotón.
$1/2 \times 1/3 = 1/6$ de tarta comió Listín.
2/3 + 1/6 = 5/6 de tarta comieron Glotón y Listín
6/6 – 5/6 = 1/6 de tarta queda para Buenazo, Tranquilo y Tontín,
1/6: 3 = 1/18 de tarta comió Tontín

16.(E) Analizando la figura se puede comprobar que la longitud del lado del mayor de un rectángulo pequeño es igual a 2,5 veces la longitud del lado menor.
Si designamos "x" a la longitud del lado menor de un rectangulillo el perímetro del rectángulo mayor es 17; por tanto, $17x = 68$ cm, de donde se deduce que el lado menor de un rectangulillo mide 4 cm
El lado mayor medirá: $4 \times 2,5 = 10$ cm.
Perímetro de un rectangulillo: $2 \times (4\text{ cm} + 10\text{ cm}) = 28$ cm.

17.(D) $25 – 3 = 22$ alumnos tocan algún instrumento.
15 que tocan en guitarra + 11 que tocan la flauta = 26.
$26 – 22 = 4$ alumnos tocan los dos instrumentos.

18.(B) Si designamos con "x" las monedas que tiene Lucas se obtiene esta expresión:
$x + x + x/2 + x/4 = 11x/4$
El único número múltiplo de 3 y de 11 menor que 50 es 33.
$11x/4 = 33 \rightarrow x = 12$

19.(B) Alfredo coloreó 1/2; Merche, 13/16 y Luis 9/12
Reducimos las fracciones a común denominador:
$1/2,\ 13/16,\ 9/12 \rightarrow 24/48,\ 39/48,\ 36/48$
Ordenamos las fracciones de menor a mayor.
$24/48 < 36/48 < 39/48 \rightarrow 1/2 < 9/12 < 13/16$

20.(A) Los triángulos *ABC* y *ABD* tienen la misma altura. Por tanto si la base del triángulo *ABC* es 15 cm y su área 30 cm^2, el área del triángulo *ABD* de 9 cm de base es 18 cm^2.
También podemos calcular el resultado de esta otra forma:
$\text{Área}(ABC) = (b \times h)/2 \rightarrow 30 = (15 \times h)/2 \rightarrow h = 4$ cm
$\text{Área}(ABD) = (9 \times 4)/2 = 18$ cm^2

21.(A) Los resultados de cada secuencia son:
$A = [(9 + 7 – 4): 2] \times 6 = 36$
$B = [(9 – 3 + 2): 4)] \times 8 = 16$
$C = [(9 + 8) \times 4]: 2 + 3 – 6 = 31$
$D = 9 + 8 + 7 – 4 – 1 + 2 – 5 + 6 = 22$
$E = [(9 \times 1) + 2 + 3]: 7 – 4$

22.(E) Por eliminación de respuestas dadas. La única que cumple, con los datos dados es la E.

23.(A) Colocando en vertical las cifras conocidas y no conocidas de la suma, se facilita la resolución del problema.

	2	3	0	3	
		5	2	9	8
3	4	4	2		
3	7	2	5,	2	8

$0 + 9 + 4 = 13$.

24.(C) Se halla el mínimo común múltiplo de 12, 8 y 15
$12 = 2^2 \times 3$
$9 = 3^2$
$15 = 3 \times 5$
$\text{MCM}(12, 9, 15) = 2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$

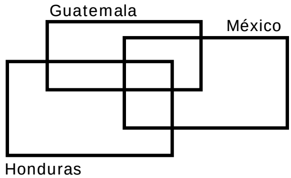
25.(D) Don Retorcido nació entre el año 1600 y 1699.
Para que quede un número cuadrado al eliminar la cifra de las unidades, la cifra de las decenas tiene que ser un 9, ya que 169 es el único cuadrado perfecto comprendido entre 160 y 169
Por tanto Don Retorcido habrá nacido entre el año 1690 y 1699.
Como la cifra de las unidades es una unidad menor que la de las decenas entonces su año de nacimiento es 1698.
La suma de las cifras de su año de nacimiento es:
$1698 \rightarrow 1 + 6 + 9 + 8 = 24$

XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

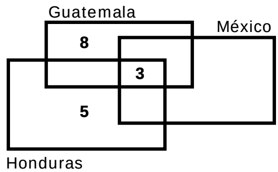
Soluciones 2ª Fase Nivel II

1. (A) El mayor número de cuatro cifras diferentes, todas pares, es el 8642 y el menor número de cuatro cifras diferentes, todas impares es el 1357. Su diferencia es 7285.

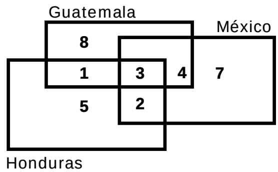
2. (B) Podemos resolver este problema usando unos diagramas que representen a cada país visitado.



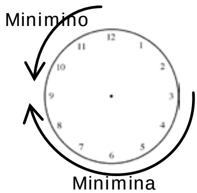
Los primeros datos que podemos colocar son los que corresponden a los 5 que tienen únicamente el sello de Honduras; 8 que tienen sólo el sello de Guatemala y 3 que tienen los tres sellos.



Los demás datos hay que ir colocándolos haciendo unas sencillas cuentas. Así, el dato de que hay 5 pasaportes que tienen el sello de México y Honduras, se plasma en el diagrama poniendo un 2 en la región que hay debajo de la que tienen los tres sellos. Y así, con cautela, se completa el diagrama. Hay siete personas que viajaron únicamente a México.



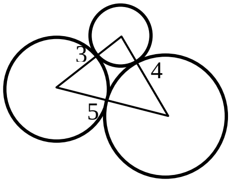
3. (D) Los diminutos estaban separados por 9 horas y se observa que Minimina recorre 6 horas y Minimino la mitad, 3 horas. Así que ahora que están separados por 12 horas, Minimina recorrerá 8 horas y Minimino 4 horas. Se encontrarán de nuevo en la marca de las 5 horas.



4. (C) Como la hermana mediana tiene 5 años y es la única con edad impar, las tres primeras hermanas tienen edades 2, 4 y 5, que suman 11 años. Como la suma de todas ha de ser 25, las dos mayores suman 14 y por tanto sus edades son 6 y 8. La correspondencia es Ana (2), Carlota (4), Emilia (5), Berta (6) y Daniela (8).

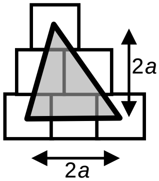
5. (A) Números repes con periodos de una cifra que se repite hay nueve (desde el 1 hasta el 9). Si el periodo está formado por dos cifras que se repiten, encontramos 81 (desde el 10 hasta el 99 pero hay que descartar los nueve que tienen periodo 11, 22, 33..., porque ya están contados). Y con periodo de tres cifras hay 891 (desde el 100 hasta el 999, pero hay que descartar de nuevo los nueve de 111, 222,...).
En total hay 981 (9 + 81 + 891).

6. (A) El triángulo que se forma al unir los centros tiene lados que miden 3, 4 y 5... ¿os suenan estas medidas?
En efecto, 3, 4, 5 son la terna pitagórica más sencilla ($3^2 + 4^2 = 5^2$), por tanto dicho triángulo es rectángulo y su área es la mitad del producto de los catetos, $\frac{3·4}{2} = 6$.



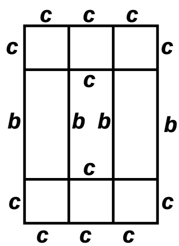
7. (D) Pues empecemos a calcular:
A) $R^E + T^O - R^C + I^D - O = 2^1 + 2^1 - 2^2 + 1^2 - 1 = 2 + 2 - 4 + 1 - 1 = 0$
B) $(R - E)^T + (O - R) \times (C - I) + D - O = (2 - 1)^2 + (1 - 2)·(2 - 1) + 2 - 1 = 1$
C) $R + E - T + O - R + C - I + D - O = 2 + 1 - 2 + 1 - 2 + 2 - 1 + 2 - 1 = 2$
D) $R : E + T : O + R : C - I - D + O = 2 : 1 + 2 : 1 + 2 : 2 - 1 - 2 + 1 = 3$
E) $R \times E + T \times O + R - C - (I + D) : O = 2·1 + 2·1 + 2 - 2 - (1 + 2) : 1 = 1$
El mayor valor es el D.

8. (A) Si llamamos a al lado del cuadrado vemos que la base y la altura del triángulo miden ambos $2a$. Como su área son 24 cm^2, tenemos que $\frac{2a·2a}{2} = 24$, es decir, $a^2 = 12$.
Se acabó, el área de cada cuadrado son 12 cm^2.



9. (B) Con las cifras que tenemos (7 - 7- 7 - 6 - 5 - 4) solo hay dos maneras de conseguir dos ángulos que difieran en 20º.
Primera forma: 47º y 67º, con lo que el tercer ángulo debe medir 180º – 47º – 67º = 66º, que no se ajusta a los datos del problema.
Segunda forma: 57º y 77º, y el tercer ángulo será 180º – 57º – 77º = 46º, que sí satisface las condiciones del enunciado. El ángulo menor mide 46º.

10.(D) El perímetro exterior mide $10c + 2b$ y el rectángulo central $2c + 2b$. La diferencia son $8c$, que Guoquin los recorre en 56 minutos, así pues un único c lo recorre en 7 segundos. Los $3c$ del lado menor del gran rectángulo los recorrerá en 21 minutos.



11.(D) Si fijamos la primera sílaba, podemos formar 6 palabras ($3 \times 2 \times 1$).
Con la CI en primer lugar tenemos las 6 primeras palabras; con la DO en primer lugar llegamos ya hasta la 12ª palabra. RECIDOTOR será la 13ª, RECITORDO la 14ª y REDOCITOR la 15ª.

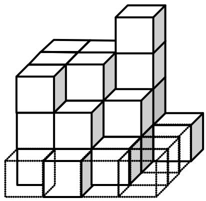
12.(D) La primera **W** tiene 7 puntitos y las siguientes se forman añadiendo 4 puntitos a la anterior. Así, la **W** que ocupa el lugar 100 tendrá $7 + 99 \cdot 4 = 403$ puntitos.

13.(E) Como sabemos que $A = 8$ y $D = 5$, la igualdad $2^A \times 6^B = 8^C \times 9^D$ podemos escribirla como $2^8 \times 6^B = 8^C \times 9^5$. Y ahora, descomponiendo las bases llegamos a: $2^8 \times (2 \cdot 3)^B = (2^3)^C \times (3^2)^5$ y aplicando las propiedades de las potencias:

$2^8 \times 2^B \cdot 3^B = 2^{3C} \times 3^{10}$, es decir, $2^{8+B} \cdot 3^B = 2^{3C} \cdot 3^{10}$ y ya podemos igualar los exponentes de las bases iguales: $B = 10$ y $8 + B = 3C$, de donde deducimos que $C = 6$.

14.(B) Este es un problema de capacidad de abstracción.

Debes ir imaginando los dados que faltan hasta completar el cubo de $4 \times 4 \times 4$. En el dibujo hemos completado el piso inferior con cinco dados pero no dibujamos más porque no se apreciaría nada. El total de dados que faltan son 38.



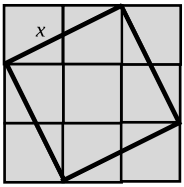
15.(B) Analicemos las frases de Don Retorcido. Para asegurar su falsedad habrá que buscar un ejemplo que la contradiga (a esto se le llama buscar un contraejemplo) y para asegurar que son verdad habrá que razonarlo:
I. Todo número primo es impar. FALSA ya que 2 es primo y es par. Es decir, 2 es un contraejemplo.
II. Todo número impar es primo. FALSA. El 9 es impar y no es primo.
III. La suma de dos números impares nunca es primo. FALSA. 1 + 1 es primo.
IV. La suma de dos números impares siempre es par. VERDADERA. Un número impar es un par más 1, así que la suma de dos impares será dos pares más 2, que es naturalmente par.
V. El producto de dos números impares siempre es impar. VERDADERA. Los demostraremos con letras. $(2a + 1) \cdot (2b + 1) = 4ab + 2a + 2b + 1 = 2(2ab + a + b) + 1$ es impar.
Sólo las dos últimas frases de Don Retorcido son ciertas.

16.(A) La capacidad de un tetrabrick es el producto de sus tres dimensiones (largo, ancho, alto), así pues la capacidad de los tres tetabricks son respectivamente $24a$, $18b$ y $12c$. Con los datos del problema podemos asegurar que:
$24a = 2\cdot 18b$ y $18b=2\cdot 12c$, así pues, $24a = 36b$ y $18b = 24c$. De esta última igualdad obtenemos que $36b= 48c$ y entonces podemos enlazar las dos igualdades así: $24a = 36b = 48c$. Dividimos todo entre 12 y queda $2a = 3b = 4c$.

17.(C) Los cuadrados pequeños tienen lados de 3 cm, 3 cm y 4 cm, por tanto, el lado del cuadrado grande mide 10 cm.
La zona sombreada es un trapecio cuyas medidas son: 10 cm de base mayor, 4 cm de base menor y 6 cm de altura. Su área son 42 cm^2.

18.(D) Un día tiene 1440 minutos (24 × 60). Vayamos calculando mitades: Roque pasa 720 minutos en la cama; 360 bostezando; 180 dormitando; 90 en el sofá; 45 cabeceando; le quedan 45 minutos para leer cuentos a sus abuela.

19.(C) La suma de las notas de Merche debe ser 28 (4 + 6 + 9 + 9) y entre sus notas no pueden estar ni 4, ni 6, ni 9, ni 10. Su peor nota no puede ser 1 porque esto obligaría a que las otras tres fuesen 9, 9 y 9. Tampoco puede ser un 2 porque las otras serían 8, 9 y 9. Un 3 tampoco porque obligaría a 9, 9, 7 o a 9, 8, 8. Un 4 está prohibido. Un 5 sí podría y la suma de las restantes notas sería 23 (por ejemplo, 8,8,7). Un 6 está prohibido. Un 7 ya no puede ser la menor.



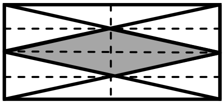
20. (E) Haciendo un sencillo rompecabezas se aprecia que el área de la cruz es equivalente al área del cuadrado de lado x, es decir, 25 cm^2.

21.(C) Las puntuaciones imposibles de conseguir son cuatro: 1, 2, 4 y 7.

22.(B) Hay 12 triángulos de área 1 triangulito. Hay 6 triángulos de área 4 triangulitos. Hay 2 triángulos de área 9 triangulitos. En total hay 20 triángulos, todos ellos equiláteros.

23.(A) Si llamamos c al precio en euros de una cebolla y t al de un tomate puedo escribir estas dos ecuaciones: $7c+5t=4,50$ y $5c+3t=3,10$. Si sumo dichas ecuaciones miembro a miembro obtengo esta igualdad: $12c+8t=7,60$ y si divido toda ella entre 4 termino así: $3c+2t=1,90$.
Tres cebollas y dos tomates cuestan 1, 90 euros.

24.(C) Si dividimos el rectángulo en triángulos iguales mediante segmentos paralelos a los lados, vemos que el rectángulo ocupa 16 triángulos y el rombo 4 triángulos. Es decir, el rombo es la cuarta parte del rectángulo. Como el área del rectángulo es 48 cm^2, la del rombo es 12 cm^2.



25.(D) Entre las respuestas que se ofrecen debemos desechar los números que no sean múltiplos de 15, así pues, descartamos 235, 275 y 379. Quedan solo 210 y 315. Si quitamos las respectivas cifras de las unidades obtenemos 21 (no es primo) y 31 (sí es primo). Don Retorcido tiene 315 años.

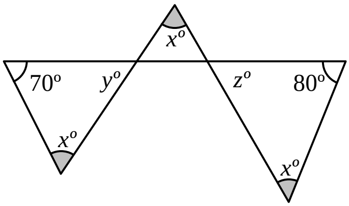
XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel III

1. (B) Como la cifra central del primer capicúa es máxima, 9, para llegar al siguiente capicúa deberemos ponerla en cero. Así el siguiente capicúa será 25052. Luego había recorrido 110 km.

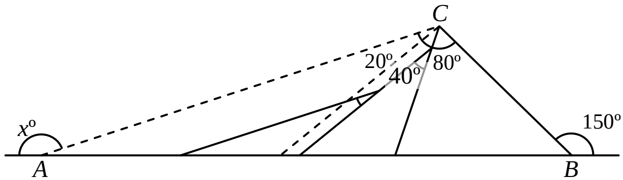
2. (E) Debemos repartir 180º proporcionalmente a 2, 3 y 5. Luego tocan a 18º por unidad. El mayor será 90º y el menor 36º. La diferencia entre ellos, 54º.

3. (A) La suma de los ángulos de los tres triángulos es, $3x^o + 70^o + 2y^o + 2z^o + 80^o$, y esa suma debe ser 540º.
Pero como $2x^o + 2y^o + 2z^o = 360^o$ (x^o, y^o, z^o, son los ángulos del triángulo superior) al final nos queda que $x^o = 30^o$.



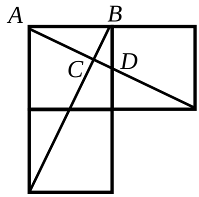
4. (C) Dos corredores que van a diferente velocidad vuelven a coincidir cuando el más veloz dobla al más lento. Eso en esta pista significa que le ha sacado 500 m de diferencia. Así para que el intermedio doble al lento, $500 = 0{,}4 \cdot t_1$, y para que el veloz doble al intermedio, $500 = 0{,}2 \cdot t_2$, siendo 0,4 y 0,2 las diferencias de velocidades respectivas. Luego despejando, $t_1 = 1250$ s y $t_2 = 2500$ s. Los tres corredores se encontrarán a la vez cuando el tiempo en segundos sea un múltiplo común de 1250 y 2500. La primera vez será en el mínimo común múltiplo (2500).

5. (A) Trazando paralelas, para conservar los ángulos, a dos de los segmentos de la figura, se obtiene el triángulo *ABC* cuyos ángulos son: $\hat{A} = 180^o - x^o$, $\hat{B} = 20^o + 40^o + 80^o = 140^o$ y $\hat{C} = 180^o - 150^o = 30^o$. Por lo tanto $180^o - x^o + 140^o + 30^o = 180^o \Rightarrow x^o = 170^o$



6. (E) Un número es media de otro y de su cuadrado si es de la forma $\dfrac{a + a^2}{2}$, pero como $a^2 + a = a \cdot (a + 1)$, el doble del número (si es además entero positivo) será el producto de dos enteros positivos consecutivos. De los números propuestos como solución, sólo el doble de 30 no es producto de dos números consecutivos.

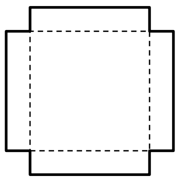
7. (B) Por construcción los segmentos *AD* y *BC* son perpendiculares. Así *BC* es la altura sobre la hipotenusa en el triángulo rectángulo *ABD*, y por tanto los triángulos *ABC* y *BCD* son semejantes con razón de semejanza la de sus hipotenusas, 1 y $1/2$. Las áreas estarán en proporción de 4 a 1, y las dos juntas forman el área de *ABD*. Así *ABC* tiene por área los $4/5$ del área de *ABD*, es decir, $\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$.



8. (E) El hermano que se presentó a todos los exámenes tuvo una media de 6 puntos y sacó en total 48. El que faltó a dos, pero tuvo la misma media, tuvo que sacar un total de 6 · 6 = 36 puntos. Dejó de hacer dos exámenes en los que su hermano sacó 12 puntos. Las únicas dos puntuaciones que suman doce son 5 y 7.

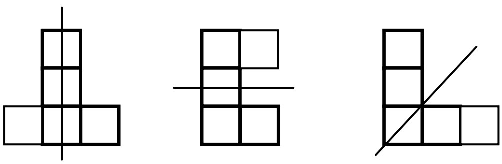
9. (E) La superficie, 180 cm^2**,** es la de un cuadrado de lado l más la de cuatro rectángulos de lados, l y 2. Por tanto tenemos la ecuación $l^2+4\cdot l\cdot 2=180$, cuyas soluciones son: $l=\frac{-4\pm\sqrt{16+180}}{1}=-4\pm 14$, siendo l la solución positiva, 10.

El volumen de la caja es $10^2\cdot 2=200$ cm^3**.**



10. (B) Por la forma de dar el cambio, conviene trabajar en euros. Hillary tiene 500 €, y Antonio, 400 · 1,3 = 520 €. La diferencia, 20, sobre el dinero de Hillary representa el $\frac{20}{500}=\frac{2}{50}=\frac{4}{100}=4\%$.

11.(C) Las tres soluciones y los tres ejes de simetría:



12.(A) La media de naranjas por día es cuatro, pero debemos obtener 12 sumando tres números distintos y crecientes. Razonemos con el de en medio. Si es mayor que 4, tiene que ser 5, pero entonces debe estar rodeado por 1 y 6, no cumpliéndose lo de la suma. Si es menor que 4, el tercero sería al menos 7, con lo que sería mayor que la suma de los otros dos. Luego la solución ordenada es 3, 4 y 5.

13.(B) El menor de la lista es 107, y el mayor 800, luego la suma es 907.

14.(E) La suma de las nueve perlas es: $1+2+3+...+9=45$ gramos. Si el peso de las cuatro parejas es múltiplo de 5, el peso de las ocho perlas que aparecen en ellas lo es. Así que la que se quedó suelta tuvo que ser la de 5 g.

15.(A) La suma de los *m* primeros impares es: $1+3+5+...+\left(2m-1\right)=\dfrac{1+2m-1}{2}\cdot m=m^2$

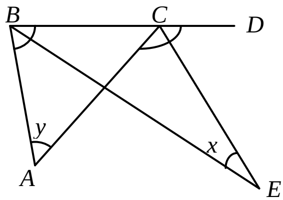
La suma de los *n* primeros pares es: $2+4+6+...+2n=\dfrac{2+2n}{2}\cdot n=n^2+n$.

Tenemos que: $m^2 - (n^2 + n) = (m + n)\cdot(m - n) - n = 212$. Si llamamos *d* a la diferencia entre *m* y *n*, obtenemos la ecuación, $(d + 2n)\cdot d - n = 212$, que leída como ecuación de 2º grado en *d*, nos da la solución: $d=-n\pm\sqrt{n^2+n+212}$, teniéndose que, $n^2 + n + 212$ debe ser un cuadrado perfecto, $(n + k)^2$, y por tanto $\left(2k-1\right)\cdot n=212-k^2$, y $d = k$. Dando valores a valores a *k*, obtenemos:

$k=1,\ n=211;\ k=2,\ 3n=208;\ k=3,\ 5n=203;\ k=4;\ 7n=196;\ ...;$ obteniéndose que *n* es natural sólo para los valores de *k*: 1, 4 y 6; y los consiguientes valores de *n*: 211, 28 y 16, que suman 255.

16.(A) Tenemos que resolver el sistema: $\begin{cases} a^2+b^2=16 \\ a+b=\sqrt{18} \end{cases}$. Elevando la segunda ecuación al cuadrado y usando la primera, llegamos a la ecuación $2ab=2$, con lo cual nuestro sistema queda transformado en el $\begin{cases} a\cdot b=1 \\ a+b=\sqrt{18} \end{cases}$, cuyas soluciones se obtienen a partir de las de la ecuación de segundo grado, $a^2-\sqrt{18}a+1=0$, y que son: $a=\dfrac{\sqrt{18}\pm\sqrt{18-4}}{2}=\dfrac{\sqrt{18}\pm\sqrt{14}}{2}$, siendo nuestros catetos, $\dfrac{\sqrt{18}+\sqrt{14}}{2}$ y $\dfrac{\sqrt{18}-\sqrt{14}}{2}$, y el área pedida, $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{18}+\sqrt{14}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{18}-\sqrt{14}}{2}=\dfrac{18-14}{8}=\dfrac{1}{2}$.

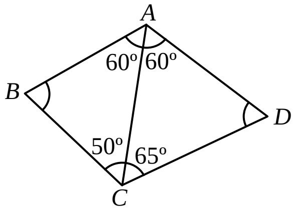
17.(C) Llamemos, $\beta=A\hat{B}E=E\hat{B}C;\ \alpha=A\hat{C}E=E\hat{C}D$. Tenemos que $2\beta+y+180º-2\alpha=180º$, y que $\beta+x+\alpha+180º-2\beta-y=180º$, o simplificando, $y=2\alpha-2\beta$, $y=x+\alpha-\beta$; de donde $y=2x$.



18.(B) De la suma deducimos que ***A*** + **3** = ***B***. Si **5*B*3** tiene que ser múltiplo de 3, el mayor valor de ***B*** es 7 y por lo tanto el de ***A*** es 4.

$$\begin{array}{cccc} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{9} \\ + & \mathbf{2} & \boldsymbol{A} & \mathbf{4} \\ \hline & \mathbf{5} & \boldsymbol{B} & \mathbf{3} \end{array}$$

19.(C) En un triángulo el lado mayor es el opuesto al ángulo mayor. Así en el triángulo *ABC* el lado mayor es *AC* , ya que se opone a 70º. Pero en el *ACD* el mayor es *AD* (opuesto a a 65º), luego es éste el mayor lado de la figura completa.



20.(D) Si n es múltiplo de 3, entonces $n\cdot(n + 1)$ es múltiplo de 3. Si n es de la forma $3k + 1$, entonces, $n\cdot(n + 1) = (3k + 1)\cdot(3k + 2) = 3\cdot(3k^2 + 3k) + 2$. Si n es de la forma $3k+2$, entonces $n+1$ es múltiplo de 3 y de ahí lo es $n\cdot(n + 1)$. La solución es D. (Lo del tamaño de n es una broma del autor).

21.(C) Aprovechemos primero que hay dos restos iguales. Así, si al dividirlo por 3 y por 11 da resto 1, quitándole uno es múltiplo de 3 y de 11, y por ende de 33. Al dividir 34 entre 5, da resto 4, que es lo que queríamos. El primer natural que cumple lo pedido es 34.

22.(B) Podemos factorizar la fórmula, $n^5-n=n\cdot\left(n^4-1\right)=n\cdot\left(n^2+1\right)\cdot\left(n+1\right)\left(n-1\right)$.

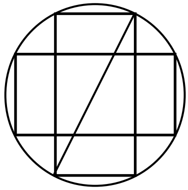
Como n y n+1 tienen distinta paridad, el producto es par, pero no podemos asegurar más doses en la descomposición. También el producto es múltiplo de 3, ya que hay tres factores consecutivos. Además podemos asegurar el factor 5, porque da la casualidad (compruébalo) que la potencia quinta de un natural tiene la misma terminación que la base, y por ello n^5-n, acaba en 0. Así todos los términos de la sucesión son múltiplos de $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Aunque para enes consecutivas se obtienen otros factores comunes, estos no se comparten con todos los demás términos

23.(C) Para que la resta sea positiva, el número debe ser menor que 1, y lo que tenemos que maximizar es $n\cdot\left(1-n\right)$, cuyo valor mayor es que los dos factores sean iguales, es decir para $n=\frac{1}{2}$. Podemos razonarlo escribiendo:

$$n\cdot\left(1-n\right)=\left(\frac{1}{2}+\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{4}-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\leq\frac{1}{4}.$$

24.(C) El número de la izquierda es el mayor y al ser suma de cifras distintas es mayor o igual que 6. Si es 6, las otras cifras son, 0, 1 , 2 y 3, que pueden disponerse en el número de 24 formas. Con 7 delante tendremos otros 24 números con las otras cifras, 0, 1, 2 y 4. Si es 8, las siguientes cifras pueden ser, 0, 1, 2 y 5, o , 0, 1, 3, 4. Con 9, nuevos grupos de 4 cifras son posibles: (0, 1, 2, 6), (0, 1, 3, 5), (0, 2, 3, 4). En total siete grupos con 24 variaciones cada uno.

25.(B) Dibujado el diámetro diagonal de uno de los rectángulos, llegamos a la ecuación, $x^2+(2x)^2=1$, siendo x la medida del lado corto de los rectángulos. Como el área de un rectángulo es $2x^2$, obtenemos que es $\frac{2}{5}$.



XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel IV

1. (B) Las cifras de los números pedidos deben ser 2, 3, 5 y 7. Tales números no pueden ser con cifras iguales, pues entonces serían múltiplos de 11. De los 12 números con estas condiciones (variaciones ordinarias de 4 tomadas de dos en dos), debemos quitar los que terminan en 2 ó 5. De los 6 que nos quedan hay que quitar el 27 y el 57. Nos quedan finalmente cuatro números con las condiciones pedidas: 23, 53, 73 y 37.

2. (D) Si saco seis, es posible que coincidan uno de cada par y, por tanto, de diferente color, pero si saco uno más es seguro que coincidirá con alguno de los escogidos anteriormente.

3. (E) Si había n estudiantes la puntuación total fue de $76n$.

Si se clasificaron c estudiantes la suma de sus puntuaciones fue $83c$ y la suma de las puntuaciones de los $(n - c)$ que no se clasificaron fue $55(n - c)$.

Así pues, $76c = 83c + 55(n - c)$, de donde $21n = 28c \Rightarrow \dfrac{c}{n} = \dfrac{3}{4}$ por lo que c es el 75% de n.

4. (B) Si observamos que $10 - 4\sqrt{6} = \left(2 - \sqrt{6}\right)^2$ y $10 + 4\sqrt{6} = \left(2 + \sqrt{6}\right)^2$, entonces

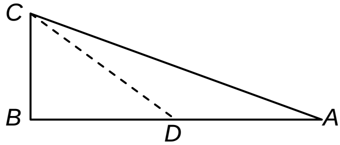
$$\sqrt{10 - 4\sqrt{6}} = \sqrt{\left(2 - \sqrt{6}\right)^2} = \left|2 - \sqrt{6}\right| = \sqrt{6} - 2 \quad \text{y} \quad \sqrt{10 + 4\sqrt{6}} = \sqrt{\left(2 + \sqrt{6}\right)^2} = 2 + \sqrt{6}$$

Por lo tanto $\sqrt{10 - 4\sqrt{6}} - \sqrt{10 + 4\sqrt{6}} = \left(\sqrt{6} - 2\right) - \left(2 + \sqrt{6}\right) = -4$.

También podemos proceder así. Llamando x al número buscado y teniendo en cuenta que ha de ser negativo, ya que $\sqrt{10 - 4\sqrt{6}} < \sqrt{10 + 4\sqrt{6}}$, hallamos x^2.

$$x^2 = 10 - 4\sqrt{6} + 10 + 4\sqrt{6} - 2\sqrt{\left(10 - 4\sqrt{6}\right)\cdot\left(10 + 4\sqrt{6}\right)} = 20 - 2\sqrt{4} = 16 \Rightarrow x = -4$$

5. (D) El triángulo en cuestión es rectángulo, pues $24^2 + 7^2 = 25^2$ de hipotenusa *AC*, por lo que la mediana que parte de *C* es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 12 y 7, con lo que su longitud es $\sqrt{12^2+7^2}=\sqrt{193}$



6. (B) Las dos raíces de la ecuación deben sumar 85, luego una es par y la otra impar. Pero al ser ambas números primos, una tiene que ser 2 y la otra 83. Por lo tanto $c = 2\cdot 83 = 166$ y la suma de sus cifras es 13.

7. (E) Como $(senx+\cos x)^2 = sen^2x+\cos^2 x+2senx\cdot\cos x \Rightarrow \frac{1}{4}=1+2senx\cdot\cos x$ **y**

$(senx+\cos x)^3 = sen^3x+\cos^3 x+3sen^2x\cdot\cos x+3senx\cdot\cos^2 x$ podemos escribir

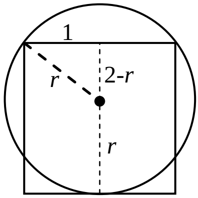
$$sen^3x+\cos^3 x=(senx+\cos x)^3-3senx\cdot\cos x(senx+\cos x)=\frac{1}{8}-\frac{3}{2}(senx\cdot\cos x)$$

Y como $senx\cdot\cos x=\dfrac{\frac{1}{4}-1}{2}=-\dfrac{3}{8}$ resulta que $sen^3x+\cos^3 x=\dfrac{1}{8}-\dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{3}{8}\right)=\dfrac{11}{16}$.

8. (A) Al ser $\dfrac{n^2-38}{n+1}=n-1-\dfrac{37}{n+1}$ el número en cuestión será entero cuando lo sea $\dfrac{37}{n+1}$ y el mayor entero con esta propiedad es $n = 36$.

9. (C) La situación es la que indica la figura, por lo que

$$r^2=1^2+(2-r)^2 \Rightarrow r^2=5-4r+r^2 \Rightarrow r=\frac{5}{4}$$



10. (B) Los números 2010, 2012, 2013 y 2014 son todos compuestos. 2010 = 2·3·5·67, 2012 = 2^2·503, 2013 = 3·671 y 2014 = 2·19·23. El que menos divisores tiene es 2013 y su suma es: S(2013) = 1 + 3 + 671 + 2013 = 2688. Como 2011 es primo la suma de sus divisores es menor. S(2011) = 1 + 2011 = 2012.

11. (D) El término general de esta sucesión es $a_n = 1 + 3(n-1) = 3n - 2$, con lo que el problema se reduce a encontrar para cuántos enteros positivos *n,* se verifica que $3n - 2 < 10000$, es decir, $n < \frac{10002}{3} = 3334$. El mayor valor de *n* es 3333, que es el número de términos con menos de cinco dígitos.

12. (D) Los números son: 4, *b*, 4 + *b*, 4 + 2*b*, 8 + 3*b*, 12 + 5*b* = 47, así que *b* = 7, siendo entonces 4, 7, 11, 18, 29 y 47 la lista en cuestión y su suma $S = 116 \in [111, 120]$.

13. (E) Al ser $\frac{a}{b}$ el cociente de las dos longitudes de los lados del rectángulo, con *a* > *b*, podemos escribir dichas longitudes como $\frac{ka}{a+b}$ y $\frac{kb}{a+b}$, por lo que el perímetro , *x*, será $x = 2\left(\frac{ka}{a+b} + \frac{kb}{a+b}\right) = 2k \Rightarrow k = \frac{x}{2}$. Por lo tanto el lado más corto, *b*, viene dado por la expresión $\frac{xb}{2(a+b)}$.

14. (A) Tomando *DE* como base del paralelogramo *DEBF*, su altura es 6 y al ser su área 12, *DE* = 2, por lo que *EC* = 10 y $EB = \sqrt{10^2 + 6^2} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34}$.

Por otra parte, la semejanza de los triángulos *DGE* y *EBC* nos lleva a escribir $\frac{EG}{2} = \frac{6}{2\sqrt{34}} \Rightarrow EG = \frac{3\sqrt{34}}{17}$.

15. (D) La posición del punto *E* sobre el lado *DC*, no va a influir en el área del triángulo *ABE*, por lo que el dato $DE = \frac{1}{4}DC$ es superfluo e innecesario. Si llamamos *h* a la altura del trapecio y 2*k* + 1 a la base *DC* tendremos que $18 = \frac{2k+5}{2} \cdot h$ por lo que $36 = (2k+5) \cdot h$ con *k* y *h* enteros. Al ser 2*k* + 5 impar y mayor que 3, la única posibilidad es que 2*k* + 5 = 9 y *h* = 4, con lo que el área del triángulo *ABE* es 8.

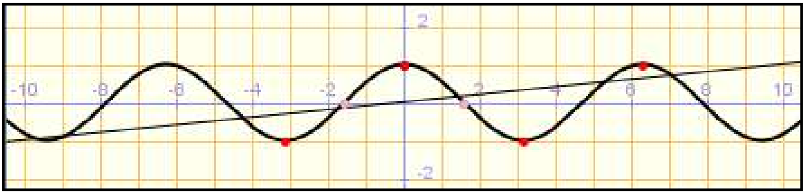
16. (D) La función tangente es creciente en el intervalo $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ lo que implica que los arcos mantienen el orden de las tangentes.

Puesto que $tg\ 60^o = \sqrt{3}$ y $tg75^o = tg(30^o + 45^o) = \dfrac{tg30^o + tg45^o}{1 - tg30^o \cdot tg45^o} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1} = 2 + \sqrt{3}$,

como $tg60^o = \sqrt{3} < tgx = 3 < tg75^o = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow 60^o < x < 75^o$.

17. (D) Las soluciones de la ecuación $x = 10\cos(x)$ son tantas como puntos de corte tienen las funciones $f(x) = \dfrac{x}{10}$ y $g(x) = \cos(x)$. Puesto que la imagen de cos(x) es el intervalo $[-1\ ,\ 1]$, los puntos de corte han de estar en el intervalo $[-10\ ,\ 10]$.

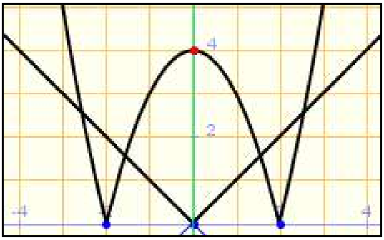
Un esbozo de ambas funciones clarifica bastante la situación.



En el intervalo $[-10\,,0]$ hay dos intervalos en los que la función cos(x) es negativa y además en cada uno tiene un mínimo igual a – 1. Estos intervalos son $\left[-10, -\dfrac{5\pi}{2}\right)$ y $\left(-\dfrac{3\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}\right)$ y los mínimos se alcanzan en $-\pi$ y en -3π, por lo que las funciones tendrán cuatro puntos de corte. En el intervalo $(0, 10]$ hay dos intervalos en los que la función cos(x) es positiva, pero sólo tiene un máximo relativo en 2π que es igual a 1, por lo que las funciones tienen tres puntos de corte. En total, hay siete puntos de corte.

18. (A) $25^{\left(\frac{1}{2} - \log_5 \sqrt{2}\right)} = \dfrac{25^{\frac{1}{2}}}{25^{\log_5 \sqrt{2}}} = \dfrac{\left(5^2\right)^{\frac{1}{2}}}{5^{2\log_5 \sqrt{2}}} = \dfrac{5}{5^{\log_5 2}} = \dfrac{5}{2}$

19. (E) Haciendo un esbozo de la gráfica de ambas funciones se ve que las funciones se cortan en cuatro puntos, que corresponden a las soluciones de las ecuaciones $x^2 - 4 = x$ y $x^2 - 4 = -x$ que son $x_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$, $x_3 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ y $x_4 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$



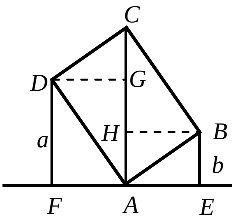
20. (A) La circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ tiene el centro en el origen y radio 3, mientras que la circunferencia $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 41 = 0$ tiene centro en el punto (6 , -3) y radio 2. Puesto que la distancia entre los centros de ambas circunferencias es $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, que es mayor que la suma de los radios (3 + 2 = 5), la mínima distancia entre dos puntos, uno de cada circunferencia es $3\sqrt{5} - 5$

21. (A) Por ser la función $y = 2^x$ monótona creciente, $f(x) = 2^{x^2 - 2x}$ alcanza su valor mínimo en el mínimo de $g(x) = x^2 - 2x$, que es $g(1) = -1$. Por tanto, el mínimo de $f(x)$ es $f(1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

22. (C) La suma es, $x + 2x + 3x + ... + 99x + 100x = 5050x = 2 \cdot 5^2 \cdot 101 \cdot x$

El valor mínimo de *x* que hace la suma un cuadrado perfecto es 2 · 101 = 202.

23. (B) Trazando las paralelas a *EF* por los puntos *D* y *B*, cortan a *AC* en *G* y *H*, respectivamente. Como *ABCD* es un rectángulo *FE* = *DG* + *GB* = 2·*DG*.



Y aplicando el teorema de la altura en el triángulo rectángulo *ADC*,

$$FE = 2DG = 2\sqrt{AG \cdot GC} = 2\sqrt{AG \cdot AH} = 2\sqrt{a \cdot b}$$

24. (A) $\log(tg1^o) + \log(tg2^o) + \log(tg3^o) + ... + \log(tg88^o) + \log(tg89^o) =$

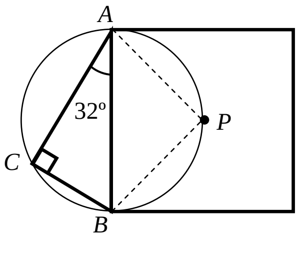
$$\log\left[(tg1^o)\cdot(tg2^o)\cdot(tg3^o)\cdot...\cdot(tg88^o)\cdot(tg89^o)\right].$$

Como $tg(x) = \dfrac{1}{tg(90^o - x)}$, la expresión pedida es

$$\log\left[tg(1^o)\cdot...\cdot tg(44^o)\cdot tg(45^o)\cdot\frac{1}{tg(44^o)}\cdot...\cdot\frac{1}{tg(1^o)}\right] = \log(1) = 0.$$

25. (C) El cuadrilátero ACBP se puede inscribir en una circunferencia de diámetro *AB* ya que *AB* es la hipotenusa de los triángulos rectángulos *ABC* y *ABP*. Los ángulos $P\hat{C}B$ y $P\hat{A}B$ son iguales, pues ambos son inscritos y abarcan el mismo arco.

Como $P\hat{A}B = 45^o \Rightarrow P\hat{C}B = 45^o$.



Participantes y relación de ganadores del XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

En esta convocatoria del Concurso de Primavera la participación de estudiantes en la primera fase fue próxima a 40 000. De los 490 centros participantes se inscribieron 3957 estudiantes para la segunda fase, aunque finalmente realizaron la prueba 3428. Debido al elevado número de participantes para esta 2ª fase y al limitado espacio de la Facultad de Matemáticas, nos vemos obligados a reducir el número de participantes, por nivel y centro, a tres. La estadística de participación por niveles y puntuaciones obtenidas puede consultarse en la página de la Sociedad Puig Adam así como la relación de todos los ganadores del concurso y la relación de los centros con mayor puntuación en cada uno de los niveles.

La distribución por niveles de los participantes en la segunda fase, que como siempre tuvo lugar en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, fue la siguiente:

	NIVEL 1		NIVEL 2		NIVEL 3		NIVEL 4	
	5º P y 6º P		1º ESO, 2º ESO		3º ESO, 4º ESO		1º B, 2º B	
nº de inscripciones	243	611	578	763	540	629	366	227
nº de participantes	226	521	535	684	465	533	287	177
nº centros	177	187	267	206	243	257	136	95

Los tres, y en algún caso cuatro, ganadores en cada uno de los niveles fueron:

NIVEL I

1. Lucas Cuesta Araújo (6º Primaria) CP La latina
2. Pablo Soto Martín (6º Primaria) CP Miguel de Cervantes
3. Víctor David Sánchez (5º Primaria) CP Andrés Segovia

NIVEL II

1. Alejandro Epelde Blanco (1º ESO) Montessori School Los Fresnos
2. Pablo del Olmo de Casas (2º ESO) IES Las Canteras
3. Saúl Rodríguez Martín (2º ESO) Colégio Villa de Griñón

NIVEL III

1. Berta García González (3º ESO) IES San Juan Bautista
2. Ismael Sierra del Río (4º ESO) Colegio San Juan Bautista
3. Marc Isern Hacker (4º ESO) Colegio Alemán

NIVEL IV

1. Pablo Esteban de la Iglesia (2º Bchto) Colegio Fray Luis de León. Madrid
2. Raúl González Molina (2º Bachto) IES San Mateo
3. Miguel Barrero Santamaría (1º Bachto) IES Alameda de Osuna

XXXI CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 8 de junio de 2013

<u>NIVEL I</u> (3º de E.S.O.) Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1.

La suma de dos números naturales es 371 y el cociente entre su mínimo común múltiplo y su máximo común divisores 430. ¿Cuáles son esos números?

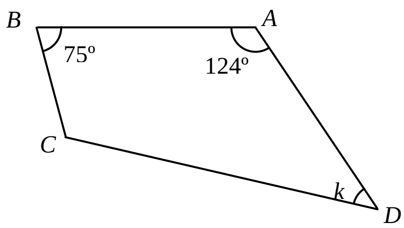
Problema 2.

En un triángulo rectángulo el radio de la circunferencia inscrita es de 2,8 cm y el radio de la circunferencia circunscrita es de 9,1 cm. Calcula el perímetro del triángulo.

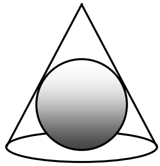
<u>NIVEL I</u> (3º de E.S.O.) Segunda parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1A. (1 punto)
¿Cuál es el mayor número de seis cifras, representado por *ELEVEN*, en el que letras distintas representan cifras distintas y letras iguales cifras iguales, que verifica que es múltiplo de 11?

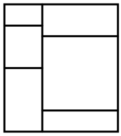
Problema 2A. (1,5 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior y *k* la suma de las cifras de *T*.
En el cuadrilátero *ABCD* de la figura, que no está a escala, $AB = AC$, $\hat{A} = 124^o$, $\hat{B} = 75^o$ y $\hat{D} = k^o$. ¿Cuánto mide el ángulo $B\hat{D}C$?



Problema 3A. (2 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior. Una esfera de T cm de radio está inscrita (perfectamente ajustada) en un cono cuya generatriz es igual al diámetro de su base. ¿Cuál es, en cm, la altura del cono?



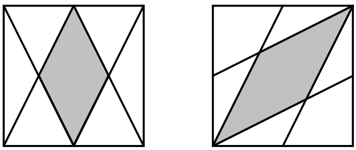
Problema 1B. (1 punto)
Dividimos un cuadrado en seis rectángulos como se indica en la figura. Si la suma de los perímetros de los seis rectángulos es 120 cm, ¿cuál es. en cm^2, el área del cuadrado?



Problema 2B. (1,5 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior y n la suma de las cifras de T. El número de cinco cifras 24X8Y es divisible por 4, 5 y n. ¿Cuál es la suma de las cifras X e Y?

Problema 3B. (2 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior. El cuadrilátero *PQRS* está inscrito en una circunferencia de tal manera que *PR* es un diámetro. Si las longitudes de *PQ*, *QR* y *RS* son 60, 25 y $13 \cdot T$, ¿cuál es la longitud del lado *SP*?

Problema 4. (5 puntos)
Sean a y b las respuestas de los problemas **3A** y **3B**, respectivamente. La figura muestra dos rombos sombreados inscritos en cuadrados iguales de lado $a - b$. Cada uno de ellos se han formado mediante segmentos de extremos un vértice del cuadrado y el punto medio de uno de los lados. ¿Cuál es la diferencia entre las áreas de dichos rombos?



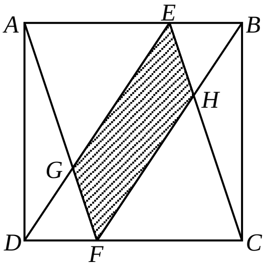
NIVEL II (4º de E.S.O.) Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1.

Al escribir una a continuación de otra las edades de Alicia y Bruno resulta un número de cuatro cifras que es un cuadrado perfecto. Si hiciéramos lo mismo, en ese orden, dentro de 31 años resultaría un número también de cuatro cifras y también cuadrado perfecto.
¿Cuáles son las edades actuales de Alicia y de Bruno?

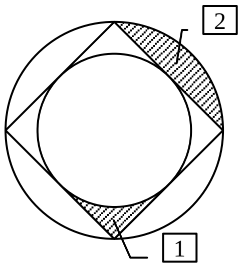
Problema 2.

En el cuadrado *ABCD* de la figura $AE = 2 \cdot EB$ y $FC = 2 \cdot DF$.
¿Cuál es el cociente entre el área del paralelogramo *EGFH* y el área del cuadrado *ABCD*?



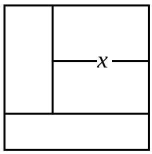
NIVEL II (4º de E.S.O.) Segunda parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1A. (1 punto)
Calcula el cociente entre el área de la región $\boxed{1}$ y el área de la región $\boxed{2}$.



Problema 2A. (1,5 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior, que en la forma más simplificada es $T = \dfrac{a - \pi}{2\pi - b}$ con a y b enteros.

La figura, que no está a escala, muestra un cuadrado de lado $\dfrac{a}{b}$ dividido en cuatro rectángulos de igual área. Calcula la longitud del segmento marcado con x.



Problema 3A. (2 puntos)

Sea $T = \dfrac{c}{d}$ la respuesta del problema anterior expresada en forma de fracción irreducible y $n = 2(c+d)$. En una clase de 4º de ESO hay n chicas. Si seleccionamos al azar dos estudiantes de esa clase la probabilidad de que ambos sean chicas es 0,15. ¿Cuántos chicos hay en esa clase?

Problema 1B. (1 punto)

¿Cuántas soluciones enteras tiene la inecuación $\left||x| - 2013\right| < 5$?

Problema 2B. (1,5 puntos)

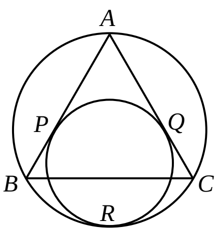
Sea T la respuesta del problema anterior. Calcula cuántos números de cuatro cifras verifican que la suma de los cuadrados de sus cifras es T.

Problema 3B. (2 puntos)

La respuesta del problema anterior es un número T de dos dígitos, p y q. En el triángulo ABC la mediana que parte de A es perpendicular a la mediana que parte de B. Si las longitudes de los lados AC y BC son $p+q$ y $p \cdot q$, respectivamente, ¿cuál es la longitud del lado AB?

Problema 4. (5 puntos)

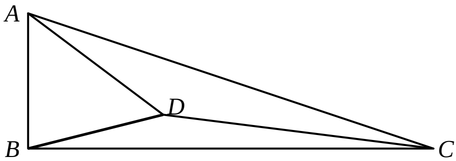
Sean a y b las respuestas de los problemas **3A** y **3B**, respectivamente y sea $x = a \cdot b^2$.
En una circunferencia hay inscrito un triángulo equilátero ABC. Una segunda circunferencia es tangente interior a la primera en R y tangente a AB y AC en P y Q respectivamente. Si $BC = x$ calcula PQ.



NIVEL III (1º de Bachillerato) Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1.

En el interior del triángulo rectángulo *ABC*, con ángulo recto en *B*, tomamos un punto *D* tal que el área del triángulo *ABD* es la tercera parte del área del triángulo original y el área del triángulo *BDC* es la cuarta parte del área del triángulo original. Si las distancias de *D* a los vértices *A* y *C* son, respectivamente, 3 y 4 cm, calcula la distancia de *D* al vértice *B*.



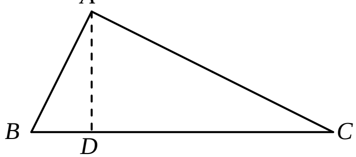
Problema 2.

Encuentra todos los enteros positivos que escritos en notación usual (base 10) son una unidad mayor que la suma de los cuadrados de sus cifras.

NIVEL III (1º de Bachillerato) Segunda parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1A. (1 punto)
Calcula el menor primo p tal que $(p - 1)$ es la diferencia de los cuadrados de dos múltiplos de 4, ambos positivos.

Problema 2A. (1,5 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior y k la suma de los dígitos de T.
En el triángulo rectángulo *ABC* de la figura *AD* es perpendicular a *BC*. Si el área del triángulo *ABD* es 1 y el área del triángulo *ADC* es k, calcula $tg^2 \hat{B}$.



Problema 3A. (2 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior.
Calcula el mayor entero positivo n para el que $n^2 - Tn + 6$ resulta ser un número primo.

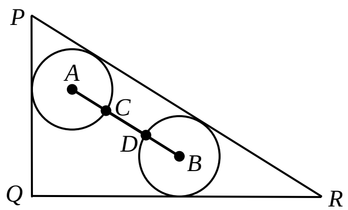
Problema 1B. (1 punto)
Calcula el valor de T si $\lg_2 4$, $\lg_{\sqrt{2}} 8$, $\lg_3 9^{T-1}$ están en progresión geométrica.

Problema 2B. (1,5 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior.
Calcula el número de valores enteros de x que verifican el sistema de inecuaciones:
$x^2 > x + 6, \qquad |x| < T^2$.

Problema 3B. (2 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior.
Una enorme cesta de frutas tiene un gran número de naranjas, peras, manzanas y limones, más de 10000 de cualquiera de ellas. Calcula el menor valor de k para que cualquier elección de k de piezas de frutas tenga al menos una de las siguientes características:

- Que haya al menos 1001 naranjas
- Que haya al menos 2013 peras
- Que haya al menos 219 manzanas
- Que haya al menos T limones.

Problema 4. (5 puntos)
Sea a la respuesta del problema **3A** y b la suma de los dígitos del problema **3B**.
En el triángulo rectángulo PQR de la figura, en el que $PQ = \dfrac{b}{2}$ y $QR = 2a$, dibujamos dos circunferencias iguales, de centros A y B, cada una de ellas tangente a un cateto y a la hipotenusa. Si las intersecciones de las circunferencias con el segmento AB dividen a éste en tres partes iguales, $AC = CD = DB$, calcula el radio de las circunferencias.

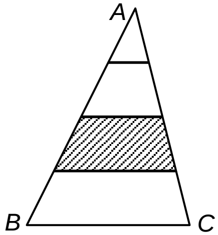


XIII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

23 de noviembre de 2013

PRUEBA POR EQUIPOS 1º y 2º de E.S.O. (45 minutos)

1. En el triángulo *ABC* dibujamos tres paralelas a la base *BC* que dividen a la altura sobre dicho lado en cuatro partes iguales. Si el área del trapecio rayado es 35 cm^2, calcula el área de dicho triángulo.



2. Las tangentes exteriores a dos circunferencias de radios 3 y 14 forman un ángulo de 60º. ¿A qué distancia están sus centros?

3. La tabla adjunta muestra algunos datos del último campeonato de pesca celebrado en el lago de la Casa de Campo.

Número de peces pescados (*n*)	0	1	2	3	…	13	14	15
Número de participantes que pescaron *n* peces	9	5	7	23	…	5	2	1

Como puedes observar hubo 9 participantes que no pescaron nada, 5 pescaron un único pez, etc.
En la prensa local que cubría el evento se pudo leer al día siguiente:

- *El ganador obtuvo 15 peces*
- *La media de los que pescaron 3 o más peces fue de 6 peces.*
- *La media de los que pescaron menos de 13 peces fue de 5 peces.*

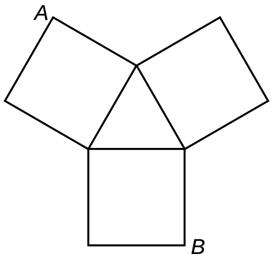
¿Cuál fue el número total de peces capturados?

XIII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

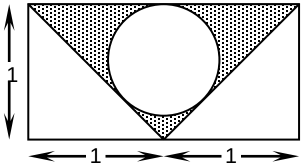
23 de noviembre de 2013

PRUEBA POR EQUIPOS 3º y 4º de E.S.O. (45 minutos)

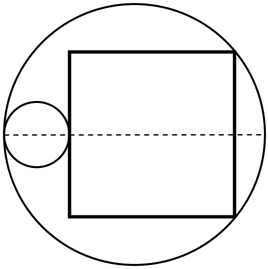
1. Sobre cada uno de los lados de un triángulo equilátero se construye un cuadrado, como indica la figura. Si el lado del triángulo es 10, ¿cuál es la distancia entre los vértices *A* y *B*?



2. Calcula el área de la zona sombreada



3. En el dibujo de la figura hay dos circunferencias tangentes interiores. El diámetro de la pequeña es 10 y el radio de la grande es 20. El cuadrado tangente a circunferencia pequeña tiene dos vértices en la circunferencia grande y su centro está alineado con los centros de las circunferencias. Calcula el lado del cuadrado y expresa el resultado en la forma $m + n\sqrt{t}$ con *m, n* y *t* enteros y *n* lo más grande posible.



XIII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

23 de noviembre de 2013

PRUEBA POR EQUIPOS Bachillerato. (45 minutos)

1. Sean *f* y *g* dos funciones cuyas gráficas son dos rectas. Si para todo número real x se verifica que $f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big) = x$, $f(0) = 4$ y $g(5) = 61$, calcula $f(2013)$.

2. Calcula el máximo común divisor de todos los enteros de la forma $n^5 - 5n^3 + 4n$ para cualquier entero n > 2.

3. La sucesión 3, 15, 24, 48, 63,… está formada por los enteros positivos que son múltiplos de 3 y una unidad menor que un cuadrado perfecto. ¿Cuál es el resto de la división entre 1000 del término que ocupa el lugar 2013º en dicha sucesión?

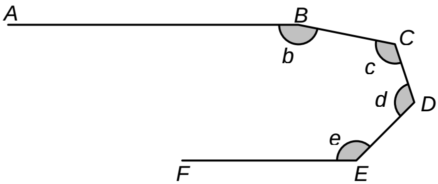
XIII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

23 de noviembre de 2013

<u>PRUEBA INDIVIDUAL</u> 1º y 2º de E.S.O. (90 minutos)

1. Calcula el menor número de cinco cifras “*pqrst*”, todas diferentes, que sea divisible por 3, 4, 5 y 7. (ten en cuenta que *p* no puede ser cero)

2. La recta que pasa por *A* y *B* es paralela a la que pasa por *F* y *E.* Si *b, c, d* y *e* son las medidas de los ángulos marcados, calcula la suma $b + c + d + e$.

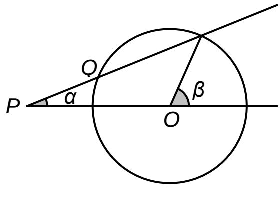


3. El cuadrado que observas es “mágico”, es decir, la suma de los números de las tres filas, las tres columnas y las dos diagonales es la misma. Si los nueve números del cuadrado mágico son los números pares comprendidos entre 11 y 29, ¿cuánto vale el producto $a{\cdot}b{\cdot}c$?
Completa el cuadrado con esos números cuando $c < b$.

x	*y*	***a* – *c***
a* –*b* –*c	***a***	***a*+*b*+*c***
z	*u*	*v*

4. En un Instituto hay 144 estudiantes en 2º de ESO. En 1º de ESO hay un 25% de estudiantes más que en 3º de ESO, o sea, si en 3º hubiera 20, en 1º habría 20 + 25% de 20 = 25. En 2º de ESO hay un 10% menos que en 1º y el 20% del total de estudiantes de la ESO son de 4º. ¿Cuántos estudiantes hay entre los cuatro cursos de ESO de ese Instituto?

5. En esta figura el segmento *PQ* es igual que el radio de la circunferencia de centro *O*. Si el ángulo β mide 66º, ¿cuánto mide el ángulo α?



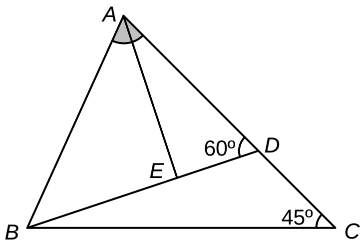
XIII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

23 de noviembre de 2013

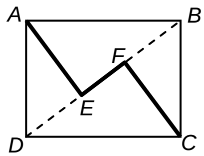
PRUEBA INDIVIDUAL 3º y 4º de E.S.O. (90 minutos)

1. Encuentra todas las parejas de enteros positivos a y b tales que $5a - ab = 9b^2$.

2. En el triángulo *ABC* de la figura, que no está hecha a escala, *AD* = 2, *DC* = 1 y *E* es el pie de la perpendicular desde *A* a la recta *BD*. Si el ángulo $A\hat{C}B = 45º$ y el ángulo $A\hat{D}E = 60º$, calcula el valor del ángulo $B\hat{A}C$ marcado en la figura.

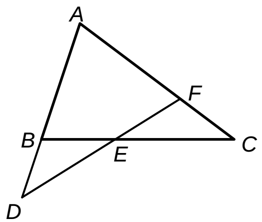


3. En el rectángulo *ABCD* de dimensiones 8 y 6, los puntos *E* y *F* son los pies de las perpendiculares desde *A* y *C* sobre la diagonal *BD*. Calcula la longitud de la línea quebrada *AEFC*.



4. Si a y b son enteros positivos tales que $a \cdot b = 10!$, prueba que $a + b$ siempre es mayor que 3744.

5. En el triángulo *ABC* de la figura, que no está hecho a escala, prolongamos el lado *AB* hasta el punto *D.* Desde *D* trazamos una recta que corta a los lados *BC* y *AC* en los puntos *E* y *F*, respectivamente, verificándose que *AB* = *AE* = *AF* y que *FE* = *FC*. Demuestra que *AD* = *FD*.

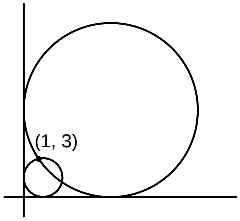


XIII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

23 de noviembre de 2013

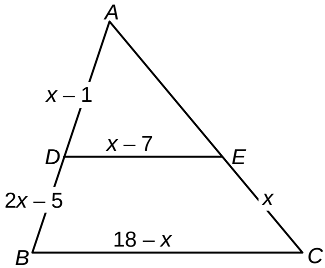
PRUEBA INDIVIDUAL Bachillerato (90 minutos)

1. Dos circunferencias distintas son tangentes a los ejes de coordenadas y ambas pasan por el punto (1, 3). ¿Cuál es la suma de sus radios?



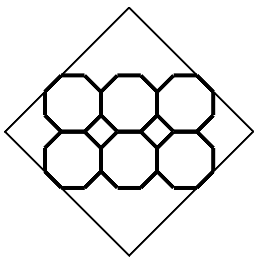
2. Calcula el menor entero n, mayor que 2000, tal que los números $\dfrac{3n+4}{5}$, $\dfrac{4n+5}{3}$, $\dfrac{5n+3}{4}$ sean enteros.

3. En el triángulo *ABC* de la figura, que no está hecho a escala, la recta *DE* es paralela al lado *BC*. Encuentra, si existen, los valores de x que hacen que los segmentos señalados tengan las longitudes que se indican.



4. Calcula la pendiente de la recta que, pasando por el origen, corta a la parábola $5y = 2x^2 - 6x + 10$ en dos puntos cuyas abscisas suman 2013.

5. En el cuadrado *ABCD* de la figura hay seis octógonos regulares iguales, de lado 2, que comparten un lado con los octógonos colindantes. Cada uno de los octógonos de los extremos tiene un lado sobre un lado del cuadrado. Calcula el área del cuadrado y expresa el resultado en la forma $m + n\sqrt{2}$.



XIII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

23 de noviembre de 2013

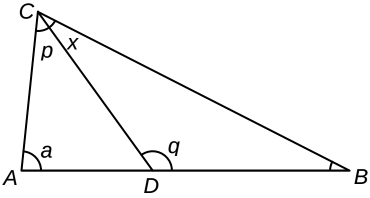
PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

1º y 2º de ESO.-

1A.- Si escribimos el máximo común divisor de 720 y 1080 en la forma $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, calcula $a + b + c$.
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1B.- Sea "T" la respuesta del problema 2B
¿Cuál es el menor entero positivo N que verifica $(T + 4)\cdot N$ es el cubo de un número entero?
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1C.- Sea "T" la respuesta del problema 2C y n la suma de los dígitos de T.
En el triángulo ABC el ángulo a es mayor que 70º y su medida (en grados sexagesimales) viene dada por el número cuyas cifras son n y $\frac{n}{2}$. D es un punto del lado AB tal que $DC = DB$ y el ángulo q es el triple del ángulo p. ¿Cuál es la medida del ángulo x?



(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

XIII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

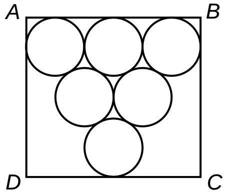
23 de noviembre de 2013

<u>PRUEBA POR RELEVOS</u> (60 minutos)

3º y 4º de ESO.-

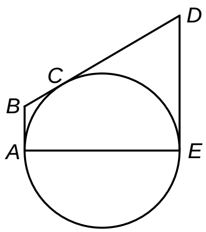
.

2A.- Sea "T" la respuesta del problema 3A y *p* el producto de las cifras de T.
En el rectángulo *ABCD* de la figura, con *AB* = *p*, hay seis circunferencias tangentes entre sí y a los lados del rectángulo, como muestra la figura. Calcula *BC* y expresa la solución como $r\sqrt{3}+s$ con *r* y *s* enteros.
(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)



2B.- Estoy pensando en un número positivo. Si le sumo 7, divido esta suma entre 3, resto 3 a lo que me queda y finalmente elevo al cuadrado el número obtenido resulta 16. ¿En qué número estoy pensando?
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

2C.- Sea "T" la respuesta del problema 3C.
La longitud del diámetro *AE* de la circunferencia de la figura es T. Si *BA, ED,* y *BD* son tangentes a dicha circunferencia en los puntos *A, E* y *C*, respectivamente, y *BD* = 50, calcula el área del trapecio *ABDE*.
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)



XIII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

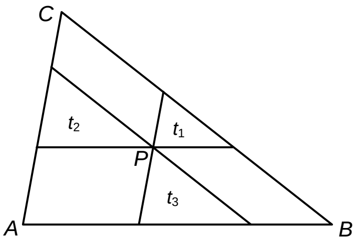
23 de noviembre de 2013

PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

Bachillerato.-

3A.- Sea "T" la respuesta del problema 1A.
¿Cuántos cuadrados perfectos, sin contar el cero, son menores que 10^T y múltiplos de 24?
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

3B.- Sea "T" la respuesta del problema 1B.
En el interior del triángulo *ABC* elegimos un punto *P* por el que trazamos paralelas a los lados y resultan los triángulos t_1, t_2 y t_3 de áreas $\frac{T}{3}, \frac{3T}{4}$ *y* $(4T+1)$, respectivamente.
¿Cuál es el área del triángulo *ABC*?
(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)



3C.- Calcula cuántos enteros *n* hay que verifican que $2^4 < 8^n < 16^{32}$.
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

CENTROS GANADORES

1. IES San Juan Bautista (Equipo A)
2. IES Ramiro de Maeztu (Equipo A)
3. IES Alameda de Osuna (Equipo A)

ESTUDIANTES GANADORES

NIVEL I (1º, 2º ESO)

1.	Alejandro Epelde Blanco	(Montessori School Los Fresnos)
2.	Diego Sierra	(Colegio San José del Parque)

NIVEL II (3º, 4º ESO)

1.	Daniel Puignau Chacón	(IES Alameda de Osuna)
2.	Javier González Domínguez	(IES San Juan Bautista)

NIVEL III (1º, 2º Bachillerato)

1.	Miguel Barrero Santamaría	(IES Alameda de Osuna)
2.	Ángel Prieto Naslín	(Liceo Francés de Madrid)

RELACIÓN DE LOS 10 CENTROS CON MAYOR PUNTUACIÓN

1.	IES San Juan Bautista A	43,5
2.	IES Ramiro de Maeztu A	40,7
3.	IES Alameda de Osuna A	40,0
4.	Colegio Alemán de Madrid	37,9
5.	Colegio Fray Luis de León A	28,6
6.	Liceo Francés de Madrid	26,45
7.	Colegio Virgen de Mirasierra	22,9
8.	IES La Estrella A	21,6
9.	Colegio Brains A	19,8
10.	Colegio Retamar	19,7

REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

L OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Comunidad de Madrid

FASE CERO: viernes 29 de noviembre de 2013

- En la hoja de respuestas, escribe la letra de la opción que creas correcta
- Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos; cada respuesta en blanco 1 punto, y cada respuesta errónea, 0 puntos.
- No está permitido el uso de calculadoras, instrumentos de medida o de cualquier aparato electrónico.
- TIEMPO: 3 horas.

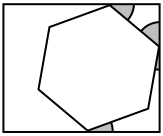
1. ¿Cuál es la cifra de las unidades de 3^{2013}?

A) 3 B) 9 C) 7 D) 1 E) 6

2. El robot OMEMAN se mueve sobre la recta real empezando en el 0. Da un paso a la derecha llegando al 1, dos pasos a la izquierda hasta el -1, tres pasos a la derecha hasta el 2, cuatro pasos a la izquierda hasta el -2 y así sucesivamente, alternando derecha e izquierda y un paso más en cada movimiento. ¿A qué número llegará después de 2012 giros?

A) 1007 B) -1006 C) 27 D) 11 E) 0

3. El dibujo muestra un hexágono regular dentro de un rectángulo. ¿Cuál es la suma de los cuatro ángulos marcados?



A) 90º B) 120ºC) 135ºD) 150º

E) Depende de la posición del hexágono respecto del rectángulo

4. Ayer fue el cumpleaños de David y de su abuela. Hoy la edad de la abuela es par y 15 veces la de David y dentro de cuatro años será el cuadrado de la edad que tenga David. ¿Cuántos años es mayor la abuela que David?

A) 42 B) 49 C) 56 D) 60 E) 64

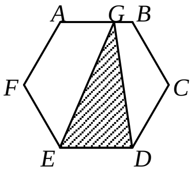
5. Dos lados de un triángulo miden 4 y 5 cm y el tercer lado x cm, siendo x un número entero. ¿Cuántos valores diferentes puede ser x?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

6. Un triángulo tiene dos lados iguales de longitud 5. ¿Qué longitud debe tener el tercer lado para que sea máxima el área de dicho triángulo?

A) 5 B) 6 C) $5\sqrt{2}$ D) 8 E) $5\sqrt{3}$

7. En la figura se observa un hexágono regular *ABCDEF* y un triángulo *EGD* en el que *G* es un punto del lado *AB*. ¿Qué fracción del área del hexágono ocupa el triángulo?

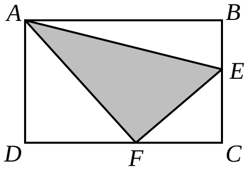


A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{2}{15}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{5}{12}$

8. ¿Cuántas ecuaciones de segundo grado, de la forma $x^2 + ax + b = 0$, con a y b diferentes, tienen por solución a y b?

A) Infinitas B) Ninguna C) 4 D) 3 E) 1

9. El área del triángulo *ABE* es $\frac{1}{5}$ del área del rectángulo *ABCD* y el área del triángulo *EFC* es $\frac{1}{8}$ del área de dicho rectángulo. ¿Qué fracción de la superficie del rectángulo ocupa el triángulo sombreado *AFE*?



A) $\frac{27}{40}$ B) $\frac{21}{40}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{19}{40}$ E) $\frac{23}{60}$

10. Un estudio entre los hábitos alimenticios de los estudiantes de un centro escolar concluye que al 70% les gustan las peras, al 75% les gustan las naranjas, al 80% les gustan los plátanos y al 85% les gustan las manzanas. ¿Cuál es el menor porcentaje posible de estudiantes de ese centro a los que les gustan todas esas frutas?

A) 10% B) 15% C) 20% D) 25% E) 70%

11. Si los números x e y verifican que $x + y = 20$ y que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$, ¿cuál es el valor de $xy^2 + x^2y$?

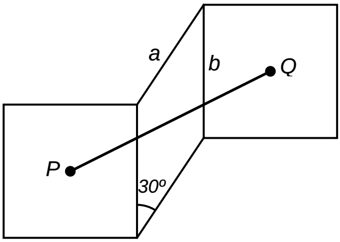
A) 80 B) 200 C) 400 D) 640 E) 800

12. En cada una de las doce casillas de la tabla de la figura hemos colocado un número de forma que la suma de los números de cada fila es la misma y también la suma de los números de cada una de las cuatro columnas es la misma. ¿Qué número representa la letra ***x***?

2	4		2
	3	3	
6		1	***x***

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

13. Sobre los lados mayores de un paralelogramo de lados a y b y un ángulo de 30º, construimos dos cuadrados, hacia fuera, como muestra la figura. ¿Cuál es la distancia entre los centros, P y Q, de los cuadrados?



A) $\sqrt{a^2 + b^2 + ab}$ B) $\sqrt{b^2 - a^2 + 2ab}$

C) $\sqrt{a^2 + b^2 - ab}$ D) $\sqrt{a^2 + b^2 + 1}$

E) $\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$

14. En el triángulo de vértices $A(0, 4)$, $B(-2, 0)$ y $C(4, 0)$ inscribimos un cuadrado con un lado descansando sobre el lado BC del triángulo. Uno de los vértices del cuadrado es el punto P de coordenadas:

A) (1, 3) B) (2, 2) C) (1,5; 2,5) D) (1,6; 2,4) E) (1,8; 2,2)

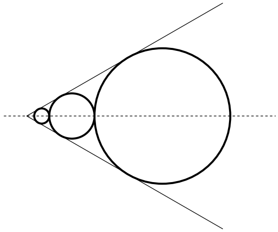
15. ¿Cuál es el mayor valor de a para el que la recta $y = 10x + 5$ es tangente a la parábola $y = x^2 + ax + 6$?

A) 18 B) 16 C) 15 D) 14 E) 12

16. Si x e y son enteros positivos que verifican la ecuación $\sqrt{x} - \sqrt{11} = \sqrt{y}$, ¿cuál es el máximo valor de $\frac{x}{y}$?

A) 2 B) 4 C) 8 D) 11 E) 44

17. En la figura se observan tres circunferencias tangentes exteriores y dos rectas tangentes a las tres. Si los radios de las circunferencias son r_1, r_2 y r_3, con $r_1 < r_2 < r_3$) y la distancia entre el centro de la pequeña y el centro de la mayor es $16r_1$, el cociente $\frac{r_1}{r_2}$ es:



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{7}$ E) $\frac{1}{4}$

18. En el triángulo isósceles ABC, con $AB = AC$, la bisectriz del ángulo de vértice C corta al lado AB en un punto D. Si $BC = CD$, el ángulo $C\hat{D}A$ es igual a:

A) 90º B) 100º C) 108º D) 110º E) 120º

19. En una clase las chicas son más del 45% pero menos del 50%. ¿Cuál es el menor número posible de chicas en esa clase?

A) 5 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

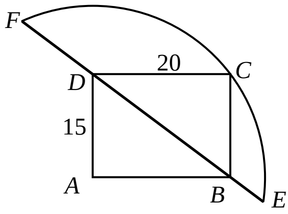
20. Si $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$, el valor de n es:

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

21. Si $a + b + c = 7$ y $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{7}{10}$, ¿cuál es el valor de $\frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a}$?

A) $\frac{19}{10}$ B) $\frac{17}{10}$ C) $\frac{9}{7}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{10}{7}$

22. En la figura se observa un rectángulo $ABCD$ de lados 20 y 15 y un arco de la circunferencia de centro en A y radio AC. La cuerda de dicho arco pasa por D y B. ¿Cuál es la longitud de dicha cuerda?



A) 50 B) $2\sqrt{20 \cdot 25}$ C) $2\sqrt{37 \cdot 13}$

D) 44 E) 26

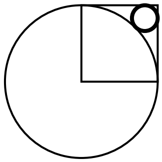
23. Para cada entero positivo n ordenamos, de mayor a menor, todos sus divisores; el primero será el propio número y el último el 1. ¿Para cuántos valores de n el segundo número de esta lista será el 91?

A) Infinitos B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

24. ¿Cuántos divisores de 4 cifras tiene el número 102^2?

A) 1 B) 2 C) 5 D) 3 E) 4

25. El cuadrado de la figura tiene lado igual a 1. ¿Cuál es el radio del círculo pequeño?



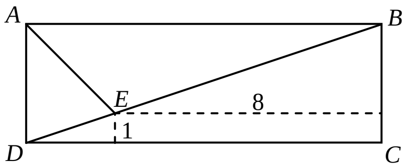
A) $\sqrt{2}-1$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

E) $\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

26. En un cajón hay 2 pares de calcetines negros, 3 pares de grises y 4 de azules. Yo sé que hay 3 calcetines con agujeros pero no me acuerdo de qué color eran. Si están todos revueltos y los elijo al azar, ¿cuántos calcetines debo coger, como mínimo, para estar seguro de poder ponerme dos del mismo color y sin agujeros?

A) 2 B) 3 C) 6 D) 7 E) 8

27. En el rectángulo $ABCD$ la bisectriz del ángulo $\hat{A}$ corta a la diagonal BD en el punto E. Si las distancias de E a los lados DC y BC son 1 y 8, respectivamente, ¿cuál es la longitud del lado AB de dicho rectángulo?



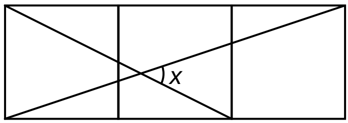
A) $8+2\sqrt{2}$ B) $11-\sqrt{2}$ C) 10

D) $3+3\sqrt{2}$ E) $11+\frac{\sqrt{2}}{2}$

28. ¿Cuál es la última cifra, distinta de cero, del número $2^{57}\cdot 3^4\cdot 5^{53}$?

A) 8 B) 6 C) 4 D) 2 E) 1

29. Se juntan tres cuadrados como se indica en la figura. ¿Cuánto mide el ángulo x?



A) 30º B) 40º C) 45º

D) 50º E) 60º

30. Algunos números de tres cifras verifican que si le quitas la primera cifra o si le quitas la última, obtienes, en ambos casos, un cuadrado perfecto. Por ejemplo el número 816. ¿Cuál es la suma de todos los números de tres cifras con esta curiosa propiedad?

A) 2016 B) 2013 C) 1993 D) 1465 E) 1177

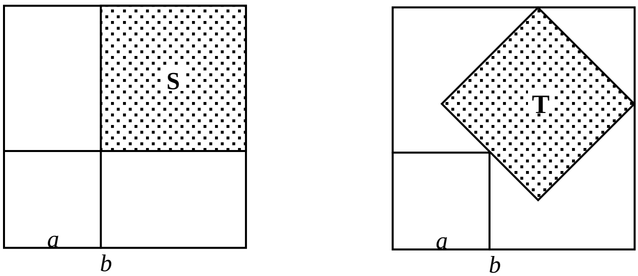
REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

L OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Comunidad de Madrid

FASE LOCAL: segunda prueba. Jueves 19 de diciembre de 2013
Tiempo: 3h 30 min

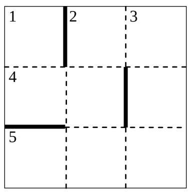
1. En las figuras adjuntas se observan dos cuadrados iguales de lado *b*, y en su interior dos cuadrados iguales de lado *a* y dos cuadrados, S y T, uno en cada una de las figuras. Los lados del cuadrado S son paralelos a los de lados *a* y *b*, y las diagonales del cuadrado T también son paralelas a los lados de los cuadrados de lados *a* y *b*. Calcula el cociente (área de S) : (área de T)



2. Seis vacas se comen toda la hierba de un prado –que crece a ritmo constante- en tres días. Tres vacas, con la misma hambre, se la comen en siete días. ¿Cuántos días tardaría una vaca en comerse toda la hierba si estuviera ella sola?

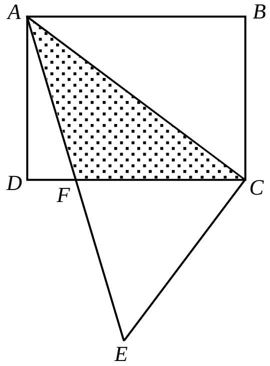
3. Considera todos los números de cinco cifras cuya suma es 43: por ejemplo, el número 79999. Si elegimos uno de ellos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea múltiplo de 11?
4. Cada casilla del cuadro siguiente se rellena siguiendo las siguientes reglas:

Horizontales	Verticales
2: suma de cifras de 2 vertical (dos cifras)	1: producto de dos primos (dos cifras)
4: número primo (dos cifras)	2: múltiplo de 99 (tres cifras)
5: 1 vertical + 2 horizontal + 3 vertical (tres cifras)	3: cuadrado de 4 horizontal. (tres cifras)



5. Halla todos los conjuntos de tres enteros positivos diferentes tales que cada uno de ellos divida a la suma de los otros dos.

6. La figura muestra un rectángulo *ABCD* con $AB = 16$ y $BC = 12$. Si el ángulo $A\hat{C}E$ es recto y $CE = 15$, calcula el área del triángulo *ACF*.



7. La suma de cinco enteros consecutivos es un cuadrado perfecto, y la suma de los tres centrales es un cubo perfecto. Si todos son menores que 2013, halla la raíz de su suma.

8. Determina la menor distancia posible desde el origen de coordenadas a los puntos (x, y) de la curva de ecuación $(x - y)xy = 8$ situados en el primer cuadrante.

9. En un triángulo rectángulo de lados enteros, el radio de la circunferencia inscrita es 12. Calcula el mayor valor posible para la hipotenusa de dicho rectángulo.

10. En el trapecio *ABCD*, de bases *AD* y *BC*, se verifica que $DA = DB = DC$. Sea *E* el punto de corte de la mediatriz del lado *DC* con la prolongación del lado *AB*. Si $B\hat{C}E = 2 \cdot C\hat{E}D$, calcula $B\hat{C}E$.

L OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Prueba de selección
Comunidad de Madrid

Primera sesión
Viernes 17 de enero de 2014

No está permitido el uso de calculadoras. Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.

1. Se considera un polígono de 90 vértices, numerados del 1 al 90 de manera aleatoria. Demostrar que siempre podemos encontrar dos vértices consecutivos cuyo producto es mayor o igual que 2014.

2. Hallar todas las soluciones enteras de la ecuación $x^4 + y^4 = 3x^3y$

3. Se considera un cuadrado *ABCD* y su circunferencia circunscrita $\mathcal{K}$. Sea *P* un punto de $\mathcal{K}$. Demostrar que la distancia de *P* a alguno de los vértices del cuadrado debe ser un número irracional.

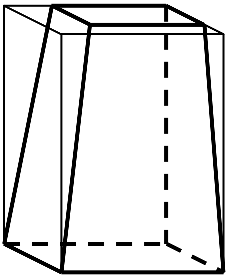
Segunda sesión
Sábado 18 de enero de 2014

Tiempo: 3 horas y media

4. Sean a y b números reales positivos. Demostrar que $a + b \geq \sqrt{ab} + \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$

5. Encontrar las tres últimas cifras del número 7^{2014}

6. De un prisma recto de base cuadrada, con lado de longitud L_1, y altura *H*, extraemos un tronco de pirámide, no necesariamente recto, de bases cuadradas, con lados de longitud L_1 (para la inferior) y L_2 (para la superior), y altura *H*. Las dos piezas obtenidas aparecen en la imagen siguiente:
Si el volumen del tronco de pirámide es 2/3 del total del volumen del prisma, ¿cuál es el valor de L_1/L_2?



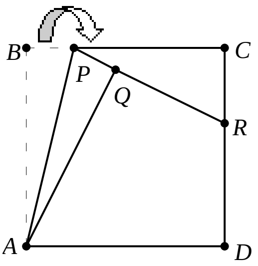
XIXª OLIMPIADA de MAYO
Primer Nivel
Mayo de 2013

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
<u>Justifica cada una de tus respuestas.</u>
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

PROBLEMA 1
Hallar la cantidad de formas de escribir el número 2013 como suma de dos enteros mayores o iguales que cero de modo que al sumar no haya **ningún** acarreo.
ACLARACIÓN: En la suma 2008 + 5 = 2013 hay acarreo de las unidades a las decenas.

PROBLEMA 2
Elisa suma los dígitos de su año de nacimiento y observa que el resultado coincide con los dos últimos dígitos del año en que nació su abuelo. Más aún, los dos últimos dígitos del año en que ella nació, son precisamente la edad actual de su abuelo. Hallar el año en el que nació Elisa y el año en el que nació su abuelo.

PROBLEMA 3
Sea *ABCD* un cuadrado de papel de lado 10 y *P* un punto en el lado *BC*. Al doblar el papel a lo largo de la recta *AP*, el punto *B* determina el punto *Q*, como se ve en la figura. La recta *PQ* corta al lado *CD* en *R*. Calcular el perímetro del triángulo *PCR*.



PROBLEMA 4
Pablo escribió 5 números en una hoja y luego escribió los números 6,7,8,8,9,9,10,10,11 y 12 en otra hoja que le dio a Sofía, indicándole que esos números son las sumas posibles de dos de los números que él tiene escondidos. Decidir si con esta información Sofía puede determinar los cinco números que escribió Pablo.

PROBLEMA 5

En la pizarra está dibujado un cuadrado de 8×8 dividido en 64 cuadraditos de 1×1 mediante líneas paralelas a los lados. Gustavo borra algunos segmentos de longitud 1 de modo que a cada cuadradito de 1×1 le borra 0, 1 ó 2 lados.

Gustavo afirma que borró 6 segmentos de longitud 1 del borde del cuadrado de 8×8 y que la cantidad de cuadraditos de 1×1 que tienen exactamente 1 lado borrado es igual a 5.

Decidir si lo que dijo Gustavo puede ser cierto.

XIXª OLIMPIADA de MAYO
Segundo Nivel
Mayo de 2013

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

PROBLEMA 1
Sofía sumó los números de las páginas de un libro empezando por el 1 en la primera página y obtuvo 2013. Pablo vio como hizo la suma y se dio cuenta que Sofía se saltó una página. ¿Cuántas páginas tiene el libro y qué número de página se saltó?

PROBLEMA 2
Se dispone de un regla sin números y de un trisector que marca en cualquier segmento los dos puntos que lo dividen en tres partes iguales. Construir el punto medio de un segmento dado utilizando exclusivamente estas dos herramientas.

PROBLEMA 3
Se marcan varios puntos distintos en el plano, y se trazan todos los segmentos determinados por esos puntos. Una recta r no pasa por ninguno de los puntos marcados y corta a exactamente 60 de los segmentos que hemos trazado. ¿Cuántos segmentos no están cortados por r? Dar todas las posibilidades.

PROBLEMA 4
¿Es posible escribir 100 números impares en una fila de tal forma que la suma de cada 5 números adyacentes sea un cuadrado perfecto y que la suma de cada 9 números adyacentes también sea un cuadrado perfecto?

PROBLEMA 5
Se tienen 600 tarjetas, 200 de ellas tienen escrito el número 5, 200 tienen escrito el número 2 y las otras 200 tienen escrito el número 1. Usando estas tarjetas se quieren formar grupos de tal forma que en cada grupo la suma de los números sea 9. ¿Cuál es la mayor cantidad de grupos que se pueden formar?

XIX OLIMPIADA DE MAYO – 2013. RESULTADOS DE ESPAÑA

PRIMER NIVEL

	Apellidos y nombre	Premio
1	Epelde Blanco, Alejandro	ORO
2	Rodríguez Martín, Saúl	PLATA
3	Sierra Corredera, Diego	PLATA
4	Carbonié del Burgo, Diego	BRONCE
5	García González, Hugo	BRONCE
6	Andrés Torrijos, Jorge	BRONCE
7	Ruiz de la Puente, Alejandro	BRONCE
8	Tejedor Alonso, Uttam	MENCIÓN
9	Soto Martín, Pablo	MENCIÓN
10	Sánchez González, Víctor David	MENCIÓN

SEGUNDO NIVEL

1	Carbajo Temprano, Miguel	PLATA
2	Sánchez Ibáñez, Enrique	PLATA
3	Checas Calderón, José	PLATA
4	Crisanto García, Svetlin	BRONCE
5	García González, Berta	BRONCE
6	González Domínguez, Javier	BRONCE
7	Olalla Santamarina, Alfonso	BRONCE
8	Puignau Chacón, Daniel	MENCIÓN
9	Olmo de Casas, Pablo del	MENCIÓN
10	Verdasco Ramos, Santiago	MENCIÓN

Dirección General de Mejora de la Calidad de la Enseñanza
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN
Comunidad de Madrid

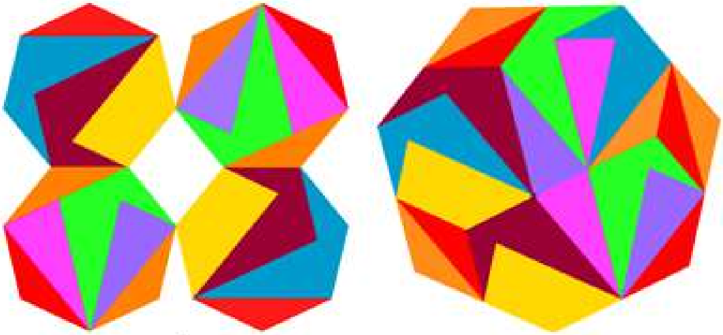
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Consejo Social de la UCM

sm

ANAYA

El Corte Inglés

XIX concurso de primavera



matemáticas

2015

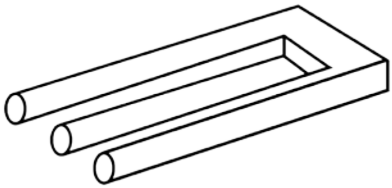
Comunidad de Madrid

Comité organizador del Concurso de Primavera

Alfredo Martínez Sanz
Esteban Serrano Marugán
Francisco López Álvarez
Hugo Fernández Hervás
Isabel Benito Miguel
Javier Soler Areta
Jesús García Gual
Joaquín Hernández Gómez
José María Sordo Juanena

Juan Jesús Donaire Moreno
Luis Ferrero de Pablo
María Gaspar Alonso-Vega,
María Moreno Warleta
María Olbés Fernández
Merche Sánchez Benito
Miguel Ángel Baeza Alba
Pilar Ruiz Cervigón
Víctor Manuel Sánchez González

Siempre nos dijeron que
la mejor lotería era el trabajo,
pero nunca pensamos
que tener trabajo iba a ser una lotería.



Presentación

Vivo sin vivir en mí,
y tan alta vida espero,
que muero
porque no muero.
(Sta Teresa de Jesús)

Ven muerte tan escondida,
que no te sienta venir,
pues el miedo de morir,
me está quitando la vida.
(Variante satírica de una
copla del Cancionero General
de Hernando del Castillo).

“... Su canto asciende a más profundo cuando, abierto en el aire, ya es de todos los hombres.” (R. Alberti)

En poesía la contraposición de términos (oximoron) produce imágenes de gran fuerza y belleza.
“Le dieron el premio al personaje más anodino del mundo”, parece una sutil greguería, pero su versión matemática, “El primer número natural que no tiene nada de especial”, es una inquietante paradoja.
Las paradojas son un acicate para la Ciencia, pero antes fueron una puñalada en la espalda del que se topó con ellas.

El Comité Organizador

Correcciones portada anterior:

$$1+(1+1)+(1+1+1)+...+(1+1+1+...+1)=\binom{n+1}{2}$$

$$1+(1+2)+(1+2+3)+...+(1+2+3+...+n)=\binom{n+2}{3}$$

AGRADECIMIENTOS

A los participantes y colaboradores del Concurso.

A la Facultad de Matemáticas.

Al Consejo Social y al Vicerrectorado de alumnos de la UCM.

Al Área de Formación del Profesorado dentro de la Dirección General de la Mejora de la Calidad de la Enseñanza de la Consejería de Educación.

A Educamadrid.

A las editoriales Grupo **ANAYA** y Ediciones **S.M.**

Al grupo empresarial El Corte Inglés.

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 12 de febrero de 2014

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Aviraneta
Libros Guijarro
Smartick

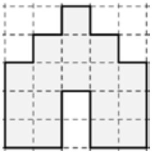
1 Comenúmeros se ha comido algunos números de los deberes de Jaime.

 – 37 = 39	 + 23 = 57	15 ×  = 195	 : 7 = 28

¿Cuánto suman todos los números que se ha comido el muy canalla?

A) 127 **B)** 245 **C)** 319 **D)** 365 **E)** 3039

2 Inés ha pintado una casita en una cuadrícula. Si el perímetro de cada cuadradito de la cuadrícula es 8 cm, ¿cuál es el perímetro de la casita?

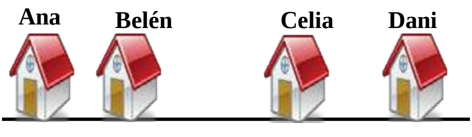


A) 28 cm **B)** 32 cm **C)** 40 cm **D)** 48 cm **E)** 136 cm

3 Por allí vienen cuatro amigos, cada uno con un oficio diferente:
● Adrián y el profesor van discutiendo.
● Javier vive muy cerca del actor.
● Álvaro es el primo del pintor, que a su vez es vecino de Juan.
● El tenista es más alto que Juan y que el actor.
● Adrián y Álvaro jamás han jugado al tenis.
¿Cuál de los amigos es el actor?

A) Adrián **B)** Álvaro **C)** Javier **D)** Juan **E)** No se sabe con certeza

4 Ana, Belén, Celia y Dani viven en la misma calle, como ves en el dibujo. La distancia entre la casa de Ana y de Dani es de 2,5 km, entre la de Ana y Belén es de 760 m y entre la de Celia y Dani de 975 m. ¿A qué distancia, en metros, está la casa de Ana de la de Celia?



A) 152,5 **B)** 173,5 **C)** 765 **D)** 1525 **E)** 1735

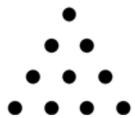
5 Juan le dio a Olivia un tercio de su tableta de chocolate y después le dio a Rafa la mitad de lo que le quedaba. ¿Qué fracción de tableta le ha quedado a él?

A) $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{1}{5}$ **C)** $\frac{2}{5}$ **D)** $\frac{1}{6}$ **E)** $\frac{5}{6}$

6 Don Retorcido nos quiere liar y dice:
I. La suma de un número par con un número impar es siempre impar.
II. Si multiplicas un número par por un número impar el resultado puede ser impar.
III. Si divides un número par entre otro número par el resultado puede ser impar.
IV. Si a un número impar le restas otro número impar el resultado nunca es impar.
¿Cuántas de estas afirmaciones son ciertas?

A) Ninguna **B)** Una **C)** Dos **D)** Tres **E)** Cuatro

7 Richi colecciona monedas de un céntimo y las ha colocado formando un triángulo equilátero. Por ahora la base del triángulo solo tiene cuatro monedas pero, ¿cuántos euros tendrá el día que en la base haya 20 monedas?

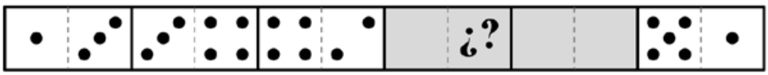


A) 0,60 **B)** 2,10 **C)** 6 **D)** 80 **E)** 200

8 Dos lápices y tres gomas cuestan 3 €. Dos lápices y 5 gomas cuestan 3,80 €. ¿Cuánto cuesta un lápiz?

A) 0,90 € **B)** 0,95 € **C)**1 € **D)**1,05 € **E)** 1,10 €

9 Dominique ha colocado seis fichas de dominó de la forma usual, es decir, haciendo coincidir la puntuación de los lados que se tocan. Si la suma de todos los puntos es 42, ¿cuántos puntos hay debajo de las interrogaciones?

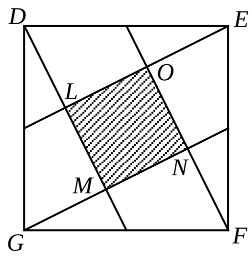


A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E) 6**

10 La castañera de mi barrio vende dieciséis castañas a tres euros. ¿Cuántas castañas compraré con cuatro euros y medio?

A) 22 **B)** 22,5 **C)** 23 **D)** 23,85 **E)** 24

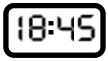
11 En el cuadrado *DEFG* de lado 10 cm hemos dibujado algunos segmentos uniendo vértices con puntos medios de los lados, y así hemos obtenido el cuadrado rayado *LMNO*. ¿Cuál es su área en cm^2?



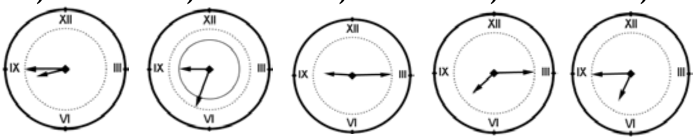
A) 20 **B)** 25 **C)** 35 **D)** 40

E) 50

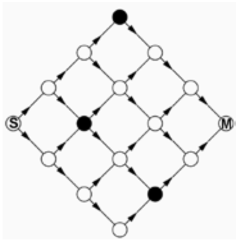
12 Mi abuelo y yo tenemos los relojes perfectamente sincronizados. Cuando mi reloj marca las 18:45, ¿cómo están las agujas en el reloj de mi abuelo?



A) **B)** **C)** **D)** **E)**



13 Indiana Jones debe recorrer el camino de piedras que ves. Solo puede ir por las líneas negras en el sentido que marcan las flechas. Él no lo sabe pero las piedras negras son explosivas. ¿Cuántos caminos seguros hay desde la salida (S) hasta la meta (M)?

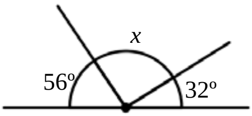


A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

14 Luca ya sabe contar de tres en tres: 1, 4, 7, 10, 13,… Cuando lleva dichos 2014 números, su abuela María consigue callarlo con unas gominolas. ¿Cuánto suman las cifras del último número que dijo Luca?

A) 7 **B)** 10 **C)** 15 **D)** 18 **E)** 23

15 ¿Cuánto mide el ángulo *x*?



A) 92º **B)** 88º **C)** 178º **D)** 90º **E)** 272º

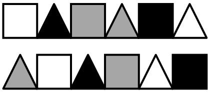
16 Al repartir una bolsa de caramelos entre 20 niños, tocaron a 11 caramelos cada uno y sobraron 8. Si hubiéramos repartido entre 19 niños, ¿cuántos caramelos habrían sobrado?

A) 9 **B)** 8 **C)** 6 **D)** 5 **E)** Ninguno

17 ¡Juanito, no puedes estar todo el día delante de la Play! A partir de ahora solo podrás usarla una hora por semana. Si el lunes jugó 14 minutos y 30 segundos y el martes 8 minutos y 45 segundos, ¿cuánto tiempo le queda aún esta semana?

A) 35 min 15 s **B)**36 min 45 s **C)** 37 min 15 s **D**) 37 min 45 s **E)** 38 min 15 s

18 Triangupín y Cuadripón juegan a colocar sus fichas una detrás de otra por turnos. Triangupín tiene tres triángulos, uno blanco, otro negro y el tercero gris y Cuadripón tienen tres cuadrados, uno de cada color. Aquí puedes ver dos configuraciones distintas. ¿Cuántas configuraciones distintas pueden formar?



A) 9 **B)** 12 **C)** 36 **D)** 72 **E)** 720

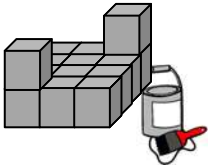
19 Don Retorcido está muy decepcionado con Esteban pues dice que no sabe operar con decimales. Hoy Esteban ha hecho las siguientes operaciones:

1,25 + 4,75 = 6 2,04 × 0,5 = 1,02 1,4 – 0,23 = 1,17 5,2 :2 = 2,6

¿Cuántas de ellas están mal?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

20 Anabel ha cogido 14 cubitos grises y los ha unido para formar la estructura que ves al margen. Luego ha pintado toda su estructura de rojo, por arriba, por abajo, por todos sus lados. Después de observarla un buen rato ha decidido que no le gusta y ha vuelto a separar los 14 cubitos. ¿Cuántas caras de los cubitos han quedado ahora de color gris?



A) 19 **B)** 30 **C)** 38 **D)** 40 **E)** 50

21 Si subo los escalones de tres en tres doy 30 pasos. ¿Cuántos pasos dará un gigante que los sube de diez en diez?

A) 9 **B)** 10 **C)** 15 **D)** 18 **E)** 20

22 En una bolsa hay ocho caramelos de menta, seis de fresa y el resto de limón.
Si saco un caramelo con los ojos cerrados, la probabilidad de que sea de limón es 1/2. ¿Cuántos caramelos de limón hay?

A) 6 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)**14

23 Hoy es miércoles y ya solo faltan 100 días para mi cumple. ¿En qué día de la semana caerá mi cumpleaños este año?

A) Martes **B)** Miércoles **C)** Jueves D) Viernes **E)** Sábado

24 Dieciocho perros salchichas comen lo mismo que quince pastores alemanes y cinco pastores alemanes comen tanto como nueve chihuahuas. ¿Cuántos chihuahuas comen lo mismo que ocho perros salchichas?

A) 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 12

25 Sofía tiene 24 canicas azules, 30 verdes y 18 plateadas. Quiere meterlas en cajitas iguales y con el mismo número de canicas en cada una de ellas pero, como es muy maniática, no quiere mezclar canicas de distintos colores en la misma caja. ¿Cuántas cajas necesitará como mínimo?

A) 6 **B)** 12 **C)** 18 **D)** 24 **E)** 36

25 Don Retorcido hizo grupos de cuatro con los estudiantes de una clase y le sobraron dos. Después hizo grupos de cinco y le sobró uno. Si en la clase hay quince chicas y hay más chicas que chicos, ¿cuántos chicos hay?

A) 6 **B)** 7 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 12 de febrero de 2014

NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Aviraneta
Libros Guijarro
Smartick

1 Don Retorcido está muy decepcionado con Esteban pues dice que no sabe operar con decimales. Hoy Esteban ha hecho las siguientes operaciones:

$1{,}25 + 4{,}75 = 6$ $\qquad 2{,}04 \times 0{,}5 = 1{,}02$ $\qquad 1{,}4 – 0{,}23 = 1{,}17$ $\qquad 5{,}2 : 2 = 2{,}6$

¿Cuántas de ellas están mal?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

2 ¿Qué número se ha comido Comenúmeros en esta igualdad?

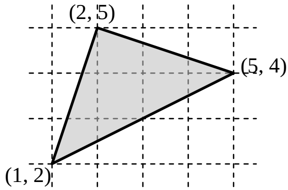
$$2{,}014 = 2 + \frac{1}{} + \frac{4}{1000}$$

A) 0 **B)** 10 000 **C)** 10 **D)** 100 **E)** 1000

3 Si subo los escalones de tres en tres doy 30 pasos menos que si los subo de dos en dos. ¿Cuántos pasos dará un gigante que los sube de diez en diez?

A) 9 **B)** 10 **C)** 15 **D)** 18 **E)** 20

4 Las coordenadas de los vértices de un triángulo son $A(1, 2)$, $B(2, 5)$ y $C(5, 4)$. Su área es:

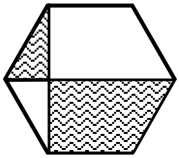


A) 4 **B)** 4,5 **C)** 5 **D)** 5,5 **E)** 6

5 Don Retorcido acababa de escribir en la pizarra todos los números enteros desde el 1 hasta el 100 y de repente apareció Comenúmeros con mucha hambre. ¡Me comeré todos aquellos números que sean múltiplos de tres, menos los que tengan un siete entre sus cifras pues el siete se me indigesta! ¿Cuántos números quedaron en la pizarra después de la comilona?

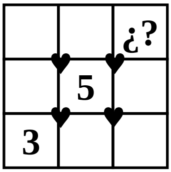
A) 27 **B)** 59 **C)** 67 **D)** 73 **E)** 81

6 En mi jardín con forma de hexagono regular he plantado margaritas en las zonas sombreadas. Si en el trapecio he plantado 420, ¿cuántas he plantado en el triángulo?



A) 84 **B)** 60 **C)** 70 **D)** 76 **E)** 65

7 Este cuadrado es amoroso. ¿Amoroso? Sí fíjate, debes poner todos los números desde el 1 hasta el 9 y además, las cuatro casillas que rodean a cada corazón deben sumar 20. ¿Qué número hay que colocar a la fuerza en la casilla del vértice superior derecho?



A) 6 **B)** 7 **C)** 9 **D)** 8 **E)** 4

8 Sandra ha dividido un cuadrado de 81 cm^2 de área en 81 cuadraditos iguales, y los ha recolocado formando dos rectángulos. Sabiendo que uno tiene doble área que el otro y que sus perímetros difieren en 34 cm, ¿qué longitud tiene el lado mayor del rectángulo de menor área?

A) 27 cm **B)** 18 cm **C)** 9 cm **D)** 6 cm **E)** 3 cm

9 ¿Cuándo es tu cumple, Don Retorcido?, preguntó ilusionada la pequeña Lucía. Yo cumplo años justo el día central de este año, respondió nuestro amigo. ¿Qué día nació Don Retorcido?

A) 29 de junio **B)** 30 de junio **C)** 1 de julio **D)** 2 de julio **E)** 3 de julio

10 Tengo un pentágono regular dibujado en una cartulina. Cojo unas tijeras y hago un único corte recto. ¿Cuál de estas figuras no puedo obtener con dicho corte?

A) Trapecio **B)** Triángulo isósceles **C)** Triángulo escaleno
D) Hexágono **E)** Triángulo rectángulo

11 Sol y Mía se han inventado un juego: en cada partida, la que gana se lleva 5 puntos y la que pierde se anota solo 2 puntos. Si Sol ha ganado exactamente 521 partidas y Mía ha conseguido un total de 2792 puntos, ¿cuántas partidas han jugado?

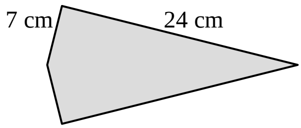
A) 871 **B)** 708 **C)** 875 **D)** 187 **E)** 788

12 Olas gigantes, vientos fortísimos y una isla misteriosa: el naufragio ha sido inevitable. Los piratas del barco hacen recuento y ven que sólo tienen 27 quesos para sobrevivir. El primer día se reparten un queso para cada cuatro; el segundo día se reparten un queso para cada cinco; y observan con tristeza que ya no tienen más víveres. La tragedia les acecha… ¿Cuántos piratas son?

A) 135 **B)** 243 **C)** 56 **D)** 15 **E)** 60

13 La punta de flecha de la figura tiene dos ángulos rectos. Su área, en cm^2, es:

A) 168 **B)** 164 **C)** 156 **D)** 150 **E)** 130



14 Luca ya sabe contar de tres en tres: 1, 4, 7, 10, 13,… Cuando lleva dichos 2014 números, su abuela María consigue callarlo con unas gominolas. ¿Cuánto suman las cifras del último número que dijo Luca?

A) 7 **B)** 10 **C)** 15 **D)** 18 **E)** 23

15 El profesor ha escrito 100 números en la pizarra y nos ha pedido calcular su media. ¡86!, gritó Adrián al poco tiempo. Muy bien, dijo el profesor y borró 20 números. ¿Cuál es la media de los que quedan? ¡84!, gritó Anabel. Perfecto. ¿Cuál es la media de los 20 números que borró el profesor?

A) 94 **B)** 90 **C)** 86 **D)** 85 **E)** 20

16 He comprado tres alfombras cuyas áreas suman 20 m^2 y las he tirado a lo loco en mi jardín. Ha resultado que la superficie que he cubierto ha sido de 14 m^2 y la superficie cubierta por la superposición de sólo dos alfombras es de 2 m^2. ¿Qué área, en m^2, ha quedado cubierta por la superposición de las tres alfombras?

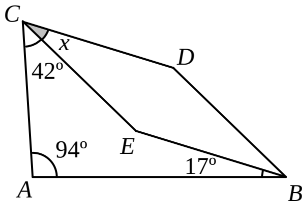
A) 1 **B) 2** **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

17 Dos lápices y tres gomas cuestan 3 €. Tres lápices y 4 gomas cuestan 4,30 €. Un lápiz cuesta:

A) 0,90 € **B)** 0,95 € **C)** 1 € **D)** 1,05 € **E)** 1,10 €

18 El ángulo agudo *x* del rombo *BDCE* mide:

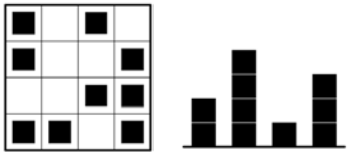
A) 35º **B)** 32º **C)** 30º **D)** 27º **E)** 25º



19 Al repartir una bolsa de caramelos entre los niños de una clase, tocan a 11 caramelos cada uno y sobran unos pocos. Si un niño no quiere caramelos, los demás tocan a un caramelo más y sobran los mismos caramelos que antes. ¿Cuántos niños hay en la clase?

A) 24 **B)** 22 **C)** 20 **D)** 12 **E)** 11

20 Irene hizo una ciudad con cubos de madera idénticos. En las figuras puedes ver la vista desde arriba y lo que ve su prima Ana desde uno de los lados, aunque no sabemos desde cuál. ¿Cuál es el número máximo de cubos que pudo haber usado Irene en su construcción?



A) 21 **B)** 22 **C)** 23 **D)** 24 **E)** 25

21 Una cabra come al día 200 g de pienso. Heidi compró tres cabras y 20 kg de pienso para darles de comer todas las mañanas. Una noche, después de cuatro días, una cabra se escapó y nueve noches más tarde otra pobre cabra se murió. ¿Cuántos días podrá comer aún la última cabrita con el pienso que queda?

A) 7 **B)** 20 **C)** 52 **D)** 70 **E)** 88

22 Inés debería dejar ya las redes sociales, ¡cada tres minutos recibe cinco Whatsapps! A este ritmo, ¿cuántos mensajitos recibirá en las próximas ocho horas?

A) 500 **B)** 800 **C)** 950 **D)** 2400 **E)** 48 000

23 Santiago ha completado la siguiente tabla siguiendo siempre la misma pauta pero como es muy larga, hemos cortado algunos trozos.

1	2	3	4	5	…	9	10	…	♥	…	29	30
5	9	13	17	21	…	♥	41	…	69	…	117	121

¿Cuál es la suma de los dos números que hemos sustituido por corazones?

A) 37 **B)** 41 **C)** 54 **D)** 78 **E)** 314

24 Si $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$ y $\frac{b}{c}=\frac{8}{5}$, ¿cuánto vale $\frac{a}{b+c}$?

A) $\frac{4}{5}$ **B)** $\frac{4}{13}$ **C)** $\frac{5}{16}$ **D)** $\frac{21}{10}$ **E)** $\frac{16}{5}$

25 En una caja hay bolas verdes, amarillas y rojas. Si sacamos una bola con los ojos cerrados es igual de probable que sea verde o que sea amarilla y la probabilidad de que sea amarilla es el doble de que sea roja. Si en la caja hay 40 bolas en total, ¿cuántas son rojas?

A)5 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 15 **E)** 20

XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 12 de febrero de 2014

NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Aviraneta
Libros Guijarro
Smartick

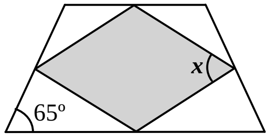
1

En una tienda de libros de segunda mano se lee el siguiente cartel:
“Un libro 2€. Si te llevas 5 libros te regalamos uno más”
Si Alicia se llevó 16 libros, ¿cuántos euros pagó?

A) 8 **B)** 12 **C)** 26 **D)** 28 **E)** 32

2

En un trapecio isósceles con tres lados iguales inscribimos el rombo cuyos vértices son los puntos medios de los lados del trapecio. Si el ángulo agudo del trapecio mide 65º, ¿cuántos grados mide el ángulo agudo, *x*, del rombo?



A) 65º **B)** 60º **C)** 55º **D)** 62º 30’ **E)** 45º

3

El cuadrado perfecto que hay entre 4 778 595 y 4 778 603 acaba en:

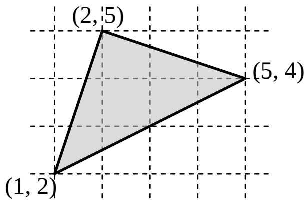
A) 6 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 1 **E)** 2

4

Las coordenadas de los vértices de un triángulo son *A*(1, 2), *B*(2, 5) y *C*(5, 4). Su área es:

A) 4 **B)** 4,5 **C)** 5

D) 5,5 **E)** 6



5

Si sumamos 4^{15} y 8^{10} obtenemos una potencia de 2. ¿Cuál?

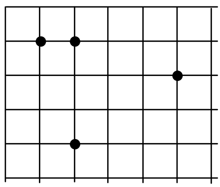
A) 2^{30} **B)** 2^{31} **C)** 2^{40} **D)** 2^{50} **E)** 2^{60}

6

En la cuadrícula que observas, de lado 1, hay marcados cuatro puntos. Si consideras los triángulos cuyos vértices son tres de ellos, ¿cuál es el área del menor?

A) $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** 1 **D)** $\frac{3}{2}$

E) 2



7 Arantxa se ha inventado la operación ♥ que funciona así: a ♥ $b = a^2(a–b)(b–a)$, siendo a y b dos números positivos distintos. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

I. a ♥ b no puede ser positivo.

II. 1 ♥ 2 – 2 ♥ 1 = 3

III. (a ♥ b) : (b ♥ a) = a : b sean cuales sean los números a y b.

A) Solo I **B)** Solo II **C)** Solo III **D)** Solo I y II **E)** Solo I y III

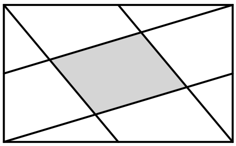
8 Al repartir una bolsa de caramelos entre varios niños, tocaron a m caramelos cada uno y sobraron n. Si hubiéramos repartido los caramelos entre $m + 1$ niños también habrían sobrado n. ¿Cuántos caramelos, como mínimo, había en la bolsa?

A) m^2+m+n **B)** m^2-m+n **C)** $m\cdot n+n$ **D)** m^2+n **E)** $m^2+m\cdot n+n$

9 Si $P(x)=x^2+mx+n$ tiene las raíces a y $\frac{1}{a}$, entonces $P\left(a+\frac{1}{a}\right)$ es igual a:

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

10 En el rectángulo de la figura, uniendo vértices con puntos medios de los lados hemos definido un romboide en el centro. Si el área del rectángulo es de 60 cm^2, la del romboide es:



A) 25 **B)** 20 **C)** 15 **D)** 12 **E)** 10

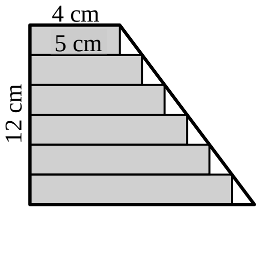
11 Consideramos el menor número natural que es múltiplo de 72 y que la suma de sus cifras es 72. ¿Cuántos nueves tiene?

A) ocho **B)** siete **C)** seis **D)** cinco **E)** cuatro

12 El área, en cm^2, del trapecio circunscrito a la escalera del dibujo, con escalones de igual altura, es:

A) 72 **B)** 76 **C)** 80

D) 84 **E)** 90



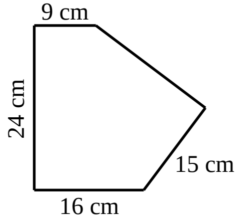
13 Escribimos seguidos los cuadrados de los números del 1 al 100: 1 4 9 1 6 2 5 3 6 ...
¿Qué cifra nos encontraremos en la posición cien?

A) 1 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 9

14 Si x, y, z son números positivos que verifican $x \cdot y = 1$, $x \cdot z = 2$, $y \cdot z = 8$, ¿cuál es el valor de $x + y + z$?

A) 3 **B)** $\frac{13}{2}$ **C)** 11 **D)** $\frac{81}{2}$ **E)** Ninguno de los anteriores

15 El pentágono de la figura tiene tres ángulos rectos.
La medida, en cm, del quinto lado es:

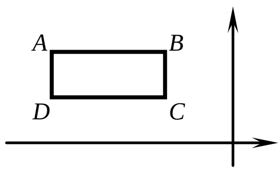


A) 20 **B)** 26 **C)** 28 **D)** 29
E 30

16 Si cada uno de los chicos de una clase hubiera obtenido 2 puntos más en el examen, la media de toda la clase habría subido 0,5 puntos. ¿Cuál es el porcentaje de chicas en esa clase?

A) 25% **B)** 50 % **C)** 75% **D)** 80% **E)** Faltan datos para determinarlo.

17 El rectángulo *ABCD* de la figura tiene sus lados paralelos a los ejes de coordenadas y está situado en el segundo cuadrante. Para cada uno de los cuatro vértices calculamos el cociente $\frac{y}{x}$, entre su ordenada y su abscisa. ¿En cuál de los cuatro se obtiene el cociente más pequeño?

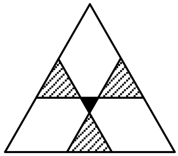


A) *A* **B)** *B* **C)** *C* **D)** *D* **E)** Depende de las dimensiones del rectángulo

18 El cociente entre las longitudes de los lados de un rectángulo es $\frac{4}{5}$. Si su área es de 125 cm^2, ¿cuál es el perímetro de dicho rectángulo?

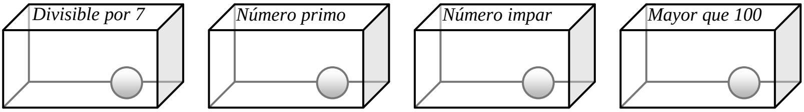
A) 18 cm **B)** 22,5 cm **C)** 36 cm **D)** 45 cm **E)** 54 cm

19 El triángulo equilátero de la figura está dividido por tres rectas paralelas a sus lados en siete regiones. Tres de ellas son triángulos equiláteros de lado 5 y el triángulo central, también equilátero, tiene lado 2. ¿Cuál es la longitud del lado del triángulo inicial?



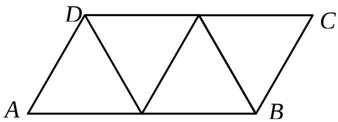
A) 18 **B)** 19 **C)** 20 **D)** 21 **E)** 22

20 Don Retorcido tiene cuatro cajas y en cada una de sus tapas ha escrito una frase que describe una propiedad de un número. Las frases son: "Divisible por 7", "Número primo", "Número impar", "Mayor que 100". Después ha cogido cuatro bolas de billar: la número 2, la 5, la 7 y la 12 y ha metido una bola en cada caja. Si ningún número cumple la propiedad de su caja, ¿qué número tiene la bola que ha metido en la caja que dice "Mayor que 100"?



A) 2 **B)** 5 **C)** 7 **D)** 12 **E)** Es imposible determinarlo

21 Juntando cuatro triángulos equiláteros, de lado 1, hemos construido el paralelogramo *ABCD*. ¿Cuál es la longitud de la diagonal *AC*?



A) $\sqrt{5}$ **B)** $\sqrt{6}$ **C)** $\sqrt{7}$ **D)** $2\sqrt{2}$ **E)** 3

22 Si el número real x verifica $x^3 < 64 < x^2$, ¿qué afirmación de las siguientes es verdadera?

A) $0 < x < 64$ **B)** $-8 < x < 4$ **C)** $x > 8$ **D)** $-4 < x < 8$ **E)** $x < -8$

23 El profesor ha escrito 100 números en la pizarra y nos ha pedido calcular su media. ¡86!, gritó Adrián al poco tiempo. Muy bien, dijo el profesor y borró 20 números. ¿Cuál es la media de los que quedan? ¡84!, gritó Anabel. Perfecto. ¿Cuál es la media de los 20 números que borró el profesor?

A) 94 **B)** 90 **C)** 86 **D)** 85 **E)** 20

24 Si $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$ y $\frac{b}{c}=\frac{8}{5}$, ¿cuánto vale $\frac{a}{b+c}$?

A) $\frac{4}{5}$ **B)** $\frac{4}{13}$ **C)** $\frac{5}{16}$ **D)** $\frac{21}{10}$ **E)** $\frac{16}{5}$

25 ¿Cuántos enteros *n*, con $1 \le n \le 100$ verifican que n^n es un cuadrado perfecto?

A) 5 **B)** 15 **C)** 50 **D)** 51 **E)** 55

XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 12 de febrero de 2014

NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Aviraneta
Libros Guijarro
Smartick

1 En un rombo de diagonales 3 y 6 cm. ¿Cuál es el valor de la tangente del ángulo agudo?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{3}{2}$ **C)** $\frac{4}{3}$ **D)** $\frac{3}{4}$ **E)** $\frac{2}{3}$

2 El cubo perfecto que hay entre 1 771 560 y 1 771 566 acaba en:

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

3 Un polinomio $P(x)$ de grado 2 y coeficiente principal 1 tiene las raíces a y b. El valor numérico del polinomio para $x = a + b$ es:

A) $a + b$ **B)** $a^2 + b^2$ **C)** $a \cdot b$ **D)** 2 **E)** $a^2 + a \cdot b + b^2$

4 Si la suma de los primeros veinte términos de una progresión aritmética de diferencia 5 es S, la suma de los diez términos de lugar par es:

A) $S - 50$ **B)** $\frac{S}{2}$ **C)** $\frac{S}{2} + 25$ **D)** $\frac{S}{2} - 25$ **E)** $\frac{S+100}{2}$

5 Escribimos alfabéticamente las claves de cinco letras que contengan todas las letras, a, b, c, d y e. ¿Qué posición ocupa la palabra “becad”?

A) 40 **B)** 45 **C)** 50 **D)** 55 **E)** 60

6 Se conoce la fórmula $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$.

Entonces la suma $2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + (2n)^2$ es:

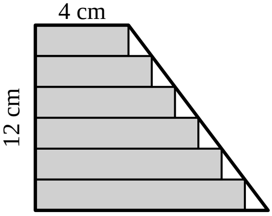
A) $\frac{2n\cdot(2n+1)\cdot(4n+1)}{6}$ **B)** $\frac{2n\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)}{6}$ **C)** $\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{2}$

D) $\frac{n\cdot(2n+1)\cdot(3n+1)}{6}$ **E)** $\frac{n\cdot(2n+1)\cdot(4n+1)}{12}$

7 Escribimos seguidos los cuadrados de los números del 1 al 100: 149162536... ¿Qué cifra nos encontraremos en la posición cien?

A) 1 **B)** 2 **C)** 4

D) 6 **E) 9**



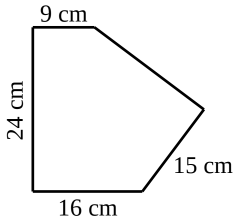
8 El lado oblicuo del trapecio circunscrito a esta escalera, de escalones de igual altura, tiene pendiente -2 . El área de la escalera es:

A) 72 **B)** 76 **C) 78** **D)** 84 **E)** 90

9 El pentágono de la figura tiene tres ángulos rectos. Su área, en cm^2, es:

A) 400 **B)** 500 **C)** 450

D) 375 **E)** 425



10 ¿Cuántos puntos (x, y) con coordenadas enteras tiene la curva $y = \dfrac{4x+8}{x-4}$?

A) ninguno **B)** dos **C)** cuatro **D)** ocho **E)** dieciséis

11 Si el número real x verifica $2 < x < 3$, ¿cuántas de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

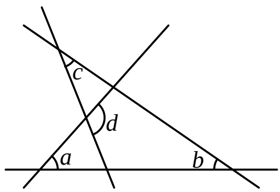
$4 < x^2 < 9$, $0 < x - 2 < 1$, $6 < 3x < 9$, $0 < x^2 - 2x < 3$

A) 0 **B**) 1 **C**) 2 **D**) 3 **E**) 4

12 La medida de los ángulos marcados en la figura son: a = 55º, b = 40º y c = 35º. ¿Cuál es la medida del ángulo d?

A) 100º **B)** 105º **C)** 120º

D) 125º **E)** 130º



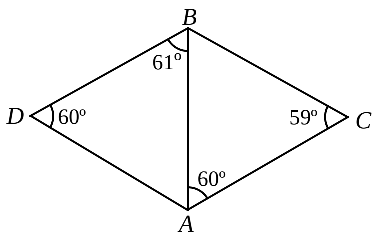
13 En una lista de enteros consecutivos, ¿cuál de los siguientes no puede ser el porcentaje de impares?

A) 40% **B)** 45% **C)** 48% **D)** 50% **E)** 60%

14 Al intentar dibujar dos triángulos equiláteros para formar un rombo, Don Retorcido ha cometido unos pequeños errores y le ha resultado la siguiente figura. ¿Cuál de los cinco segmentos es el más largo?

A) *AD* **B)** *AC* **C)** *AB*

D) *BC* **E)** *BD*



15 La sucesión $\{a_n\}$ cumple que $a_1 = 1$ y $a_{m+n} = a_m + a_n + m \cdot n$ para cualquier par de números enteros positivos m y n. ¿Cuál es el valor del término a_{100}?

A) 1000 **B)** 2014 **C)** 4950 **D)** 5050 **E)** No puede determinarse

16 La suma 1 + 2 + 3 +…+ n, de los n primeros enteros positivos, es un número de tres cifras, todas iguales. ¿Cuál es la suma de las tres cifras?

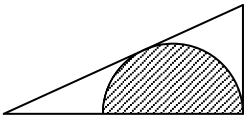
A) 6 **B)** 9 **C)** 12 **D)** 15 **E)** 18

17 Un club de montaña organiza en cuatro sábados consecutivos cuatro excursiones teniendo todas la misma tasa de participación, el 80% de los miembros del club. ¿Cuál es el menor porcentaje posible de socios que participaron en todas las excursiones?

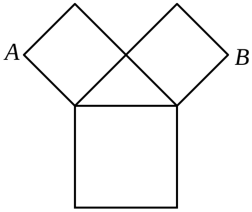
A) 80% **B)** 60% **C)** 40% **D)** 20% **E)** 16%

18 Los lados de un triángulo rectángulo miden 5, 12 y 13. Un semicírculo con centro en el cateto de longitud 12, es tangente al otro cateto y a la hipotenusa. ¿Cuánto mide su radio?

A) $\frac{7}{3}$ **B)** $\frac{10}{3}$ **C)** 4 **D)** $\frac{13}{3}$ **E)** $\frac{17}{3}$



19 Sobre los lados de un triángulo rectángulo e isósceles se construyen tres cuadrados, como muestra la figura. Si la distancia entre los vértices A y B es de 16 cm, ¿cuál es el área ocupada por los cuatro polígonos?



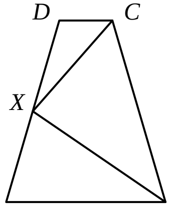
A) 114 cm^2 **B)** 130 cm^2 **C)** 144 cm^2 **D)** 160 cm^2 **E)** 186 cm^2

20 En un cuadrado $ABCD$, E y F son los puntos medios de los lados AB y AD, respectivamente. Se toma un punto G de CF de tal modo que $3CG = 2GF$. Si el lado del cuadrado es 2, ¿cuál es el área del triángulo BEG?

A) $\frac{7}{10}$ **B)** $\frac{4}{5}$ **C)** $\frac{8}{5}$ **D)** $\frac{3}{5}$ **E)** $\frac{6}{5}$

21

ABCD es un trapecio isósceles y *X* es el punto medio del lado *AD*. Si *AX* = 1 y el triángulo *XBC* es rectángulo en *X*, ¿cuál es el perímetro del trapecio?



A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8

E) Es imposible determinarlo

22

Al sumar los enteros desde el 1 hasta *n*, ha habido uno que, por error, hemos sumado dos veces. Si la suma obtenida ha sido 857, ¿cuál es el número que hemos repetido?

A) 4 **B)** 16 **C)** 25 **D)** 37 **E)** 42

23

La suma de dos enteros, no necesariamente distintos, es 26. Si añadimos otros dos enteros más, la suma es 41, y finalmente, si añadimos otros dos enteros a los cuatro que teníamos, la suma es 57. ¿Cuál es el mínimo número de enteros pares que hay entre estos seis enteros?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

24

¿Cuál es el área del polígono cuyos vértices son los puntos de intersección de las curvas, $x^2 + y^2 = 25$ y $(x-4)^2 + 9y^2 = 81$?

A) 24 **B)** 27 **C)** 36 **D)** 37,5 **E)** 42

25

¿Cuántas listas de ceros y unos, de longitud 20, tienen todos los ceros consecutivos o todos los unos consecutivos o ambas cosas a la vez?

A) 190 **B)** 192 **C)** 211 **D)** 380 **E)** 382

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 5 de abril de 2014

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** **X** LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

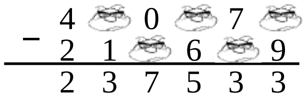
ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick
Libros Guijarro

1 Cuando Sofía acababa de terminar esta larga resta, ¡zas!, apareció Comenúmeros y se comió cinco cifras. ¿Cuánto suman las cifras que se ha zampado?



A) 13 **B)** 15 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 19

2 Don Retorcido ha multiplicado todos los números impares desde el 1 hasta el 999. ¿En qué cifra acaba su gigantesca multiplicación?

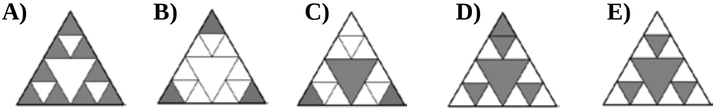
A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

3 Lucía lleva dos horas leyendo un libro que tiene 98 páginas. Está enganchada y no puede parar de leer. Si ya se ha leído 84 páginas, ¿en cuántos minutos leerá lo que le queda?

A) 10 **B)** 20 **C)** 30 **D)** 40 **E)** 50

4 ¿Cuál de las zonas sombreadas representa $\frac{3}{8}$ del triángulo?

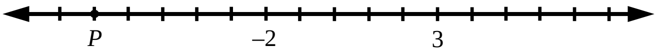
A) **B)** **C)** **D)** **E)**



5 Hannah Montana y yo cumplimos los años el 23 de noviembre. ¿Cómo dices que dijiste? Sí, pero no nacimos el mismo año. El día que yo nací ella cumplía 10 años. Si Hannah Montana nació en 1992, ¿sabes cuántos años tengo yo hoy sábado 5 de abril de 2014?

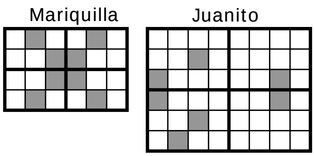
A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

6 Fíjate en la recta numérica. ¿Qué número está 18 unidades a la derecha de *P*?



A) –25 **B)** 7 **C)** 11 **D)** 23 **E)** No se puede saber

7 Mariquilla ha juntado cuatro rectángulos y los ha coloreado para que fueran simétricos con respecto a los lados comunes y le ha quedado esto. Juanito quería hacer lo mismo pero ha empezado a colorear a lo loco y se ha liado. ¿Cuántos cuadraditos más debe colorear como mínimo para conseguirlo?



A) 5 **B)** 7 **C)** 9 **D)** 14 **E)** 21

8 Ayer fue el día de las mascotas en mi colegio. De los 450 alumnos, 241 llevamos una mascota, 87 llevaron dos mascotas, algunos llevaron tres y el resto no llevó ninguna. Si en total había 553 mascotas, ¿cuántos chicos no llevaron ninguna?

A) 39 **B)** 11 **C)** 55 **D)** 76 **E)** 117

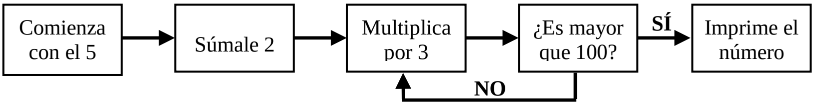
9 En un triángulo un ángulo mide diez grados más que otro y el tercero es la media de los otros dos. ¿Cuánto mide el ángulo mayor?

A) 90º **B)** 85º **C)** 70º **D)** 65º **E)** 60º

10 ¡Abuelo, abuelo, adivina qué número estoy pensando! Te daré varias pistas: es un número impar de tres cifras, es múltiplo de 57, todas sus cifras son distintas y ninguna de ellas es un 7. El abuelo piensa un rato y dice: Tendrás que darme alguna pista más pues hay dos números que cumplen todo eso. ¿Cuál es la suma de los dos números que ha encontrado el abuelo?

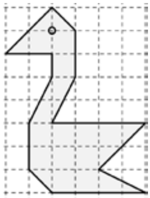
A) 1254 **B)** 1140 **C)** 1026 **D)** 912 **E)** 798

11 Si sigues las instrucciones, ¿qué número se imprimirá?



A) 105 **B)** 168 **C)** 189 **D)** 210 **E)** 300

12 Ana ha pintado al pato Gauss en una cuadrícula. Si el lado de los cuadraditos de la cuadrícula mide 1 cm, ¿cuál es el área, en cm^2, que ocupa el patito?



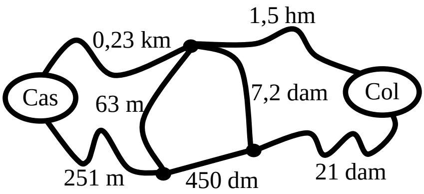
A) 14 **B)** 16 **C)** 18 **D)** 21

E) 24

13 En mi hucha tengo 2,50 euros en monedas de 5 céntimos; 7,60 euros en monedas de 20 céntimos y 15 euros en monedas de 50 céntimos. ¿Cuántas monedas tengo?

A) 19 **B)** 64 **C)** 73 **D)** 118 **E)** 1108

14 A Don Retorcido no le gusta ir siempre por el mismo camino así que va variando el recorrido de casa al colegio. Eso sí, en un mismo recorrido nunca pasa dos veces por el mismo sendero. Aquí tienes un dibujo esquemático de los distintos senderos y sus longitudes. ¿Cuál es la diferencia, en metros, entre el recorrido más largo y el más corto posible?



A) 180 **B)** 216 **C)** 321 **D)** 473 **E)** 641

15 Tengo tres caramelos de fresa, dos de menta y uno de limón. ¿De cuántas maneras diferentes puedo rellenar una bolsita con tres caramelos?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 9

16 Irene ha multiplicado un número por 12 y ha obtenido un número de dos cifras que ha escrito en una tarjeta pero Comenúmeros se ha comido una de las cifras del resultado. ¿Cuál de todas estas puede ser la tarjeta de Irene?

A) 

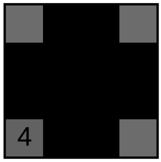
B) 

C) 

D) 

E) 

17 El *Tofu* es una versión de *Sudoku* en un cuadrado de 4x4 en el que cada número del 1 al 4 debe aparece una sola vez en cada fila, una sola vez en cada columna y una sola vez en cada uno de los cuatro cuadrados de 2x2. Si completas este *Tofu*, ¿cuánto suman los números de las cuatro esquinas?

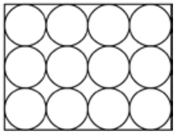


A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

18 Luz, Sol y Mar fueron a una pizzería y cada una se pidió una pizza que no pudieron terminar. Luz se dejó $\frac{1}{4}$, Sol se dejó $\frac{2}{5}$ y Mar se dejó $\frac{3}{10}$. ¿Qué afirmación es cierta?

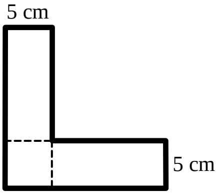
A) Mar fue la que más comió **B)** Mar comió más que Sol
C) Luz comió menos que Mar **D)** Luz y Mar comieron lo mismo
E) Sol comió menos de la mitad

19 Julián ha dibujado un rectángulo de 8 cm de largo y 6 cm de ancho y dentro ha trazado doce circunferencias iguales que se ajustan perfectamente al rectángulo como ves en el dibujo. Richi quiere hacer lo mismo pero su rectángulo mide 18 cm de largo y 12 cm de ancho. ¿Cuál es el menor número de circunferencias con el que puede conseguirlo?



A) 6 **B)** 12 **C)** 22 **D)** 24 **E)** 36

20 Superponiendo dos tiras rectangulares iguales de 5 cm de ancho hemos formado una **L**. Si el área de la **L** es 145 cm^2, ¿cuál es su perímetro?



A) 72 cm **B)** 48 cm **C)** 60 cm **D)** 88cm

E) 68 cm

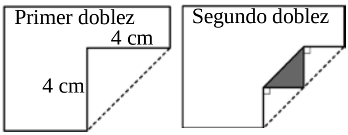
21 Escribimos los números seguidos del 1 al 100: 12345678910111213...
¿Qué cifra nos encontraremos en la posición cien?

A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 9

22 Olivia ha viajado de Lima a Madrid en un avión con escalas. Salió ayer de Lima a las cuatro de la tarde (hora de Lima) y ha llegado hoy a Madrid a las dos de la tarde (hora de Madrid). Si en Lima hay seis horas menos que en Madrid, ¿cuánto duró el viaje?

A) 28 horas **B)** 23 horas **C)** 18 horas **D)** 16 horas **E)** 9 horas

23 Doblamos la esquina de una hoja de papel rectangular y después la volvemos a doblar como ves en la figura. ¿Cuál es el área, en cm^2, de la zona sombreada?



A) 2 **B)** 2,5 **C)** 3

D) 3,5 **E)** 4

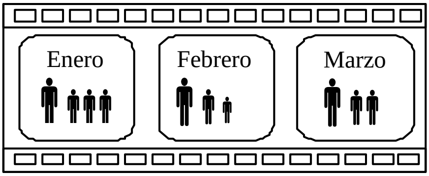
24 En la primera parte de un partido entre el Matem FC y el Deportivo Áticas el resultado ha sido: Matem 1 - Áticas 0. En el segundo tiempo se metieron en total tres goles. ¿Cuál de estos no puede ser el resultado final del partido?

A) El partido acabó en empate **B)** Matem ganó por dos goles

C) Áticas ganó por dos goles **D)** Matem ganó por un gol

E) Matem ganó por cuatro goles

25 El siguiente pictograma muestra el número de espectadores que acudió al cine en los últimos meses en Madrid. Si un hombrecillo grande vale cinco veces más que uno mediano, uno pequeño vale la mitad que uno mediano y en total en estos tres meses han acudido dos millones ciento cincuenta mil espectadores, ¿cuántas personas representa un hombrecillo mediano?



A) Cien mil **B)** Doscientas mil **C)** Cincuenta mil **D)** Medio millón **E)** Mil

XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 5 de abril de 2014

NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

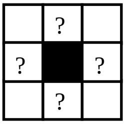
COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick
Libros Guijarro

1 Adivina mi número. Es mayor que 600 y menor que 800. Múltiplo de siete y de nueve. Y es impar. ¿Ya lo sabes? Pues dime cuánto suman sus cifras.

A) 16 **B)** 13 **C)** 9 **D)** 15 **E)** 18

2 He colocado al tuntún los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 formando un cuadrado. Si los tres números que hay en cada lado suman respectivamente 11, 12, 14 y 21, ¿cuál es la suma de los números que no están en las esquinas?



A) 20 **B)** 14 **C)** 18 **D)** 22 **E)** 13

3 Tengo cuatro caramelos de fresa, tres de menta y dos de limón. ¿De cuántas maneras diferentes puedo rellenar una bolsita con cuatro caramelos?

A) 11 **B)** 9 **C)** 24 **D)** 12 **E)** 18

4 Comenúmeros lo ha vuelto a hacer, se ha zampado unos cuantos números y ahora os toca a vosotros averiguar cuáles han sido. Don Retorcido estaba inventando un problema para el concurso y había conseguido unas igualdades entre productos de enteros positivos, llegó Comenúmeros y ñam ñam, el problema quedó así:

$18\times$  $= 75\times$  $= 24\times$  $= 30\times$ 

Si los números que faltan son los más pequeños posibles, ¿cuánto suman los números que se zampó Comenúmeros?

A) 150 **B)** 153 **C)** 160 **D)** 259 **E)** 200

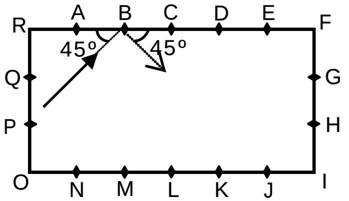
5 Don Retorcido también fue niño y a veces se equivocaba. ¡Quién lo diría! Una vez le mandaron transmitir un mensaje secreto con las letras V y F. Se puso muy nervioso: la primera vez se equivocó en cuatro letras, la segunda en tres, la tercera en dos, la cuarta en una y por fin a la quinta envió el mensaje correctamente. Aquí te presentamos los cinco intentos del pobre Retorcidito pero no en el orden en el que él los transmitió. ¿Cuál es el mensaje correcto?

A) FFFFV **B)** FVVFF **C)** VFFVF **D)** FFVFF **E)** VFFVV

6 Una botella de litro y medio de leche está llena y vaciamos parte de su contenido en un vaso hasta que ambos, botella y vaso, queden rellenos hasta los tres cuartos de su capacidad. ¿Qué capacidad tiene el vaso?

A) 1125 cl **B)** 60 cl **C)** 75 cl **D)** Un litro **E)** Medio litro

7 En esta mesa de billar he golpeado la bola hacia el punto B y en todas las bandas, la bola entra con un ángulo de 45º y sale rebotada, como ya sabéis, con un ángulo también de 45º. Si el primer rebote lo hace en el punto B, ¿en qué punto se producirá el décimo rebote si todos los segmentitos son de igual longitud?



A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

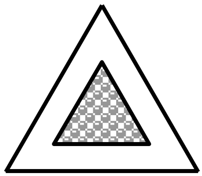
8 Casi un trabalenguas. Álvaro y su primo se encuentran. Oye primo, ¿cuántos números primos hay de dos dígitos que tengan ambos dígitos también primos?
¡Pero qué pregunta es esa, primo!

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

9 Merche tiene un 40% más de pentágonos que María. ¿Qué fracción de sus pentágonos debe regalar Merche a María para que las dos tengan el mismo número de pentágonos?

A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{2}{5}$ **C)** $\frac{1}{7}$ **D)** $\frac{1}{10}$ **E)** $\frac{1}{5}$

10 En el dibujo se ven dos triángulos equiláteros, uno de 6 cm de lado y el otro de 3. ¿Qué fracción del triángulo grande ocupa el triángulo pequeño?



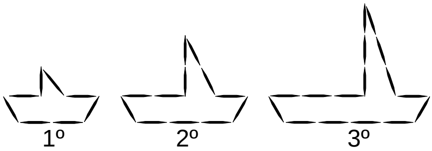
A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{3}{4}$

E) $\frac{5}{6}$

11 La suma de las longitudes de tres lados de un rectángulo es 55 cm y cada lado mide un número entero de centímetros. Si un lado mide 8 cm más que el otro, su perímetro mide…

A) 63 cm **B)** 71cm **C)** 68 cm **D)** 59 cm **E)** 70 cm

12 Mirad qué barcos tan bonitos, cada vez más y más grandes, diseña Nemo con palillos. Ayer estaba muy emocionado y decidió construir el barquito número 133, así que bajó a la tienda y se compró una caja de 500 palillos. ¿Tendrá suficientes? ¿Cuál de estas situaciones es la correcta?



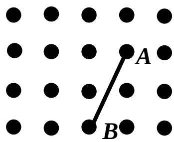
A) Le faltan 32 palillos **B)** Le sobran 6 palillos **C)** Tiene los palillos justos

D) Le faltan 6 palillos **E)** Le faltan 36 palillos

13 Don Retorcido y Comenúmeros viven en la ciudad de Revoltijo. Su plano está formado por siete calles, todas ellas rectas, de las que solo dos son paralelas. En cada intersección se juntan únicamente dos calles y las han aprovechado para erigir los monumentos de la ciudad, dedicados a números, ecuaciones y cosas por el estilo. ¿Cuántos monumentos matemáticos hay en Revoltijo? (Todas las calles son lo suficientemente largas para cruzarse con las que pueda)

A) 21 **B)** 20 **C)** 42 **D)** 10 **E)** 12

14 Hemos marcado el segmento *AB* en la rejilla. ¿De cuántas maneras puedes elegir el punto *C* en dicha rejilla para que el triángulo que se forma, *ABC*, sea isósceles?



A) 5 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6

E) 8

15 Para obtener 10 al sumar cuatro números enteros positivos diferentes solo se puede hacer con este cuarteto: 1 + 2 + 3 + 4. ¿De cuántas maneras se puede obtener la suma 15 con cuatro sumandos enteros positivos diferentes?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

16 Dos amigos buscan setas con esmero a lo largo de una senda. Joaquín empieza en un extremo y camina cuatro pasos hacia delante y uno hacia atrás; Juan Jesús comienza en el otro extremo y anda tres pasos hacia delante y dos hacia atrás. Si el camino mide 166 metros y los amigos dan todos los pasos de un metro de longitud y al mismo ritmo, ¿a cuántos metros del punto de partida de Joaquín se encontrarán?

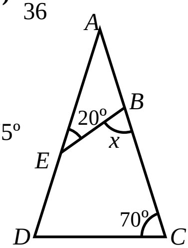
A) 100 **B)** 120 **C)** 83 **D)** 126 **E)** 123

17 Alfredo va a tirar un dado y Luis otro. Víctor dice:
- El producto de los resultados que obtengan será un número de dos cifras.
¿Cuál es la probabilidad de que Víctor acierte?

A) $\frac{11}{36}$ **B)** $\frac{5}{9}$ **C)** $\frac{2}{3}$ **D)** $\frac{11}{21}$ **E)** $\frac{19}{36}$

18 En el triángulo que ves, $AB = DE$ y $AE = BC$. ¿Cuánto mide el ángulo x?

A) 65º **B)** 60º **C)** 90º **D)** 70º **E)** 75º

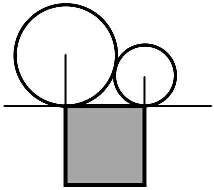


19 Una hormiga sube hasta la cima de un poste a una velocidad de 3 decímetros por minuto y, sin descansar, baja a 5 decímetros por minuto. Si tarda 40 minutos en total, ¿qué altura, en metros, tiene el poste?

A) 9 **B)** 7,5 **C)** 20,5 **D)** 6 **E)** 15

20 En el dibujo se ven dos circunferencias tangentes entre sí descansando sobre un cuadrado. Si los radios de las circunferencias son 10 cm y 7 cm, ¿cuál es el área, en cm^2, del cuadrado?

A) 100 **B)** 149 **C)** 280 **D)** 289
E) 297

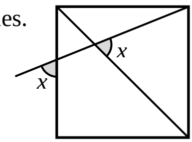


21 Comenúmeros va a merendarse cinco números diferentes *a, b, c, d* y *e,* todos ellos mayores que 1 y menores que 20: *a* es un número primo de dos cifras y además la suma de sus cifras también es un número primo, *b* es múltiplo de 5, *c* es un número impar que no es primo, *d* es el cuadrado de un número primo, *e* es primo e igual a la media de *a* y *b*.
Comenúmeros va a empezar su merendola por el número menor. ¿Cuál es?

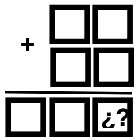
A) *a* **B)** *b* **C)** *c* **D)** *d* **E)** *e*

22 En el cuadrado de la figura los dos ángulos marcados son iguales.
¿Cuánto mide cada uno de ellos?

A) 60º **B)** 65º **C)** 67,5º **D)** 70º
E) 72º



23 Utilizando las siete cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, formamos la suma que se muestra al margen. ¿Cuál es la cifra que ocupa el lugar de las unidades del resultado?

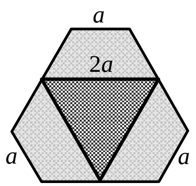


A) 2 **B)** 0 **C)** 3 **D)** 6 **E)** 5

24 Laura tenía un anillo de 30 gramos que estaba compuesto por un 70% de oro y el resto de plata y ha decidido fundirlo. ¿Cuántos gramos de oro deberá añadir a esa mezcla para conseguir un nuevo anillo con un 80% de oro?

A) 24 **B)** 12 **C)** 10 **D)** 34,29 **E)** 15

25 A los lados de un triángulo equilátero de lado $2a$ adosamos (hacia fuera) tres trapecios isósceles con los otros tres lados de medida a.



Si el área del triángulo es 24 cm^2, el área del hexágono, en cm^2, es:

A) 52 **B)** 60 **C)** 64 **D)** 68 **E)** 78

XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 5 de abril de 2014

NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** X LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

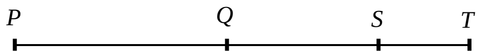
COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick
Libros Guijarro

1 La media de los elementos de un cierto conjunto A es 4. La media de los números de otro conjunto B, con el doble de elementos que A, es 10. ¿Cuál es la media de todos los números de ambos conjuntos?

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

2 Los puntos *P*, *Q*, *S* y *T* están situados como muestra la figura. Las medidas de los segmentos *PQ*, *QS* y *ST* son, respectivamente, $\frac{7}{2}$, $\frac{5}{2}$ y $\frac{3}{2}$.



Si *X* es el punto medio del segmento *QS* e *Y* es el punto medio del segmento *PT*, la longitud del segmento *XY* es:

A) $\frac{1}{2}$ **B)** 1 **C)** 2 **D)** $\frac{5}{2}$ **E)** $\frac{13}{4}$

3 ¿Cuántas cifras tiene el número $16^8 \cdot 5^{25}$?

A) 24 **B)** 25 **C)** 26 **D)** 27 **E)** 28

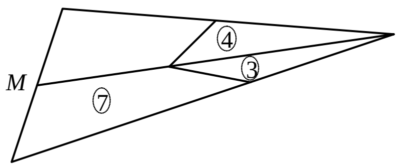
4 A don Retorcido le ha dado por calcular potencias altísimas y para fastidiaros no os dice el exponente. Luego las suma y para fastidiaros aún más, solo escribe la última cifra de estas sumas. Así ha calculado cinco sumas, $2^a + 2^b$, $2^c + 3^d$, $2^e + 5^f$, $5^g + 5^h$, $9^i + 9^j$ y solo nos muestra la cifra de las unidades de los resultados, que son: 0, 2, 5, 6 y 7 ¿Cuál pertenece a la de la suma $2^a + 2^b$?

A) 2 **B)** 0 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 6

5 ¿Cuántas parejas de números de dos cifras verifican que su producto es un número de tres cifras todas iguales?

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

6 En la figura que observas, *M* es el punto medio de un lado de un triángulo que está dividido en cuatro partes. El área de tres de ellas viene indicada en la figura. ¿Cuál es el área de la otra parte?



A) 5 **B)** 6 **C)** 7

D) 8 **E)** Faltan datos para determinarla

7 El número 33^{33} lo podemos escribir como la suma de 33 impares consecutivos. ¿Cuál es el mayor de todos ellos?

A) $33^{32} + 32$ **B)** $33^{31} + 32$ **C)** $33^{33} – 32$ **D)** $33^{31} + 30$ **E)** 33^{32}

8 ¿Cuál es el mayor de los siguientes números?

A) 2^{500} **B)** 3^{400} **C)** 4^{300} **D)** 5^{200} **E)** 6^{100}

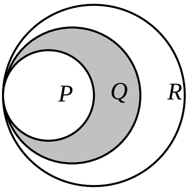
9 Dos peregrinos del Camino de Santiago caminan por un terreno llano a 4 km/h cada uno. Al iniciar una prolongada subida el primero le saca 12 km de ventaja al otro. Si ambos caminan a 3 km/h en la subida, ¿qué distancia separará a los peregrinos cuando ambos estén subiendo?

A) 16 km **B)** 12 km **C)** 10 km **D)** 9 km **E)** 8 km

10 Cinco estudiantes se pesan por parejas resultando que los pesos obtenidos en las diez parejas posibles son: 110, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 120 y 121 kilogramos. ¿Cuánto pesa el de mayor peso?

A) 58 **B)** 59 **C)** 60 **D)** 61 **E)** 62

11 El radio del círculo *P* es dos tercios del radio del círculo *Q* y este es tres cuartos del radio del círculo *R*. ¿Qué fracción del área del círculo *R* está sombreada?



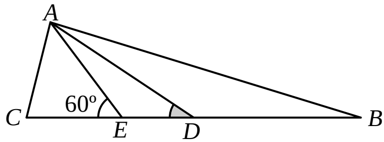
A) $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{5}{9}$ **C)** $\frac{3}{16}$ **D)** $\frac{1}{4}$

E) $\frac{5}{16}$

12 Si $(1 + 3 + 5 +\ldots+ p) + (1 + 3 + 5 +\ldots+ q) = (1 + 3 + 5 +\ldots+ 25)$, $p + q$ es igual a:

A) 30 **B)** 32 **C)** 34 **D)** 36 **E)** 38

13 En el triángulo *ABC* de la figura (que no está a escala), *D* es el punto medio de *BC*, *AD* = *CD* y *AE* es la bisectriz del ángulo de vértice *A* del triángulo. Si el ángulo $C\hat{E}A$ es de 60º, ¿cuánto mide el ángulo $C\hat{D}A$?



A) 22,5º **B)** 30º **C)** 37,5º **D)** 45º **E)** 50º

14 Las longitudes de dos lados de un cuadrilátero son 1 y 4 cm. Si una de sus diagonales, de longitud 2 cm, divide al cuadrilátero en dos triángulos isósceles, ¿cuál es, en cm, el perímetro del cuadrilátero?

A) 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** $6\sqrt{2}$

15 Tiramos dos veces un dado cuyas caras están numeradas con – 3, – 2, – 1, 0, 1, 2. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea negativo?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{11}{36}$ **D)** $\frac{13}{36}$ **E)** $\frac{1}{3}$

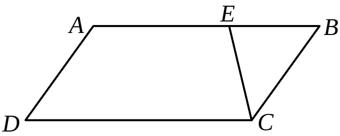
16 ¿Cuántos números de cuatro cifras de la forma $\boxed{\mathbf{6}}\boxed{\ }\boxed{\mathbf{4}}\boxed{\ }$ son divisibles por 36?

A) Ninguno **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

17 Al añadir un nuevo número x al conjunto {8, 10, 24, 28, 23, 9} resulta que la media y la mediana del nuevo conjunto es precisamente x. ¿Cuál es la suma de las cifras de x?

A) 3 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 10

18 En el paralelogramo *ABCD* de la figura, el cociente entre *AE* y *EB* es $\frac{3}{2}$. ¿Cuál es el cociente entre el área del trapecio *AECD* y el área del paralelogramo?

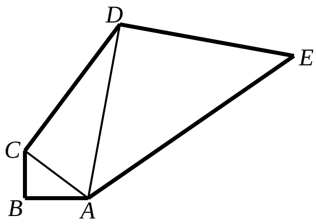


A) $\frac{3}{4}$ **B)** $\frac{4}{5}$ **C)** $\frac{5}{6}$ **D)** $\frac{6}{7}$ **E)** $\frac{7}{8}$

19 Si a, b y c son enteros positivos tales que $abc + ab + ac + bc + a + b + c = 104$, entonces $a^2 + b^2 + c^2$ es igual a:

A) 49 **B)** 51 **C)** 54 **D)** 56 **E)** 60

20 El pentágono *ABCDE* está descompuesto en tres triángulos rectángulos como se muestra en la figura. Si *AB* = 4 cm, *BC* = 3 cm, *CD* = 12 cm y el perímetro del pentágono es 188 cm, ¿cuál es, en cm^2, su área?

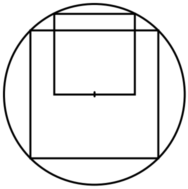


A) 580 **B)** 582 **C)** 584
D) 586 **E)** 588

21 Los 630 estudiantes de ESO de un centro se colocan en filas para hacerse una foto de manera que cada fila tiene tres estudiantes más que la fila anterior. De los siguientes números, ¿cuál no puede ser el número de filas?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

22 En el interior de una circunferencia se dibujan dos cuadrados: el inscrito y otro con dos vértices en la circunferencia y uno de sus lados pasando por el centro, como muestra la figura. ¿Cuál es el cociente entre las áreas del cuadrado grande y del pequeño?



A) 3 **B)** $\frac{5}{2}$ **C)** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **D)** 2

E) $\frac{3}{\sqrt{6}}$

23 En el conjunto de los 26 primeros enteros positivos borramos dos de ellos, de manera que su producto es igual a la suma de los 24 restantes. ¿Cuál es el menor múltiplo común de los dos números que hemos borrado?

A) 60 **B)** 42 **C)** 105 **D)** 80 **E)** 120

24 En una sucesión el primer término es $a_1 = 1$, el segundo $a_2 = -1$ y a partir del tercero cada término es el producto de los dos anteriores. ¿Cuál es la suma de los 2014 primeros términos de la sucesión?

A) – 1007 **B)** – 1005 **C)** – 670 **D)** 0 **E)** 1008

25 Nadal y Ferrer juegan un partido al mejor de cinco sets, es decir, el vencedor es el ganador de tres sets. Si la probabilidad de que Nadal gane cualquier set es dos tercios, ¿cuál es la probabilidad de que gane el partido?

A) $\frac{2}{3}$ **B)** $\frac{190}{243}$ **C)** $\frac{8}{9}$ **D)** $\frac{19}{27}$ **E)** $\frac{64}{81}$

XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 5 de abril de 2014

NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática

Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid

El Corte Inglés

Grupo ANAYA

Grupo SM

Smartick

Libros Guijarro

1 ¿Cuál es el cuarto término de la progresión geométrica $\sqrt{7},\ \sqrt[3]{7},\ \sqrt[6]{7},\ldots$?

A) $\sqrt[9]{7}$ **B)** $\sqrt[12]{7}$ **C)** $\sqrt[5]{7}$ **D)** $\sqrt[10]{7}$ **E)** 1

2 Las longitudes de los lados de un triángulo, expresadas en cm, son los enteros 13, x, y. Si el producto $x\cdot y$ es 105, ¿cuál es, en cm, el perímetro del triángulo?

A) 119 **B)** 69 **C)** 51 **D)** 39 **E)** 35

3 De los siguientes números, ¿cuál puede ser el número de aristas de un prisma?

A) 6 **B)** 2010 **C)** 2012 **D)** 2014 **E)** 2015

4 La gráfica formada por los puntos (x, y) tales que $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ es:

A) El conjunto vacío **B)** Un punto **C)** Un par de rectas

D) Una circunferencia **E)** Todo el plano

5 La solución de la ecuación $25^{-2} = \dfrac{5^{\frac{48}{x}}}{5^{\frac{26}{x}}\cdot 25^{\frac{17}{x}}}$ es:

A) $x = 2$ **B)** $x = 3$ **C)** $x = 5$ **D)** $x = 6$ **E)** $x = 9$

6 ¿Qué número de los siguientes es un cuadrado perfecto?

A) $98!\cdot 99!$ **B)** $98!\cdot 100!$ **C)** $99!\cdot 100!$ **D)** $99!\cdot 101!$ **E)** $100!\cdot 101!$

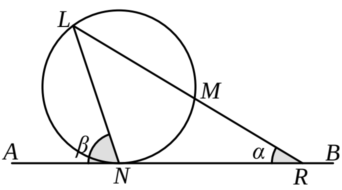
7 ¿Cuántos números de dos cifras, $\overline{ab}$, verifican que $3\cdot\overline{ab} < \overline{ba}$?

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 15 **E)** 22

8 Los enteros positivos a, b y c verifican: $a\cdot b\cdot c = 240$, $a\cdot c + b = 46$, $a + b\cdot c = 64$. ¿Cuál es el valor de $a + b + c$?

A) 19 **B)** 20 **C)** 21 **D)** 24 **E)** 36

9 La circunferencia de la figura es tangente a la recta AB en el punto N. Las cuerdas LN y LM tienen la misma longitud. La prolongación de la cuerda LM corta a AB en el punto R. ¿Cuál de las siguientes expresiones verifican los ángulos α y β de la figura?

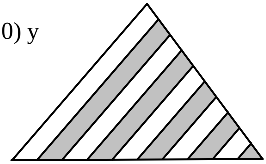


A) $180^\circ + \alpha = 3\beta$ **B)** $\alpha + 2\beta = 180^\circ$

C) $\alpha + \beta = 180^\circ$ **D)** $2\alpha + \beta = 180^\circ$ **E)** $\alpha = \beta$

10 El triángulo de la figura lo hemos dividido en nueve trapecios y un triángulo, todos de la misma altura. ¿Qué porcentaje del área del triángulo está sombreada?

A) 41,75% **B)** 42,5% **C)** 45% **D)** 46,5% **E)** 47%



11 ¿Cuál es el área del hexágono regular *ABCDEF* si *A*(0, 0) y *C*(7, 1)?

A) $20\sqrt{3}$ **B**) $22\sqrt{3}$ **C**) $25\sqrt{3}$

D) $27\sqrt{3}$ **E**) 50

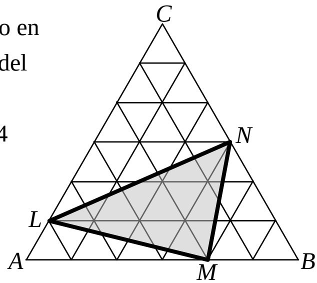
12 Al lanzar un dado, con sus caras numeradas del 1 al 6, tres veces consecutivas, resulta que el número obtenido en el tercer lanzamiento es igual a la suma de los números obtenidos en los dos primeros lanzamientos. ¿Cuál es la probabilidad de que el número 2 no haya aparecido en ninguno de los tres lanzamientos?

A) $\frac{5}{6}$ **B)** $\frac{125}{216}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{7}{15}$ **E)** $\frac{5}{12}$

13 El triángulo equilátero *ABC* de la figura está dividido en 36 triángulos equiláteros de área 1. ¿Cuál es el área del triángulo *LMN*?

A) 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14

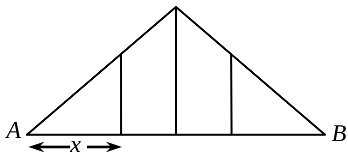
E) 15



14 ¿Cuántos números *N* de cuatro cifras verifican que al borrar en *N* la cifra de las unidades de millar se obtiene otro número de tres cifras que es un noveno de *N*?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

15 En el triángulo isósceles de la figura el lado desigual es *AB* = 12 y está dividido en cuatro polígonos de igual área por segmentos perpendiculares al lado *AB*. ¿Cuál es el valor de *x*?



A) $3\sqrt{2}$ **B)** 4 **C)** 4,5

D) $3\sqrt{3}$ **E)** 3

16 La suma de la progresión geométrica decreciente ilimitada $a, ar, ar^2, \ldots$ es 7 y la suma de la progresión obtenida considerando solamente los términos con exponente impar de r, es 3. ¿Cuál es el valor de $a + r$?

A) $\frac{4}{3}$ **B)** $\frac{12}{7}$ **C)** $\frac{3}{2}$ **D)** $\frac{7}{3}$ **E)** $\frac{5}{2}$

17 Sea P un punto del interior del triángulo equilátero ABC y Q, R y S los pies de las perpendiculares desde P a los lados AB, BC y CA, respectivamente.

Si $PQ = 1$, $PR = 2$ y $PS = 3$, la longitud AB es igual a:

A) 4 **B)** $3\sqrt{3}$ **C)** 6 **D)** $4\sqrt{3}$ **E)** 9

18 Un trozo de queso está situado en el punto (12, 10) de un sistema de coordenadas. Un ratón se mueve a lo largo de la recta $y = 18 - 5x$ y, cuando está convencido de que se encuentra lo más cerca posible del queso, se para.
Si se para en el punto (a, b), el valor de $a + b$ es:

A) 6 **B)** 10 **C)** 14 **D)** 18 **E)** 22

19 Las longitudes de los lados de un triángulo son proporcionales a los números 3, 4 y 5. Si dicho triángulo está inscrito en un círculo de radio 3, ¿cuál es el área del triángulo?

A) 8,64 **B)** 12 **C)** 5π **D)** 17,28 **E)** 18

20 La probabilidad de obtener 1, 2, 3, 4, 5 y 6 en un determinado dado es proporcional a los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6, respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de obtener suma 7 al lanzar dos veces ese dado?

A) $\frac{4}{63}$ **B)** $\frac{1}{8}$ **C)** $\frac{8}{63}$ **D)** $\frac{1}{6}$ **E)** $\frac{2}{7}$

21 Si el vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ es el punto (t, t) y el punto de corte de la parábola con el eje de ordenadas es el punto $(0, -t)$, con $t \neq 0$, el valor de b es:

A) $-t$ **B)** 0 **C)** 2 **D)** 4 **E)** t

22 La suma de 18 enteros positivos consecutivos es un cuadrado perfecto. ¿Cuál es el menor valor posible para esta suma?

A) 169 **B)** 225 **C)** 289 **D)** 361 **E)** 441

23 ¿Para cuántos números reales x se verifica que $\sqrt{120-\sqrt{x}}$ es un número entero?

A) 3 **B)** 6 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

24 Si $\cos x = 0$ y z es un número positivo tal que $\cos(x+z)=\dfrac{1}{2}$, el menor valor posible para z, en radianes, es:

A) $\dfrac{\pi}{6}$ **B)** $\dfrac{\pi}{3}$ **C)** $\dfrac{\pi}{8}$ **D)** $\dfrac{5\pi}{6}$ **E)** $\dfrac{\pi}{9}$

25 En el trapecio *ABCD* de bases *AB* y *CD*, *E* es el punto medio de *BC* y *F* el punto medio de *DA*. Si el área del cuadrilátero *ABEF* es el doble del área del cuadrilátero *FECD*, el cociente $\dfrac{AB}{DC}$ es igual a:

A) 2 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 8

XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (1ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**C**	1	**A**	1	**D**	1	**C**
2	**D**	2	**D**	2	**A**	2	**A**
3	**B**	3	**D**	3	**A**	3	**C**
4	**D**	4	**C**	4	**C**	4	**C**
5	**A**	5	**D**	5	**B**	5	**B**
6	**D**	6	**A**	6	**B**	6	**B**
7	**B**	7	**B**	7	**D**	7	**E**
8	**A**	8	**C**	8	**A**	8	**C**
9	**E**	9	**D**	9	**A**	9	**C**
10	**E**	10	**E**	10	**D**	10	**E**
11	**A**	11	**A**	11	**D**	11	**E**
12	**E**	12	**E**	12	**D**	12	**E**
13	**A**	13	**A**	13	**E**	13	**B**
14	**B**	14	**B**	14	**B**	14	**B**
15	**A**	15	**A**	15	**A**	15	**D**
16	**E**	16	**B**	16	**C**	16	**E**
17	**B**	17	**A**	17	**B**	17	**D**
18	**D**	18	**D**	18	**D**	18	**B**
19	**A**	19	**D**	19	**B**	19	**C**
20	**C**	20	**D**	20	**C**	20	**B**
21	**A**	21	**D**	21	**C**	21	**B**
22	**E**	22	**B**	22	**E**	22	**D**
23	**D**	23	**C**	23	**A**	23	**A**
24	**E**	24	**B**	24	**B**	24	**B**
25	**B**	25	**B**	25	**E**	25	**E**

XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (2ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**A**	1	**E**	1	**D**	1	**E**
2	**C**	2	**B**	2	**B**	2	**E**
3	**B**	3	**A**	3	**E**	3	**B**
4	**C**	4	**D**	4	**E**	4	**C**
5	**B**	5	**D**	5	**C**	5	**B**
6	**C**	6	**E**	6	**B**	6	**C**
7	**C**	7	**D**	7	**A**	7	**A**
8	**D**	8	**B**	8	**B**	8	**B**
9	**D**	9	**C**	9	**D**	9	**A**
10	**E**	10	**A**	10	**E**	10	**C**
11	**C**	11	**C**	11	**E**	11	**C**
12	**C**	12	**E**	12	**B**	12	**D**
13	**D**	13	**B**	13	**B**	13	**A**
14	**B**	14	**D**	14	**C**	14	**D**
15	**C**	15	**D**	15	**E**	15	**A**
16	**A**	16	**E**	16	**E**	16	**E**
17	**A**	17	**E**	17	**D**	17	**D**
18	**B**	18	**B**	18	**B**	18	**B**
19	**A**	19	**B**	19	**D**	19	**A**
20	**E**	20	**C**	20	**B**	20	**C**
21	**C**	21	**D**	21	**D**	21	**D**
22	**D**	22	**C**	22	**B**	22	**B**
23	**A**	23	**E**	23	**C**	23	**E**
24	**D**	24	**E**	24	**C**	24	**A**
25	**A**	25	**E**	25	**E**	25	**C**

XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel I

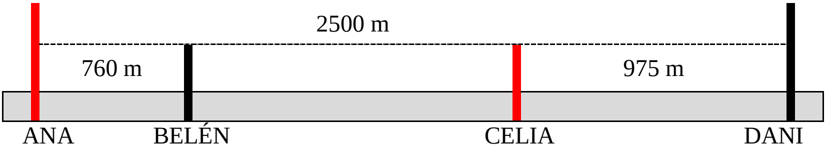
1. (C) Calculamos el valor del Comenúmeros de cada una de las operaciones:
39 + 37 = 76; 57 – 23 = 34; 195: 15 = 13; 7 × 28 = 196
76 + 24 + 13 + 196 = 319.

2. (D) Calculamos el perímetro así:
Primero, calculamos un lado de cada casilla de la cuadrícula: 8 : 4 = 2 cm
Después, hallamos el perímetro del cuadrado que forman todas las casillas y añadimos cuatro "lados" más que forman la puerta de la casita:
5 × 4 = 20; 20 + 4 = 24; 24 × 2 = 48 cm.

3. (B) En una tabla de doble entrada, escribimos los nombres de los amigos en una entrada, y en la otra, los oficios. A continuación, siguiendo el orden de los puntos del problema, escribimos "no" o "si", según corresponda, en cada una de las casillas haciendo corresponder el oficio de cada personaje; de esta forma se deduce que Álvaro es el actor.

	Profesor	Actor	Pintor	Tenista
Adrián	NO	NO	SI	NO
Javier	NO	NO	NO	SI
Álvaro	NO	**SI**	NO	NO
Juan	SI	NO	NO	NO

4. (D) Dibujando un esquema como el que se indica y anotando las distancias entre las casas, se puede observar que la distancia entre las casas de Ana y de Celia se calcula restando 975 a 2500.
2500 – 975 = 1525 m



5. (A) $\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ de tableta quedan después de dar $\frac{1}{3}$ a Olivia.

$\frac{2}{3}:2=\frac{1}{3}$ de tableta dio a Rafa.

$\frac{3}{3}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

6. (D) Hay tres afirmaciones ciertas. Son las siguientes:
I. La suma de un número par con un número impar es siempre impar.
III. Si divides un número para entre otro número parel resultado puede ser impar.
IV. Si a un número impar le restas otro número impar el resultado nunca es impar.

7. (B) El número triangular de base 20 está formado por 210 puntos.
210 puntos → 210 céntimos
210 céntimos = 2,10 €.

8. (A) Comparamos los objetos comprados y el precio pagado por ellos mediante esta operación:
2 lápices + 5 gomas = 3,80 € → $2\,l + 5\,g = 3,80$ €
2 lápices + 3 gomas = 3,00 € → $2\,l + 3\,g = 3,00$ €.
Restando ambas igualdades se obtiene 2 g = 0,80 €.
Se deduce que 2 gomas valen 80 céntimos. Una goma vale 40 céntimos.
Sustituyendo el valor de una goma en una de las igualdades anteriores obtendremos el valor de un lápiz:
$2\,l + 3 \times 0,40$ € = 3 € → $2\,l + 1,20$ € = 3 € → $2\,l$ = 3 € – 1,20 € = 1,80 €
1,80 € : 2 = 0,90 €. Un lápiz vale 0,90 euros.

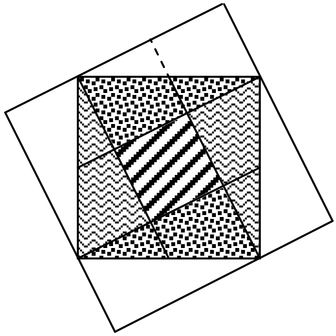
9. (E) La suma de los puntos de las dos fichas sombreadas es: 42 – 23 = 19 puntos. Teniendo en cuenta que, de los extremos de estas fichas son un 2 y un 5, la suma de los puntos de las dos partes de las fichas que faltan es: 19 – (2 + 5) = 12 puntos; por tanto, los puntos de las dos fichas sombreadas son:

2	6	y	6	5

Debajo de las interrogaciones hay 6 puntos.

10.(E) Si por 3 euros podemos comprar 16 castañas, por 1,5 euros, que es la mitad, podremos comprar 8 castañas. Luego con 4,5 = (3 + 1,5) euros, podremos comprar 16 + 8 = 24 castañas.

11.(A) Completando el cuadrado, mediante el trazado de paralelas equidistantes como se muestra en la figura, es inmediato ver que nuestro cuadrado original puede seccionarse en cinco polígonos de igual área: cuatro triángulos (rectángulos) y el cuadrado original *LMNO*. Por lo que el área del cuadrado central es $\frac{10^2}{5} = 20\ cm^2$.



12.(E) El único reloj de manillas que marca las siete menos cuarto (18:45) es el E.

13.(A) Hay cinco caminos seguros que son:

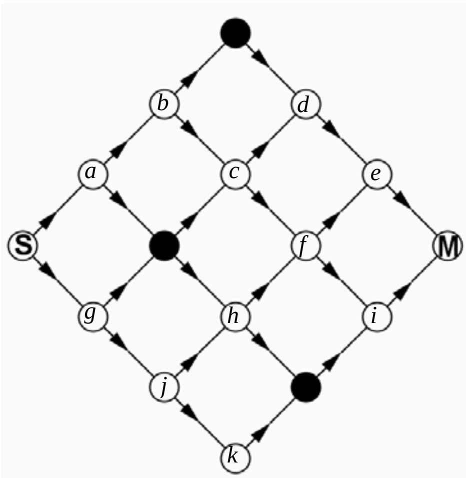
S *a b c d e* M

S *a b c f e* M

S *a b c f i* M

S g *j h f e* M

S g *j h f i* M



14.(B) Cuando haya dicho 2014 números ha tenido que sumar 3 un total de 2013 veces. Como empezó en el 1 habrá llegado al número 1 + 3 × 2013 = 6040..
La suma de sus cifras es 10.

15.(A) El ángulo x es igual a: 180º – (56º + 32º) = 180º – 88º = 92º.

16.(E) En una división entera se cumple: Dividendo = divisor × cociente + resto
D = 20 × 11 + 8 = 228.

228 : 19 = 12. Tocan a 12 y no sobra ninguno.

17.(B) 1 h = 60 min
60 min – (14 min 30 s + 8 min 45 s) = 60 min – 23 min 15 s = 36 min 45 s.

18.(D) Supongamos que la primera ficha la coloca Triagupín. Tiene, pues, 3 formas distintas de colocarla. A continuación, Triangupón tiene también 3 formas distintas. Seguidamente, a Triangupín le quedan 2 formas distintas y, después, a Triangupón, otras 2. Finalmente coloca cada uno de ellos la ficha que le queda.
Tienen una sola forma de hacerlo cada uno.
Tenemos entonces, $3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 36$ configuraciones distintas si comienza Triangupín. Simétricamente habrá otras 36 si el que empieza es Triangupón.
En total $36 \times 2 = 72$ configuraciones distintas.

19.(A) Todas las operaciones están bien hechas.

20.(C) Analizando las caras de los 14 cubitos, se obtiene:
$14 \times 6 = 84$ caras verdes iniciales.
Número de caras que ha pintado de rojo: 14 + 10 + 10 +12 = 46
Número de caras que quedan pintadas de verde: 84 – 46 = 38 caras.
Ahora hay pintadas de verde 38 caras.

21.(A) Si subo los escalones de 3 en 3 hay: $30 \times 3 = 90$ pasos.
90 : 10 = 9 pasos. El gigante dará 9 pasos.

22.(E) Si la probabilidad de sacar un caramelo de limón es de $\frac{1}{2}$, quiere decir que la mitad del total de caramelos son de limón y la otra mitad de menta y de fresa.
Por tanto: 8 caramelos de menta + 6 caramelos de fresa = 14 caramelos.
Hay 14 caramelos de limón.

23.(C) Se busca el múltiplo de 7 más próximo por defecto a 100.
El múltiplo de 7más próximo a 100 es 98. Por tanto, dentro de 98 días será martes, y dentro de 100 = (98 + 2) días será jueves.
El cumpleaños caerá en jueves.

24.(E) Como 5 pastores alemanes comen lo mismo que 9 chihuahuas, 15 perros pastores comerán lo mismo que 27 chihuahuas y, por tanto, estos 27 comerán lo mismo que 18 perros salchicha.
Por lo tanto 2 perros salchicha comerán lo mismo que 3 chihuahuas y en consecuencia 8 perros salchicha comerán lo mismo que 12 chihuahuas.

25.(B) Primero, calculamos el máximo común divisor de 24, 30 y 18 que es 6.
A continuación, dividimos el número total de canicas entre el máximo común divisor ´$(24 + 30 + 18) : 6 = 12$.
Se necesitan 12 cajas, de las cuales 4 son de canicas azules, 5 de verdes y 3 plateadas.

XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel II

1. (A) Todas las operaciones son correctas.

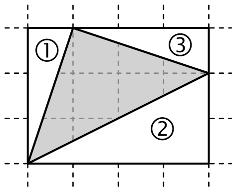
2. (D) Escribiendo todos los números como fracciones con denominador 1000 tenemos que: $\frac{2014}{1000}=\frac{2000}{1000}+\frac{?}{1000}+\frac{4}{1000}$ por lo que $\frac{?}{1000}=\frac{10}{1000}=\frac{1}{100}$. Así pues, el Comenúmeros se comió un 100.

3. (D) Si llamamos x al número de pasos que doy subiéndolos de dos en dos, habré subido $2x$ escalones. Si los subo de tres en tres daré $x – 30$ pasos y subiré $3(x – 30)$ escalones. Igualando el número total de escalones obtenemos la ecuación $2x = 3(x – 30)$ cuya solución es $x = 90$. Así pues, hay $2 \cdot 90 = 180$ escalones y el gigante subirá la escalera en 18 zancadas.

4. (C) El área del rectángulo que ves en la figura es $4 \cdot 3 = 12$ y las áreas de los triángulos blancos son:

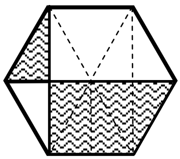
$A_1=\frac{1\cdot 3}{2}=1{,}5$, $A_2=\frac{4\cdot 2}{2}=4$ y $A_3=\frac{1\cdot 3}{2}=1{,}5$.

Así pues, el área del triángulo es 12 – (1,5 + 4 + 1,5) = 5.

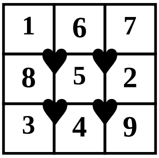


5. (D) Entre 1 y 100 hay 33 múltiplos de 3 (del $3= 3 \cdot 1$ al $99 = 3 \cdot 33$). Entre ellos solo hay seis que contengan un 7: 27, 57, 72, 75, 78 y 87. Encontrarlos es fácil pues un número es múltiplo de tres si la suma de sus cifras lo es. Como los números serán de la forma $a7$ o $7b$, a y b solo pueden ser 2, 5 y 8. Así pues el Comenúmeros se ha comido 33 – 6 = 27 números y en la pizarra quedaron 100 – 27 = 73 números.

6. (A) Trazando algunos segmentos convenientes vemos que el trapecio está compuesto de cinco triángulos y, por lo tanto, en cada triángulo he plantado 420: 5 = 84 margaritas.



7. (B) Como la suma de números de las casillas que están encima y a la derecha de 3 deben sumar 12, esos números podrían ser: 9 y 3, 8 y 4 o 7 y 5. Como el 3 y el 5 ya están usados, solo nos queda una posibilidad, que sean 8 y 4. Los colocamos en el orden que queramos, pues el problema es simétrico y continuamos.
Como la suma de los números que están encima del 8 y del 5 debe ser 7, con los números que nos quedan tenemos solo pueden



ser: 1 y 6, pero no sabemos en qué orden. Del mismo modo sabemos que los números que están a la derecha del 4 y del 5 son las casillas son 9 y 2 y por tanto, el número que queda es el 7 y los números quedan ordenados como ves en la figura.

8. (C) Como 81:3 = 27, un rectángulo tendrá área 27 cm^2 y el otro, el doble, 54 cm^2.Para que el área del rectángulo pequeño sea 27 tenemos las siguientes posibilidades:

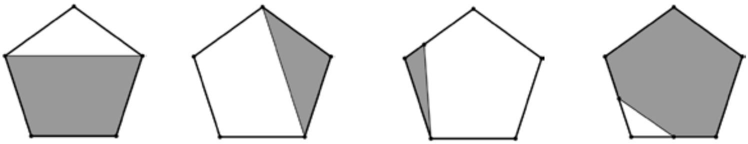
Lado menor	Lado mayor	Perímetro	Perímetro + 34
1	27	56	90
3	9	24	58

Así pues, el perímetro del grande puede ser 90 cm o 58 cm y, por lo tanto, la suma de sus lados podría ser 45 o 29. Como los lados solo pueden ser 1 y 54; 2 y 27; 3 y 18 o 6 y 9, vemos que la única solución posible es que los rectángulos sean de 3 x 9 y de 2 x 27. Así pues, la respuesta es 9.

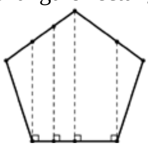
9. (D) Como el año 2014 tuvo 365 días, el día que está en el centro es el que ocupa la posición 183º. Comencemos a sumar: Con enero (31 días), febrero (28), marzo (31), abril (30), mayo (31) y junio (30) sabemos que el 30 de junio ocupa la posición 31 + 28 + 31+ 30 + 31 + 30= 181º. Así que Don Retorcido cumple dos días después, es decir, el 2 de julio.

10.(E) Como ves, se pueden formar todas estas figuras:

Trapecio Triángulo isósceles Triángulo escaleno Hexágono



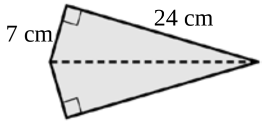
Veamos ahora por qué no podemos formar un triángulo rectángulo:
El corte debería formar un ángulo recto con uno de los lados pero lo hagamos dónde lo hagamos, no obtenemos un triángulo rectángulo:



11.(A) Mía obtuvo 2·521 = 1042 puntos en las partidas perdidas así pues, el resto los obtuvo en las partidas que ganó que fueron 2792 – 1042 = 350, por lo tanto jugaron 521 + 350 = 871.

12.(E) Si llamamos x al número de quesos que se comen el primer día, el número de piratas es $4x$. El segundo día quedan $27 – x$ quesos y hacen $5·(27 – x)$ trozos, que es el número de piratas. Así pues, $4x = 5(27 – x)$ cuya solución es $x = 15$ y el número de piratas es $4·15 = 60$.

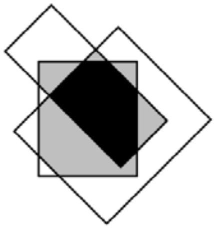
13.(A) Trazando una diagonal vemos que la flecha está formada por dos triángulos rectángulos cuyos catetos miden 7 y 24 cm así pues el área es, $2\cdot\frac{7\cdot 24}{2}=168\,\mathrm{cm}^2$.



14.(B) Los números de la cantinela de Luca son $3·0 + 1 = 1$; $3·1 +1 = 4$; $3·2 + 1 = 7$; … El último que dice es $3·2\,0\,1\,3 + 1 = 6040$ sus cifras suman 10.

15.(A) Como la media de 100 números se obtiene sumándolos todos y dividiendo entre 100, la suma de los números que había al principio en la pizarra es $86·100 = 8600$ y la suma de los 80 que quedaron después es $84 · 80 = 6720$. Así pues, la suma de los 20 que borró el profesor es $8600 – 6720 = 1880$ y su media es $1880 : 20 = 94$.

16.(B) Supongamos que las alfombras han quedado como en la figura. Marcamos de blanco la zona cubierta con una sola alfombra, que tiene área A_1, de gris la zona cubierta por dos alfombras, que tiene área A_2 y en negro la zona cubierta por las tres alfombras, con área A_3.



El área que ha quedado cubierta es $14 = A_1 + A_2 + A_3$ y el de las tres alfombras separadas es $20 = A_1 + 2·A_2 + 3·A_3$.

Como sabemos que $A_2 = 2$, tenemos que: $\begin{cases}12 = A_1 + A_3\\ 16 = A_1 + 3A_3\end{cases}$

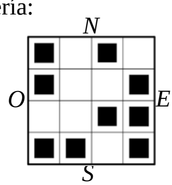
Así pues $A_3 = 2$.

17.(A) Llamando x a lo que cuesta un lápiz e y a lo que cuesta una goma obtenemos el sistema $\begin{cases}3 = 2x + 3y\\ 4{,}3 = 3x + 4y\end{cases}$. Si multiplicamos la primera ecuación por cuatro, la segunda por tres y restamos obtenemos que $\begin{array}{l}\begin{cases}12 = 8x + 12y\\ 12{,}9 = 9x + 12y\end{cases}\\ \hline \quad 0{,}9 = x\end{array}$ y por tanto un lápiz cuesta 0,90 euros.

18.(D) La suma de los ángulos del cuadrilátero $ABEC$ es 360º y por tanto el ángulo agudo $B\hat{E}C$ mide 42º + 94º + 17º = 153º y x mide 180º – 173º = 27º.

19.(D) Como el niño que no quiere caramelos tiene 11 y al repartirlos entre el resto tocan a uno sin que sobre ni falte nada, en total había 12 niños (11 que querían caramelos y el que no quería).

20. (D) Si Ana mirara la figura desde S, el máximo número de cubos sería:
$2{\cdot}3 + 4{\cdot}1 + 1{\cdot}2 + 3{\cdot}3 = 21$.
Si la mirara desde E el máximo sería:
$2{\cdot}3 + 4{\cdot}2 + 1{\cdot}2 + 3{\cdot}2 = 22$.
Si la mirara desde N el máximo sería:
$2{\cdot}3 + 4{\cdot}2 + 1{\cdot}1 + 3{\cdot}3 = 24$.
Y si la mirara desde O: $2{\cdot}2 + 3{\cdot}2 + 1{\cdot}2 + 3{\cdot}3 = 21$.
Así pues, el máximo número de cubos es 24 y Ana estaría en N.



21.(D) Los cuatro primeros días tenía tres cabras, entre todas comieron $4{\cdot}3{\cdot}200 = 2400$ g de pienso. Los nueve días restantes entre las dos cabras comieron $9{\cdot}2{\cdot}200 = 3600$ g así que aún quedan 20 000 – (2400 + 3600) = 14 000 g que, para una sola cabra, durarán 14 000 : 200 = 70 días.

22.(B) En ocho horas hay $8 \cdot 60 = 480$ minutos. Como cada 3 minutos recibe 5 mensajes, recibirá la friolera de $(480 : 3) \cdot 5 = 800$ mensajes.

23.(C) En la fila superior de la tabla aparecen los números 1, 2, 3, …, n y en la de abajo aparece en número que está en la fila superior multiplicado por 4 y aumentado en una unidad, es decir, $1{\cdot}4 + 1$, $2{\cdot}4 + 1$, $3{\cdot}4 + 1$, … $4{\cdot}n+ 1$. Así pues, el número que aparece debajo del 9 es $9 \cdot 4 + 1 = 37$ y el de encima del 69 es $(69 – 1) : 4 = 17$, luego su suma es 37 + 17 = 54.

24.(B) Como $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$, entonces $2a = b$ y como $\frac{b}{c} = \frac{8}{5}$, entonces $8c = 5b = 5{\cdot}2a = 10a$, luego $c = \frac{10a}{8} = \frac{5a}{4}$. Así pues, $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{2a + \frac{5a}{4}} = \frac{a}{\frac{8a+5a}{4}} = \frac{4a}{13a} = \frac{4}{13}$.

25.(B) Por el enunciado deducimos que hay el mismo número de bolas verdes que amarillas y que el número de amarillas es el doble que el número de rojas. Si hay x bolas rojas, habrá $2x$ verdes y $2x$ amarillas y $x + 2x + 2x = 40$. Así pues, el número de bolas rojas es 40 : 5 = 8.

XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel III

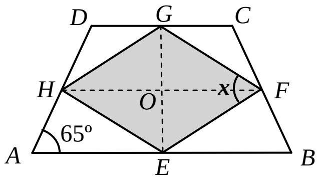
1. (D) 16 libros = 5 + 1 (de regalo) + 5 + 1 (de regalo) + 4
Alicia pagó: (5 + 5 + 4) · 2 = 14 · 2 = 28 €.

2. (A) Como el trapecio es isósceles $\hat{A} = \hat{B} = 65^o \Rightarrow \hat{C} = \hat{D} = 135^o$
Al trazar las diagonales del rombo, como éstas se cortan en su punto medio, O, resulta que *HF* es la paralela media del trapecio y por lo tanto

$CF = FB = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}DC = GC$.

Se deduce que el triángulo *GFC* es isósceles con

$\hat{C} = 180^o – 65^o = 115^o \Rightarrow \hat{F} = \hat{G} = \frac{65^o}{2}$.

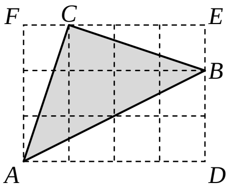


Finalmente, como $O\hat{F}C = O\hat{F}G + G\hat{F}C = \hat{B} \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{65^o}{2} = 65^o \Rightarrow x = 65^o$.

3. (A) Calculamos las raíces cuadradas de 4 778 603 y 4 778 595 y se obtienen 2186,… y 2185,…, respectivamente. El único cuadrado que hay entre ambos es $(2186)^2$ que evidentemente acaba en 6.

4. (C) El área de la figura sombreada es igual al área del rectángulo *ADEF* menos el área de los triángulos *ABD, BCE* y *AFC* .

$S = 4 \cdot 3 - \frac{4 \cdot 2}{2} - \frac{3 \cdot 1}{2} \cdot 2 = 12 - 4 - 3 = 5$.

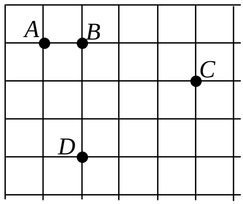


5. (B) $4^{15} + 8^{10} = (2^2)^{15} + (2^3)^{10} = 2^{30} + 2^{30} = 2 \cdot 2^{30} = 2^{31}$.

6. (B) Si analizamos solo las dos opciones de menor área:

Área (Δ *ABD*) = $\frac{1}{2}(1 \cdot 3) = \frac{3}{2}$

Área (Δ *ABC*) = $\frac{1}{2}(1 \cdot 1) = \frac{1}{2}$ es el área menor.



7. (D) I. $a \heartsuit b$ no puede ser positivo.

Es cierta pues escribiendo $a \heartsuit b = a^2 (a-b)(b-a) = a^2 (a-b)[-(a-b)] =$
$= -a^2 (a-b)^2 =$ (–)·(+)·(+) por ser a y b positivos distintos.

II. $1 \heartsuit 2 - 2 \heartsuit 1 = 3$

Es cierta ya que si hacemos los cálculos:

$1 \heartsuit 2 = 1^2 (1-2)(2-1) = 1(-1)(1) = -1$

$2 \heartsuit 1 = 2^2 (2-1)(1-2) = 4(1)(-1) = -4$

$(-1) - (-4) = -1 + 4 = 3$

III. $(a \heartsuit b) : (b \heartsuit a) = a : b$ sean cuales sean los números a y b.

Si escribimos:

$(a \heartsuit b) : (b \heartsuit a) = a^2 (a-b)(b-a) : b^2 (b-a)(a-b) = a^2 : b^2 = (a : b)^2$

Vemos que III no es cierta con las condiciones del problema.

8. (A) Si llamamos ***x*** al número de caramelos que había en la bolsa, ***y*** al de niños entre los que se reparten los caramelos en la 1ª ocasión, y ***z*** al de caramelos al que tocó cada niño en el supuesto 2º reparto, podemos escribir:

$$\left.\begin{array}{l} x = ym + n \\ x = (m+1)z + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow ym + n = (m+1)\,z + n;\; ym = (m+1)z;\; y = \frac{(m+1)\,z}{m}$$

Para que y resulte un número entero, z ha de ser múltiplo de m, y como se pide un número mínimo de caramelos, z será igual a m.

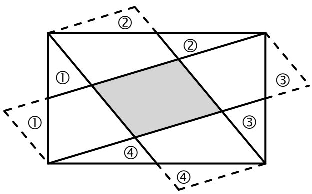
Luego $y = \dfrac{(m+1)\,m}{m} = m+1$; y $x = y\,m + n = (m+1)\,m + n = m^2 + m + n$

9. (A) Como $P(x) = x^2 + mx + n$ tiene las raíces a y $\dfrac{1}{a}$ se deduce que $m = -\left(a + \dfrac{1}{a}\right)$ y

$$n = a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

Entonces $P(x) = x^2 - \left(a + \dfrac{1}{a}\right)x + 1$ y $P\left(a + \dfrac{1}{a}\right) = \left(a + \dfrac{1}{a}\right)^2 - \left(a + \dfrac{1}{a}\right)^2 + 1 = 1$

10.(D) En la figura se observa que los triángulos marcados con el mismo número son iguales por simetría con lo que tenemos que el rectángulo dado tiene igual área que 5 romboides como el sombreado, por lo tanto su área es 60 : 5 = 12



11.(D) Como $72 = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9$, el número buscado debe ser múltiplo de 8 y de 9.
Recordemos los criterios de divisibilidad por 8 y por 9. Un número es divisible por 8 cuando el número formado por sus 3 últimas cifras es divisible por 8; y es divisible por 9 cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 9.
Como se pide el menor número esto exige encontrar un número con el menor número de cifras que cumpla las condiciones del problema. Lógicamente, hay que tener en cuenta el valor relativo de las cifras (el debido a la posición que ocupan).
Si el número tiene 8 cifras todas iguales a 9, su suma es $8 \cdot 9 = 72$; este número es múltiplo de 9 pero no es divisible por 8, por lo que hemos de cambiar la terna final (999) por otra que sea múltiplo de 8. Como en esta nueva terna la suma de sus cifras será menor que en la anterior, el número buscado tendrá que tener una cifra más, para que la suma de las cifras siga siendo 72.

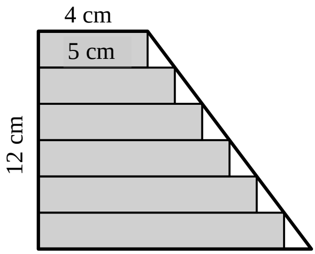
Analicemos los siguientes casos:

a) Si el número empieza por 1, tendremos que sustituir en la terna final un 9 por un 8; esta terna podría ser 899, 989 ó 998, pero ninguna de ellas es divisible por 8.

b) Si el número empieza por 2, tendremos que sustituir en la terna final dos 9 por dos 8; esta terna podría ser 889, 898 ó 988, pero ninguna es divisible por 8.

c) Si el número empieza por 3, tendremos que sustituir en la terna final los tres 9 por tres 8; esta terna sí es divisible por 8. El número que resulta es 399 999 888, que cumple todas las condiciones del problema.

12.(D) Altura de cada escalón = 12 : 6 = 2 cm
Anchura de cada escalón = 5 – 4 = 1 cm
En la figura se observa que el área del trapecio se puede obtener como la suma de las áreas de 6 rectángulos más la de 6 triángulos.



$$A = 4\cdot 2 + 5\cdot 2 + 6\cdot 2 + 7\cdot 2 + 8\cdot 2 + 9\cdot 2 + \left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)\cdot 6 = 84$$

Otra forma de calcular el área sería:

$$\text{Área} = \frac{10+4}{2}\cdot 12 = 14\cdot 6 = 84\,.$$

13. (E) Hay 3 resultados de cuadrados con 1 cifra: 1, 4, 9.
Con 2 cifras hay 6 (= 9 – 3) : 16,…, 81 (4^2,…, 9^2)
Con 3 cifras hay 22 (= 31 – 9): 100,…, 961 (10^2,…, 31^2)
Para llegar a la posición 100 quedan: $100 - (3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 22) = 100 - 81 =$
19 cifras $= 4 \cdot 4 + 3 \Rightarrow$ 4 resultados de cuadrados con 4 cifras (que corresponderían a 32^2, 33^2, 34^2 y 35^2) y 3 cifras del siguiente resultado (el de 36^2).
$36^2 = 1296$. Luego la respuesta es 9.

14. (B) Multiplicando, miembro a miembro, dos de las tres ecuaciones (2ª y 3ª, por ejemplo) se obtiene $(x\cdot z)\cdot(y\cdot z)=16 \Leftrightarrow (x\cdot y)\cdot z^2=16$; y teniendo en cuenta la primera ecuación, podemos escribir $1\cdot z^2=16$, $z=4$. Sustituyendo este valor de z en las ecuaciones 2ª y 3ª, resulta $x=\frac{1}{2}$, $y=2$.

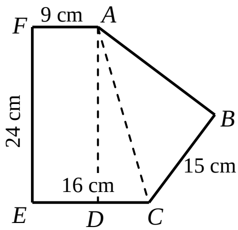
Por consiguiente, $x+y+z=\frac{13}{2}$.

15. (A) Tracemos el segmento *AD* paralelo a *FE*; entonces

$DC=16-9=7$, $AC=\sqrt{24^2+7^2}=\sqrt{625}=25$

Aplicando de nuevo el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo *ABC*, resulta:

$AB=\sqrt{25^2-15^2}=\sqrt{625-225}=\sqrt{400}=20.$



16. (C) Llamando *n* al número de estudiantes de la clase y *x* al de chicos, podemos escribir: $\frac{2x}{n}=0{,}5$; $x=\frac{0{,}5n}{2}=\frac{n}{4}$; o sea, el número de chicos es la cuarta parte de *n* ,y por tanto, el de chicas será las tres cuartas partes; es decir, el 75%.

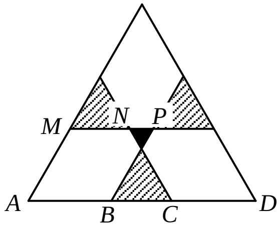
17. (B) Como en los cuatro casos *y* es un numero positivo y *x* es negativo, el cociente más pequeño se obtendrá para su mayor valor absoluto; es decir, cuando *y* sea lo mayor posible y el valor absoluto de *x* sea lo menor posible; esto sucede en el vértice B.

18. (D) Llamando *x* a la longitud del lado mayor del rectángulo e *y* a la del menor, podemos escribir el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r}\frac{y}{x}=\frac{4}{5}\\ x\cdot y=125\end{array}\right\}$. Despejando *y* en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda obtenemos:

$x\cdot\frac{4x}{5}=125 \Rightarrow x^2=\frac{5\cdot 125}{4} \Rightarrow x=\frac{25}{2}$. Sustituyendo en la segunda ecuación, resulta: $\frac{25}{2}\cdot y=125,\ \ y=10$. Por lo tanto, el perímetro del rectángulo es

$2x+2y=25+20=45$ cm.

19. (B) Observando la figura, vemos que $MP = 5 + 2 = 7$ y $AB = MP = 7$, por ser segmentos de paralelas comprendidos entre paralelas. Por lo tanto, la longitud del lado del triángulo inicial es:
$AB + BC + CD = 7 + 5 + 7 = 19$.



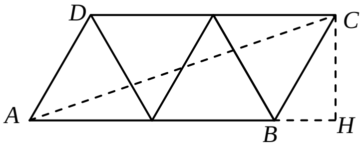
20. (C) En la segunda caja tiene que estar la bola número 12, por ser este número el único que no es primo de los cuatro. De las tres bolas restantes, en la tercera caja sólo puede haber metido la número 2, por ser este número par y como la número 7 no puede estar en la primera caja, tendrá que estar en la última, que es en la que pone mayor que 100.

21. (C) Trazando la perpendicular CH, resulta: $BH = \dfrac{1}{2}$

$$CH^2 = CB^2 - BH^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$AC^2 = AH^2 + CH^2 = \left(1+1+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 7$$

y $AC = \sqrt{7}$.



22. (E) Evidentemente, la desigualdad $64 < x^2$ sólo puede verificarse si el valor absoluto de x es mayor que 8; pero, entonces, para que pueda cumplirse la otra desigualdad ($x^3 < 64$), x tendrá que ser un número negativo. Estas dos condiciones sólo las cumple la afirmación $x < -8$.

23. (A) Llamando S_{20} a la suma de los 20 números borrados y S_{80} a la suma de los 80 números restantes, podemos escribir:
$\dfrac{S_{20}+S_{80}}{100} = 86$ y $\dfrac{S_{80}}{80} = 84$, $S_{80} = 80 \cdot 84 = 6720$. Sustituyendo en la primera igualdad: $\dfrac{S_{20}+6720}{100} = 86$, $S_{20} = 8600 - 6720 = 1880$.

Media de los 20 números borrados $= \dfrac{S_{20}}{20} = \dfrac{1880}{20} = 94$.

24. (B) Según la primera igualdad, $b = 2a$. Sustituyendo en la segunda igualdad: $\frac{2a}{c} = \frac{8}{5}$,

$c = \frac{5a}{4}$; por lo tanto, $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{2a + \frac{5a}{4}} = \frac{4a}{13a} = \frac{4}{13}$.

25. (E) Si n es par, n^n es cuadrado perfecto pues, al ser $n=2k$, $n^n = n^{2k} = (n^k)^2$. Por lo tanto, ya tenemos 50 números enteros (los pares 2, 4, 6,...100) que verifican la condición. Por otra parte, si n es impar podemos escribir $n = 2k+1$ y $n^n = n^{2k+1} = (n^k)^2 \cdot n$, lo que indica que n^n será cuadrado perfecto si y sólo si lo es n. Veamos, por lo tanto, qué cuadrados perfectos impares hay que cumplan $1 \le n \le 100$. Son 5: 1, 9, 25, 49, 81. En definitiva, hay 50 + 5 = 55 números que verifican las condiciones exigidas.

XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel IV

1. (C) Sea *2x* el ángulo agudo del rombo, $tg\ x = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$, por tanto,

$$tg\ 2x = \frac{2tg\ x}{1 - tg^2 x} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}.$$

2. (A) Si acabara en 5 → $1771565 : 5 = 354313$, ya no es múltiplo de 5, por tanto no es un cubo perfecto.

Si acabara en 4 → $1771564 : 4 = 442891$, ya no es múltiplo de 2.

Si acabara en 3 → $1771563 : 3 = 590513$, ya no es múltiplo de 3.

Si acabara en 2 → $1771562 : 2 = 885781$, ya no es múltiplo de 2.

Por tanto, tiene que acabar en 1→ $1771561 = 11^6$, que sí es un cubo perfecto.

3. (C) El polinomio tiene que ser de la forma $P(x) = (x-a)\cdot(x-b)$, por tanto, $P(a+b) = b \cdot a$.

4. (C) La suma dada corresponde a $S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20})\cdot 20}{2} = (a_1 + a_{20})\cdot 10 = S$ **,** $a_1 + a_{20} = \frac{S}{10}$ **.**

La suma pedida $S_{par} = \frac{(a_2 + a_{20})\cdot 10}{2} = (a_1 + 5 + a_{20})\cdot 5 = \left(\frac{S}{10} + 5\right)\cdot 5 = \frac{S}{2} + 25$ **.**

5. (B) Están delante de “becad”, entre otras, todas las que empiezan por a que son 4! = 24. De las 24 que empiezan por b, solo están detrás de “becad”, las dos que empiezan por bed y becda. Por tanto, hay $24 + (24 - (1 + 2 + 1)) = 44$ palabras delante de “becad”, así pues, la posición que ocupa es la 45ª.

6. (B) $2^2+4^2+6^2+...+(2n)^2=2^2\left(1^2+2^2+3^2+...+n^2\right)=4\cdot\dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}=$

$=\dfrac{2n\cdot(2n+2)\cdot(2n+1)}{6}$

7. (E) Observando el número de cifras de cada cuadrado tenemos.

De 1 cifra, 3, de 1^2 a 3^2 (1ª a 3ª posición)

De 2 cifras, 6, de 4^2 a 9^2 (4ª a 15ª posición)

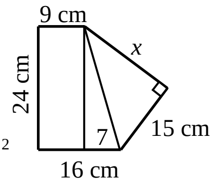
De 3 cifras, 22, de 10^2 a 31^2 (16ª a 81ª posición)

Faltan solo 5 números de 4 cifras, de 32^2 a 36^2 (82ª a 101ª posición). Por tanto, la solución será la penúltima cifra de $36^2=1296$, es decir, el 9.

8. (C) Al ser peldaños de igual altura, cada uno mide 2 cm. Si la pendiente es -2, indica que cada uno de los triangulitos tiene por cateto horizontal 1 cm. Por tanto, la base mayor del trapecio mide 10 cm. Como $A_{escalera}=A_{trapecio}-6\cdot A_{triángulo}$, tenemos

$A_{escalera}=\dfrac{(10+4)\cdot 12}{2}-6\cdot\dfrac{1\cdot 2}{2}=78\,cm^2$

9. (C) Usando el triángulo rectángulo de catetos 24 cm y 7 cm, obtenemos la hipotenusa $a=25$ cm, y usando el otro triángulo rectángulo conseguimos $x=20$ cm. Dividiendo la figura en un trapecio y un triángulo, obtenemos el área.

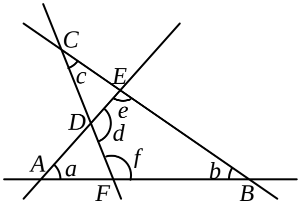


$A_{pentágono}=A_{trapecio}+A_{triángulo}=\dfrac{(16+9)\cdot 24}{2}+\dfrac{15\cdot 20}{2}=450\,cm^2$

10.(E) Escribimos la curva de la forma $y=4+\dfrac{24}{x-4}$, entonces $x-4$ tiene que ser divisor de 24, obteniendo $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24$. Así pues, existen 16 valores enteros de (x,y).

11.(E) Las tres primeras afirmaciones son obviamente verdaderas y la cuarta también pues la parábola $y=x^2-2x$, en $x=2$ toma el valor 0 y en $x=3$ toma el valor 3.

12.(E) Del triángulo *ABE*, sacamos que $e = 180º - (a+b) = 85º$ y del triángulo *BCF* sacamos que $f = 180º - (b+c) = 105º$. Con estos datos y observando el cuadrilátero *BEDF* sacamos el ángulo pedido $d = 360º - (b+e+f) = 130º$.



13.(B) En la lista que nos proponen solo existen dos posibilidades, que el número de pares-impares sea el mismo o que el número de pares-impares se diferencie en 1.

Escribimos los porcentajes en fracción a) $\frac{2}{5}$, b) $\frac{9}{20}$, c) $\frac{12}{25}$, d) $\frac{1}{2}$, e) $\frac{3}{5}$.

Se ve claramente que la única lista que no existe es la que da $\frac{9}{20}$, ya que en una lista de 20 números consecutivos no puede haber 9 impares y 11 pares.

14.(B) Está claro que el lado más largo es el opuesto al vértice de 61º, pero, ¿es *AD* o *AC*? Como *AB* es común a los dos triángulos, para el triángulo de la derecha es el lado pequeño (opuesto a 59º) y para el de la izquierda es el mediano (opuesto a 60º) y los dos triángulos son semejantes, entonces, el triángulo más grande es el de la derecha y por tanto, el lado mayor es el lado *AC*.

15.(D) Los términos de la sucesión serán:

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1 + a_1 + 1$

$a_3 = a_2 + a_1 + 2 = a_1 + a_1 + a_1 + 1 + 2$

$a_4 = a_3 + a_1 + 3 = a_1 + a_1 + a_1 + a_1 + 1 + 2 + 3$

…

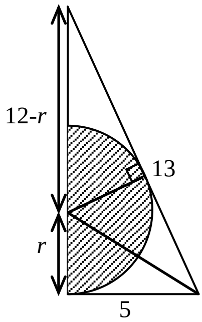
$$a_{100} = 100 \cdot a_1 + 1 + 2 + 3 + ... + 99 = 100 \cdot 1 + S_{99} = 100 + \frac{1+99}{2} \cdot 99 = 5050$$

16.(E) La suma de los n primeros es $S_n = \frac{(1+n)\cdot n}{2} = 111k$ siendo $1 \le k \le 9$, entonces $n \cdot (n+1) = 222k$. Factorizando 222 obtenemos que $n \cdot (n+1) = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot k$, así que sacamos que *n* y *n* + 1 (dos números consecutivos) tienen que ser múltiplos de 6 y de 37. Solo pueden ser el 36 y 37 $\Rightarrow S_{36} = \frac{36 \cdot 37}{2} = 666$. Por tanto, la suma de las cifras será 18.

17.(D) Supongamos que el club tiene 100 socios. Como buscamos el porcentaje más pequeño posible, hacemos que los participantes repitan lo menos posible.
El primer día van 80, el segundo repiten 60 (y los otros 20 que no fueron el primer día), el tercero repiten 40 (más 40 de los que han faltado algún día) y el cuarto repiten 20. Así que el menor porcentaje de socios que han participado en las 4 excursiones es del 20%.

18.(B) Los triángulos inferiores son iguales, ya que los dos son rectángulos y tienen dos lados iguales, el común y el cateto que es el radio de la circunferencia. Así obtenemos que las medidas del triángulo superior son r, 8 y $12-r$. Aplicando Pitágoras sacamos

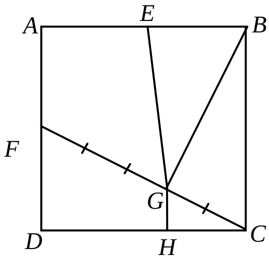
$$(12-r)^2 = 8^2 + r^2 \Rightarrow r = \frac{10}{3}$$

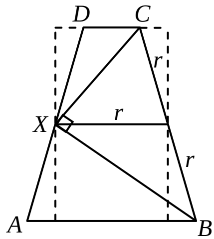


19.(C) Llamando c al cateto del triángulo rectángulo y aplicando Pitágoras tenemos que $2c^2 = 64 \Rightarrow c = 4\sqrt{2}$. Así pues el área pedida será

$$A = 8^2 + \frac{\left(4\sqrt{2}\right)^2}{2} + 2\cdot\left(4\sqrt{2}\right)^2 = 144 .$$

20.(B) Bajando desde G la perpendicular GH al lado DC, la semejanza de los triángulos FDC y GHC nos dice que $\frac{1}{GH} = \frac{5}{2} \Rightarrow GH = \frac{2}{5}$ y la altura sobre EB del triángulo EBG es de $2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$, así pues el área del triángulo EBG es: $A = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \frac{8}{5} = \frac{4}{5}$.





21.(B) Como en cualquier triángulo rectángulo se verifica que la longitud de la mediana relativa a la hipotenusa coincide con la mitad de ésta, ya que es el radio de la circunferencia circunscrita. Así que en nuestro caso esta mediana mide 1 y al ser ésta la paralela media del trapecio, resulta que la suma de las longitudes de las dos bases es 2, por lo que el perímetro es 6.

22.(D) La suma de n enteros consecutivos empezando por el 1 es $S_n = \dfrac{(1+n)\cdot n}{2}$, por tanto, tenemos que buscar el mayor n que cumpla $\dfrac{(1+n)\cdot n}{2} < 857 \quad \Rightarrow n\cdot(n+1) < 1714 \Rightarrow n^2 < 1714 \Rightarrow n \le 41$. Probamos con $n = 41$, entonces $S_{41} = \dfrac{41\cdot 42}{2} = 861 > 857$, así que no vale. Si $n = 40$, $S_{40} = \dfrac{40\cdot 41}{2} = 820 < 857$, la diferencia se debe al número repetido que será el 37.

23.(A) El enunciado nos dice que $a+b=26$, estos números a y b podrían ser los dos impares. $a+b+c+d=41 \Rightarrow c+d=15$, de estos números uno de ellos tiene que ser par y el otro impar. $a+b+c+d+e+f=57 \Rightarrow e+f=16$, también pueden ser los dos impares. Por tanto, de entre todos los números, al menos, uno tiene que ser par.

24.(B) Hallamos los puntos de corte de las dos curvas resolviendo el sistema $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ (x-4)^2+9y^2=81 \end{cases}$ y obtenemos los puntos $(4,3)$, $(4,-3)$, $(-5,0)$

Es un triángulo cuya base mide 6 y la altura 9, por tanto el área será 27.

25.(E) Contamos los casos:
20 ceros → 1
19 ceros, 1 uno → 20 (el 1 en cada una de las posiciones)
18 ceros, 2 unos → 19 +1 (los unos juntos → 19 sitios y los unos separados)
17 ceros, 3 unos → 18+2
…
2 ceros, 18 unos → 1+19
1 cero, 19 unos → 20
20 unos → 1
En total tenemos $19\cdot 20 + 2 = 382$.

XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel I

1. (A) El problema se resuelve muy fácilmente efectuando la adición del resultado de la suma más el sustraendo, esto es:

$$\begin{array}{cccccccc} & & 2 & 3 & 7 & 5 & 3 & 3 \\ + & & 2 & 1 & \mathbf{2} & 6 & \mathbf{3} & 9 \\ \hline & & 4 & \mathbf{5} & 0 & \mathbf{1} & 7 & \mathbf{2} \end{array}$$

En donde es inmediato obtener las cifras comidas: 2, 3, 1, 2 y 5, cuya suma es 13.

2. (C) Nuestro número gigantesco es múltiplo de 5 e impar. Por lo tanto, tiene que terminar en 5.

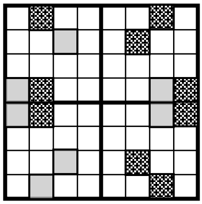
3. (B) Lucía lee 84 páginas en dos horas (120 minutos),por lo que lee $\frac{84}{120}$ páginas por minuto. Como le restan por leer 14 páginas, tardará en leerlas $14 : \frac{84}{120} = 20$ minutos.

4. (C) El triángulo está formado por 16 triangulitos. Dado que $\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$**,** basta ver cuál de las zonas sombreadas está formada por 6 triangulitos. Es la C.

5. (B) Yo nací el 23 de noviembre de 1992 + 10, es decir, del año 2002 y, en consecuencia, el 23 de noviembre de 2014 cumpliré 2014 – 2002 = 12 años. Por lo tanto, el 5 de abril de 2014 todavía no he cumplido los 12 años. Tengo 11 años.

6. (C) Como el 3 está situado 5 “divisiones” a derecha de – 2, sabemos que cada división de la recta mide una unidad. P está 5 unidades a la izquierda de – 2, por lo que representa al número – 7.
Entonces, 18 unidades a la derecha de P, está el – 7 + 18 = 11

7. (C) Cada cuadradito coloreado genera otros tres, de forma que los **cuatro** son simétricos con respecto a los lados comunes. En la figura, entre los coloreados por Juanito, se han señalado con el mismo número los cuadraditos que cumplen tal simetría. Está claro que disponemos de cuatro grupos distintos de cuadraditos, lo que genera la necesidad de colorear en total 16 cuadraditos como mínimo. Como Juanito solo ha coloreado 7, debe colorear otros 9 para llegar a los 16.



Por supuesto, se podría haber procedido a colorear directamente los cuadraditos que faltan, como se aprecia en la segunda figura.

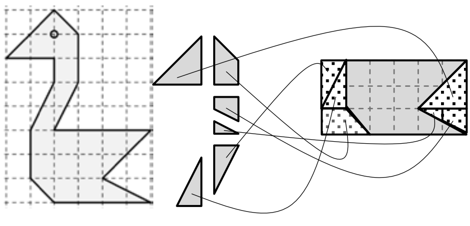
8. (D) El número de mascotas correspondiente a los alumnos que llevaron una o dos mascotas fue: 241 × 1 + 87 × 2 = 415. Por lo que el número de mascotas correspondiente a los que llevaron 3 fue: 553 – 415 = 138 Luego el número de alumnos que llevó tres mascotas fue: 138 : 3 = 46.
Entonces, 241 + 87 + 46b= 374, fue el número de alumnos que llevó alguna mascota.
Deducimos finalmente que 450 – 374 = 76 alumnos no llevaron ninguna.

9. (D) Los tres ángulos miden respectivamente x, (x + 10) y $\frac{x+(x+10)}{2}=x+5$ grados, midiendo el mayor: x + 10 grados.
Por otra parte, $x + (x + 10) + (x + 5) = 180$, es decir, $3x + 15 = 180$.
Resolviendo la ecuación obtenemos: $x = 55$ grados.
En consecuencia, el ángulo mayor mide 65 grados.

10. (E) Todos los números impares de tres cifras y múltiplos de 57, se obtienen multiplicando 57 por 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 y 17 respectivamente.
Efectuando el cálculo de los cuatro primeros obtenemos:
171, 285, 399 y 513, entre los que ya tenemos los dos (285 y 513) que ha encontrado el abuelo. Su suma es 798.

11.(C) Siguiendo las instrucciones obtenemos sucesivamente:
5 + 2 = 7; 7 × 3 = 21; 21 > 100, NO; 21 × 3 = 63; 63 > 100, NO; 63 × 3 = 189;189 > 100, SÍ; Imprime 189.

12.(C) Solución sin palabras. Cortando la figura por el cuello en 6 piezas como se muestra más abajo y reordenándolas se obtiene un rectángulo de 6 cuadros de largo y 3 de alto.



Superficie = 6 × 3 = 18 cm^2
También se puede resolver aplicando el teorema de Pick.

Resulta motivante para los escolares. $\acute{A}rea=\frac{Pp}{2}+Pi-1$

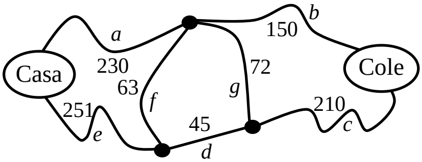
Pp: nº de puntos en el perímetro; Pi: nº de puntos en el interior

$\acute{A}rea=\frac{26}{2}+6-1=18\text{ cm}^2$.

Se entiende por puntos, los puntos de corte de la cuadrícula.

13.(D) Contando todas las cantidades en céntimos, tenemos:
$\frac{250}{5}+\frac{760}{20}+\frac{1500}{50}=118$ monedas.

14.(B) Midiendo todo en metros tenemos:



0,23 km = 0,23 × 1000 = 230 m
1,5 hm = 1,5 × 100 = 150 m
21 dam = 21 × 10 = 210 m
450 dm = 450 : 10 = 45 m
7,2 dam = 7,2 × 10 = 72 m
Los recorridos admisibles son:
ab, de 230 + 150 = 380 m
agc, de 230 + 72 + 210 = 512 m
afdc, de 230 + 63 + 45 + 210 = 548 m
edc, de 251 + 45 + 210 = 506 m
efgc, de 251 + 63 + 72 + 210 = 596 m
efb, de 251 + 63 + 150 = 464 m
afdgb, de 230 + 63 + 45 + 72 + 150 = 560 m
El más largo es el *afdgb* y el más corto el *ab*. Su diferencia es: 596 – 380 = 216 m.

15.(C) Hay seis maneras diferentes de rellenar una bolsita con 3 caramelos. Son las siguientes, en las que hemos representado los caramelos por su inicial:
FFF – FFM – FFL – FML – FMM - MML

16.(A) Como el número debe ser par, descartamos de entrada los que terminan en impar y, tanteando un poco, vemos que 36 cumple las condiciones. (Por otra parte ningún número de dos cifras, obtenido multiplicando un número por 12, comienza con 5).
La tarjeta de Irene es la A.

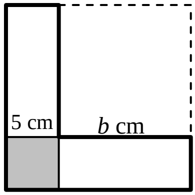
17.(A) Mediante sucesivos tanteos se pueden hallar los números que corresponden a cada casilla. El Tofu quedaría así:
La suma de los números de las cuatro esquinas es:
4 + 3 + 2 + 1 = 10.

1	2	1	3
3	4	2	1
2	1	2	4
4	3	1	2

18.(B) El mínimo común múltiplo de los denominadores es 20, así que reduciendo las fracciones a ese denominador común tenemos, que Luz se dejó $\frac{5}{20}$, Sol se dejó $\frac{8}{20}$ y Mar se dejó $\frac{6}{20}$. La que más comió fue Luz, luego Mar y la que menos Sol.
Luego las afirmaciones A), C), D) y E) son falsas.
La única afirmación cierta es la B porque Mar comió más que Sol.

19.(A) Comenzaremos probando con las circunferencias más grandes posibles, esto es, de diámetro igual a la anchura. Es claro que sólo cabe una, pero no se ajusta al rectángulo. A continuación probamos con circunferencias de diámetro mitad de la anchura, es decir, de 6 cm. Vemos que a lo ancho caben exactamente 2 y a lo largo se ajustan 3, ya que $3 \times 6 = 18$. De modo que $2 \times 6 = 6$ circunferencias de diámetro 6 cm se ajustan al rectángulo de Richi, y hemos visto que la siguiente circunferencia mayor no lo hace. Por tanto, 6 es el menor número de circunferencias que se ajustan perfectamente al rectángulo.

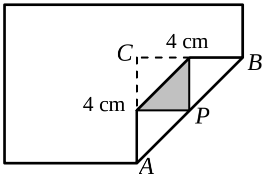
20.(E) A la vista de la figura está claro que el área de la **L** es:
$2 \times (5 \times b) + 5^2 = 10b + 25 = 145$, luego $10b = 120$ y $b = 12$.
El perímetro de la **L** es el mismo que el del cuadrado grande, es decir: $4 \times (12 + 5) = 68$.
También se podía haber hallado sumando todos los segmentos de la **L**.
$5 + 12 + 12 + 5 + (12 + 5) + (5 + 12) = 68$



21.(C) Para números de dos cifras, a partir del 10, encontramos que la primera de sus cifras está en posición par, así que, en la posición cien, se hallará la primera cifra de cierto número, *n*, de dos cifras. No es difícil ver que, al escribir desde el 1 hasta el 49, ocupamos $9 + 20 \times 4 = 89$ posiciones y como la decena de los *cincuenta* ocupa 20 posiciones, concluimos que en la posición 100 encontraremos la cifra 5.

22.(D) En primer lugar pasaremos todo a tiempo de 24 horas. De este modo sale de Lima, a las 16, en hora de Lima y llega a Madrid a las 14 del segundo día, en hora de Madrid. Ahora transformamos las 14 horas de la llegada a Madrid en horario de Lima. Llega a Madrid a las $14 – 6 = 8$ del segundo día en hora de Lima. Solo falta calcular el tiempo del primer y segundo día (todo en hora limeña) y sumarlos. El primer día tarda $24 – 16 = 8$ horas y el día de llegada otras 8 horas.
En total tarda $8 + 8 = 16$ horas.

23.(A) Dado que P es el punto medio del segmento AB, tenemos que el triángulo rectángulo isósceles, *ABC*, cuya superficie es de $\dfrac{4\times4}{2} = 8 \text{ cm}^2$ queda dividido en cuatro pequeños triángulos rectángulos de igual área. En consecuencia, nuestra pequeña zona sombreada tiene un área de 2 cm^2.



24.(D) Basta darse cuenta de que si el número total de goles es par, la diferencia entre los resultados de ambos equipos también será par. Por lo tanto, Matem no pudo ganar por un gol.
En nuestro caso particular, con cuatro goles en total, los posibles resultados son:
4-0, 3-1 y 2-2, independientemente del equipo que gane.

25.(A) Convirtiendo cada uno de los tres hombrecillos grandes en cinco medianos, tendremos en total, $8 + 6 + 7 = 21$ hombrecillos medianos más un hombrecillo pequeño, es decir, 21,5 hombrecillo medianos.
Dado que éstos representan 2 150 000 espectadores, cada hombrecillo mediano representará a $\frac{2\,150\,000}{21{,}5} = 100\,000$ espectadores.

XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel II

1. (E) El número que buscas ha de ser un múltiplo de $7 \cdot 9 = 63$ comprendido entre 600 y 800 y estás de suerte porque no hay muchos: 630, 693 y 756. El único que es impar es el 693, cuyas cifras suman 18.

2. (B) Lo primero: los ocho números colocados suman 36 (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8).
Lo segundo: los cuatro lados sumados llegan a 58 (11 + 12 + 14 + 21).
Lo tercero: la diferencia entre estas sumas, 58 – 36 = 22 es la suma de las cuatro esquinas, ya que las hemos sumado dos veces al sumar los cuatro lados.
Lo cuarto: la suma de los números que no están en las esquinas es 36 – 22 = 14.

3. (A) ¿Cuántas bolsitas de cuatro caramelos podemos formar si puedo elegir entre estos caramelos: F–F–F–F–L–L–M–M–M? En este tipo de problemas es fundamental seguir un orden claro para estar seguros de que no nos dejamos ningún caso por computar. Como tenemos letras, una buena elección es el orden alfabético:
FFFF, FFFL, FFFM, FFLL, FFLM, FFMM, FLLM, FLMM, FMMM, LLMM, LMMM. Once bolsitas diferentes..

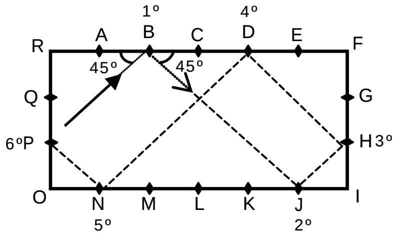
4. (D) Debemos descomponer en factores primos:
$18 = 2 \cdot 3^2$ $\quad 75 = 3 \cdot 5^2$ $\quad 24 = 3 \cdot 2^3$ $\quad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$
Debemos conseguir el mcm de los números anteriores, es decir, el $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$.
Así pues el 18 hay que multiplicarlo por $2^2 \cdot 5^2 = 100$; el 75 por $3 \cdot 2^3 = 24$; el 24 por $3 \cdot 5^2 = 75$; el 30 por $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$. La suma de estos números es 259

5. (D) Este es un problema de atención. Debemos encontrar un mensaje que difiera en una letra de uno; en dos de otro; en tres de otro; y en cuatro de otro. Así pues, miramos, comparamos, pensamos y…

Mensaje correcto	F F V F F	D
Un fallo	F V V F F	B
Dos fallos	F FFF V	A
Tres fallos	V F F V F	C
Cuatro fallos	V F F V V	E

6. (E) La botella contiene en principio 150 cl y echamos al vaso un cuarto de esa cantidad, es decir, $\frac{1}{4} \cdot 150 = 37{,}50$ cl, que suponen los tres cuartos de la capacidad del vaso. Por tanto, el vaso tiene una capacidad de $(37{,}50 : 3) \cdot 4 = 50$ cl, es decir, medio litro.

7. (D) Si marcamos el recorrido que va haciendo la bola, vemos que el décimo rebote lo hará en el punto D.

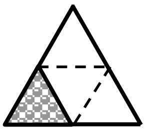


8. (B) Sólo hay cuatro números con esas condiciones: 23, 37, 53 y 73.

9. (D) En problemas de proporciones podemos jugar con cantidades arbitrarias y luego calcular la proporción deseada. Si suponemos que María tiene 100 pentágonos, Merche tendría 140, lo que supone que Merche habría de regalar 20 de sus pentágonos a María para que las dos amigas tuvieran 120 cada una.

Ya está, Merche tendría que regalar 20 de sus 140 pentágonos, es decir, $\frac{20}{140} = \frac{1}{7}$.

10.(A) Si trasladamos el triángulo pequeño hacia un vértice vemos que este ocupa un cuarto del grande.



11.(C) Si las dimensiones, en cm, del rectángulo son a y $a + 8$, tendremos una de estas dos posibilidades: $2a + a + 8 = 55$ o $a + 2(a + 8) = 55$.
En el primer caso se obtiene que $a = 15{,}666\ldots$ cm y lo descartamos por no ser entero.
En el segundo caso es $a = 13$ cm. El otro lado mide 21 cm y el perímetro del rectángulo es 68 cm.

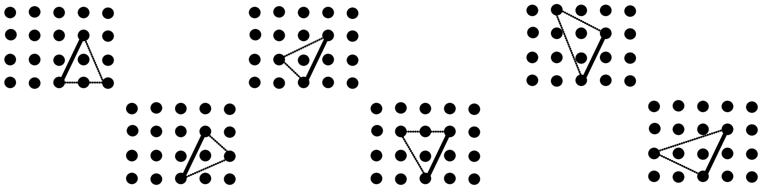
12.(E) Podemos formar una tabla que indique los palillos que vamos necesitando y así nos es más fácil averiguar cuántos palillos harán falta para construir el barquito que ocupe la posición n:

Barquito	1º	2º	3º	4º	...	nº
Palillos necesarios	$8 = 4\cdot 2$	$12 = 4\cdot 3$	$16 = 4\cdot 4$	$20 = 4\cdot 5$	...	$4\cdot(n+1)$

Así pues, para construir el barquito que hace el número 133, Nemo necesita exactamente $4\cdot 134 = 536$ palillos. Luego si compra una caja de 500 palillos aún me faltan 36 palillos.

13.(B) Imaginemos que vamos trazando las calles dejando para la última la que es paralela. La primera calle no se cruza con ninguna; al trazar la 2ª calle se cruza con la 1ª, así que ya tenemos un cruce; la 3ª calle se cruza con la 2ª y la 1ª: tenemos dos cruces más; con la 4ª calle tendremos 3 cruces; con la 5ª, 4 cruces y con la 6ª cinco cruces; cuando tracemos la última calle ha de ser paralela a una de las anteriores, así que tendremos cinco cruces más.
En total, 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 5 = 20 cruces con sus correspondientes monumentos.

14.(D) Hay que tener en cuenta que el segmento que nos dan no puede ser el lado desigual del triángulo isósceles. Solo puede ser uno de los lados iguales. Estos son los seis casos que hay:



15.(D) Despacito y buena letra, o mejor dicho, despacito y buena suma:

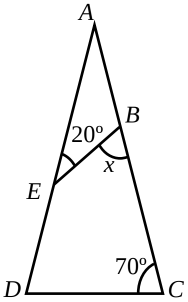
1 + 2 + 3 + 9 = 15	1 + 2 + 4 + 8 = 15	1 + 2 + 5 + 7 = 15
1 + 3 + 4 + 7 = 15	1 + 3 + 5 + 6 = 15	2 + 3 + 4 + 6 = 15.

Ya no hay más, solo seis sumas.

16.(E) Cada cinco pasos, Joaquín avanza 3 metros y Juan Jesús 1 metro, uno al encuentro del otro. Digamos que cada "cinco-pasos" acortan en 4 metros los 166 metros de la senda. Así que si dividimos 166 : 4 = 41,5, podríamos razonar así: cuando cada uno de ellos ha dado 41 "cinco-pasos" Joaquín ha recorrido 3 · 41 = 123 metros y Juan Jesús 41 metros. Esto hace un total de 123 + 41 = 164 metros. Y esto nos induce a pensar que al paso siguiente ya se encuentran (Joaquín con 124 m y Juan Jesús con 42 m recorridos). Pero esta respuesta no está entre las posibles.
Así que debemos regresar al "cinco-pasos" anterior, es decir, al número 40. Joaquín ha recorrido 3 · 40 = 120 metros y Juan Jesús 40 metros. Y ahora sí, al tercer paso siguiente los amigos se encuentran, Joaquín ha recorrido 123 metros y Juan Jesús 43 metros.

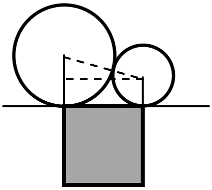
17.(E) Hay 19 resultados favorables: (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6).

Como hay 36 casos posibles, la probabilidad pedida es $\frac{19}{36}$.



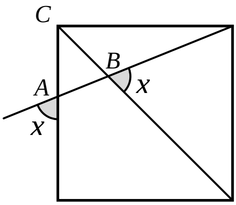
18.(B) El triángulo *ADC* es isósceles ya que *AE* + *ED* = *BC* + *AB*, por lo que su ángulo *D* mide 70º y entonces *A* mide 40º. En el triangulo superior *AEB*, vemos que el ángulo *B* mide 120º y ya podemos contestar que x = 60º..

19.(B) Sabemos que el tiempo es igual al espacio entre la velocidad, $t = \frac{e}{v}$, así en este problema si llamamos *e* a la longitud del poste tenemos que $40 = \frac{e}{3} + \frac{e}{5}$, de donde $40 \cdot 15 = 5e + 3e \Rightarrow e = 75$ cm = 7,5 m.

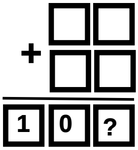


20. (C) Si miras al dibujo verás que trazando solo dos segmentos más se forma un triángulo rectángulo y resolvemos el problema en un santiamén. La hipotenusa mide 17 cm; el cateto pequeño 3 cm; y por el teorema de Pitágoras vemos que el cuadrado del otro cateto es $17^2 - 3^2 =$ 280. ¡El área del cuadrado mide 280 cm^2!

21.(D) Encontremos los números que se zampó Comenúmeros.
Empezamos por *a*: los primos de dos cifras menores que 20 son 11, 13, l7 y 19.
Solo el 11 cumple que sus cifras sumen un número primo, *a* = 11.
El número *b* podría ser 5, 10 ó 15. No podemos pronunciarnos todavía.
El *c* habrá que elegirlo entre el 9 o el 15.
El *d* podría ser 4 ó 9.
El *e* es primo y además es la media de *a* y *b*. Con esta condición vemos que *b* ha de ser 15 y, por tanto, $c = \frac{11+15}{2} = 13$.
Y ya vamos en cadena, *c* = 15 y *d* = 4.
El menor número de todos ellos es *d* = 4.

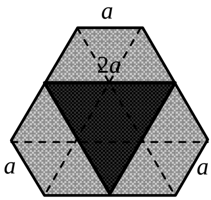


22.(C) En el triángulo *ABC* tenemos que $\hat{A} = x = \hat{B}$ y el ángulo $\hat{C} = 45º$, por lo tanto $x + x + 45º = 180º$, de lo que se deduce que $x = 67{,}5º$.



23.(E) Los dígitos 1 y 0 son fáciles de colocar. Encima del 0 debe haber o bien una suma que sea 9 o bien una que sea 10. La suma 9 no puede ser porque deberíamos llevarnos una de la suma de las unidades y esto es imposible con los dígitos de que disponemos. Así pues encima del 0 habrá un 4 y un 6. Nos quedan 2, 3 y 5 para completar la suma de las unidades... y esto ya nos asegura que en la interrogación ha de haber un 5.

24.(E) El anillo de Laura tenía $0{,}70 \cdot 30 = 21$ gramos de oro.
Si llamamos *x* al número de los gramos de oro que hay que añadir, debe cumplirse que $0{,}80 \cdot (30 + x) = 21 + x$. Ecuación sencillita cuya solución es $x = 15$. Hay que añadir 15 gramos de oro.



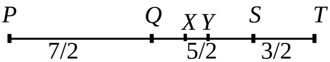
25.(E) Dividiendo la figura en porciones menores e iguales vemos que el área de cada triangulito es 24 : 4 = 6 cm^2, por lo que el área del hexágono es $13 \cdot 6 = 78$ cm^2.

XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel III

1. (D) Al juntar dos conjuntos con distintos números de elementos la nueva media se obtiene como media ponderada de las primitivas. Como en el segundo conjunto hay el doble de elementos, los pesos de las medias están en proporción 1:2. Así la media total se obtiene como, $\bar{z} = \dfrac{4 \cdot 1 + 10 \cdot 2}{1+2} = 8$.

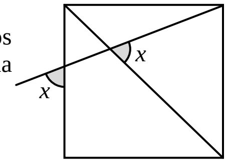
2. (B) Colocamos aproximadamente los puntos Y y X en el segmento para razonar mejor.



; QY mide la mitad de QS, es decir, $\dfrac{5}{4}$, y por tanto PY mide $\dfrac{7}{2}+\dfrac{5}{4}=\dfrac{19}{4}$. Por oro lado PX mide la mitad de PT, es decir, $\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{7}{2}+\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{15}{4}$, y así la distancia entre Y y X es, $\dfrac{19}{4}-\dfrac{15}{4}=\dfrac{4}{4}=1$.

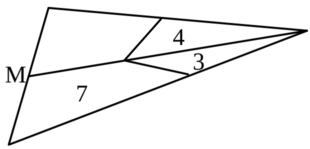
3. (E) Ya sabemos que la pareja 2-5 baila muy bien el producto.
Si expresamos $16^8 \cdot 5^{25} = 2^{32} \cdot 5^{25}$, vemos aparecer 25 de esas parejas y por tanto un número que acaba en 25 ceros, llevando en cabecera $2^7 = 128$.
Así que tenemos un número de 28 cifras.

4. (E) En el dibujo aparece encubierto un triángulo isósceles, cuyos ángulos iguales miden x, y el tercer ángulo 45º. Poco queda por decir, $2x = 180º - 45º = 135º$.



5. (C) Queremos productos, $ab \cdot cd = eee$**,** pero, $eee = e \cdot 111 = e \cdot 3 \cdot 37$. Así 3 debe asociarse con parte de la cifra *e* para formar un número de dos cifras, y para ello *e* debe ser 4, 5, 6, 7, 8 o 9. Además de multiplicar directamente *e* por 3, podríamos sacar un factor 2 de *e* para multiplicar a 37, y el resto de *e* debería multiplicarse por 3, en cuyo caso *e* será par y mayor o igual que 8, es decir 8. Así tendremos siete parejas.

6. (B) El segmento que divide al triángulo grande es una mediana y por tanto divide al triángulo en dos triángulos de igual área (tienen igual base e igual altura). Uno de esos dos triángulos tiene de área 7 + 3 = 10. El otro también.



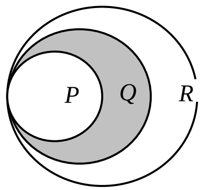
7. (A) La suma de 33 impares consecutivos es igual a 33 veces el de en medio. Así el de en medio es $\frac{33^{33}}{33} = 33^{32}$, y el mayor que estará dieciséis puestos más tarde diferirá del de en medio en 32 unidades.

8. (B) Puesto que es problemático poner en común las bases busquemos la comunidad de los exponentes. $2^{500} = \left(2^5\right)^{100}$; $3^{400} = \left(3^4\right)^{100}$; $4^{300} = \left(4^3\right)^{100}$; $5^{200} = \left(5^2\right)^{100}$; 6^{100}. Ahora sólo resta comparar las nuevas bases, siendo la mayor 3^4 .

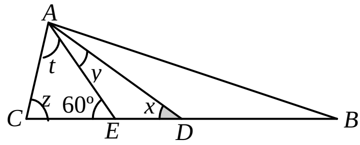
9. (D) Cuando el 2º comience la subida habrán pasado tres horas desde que lo hizo el primero. Como éste va a 3 km/h, la distancia que lleva en ese instante al primero es de 9 km.

10. (E) Empezaremos por denominar en peso creciente a los cinco estudiantes. Sean estos, *a, b, c, d* y *e*. Sumando las diez pesadas por pareja obtenemos cuatro veces la suma de los pesos de los cinco jóvenes. Así $a+b+c+d+e = \frac{1156}{4} = 289$. Además la pareja de más peso estará formada por los dos de más peso, $d+e=121$, y la segunda en peso estará formada por el de más peso y el de en medio, $d+c=120$. Razonando ahora de forma simétrica con las pesadas menores tenemos que $a+b=110$ y $a+c=111$. Sumando estas cuatro últimas ecuaciones tenemos que $2a+b+2c+d+2e=463$. Si descontamos la suma de los pesos de todos llegamos a que $a+c+e=463-289=174$. Basta restar a esta suma la de $a+c$ para obtener $e=174-112=62$.

11.(E) Los círculos son todos semejantes y la razón de semejanza de sus radios se eleva al cuadrado para hallar la de sus áreas. Así el área del círculo *P* es cuatro novenos el área del círculo *Q*, y el área de este es nueve dieciseisavos del de *R* . Así el área sombreada es cinco novenos del área de *Q* y esto consiste en $\frac{5}{9}\cdot\frac{9}{16}=\frac{5}{16}$ del área de *R*.



12.(B) $\left(1+3+5+...+p\right)+\left(1+3+5+...+q\right)=\left(\frac{p+1}{2}\right)^2+\left(\frac{q+1}{2}\right)^2$ **.** Si esta suma tiene que ser, $1+3+5+...+25=13^2$, tenemos una terna pitagórica, es decir tres medidas enteras que son los lados de un triángulo rectángulo, siendo 13 la hipotenusa. Ese triángulo es único (sólo hay una forma de escribir 13^2 como suma de dos cuadrados de naturales positivos) y es el famoso triángulo (5, 12, 13). Luego $p=9$; $q=23$.

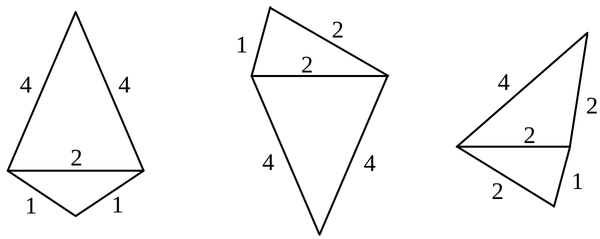


13.(B) Sean $x = A\hat{D}C;\ y = E\hat{A}D;\ t = C\hat{A}E;\ z = D\hat{C}A$

$D\hat{A}C = z$. Tenemos que los triángulos ADC y ADB son isósceles. Por tanto $D\hat{A}B = \dfrac{x}{2}$;

$t = y + \dfrac{x}{2}$; $x + y = 60º$; $z = t + y$; $z + t = 120º$; De las dos últimas ecuaciones obtenemos que $z = 60º + \dfrac{y}{2}$, y $t = 60º - \dfrac{y}{2}$. Como $x = 60º - y$, sustituyendo en la 2ª ecuación nos queda que: $60º - \dfrac{y}{2} = y + 30º - \dfrac{y}{2}$; de donde $y = 30º$, y por ende $x = 30º$.

14.(C) Tres dibujos parecen posibles:



Que la diagonal 2 sea el lado desigual de los dos triángulos isósceles, pero eso daría lugar a un imposible triángulo de lados, 1, 1 y 2.

Que la diagonal 2 sea uno de los lados iguales de uno de los triángulos y el desigual del otro.

Que la diagonal 2 sea el lado igual en los dos triángulos dando lugar a un imposible triángulo, 2, 2 y 4.

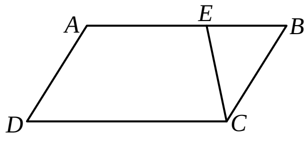
Por tanto la única opción posible es la segunda.

15.(E) Para que el producto sea negativo tendremos que sacar positivo en la primera tirada y negativo en la segunda o al revés. La probabilidad será: $\dfrac{2}{6} \cdot \dfrac{3}{6} + \dfrac{3}{6} \cdot \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

16.(E) Para ser divisible por 36 hay que serlo por 4 y por 9. Así, para ser múltiplos de 4, nuestros números deberán acabar en 40, 44 o 48. Para serlo de 9 en el primer caso tendremos a 6840; 6444 en el segundo y 6048, o 6948 en el tercero.

17.(D) Si la media es x tenemos que 8 + 10 + 24 + 28 + 23 + 9 + x = 7x , de donde, $102 + x = 7x$, y por tanto $x = 17$. Solo queda comprobar que el problema está bien puesto y que también 17 es la mediana del conjunto de números.

18.(B) Si $AE = \frac{3}{2}EB$, entonces $Ab = \frac{3}{2}EB + EB = \frac{5}{2}EB$.



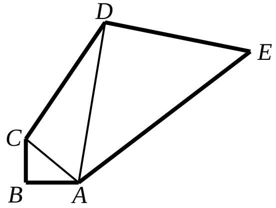
Llamando c a la medida EB, el área del trapecio es, $\frac{\frac{5}{2}c + \frac{3}{2}c}{2} \cdot h = 2c \cdot h$, y $\frac{5}{2}c \cdot h$ la del paralelogramos. Luego la razón de áreas es de 2 a $\frac{5}{2}$, o mejor de 4 a 5.

19.(D) Tenemos que $abc + ab + ac + bc + a + b + c$ = 104. Son siete sumandos que suman par. Eso impide que alguno de los números, a, b o c, sea impar. Si sólo fuera c impar, entonces tendríamos seis sumandos pares y uno impar. Si fueran impares b y c, lo serían tres sumandos (b, c y bc). Si a, b y c fueran impares los siete sumandos lo serían. Al tener que ser los tres pares, los cuatro primeros productos serán múltiplos de 4, y como 104 también lo es, tendremos lo propio para $a + b + c$. Razonemos con esa suma:
Si $a + b + c$ = 8, los tres números serían 2, 2 y 4 y con eso la suma no llega a 104.
Si $a + b + c$ = 12, la terna de números podría ser 4, 4 y 4, pero entonces la suma pasa de 104; podría ser 2, 4 y 6, y ésta funciona. Habría que descartar otras sumas y otras ternas (por ejemplo, 2, 2, 8 o 2, 2, 12) para ver que el problema está bien propuesto y que la solución es $2^2 + 4^2 + 6^2 = 56$.

20.(B) Por Pitágoras, CA = 5, DA = 13, lo que nos deja $188 - 3 - 4 - 12 = 169$, para la suma $EA + DE$. Como ADE es un triángulo rectángulo:

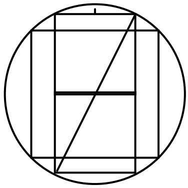
$DA^2 = 169 = EA^2 - DE^2 = (EA + DE) \cdot \left(EA - DE\right) = 169 \cdot \left(EA - DE\right)$, y así tenemos que, $EA + DE$ = 169, y $EA + DE$ = 1, de donde

EA = 85, DE = 84. El área del pentágono es: $\frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{5 \cdot 12}{2} + \frac{13 \cdot 84}{2} = 582.$



21.(D) Si hay un número, *n*, impar de filas, la suma de los alumnos de todas las filas es *n* veces el de alumnos de la de en medio. Y como 630 es múltiplo de 3, de 5 y de 7, esos números de fila son posibles. Cuando el número, n, de filas es par, la suma de los alumnos de todas las filas es $\frac{n}{2}$ veces la suma de los alumnos de las dos filas de en medio. Si n es 4, la suma de esas dos filas sería 315 y ello es posible, pero no lo es si $n = 6$, ya que entonces la suma sería 210 y al diferenciarse en tres alumnos las filas, una tendría un número par y otra un número impar de alumnos.

22.(B) El cuadrado grande tiene por diagonal el diámetro de la circunferencia y como rombo su área es $\frac{2R \cdot 2R}{2} = 2R^2$.



Si al cuadrado pequeño le añadimos su simétrico respecto al centro de la circunferencia obtenemos un rectángulo inscrito de diagonal 2*R*, base *a* y altura 2*a*, teniéndose la relación pitagórica: $(2R)^2 = a^2 + (2a)^2$, de donde $5a^2 = 4R^2$. El área del cuadrado es a^2, luego el cociente de áreas pedido es: $(2R^2) : \left(\frac{4R^2}{5}\right) = \frac{5}{2}$.

23.(C) La suma, $1 + 2 + 3 + ... + 26 = \frac{27 \cdot 26}{2} = 351$. Si quitamos dos de ellos, *n* y *m*, la suma estará entre 300 y 348, y el producto de los dos números quitados tendrá ese valor. Para ello el menor, *n*, será mayor que 11 (11·26 = 286) y menor que 19 $(19 \cdot 20 = 380)$. Entonces $24 < n + m < 47$, y así afinamos la suma, *S*, de los restantes. Se verifica que, $305 < S < 326$. Vayamos de 1 en 1:

Si *n* = 12, *S* debe ser múltiplo de 12 y sólo puede ser 312 o 324, con lo cual *m* será 26 o 27 (27 no puede ser). Quitando 12 + 26 = 38 a 351, obtenemos 313.
Si *n* = 13, *S* debe ser múltiplo de 13 y sólo puede ser 312 o 325, con lo cual *m* será 24 o 25. Quitando 13 + 24 = 37, o 13 + 25 = 38, a 351, obtenemos 314 o 313.
Si *n* = 14, *S* debe ser múltiplo de 14 y sólo puede ser 308 o 322, con lo cual *m* será 22 o 23. Quitando 14 + 22 = 36, o 14 + 23 = 37, a 351, obtenemos 315 o 314 .
Si *n* = 15, *S* debe ser múltiplo de 15 y sólo puede ser 315 con lo cual *m* será 21. Quitando 15 + 21 = 36 a 351, obtenemos 315 (hemos resuelto el enigma). El mcm de 15 y 21 es 15·7 = 105.

24.(C) La sucesión es: 1, –1, –1, 1, –1, –1, ... Se repite la secuencia 1, –1, –1. Así los 1 ocupan los lugares múltiplos de 3. Hasta 2013, tendremos, 671 unos y el doble de unos negativos, con lo cual la suma de todos será – 671. Si le añadimos el 1 de la posición 2014, obtendremos – 670.

25.(E) Nadal ganará en las secuencias GGG, GGPG, GPGG, PGGG, GGPPG, GPGPG, PGGPG, GPPGG, PGPGG, PPGGG. En tres set su probabilidad es $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$.

En cuatro set es $3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{24}{81}$. En cinco set es $6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{48}{243} = \frac{16}{81}$.

Su probabilidad de ganar se obtiene sumando las probabilidades anteriores, $\frac{64}{81}$.

XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel IV

1. (E) Al ser $a_1 \cdot a_4 = a_1 \cdot a_1 r^3 = a_1 r \cdot a_1 r^2 = a_2 \cdot a_3$, sigue que $a_4 = \frac{a_2 \cdot a_3}{a_1} = \frac{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[6]{7}}{\sqrt{7}} = \sqrt[6]{\frac{7^2 \cdot 7}{7^3}} = 1$.

2. (E) Si $x{\cdot}y = 105$ y ambos factores son enteros positivos, resulta que los posibles valores de la pareja $\{x, y\}$ son: $\{1, 105\}$, $\{3, 35\}$, $\{5, 21\}$, $\{7, 15\}$.
Al ser 13 cm la longitud del tercer lado, la diferencia entre x e y siempre será menor que 13, por lo que la única solución posible es $\{x, y\} = \{7, 15\}$.
El perímetro de dicho triángulo sería 13 + 7 + 15 = 35 cm.

3. (B) Si el número de aristas de la base es a, el total del número de aristas del prisma será $a + a + a = 3a$ y la única respuesta múltiplo de 3 serían 6 y 2010 pero, obviamente 6 no puede ser al no poder ser 2 el número de lados del polígono de la base. Así pues la respuesta es 2010.

4. (C) Si $(x+y)^2 = x^2 + y^2$, resulta que $x{\cdot}y = 0$ y los puntos (x, y) que verifican esta igualdad son los de las rectas $x = 0$ e $y = 0$.

5. (B) Tenemos que $25^{-2} = \frac{5^{\frac{48}{x}}}{5^{\frac{26}{x}} \cdot 25^{\frac{17}{x}}} \Leftrightarrow 5^{-4} = 5^{\frac{-26}{x}} \cdot 5^{\frac{-34}{x}} \cdot 5^{\frac{48}{x}}$ es decir $-4 = \frac{-12}{x} \Rightarrow x = 3$.

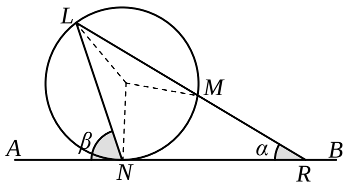
6. (C) $A = 98! \cdot 99! = (98!)^2 \cdot 99$; $B = 98! \cdot 100! = (98!)^2 \cdot 99 \cdot 10^2$; $C = 99! \cdot 100! = (99!)^2 \cdot 10^2$ que efectivamente es el cuadrado de $99! \cdot 10$.

7. (A) Nos dicen que $3(10a + b) < 10b + a$, es decir, $29a < 7b$. Al ser $\overline{ab}$ un número de dos cifras, $a > 0$ y la desigualdad anterior no se verifica si $a \geq 3$, por lo que $a = 1$ ó $a = 2$, resultando que si $a = 1$, $b = 5, 6, 7, 8$ ó 9 y si $a = 2$, $b = 9$.
En total hay 6 números $\overline{ab}$ con la propiedad requerida.

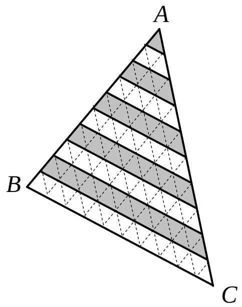
8. (B) Como $ac = 46 - b$ y $abc = 240$ resulta que $b(46 - b) = 240 \Leftrightarrow b^2 - 46b + 240 = 0$
Las soluciones de esta ecuación son $b_1 = 40$ y $b_2 = 6$.
Si $b = 40$ entonces $ac = 6$ cuyas soluciones enteras no verifican la tercera igualdad $a + bc = 64$.
Luego $b = 6$ y $ac = 40$. De la igualdad $a + 6c = 64$ se deduce que $a = 64 - 6c$ y entonces $c(64 - 6c) = 40 \Leftrightarrow 6c^2 - 64c + 40 = 0$ cuya única solución entera es $c = 10$ y por lo tanto $a = 4$. La suma pedida $a + b + c$ es 4 + 6 + 10 = 20.
Otra manera de llegar a este resultado podría ser ésta.

Sumando las dos últimas igualdades, resulta que $ac + b + a + bc = 110$, es decir, $(a + c)(c + 1) = 110$ y al ser a, b y c enteros positivos las únicas opciones posibles, en principio, para $(a + b)$ y $(c + 1)$ son: $\{a + b, c + 1\} = \{55, 2\}$ o $\{11, 10\}$.
Por otra parte, c es un divisor de 240, con lo que $c + 1 \neq 55$ y $c + 1 \neq 10$, de donde $a + b = 55$ y $c = 1$ o bien $a + b = 10$ y $c = 10$.
De la primera opción resultaría $ab = 240$ y de la segunda $ab = 24$.
Como $a + b = 55$, $ab = 240$ no tiene solución en enteros ($x^2 - 55x + 240 = 0$ no las tiene) tenemos que $a + b = 10$, $ab = 24$, con lo que $\{a, b\} = \{6, 4\}$ y $c = 10$.
Ahora ya tenemos $a + b + c = 20$.

9. (A) Al ser $LM = LN$, si O es el centro de la circunferencia, resulta que los triángulos OLN y OLM son iguales. Por otra parte $O\hat{N}A = 90º$, por lo que $O\hat{N}L = 90º - \beta$ y $N\hat{L}M = 2(90º - \beta) = 180º - 2\beta$. Así pues los tres ángulos del triángulo LNR miden $180º - 2\beta$, $180º - \beta$ y α.
Por lo tanto $360º - 3\beta + \alpha = 180º$, o sea, $180º + \alpha = 3\beta$.



10. (C) Trazando paralelas a los lados AB y AC por los puntos de división de dichos lados, el triángulo queda dividido en $1 + 3 + \ldots + 19$ triángulos iguales de los cuales están sombreados $1 + 5 + \ldots + 17$.
Así pues, la fracción del área sombreada es $\dfrac{1+5+9+\ldots+17}{1+3+5+\ldots+19} = \dfrac{45}{100} = 45\ \%$.



11. (C) Como AC es una de las diagonales pequeñas de longitud $\sqrt{50}$ podemos aplicar el teorema del coseno en el triángulo ABC para calcular el lado, x, del hexágono.

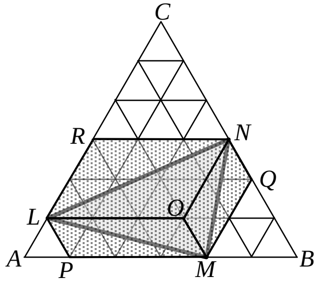
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\hat{B} \Rightarrow 50 = x^2 + x^2 - 2x^2\cos 120º = 2x^2 + 2x^2\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$50 = 3x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{50}{3}} = 5\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, Como el área del hexágono regular es $S = 6\cdot\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$,

resulta que $S = 6\cdot\dfrac{\frac{50}{3}\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$.

12. (D) Hay 15 casos en los que en el tercer lanzamiento se obtiene la suma de los dos anteriores, en concreto, (1,1,2), (1,2,3), (2,1,3), (1,3,4), (2,2,4), (3,1,4), (1,4,5), (2,3,5), (3,2,5), (4,1,5), (1,5,6), (2,4,6), (3,3,6), (4,2,6), (5,1,6). En 7 casos de ellos no aparece el número 2, por lo que la probabilidad pedida es $\frac{7}{15}$.

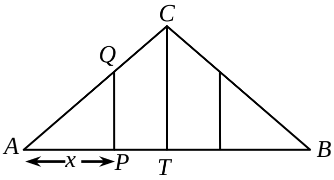
13. (A) El área del triángulo es la mitad del área del hexágono *LPMQNR* formado por tres romboides *LONR*, *LPMO* y *OMQN* de áreas respectivas 12, 6 y 4, por lo que el área del triángulo *LMN* es: $S = \frac{1}{2}(12+6+4) = 11$.



14. (D) Si $N = \overline{abcd}$, nos dicen que $\overline{bcd} = \frac{1}{9}\overline{abcd} \Leftrightarrow 9\left(\overline{bcd}\right) = \overline{abcd}$, es decir,

$9(100b + 10c + d) = 1000a + 100b + 10c + d \Leftrightarrow 8(100b + 10c + d) = 1000a$, con lo que $100b + 10c + d = 125a$. Así pues, la cifra *a* podrá tomar los valores 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 dando lugar a siete números distintos.

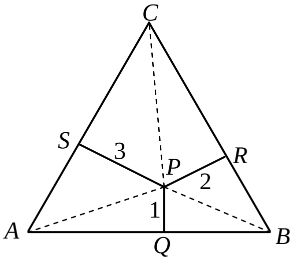
15. (A) Los triángulos *APQ* y *ATC* son semejantes y el área del *ATC* es el doble del área del *APQ* por lo que la razón de semejanza es $\sqrt{2}$, así que $\frac{AT}{x} = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \frac{AT}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$.



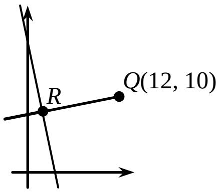
16. (E) Nos dicen que $\frac{a}{1-r} = 7$ y que $\frac{ar}{1-r^2} = 3$.

Así pues $\frac{ar}{1-r^2} = \frac{a}{1-r} \cdot \frac{r}{1+r} = 7 \cdot \frac{r}{1+r} = 3 \Rightarrow r = \frac{3}{4}$. Como $\frac{a}{1-r} = 7$ resulta que

$\frac{a}{1-\frac{3}{4}} = 7 \Rightarrow a = \frac{7}{4}$ con lo que $a + r = \frac{5}{2}$.



17. (D) Uniendo P con los vértices A, B, C del triángulo lo descomponemos en tres triángulos de alturas, sobre los lados del triángulo equilátero ABC, 1, 2 y 3. Llamando $x = AB$ y teniendo en cuenta que el área del triángulo equilátero es $S = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$ resulta que $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}2x + \frac{1}{2}3x = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow x = 4\sqrt{3}$.



18. (B) El ratón se para en el pié de la perpendicular desde Q a dicha recta. Este punto R será la intersección de la recta $y = 18 - 5x$ con $y - 10 = \frac{1}{5}(x - 12)$. Resolviendo el sistema se obtiene $18 - 5x = \frac{1}{5}(x-12) \Rightarrow x = 2$ y sustituyendo $y = 18 – 10 = 8$. El punto R es (2, 8) y la suma de sus coordenadas 10.

19. (A) El triángulo es rectángulo por ser semejante al de lados 3, 4 y 5 (terna pitagórica). Si está inscrito en un círculo de radio 3, la hipotenusa, que es el diámetro, es 6. Utilizando la proporcionalidad de los lados se obtiene la longitud de los catetos $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{6}{5} \Rightarrow x = \frac{18}{5},\ y = \frac{24}{5}$ y el área $S = \frac{1}{2}\left(\frac{18}{5}\cdot\frac{24}{5}\right) = \frac{216}{25} = 8{,}64$.

20. (C) Llamando p a la probabilidad de obtener 1, las probabilidades de obtener 2, 3, 4, 5, y 6 son $2p$, $3p$, $4p$, $5p$ y $6p$, respectivamente, luego $p + 2p + 3p + 4p + 5p + 6p = 1$ y de aquí $p = \frac{1}{21}$. Como el suceso de obtener suma 7 está formado por los sucesos elementales (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2) y (6,1), la probabilidad pedida será:

$$P(s = 7) = 2\cdot\left(\frac{1}{21}\cdot\frac{6}{21} + \frac{2}{21}\cdot\frac{5}{21} + \frac{3}{21}\cdot\frac{4}{21}\right) = \frac{2\cdot 28}{21^2} = \frac{8}{63}.$$

21. (D) Si $x = 0$, $y = -t$ por lo que $c = -t$. Por otra parte la abscisa del vértice de la parábola es $\frac{-b}{2a} = t$ y como además (t, t) es de la parábola, $at^2 + bt - t = t$.

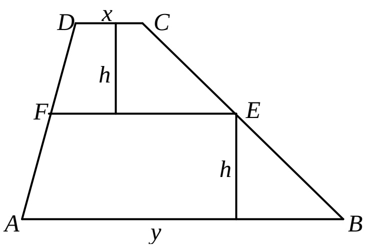
Como $t \neq 0$ y además $b = -2at$ resulta $at - 2at = 2 \Rightarrow at = -2$ y por lo tanto $b = 4$.

22. (B) Si $a-8$, $a-7$¸ $a-6$,…, a, $a+1$,…, $a+9$, con $a>8$, son los 18 enteros dados, su suma es $18a+9=9(a+1)$.
Como 9 es un cuadrado perfecto, también tendrá que serlo $a+1$ y el menor valor de $a>8$ que lo verifica es $a=15$ por lo que la suma es $S=9\cdot 16=225$.

23. (E) $120-\sqrt{x}$ debe ser un cuadrado perfecto menor o igual que 120 y como de éstos hay 11 (desde 0^2 a 10^2), resulta que habrá 11 números x con la propiedad buscada. Estos números son las soluciones de las ecuaciones $120-\sqrt{x}=0$, $120-\sqrt{x}=1$, $120-\sqrt{x}=4$,…, $120-\sqrt{x}=100$.

24. (A) $\cos(x+z)=\cos x\cdot\cos z-senx\cdot senz=\frac{1}{2}$. Como $\cos x=0$, $\operatorname{sen} x=\pm 1$ y por lo tanto $-senx\cdot senz=\mp senz=\frac{1}{2}\Rightarrow senz=\mp\frac{1}{2}$. El menor valor positivo de z que verifica esta igualdad es $z=\frac{\pi}{6}$.

25. (C) Llamando x, y, h, como en la figura, resulta que los cuadriláteros $ABEF$ y $FECD$ son trapecios en donde $FE=\frac{x+y}{2}$.



Así pues, $\dfrac{y+\frac{x+y}{2}}{2}\cdot h=2h\cdot\dfrac{\frac{x+y}{2}+x}{2}$, es decir,

$\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}x=3x+y\Rightarrow 5x=y\Rightarrow\frac{y}{x}=5$.

Participantes y relación de ganadores del XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Como ya es habitual la participación de estudiantes en el Concurso de Primavera es muy numerosa y a pesar de la satisfacción que nos produce ver a tantos entusiastas de las Matemáticas, nos hemos visto obligados, por problemas de tiempo y espacio, a limitar la participación de concursantes en la segunda fase. En la primera fase celebrada en los propios centros se superó la cifra de 40 000 estudiantes y 500 centros participantes.

Aunque se inscribieron cerca de 3000 concursantes a la segunda fase, el número de participantes fue de 2653. La estadística de participación por niveles y puntuaciones obtenidas puede consultarse en la página de la Sociedad Puig Adam así como la relación de todos los ganadores del concurso y la relación de los centros con mayor puntuación en cada uno de los niveles.

La distribución por niveles de los participantes en la segunda fase, que como siempre tuvo lugar en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, fue la siguiente:

	NIVEL 1		NIVEL 2		NIVEL 3		NIVEL 4	
	5º P y 6º P		1º ESO, 2º ESO		3º ESO, 4º ESO		1º B, 2º B	
nº de participantes	196	457	271	544	298	446	279	162
Totales por nivel	653		815		744		441	

Los tres, y en algún caso hasta siete, ganadores en cada uno de los niveles fueron:

NIVEL I

1. Andrés Villegas Taillafer (6º Primaria) Colegio San Agustín
2. Jimena Lozano Simón (5º Primaria) Colegio Alemán
3. Javier Artero Mompó (6º Primaria) Colégio Everest
3. Daniel Carreño López (6º Primaria) Colégio Casvi
3. Pablo Mateo Torrejón (6º Primaria) CEIP Gonzalo Fernández de Córdoba
3. Beltrán Meliá García (6º Primaria) Colégio Retamar
3. David Sánchez González (6º Primaria) CEIP Andrés Segovia

NIVEL II

1. Alejandro Epelde Blanco (2º ESO) Montessori School Los Fresnos
2. Diego Sierra Corredera (2º ESO) Colegio San José del Parque
3. Alberto Pérez Mugía (1º ESO) Colégio Amor de Dios

NIVEL III

1. Daniel Puignau Chacón (4º ESO) IES Alameda de Osuna
2. Jialín Yang (4º ESO) Colegio Liceo San Pablo
3. Saúl Rodríguez Martín (3º ESO) Colegio Villa de Griñón

NIVEL IV

1. Ángel Prieto Naslín (2º Bchto) Liceo Francés
2. Marc Isern Hacker (1º Bchto) Colegio Alemán
3. Janos Meny (2º Bachto) Colegio Alemán

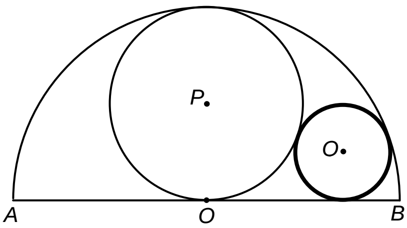
XXXII CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 14 de junio de 2014

<u>NIVEL I</u> (3º de E.S.O.) Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1.

En la figura adjunta puedes ver una semicircunferencia de centro O y diámetro AB, una circunferencia de centro P tangente a ella y a su diámetro AB, y una circunferencia de centro Q tangente a AB, a la semicircunferencia y a la circunferencia de centro P.
Si $OB = 2$, calcula el radio de la circunferencia de centro Q.



Problema 2.

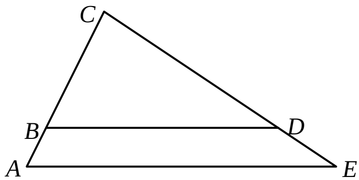
¿Cuántos números de diez cifras, que terminan en 2014, son múltiplos de 2014?

<u>NIVEL I</u> (3º de E.S.O.) Segunda parte (1 hora 30 minutos)

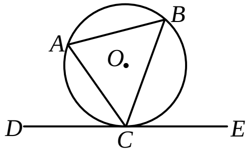
Problema 1A. (1 punto)

Escribe el número $\dfrac{3\sqrt{22}\sqrt{23}\sqrt{24}\sqrt{25}}{\sqrt{44}\sqrt{45}\sqrt{46}}$ como $\sqrt{b}$ en donde b es un número entero.

Problema 2A. (1,5 puntos)
Sea T el número b del problema anterior.
En el triángulo ACE de la figura, el segmento BD es paralelo al lado AE. Si $CD = T$, $DE = 10$ y el área del triángulo ACE es 320, calcula el área del trapecio $ABDE$.



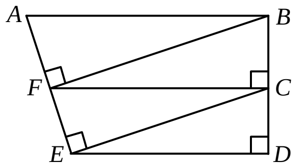
Problema 3A. (2 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior.
En la figura adjunta, la recta DE es tangente a la circunferencia de centro O en el punto C, las cuerdas AB y AC tienen igual longitud y el ángulo $B\hat{C}E = \left(\frac{T}{2}\right)^o$.



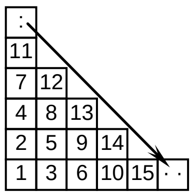
Calcula el valor del ángulo $A\hat{C}B$.

Problema 1B. (1 punto)
Calcula el valor de $\frac{(101^4-4)(101^4-1)}{(101^2-2)(101^2-1)} - \frac{(101^4-4)(101^4-1)}{(101^2-2)(101^2+1)}$.

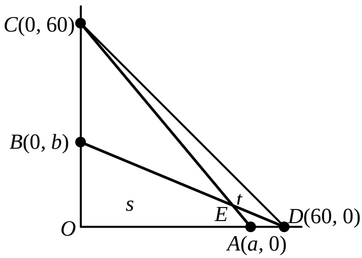
Problema 2B. (1,5 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior y n la suma de las cifras de T.
El trapecio $ABDE$ está dividido en cuatro triángulos rectángulos como se muestra en la figura. Si $CD = \frac{n}{2}$ y $DE = 2CD$, calcula el área de dicho trapecio dando el resultado en forma de fracción irreducible.



Problema 3B. (2 puntos)
Sea $T = \frac{a}{b}$, irreducible, la respuesta del problema anterior y $k = a + b$.
Ordenamos por diagonales los números naturales en una cuadrícula, como se muestra en la figura. Si tomamos como eje de abscisas la fila de abajo (1, 3, 6, 10,…) y como eje de ordenadas la columna de la izquierda (1, 2, 4, 7,…) diremos que, por ejemplo, las coordenadas del número 9 son (2, 1), las del 5 (1, 1) y las del número 16 serán (0, 5). ¿Cuáles serán las coordenadas del número k?



Problema 4. (5 puntos)
Sea a la respuesta del problema **3A** y b la suma de las coordenadas de la respuesta del problema **3B**.
Si llamamos "t" al área del triángulo CED y "s" al área del cuadrilátero $OAEB$, calcula $s - t$.



NIVEL II (4º de E.S.O.) Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1.

Un triángulo isósceles tiene una mediana de 15 cm y una altura de 24 cm. Calcula el área de cada uno de los dos triángulos determinados con estos datos.

Problema 2.

Las soluciones de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$, con $b \neq c$, son los números reales r y s, y las soluciones de la ecuación $x^2 + cx + b = 0$ son los números reales r y t. Calcula $s + t$.

NIVEL II (4º de E.S.O.) Segunda parte (1 hora 30 minutos)

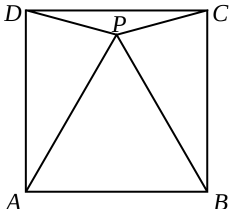
Problema 1A. (1 punto)
El área de un octógono regular es $2 + 2\sqrt{2}$. Calcula la longitud del lado de dicho octógono.

Problema 2A. (1,5 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior. Calcula el número de raíces reales de la ecuación $x^3 + (T+1)x^2 + (T+1)x + 1 = 0$.

Problema 3A. (2 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior. Calcula $\lg_3 2 \cdot \lg_8 27 + \lg_3 2 \cdot \lg_4 5 \cdot \lg_{25} T$.

Problema 1B. (1 punto)
El número positivo x expresa la medida, en grados sexagesimales, de un ángulo. Calcula el menor número x que verifica $sen x = \cos(x^2)$.

Problema 2B. (1,5 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior. En la figura se observa un cuadrado $ABCD$ y un triángulo equilátero ABP. Si el área del triángulo PBC es T, calcula la suma de las áreas de los triángulos ABP y PCD.



Problema 3B. (2 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior. Calcula el número de puntos reticulares que hay en el interior del triángulo limitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + y = T$.
Notas. 1.- Se llaman puntos reticulares a los que tienen sus coordenadas enteras.
2.- Los puntos interiores de un triángulo no pertenecen a ninguno de sus lados.

Problema 4. (5 puntos)
Sea a la respuesta del problema **3A** y s la suma de los dígitos de la respuesta del **3B**.
Desde un punto A de un río comienza a moverse una lancha a favor de la corriente con velocidad respecto de la orilla $v = \frac{s}{a}$ km/h. En el mismo instante un bote que se encuentra en un punto B, aguas abajo, comienza a moverse, también con velocidad constante, al encuentro de la lancha y se encuentran en un punto C situado entre A y B, tal que AC = 5·CB.
Si la lancha hubiera salido desde el punto B y el bote desde el punto A se habrían encontrado en un punto D tal que AD = DB. Calcula la velocidad de la lancha y del bote en aguas quietas.

NIVEL III (1º de Bachillerato) Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1.

En las rectas $y = 2x$, $y = \frac{x}{2}$ marcamos, respectivamente, los puntos P y Q de coordenadas enteras positivas, ambas menores que 99. Calcula el número de parejas (P,Q) tales que los puntos A y B que dividen al segmento PQ en tres partes iguales tengan también sus coordenadas enteras.

Problema 2.

Encuentra, si existen, cuatro enteros positivos consecutivos cuyo producto sea el mismo que el de otros dos enteros positivos consecutivos o justifica que no existen.

NIVEL III (1º de Bachillerato) Segunda parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1A. (1 punto)
Calcula el mayor entero n tal que $\left[\sqrt[n]{2014}\right] > 1$. (Recuerda: $[x]$ es la parte entera de x.

Problema 2A. (1,5 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior.
Obtén la mayor solución de la ecuación $(\lg_T x)^2 = \lg_T x^2$.

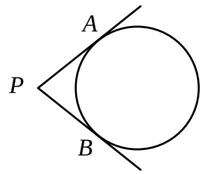
Problema 3A. (2 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior.
Si n es un entero con $1 \leq n \leq 10T$, calcula el número de valores de n para los que el producto $\left(n^2 - 2n + 2\right)\left(n^2 + 2n + 2\right)$ es divisible entre 5.

Problema 1B. (1 punto)
Si $0 < x < 2\pi$, $x \neq \pi$, calcula el valor absoluto de la diferencia entre las soluciones de la ecuación $\sec x = 1 + \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \ldots$.

Problema 2B. (1,5 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior y $k = \dfrac{4\pi}{T}$.

Si $(a - bi)^k \cdot (a + bi)^k = 512$, calcula el valor de $a^2 + b^2$.

Problema 3B. (2 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior
Desde el punto P exterior a la circunferencia hemos trazado las tangentes PA y PB a dicha circunferencia. Si el cociente entre el mayor y el menor de los arcos AB es $T + 1$, obtén el cociente entre el ángulo central correspondiente al menor de dichos arcos y el ángulo $A\hat{P}B$.



Problema 4. (5 puntos)
Sea a la respuesta del problema **3A** y b la respuesta del problema **3B**.
Un trapecio tiene tres lados iguales cuyas medidas vienen expresadas con números enteros, siendo uno de ellos la base menor. Si el perímetro del trapecio es $a(1 - b)$ y el área $k\sqrt{k}$, con k también entero, calcula el valor de k.

XIV Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

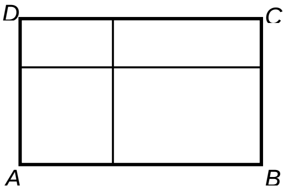
22 de noviembre de 2014

PRUEBA POR EQUIPOS 1º y 2º de E.S.O. (45 minutos)

1. Si x e y representan cifras distintas de cero, encuentra todos los números de siete cifras de la forma *yxyxyxy* divisibles por 18 y que verifican que el número formado por las cinco cifras centrales, es decir, el *xyxyx* es divisible por 3.

2. Encuentra el número de tres cifras $N = [abc]$, $a \neq 0$, tal que dicho número N sea igual a $b \cdot (10c + b)$ y tanto b como $(10c + b)$ sean números primos.

3. El rectángulo *ABCD* está dividido en cuatro rectángulos como muestra la figura. Los perímetros de tres de estos rectángulos son 11, 16 y 19 cm y el cuarto no es ni el de mayor ni el de menor perímetro de los cuatro. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo *ABCD*?

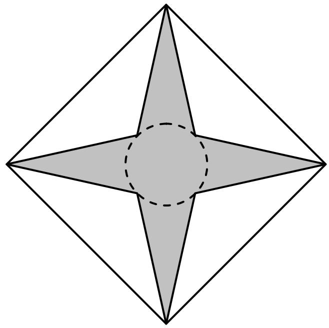


XIV Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

22 de noviembre de 2014

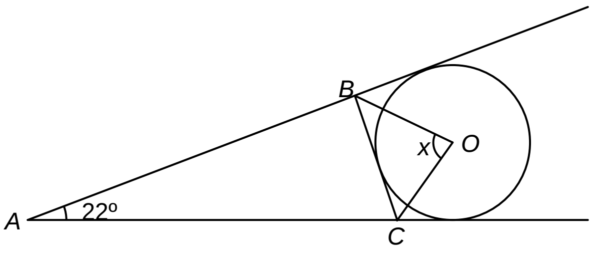
PRUEBA POR EQUIPOS 3º y 4º de E.S.O. (45 minutos)

1. La figura adjunta muestra una estrella simétrica de cuatro puntas. Las cuatro puntas de la estrella son los vértices de un cuadrado de 24 cm de lado y los otros cuatro vértices de la estrella están en una circunferencia. Si el área de la estrella (sombreada) es un tercio del área del cuadrado, calcula el radio de la circunferencia.



2. Halla un número de tres cifras, N = [*abc*], tal que al multiplicarlo por 3 y sumarle 1, resulte el número leído al revés, es decir, 3N + 1 = [*cba*].

3. En la figura se observa un triángulo *ABC* y una circunferencia de centro *O* tangente al lado *BC* y a las prolongaciones de los lados *AB* y *AC* de dicho triángulo. Si el ángulo $B\hat{A}C$ es de 22º, calcula la medida del ángulo $x = B\hat{O}C$.



XIV Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

22 de noviembre de 2014

PRUEBA POR EQUIPOS Bachillerato (45 minutos)

1. La circunferencia inscrita a un triángulo rectángulo toca a la hipotenusa en un punto *P*. Este punto divide a la hipotenusa en dos segmentos de longitudes *a* y *b*. Calcula, en términos de *a* y *b*, el área de dicho triángulo.

2. Si *a* y *b* son números mayores que 1, con $a < b$, encuentra el menor valor de *b* para que no haya ningún triángulo de lados 1, *a* y *b* ni de lados $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{a}$ y 1.

3. Antonio, Beatriz y Carolina juegan seis partidas de un determinado juego en el que en cada partida solo puede haber un ganador. Si la probabilidad de que gane Antonio en cada partida es $\frac{1}{2}$ y la probabilidad de que gane Beatriz es doble de la que gane Carolina, calcula la probabilidad de que Antonio gane 3 partidas, Beatriz 2 y Carolina 1.

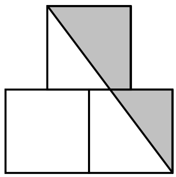
XIV Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

22 de noviembre de 2014

PRUEBA INDIVIDUAL 1º y 2º de E.S.O. (90 minutos)

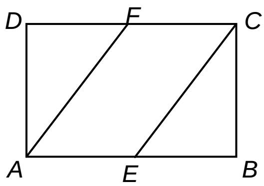
1. En un concurso de problemas participaron solamente estudiantes de 1º, 2º y 3º de la ESO. El cociente entre el número de participantes de 3º y de 1º fue de $\frac{5}{3}$, el cociente entre el número de participantes de 3º y de 2º fue de $\frac{8}{5}$. ¿Cuántos estudiantes, como mínimo, participaron en dicho concurso?

2. En la figura adjunta se observan tres cuadrados iguales estando el de arriba justo en medio de los otros dos. Calcula el cociente entre el área de la región sombreada y la suma de las áreas de los tres cuadrados.



3. Cuando dividimos 113 744 y 109 417 entre el número de tres cifras *N*, obtenemos de restos 119 y 292, respectivamente. Calcula el número *N*.

4. En el rectángulo *ABCD* de la figura, de dimensiones 40 y 30 cm, hemos dibujado el paralelogramo *AECF* en el que los lados *AF* y *EC* son perpendiculares a la diagonal *BD* de dicho rectángulo. Calcula el área del paralelogramo *AECF*.



5. Escribe todas las parejas de enteros positivos, x e y, tales que $x^2 \cdot y^3 = 6^{12}$.

XIV Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

22 de noviembre de 2014

PRUEBA INDIVIDUAL 3º y 4º de E.S.O. (90 minutos)

1. ¿Cuántas parejas de capicúas de tres cifras verifican que su suma es un capicúa de cuatro cifras?
(Por ejemplo, 232 y 989 sería una de ellas ya que 232 + 989 = 1221).

2. En un sistema de coordenadas dibujamos un cuadrado de vértices $A(a, 0)$, $B(b, 1)$, $C(c, 5)$ y $D(d, 4)$. Calcula su área.

3. ¿Cuántos números de cuatro cifras verifican que el producto de ellas es 60?

4. En el rectángulo $ABCD$, con $AB = 20$ y $BC = 10$ marcamos un punto E en el lado CD de manera que el ángulo $C\hat{B}E$ sea de 15º. Calcula la longitud del segmento AE.

5. Los números positivos p, q y r verifican que $pq + pr = 80$ y $pq + qr = 425$. Calcula $p + q + r$.

XIV Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

22 de noviembre de 2014

PRUEBA INDIVIDUAL Bachillerato (90 minutos)

1. En el triángulo equilátero de lado $2014\sqrt{3}$ se traza la circunferencia inscrita. Calcula el diámetro del mayor de los círculos que cabe en una de las regiones comprendidas entre dicho triángulo y la circunferencia inscrita.

2. ¿Cuántas fracciones positivas, menores que 1, verifican que al escribirlas en forma irreducible resulta que la suma del numerador y del denominador es 1000?

3. Calcula el número de enteros positivos *x* que verifican que $\lg_{10}(x-40)+\lg_{10}(60-x)<2$.

4. Alicia puede pintar, ella sola, una habitación en 15 horas, Beatriz es el 50 % más rápida que Alicia pintando y Carlos es el doble de rápido que Alicia. Empieza Alicia a pintar la habitación, al cabo de una hora y media se le suma Beatriz y, cuando llevan pintada la mitad de la habitación, entra Carlos y las ayuda hasta que entre los tres terminan de pintar la habitación. ¿Cuánto tiempo transcurrió desde que empezó Alicia hasta que terminaron de pintar la habitación?

5. Si *a, b, c* y *d* son enteros positivos que suman 63, calcula el máximo valor para *ab* + *bc* + *cd*.

XIV Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

22 de noviembre de 2014

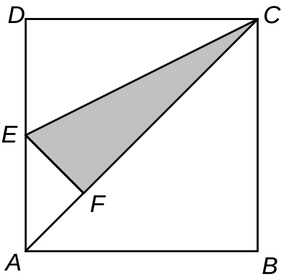
PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

1º y 2º de ESO.-

1A.- Calcula el valor de la cifra *A* si el número de cinco cifras 12*A*3*B* es divisible por 4 y por 9 y *A* es distinta de *B*.
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1B.- Sea "*T*" la respuesta del problema 2B
Si *a, b, c* y *d* representan enteros positivos diferentes, con $a + b + 2c = 9$ y $a + c + d = 10$, calcula el valor de *d* sabiendo que $b = \frac{T}{4}$.
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1C.- Sea "*T*" la respuesta del problema 2C.
En el cuadrado *ABCD* de la figura de lado $\frac{T}{50}$, *E* es el punto medio del lado *AD* y *EF* es perpendicular a la diagonal *AC*. Calcula el área del triángulo *EFC*.
(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)



XIV Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

22 de noviembre de 2014

PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

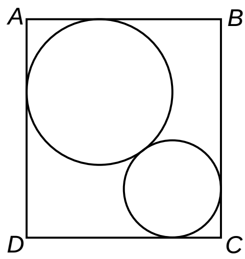
3º y 4º de ESO.-

.

2A.- Sea "*T*" la respuesta del problema 3A y *r* la suma de las cifras de *T*.

En el interior del rectángulo *ABCD* de la figura, con *AB* = 27 y *AD* = 24, hay dos circunferencias tangentes entre sí y a los lados del rectángulo, como muestra la figura. Si el radio de la pequeña es *r*, calcula el radio de la mayor.

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)



2B.- En una recta marcamos, de izquierda a derecha, los puntos *A, B, C, D* y E en ese orden.

Si $\frac{AB}{BC}=\frac{1}{3}, \frac{BC}{CD}=\frac{1}{4}$ y $\frac{CD}{DE}=\frac{1}{2}$, calcula el numerador de la fracción irreducible $\frac{AC}{BE}$.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

2C.- Sea "*T*" la respuesta del problema 3C.

El ángulo formado por la mediana *CM* y la hipotenusa, *AB*, del triángulo rectángulo *ABC* es de 30º. Si la altura *CH* es $\sqrt[4]{T}$, calcula el área de dicho triángulo.

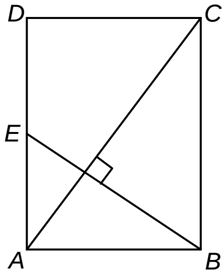
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

XIV Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

22 de noviembre de 2014

PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

Bachillerato.-



3A.- Sea "T" la respuesta del problema 1A.
En el rectángulo $ABCD$ de la figura, AB = 100T y E es el punto medio de AD. Si las rectas AC y BE son perpendiculares, calcula el mayor entero menor que AD.
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

3B.- Sea "T" la respuesta del problema 1B.
Las gráficas de las funciones $y = 3(x-h)^2 + j$; $y = (T-3)(x-h)^2 + k$ cortan al eje de ordenadas en los puntos (0, 2013) y (0, 2014), respectivamente. Si ambas funciones tienen dos raíces enteras, calcula h.
(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

3C.- A partir de una determina fecha, el número de habitantes de una ciudad crece en 1200 personas y, al año siguiente, decrece en un 11 %, teniendo entonces 32 habitantes menos que al principio. Calcula la población inicial de la ciudad.
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

CENTROS GANADORES

1. Colegio Alemán de Madrid
2. IES San Juan Bautista (Equipo A)
3. IES Diego Velázquez

ESTUDIANTES GANADORES

NIVEL I (1º, 2º ESO)

1.	Pablo Soto Martín	(IES José Luis Sampedro)
2.	María Moya Gómez	(Colegio Fray Luis de León)
2.	Noryne Riobuane	(IES Manuel Fraga)

NIVEL II (3º, 4º ESO)

1.	Francisco Tomás-Valiente	(IES Ramiro de Maeztu)
2.	Alejandro Ruiz de la Puente	(IES Fortuny)

NIVEL III (1º, 2º Bachillerato)

1.	Gonzalo Gómez Abejón	(IES Ramiro de Maeztu)
2.	Javier González Domínguez	(IES San Juan Bautista)

RELACIÓN DE LOS 10 CENTROS CON MAYOR PUNTUACIÓN

1.	Colegio Alemán de Madrid	48,1
2.	IES San Juan Bautista A	38
3.	IES Diego Velázquez	33,1
4.	IES Ramiro de Maeztu A	32,1
5.	Colegio King College Soto de Viñuelas A	31
6.	IES San Juan Bautista B	30,79
7.	IES La Estrella A	29,3
8.	Colegio Fray Luis de León A	27,2
9.	IES José Luis Sampedro A	26,4
10.	Colegio Fray Luis de León B	25,8

REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

LI OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Comunidad de Madrid

FASE CERO: jueves 20 de noviembre de 2014

- En la hoja de respuestas, escribe la letra de la opción que creas correcta
- Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos; cada respuesta en blanco 1 punto, y cada respuesta errónea, 0 puntos.
- No está permitido el uso de calculadoras, instrumentos de medida o de cualquier aparato electrónico.
- TIEMPO: 3 horas.

1. La media de los cinco enteros consecutivos a, $a + 1$, $a + 2$, $a + 3$, $a + 4$ es b. ¿Cuál es la media de los cinco enteros consecutivos b, $b + 1$, $b + 2$, $b + 3$, $b + 4$?

A) $a + 3$ B) $a + 4$ C) $a + 5$ D) $a + 6$ E) $a + 7$

2. Dos rectas perpendiculares se cortan en el punto $A(6, 8)$. Si las ordenadas en el origen (corte con el eje Y) de ambas rectas suman cero, ¿cuál es el área del triángulo de vértices A y dichos cortes con el eje Y?

A) 45 B) 48 C) 54 D) 60 E) 72

3. Si $A > B > 0$ y A es el x % mayor que B, x es igual a

A) $100\cdot\frac{A-B}{B}$ B) $100\cdot\frac{A+B}{B}$ C) $100\cdot\frac{A+B}{A}$ D) $100\cdot\frac{A-B}{A}$ E) $100\cdot\frac{A}{B}$

4. Lanzamos al aire cuatro dados de seis caras. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos tres de ellos muestren la misma cara?

A) $\frac{1}{36}$ B) $\frac{7}{72}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{5}{36}$ E) $\frac{1}{6}$

5. ¿Cuál es la mayor potencia de 2 que divide a $10^{1002} - 4^{501}$?

A) 2^{1002} B) 2^{1003} C) 2^{1004} D) 2^{1005} E) 2^{1006}

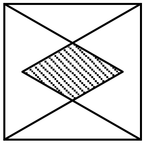
6. ¿Para cuántos enteros x se verifica que el número $x^4 - 51x^2 + 50$ es negativo?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

7. Los enteros positivos a y b verifican que las rectas $y = ax + 5$, $y = 3x + b$ cortan al eje de abscisas en el mismo punto. ¿Cuál es la suma de todas las posibles abscisas de este punto de intersección?

A) – 20 B) – 18 C) – 15 D) – 12 E) – 8

8. En el interior de un cuadrado de lado $2\sqrt{3}$ dibujamos dos triángulos equiláteros como muestra la figura. ¿Cuál es el área del rombo intersección de los dos triángulos?



A) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{2}-1$ D) $8\sqrt{3}-12$ E) $\frac{3}{2}$

9. ¿Cuántos enteros positivos $x \leq 100$ verifican que $x^2 + x^3$ es un cuadrado perfecto?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

10. Dividimos un círculo de radio 12 en dos sectores, el menor de 120º, utilizando cada uno de ellos para formar la cara lateral de un cono. ¿Cuál es el cociente entre los volúmenes del cono pequeño y del mayor?

A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ D) $\frac{\sqrt{5}}{6}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

11. En el rectángulo *ABCD*, con *AB* = 6 y *AD* = 30, sea *G* el punto medio de *AD*. Prolongamos desde *B* el lado *AB* hasta el punto *E*, con *BE* = 2, y sea *F* el punto de intersección de *ED* con *BC*. ¿Cuál es el área del cuadrilátero *BFDG*?

A) $\frac{183}{2}$ B) 67 C) $\frac{135}{2}$ D) 68 E) $\frac{137}{2}$

12. Si la nota de cada uno de los chicos de una clase hubiera sido 4 puntos más, la media de toda la clase habría subido 1 punto. ¿Qué porcentaje de chicas había en la clase?

A) 40% B) 50% C) 75% D) 80% E) 60%

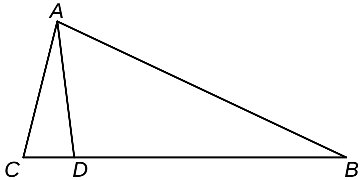
13. Esteban y Joaquín comienzan simultáneamente a caminar desde dos puntos distintos *A* y *B*, en sentido opuesto, por un mismo sendero y se cruzan al cabo de 3 horas. Esteban llega al punto desde el que salió Joaquín 2 horas y media antes de que Joaquín llegue al punto desde el que salió Esteban. ¿Cuántas horas duró la excursión de Joaquín?

A) 6 B) 6,5 C) 7 D) 7,5 E) 8,5

14. Programamos un ordenador para que transmita una cierta sucesión de cinco dígitos, ceros y unos, cinco veces. Una de las cinco veces lo hizo correctamente, otra vez tuvo un error, otra vez dos, otra vez tres y la otra vez cuatro errores. Las cinco respuestas son las que se proponen a continuación. ¿Cuál fue la correcta?

A) 00001 B) 00100 C) 01100 D) 10010 E) 10011

15. ¿Cuál es la longitud del lado *AB* del triángulo *ABC* sabiendo que $AC = 3$, $AD = 3$, $BD = 8$ y $CD = 1$?



A) 8 B) 8,75 C) 9

D) 9,25 E) 9,5

16. ¿Cuál es el mayor entero k para el que 85! es divisible entre 42^k?

A) 2 B) 13 C) 41 D) 81 E) 135

17. En un concurso de televisión hay un premio guardado en una de cinco cajas *A, B, C, D* y *E* con la misma probabilidad en cada una. El concursante elige la caja *A*. El realizador del concurso, que sabe en qué caja está el premio, abre dos de las otras cuatro, la *B* y la *C*, en las no está el premio. ¿Cuál es la probabilidad de que el premio esté en la caja *D*?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{2}{3}$

18. Considera el conjunto de todas las soluciones enteras (x, y) de la ecuación $x^2 = y^4 + 671$. ¿Cuál es la suma de todos los valores, y, del conjunto de soluciones?

A) 0 B) 5 C) 36 D) 41 E) 1296

19. ¿Cuál es el mínimo valor de la expresión

$\sqrt{4+y^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (2-y)^2} + \sqrt{(4-x)^2 + 1} \quad \forall x,\ y \in R$?

A) 3 B) $3+2\sqrt{2}$ C) 5 D) $\sqrt{5}+2\sqrt{2}$ E) $2+\sqrt{5}+\sqrt{2}$

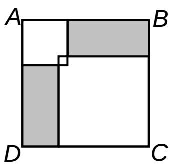
20. El dominio de la función $f(x) = \lg_{\frac{1}{2}}\left\langle \lg_4\left\{\lg_{\frac{1}{4}}\left[\lg_{16}\left(\lg_{\frac{1}{16}} x\right)\right]\right\}\right\rangle$ es un intervalo de longitud $\frac{m}{n}$ con m y n primos entre sí. ¿Cuál es el valor de $m + n$?

A) 19 B) 31 C) 271 D) 319 E) 511

21. Si $P(x)$ es un polinomio de tercer grado con $P(0) = k$, $P(1) = 2k$ y $P(-1) = 3k$, ¿cuál es el valor de $P(2) + P(-2)$?

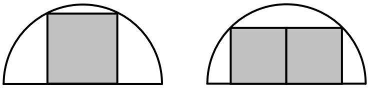
A) 0 B) k C) $6k$ D) $7k$ E) $14k$

22. En el interior del cuadrado *ABCD* de área 196 hay dos cuadrados que se solapan como muestra la figura. Si el área del mayor de los dos es el cuádruple de la del menor y el área de la región común a ambos es 1, ¿cuál es el área de la región sombreada?



A) 64 B) 72 C) 76 D) 80 E) 84

23. En el dibujo se observan dos semicírculos iguales y tres cuadrados. ¿Cuál es el cociente entre las áreas de las regiones sombreadas?



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{6}$

24. El mayor número primo conocido, formado solamente por ceros y unos es el número $\frac{10^{641}\left(10^{640}-1\right)}{9}+1$. ¿Cuántas cifras tiene?

A) 640 B) 641 C) 1280 D) 1281 E) 640·641

25. Si x, y, z son enteros positivos menores que 10 tales que $(100x+10y+z)^2=(x+y+z)^5$ ¿Cuál es el valor de $x^2+y^2+z^2$?

A) 21 B) 23 C) 29 D) 33 E) 37

26. ¿Para cuántos enteros positivos n, resulta que $3^n + 81$ es un cuadrado perfecto?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

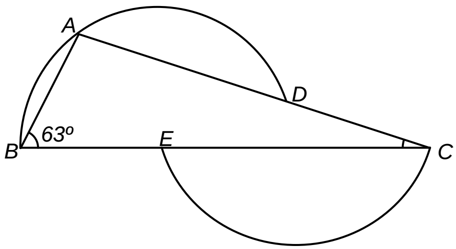
27. ¿Para cuántos enteros positivos n, se verifica que el resto de la división de 1 000 063 entre n es 63?

A) 29 B) 37 C) 39 D) 49 E) 79

28. ¿Cuál es el resto de la división de $P(x)=x^{200}-2x^{199}+x^{50}-2x^{49}+x^2+x+1$ entre $(x-1)(x-2)$?

A) $2x - 1$ B) 7 C) $2x + 3$ D) 1 E) $6x - 5$

29. En la figura que observas, E es el centro de la circunferencia que pasa por A, B y D. El centro de la circunferencia que pasa por E y C es D. Si el ángulo en B es de 63º, el valor del ángulo en C es:



A) 18º B) 20º C) 22º D) 24º E) 26º

30. Si $x \geq 3$, definimos $f(x) = \lg_2(\lg_3 x) - \lg_3(\lg_2 x)$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) $f(x) > 0 \ \ \forall x \geq 3$ B) $f(x) < 0 \ \ \forall x \geq 3$ C) $f(x) = 0 \ \ \forall x \geq 3$

D) $f(x) = 0$ para un único valor de $x \geq 3$ E) $f(x) = 0$ para más de un valor de $x \geq 3$

REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

LI OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

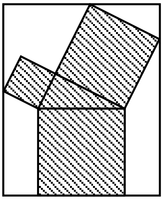
Comunidad de Madrid

FASE LOCAL: segunda prueba. Jueves 18 de diciembre de 2014
Tiempo: 3h 30 min

1. Al quitar un número de una lista de diez enteros consecutivos resulta que la suma de los nueve restantes es 2014. ¿Qué número hemos quitado?

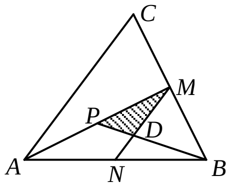
2. En una reunión hay varias personas. Se incorpora Alicia y la media de la edad aumenta en 4 años. Posteriormente se incorpora Beatriz, que es gemela de Alicia, y la media de edad vuelve a aumentar, pero en este caso solo en 3 años. ¿Cuántas personas había en la reunión antes de entrar Alicia?

3. Sobre los lados de un triángulo rectángulo, de catetos uno doble que el otro, dibujamos cuadrados hacia fuera, como se muestra en la figura. El polígono obtenido lo inscribimos en un rectángulo como puede observarse en la citada figura. ¿Cuál es el cociente entre el área del polígono rayado y el área del rectángulo en el que está inscrito?



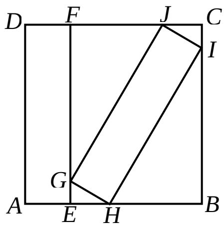
4. La gráfica de $y^2 + 2xy + 40|x| = 400$ divide al plano en varias regiones una de las cuales está acotada. Calcula el área de esa región.

5. En el triángulo *ABC*, de área 48, *P* es el punto medio de la mediana *AM* y *N* el punto medio del lado *AB*. ¿Cuál es el área del triángulo *MDP*?



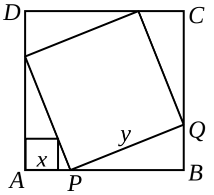
6. Una caja contiene varias bolas, todas iguales. El cociente entre el volumen ocupado por las bolas y el volumen de la caja no ocupado por las bolas es $\frac{1}{k}$, con *k* entero mayor que 1.
Sacamos de la caja un número primo de bolas y ahora el cociente entre el volumen ocupado por las restantes y el volumen de la caja no ocupado por las bolas es $\frac{1}{k^2}$. ¿Cuántas bolas había en la caja al principio?

7. En el interior del cuadrado *ABCD*, de lado 1, dibujamos dos rectángulos iguales, *AEFD* y *GHIJ*. ¿Cuánto mide el segmento *AE*?



8. Uno de los lados de un triángulo mide 10 cm y la mediana que llega a ese lado, que mide 9 cm, es perpendicular a una segunda mediana del triángulo. Calcula la longitud de la tercera mediana del triángulo.

9. En el cuadrado *ABCD* de lado 1 se inscribe un cuadrado de lado $PQ = y$, como muestra la figura, y en uno de los triángulos rectángulos determinado por los dos cuadrados se inscribe otro cuadrado de lado *x*. Al moverse el punto *P* sobre el lado *AB* cambian los valores de *x* e *y*. Determina *x* e *y* para que $x^2 + y^2$ sea mínimo. ¿Cuánto vale ese mínimo?



10. En el triángulo *ABC* cuyos ángulos verifican $\hat{A} < \hat{C} < 90^{\circ} < \hat{B}$ se trazan las bisectrices exteriores de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$. Los segmentos de estas bisectrices, cada uno hasta la prolongación del lado opuesto, miden lo mismo que el lado *AB*. Calcula la medida del ángulo $\hat{A}$.

LI OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Prueba de selección
Comunidad de Madrid

Primera sesión, viernes 16 de enero de 2015

No está permitido el uso de calculadoras. Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.

El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.

1. Demuestra que $(ax+by)^2 \leq ax^2+by^2$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ y cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ con $a+b=1,\ a,b \geq 0$. ¿En qué casos se da la igualdad?

2. Sean r y s dos rectas paralelas, y A un punto fijo a igual distancia de ambas rectas. Para cada punto B de la recta r, sea C el punto de la recta s tal que $B\hat{A}C = 90^{\circ}$, y sea P el pie de la perpendicular desde A sobre la recta BC. Demuestra que, independientemente de qué punto B de la recta r tomemos, el punto P está sobre una circunferencia fija.

3. Un campeonato de baloncesto se ha jugado por sistema de liga a dos vueltas (cada par de equipos se enfrentan dos veces) y sin empate (si el partido acaba en empate hay prórrogas hasta que gane uno de los dos). El ganador del partido obtiene 2 puntos y el perdedor 1 punto. Al final del campeonato, la suma de los puntos obtenidos por todos los equipos, salvo el campeón, es de 2015 puntos. ¿Cuántos partidos ha ganado el campeón?

Segunda sesión
Sábado 17 de enero de 2015

Tiempo: 3 horas y media

4. Alrededor de una mesa circular están sentadas seis personas. Cada una lleva un sombrero. Entre cada dos personas hay una mampara de modo que cada una puede ver los sombreros de las tres que están enfrente, pero no puede ver el de la persona de su izquierda ni el de la de su derecha ni el suyo propio. Todas saben que tres de los sombreros son blancos y tres negros. También saben que cada una de ellas es capaz de obtener cualquier deducción lógica que sea factible. Empezamos por una de las seis personas y le preguntamos ”¿puedes deducir el color de algún sombrero de los que no ves?”. Una vez que ha respondido (todos oyen la respuesta), pasamos a la persona de su izquierda y le hacemos la misma pregunta, y así sucesivamente. Demuestra que una de las tres primeras responderá “Sí”.

5. El triángulo *ABC* es isósceles en *C*, y sea Γ su circunferencia circunscrita. Sea *M* el punto medio del arco *BC* de Γ que no contiene a *A*, y sea *N* el punto donde la paralela a *AB* por *M* vuelve a cortar a Γ. Se sabe que *AN* es paralela a *BC*. ¿Cuáles son las medidas de los ángulos del triángulo *ABC*?

6. Sean x, y, z reales positivos tales que $x + y + z = 3$. Halla el valor máximo alcanzado por
$$\sqrt{x} + \sqrt{2y+2} + \sqrt{3x+6}.$$
¿Para qué valores de x, y, z se alcanza dicho valor máximo?

XXª OLIMPIADA de MAYO
Primer Nivel
Mayo de 2014

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

PROBLEMA 1
Un número natural N es *bueno* si sus dígitos son 1, 2 o 3 y todos los números de 2 dígitos formados por dígitos ubicados en posiciones consecutivas de N son números distintos. ¿Hay algún número bueno de 10 dígitos? ¿Y de 11 dígitos?

PROBLEMA 2
Beatriz tiene tres dados en cuyas caras están escritas letras diferentes. Al tirar los tres dados sobre una mesa, y eligiendo cada vez solamente las letras de las caras de arriba, formó las palabras
OSA , VIA , OCA , ESA , SOL , GOL , FIA , REY , SUR , MIA , PIO , ATE , FIN , VID.
Determinar las seis letras de cada dado.

PROBLEMA 3
Se tienen nueve cajas. En la primera hay 1 piedra, en la segunda hay 2 piedras, en la tercera hay 3 piedras, y así siguiendo, en la octava hay 8 piedras y en la novena hay 9 piedras. La operación permitida es sacar el mismo número de piedras de dos cajas distintas y colocarlas en una tercera caja. El objetivo es que todas las piedras estén en una sola caja. Describir cómo hacerlo con el número mínimo de operaciones permitidas. Explicar porqué es imposible lograrlo con menos operaciones.

PROBLEMA 4
Sea ABC un triángulo rectángulo e isósceles, con $\hat{C} = 90º$. Sean M el punto medio de AB y N el punto medio de AC. Sea P tal que MNP es un triángulo equilátero con P en el interior del cuadrilátero $MBCN$. Calcular la medida del ángulo $C\hat{A}P$.

PROBLEMA 5
Dadas 6 bolitas: 2 blancas, 2 verdes, 2 rojas, se sabe que hay una blanca, una verde y una roja que pesan 99 g cada una y que las demás bolitas pesan 101 g cada una. Determinar el peso de cada bolita usando dos veces una balanza de dos platos.
ACLARACIÓN: Una balanza de dos platos solo informa si el plato izquierdo pesa más, igual o menos que el derecho.

XXª OLIMPIADA de MAYO
Segundo Nivel
Mayo de 2014

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

PROBLEMA 1

El sendero que va del pueblo hasta el refugio en la montaña tiene 76 km. Un grupo de andinistas lo recorrió en 10 días, de manera tal que en dos días consecutivos nunca caminaron más de 16 km, pero en tres días consecutivos siempre caminaron por lo menos 23 km. Determinar la máxima cantidad de kilómetros que pudieron haber recorrido en un día.

PROBLEMA 2

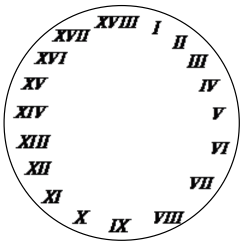
En un cuadrilátero convexo *ABCD*, sean *M*, *N*, *P* y *Q* los puntos medios de los lados *AB*, *BC*, *CD* y *DA* respectivamente. Si los segmentos *MP* y *NQ* dividen al *ABCD* en cuatro cuadriláteros con la misma área, demostrar que *ABCD* es un paralelogramo.

PROBLEMA 3

Ana y Luca juegan al siguiente juego. Ana escribe una lista de n números enteros distintos. Luca gana si puede elegir cuatro números distintos, a, b, c y d, de modo que el número:
$a + b - (c + d)$ sea múltiplo de 20.
Determinar el mínimo valor de n para el que, cualquiera que sea la lista de Ana, Luca pueda ganar.

PROBLEMA 4

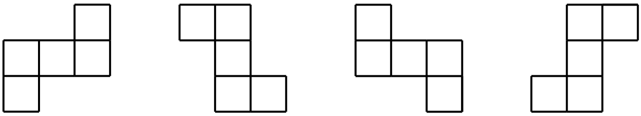
En una excavación en la antigua Roma se encontró un reloj inusual con 18 divisiones marcadas con números romanos (ver figura).



Desgraciadamente el reloj estaba roto en 5 pedazos. La suma de los números en cada pedazo era la misma. Mostrar de qué manera pudo estar roto el reloj.

PROBLEMA 5

Cada casilla de un tablero de $n \times n$, con $n \geq 3$, está coloreada con uno de 8 colores. ¿Para qué valores de n se puede afirmar que alguna de estas figuras incluida en el tablero, contiene dos casillas del mismo color?



XX OLIMPIADA DE MAYO – 2014. RESULTADOS DE ESPAÑA

PRIMER NIVEL

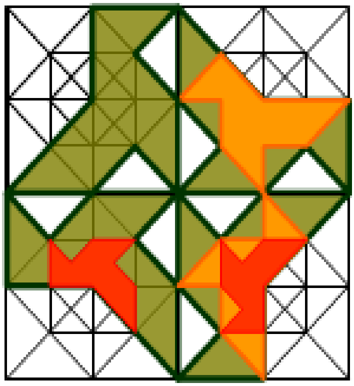
	Apellidos y nombre	Premio
1	Pérez Mugía, Alberto	ORO
2	Soto Martín, Pablo	PLATA
3	Sánchez González, Víctor David	PLATA
4	Andrés Torrijos, Jorge	BRONCE
5	Domínguez Monreal, Hernán	BRONCE
6	Durán Fernández, Javier	BRONCE
7	Morales Aguilar, Claudia María	BRONCE
8	Aguilar Ramírez, Alexander	MENCIÓN
9	Zhang, Shenghao	MENCIÓN
10	Morales Gómez, Carlos	MENCIÓN

SEGUNDO NIVEL

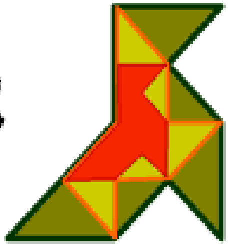
1	Olmo de Casas, Pablo del	ORO
2	Mondría Terol, Teresa	PLATA
3	Rodríguez Martín, Saúl	PLATA
4	Carbonié del Burgo, Diego	BRONCE
5	Cendón Palomo, Pablo	BRONCE
6	Epelde Blanco, Alejandro	BRONCE
7	Steimann Martínez Mora, Antonio	BRONCE
8	Arranz Toro, Diego	MENCIÓN
9	Andrés Gorrochategui, Víctor	MENCIÓN
10	Crisanto García, Svetlin	MENCIÓN

Dirección General de Mejora de la Calidad de la Enseñanza
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN
Comunidad de Madrid

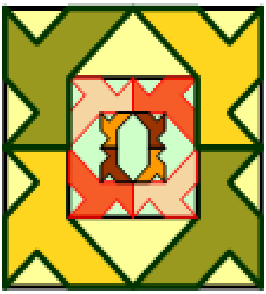
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Consejo Social de la UCM

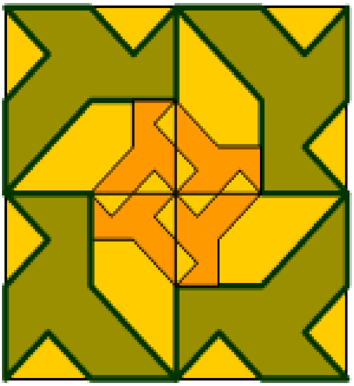


XX Concurso de Primavera



MATEMÁTICAS 2016



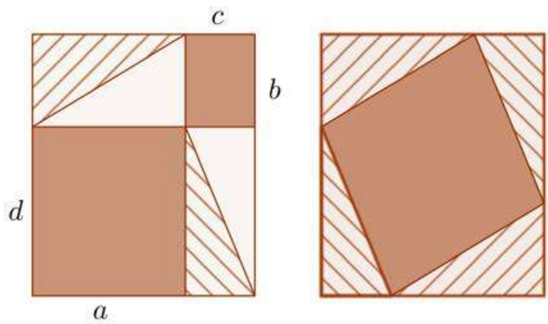


Comunidad de Madrid

Comité organizador del Concurso de Primavera

Alfredo Martínez Sanz
Esteban Serrano Marugán
Francisco López Álvarez
Hugo Fernández Hervás
Isabel Benito Miguel
Javier Soler Areta
Jesús García Gual
Joaquín Hernández Gómez
José María Sordo Juanena
Juan Jesús Donaire Moreno
Luis Ferrero de Pablo
María Gaspar Alonso-Vega,
María Moreno Warleta
María Olbés Fernández
Merche Sánchez Benito
Miguel Ángel Baeza Alba
Pablo Martínez Dalmau
Pilar Ruiz Cervigón
Víctor Manuel Sánchez González

Suma geométrica de rectángulos y desigualdad del producto escalar
(El origen del teorema de Pitágoras)



$$a \cdot d + b \cdot c \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}$$

Presentación

El matemático, microscopio y telescopio en ristre, desentraña (que no inventa) la verdad matemática ("sea lo que sea que esto signifique"). El profesor de matemáticas es el juglar que canta, guarnece y colorea alguno de sus escenarios. El Concurso de Primavera, en su 20 aniversario (y veinte años son muchos) rinde tributo a tanto anónimo poeta, enamorado de la estrella pitagórica.
Escrito queda.

El Comité Organizador

AGRADECIMIENTOS

A los participantes y colaboradores del Concurso.

A la Facultad de Matemáticas.

Al Consejo Social y al Vicerrectorado de alumnos de la UCM.

Al Área de Formación del Profesorado dentro de la Dirección General de la Mejora de la Calidad de la Enseñanza de la Consejería de Educación.

A Educamadrid.

A las editoriales Grupo **ANAYA** y Ediciones **S.M.**

Al grupo empresarial El Corte Inglés.

A Smartick.

XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 25 de febrero de 2015

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** X LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática

Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid

El Corte Inglés

Grupo ANAYA

Grupo SM

Smartick

1 ¿Cuál de los resultados de estas operaciones es el mayor?

A) 2 x 0 + 1 + 5 **B)** 2 + 0 + 1 x 5 **C)** 2 + 0 x (1 + 5)
D) (2 – 0) x (1 + 5) **E)** 2 + 0 – 1 + 5

2 El perro de los músicos de Bremen pesa 15,4 kg, el gato pesa 3,35 kg y el gallo, 850 g. ¿Cuánto peso soporta el pobre burrito?

A) 196 hg **B)** 868,75 kg **C)** 2725 dag **D)** 1037,5 hg **E)** 196 dag

3 Merche tiene cinco años menos que Juanje, Alfredo tiene cuatro años más que Juanje y Pilar tiene doce años menos que Alfredo. ¿Cuántos años de diferencia hay entre Merche y Pilar?

A) Uno **B)** Dos **C)** Tres **D)** Cuatro **E)** Cinco

4 Kikirika pone 79 huevos en tres meses y Kokoroka pone 55 huevos en dos meses. ¿Cuántos huevos pondrán las dos gallinas juntas en un año?

A) 636 **B)** 638 **C)** 646 **D)** 648 **E)** 650

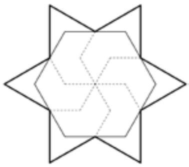
5 Don Retorcido le ha pedido a Luis que dibuje un ángulo recto. Cuando lo ha medido ha dicho muy enfadado: ¡A este ángulo le faltan siete grados! ¿Cuánto medía el ángulo de Luis?

A) 93º **B)** 83º **C)** 97º **D)** 173º **E)** 353º

6 Francisco ha pensado un número. Primero le ha sumado 3; después, ha multiplicado el resultado por 4 y por último le ha restado 8. Si el resultado final ha sido 64, ¿cuál es la suma de las cifras del número que había pensado Francisco?

A) 5 **B)** 6 **C)** 11 **D)** 13 **E)** 16

7 El hexágono regular inscrito en la estrella tiene un área de 24 cm^2. El área, en cm^2, de la estrella es:



A) 27 **B)** 30 **C)** 32 **D)** 36

E) 40

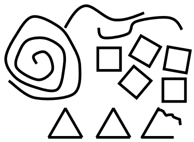
8 Esteban corre todos los días tres cuartos de hora. Si hoy ha salido a las dos menos veinte de la tarde, ¿a qué hora volverá a casa?

A) 15: 15 **B)** 15: 05 **C)** 14: 35 **D)** 14: 25 **E)** 14: 15

9 Carmen tiene tres gatitos. Jaimito come cada dos horas, Juanito cada tres horas y Jorgito cada cuatro horas. Si ahora están comiendo los tres a la vez, ¿dentro de cuántas horas volverán a comer los tres juntos?

A) 6 **B)** 4 **C)** 9 **D)** 20 **E)** 12

10 Irene tiene una cuerda muy larga. Con ella podría hacer 36 cuadrados de 2 cm de lado. ¿Cuántos triángulos equiláteros de 3 cm de lado puede hacer con su cuerda?



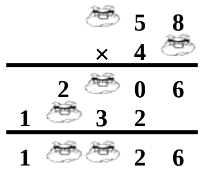
A) 32 **B)** 31 **C)** 27 **D)** 16

E) 6

11 Martita compró tres bolis y dos cuadernos, pagó con 20 euros y le devolvieron 12,50 euros. Si un cuaderno cuesta un euro más que un boli, ¿cuántos euros cuesta un boli?

A) 1,10 **B)** 3,50 **C)** 0,70 **D)** 2,25 **E)** 7,50

12 ¡Ya está aquí Comenúmeros! Y esta vez se ha puesto morado con una multiplicación ¿Cuál es la suma de las seis cifras que se ha comido el bribón?



A) 30 **B)** 32 **C)** 33 **D)** 35

E) 41

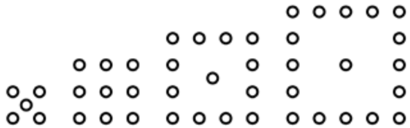
13 Ana y su tío Gonzalo cumplen años el mismo día. Como Ana ha cumplido 13 años y Gonzalo 31, pueden usar las mismas velitas, una con un **3** y otra con un **1**. ¿Cuántos años han de pasar como mínimo para que esto vuelva a ocurrir?

A) 29 **B)** 23 **C)** 43 **D)** 41 **E)** 11

14 Siete sandías y un melón pesan lo mismo que tres sandías y siete melones. ¿Cuántas sandías pesan lo mismo que nueve melones?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

15 Santiago está colocando sus monedas de un euro siguiendo el patrón que ves en la figura. Lleva hechos cuatro pasos del patrón. Si aún le quedan monedas para completar tres pasos más sin que le sobre ni le falte ninguna moneda, ¿cuánto dinero tiene Santiago?



A) 29 € **B)** 90 € **C)** 107 € **D)** 119 € **E)** 152 €

16 Si a dos millones diecisiete mil veinticuatro le resto un millón novecientos treinta mil quinientos cinco, ¿cuál es el número que más se aproxima al resultado?

A) 8 000 **B)** 56 000 **C)** 85 000 **D)** 120 000 **E)** 240 000

17 Isabel forma números de cuatro cifras usando solo los dígitos 1, 2, 5, 8 y 9, sin repetir. Por ejemplo, ha formado el 2185 y el 5891. ¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor número que puede formar?

A) 8594 **B)** 860 **C)** 8000 **D)** 8888 **E)** 8852

18 María se había propuesto estudiar cuatro horas esta tarde pero se ha pasado una hora y cuarto con la Play, media hora jugando con el ordenador, 35 minutos "*guasapenando*", tres cuartos de hora viendo su serie favorita y 20 minutos colgada del teléfono hablando con su novio. ¡Ay María!, ¿cuántos minutos has estudiado en realidad?

A) 25 **B)** 45 **C)** 30 **D)** 40 **E)** 35

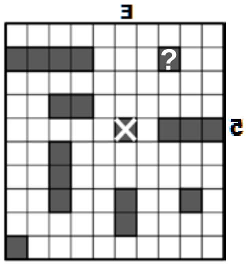
19 *¿Qué me pongo?, ¿qué me pongo?* Inés siempre tan indecisa. Tiene en su armario cuatro pantalones, siete camisetas y tres pares de zapatillas. Ya se ha probado veinticinco combinaciones de todas las posibles. ¿Cuántas combinaciones nuevas podrá probarse como máximo antes de decidirse?

A) 25 **B)** 37 **C)** 43 **D)** 59 **E)** 84

20 Juanito va a celebrar su cumpleaños por todo lo alto. Ha leído en las recetas de su madre que para hacer un bizcocho para seis personas necesita cuatro huevos. ¿Cuántas docenas de huevos necesitará para hacer un gran bizcocho si en total se van a juntar 135 amigos?

A) Seis **B)** Seis y media **C)** Siete **D)** Siete y media **E)** Noventa

21 Violetta y León están jugando a los barcos. Violetta, que es un poco tramposilla, ve la cuadrícula de León reflejada en un espejo que hay detrás de él y le acaba de hundir un barco en la casilla E5. ¿Qué casilla debe decir Violetta para hundirle el barco marcado con una interrogación?



A) I3 **B)** H9 **C)** C9 **D)** B3 **E)** C2

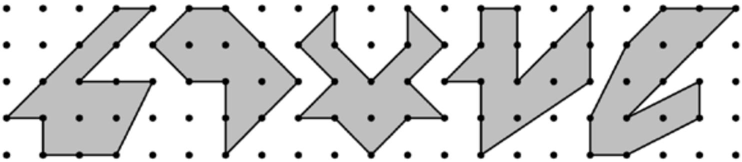
22 Cuando Lino llora, Luca espera pacientemente dos minutos hasta ponerle el chupete. Una vez que se lo ha puesto, Lino deja de llorar durante siete minutos pero después lo tira y vuelve a llorar. Si Luca le puso el chupete por última vez hace cuatro minutos, ¿cuántas veces tendrá que ponérselo en la próxima hora?

A) 6 **B)** 5 **C) 7** **D)** 11 **E)** 9

23 En una bolsa hay 60 bolas, unas son rojas, otras verdes y otras azules. Si saco una bola sin mirar, la probabilidad de que sea roja es $\frac{1}{2}$ y la probabilidad de que sea azul es $\frac{3}{10}$. ¿Cuántas bolas verdes hay en la bolsa?

A) 6 **B)** 12 **C)** 18 **D)** 24 **E)** 30

24 ¿Qué figura ocupa más?



A) **B)** **C)** **D)** **E)**

25 Don Retorcido ha multiplicado dos números consecutivos y te da el resultado en forma de producto: 2 x 3 x 5 x 7 x 23. ¿Cuál es la suma de esos dos números?

A) 127 **B)** 139 **C)** 145 **D)** 151 **E)** 143

XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 25 de febrero de 2015

NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

1 Cuatro amigas van al parque de atracciones y a la hora de pagar hablan así:
Wissal: "¡Ay!, se me olvidó el dinero, ya os lo pagaré"
Arancha: "Pues yo solo he traído 16 euros, aquí los pongo"
María: "Está bien, yo puedo poner estos 47 euros"
Ana: "Pues yo aporto los 21 euros que faltan".
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es incorrecta?

A) Arancha debe a María 5 euros **B)** Ana está en paz, ni le deben, ni debe
C) Wissal debe a María 21 euros **D)** Arancha debe a Ana 5 euros
E) Cada entrada cuesta más de 16 euros

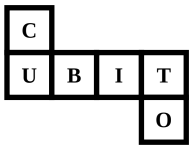
2 ¿Cuál de estas longitudes equivale a medio millón de milímetros?

A) Medio hectómetro **B)** Medio kilómetro **C)** Quinientos decámetros
D) Cien mil metros **E)** Cinco kilómetros

3 Ahí están Comenúmeros y Don Retorcido hablando de sus cosas.
He pensado cinco números *a*, *b*, *c*, *d*, *e* –dice Retorcido– y fíjate, todos son enteros positivos de una sola cifra y todos distintos; *a* es impar; *b* es un cuadrado perfecto; *c* es primo; *d* es par; *e* es múltiplo de 3. ¡Adivínalos, listillo!
No puedo –contesta Comenúmeros–, necesito más pistas.
Es difícil engañarte, ahí van dos pistas nuevas: el producto de *a* por *c* es *e* y el producto de *b* por *d* es el producto de los otros tres.
¿Cuál es la suma de los cinco números que pensó don Retorcido?

A) 20 **B)** 12 **C)** 19 **D)** 27 **E)** 24

4 Plegando adecuadamente la figura que ves puedes formar el CUBO CUBITO. ¿Cuál es la cara opuesta a C?



A) U **B)** B **C)** I **D)** T
E) O

5 Ardillo quiere comprar avellanas y el avellanero le muestra estas ofertas:
OFERTITA: Una avellana por solo 12 céntimos.
OFERTA: Seis avellanas por 60 céntimos.
OFERTÓN: Once avellanas por 99 céntimos.
Si Ardillo quiere comprar exactamente 580 avellanas, ni una más ni una menos, para sus amigos del pinar, ¿cuál es el mínimo precio que puede pagar?

A) 54,72 € **B)** 52,32 € **C)** 56 € **D)** 56,72 € **E)** 58,12 €

6 Comenúmeros está hambriento y enfadado. ¡Oh, no!, allá se ven ocho números despistados.

40	80	100	101	190	200	260	292

Nos tememos lo peor... ay, ay, ay, ay. Comenúmeros se ha comido a cuatro números y aún tiene tiempo de pensar así: "he tragado ya una buena suma y lo mejor es que aún me queda por comer el doble de lo que ya me he zampado". ¿Cuál es el mayor número que se ha comido el insaciable Comenúmeros?

A) 101 **B)** 200 **C)** 260 **D)** 190 **E)** 292

7 Seis perros y cuatro gatos comen lo mismo que siete perros y dos gatos, que comen lo mismo que…

A) Nueve perros **B)** Cuatro perros y siete gatos **C)** Quince gatos

D) Cinco perros y seis gatos **E)** Seis perros y seis gatos

8 Si un cuarto de 8^{12} es igual a 2^n, el valor de n es:

A) 34 **B)** 10 **C)** 13 **D)** 32 **E)** 12

9 La máxima carga que puede aguantar un globo es una cesta que contiene 60 kilos de harina. En cambio, dos globos como el anterior pueden sostener juntos, como máximo, esa misma cesta con 200 kilos de harina. ¿Sabrías cuántos kilos pesa la cesta?

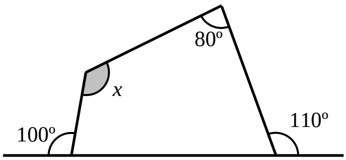
A) 60 **B)** 75 **C)** 80

D) 100 **E)** 140

10 El producto de tres números consecutivos es $2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 13$. ¿Cuál es la suma de los tres números?

A) 75 **B)** 78 **C)** 81 **D)** 85 **E)** 86

11 ¿Cuánto mide el ángulo x de la figura?



A) 100º **B)** 110º **C)** 120º

D) 130º **E)** 140º

12 En mi clase hay cuatro niñas más que niños. Si hubiera el doble de niños y la mitad de niñas, seríamos cuatro estudiantes más. ¿Cuántos somos en total?

A) 29 **B)** 24 **C)** 30 **D)** 32 **E)** 28

13 En esta suma, letras diferentes representan cifras también diferentes. Siguiendo esa representación, ¿qué palabra representa el número 8195?

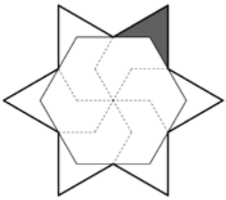
		O	L	A
+		B	O	A
	O	S	O	S

A) OLAS **B)** SOLA **C)** LOBA **D)** LOSA **E)** BOLA

14 ¿Cuál es el menor número natural que multiplicado por 35613,472 da como resultado un entero?

A) 1000 **B)** 50 **C)** 250 **D)** 125 **E)** 25

15 En la figura vemos una estrella de seis puntas con un área de 720 mm^2. ¿Cuál es el área, en mm^2, de la punta de flecha sombreada?



A) 30 **B)** 32 **C)** 36 **D)** 40 **E)** 48

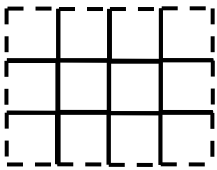
16 Cuando Lino llora, Luca espera pacientemente dos minutos hasta ponerle el chupete. Una vez que se lo ha puesto, Lino deja de llorar durante siete minutos pero después lo tira y vuelve a llorar. Si Luca le puso el chupete por última vez hace cuatro minutos, ¿cuántas veces tendrá que ponérselo en la próxima hora?

A) 6 **B)** 5 **C)** 7 **D)** 11 **E)** 9

17 ¿Qué área, en cm^2, tiene un triángulo de lados 10 cm, 10 cm y 12 cm?

A) 48 **B)** 32 **C)** 40 **D)** 60 **E)** 52

18 En una cuadrícula, un rectángulo de 4 unidades de base y 3 de altura tiene en su interior 17 segmentos de longitud 1 (9 son verticales y 8 son horizontales). ¿Cuántos segmentos tendrá en su interior un rectángulo de 40 unidades de base y 30 de altura?



A) 1060 **B)** 2330 **C)** 2360 **D)** 2400 **E)** 2540

19 En las caras de un dado aparecen estos números: –3, –2, –1, 0, 1, 2. Si lo tiras dos veces y multiplicas los resultados obtenidos, ¿cuál es la probabilidad de que el producto sea negativo?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{11}{36}$ **D)** $\frac{13}{36}$ **E)** $\frac{1}{3}$

20 *¿Qué me pongo?*, *¿qué me pongo?* Inés siempre tan indecisa. Tiene en su armario cuatro pantalones, siete camisetas y tres pares de zapatillas. Ya se ha probado veinticinco combinaciones de todas las posibles. ¿Cuántas combinaciones nuevas podrá probarse como máximo antes de decidirse?

A) 25 **B)** 37 **C)** 43 **D)** 59 **E)** 84

21 ¿Cuántos números del 1 al 1000 cumplen que la suma de sus cifras es igual a 4?

A) 15 **B)** 12 **C)**16 **D)** 20 **E)** 14

22 La diferencia entre el ángulo mayor y el mediano de un triángulo son 23º; y entre el mayor y el pequeño son 31º. ¿Cuánto mide el ángulo mayor?

A) 67º **B)** 69º **C)** 73º **D)** 75º **E)** 78º

23 Don Retorcido ha pedido a cinco alumnos que eligiera su número natural favorito; que lo multiplicase por 38; que luego sumara 37 al producto anterior; y por último, que escribiera en la pizarra el resultado final. Como por arte de magia, don Retorcido dijo "mis poderes matemáticos me aseguran que solo uno de vosotros ha hecho bien las operaciones". Y tú, ¿tienes también poderes? Si estos son los cinco resultados, ¿cuál es el correcto?

A) 471 **B)** 1901 **C)** 496 **D)** 476 **E)** 493

24 Si bailamos las letras de la palabra BARCO pueden formarse bastantes palabras, con o sin sentido. Si ordenamos todas ellas alfabéticamente, ¿en qué puesto aparece la temida COBRA?

A) 64 **B)** 48 **C)** 52 **D)** 55
E) 56

25 Si tres cuartos de a es igual a cinco octavos de b, ¿cuál de estas igualdades es la correcta?

A) $3a = 2b$ **B)** $2a = 3b$ **C)** $5a = 2b$ **D)** $5a = 6b$ **E)** $6a = 5b$

XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 25 de febrero de 2015

NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática

Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid

El Corte Inglés

Grupo ANAYA

Grupo SM

Smartick

1

En el cuadrado que ves, cada uno de los cuatro símbolos tiene un valor diferente, y la suma de los valores de los símbolos de cada fila está a la derecha. ¿Cuál es el valor de ☺ ?

♥	☼	☼	♥	26
☼	☼	☼	☼	24
□	☺	♥	☺	27
□	♥	□	☼	33

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

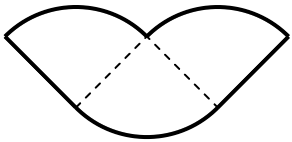
2

En una fábrica de reparación de ordenadores, Diego repara tres ordenadores en el mismo tiempo que Mónica repara dos, pero Kira es más rápida que ambos: mientras Mónica repara uno, ella repara tres. En el tiempo que Diego repara nueve ordenadores, ¿cuántos repararían entre los tres?

A) 30 **B)** 24 **C) 27** **D)** 81 **E)** 33

3

Dividimos un círculo de área 36π en cuatro cuadrantes, de los que cogemos tres y los disponemos como muestra la figura. ¿Cuál es el perímetro de dicha figura?



A) $6\pi + 12$ **B)** $9\pi + 12$ **C)** $9\pi + 18$

D) $27\pi + 12$ **E)** $27\pi + 24$

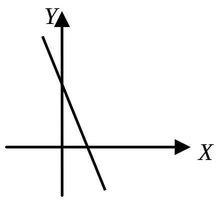
4

Si $x = 2y$ entonces $(x - y)\cdot(2x + y)$ es igual a:

A) $5y^2$ **B)** y^2 **C)** $3y^2$ **D)** $6y^2$ **E)** $4y^2$

5

Una recta corta a los ejes X e Y como se muestra en la figura. Una posible ecuación de la recta es:



A) $y = 2x + 7$ **B)** $y = 4$ **C)** $y = -3x - 5$

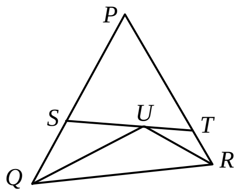
D) $y = 5x - 2$ **E)** $y = -2x + 3$

6

Existen enteros positivos x, de dos cifras, tales que al dividir 109 entre x, el resto es 4. ¿Cuál es la suma de todos estos x?

A) 36 **B)** 56 **C)** 50 **D)** 71 **E)** 35

7 En el dibujo que observas, $PQ = 19$, $QR = 18$ y $PR = 17$. Marcamos los puntos S en PQ, T en PR y U en ST, de forma que $QS = SU$, $UT = TR$. ¿Cuál es el perímetro del triángulo PST?

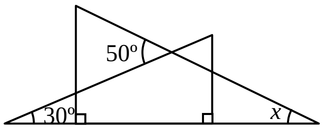


A) 36 **B)** 35 **C)** 37 **D)** 34 **E)** 38

8 Hay un único entero impar entre 400 y 600 divisible entre 5 y entre 11. ¿Cuál es la suma de sus dígitos?

A) 12 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 16 **E)** 18

9 ¿Cuál es el valor de x en la siguiente figura?



A) 10º **B)** 20º **C)** 30º **D)** 40º **E)** 50º

10 Si x e y son enteros positivos tales que $x > y$, $x + xy = 391$, ¿cuál es el valor de $x + y$?

A) 37 **B)** 39 **C)** 41 **D)** 42 **E)** 45

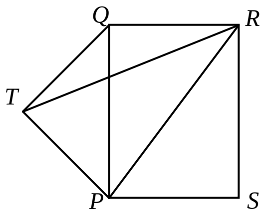
11 Si el punto (p, q) está en la recta $y = \frac{2}{5}x$ y el área del rectángulo que se muestra es 90, ¿cuál es el valor de p?

A) 12 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 15 **E)** 30

12 En una bolsa hay 2 canicas rojas y otras 2 azules y en una segunda bolsa hay 2 canicas rojas, 2 azules y x canicas verdes. Sacamos de cada una de las bolsas dos canicas, sin reemplazamiento, y resulta que la probabilidad de que las dos canicas sean del mismo color es igual en una bolsa que en la otra. ¿Cuál es el valor de x?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

13 En el dibujo puedes observar un rectángulo $PQRS$ y un triángulo rectángulo isósceles PTQ de hipotenusa $PQ = 4$. Si $QR = 3$, el área del triángulo PTR es:



A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

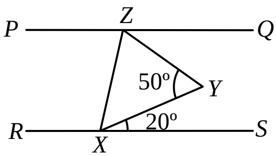
14 Recorriendo el mismo camino, Joaquín hace la primera mitad a 6 km/h y el resto a 12 km/h, mientras que Esteban en el primer tercio camina sólo a 5 km/h pero el resto lo hace a 15 km/h. Si Joaquín tardó x horas en hacer todo el camino y Esteban tardó y horas, ¿cuál es el cociente $\frac{x}{y}$?

A) $\frac{9}{8}$ **B)** $\frac{7}{5}$ **C)** $\frac{15}{16}$ **D)** $\frac{9}{16}$ **E)** $\frac{10}{9}$

15 En el dibujo de la derecha, las rectas PQ y RS son paralelas. ¿Cuál es el valor del ángulo $Q\hat{Z}Y$?

A) 30º **B)** 20º **C)** 40º

D) 50º **E)** 60º



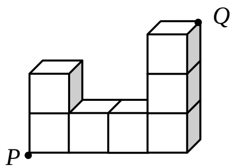
16 Don Retorcido, que aún escribe cartas, se ha gastado 10 € en sellos de 50, 20 y 10 céntimos. Si ha comprado la décima parte de sellos de 20 que de 10, ¿cuántos sellos compró en total?

A) 30 **B)** 44 **C)** 62 **D)** 63 **E)** 66

17 Colocamos siete cubos idénticos de lado 1 como se muestra en la figura. ¿Cuál es la distancia entre los vértices P y Q?

A) $\sqrt{20}$ **B)** $\sqrt{26}$ **C)** $\sqrt{14}$ **D)** $\sqrt{18}$

E) $\sqrt{30}$



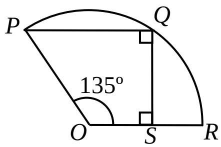
18 Elijo dos números distintos del conjunto {– 3, – 1, 0, 2, 4} y luego los multiplico. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de los números elegidos sea 0?

A) $\frac{1}{10}$ **B)** $\frac{1}{5}$ **C)** $\frac{3}{10}$ **D)** $\frac{2}{5}$ **E)** $\frac{1}{2}$

19 En el dibujo que observas, los puntos P, Q y R están en una circunferencia de centro O y radio 12. Si el ángulo $P\hat{O}R$ es de 135º, ¿cuál es el área del trapecio rectángulo $OPQS$?

A) 216 **B)** 144 **C)** 108 **D)** 112,5

E) 114,6



20 Si x, y, z, representan dígitos diferentes, ninguno cero, en la suma que ves el valor de x es:

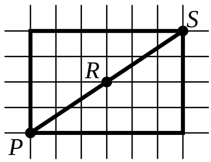
$$\begin{array}{cccc} & x & x & x \\ & y & y & y \\ + & z & z & z \\ \hline z & y & y & x \end{array}$$

A) 1 **B)** 2 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

21 Tres amigas están en un parque. Ali y Bea están juntas y Carolina está a 10 metros. Bea comienza a andar en una cierta dirección hasta que está a 10 m de Ali.
¿Cuál es la probabilidad de que Bea termine más cerca de Carolina que de Ali?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{\pi}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{1}{6}$

22 En la figura se observa una cuadrícula, un rectángulo 6×4 y una de sus diagonales que solo pasa por tres vértices de la cuadrícula: P, R y S. Si el rectángulo tuviera de dimensiones 60×45, ¿por cuántos vértices de la cuadrícula pasaría una diagonal de dicho rectángulo?

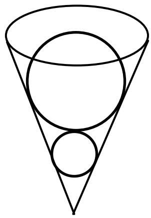


A) 13 **B)** 15 **C)** 16 **D)** 18 **E)** 19

23 Para cada número [$abcd$] de cuatro cifras $(a \neq 0)$, llamamos "suma descendente" de dicho número al número [$abcd$] + [bcd] + [cd] + [d]. Por ejemplo, la suma descendente de 4089 es $4089 + 089 + 89 + 9 = 4276$.
Si la suma descendente de [$abcd$] es 2014, ¿cuál es el valor de $a + b + c + d$?

A) 12 **B)** 15 **C)** 13 **D)** 11 **E)** 10

24 En un cono lleno totalmente de agua introducimos dos esferas tangentes entre sí y tangentes al cono como se muestra en la figura (la mayor toca la base del cono). Si el radio de la mayor es el doble que el de la pequeña y el volumen del agua que aún queda en el cono es 2016π, ¿cuál es el radio de la esfera pequeña?



A) $2\sqrt{2}$ **B)** 6 **C)** $4\sqrt[3]{2}$ **D)** $6\sqrt{2}$ **E) 8**

25 Con las cifras 1, 3, 5, 7 y 9 formamos números de cinco cifras con las siguientes características:
· La cifra de las unidades de millar es mayor que la de las centenas.
· La cifra de las unidades de millar es mayor que la de las decenas de millar.
· La cifra de las decenas es mayor que la de las centenas.
· La cifra de las decenas es mayor que la de las unidades.
¿Cuántos números podemos formar?

A) 12 **B)** 8 **C)** 16 **D)** 19 **E)** 10

XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 25 de febrero de 2015

NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática

Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid

El Corte Inglés

Grupo ANAYA

Grupo SM

Smartick

1 Al hacer unas compras en unas rebajas, Luisa se ahorró 25 euros. Si pagó 250 €, ¿cuál de las siguientes opciones es la más próxima al porcentaje que se ahorró?

A) 8% **B)** 9% **C)** 10% **D)** 11% **E)** 12%

2 En un recinto del zoo solo hay avestruces y cebras. El número de patas que se contaban era 28 más que el doble del número de cabezas. ¿Cuántas cebras había?

A) 4 **B)** 7 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 28

3 Si $x+y+z=1$, $x+y-z=2$, $x-y-z=3$, ¿cuál es el valor de xyz?

A) -2 **B)** $-\frac{1}{2}$ **C)** 0 **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** 2

4 ¿Cuántos enteros positivos verifican que al eliminarles la última cifra el nuevo número es $\frac{1}{14}$ del original?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)**4

5 Empezando por la izquierda, ¿qué digito ocupa el octavo lugar del resultado del producto 7 216 848 248 168 566 432 · 125?

A) 1 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 3

6 Si *a*, *b* y *c* son enteros positivos con $a<b<c$, tales que $ab+ac+bc=abc$, ¿cuál es el valor de $a+b+c$?

A) 1 **B)** 4 **C)** 9 **D)** 11 **E)** No existen tales números

7 ¿Cuál es el menor número primo que tiene dos sietes?

A) 77 **B)** 177 **C)** 277 **D)** 377 **E)** 577

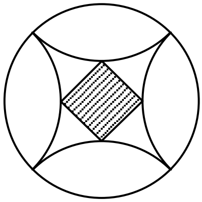
8 Escribimos tres números de dos cifras cada uno, de manera que los seis dígitos que utilizamos son diferentes. ¿Cuál es el mayor valor posible para la suma de estos tres números?

A) 237 **B)** 246 **C)** 255 **D)** 264 **E)** 273

9 ¿Cuál es la suma de las cifras del mayor capicúa de cuatro cifras, divisible entre 15?

A) 18 **B)** 20 **C)** 24 **D)** 30 **E)** 36

10 En la figura se observa un círculo de radio 1 y en su interior cuatro arcos de circunferencia, también de radio 1, que encierran un cuadrado. La figura tiene cuatro ejes de simetría. ¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado?



A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **B)** $2-\sqrt{2}$ **C)** $\frac{1}{\sqrt{3}}$

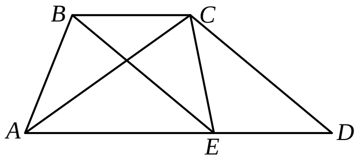
D) $\sqrt{2}-1$ **E)** $\frac{1}{2}$

11 El conjunto de puntos que equidistan de la circunferencia $x^2+y^2=1$ y la recta $y = -3$, viene dado por la gráfica de:

A) $y+2=3x^2$ **B)** $y+2=-3x^2$ **C)** $x^2+y^2-1=(y+3)^2$

D) $x^2+y^2=(y+4)^2$ **E)** Nada de lo anterior

12 Dibujamos un trapecio *ABCD* y un segmento *BE* paralelo al lado *CD* del trapecio. Si llamamos *x* al área del trapecio *ABCE* e *y* al área del triángulo *ACD*, la relación que existe entre *x* e *y* es:



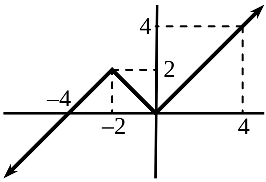
A) $x = y$ **B)** $x > y$ **C)** $x < y$

D) Depende del tipo de trapecio **E)** Faltan datos para poder contestar

13 Sea N el menor entero positivo cuyos dígitos suman 2015. ¿Cuál es el primer dígito de $N+1$?

A) 9 **B)** 7 **C)** 5 **D)** 3 **E)** 1

14 Si $y = f(x)$ es la función representada en la figura, ¿cuántas soluciones tiene la ecuación $f\left[f\left(f(x)\right)\right]=0$?



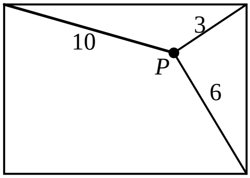
A) 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1

E) 0

15 La suma de 35 enteros es S. Intercambiamos dos dígitos de uno de estos enteros y la nueva suma es T. Entonces $S-T$ es siempre divisible entre:

A) 9 **B)** 2 **C)** 7 **D)** 5 **E)** 11

16 Las distancias de un punto P a tres de los vértices de un rectángulo, como muestra la figura, son: 3, 6 y 10. ¿Cuál es la distancia al cuarto vértice?



A) 13 **B)** $\sqrt{127}$ **C)** 7

D) $\sqrt{109}$ **E)** 15

17 El valor del número b tal que $\log_b 10 + \log_b 10^2 + ... + \log_b 10^{10} = 110$ es:

A) $\sqrt{10}$ **B)** $e + 1$ **C)** 10 **D)** 20 **E)** $10^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{10}}$

18 Si $\sqrt{16+\sqrt{16+\sqrt{16+...}}}$ es el número x, ¿cuál es el valor de x?

A) $2\sqrt{2}$ **B)** 4 **C)** $\frac{1+\sqrt{65}}{2}$ **D)** $\frac{\sqrt{65}-1}{2}$ **E)** $\frac{\sqrt{65}}{2}$

19 Encendemos a la vez dos velas cilíndricas de la misma altura pero de diferente grosor. Una de ellas se consume en 4 horas, la otra en 3 horas. Suponiendo que se consumen a ritmo constante y que la duración es proporcional a la cantidad de cera, ¿qué tiempo ha pasado desde que las encendimos hasta el momento en que la altura de la primera es el doble de la altura de la segunda?

A) 1 h **B)** 1h 12min **C)** 2h **D)** 2h 12min **E)** 2h 24min

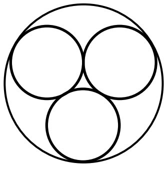
20 Las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo son x e y, mientras que la longitud de la hipotenusa es $x + y - 4$. ¿Cuál es la longitud del radio de la circunferencia inscrita?

A) 1 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 9

21 ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $x^5 + 2x^3 + 8x^2 + 16 = 0$?

A) Cinco **B)** Cuatro **C)** Tres **D)** Dos **E)** Una

22 Tres circunferencias de igual radio, tangentes entre sí, están inscritas en otra circunferencia de radio 1 como muestra la figura. ¿Cuál es el radio de cada una?



A) $2-\sqrt{3}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **D)** $2\sqrt{3}-3$

E) $\frac{1}{2}$

23 El número 3 puede escribirse como suma de dos o más enteros positivos de tres formas diferentes: 2 + 1, 1 + 2, 1 + 1 + 1. ¿De cuántas formas diferentes puede escribirse el número 5?

A) 7 **B)** 9 **C)** 11 **D)** 13 **E)** 15

24 Seis estudiantes de diversos países de Europa comparten piso en un curso del proyecto "Erasmus". Todos ellos hablan solamente dos idiomas: Ángela habla alemán e inglés; Ulrike, alemán y español; Karin, francés y español; Dieter, alemán y francés; Pierre, francés e inglés y Rocío, inglés y español. Si elegimos dos de ellos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que puedan hablar en una lengua que entienda bien cada uno?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{2}{3}$ **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{4}{5}$ **E)** $\frac{5}{6}$

25 Una caja tiene 900 tarjetas cada una numerada con un número desde el 100 hasta el 999. Berta va a extraer de la caja algunas tarjetas y apuntará la suma de los dígitos de cada una. Por ejemplo, si toma las tarjetas 187, 205 y 945 apuntará 16, 7 y 18. ¿Cuántas tarjetas debe tomar como mínimo para poder garantizar que tomará al menos tres de ellas con la misma suma de dígitos?

A) 51 **B)** 52 **C)** 53 **D)** 54 **E)** 55

XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 18 de abril de 2015

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

1 Don Retorcido ha viajado a China y se ha traído de allí una regla pero las unidades no son centímetros sino *cuns*. Para establecer la equivalencia entre *cuns* y centímetros ha puesto mi regla en centímetros junto a la suya en *cuns*…

¿Cuántos *cuns* son un centímetro?

A) 0,3 **B)** 0,6 **C)** 1,5 **D)** 3 **E)** 3,3

2 Cuando Silvia y Jesús bailan el chotis, cada nueve pasos dan una vuelta completa. ¿Qué ángulo giran con cada paso?

A) 5º **B)** 10º **C)** 20º **D)** 40º **E)** 60º

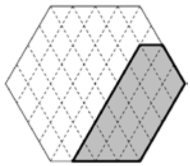
3 El pasado 20 de marzo hubo un eclipse parcial de Sol. Si el eclipse comenzó a las 9:11 y finalizó a las 11:03, ¿cuánto tiempo duró?

A) 1 hora y 8 minutos **B)** 2 horas y 8 minutos **C)** 1 hora y 52 minutos
D) 2 horas y 52 minutos **E)** 3 horas y 12 minutos

4 PILAR escoge al azar una letra de entre las nueve de PRIMAVERA. ¿Cuál es la probabilidad de que la letra elegida esté en su nombre?

A) $\frac{4}{9}$ **B)** $\frac{5}{9}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{1}{2}$

5 Ana ha comprado un terreno en forma de hexágono regular. Por ahora ha puesto un cerco a la parte sombreada para criar gallinas y ha gastado 240 metros de alambre. ¿Cuántos metros más de alambre debe comprar para terminar de bordear el jardín completamente sin quitar nada del cercado actual?



A) 225 **B)** 240 **C)** 300 **D)** 330 **E)** 480

6 Julián y Lucía han decidido ahorrar. Julián se propone ahorrar 30 céntimos cada día y Lucía decide que el primer día ahorrará un céntimo; el segundo ahorrará dos céntimos; el tercero, tres y así, cada día ahorrará un céntimo más que el día anterior. ¿Cuántos días han de pasar para que ambos tengan la misma cantidad de dinero ahorrado?

A) 35 **B)** 103 **C)** 12 **D)** 59 **E)** 300

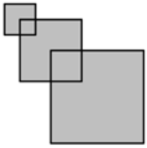
7 En una tienda de animales hay doce hámsters, dieciséis cobayas y ocho chinchillas. Quieren meterlos en jaulas de manera que en cada jaula haya el mismo número de animales y sin mezclar especies. ¿Cuántas jaulas necesitarán como mínimo?

A) 3 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 9 **E)** 15

8 En la cabalgata de Reyes, Ana cogió dos caramelos más que Bea, que cogió siete más que Carlos. Bea cogió cinco caramelos menos que Dani y Dani tres menos que Eva. Si en total cogieron 68 caramelos, la suma de las cifras del número de caramelos que cogió Ana es:

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

9 Rafa tiene tres cuadrados, uno de 2 cm de lado, otro de 4 cm de lado y el tercero de 6 cm de lado. Los ha colocado con los lados paralelos y los vértices de los grandes en los centros de los pequeños, como ves en la figura. ¿Cuál es, en cm^2, el área de la figura que ha formado?



A) 32 **B)** 51 **C)** 27 **D)** 16 **E)** 6

10 Don Retorcido está que trina porque alguien ha desordenado sus números. Ha conseguido encontrar a cinco sospechosos pero estos son muy astutos y deciden que sólo uno de ellos contestará la verdad. ¡¿Quién ha sido el culpable?!, gritó don Retorcido.

☺ Arquímedes dijo: "ha sido Bernoulli."
☺ Bernoulli dijo: "ha sido Cantor."
☺ Cantor dijo: "Bernoulli miente."
☺ Diofanto dijo: "yo no he sido."
☺ Euclides dijo: "yo solo digo que dos más dos son nueve ."

A) Arquímedes **B)** Bernoulli **C)** Cantor **D)** Diofanto **E)** Euclides

11 ¿Qué número se aproxima más al resultado de la multiplicación 2980 x 0,003?

A) 0,09 **B)** 0,89 **C)** 0,9 **D)** 9 **E)** 89

12 Joaquín colocó los números ordenadamente en seis columnas, como ves en la figura. ¿En qué columna colocó el 436?

A	B	C	D	E	F
1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	…	…

A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

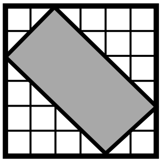
13 Si sumo los 100 primeros números, es decir: 1 + 2 + 3 + 4 +…+ 99 + 100, el resultado es 5050. ¿Cuánto me dará la suma de los 100 primeros números pares, es decir: 2 + 4 + 6 + 8 +…+ 198 + 200?

A) 5050 **B)** 5250 **C)** 5252 **D)** 10 100 **E)** 20 200

14 Javier tiene una gran colección de cuadrados y triángulos. Ha contado los lados de todos ellos y hay 41. ¿Cuál es mínimo número de triángulos que puede tener su colección?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 9

15 ¿Qué fracción del cuadrado está sombreada?

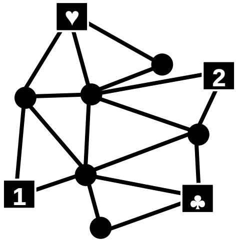


A) $\frac{4}{9}$ **B)** $\frac{5}{9}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{1}{2}$

16 Un cuadrado, un triángulo equilátero y un hexágono regular tienen el mismo perímetro. Si el área del cuadrado es 36 cm^2, ¿cuánto mide, en cm, el lado del hexágono regular?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 6

17 Laura está jugando a poner ♥, ♦ y ♣ en los vértices de sus triángulos de tal manera que cada triángulo tenga los tres símbolos. ¿Qué símbolos deberá poner en los vértices 1 y 2?



A) 1(♥) 2(♣) **B)** 1(♦) 2(♦) **C)** 1(♣) 2(♥)

D) 1(♥) 2(♦) **E)** 1(♦) 2(♥)

18 Al pobre Comenúmeros le sienta mal el 7 así que no puede comer números que contengan al 7 entre sus cifras (como el 37) o que sean múltiplos de 7 (como el 21). Si se ha encontrado una lista con los números del 1 al 100, ¿cuántos números se comerá?

A) 33 **B)** 70 **C)** 30 **D)** 59 **E)** 67

19 Un bombero está en el peldaño central de una escalera. Consigue subir cinco peldaños pero las llamas lo rodean y debe bajar ocho. De nuevo sube cinco peldaños. Si aún le quedan doce peldaños para llegar a la parte superior, ¿cuántos peldaños tiene la escalera?

A) 30 **B)** 15 **C)** 28 **D)** 14 **E)** 29

20 Hemos hecho bolsas de veinte caramelos para repartir en una fiesta de cumpleaños. Antes del reparto nos damos cuenta de que hay treinta niños y no tenemos bolsas suficientes, así que quitamos cuatro caramelos de cada bolsa, hacemos alguna bolsa más y al final cada uno recibe su bolsa, no sobrando ningún caramelo. ¿Cuántas bolsas teníamos al principio?

A) 20 **B)** 22 **C)** 23 **D)** 24 **E)** 25

21 Sofía hizo esta florida cuenta **38 +** ❀ x **(17 –** ❀**)** sustituyendo cada flor por un 2. Santi sustituyó las flores por otro número pero ¡oh casualidad! los dos obtuvieron el mismo resultado. ¿Cuál es la suma de las cifras del número que usó Santi?

A) 3 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** Eso es imposible.

22 Pepa, Pepe y Pipo van juntos al colegio. Todos caminan a la misma velocidad. Pepa, que es la que vive más lejos, sale de casa a las 8:10, Pepe baja al portal a las 8:12 y Pipo a las 8:17 y nunca ninguno espera a los otros. Si la casa de Pipo está a 720 metros del colegio y siempre llegan a las 8:25, ¿qué distancia, en metros, separa las casas de Pepa y Pipo?

A) 630 **B)** 180 **C)** 450 **D)** 360 **E)** 900

23 Una machacona canción dice: *Un pasito pa'lante María, **un** pasito pa'trás. Un pasito pa'lante María, **dos** pasitos pa'trás. Un pasito pa'lante María, **tres** pasitos pa'trás*… Si María cayó exhausta al terminar la estrofa: *Un pasito pa'lante María, **veinte** pasitos pa'trás*, ¿cuántos pasos le separaban del punto en el que comenzó a bailar?

A) 0 **B)** 1 **C)** 19 **D)** 20 **E)** 190

24 He escrito los números del 1 al 6 desperdigados por la pizarra. Como algunos estaban muy juntitos, mi hermana se creyó que había tres números, todos ellos de dos cifras y muy contenta dijo: "Esos tres números suman 102, ¿a que sí?" Si mi hermana nunca se equivoca en las sumas, ¿cuál de estos números no puede ser uno de los tres que sumó?

A) 14 **B)** 34 **C)** 53 **D)** 52 **E)** 16

25 José María puso a sus nietos en fila de mayor a menor y les repartió caramelos. Al mayor le dio unos cuantos, al segundo el doble que al mayor, al tercero le dio el doble que al segundo y así hasta llegar al más pequeño. Si en total repartió 155 caramelos, ¿cuántos nietos tiene José María?

A) 3 **B)** 4 **C)** **5** **D)** 6 **E)** No se puede saber

concurso de primavera MATEMÁTICAS

XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 18 de abril de 2015

NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática

Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid

El Corte Inglés

Grupo ANAYA

Grupo SM

Smartick

1 Al conde Eric le gusta firmar con una suma en la que letras diferentes representan cifras diferentes. Si la **D** vale 5, ¿cuánto vale la letra **I**?

$$\begin{array}{rcccc} & & C & O & N \\ + & & & D & E \\ \hline & E & R & I & C \end{array}$$

A) 4 **B)** 5 **C)** 7 **D)** 3 **E)** 2

2 La cuarta parte del doble de la quinta parte del triple de 600 es...

A) 300 **B)** 180 **C)** 480 **D)** 160 **E)** 200

3 Merche y María forman la inicial de sus nombres con palillos y ya han construido las tres primeras. Merche dice: "María, si siguiéramos así, ¿cuántos palillos habrá en la **M** número 100?"

A) 402 **B)** 400 **C)** 420 **D)** 414 **E)** 600

4 Si en un cubo de dos decímetros de arista he conseguido meter 7 kilos de arroz sin dejar un solo hueco, ¿cuántos kilos de arroz cabrán en otro cubo, todavía mayor, que tenga arista doble que el anterior?

A) 32 **B)** 28 **C)** 40 **D)** 56 **E)** 14

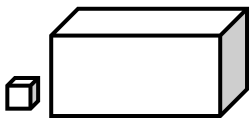
5 Francisco pensó en el número 12, sumó sus cifras ($1 + 2 = 3$) y multiplicó el resultado por 4 ($3 \cdot 4 = 12$) y asombrado dijo: *¡Ahí va! Si he obtenido el número que había pensado.* ¿Cuántos números de dos cifras cumplen que si sumo sus cifras y multiplico el resultado por cuatro obtengo el número de partida?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

6 En el gran banquete se han servido el doble de platos de pollo que de pavo. Dos tercios de los platos de pollo eran de muslos y el resto de pechugas. En cambio, de los platos de pavo solo un cuarto fueron de muslos y el resto de pechugas. ¿Qué fracción de los platos de pechuga eran de pavo?

A) $\frac{4}{9}$ **B)** $\frac{9}{17}$ **C)** $\frac{8}{9}$ **D)** $\frac{7}{12}$ **E)** $\frac{5}{12}$

7 Con cubitos idénticos he construido un gran bloque en forma de ladrillo. Luego decido quitar los 65 cubitos exteriores de una de las caras del bloque y luego quito los 30 cubitos exteriores de otra de las caras. ¿Cuántos cubitos quedan ahora en mi bloque?

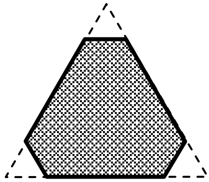


A) 360 **B)** 230 **C)** 295 **D)** 724 **E)** 425

8 Si $4^{10a} = 8^{6b}$, entonces:

A) $10a = 9b$ **B)** $5a = 3b$ **C)** $5a = 12b$ **D)** $10a = 12b$ **E)** $10a = 3b$

9 Adrián ha dibujado su bandera en una gran tela: un triángulo equilátero de lado 2015 mm del que se recorta en cada vértice un triangulito, también equilátero, de lado 5 mm. ¿Cuánto mide, en mm, el perímetro de la bandera?



A) 6045 **B)** 6015 **C)** 6000 **D)** 6030

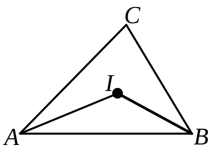
E) 6010

10 Con tres vasos y tres piedrecitas juego a formar números. Aquí tienes dos ejemplos para que lo entiendas:

¿Cuántos números distintos puedo conseguir si siempre utilizo las tres piedras?

A) 8 **B)** 6 **C)** 9 **D)** 12 **E)** 10

11 El punto *I*, incentro, es el punto en el que se cortan las bisectrices interiores del triángulo *ABC*. Si el ángulo $A\hat{C}B = 76º$, el ángulo $A\hat{I}B$ mide:



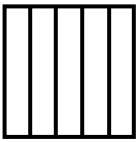
A) 128º **B)** 114º **C)** 118º **D)** 116º

E) 104º

12 Por allá viene Don Retorcido hablando solo y parece emocionado, shhh, a ver si podemos escucharle: "¡biennn!, acabo de inventarme otro problema para el Concurso de Primavera, je je, creo que van a picar como sardinillas...: sumando UNO y después DOS, voy formando esta serie: 3 4 6 7 9 10 12..., ¿cuál de los siguientes números no aparecerá en ella? Je je je."

A) 2013 **B)** 2014 **C)** 2015 **D)** 2016 **E)** 2017

13 Dividimos un cuadrado en cinco rectángulos iguales, cada uno de ellos de perímetro 72 cm. ¿Cuántos centímetros mide el lado del cuadrado?



A) 36 **B)** 30 **C)** 26 **D)** 32 **E)** 38

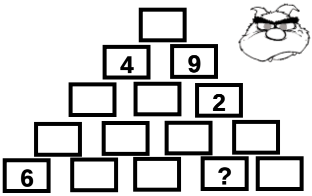
14 Dos impresoras tienen que imprimir 440 carteles. En un minuto, la rápida imprime siete carteles y la lenta solo seis. Comienzan juntas a funcionar y al cabo de un rato la rápida se estropea por lo que la lenta deberá seguir trabajando 17 minutos más. ¿Cuántos carteles imprimió la rápida?

A) 217 **B)** 168 **C)** 210 **D)** 175 **E)** 182

15 En el cociente de la división 10 000 : 7 la cifra de las unidades es 8. ¿Cuál es la cifra de las unidades en el cociente de 1000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 : 7?

A) 1 **B)** 4 **C)** 2 **D)** 8 **E)** 7

16 En el muro de mi colegio estaban colocados los números del 1 al 15 en una cascada triangular de tal manera que cada número es resta de los dos sobre los que se apoya. Pero vino Comenúmeros y se comió todos menos cuatro. ¿Qué número ocupaba el lugar de la interrogación?



A) 1 **B)** 10 **C)** 3
D) 13 **E)** 15

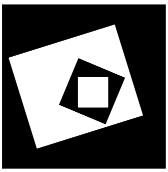
17 ¿Cuántos números capicúas de cinco cifras hay con la condición de que cuatro de ellas sean iguales y la otra diferente?

A) 81 **B)** 90 **C)** 91 **D)** 80 **E)** 100

18 En un determinado año hay exactamente cuatro viernes y cuatro lunes en el mes de enero. ¿Qué día de la semana es el día 20 de dicho mes?

A) Domingo **B)** Sábado **C)** Viernes **D)** Lunes **E)** Nada de lo anterior

19 Teresita ha diseñado esta bonita figura a partir de cuadrados de lados 2, 3, 7 y 10 cm. ¿Qué porcentaje del cuadrado mayor está coloreado de negro?



A) 49 % **B)** 50 % **C)** 51 % **D)** 56 % **E)** 62 %

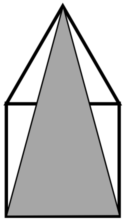
20 Dos canguros gemelos se disponen a realizar una prueba. Saltarín se coloca en la salida (donde deja marcada ya su primera huella) y empieza a dar saltos de 54 cm hasta que llega a la meta. Después, Brincador se sitúa exactamente sobre la primera huella de Saltarín y comienza a dar saltos de 72 cm hasta llegar a la meta. Los jueces han contabilizado un total de 73 huellas desde la salida hasta la meta. ¿Qué longitud, en cm, tenía la prueba? Observa que las huellas comunes, como las de la salida, solo se cuentan una vez.

A) 2376 **B)** 2400 **C)** 2592 **D)** 2600 **E)** 2808

21 En el último examen, el niño Jacinto empezó fatal, acertando únicamente 12 de las 30 primeras preguntas pero luego contestó correctamente dos tercios de las restantes. Si su nota final fue un 6 sobre 10, ¿cuántas preguntas tenía el examen?

A) 120 **B)** 100 **C)** 90 **D)** 180 **E)** 23

22 Usando algunos vértices de un cuadrado y de un triángulo equilátero hemos formado el triángulo sombreado. ¿Cuánto mide el ángulo inferior derecho del triángulo gris?



A) 79º **B)** 72º **C)** 65º **D)** 75º **E)** 80º

23 En una bolsa metes los veinte primeros números primos y luego sacas dos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que su suma sea impar?

A) $\frac{19}{20}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{20}{19}$ **D)** 0 **E)** $\frac{1}{10}$

24 Si aumentamos la base de un rectángulo en un 20 % y disminuimos su altura en un 20 %, ¿qué le ocurre al área de dicho rectángulo?

A) Disminuye en un 10 % **B)** Aumenta en un 6 % **C)** No varía
D) Disminuye en un 4 % **E)** Aumenta en un 10 %

25 Tengo tres recipientes **A**, **B** y **C**, todos ellos llenos de agua hasta su mitad. Primero vierto el agua de **C** en **B**, y **B** se llena hasta sus tres cuartos; a continuación vierto el contenido que ahora tiene **B** en **A** y resulta que **A** se llena hasta sus cuatro quintos. Si la capacidad de **C** son ocho litros, ¿cuántos litros caben en **A**?

A) 28 **B)** 30 **C)** 36 **D)** 40 **E)** 20

XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 18 de abril de 2015

NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

Cada respuesta ***correcta*** *te aportará*	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes ***en blanco***	***1 puntos***
Cada respuesta ***errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática

Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid

El Corte Inglés

Grupo ANAYA

Grupo SM

Smartick

1 En un bombo de lotería quedan cuatro bolas. Dos con número par y dos con número impar. Si damos vueltas al bombo y extraemos dos bolas, ¿cuál es la probabilidad de que la suma sea impar?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{3}{4}$

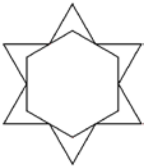
2 $\frac{(n+3)!}{n!} = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 13$. (Recuerda que, por ejemplo, 6! = 6·5·4·3·2·1) El factor primo más grande de *n* es:

A) 5 **B)** 7 **C)** 11 **D)** 13 **E)** 17

3 Si $\begin{cases} x+y=76 \\ x-y=44 \\ u+v=y \\ u \cdot v = x \end{cases}$, el valor de u^2+v^2 es:

A) 89 **B)** 136 **C)** 145 **D)** 169 **E)** 170

4 El hexágono regular inscrito en la estrella tiene un área de 12 cm^2. El área, en cm^2, de la estrella es:

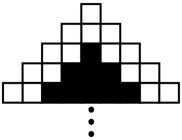


A) 15 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 21 **E)** 24

5 El producto de cuatro números consecutivos es $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17$. ¿Cuál es la suma de sus terminaciones?

A) 10 **B)** 14 **C)** 18 **D)** 21 **E)** 24

6 Cleopatra dibuja pirámides empezando por la cima. Hoy se le ha antojado dibujar una de 32 pisos y en la figura ya lleva cinco, coloreando de la forma que ves a partir del tercero. Cuando haya terminado su gran pirámide, ¿cuál será la diferencia entre cuadraditos negros y blancos empleados?



A) 850 **B)** 654 **C)** 776 **D)** 128 **E)** 668

7 Un polinomio $P(x)$ de grado 4 y coeficiente principal 1, tiene las raíces, 3, 4, 5 y 6. Entonces la suma $P(2) + P(7)$ es igual a:

A) 48 **B)** 44 **C)** 36 **D)** 32 **E)** 24

8 La suma de todos los productos de dos factores distintos de los números del 1 al 5 es 85. ¿Cuál es la suma de todos los productos de dos en dos de los números del 1 al 6?

A) 168 **B)** 169 **C)** 172 **D)** 173 **E)** 175

9 El área de un hexágono regular en cm^2, viene dada por el mismo número que su perímetro en cm. ¿Cuántos centímetros mide su lado?

A) $\frac{3\sqrt{3}}{10}$ **B)** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ **C)** $\frac{\sqrt{3}}{6}$ **D)** $2\sqrt{3}$ **E)** $\sqrt{3}$

10 Un comerciante desea etiquetar un producto para que al hacer un descuento del 20 % obtenga un beneficio del 25 %. Si el producto le costó 200 €, ¿qué precio debe poner en la etiqueta?

A) 280,50 € **B)** 350 € **C)** 300 € **D)** 312,50 € **E)** 330,50 €

11 En una progresión aritmética de nueve términos, el quinto es 4. ¿Cuánto suman los nueve términos?

A) 36 **B)** 37 **C)** 38 **D)** 39 **E)** 40

12 Cuatro cigüeñas deciden que cada una emigrará a un punto cardinal diferente:
Ajá dice: "Ejé se irá al Norte y Ujú no irá al Este”
Ejé dice: “Yo no iré al Norte y Ojó irá al Oeste”
Ojó afirma: “Ejé irá al Este y Ujú al Oeste”
Ujú, por último, declara: “Ajá se va al Sur y Ojó al Este”
Cada una de las cigüeñas dice una verdad y una mentira. ¿A dónde emigrarán Ajá y Ejé?

A) Ajá (Sur), Ejé (Oeste) **B)** Ajá (Norte), Ejé (Oeste) **C)** Ajá (Este), Ejé (Norte)
D) Ajá (Norte), Ejé (Sur) **E)** Ajá (Sur), Ejé (Este)

13 Alejandra, Celia y Hugo tienen algunas canicas. Hugo tiene el triple de canicas que Celia y Celia el doble de canicas que Alejandra. Hugo decide dar alguna de sus canicas a Celia y otras a Alejandra hasta que los tres tengan el mismo número de canicas. ¿Qué fracción de sus canicas le dio Hugo a Celia?

A) $\frac{1}{12}$ **B)** $\frac{1}{6}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** $\frac{1}{2}$

14 Dos cilindros rectos, A y B, tienen el mismo volumen. El radio de la base del B es el 10 % más grande que el de A. ¿Cuál es la relación entre las alturas de ambos cilindros?

A) La altura de B es el 10 % menos que la de A
B) La altura de A es el 10 % más que la de B
C) La altura de B es el 21 % menos que la de A
D) La altura de A es el 21 % más que la de B
E) La altura de B es el 80 % de la de A

15 Los puntos $\left(\sqrt{7},\, a\right)$ y $\left(\sqrt{7},\, b\right)$ son puntos distintos de la gráfica de $y^2 + x^4 = 2x^2y + 1$. ¿Cuál es el valor de $|a-b|$?

A) 1 **B)** $\frac{7}{2}$ **C)** 2 **D)** $\sqrt{1+7}$ **E)** $1+\sqrt{7}$

16 El área de un rectángulo, de dimensiones enteras, es A cm^2 y su perímetro P cm. ¿Cuál de los siguientes números no puede ser $A + P$?

A) 100 **B)** 102 **C)** 104 **D)** 106 **E)** 108

17 Considera el conjunto de todas las fracciones $\frac{x}{y}$ siendo x e y enteros positivos primos entre sí. ¿Cuántas de estas fracciones verifican que si aumentamos en una unidad tanto el numerador como el denominador, el valor de la fracción crece en un 10 %?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** Infinitas

18 Cada uno de los siete días de la semana, Isa hace exactamente un deporte. Corre tres días pero nunca dos días consecutivos. Los lunes juega a baloncesto y los miércoles a voley. También hace natación y juega al tenis pero nunca juega al tenis el día siguiente de correr o nadar. ¿Qué día de la semana hace natación?

A) Domingo **B)** Martes **C)** Miércoles **D)** Viernes **E)** Sábado

19 Si mediante $a \lozenge b$ representamos la operación $a-\frac{1}{b}$, ¿cuál es el valor de $[(1 \lozenge 2) \lozenge 3] - [1 \lozenge (2 \lozenge 3)]$?

A) $-\frac{7}{30}$ **B)** $-\frac{1}{6}$ **C)** 0 **D)** $\frac{1}{6}$ **E)** $\frac{7}{30}$

20 La recta $12x + 5y = 60$ forma un triángulo con los ejes de coordenadas. ¿Cuál es la suma de las alturas de ese triángulo?

A) 20 **B)** $\frac{360}{17}$ **C)** $\frac{107}{5}$ **D)** $\frac{43}{2}$ **E)** $\frac{281}{13}$

21 Una lista de 5 enteros positivos verifica las siguientes propiedades:
- El único número de la lista que aparece más de una vez es el 8.
- La mediana es 9.
- La media es 10.

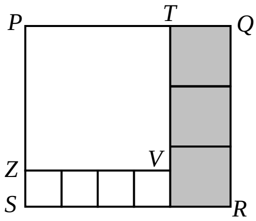
¿Cuál es el mayor entero que puede aparecer en dicha lista?

A) 15 **B)** 16 **C)** 17 **D)** 24 **E)** 25

22 ¿Cuántos enteros n con $5000 \leq n \leq 6000$ verifican que el producto de sus cifras es cero?

A) 332 **B)** 270 **C)** 301 **D)** 272 **E)** 299

23 Dividimos el rectángulo *PQRS* en ocho cuadrados como muestra la figura. El lado de cada cuadrado sombreado es 10. ¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado grande *PTVZ*?



A) 18 **B)** 24 **C)** 16 **D)** 23 **E)** 25

24 Esteban y María han heredado cada uno una parcela. El cociente entre las áreas de la parcela de Esteban y la de María es $\frac{3}{2}$. Siembran maíz y trigo en cada una de las parcelas, siendo $\frac{7}{3}$ el cociente de la superficie dedicada al maíz y al trigo en el total de las dos parcelas. En la parcela de Esteban, dicho cociente es $\frac{4}{1}$. ¿Cuál es la relación entre la superficie dedicada al maíz y la dedicada al trigo en la parcela de María?

A) $\frac{11}{9}$ **B)** $\frac{2}{3}$ **C)** $\frac{3}{2}$ **D)** $\frac{3}{7}$ **E)** $\frac{1}{4}$

$\boxed{\textbf{25}}$ Si a, b y c son tres números que verifican: $a + b = 3$, $ac + b = 18$, $bc + a = 6$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones verifica el número c?

A) Es suma de dos primos diferentes

B) Es un primo menor que 3

C) Es un número múltiplo de 6.

D) Es múltiplo de 11

E) Es 3

XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 18 de abril de 2015

NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

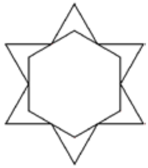
1 En un bombo de lotería quedan $2n$ bolas, la mitad pares y la mitad impares. Si damos vueltas al bombo y extraemos dos bolas, ¿cuál es la probabilidad de que la suma sea impar?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{n}{2n-1}$ **C)** $\frac{n}{2n+1}$ **D)** $\frac{n-1}{2n-1}$ **E)** $\frac{n-1}{2n}$

2 ¿Cuál es el factorial más pequeño que es múltiplo de 3^{29} ?

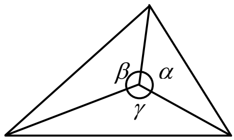
A) 50! **B)** 54! **C)** 58! **D)** 60! **E)** 63!

3 Si el lado de la estrella mide 6, ¿cuál es el perímetro del hexágono regular inscrito de la figura?



A) $24\sqrt{3}$ **B)** 48 **C)** $36\sqrt{2}$ **D)** $27\sqrt{3}$ **E)** $18\sqrt{6}$

4 Los ángulos de un triángulo miden, 42º, 58º y 80º. El incentro del triángulo forma con los vértices los ángulos, α, β y γ. La mayor diferencia entre dos de estos ángulos es:



A) 16º **B)** 19º **C)** 18º **D)** 8º **E)** 9º

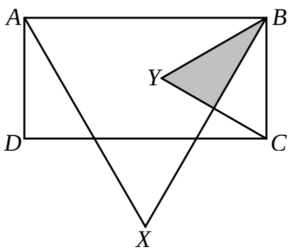
5 La suma de todos los productos de dos factores diferentes de los números del 1 al 6 es 175. ¿Cuál es la suma de los productos de dos en dos de los números del 1 al 7?

A) 343 **B)** 336 **C)** 329 **D)** 325 **E)** 322

6 ¿Cuál es el primer natural, n, que verifica que: $\log 1 + \log 2 + \log 3 + ... + \log n > 10$?

A) 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 15

7 En el rectángulo $ABCD$ de la figura, $AB = 2$ y $BC = 1$. Si tanto ABX como BCY son triángulos equiláteros, ¿cuál es el área de la zona sombreada?



A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{\sqrt{3}}{8}$ **C)** $\frac{3\sqrt{5}}{10}$ **D)** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **E)** $\frac{\sqrt{5}}{8}$

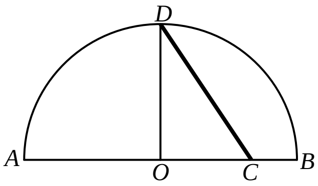
8 En *Numerolandia* hay exactamente 9 ciudades cuyos nombres son: Uno, Dos, Tres,… y Nueve. El presidente del país decide construir carreteras entre las ciudades de la siguiente forma: dos ciudades distintas tienen una carretera directa que las une, si y sólo si, con sus nombres se puede formar un número de dos cifras múltiplo de 3. (Así por ejemplo, Dos y Uno están unidas puesto que 21 ó 12 es múltiplo de 3, pero en cambio Seis y Cuatro no, pues ni 64 ni 46 son múltiplos de 3). ¿Cuántas carreteras tiene que construir?

A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

9 En una caja hay dos bolas rojas, dos verdes y dos amarillas, todas de igual tamaño. Alicia coge dos bolas de la caja, luego Bea coge otras dos de las restantes y finalmente Carlos coge las dos últimas. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas que coge Carlos sean del mismo color?

A) $\frac{1}{10}$ **B)** $\frac{1}{6}$ **C)** $\frac{1}{5}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** $\frac{1}{2}$

10 En la figura adjunta, *O* es el centro de la semicircunferencia y *OD* es perpendicular al diámetro *AB*.
Si $AC = a$ y $CB = b$, ¿cuánto vale *DC*?



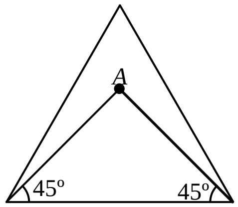
A) $\frac{a+b}{2}$ **B)** $\frac{2ab}{a+b}$

C) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ **D)** $\sqrt{\frac{2a^2+b^2}{2}}$ **E)** $\frac{a^2}{b}$

11 Si el 50 % de *P* es el 20 % de *Q* , ¿qué porcentaje de *Q* representa *P*?

A) 60 % **B**) 50 % **C**) 40 % **D**) 20 % **E**) 30 %

12 Joaquín tiene un terreno con forma de triángulo equilátero de 1 km de lado como el de la figura. Desea construir una casa en el punto *A* y caminos perpendiculares a cada lado desde dicho punto. ¿Cuál es, en km, la longitud total de los tres caminos?



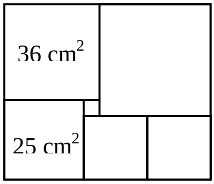
A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **B)** 0,8 **C)** $0{,}45\sqrt{5}$

D) 0,85 **E)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

13 De la lista formada por {–1, –2, –3, –4, –5} elegimos cuatro números diferentes: a, b, c y d. ¿Cuál es el mayor valor posible para la expresión $a^b + c^d$?

A) $\frac{5}{4}$ **B)** $\frac{7}{8}$ **C)** $\frac{31}{32}$ **D)** $\frac{10}{9}$ **E)** $\frac{26}{25}$

14 Dividimos un rectángulo en seis cuadrados como se muestra en la figura. En ella se muestran las áreas de dos de ellos. ¿Cuál es, en cm, el perímetro de dicho rectángulo?



A) 50 **B)** 44 **C)** 46 **D)** 52 **E)** 48

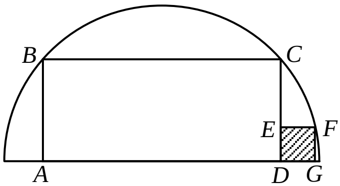
15 En el triángulo isósceles ABC con $AB = AC = x + 1$ y $BC = 2x – 2$, en donde $x > 1$, su área viene dada por la expresión:

A) $(x-1)\sqrt{2x^2+2}$ **B)** $2(x-1)\,4$ **C)** $\frac{1}{2}(x+1)^2$ **D)** $(x+1)(x-1)$ **E)** $2(x-1)\sqrt{x}$

16 ¿Cuál es el área del triángulo determinado por las rectas $y = -2x + 8$, $y = \frac{1}{2}x - 2$, $x + 2 = 0$?

A) 15 **B)** 27 **C)** 30 **D)** 36 **E)** 45

17 La figura adjunta muestra un rectángulo $ABCD$ inscrito en una semicircunferencia y su diámetro. Las dimensiones del rectángulo son $AB = 12$ y $BC = 28$. Se ha construido un cuadrado $DEFG$ como ves en la figura. ¿Cuál de los siguientes números es el al área del cuadrado $DEFG$?



A) 12 **B)** 13 **C)** 14 **D)** 15 **E)** 16

18 La progresión aritmética $\{a, a + d, a + 2d, a + 3d,\ldots, a + (n – 1)d\}$ de n términos verifica las siguientes propiedades:

- La suma de los términos: primero, tercero, quinto y así sucesivamente hasta llegar al último de la progresión original, es 320.
- La suma de los términos: primero, cuarto, séptimo, décimo y así sucesivamente hasta el último de la progresión original, es 224.

¿Cuál es la suma de todos los términos de la progresión?

A) 656 **B)** 640 **C)** 608 **D)** 704 **E)** 672

19 Los puntos de corte de las parábolas $y = ax^2 - 2$ e $y = 4 - bx^2$ ($a > 0$, $b > 0$) con los ejes de coordenadas son los vértices de un cuadrilátero de área 12. ¿Cuál es el valor de $a + b$?

A) 1 **B)** 1,5 **C)** 2 **D)** 2,5 **E)** 3

20 Si $\dfrac{1}{\log_2 a} + \dfrac{1}{\log_3 a} + \dfrac{1}{\log_4 a} = 1$, ¿cuál es el valor de a?

A) 9 **B)** 12 **C)** 18 **D)** 24 **E)** 36

21 Los ceros del polinomio $p(x) = x^2 - ax + 2a$ son números enteros. ¿Cuál es la suma de todos los valores posibles de a?

A) 7 **B)** 8 **C)** 16 **D)** 17 **E)** 18

22 En una moneda trucada la probabilidad de obtener cara al ser lanzada es de $\dfrac{1}{4}$. Cuando la lanzamos n veces resulta que tiene la misma probabilidad de obtener dos caras que de obtener tres caras. ¿Cuál es el valor de n?

A) 5 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 13

23 En una circunferencia inscribimos un cuadrilátero $ABCD$ en el que $B\hat{A}C = 70^\circ$, $A\hat{D}B = 40^\circ$, $AD = 4$ y $BC = 6$. ¿Cuál es el valor de AC?

A) $3+\sqrt{5}$ **B)** 6 **C)** $\dfrac{9}{2}\sqrt{2}$ **D)** $8-\sqrt{2}$ **E)** 7

24 El centro de un círculo de radio 2 es a la vez vértice de un triángulo equilátero de lado 4. ¿Cuál es la diferencia entre el área de la región interior al círculo pero exterior al triángulo y el área de la región interior al triángulo pero exterior al círculo?

A) $8-\pi$ **B)** $\pi+2$ **C)** $2\pi-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **D)** $4\left(\pi-\sqrt{3}\right)$ **E)** $2\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

25 Para cada número compuesto n definimos $r(n)$ como la suma de los factores en la descomposición en factores primos de n. Por ejemplo, $r(50) = 12$ puesto que $50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$ y $2 + 5 + 5 = 12$. ¿Cuál es el recorrido de la función $r(n)$?
Nota: El recorrido de $r = \{r(n)$, con n número compuesto$\}$

A) Conjunto de enteros positivos **B)** Conjunto de los números compuestos

C) Conjunto de los pares mayores que 3 **D)** Conjunto de los enteros mayores que 3

E) Conjunto de los enteros mayores que 4.

XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (1ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**D**	1	**D**	1	**A**	1	**B**
2	**A**	2	**B**	2	**E**	2	**D**
3	**C**	3	**E**	3	**B**	3	**D**
4	**C**	4	**E**	4	**A**	4	**C**
5	**B**	5	**B**	5	**E**	5	**E**
6	**B**	6	**B**	6	**D**	6	**D**
7	**D**	7	**D**	7	**A**	7	**C**
8	**D**	8	**A**	8	**E**	8	**C**
9	**E**	9	**C**	9	**B**	9	**C**
10	**A**	10	**C**	10	**B**	10	**B**
11	**A**	11	**D**	11	**D**	11	**D**
12	**C**	12	**E**	12	**B**	12	**A**
13	**E**	13	**E**	13	**C**	13	**A**
14	**D**	14	**D**	14	**A**	14	**A**
15	**D**	15	**D**	15	**A**	15	**A**
16	**C**	16	**C**	16	**D**	16	**B**
17	**A**	17	**A**	17	**B**	17	**A**
18	**E**	18	**B**	18	**D**	18	**C**
19	**D**	19	**E**	19	**C**	19	**E**
20	**D**	20	**D**	20	**D**	20	**B**
21	**E**	21	**A**	21	**B**	21	**E**
22	**C**	22	**E**	22	**C**	22	**D**
23	**B**	23	**E**	23	**C**	23	**E**
24	**E**	24	**A**	24	**B**	24	**D**
25	**B**	25	**E**	25	**C**	25	**C**

XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (2ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**A**	1	**E**	1	**D**	1	**B**
2	**D**	2	**B**	2	**A**	2	**E**
3	**C**	3	**A**	3	**B**	3	**A**
4	**D**	4	**D**	4	**B**	4	**B**
5	**A**	5	**C**	5	**C**	5	**E**
6	**D**	6	**B**	6	**C**	6	**D**
7	**D**	7	**A**	7	**A**	7	**B**
8	**C**	8	**A**	8	**E**	8	**E**
9	**B**	9	**D**	9	**B**	9	**C**
10	**D**	10	**E**	10	**D**	10	**C**
11	**D**	11	**A**	11	**A**	11	**C**
12	**D**	12	**C**	12	**D**	12	**E**
13	**D**	13	**B**	13	**B**	13	**D**
14	**D**	14	**E**	14	**D**	14	**E**
15	**A**	15	**C**	15	**C**	15	**E**
16	**D**	16	**C**	16	**B**	16	**E**
17	**C**	17	**A**	17	**B**	17	**E**
18	**B**	18	**A**	18	**E**	18	**C**
19	**E**	19	**D**	19	**A**	19	**B**
20	**D**	20	**C**	20	**E**	20	**D**
21	**C**	21	**A**	21	**A**	21	**C**
22	**A**	22	**D**	22	**D**	22	**D**
23	**E**	23	**E**	23	**B**	23	**B**
24	**C**	24	**D**	24	**A**	24	**D**
25	**C**	25	**D**	25	**A**	25	**D**

XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel I

1. (D) Calculamos el resultado de las operaciones y los comparamos.

A) $2 \times 0 + 1 + 5 = \mathbf{6}$

B) $2 + 0 + 1 \times 5 = \mathbf{7}$

C) $2 + 0 \times (1 + 5) = \mathbf{2}$

D) $(2 - 0) \times (1 + 5) = \mathbf{12}$

E) $2 + 0 - 1 + 5 = \mathbf{6}$

El resultado mayor es el que corresponde a la operación de la letra D.

2. (A) Sumamos los pesos en la misma unidad de medida:

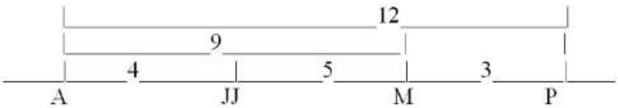
15,4 kg + 3,35 kg + 0,85 kg = 19,6 kg

19,6 kg = 196 hg

El pobre burrito soporta 196 hg.

3. (C) La diferencia de edad entre Alfredo y Merche es de: 4 + 5 = 9 años. Como la diferencia de edad entre Alfredo y Pilar es de 12 años, la diferencia de edad entre Merche y Pilar es: 12 – 9 = 3 años.

También, el resultado se puede obtener fácilmente representando en una recta los nombres ordenados de mayor a menor edad y señalando en cada tramo las diferencias de edad.



4. (C) Kikirikí pone $\frac{79}{3} \times 12 = 79 \times 4 = 316$ huevos al año

Kokorokó pone: $\frac{55}{3} \times 12 = 55 \times 4 = 330$ huevos al año

Entre las dos gallinas ponen: 316 + 330 = 646 huevos al año.

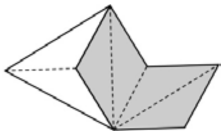
5. (B) El ángulo recto mide 90º. 90º – 7º = 83º. El ángulo dibujado por Luis medía 83º.

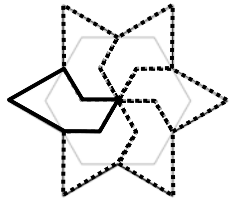
6. (B) Para hallar el número que ha pensado Francisco, resolvemos el problema empezando por el final y realizando las operaciones de forma inversa.

64 + 8 = 72; 72 : 4 = 18; 18 – 3 = 15.

El número que había pensado Francisco es 15. La suma de sus cifras es 6.

7. (D) Podemos dividir la estrella en 6 piezas iguales, tal y como se muestra en la figura. La parte sombreada tiene un área de 24 : 6 = 4 cm^2 y, en consecuencia, cada uno de los 4 triangulitos medirá 1 cm^2. Dado que la punta de la estrella consta de dos de esos triangulitos, el área de la figura es de 4 + 2 = 6 cm^2. Por tanto, el área de la estrella será de $6 \times 6 = 36$ cm^2.





8. (D) Las dos menos veinte, (1:40) más tres cuartos de hora (0:45) son las 2:15 h
1:40 + 0:45 = 1:85 = 2:25 h de la tarde que son las 14:25 h.
Esteban volverá a casa a las 14:25 h.

9. (E) Calculamos el mínimo común múltiplo de 2, 3 y 4 que es 12.
Carmen da de comer a los tres gatitos cada 12 horas.

10.(A) Primero, calculamos la longitud de la cuerda multiplicando el perímetro de un cuadrado por 36, y a continuación, dividimos la cantidad obtenida entre el perímetro del triángulo equilátero.
Longitud de la cuerda: $(4 \times 2) \times 36 = 288$ cm.
Perímetro del triángulo: $3 \times 3 = 9$ cm.
Número de triángulos que puede hacer: 288 : 9 = 32 triángulos.

11.(A) Los 3 bolis (*b*) y los dos cuadernos (*c*) valen: 20 – 12,50 = 7,50 €
Si llamamos *b* al precio de un boli y *c* al precio de un cuaderno, $3b + 2c = 7{,}50$
1 cuaderno cuesta 1 euro más que un boli. $c = 1 + b$, luego 2 cuadernos cuestan 2 euros más que 2 bolis. $2c = 2 + 2b$.
Sustituimos en $3b + 2c = 7{,}50$ y obtenemos: $3b + (2 + 2b) = 7{,}50$.
Eso significa que 5 bolis cuestan: (7,50 – 2) = 5,50 €.
Un boli cuesta 5,50 : 5 = 1,10 €.

12.(C) Primero, buscamos las cifras que ha comido el Comenúmeros en la multiplicación mediante tanteos.
Después, sumamos las cifras:
3 + 7 + 5 + 4 + 6 + 8 = 33
La suma de las cifras que se ha comido el bribón es 33.

		$\boxed{}$	5	8
		×	4	$\boxed{}$
	2	$\boxed{}$	0	6
1	$\boxed{}$	3	2	
1	$\boxed{}$	$\boxed{}$	2	6

➔

		$\boxed{3}$	5	8
		×	4	$\boxed{7}$
	2	$\boxed{5}$	0	6
1	$\boxed{4}$	3	2	
1	$\boxed{6}$	$\boxed{8}$	2	6

13.(E) Utilizando una tabla como la siguiente averiguaremos cuando vuelve a ocurrir que los años de Ana y de su tío tengan las mismas cifras:

Años ANA	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	…
Años GONZALO	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	…

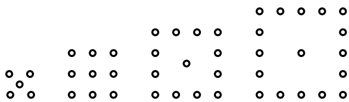
Cuando Ana tenga 24 años, su tío tendrá 42
Como mínimo tendrán que pasar: 24 – 13 = 11 años.

14.(D) Si 7 sandías y 1 melón pesan lo mismo que 3 sandías y 7 melones; entonces, 4 sandías pesan lo mismo que 6 melones. De aquí se deduce que 3 melones pesan lo mismo que 2 sandías, luego 9 (9 = 3 × 3) melones pesarán lo mismo que (3 × 2 = 6) 6 sandias
Planteando una proporción:

$$\frac{4\ sandías}{6\ melones} = \frac{x\ sandías}{9\ melones} \rightarrow x = \frac{4 \times 9}{6} = 6$$

6 sandías pesan lo mismo que 9 melones.

15.(D) Con el número de monedas de cada figura construimos una tabla para buscar regularidades.



5 9 13 17

FIGURA	1	2	3	4	5	6	7
Nº MONEDAS	5	9	13	17			

+ 4 + 4 + 4

Analizando la tabla se observa que para construir cada figura necesita 4 monedas más que en la figura anterior.
La tabla se completaría así:

FIGURA	1	2	3	4	5	6	7
Nº MONEDAS	5	9	13	17	21	25	29

El número de monedas empleadas se calcula sumando todos los términos de la serie: 5 + 9 + 13 + 17 + 21 + 25 + 29 = 119
Santiago tiene 119 euros.

16.(C) 2 017 024 – 1 930 505 = 86 519
El número, de los propuestos, más próximo a 86 519 es 85 000.

17.(A) Los números mayor y menor de cuatro cifras que se pueden formar con las cifras dadas son:
Número mayor: 9852; número menor: 1258.
La diferencia es: 9852 – 1258 = 8594.

18.(E) Expresamos todas las cantidades en minutos:
75 + 30 + 35 + 45 + 20 = 205 min   4 horas = 240 min
Ha estudiado 240 – 205 = 35 minutos.

19.(D) Al número total de combinaciones de prendas le restamos las que ya se ha probado
$4 \times 7 \times 3 = 84$ combinaciones. 84 – 25 = 59.
Se podrá probar 59 combinaciones más.

20.(D) Si para 6 personas necesita 4 huevos, para 3 personas necesitará 2 huevos.
Como $135 = 45 \times 3$, necesitará $45 \times 2 = 90$ huevos.
¿Cuántas docenas son 90 huevos?
90 : 12 = 7, 5 siete docenas y media.

Planteando una proporción: $\frac{4}{6} = \frac{x}{135} \rightarrow x = \frac{4 \times 135}{6} = 90$

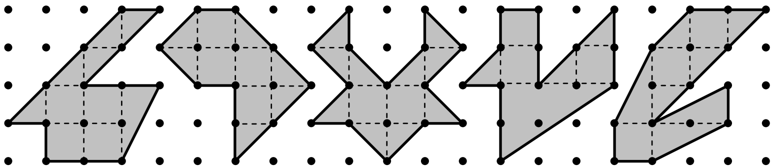
Juanito necesitará siete docenas y media de huevos.

21.(C) En la imagen reflejada, las letras y los números que designan columnas y filas, respectivamente, quedan a la derecha del tablero.
El barco marcado con una interrogación corresponde a la casilla C2
Violeta debe decir C2

22.(A) La secuencia de "lloros" y "chupete" es de 9 minutos: 2 de lloros y 7 con chupete.
Para la próxima hora hay que añadir 4 minutos que Lino tiene el chupete y varias secuencias de 9 minutos.
60 + 4 = 64; 64 : 9 = 7 y resto 1.
En la próxima hora Luca tendrá que poner el chupete a Lino 7 veces más.

23.(B) El número de bolas verdes se obtiene restando al total de las bolas, las rojas y las azules.
$\frac{1}{2}$ de 60 = 30, son rojas. $\frac{3}{10}$ de 60 = 18 son azules.
Las restantes son verdes. 60 – 30 – 18 = 12.

24.(E) Si descomponemos cada una de las figuras en cuadrados y triángulos rectángulos de áreas fáciles de determinar podemos determinar fácilmente el área de cada polígono.



Tomando como unidad el cuadrado de la retícula, tenemos:
Figura A. 4 cuadrados + 5 triángulos de área 0,5 + 1 triángulo de área 1 = 7,5.
Figura B. 4 + 6 · 0,5 = 7.
Figura C. 2 + 10 · 0,5 = 7.
Figura D. 3 + 3 · 0,5 + 3 = 7,5
Figura E. 3 + 4 · 0,5 + 3 · 1 = 8.
La figura que ocupa más es la E.

Si conocemos y aplicamos la fórmula de Pick a cada una de las figuras, podemos comparar los resultados.

Fórmula de Pick: $\text{Área } = I + \frac{B}{2} - 1$, donde I son los puntos de la retícula interiores a la figura y B son los puntos de la retícula que están en el borde de la figura.

Figura A: $2 + \frac{13}{2} - 1 = 7{,}5$

Figura B: $3 + \frac{10}{2} - 1 = 7$

Figura C: $1 + \frac{14}{2} - 1 = 7$

Figura D: $2 + \frac{13}{2} - 1 = 7{,}5$

Figura E: $3 + \frac{12}{2} - 1 = 8$

La figura E es la que ocupa más.

25. (B) La raíz cuadrada del producto de los números dados es un número decimal comprendido entre los dos números consecutivos.
2 × 3 × 5 × 7 × 23 = 4830. Puesto que $69 < \sqrt{4830} \cong 69{,}5 < 70$, los dos números buscados son 69 y 70; 69 = 3 × 23; 70 = 2 × 5 × 7;
La suma de los dos números es 139.

XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel II

1. (D) Como en total pagaron 16 + 47 + 21 = 84 euros, cada entrada costó 84 : 4 = 21 euros. Así pues, Wissal le debe 21€ a María, Arancha le debe 5 € a María y Ana está en paz. Es incorrecto que Arancha le deba 5 € a Ana

2. (B) Medio kilómetro son 0,5 km **=** 500 000 mm. Es decir, medio millón de milímetros. Medio hectómetro y quinientos decámetros son 50 000 mm. Cien mil metros son diez millones de milímetros y cinco kilómetros son cinco millones.

3. (E) Como $a \cdot c = e$ y $b \cdot d = a \cdot c \cdot e = e \cdot e = e^2$ por lo que d también es un cuadrado perfecto y el producto será múltiplo de 9. Como los únicos cuadrados perfectos de una sola cifra son 1, 4 y 9 y $d$es par, $d = 4$ y $b = 9$. Así pues $e = 6$, $a = 3$ y $c = 2$ y la suma de todos ellos es 3 + 9 + 2 + 4 + 6 = 24.

4. (E) La O.

5. (B) Ardillo debe intentar comprar el máximo de avellanas con el *ofertón* pues así cada avellana le costará solo 9 céntimos. Dividiendo vemos que 580 = 11 · 52 + 8. Si compra 52 lotes con el *ofertón* aún tendrá que comprar 8 avellanas más y lo que le convienen es comprar un lote de *oferta* y dos de *ofertita*.

Así pues pagará 52 · 99 + 60 + 2 · 12 = 5232 céntimos = 52,32 euros.

6. (B) La suma de todos los números es 1263. Como aún le queda el doble de lo que se ha comido, la suma de los que se ha comido es 1263/3 = 421. Como lo más pequeños que se puede haber comido con 40, 80 y 100, que suman 220, el número más grande que se podría haber comido sería 421 – 220 = 201. Ese número no está en la lista pero si se hubiera comido el 40, 80 y 101, el cuarto sería 200 que sí está en la lista.

7. (D) Llamando p a la cantidad de comida que come un perro y g a la que come un gato, podemos escribir la siguiente igualdad: $6p + 4g = 7p + 2g$ y, restando $6p$ y $2g$ de ambos miembros obtenemos $2g = p$ es decir, un perro come como dos gatos.
Como $6p + 4g = 5p + p + 4g = 5p + 2g + 4g = 5p + 6g$, con esa comida podría darle de comer a cinco perros y seis gatos.
Para asegurarnos que no es ninguna de las otras respuestas observa que:
$6p + 4g = 6p + 2p = 8p < 9p$; $6p + 4g = 4p + 8g > 4p + 7g$; $6p + 4g = 16g > 15g$ y $6p + 4g < 6p + 6g$.

8. (A) Debemos buscar un número n que cumpla $8^{12} : 4 = 2^n$. Para ello escribimos los números como potencias de base 2 y usamos propiedades de potencias de igual base.

$$\frac{8^{12}}{4} = \frac{\left(2^3\right)^{12}}{2^2} = \frac{2^{36}}{2^2} = 2^{34} \quad \text{y} \quad n = 34.$$

9. (C) Un globo puede cargar 60 kg y una cesta y, por tanto, dos globos podrían cargar 120 kg y dos cestas. Al usar una sola cesta puedo meter 200 – 120 = 80 kg más de harina y, por tanto, una cesta pesa 80 kg.

10.(C) En ese producto aparecen los números: 2, 2, 2, 3, 3, 3, 7 y 13. Agrupemos estos números en tres productos para obtener tres números consecutivos.
Solo uno de ellos podrá ser múltiplo de tres así pues, uno de los números es múltiplo de $3^3 = 27$. ¡Ya lo tenemos! Como no puede ser 54 pues es demasiado grande, los números son $2\cdot 13 = 26$, $3^3 = 27$ y $2^2\cdot 7 = 28$ y la suma buscada es 81.

11.(D) Los ángulos de la base miden 180º – 100º = 80º y 180º – 110º = 70º. Como la suma de los cuatro ángulos de un cuadrilátero es 360º, $x = 360 - (2\cdot 80 + 70) = 130$º.

12.(E) Si llamamos x al número de niños, el número de niñas es $x + 4$ y en total hay $2x + 4$ estudiantes. Si sumamos el doble de niños con la mitad de niñas obtendremos $2x + 8$. Plantemos pues la ecuación:

$$2x + \frac{x+4}{2} = 2x + 8 \rightarrow \frac{x+4}{2} = 8 \rightarrow x + 4 = 16 \rightarrow x = 12\cdot$$

Así pues hay 12 chicos y 16 chicas y en total son 28 estudiantes.

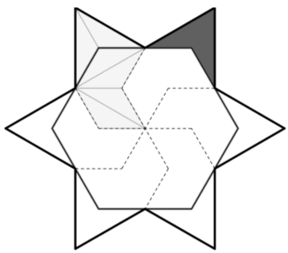
13.(E) La letra O debe ser 1 pues de la suma de dos cifras no me puedo llevar más que 1.
OSOS solo puede ser 1010 pues, como O es 1, la suma de las cifras de la izquierda podría ser 10 o 11 (si me llevara una) pero S es par (pues es A + A).
Así que O = 1, S = 0, A = 5, L = 9 y B = 8 y el número 8195 se representa con la palabra BOLA.

14.(D) Si multiplicamos por 1000 seguro que obtenemos un entero. Veamos si podemos multiplicar por un número menor. Para ello simplifiquemos la fracción

$$\frac{35613472}{1000} = \frac{17806736}{500} = \frac{8903368}{250} = \frac{4451684}{125}.$$

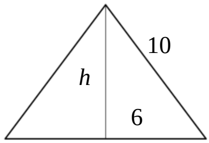
Luego nos basta con multiplicar por 125: $35613{,}472 \cdot 125 = 4451684$.

15.(D) Observa que podemos dividir la estrella en 36 triangulitos iguales y que la punta de flecha contiene dos de ellos. Como el área total de la estrella es 720 mm^2, el área de la punta de flecha es 720/18 = 40 mm^2.



16.(C) Desde que le pone el chupete una vez hasta la próxima pasan 9 minutos. La primera vez se lo pondrá a los tres minutos de comenzar la hora y, a partir de ese momento, quedan $57 = 9 \cdot 6 + 3$ minutos para acabar la hora por lo que se lo tendrá que poner otras seis veces más. En total se lo pondrá 7 veces.

17.(A) Como el triángulo es isósceles, podemos calcular la altura sobre el lado desigual con el teorema de Pitágoras. $h = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.



Si estás familiarizado con las ternas pitagóricas, te habrás dado cuenta de que esta es el doble de la ultra conocida terna 3, 4, 5 y, por tanto, sin hacer ningún cálculo puedes obtener $h = 8$.

El área es $\dfrac{12 \cdot 8}{2} = 48$ cm^2.

18.(B) Tendrá 39 líneas verticales de 30 unidades de longitud y 29 horizontales de 40 unidades. En total $39 \cdot 30 + 29 \cdot 40 = 1170 + 1160 = 2330$ segmentos.

19.(E) Hay que tener cuidado al contar. Lo mejor es elaborar una tabla con todos los resultados posibles. Como ves, hay 36 resultado posibles y solo 12 de ellos son favorables de manera que la probabilidad buscada es $\dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}$.

•	–3	–2	–1	0	1	2
–3	9	6	3	0	–3	–6
–2	6	4	2	0	–	–
–1	3	2	1	0	–	–
0	0	0	0	0	0	0
1	–	–	–	0	1	2
2	–	–	–	0	2	4

20. (D) Por cada pantalón podrá ponerse siete camisetas así que, entre pantalón y camiseta tiene $4 \cdot 7 = 28$ combinaciones. Además, cada una de esas combinaciones puede ponérsela con tres zapatillas distintas lo que hacen un total de $28 \cdot 3 = 84$ modelitos distintos. Como ya se ha probado 25, puede dudar aún entre $84 - 25 = 59$ posibilidades.

21.(A) De una cifra está solo el 4, de dos cifras están el 13, el 22, el 31 y el 40. Con tres cifras la cosa se complica, podemos usar las cifras 1-1-2 o 1-3-0 o 2-2-0 o 4-0-0 combinadas de todas las formas posibles pero teniendo en cuenta que la primera no puede ser cero. Vayamos con cuidado: 112, 121 y 211, 103, 130, 301 y 310, 202 y 220 y por último 400. En total hemos obtenido 15 números.

22.(E) Si llamamos x a la medida del ángulo mayor en grados. Entonces, el mediano mide $x - 23$ y el pequeño $x - 31$. Como la suma de los tres ángulos debe ser 180º, obtenemos la ecuación $x + (x - 23) + (x - 31) = 180 \rightarrow 3x - 54 = 180 \rightarrow x = 78$º.

23.(E) Si partimos de un número natural a y realizamos las operaciones que nos manda Don Retorcido, obtenemos las expresiones $38a + 37$ luego el número obtenido será impar (pues $38a$ es par) lo que elimina automáticamente los números 496 y 476. Para ver qué pasa con los otros tres, podemos restarles 37 y ver si el resultado es divisible entre 38 (es decir, primero entre 2 y luego entre 19), es par. Esto es equivalente a sumarles1 y ver si el resultado es divisible entre 19. Desde luego parece más rápido pero, ¿sabrías explicar por qué es equivalente? Comprobamos todos ellos y vemos que $472 = 19 \cdot 24 + 16$, $1902 = 19 \cdot 100 + 2$ y $494 = 19 \cdot 26$ luego ese es único correcto y el número que habían pensado es 12 (= 26 : 2 – 1).

24.(A) Vamos despacio: Que empiecen con A hay $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ (que son todas las formas posibles de ordenar las legras B-R-C-O. Que empiecen con B otras 24. Que empiecen con CA hay $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ y también hay 6 que empiecen con CB. Vamos a escribir las que empiezan con CO por orden alfabético hasta llegar a COBRA: COABR, COARB; COBAR y la próxima es COBRA.
Así pues, hay: 24 + 24 + 6 + 6 + 3 = 63 delante de ella y COBRA ocupa la posición número 64.

25.(E) Escribimos la igualdad $\frac{3a}{4} = \frac{5b}{8}$ y ahora, multiplicando ambos miembros por 8, llegamos a la igualdad: $6a = 5b$

XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel III

1.(A) Observando la segunda fila averiguamos el valor del sol, ☼ = $24:4=6$
Con esta información y fijándonos en la primera fila, conseguimos el corazón,
♥ = $(26-2\cdot 6):2=7$
Con la última fila sabemos que dos cuadraditos valen $33-6-7=20$, así que □ = 10.
Por último de la tercera fila sacamos que ☺= $(27-10-7):2=5$

2.(E) Diego reparará 9. Como Mónica repara $\frac{2}{3}$ de los ordenadores que repara Diego, entonces Mónica reparará 6. Y Kira repara el triple que Mónica, por tanto, Kira reparará 18. En total: $9+6+18=33$ ordenadores.

3.(B) Como el área del círculo es $36\pi \Rightarrow 36\pi=\pi\cdot r^2$, y sacamos que r = 6.
El perímetro de la figura está formado por dos radios y $\frac{3}{4}$ de la circunferencia, es decir, $P=2\cdot 6+\frac{3}{4}\cdot 2\pi\cdot 6=12+9\pi$

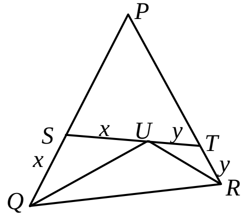
4.(A) Sustituimos $x=2y$, nos queda $(2y-y)\cdot(2\cdot 2y+y)=5y^2$

5.(E) Con esa gráfica, la pendiente tiene que ser negativa y la ordenada en el origen positiva. Solo cumple estas condiciones $y=-2x+3$

6.(D) Dividir 109 entre x que dé resto 4, es igual que dividir 105 entre x y que la división sea exacta. Por tanto, factorizamos $105=3\cdot 5\cdot 7$. Todos los divisores de 105 que tengan dos cifras serán 15, 21 y 35. La suma pedida será 71.

7.(A) $\begin{cases} PS=19-x \\ ST=x+y \\ PT=17-y \end{cases}$

El perímetro pedido será P = 19 – x + x + y + 17 – y = 36



8.(E) Como es múltiplo de 5, el número tiene que acabar en 0 ó 5, pero al ser el número impar, solo nos queda el 5. Al estar comprendido entre 400 y 600 solo tenemos dos posibilidades 4$\underline{a}$5 o 5$\underline{a}$5. Para que sea múltiplo de 11 en el primer caso $9-a=0$, por tanto $a=9$. Y en el segundo $10-a=0$ no puede ser ya que a es una cifra. Concluimos que el número es el 495 y la suma pedida 18.

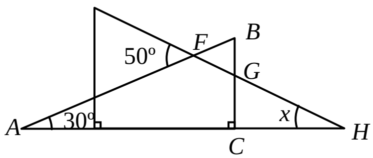
9.(B) $\hat{B}=60^{\circ}$ porque *ABC* es un triángulo rectángulo y $\hat{A}=30^{\circ}$.

$B\hat{F}G=50^{\circ}$ por ser opuesto por el vértice del ángulo de 50º del enunciado.

$B\hat{G}F=70^{\circ}$ ya que es el único ángulo que falta del triángulo *FBG*.

$C\hat{G}H=70^{\circ}$ por ser opuesto por el vértice del anterior.

Por último, $x=20^{\circ}$ porque *CGH* es un triángulo rectángulo y $C\hat{G}H=70^{\circ}$.



10.(B) Si $x+xy=391 \Leftrightarrow x(1+y)=391$. Para saber qué dos números multiplicados dan 391 busco sus factores $391=17\cdot 23$, como $x>y$, $x=23$, $y+1=17$. Así que $x+y=39$.

11.(D) Si $(p,q)\in r$, entonces se puede escribir $\left(p,\dfrac{2p}{5}\right)$. Por otro lado, el área del rectángulo será $A=p\cdot q$, es decir, $90=p\cdot\dfrac{2p}{5}$, de donde sacamos que $p=15$.

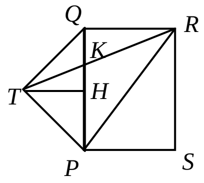
12.(B) En la primera bolsa, la probabilidad de sacar dos del mismo color será: $P=\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$, mientras que en la segunda bolsa será:

$$P=\frac{2}{4+x}\cdot\frac{1}{3+x}+\frac{2}{4+x}\cdot\frac{1}{3+x}+\frac{x}{4+x}\cdot\frac{x-1}{3+x}=\frac{x^2-x+4}{(4+x)(3+x)}.$$

Como las dos probabilidades son iguales $\dfrac{1}{3}=\dfrac{x^2-x+4}{(4+x)(3+x)}$, operando llegamos a $x^2+7x+12=3x^2-3x+12$, que tiene por soluciones 0 y 5, como $x>0$, la única solución válida es $x=5$.

13.(C) Para conseguir el área pedida, vamos a dividir el triángulo *PTR* en dos triángulos *PKT* y *PKR*. Los dos tienen la misma base *PK* y las alturas son *HT* y *QR* respectivamente.

Como el triángulo *PTQ* es isósceles, la altura cae en la mitad de la hipotenusa y aplicando el teorema de la altura tenemos que $TH^2 = 2 \cdot 2$, por tanto, $TH = 2$



Aplicamos la semejanza de triángulos a *RQK* y *THK* ya que los dos son rectángulos y tienen ángulos opuestos por el vértice. $\frac{TH}{QR} = \frac{HK}{QK}$, $\frac{2}{3} = \frac{HK}{QK}$ y sabemos que $HK + QK = 2$, por tanto, $\frac{2}{3} = \frac{HK}{2 - HK}$, donde $HK = \frac{4}{5}$.

Entonces, $PK = 2 + \frac{4}{5} = \frac{14}{5}$ y ya tenemos el área: $A = \frac{\frac{14}{5} \cdot 2}{2} + \frac{\frac{14}{5} \cdot 3}{2} = 7$

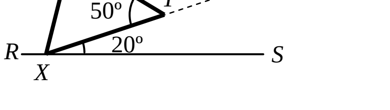
14.(A) Vamos a fijarnos en los tiempos de cada uno $t = \frac{d}{v}$.

El tiempo que tarda Eugenio será $x = \frac{\frac{d}{2}}{6} + \frac{\frac{d}{2}}{12} = \frac{d}{8}$

El tiempo que tarda Esteban será $y = \frac{\frac{d}{3}}{5} + \frac{\frac{2d}{3}}{15} = \frac{d}{9}$

Por tanto, $\frac{x}{y} = \frac{\frac{d}{8}}{\frac{d}{9}} = \frac{9}{8}$.

15.(A) Prolongo la recta *XY* hasta que corte a la *PQ* en el punto *W*. Los ángulos $Y\hat{X}S = Y\hat{W}Z = 20º$ son iguales por ser alternos internos. $Z\hat{Y}W = 130º$ por ser suplementario de $Z\hat{Y}X$, por último, observando el triángulo *ZYW* sacamos el ángulo pedido $Q\hat{Z}Y = 30º$



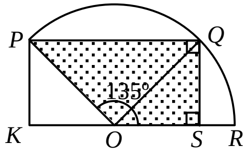
16.(D) Don Retorcido compra *x* sellos de 20 céntimos, 10*x* sellos de 10 céntimos e *y* sellos de 50 céntimos. En total compra 11*x* + *y* sellos pagando 10 euros. Tenemos que $1000 = 20x + 100x + 50y \Rightarrow 100 = 12x + 5y$, con *x*, *y* números enteros. Así que para que esto se cumpla, *x* tiene que ser múltiplo de 5. Si $x = 5 \Rightarrow y = 8$. No puede ser otro múltiplo de 5 porque si $x = 10 \Rightarrow y = -4$.

Por tanto, Don Retorcido compra 50 sellos de 10 céntimos, 5 sellos de 20 céntimos y 8 sellos de 50 céntimos, en total 63 sellos.

17.(B) El problema consiste en hallar la diagonal del ortoedro de lados 4, 1 y 3. $d = \sqrt{4^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{26}$

18.(D) Primero contamos todas las posibles combinaciones de agrupar los cinco números tomados de dos en dos. $C_{5,2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$. De todas éstas, las que el producto da cero son aquellas parejas en las que está incluido el 0. Son 4. Por tanto, la probabilidad será $P = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

19.(C) Nos ayudamos del segmento adicional *OQ* y del triángulo rectángulo *OPK*.



$P\hat{O}K = 45^{\circ}$ ya que es suplementario del ángulo dado, $O\hat{P}K = 45^{\circ}$ por ser el ángulo que falta al triángulo rectángulo *OPK*. Por tanto el triángulo *OPK* es rectángulo isósceles y la hipotenusa mide 12 ya que es el radio de la circunferencia. Aplicando Pitágoras sacamos los catetos $x^2 + x^2 = 12^2 \rightarrow x = 6\sqrt{2}$. El triángulo *PKO* es igual que el *QSO*. Por tanto, $OS = 6\sqrt{2}$, $PQ = 12\sqrt{2}$ y $QS = 6\sqrt{2}$. El área del trapecio pedida será $A = \frac{\left(12\sqrt{2} + 6\sqrt{2}\right) \cdot 6\sqrt{2}}{2} = 108$

20.(D) Empecemos por *z*. Mirando la solución *z* solo puede ser 1, ya que si fuera 2, $x + y + 2 \geq 20$, solo podría ser si $x = y = 9$, pero no es posible por el enunciado que dice que $x \neq y \neq z$, por tanto $z = 1$.

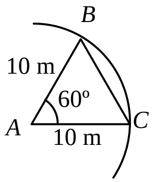
Observando las unidades $x + y + z = 10 + x$, por tanto $y = 9$.

De la columna de las decenas tenemos que $x + y + z + 1 = y$, con los datos que ya tenemos $x + 9 + 1 + 1 = 19$, $x = 8$.

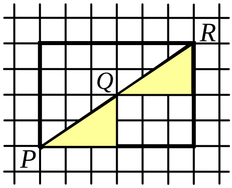
21.(B) Para que Carolina esté a la misma distancia de Bea que de Ali, el triángulo formado entre ellas tiene que ser equilátero, y por tanto, todos los ángulos 60º. Por tanto, para que Carolina esté más cerca de Bea que de Ali, el ángulo $B\hat{A}C$ tiene que ser menor de 60º.

Hay que tener en cuenta que Bea se puede mover en uno de los lados o en el otro del segmento que forman AC.

Observando el ángulo $B\hat{A}C$ y aplicando la ley de Laplace, encontramos la probabilidad. $P = \frac{120º}{360º} = \frac{1}{3}$.



22.(C) Si consideramos la recta PR de la figura, tiene una pendiente de $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Significa que podemos dibujar dos triángulos de abscisa 3 y ordenada 2. Por tanto pasa por 3 vértices.



Planteando de modo similar en el rectángulo de lados 60 y 45.

Sabemos que la pendiente de la diagonal será $m = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$. El problema se reduce en averiguar cuántos triángulos rectángulos podemos dibujar, cuya hipotenusa coincide con la diagonal, y tiene abscisa 4 y ordenada 3. Es decir, $60 : 4 = 45 : 3 = 15$. Como podemos dibujar 15 triángulos, la diagonal pasa por 16 vértices.

23.(C) El número *abcd*, es el número $1000 + 100b + 10c + d$.

La suma descendente será $1000a + 100b + 10c + d + 100b + 10c + d + 10c + d + d = = 1000a + 200b + 30c + 4d = 2014$.

Fijándonos en las unidades $4d = 4$. $\begin{cases} 4d = 4 \\ 4d = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ d = 6 \end{cases}$

· Si d = 6, 3c acabaría en 9 y solo puede ser si c = 3. En este caso 2b tiene que acabar en 9 y es imposible.

· Si d = 1, 3c acabaría en 1 y solo puede ser c = 7. En este caso 2b debe acabar en 8 y entonces b = 4 o b = 9.. Si fuera b = 9, entonces a = 0 (imposible), así que tiene que ser b = 4 y por tanto a = 1.

Hemos obtenido el número 1471, cuyas cifras suman 13.

24.(B) $V_{agua} = V_{cono} - V_{esferas} = \dfrac{\pi R^2 h}{3} - \dfrac{4}{3}\pi(2r)^3 - \dfrac{4}{3}\pi r^3 = 2016\pi$ donde R es el radio de la base del cono y r el radio de la esfera pequeña.

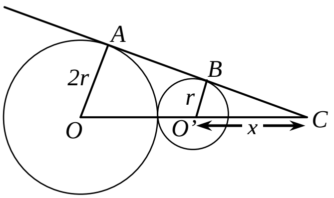
Aplicando semejanza de triángulos *OAC* y *O'BC*, $\dfrac{2r}{r} = \dfrac{2r + r + x}{x} \Rightarrow x = 3r$.

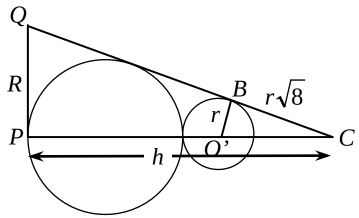
$h = 2r + 2r + r + x = 8r$

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo *O'BC* , obtenemos que el cateto desconocido, *BC*, mide $r\sqrt{8}$

Aplicando semejanza en los triángulos *QPC* y *O'BC* obtenemos:

$$\frac{R}{r} = \frac{h}{\sqrt{8}r} \Rightarrow R = \frac{r \cdot h}{r\sqrt{8}} = \frac{r \cdot 8r}{r\sqrt{8}} = r\sqrt{8}$$





Sustituyendo en la primera ecuación, tenemos: $\dfrac{8r^2 \cdot 8r}{3} - \dfrac{32r^3}{3} - \dfrac{4r^3}{3} = 2016 \Rightarrow r = 6$.

25.(C) Leyendo las condiciones del enunciado, sabemos que el número buscado tendrá esta forma _ □ _ □ _ donde en cada uno de los cuadrados tiene que haber una cifra más grande que sus cifras contiguas.

Como tenemos que usar 1, 3, 5, 7 y 9, la cifra más pequeña para poner en un cuadrado será el 5 ya que tiene que ser mayor que sus dos contiguas. Si en un cuadrado ponemos el 5, en el otro tenemos que poner un 9 ya que si usamos el 7, quedaría el 9 fuera del lugar contiguo al 5 o al 7 y eso no puede ser. Obtendríamos _ 5 _ 9 _, solo hay dos posibilidades 1 5 3 9 7 ó 3 5 1 9 7 y las cifras simétricas 79351 y 79153.(4 formas)

Nos quedan más posibilidades poniendo en los cuadrados el 7 y el 9. En este caso no hay restricciones para colocar las otras tres. Por tanto habrá 3! formas de colocarlas y sus simétricas. (12 formas)

En total, 4 + 12 = 16.

XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel IV

1. (B) Si se ahorró 25 € y pago 250 €, el precio de las compras era 275 €, y el porcentaje de ahorro fue $\frac{25}{275}\times 100=\frac{100}{11}=9{,}0909...$

2. (D) Sea x el número de avestruces e y el número de cebras. Según el enunciado

$$2x+4y=28+2\cdot(x+y) \quad\Rightarrow\quad 2y=28 \quad\Rightarrow\quad y=14$$

3. (D)
$$\left.\begin{array}{ll} E_1 & x+y+z=1 \\ E_2 & x+y-z=2 \\ E_3 & x-y-z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} E_1-E_2 & 2z=-1 \\ E_1+E_3 & 2x=4 \\ E_2-E_3 & 2y=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow x\cdot y\cdot z=\frac{1}{2}$$

4. (C) Sea y la última cifra del número buscado. Entonces, $10x + y = 14x \Rightarrow y = 4x$.
Como y es entero con una sola cifra, sólo existen dos posibilidades,
$x = 1, y = 4$ o $x = 2, y = 8$.

5. (E) Teniendo en cuenta que 125 · 8 = 1000, separando de dos en dos las cifras del número dado desde su izquierda, tenemos los siguientes productos:

			7	2	1	6	8	4	8	2	4	8	1	6	8	5	6	6	4	3	2
72	9	0	0	0																	
16			2	0	0	0															
84				1	0	5	0	0													
82						1	0	2	5	0											
48									6	0	0	0									
16											2	0	0	0							
85												1	0	6	2	5					

La cifra que ocupa el octavo lugar desde la izquierda es 2 + 1 = 3.

Otro método más rápido sería:

7 216 848 248 168 566 432 · 125 = 7 216 848 248 168 566 432 000 : 8 = 90210603…

6. (D) Si $ab+ac+bc=abc \quad \Rightarrow \quad \dfrac{ab}{abc}+\dfrac{ac}{abc}+\dfrac{bc}{abc}=1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$.

Los únicos enteros positivos que verifican dicha relación son $a = 2$, $b = 3$, $c = 6$, y su suma es $a + b + c = 11$.

7. (C) Los números más pequeños que tienen dos sietes son 77 (que es múltiplo de 7 y de 11), 177 (que es múltiplo de 3 y de 59), 277 (que no tiene divisores distintos de 1 y de 277), etc… El menor que es primo es 277.

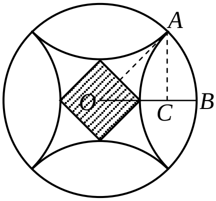
8. (C) Para que la suma sea la máxima posible, las cifras de las decenas deben ser las mayores posibles, y lo mismo deben ser las de las unidades, por tanto los números serán 96, 85 y 74, que suman 255. (También suman 255 todas las combinaciones posibles de 9, 8 y 7 como cifras de las decenas y 6, 5 y 4 como cifras de las unidades).

9. (C) El mayor capicúa de cuatro cifras divisible por 15 es 5775 (debe terminar en 5 y la suma de sus cifras debe ser múltiplo de 3). La suma de sus cifras es 24.

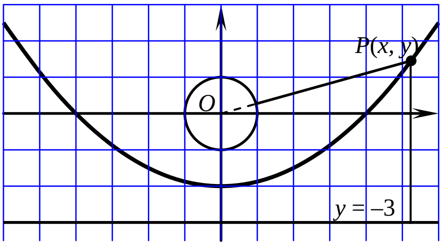
10. (B) Como el triángulo *OCA* es rectángulo e isósceles y además $OA = 1$, entonces $OC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $CB=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

La mitad de la diagonal del cuadrado cuyo lado queremos hallar mide $1-2\cdot\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}-1$.

Y el lado del cuadrado mide $\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{2}=2-\sqrt{2}$.



11. (D) El conjunto de puntos que equidistan de una circunferencia y una recta exterior a la misma es una parábola, que coincide con el conjunto de puntos que equidistan del centro de la circunferencia y una recta paralela a la recta dada y a una distancia de ella igual al radio de la circunferencia. Por tanto el conjunto que nos piden es la parábola con foco en el origen y directriz y = – 4, es decir, $x^2+y^2=(y+4)^2 \Rightarrow x^2-16=8y$.



Otro método es: Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, r la recta dada y C la circunferencia, se cumplirá que: $d(P, r) = d(P, C)$.

Como P debe estar por encima de la recta r, la ordenada y del punto será $y > -3$, por lo que $d(P, r) = y - (-3) = y + 3$.

La distancia del punto a la circunferencia será, $d(P, C) = d(P, O) - radio$ y como el centro de la circunferencia es $O(0, 0)$ y el radio es 1 tendremos:

$d(P, r) = d(P, C) \Rightarrow y + 3 = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} - 1 \Rightarrow (y+4)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow 8y = x^2 - 16$.

12. (A) El área del trapecio $ABCE$ es $\dfrac{(AD - ED) + BC}{2}.h$ y como $ED = BC$ resulta $\dfrac{AD \cdot h}{2}$ que es también el área del triángulo ACD. Por tanto las dos áreas son iguales.

13. (A) El menor entero positivo cuyos dígitos suman 2015 es un número formado por un 8 seguido de 223 nueves ($2015 = 9 \times 223 + 8$).
Así el primer dígito del siguiente número es 9.

14. (A) La ecuación $f(x) = k$, con $k \in (0, 2)$ tiene tres soluciones, si $k = 0$ o $k = 2$ tiene dos soluciones y para cualquier otro valor de k, la ecuación tiene una única solución. Así $f[f(f(x))] = 0$ tiene dos soluciones para $f(f(x))$, que son 0 y – 4. Ahora $f(f(x)) = 0$ tiene dos soluciones para $f(x)$, que son $f(x) = 0$ y $f(x) = -4$, mientras que $f(f(x)) = -4$ tiene una única solución para $f(x)$, que es $f(x) = -8$. Por último, $f(x) = 0$ tiene dos soluciones para x mientras que $f(x) = -4$ y $f(x) = -8$ tienen una solución cada una. Por tanto, 4 soluciones:

$$f[f(f(x))] = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(f(x)) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases} \\ f(x) = -4 \quad \Rightarrow \quad x = -8 \end{cases} \\ f(f(x)) = -4 \quad \Rightarrow \quad f(x) = -8 \quad \Rightarrow \quad x = -12 \end{cases}$$

15. (A) Sea $S = z_1 + z_2 + ... + z_k + ... + z_{35}$ y sea z_k el entero al que hemos intercambiado dos dígitos obteniendo z_k^*. Escribimos el número z_k en su forma polinómica:

$z_k = a_n \cdot 10^n + ... a_j \cdot 10^j + ... + a_k \cdot 10^k + ... + a_0 \cdot 10^0$, siendo a_j y a_k los dígitos que intercambiamos, de modo que $z_k^* = a_n \cdot 10^n + ... a_k \cdot 10^j + ... + a_j \cdot 10^k + ... + a_0 \cdot 10^0$.

La nueva suma es $T = z_1 + z_2 + ... + z_k^* + ... + z_{35}$, y la diferencia $S - T = z_k - z_k^* =$
$= a_j 10^j + a_k 10^k - a_k 10^j - a_j 10^k = (a_j - a_k)(10^j - 10^k) = (a_k - a_j) 10^j \cdot (10^{k-j} - 1)$

El factor $10^{k-j} - 1$ es múltiplo de 9, para todo valor de k y de j.

16. (B) Consideremos unos ejes de coordenadas paralelos a los lados del rectángulo y con origen en P. Si los vértices B y D son $B(a, b)$ y $D(x, y)$ entonces $A(x, b)$ y $C(a, y)$.

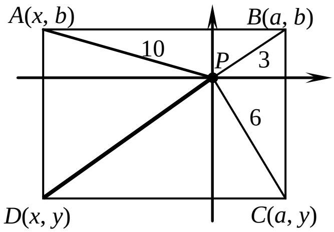
Tenemos que hallar $d(P, D) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Conocemos, $d(P, A) = \sqrt{x^2 + b^2} = 10$

$d(P, B) = \sqrt{a^2 + b^2} = 3$

$d(P, C) = \sqrt{a^2 + y^2} = 6$.

Podemos expresarlo mediante el sistema



$$\left.\begin{aligned} E_1 :&\quad x^2 + b^2 = 10^2 \\ E_2 :&\quad a^2 + b^2 = 3^2 \\ E_3 :&\quad a^2 + y^2 = 6^2 \end{aligned}\right\} E_1 + E_3 - E_2 : \ x^2 + y^2 = 100 + 36 - 9 = 127 \Rightarrow d(P, D) = \sqrt{127}$$

17. (A) $\log_b 10 + \log_b 10^2 + \log_b 10^3 + \ldots + \log_b 10^{10} = 110 \quad \Rightarrow \quad (1 + 2 + 3 + \ldots + 10)\log_b 10 = 110$

$\Rightarrow \quad 55 \cdot (\log_b 10) = 110 \quad \Rightarrow \quad \log_b 10 = 2 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{10}$ **.**

18. (C) $x = \sqrt{16 + \sqrt{16 + \sqrt{16 + \ldots}}} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{16 + x} \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 16 = 0$ **.**

Y resolviendo la ecuación de segundo grado: $x = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 64}}{2} = \dfrac{1 + \sqrt{65}}{2}$ **.**

(Se ha considerado sólo la raíz positiva porque x es un número positivo).

19. (E) Si la duración es proporcional a la cantidad de cera, y el grosor de cada vela es constante, para cada vela la duración es proporcional a la altura consumida de la vela. Llamando h a la altura inicial de cada vela y h_{c_i} a la altura consumida en la vela i al cabo del tiempo t, tenemos que $\dfrac{h_{c_1}}{t} = \dfrac{h}{4}$ y $\dfrac{h_{c_2}}{t} = \dfrac{h}{3}$**.** Por tanto $h_{c_1} = \dfrac{h \cdot t}{4}$ y $h_{c_2} = \dfrac{h \cdot t}{3}$.(1)

Ahora, nos piden el tiempo que debe transcurrir para que $h - h_{c_1} = 2 \cdot (h - h_{c_2})$, es decir para que $h + h_{c_1} = 2 \cdot h_{c_2}$. Sustituyendo las expresiones (1) en esta ecuación tenemos: $h + \dfrac{h \cdot t}{4} = 2 \cdot \dfrac{h \cdot t}{3}$ Y dividiendo la ecuación por h, tenemos $1 + \dfrac{t}{4} = \dfrac{2t}{3}$, que conduce a $5 \cdot t = 12 \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{12}{5} horas = 2\ horas\ y\ 24\ minutos$.

20. (B) Para calcular el radio de la circunferencia inscrita tendremos en cuenta que el área del triángulo es $A = p{\cdot}r$, donde p es el semiperímetro y r el radio de la circunferencia inscrita. Así $A = \frac{x+y+x+y-4}{2}{\cdot}r = (x+y-2){\cdot}r$. Como el triángulo es rectángulo, el área es también $A = \frac{x{\cdot}y}{2}$. Por tanto $r = \frac{x{\cdot}y}{2(x+y-2)}$

Al ser un triángulo rectángulo se verifica el teorema de Pitágoras y $x^2 + y^2 = (x+y-4)^2 = x^2 + y^2 + 16 + 2xy - 8x - 8y$.

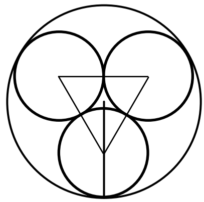
Simplificando, tenemos que $x{\cdot}y = 4x + 4y - 8 = 4{\cdot}(x+y-2)$ y entonces $r = \frac{4{\cdot}(x+y-2)}{2(x+y-2)} = \frac{4}{2} = 2$.

21. (E) El valor $x = -2$ es una raíz de la ecuación, y dividiendo obtenemos:

$x^5 + 2x^3 + 8x^2 + 16 = (x+2){\cdot}(x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 4x + 8)$.

Aquí ya podemos observar que no hay más raíces, pues el polinomio original sólo admite raíces negativas, pero el divisor de cuarto grado solo admitiría raíces positivas. Por lo tanto no hay más raíces.

22. (D) La altura del triángulo cuyos vértices son los centros de las tres circunferencias vale $h = \frac{\sqrt{3}}{2}l = \frac{\sqrt{3}}{2}{\cdot}2r = r\sqrt{3}$.



El radio de la circunferencia circunscrita a las tres circunferencias tangentes, que conocemos, se puede expresar como la suma del radio de una de las circunferencias más los $\frac{2}{3}$ de la altura del triángulo, es decir, $1 = r + \frac{2}{3}r\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{3}{3+2\sqrt{3}} = \frac{3(2\sqrt{3}-3)}{12-9} = 2\sqrt{3} - 3$.

23. (E) Para obtener el total de formas de descomposición de 5 como suma de sumandos enteros positivos, podemos razonar del siguiente modo: Hay que colocar uno, dos tres o cuatro signos más en los espacios entre unos: $1\_1\_1\_1\_1$. Los unos que no tienen signo entre ellos se agrupan sumándose. Por ejemplo, con un solo signo más hay cuatro posibilidades distintas: $1+1\_1\_1\_1 = 1+4$;

$1\_1+1\_1\_1 = 2+3$; $1\_1\_1+1\_1 = 3+2$; $1\_1\_1\_1+1 = 4+1$.

Esto es combinaciones de 4 elementos (los huecos) tomados de 1 en 1, $\binom{4}{1} = 4$.

Con dos signos más, hay 6 posibilidades, $\binom{4}{2}=6$. Con tres signos más hay otras 4 posibilidades $\binom{4}{3}=4$. Por último, con cuatro signos más, hay una posibilidad $\binom{4}{4}=1$, que corresponde a 1+1+1+1+1. En total son 4 + 6 + 4 + 1 = 15.

También podríamos haber calculado $\sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}=\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}-1=2^4-1=15$.

24. (D) Si disponemos los datos en forma de tabla, tenemos:

	Alemán	Inglés	Francés	Español
Ángela	X	X		
Ulrike	X			X
Karin			X	X
Dieter	X		X	
Pierre		X	X	
Rocío		X		X

De las $\binom{6}{2}=15$ posibles parejas que se pueden formar, sólo en tres NO hay posibilidad de entendimiento (Ángela-Karin, Ulrike-Pierre y Dieter-Rocío).

Por eso, la probabilidad de que se entiendan es $p(Entenderse)=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$.

25. (C) En total hay 27 posibles sumas de dígitos: desde 1 hasta 27. Hay dos sumas que sólo pueden aparecer en una tarjeta, 1 y 27. La suma 2 sólo puede aparecer en dos tarjetas. El resto de sumas pueden aparecer en tres o más tarjetas, para estar seguros que tenemos al menos tres tarjetas con la misma suma de dígitos, deberemos extraer 2×24 + 4 + 1 = 53. (Al extraer 2×24 + 4, en el peor de los casos tendremos dos tarjetas con cada una de las sumas desde 3 hasta 26, más dos tarjetas con suma 2, más una tarjeta con suma 1 más una tarjeta con suma 27. Si extraemos una tarjeta más, con seguridad se debe repetir una de las 24 sumas entre 3 y 26, con lo que habrá al menos tres tarjetas con la misma suma).

XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel I

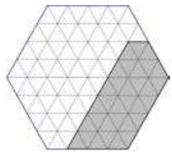
1. (A) Observando las dos reglas vemos que 6 *cuns* equivalen 20 *cms*, luego un centímetro será 6 : 20 = 0,3 *cuns*.

2. (D) Con cada paso giran 360º : 9 = 40º.

3. (C) Poniendo las 11:03 como las 10:63 es muy fácil hacer la diferencia.
(10 h 63 min) – (9 h 11 min) = (10 – 9) h (63 – 11) min = 1 h 52 min
Obteniendo así que el eclipse duró una hora y 52 minutos.

4. (D) Los casos favorables son 6; las 9 letras de PRIMAVERA menos las M, V y E, que no aparecen en PILAR. En consecuencia, la probabilidad pedida es $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

5. (A) Dividiendo el hexágono en triángulos equiláteros iguales es inmediato ver que la cerca de 240 metros contiene 16 lados, por lo que cada lado de dichos triángulos mide $\frac{240\text{ m}}{16}=15\text{ m}$.
Dado que faltan 15 lados de triángulo para completar la cerca, Ana debe comprar 15×15 m = 225 m de alambre.



6. (D) Durante los primeros 29 días Julián va ahorrando más dinero que Lucía. El día 30 ahorran la misma cantidad, 30 céntimos. A partir del día 30 es Lucía la que ahorra más dinero. Como el día 31 compensa el céntimo que ahorró de menos que el día 29, el 32 compensa el día 28 y así sucesivamente, tendrán que pasar otros 29 días para compensar los 29 primeros. En total han de pasar 29 + 1 + 29 = 59 días para que ahorren la misma cantidad.

Otra forma de resolverlo es mediante el álgebra y la suma de los términos de una progresión. Sean x los días que deben pasar para que ambos tengan la misma cantidad de dinero.

Lucía tendrá: $1+2+3+...+x=\frac{1+x}{2}\cdot x$ céntimos y Juan 30x céntimos. Por tanto $\frac{1+x}{2}x=30x$, de donde $\frac{1+x}{2}=30 \Rightarrow 1+x=2\cdot 30=60 \Rightarrow x=59$ días.

7. (D) Si queremos que en cada jaula haya el mismo número de animales y sin mezclar especies, tenemos que buscar un divisor común de 12, 16 y 8. Y, para que el número de jaulas sea mínimo, debemos poner en cada jaula el máximo número de animales, es decir, el máximo común divisor de 12, 16 y 8, que es 4. Por lo que necesitaremos 3 jaulas de hamsters, 4 de cobayas y 2 de chinchillas. En total 9 jaulas con 4 animales en cada una.

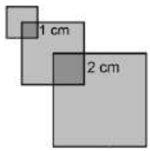
8. (C) Nombrando el número de caramelos, que cada criatura cogió, por la inicial de cada nombre, el enunciado nos dice:

$B = A - 2$; $C = B - 7 = (A - 2) - 7 = A - 9$;

$D = B + 5 = (A - 2) + 5 = A + 3$; $E = D + 3 = (A + 3) + 3 = A + 6$;

Como $A + B + C + D + E = 68$, tendremos:
$A + (A - 2) + (A - 9) + (A + 3) + (A + 6) = 68 \rightarrow 5A - 2 = 68 \rightarrow 5A = 70$, de donde $A = 14$.
Ana cogió 14 caramelos y, por tanto, la suma de sus cifras es 5.

9. (B) Sumando las áreas de los tres cuadrados obtenemos:
$2^2 + 4^2 + 6^2 = 56$ cm^2. Pero hemos sumado dos veces el área de cada uno de los dos cuadraditos oscuros. Debemos, pues, restar $1^2 + 2^2 = 5$ cm^2 al área total obtenida antes.
El área de la figura es: $56 - 5 = 51$ cm^2.



10.(D) Supongamos que Diofanto dice la verdad, esto implica que no ha sido él, pero también implica que todos los demás mienten; Cantor miente y, por tanto, **Bernoullí dice la verdad**. Pero, como sabemos, también **Bernoullí miente**. Contradicción que nos demuestra que Diofanto no dice la verdad y que por tanto ha sido él, Diofanto, quien ha desordenado los números de Don Retorcido.

11.(D) $2980 \times 0{,}003 = 8{,}94$. Claramente, el número que más se aproxima a 8,94 es el 9.

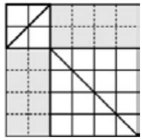
12.(D) Efectuando la división entera de 436 entre 6 obtenemos 72 de cociente y 4 de resto. Esto significa que al colocar los 436 números hemos llenado completamente 72 filas y cuatro columnas de la fila 73. El 436 ocupará la columna D.

13.(D) Comparando $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 198 + 200$ con $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 99 + 100$, observamos que cada uno de los 100 sumandos de la primera suma es el doble del correspondiente de la segunda. Dado que el resultado de ésta es 5050, la suma pedida valdrá $5050 \times 2 = 10\,100$.

14.(D) Tomemos los 41 lados y vayamos construyendo triángulos, de uno en uno, hasta que quede un número de lados que sea múltiplo de 4. El número de lados que van quedando disponibles sucesivamente es: 38, 35, 32…

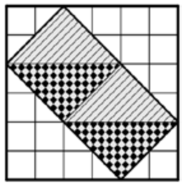
Vemos que tras construir 3 triángulos es posible, por primera vez, construir cuadrados con el resto de los lados sin que sobre ninguno. (32 : 4 = 8)
Por consiguiente, el mínimo número de triángulos que puede tener Javier es 3.

15.(A) Reordenando el cuadrado, como se muestra en la figura, vemos que la fracción coloreada es: $\frac{8+8}{6\times 6}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$



El problema puede resolverse de múltiples formas, como por ejemplo:

Si seccionamos el rectángulo sombreado en cuatro triángulos de base 4 y altura 2, como se aprecia en la figura, es sencillo calcular el área de la parte sombreada:

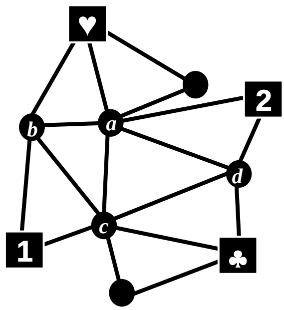


$4\times\left(\frac{2\times 4}{2}\right)=16$ unidades cuadradas.

Dado que el área del cuadrado es de 36 unidades cuadradas, la fracción coloreada es: $\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$.

16.(D) Nos dicen que el área del cuadrado es 36 cm^2. Entonces su lado será $\sqrt{36}=6$ cm y el perímetro de cada uno de los tres polígonos 6 × 4 = 24 cm. Por lo tanto, el lado del hexágono medirá $\frac{24}{6}=4$ cm.

17.(D) En el vértice *a* hay un trébol ya que *c* y *d* estarán ocupados por un corazón y un rombo. En el *b* obligatoriamente hay un rombo y entonces en *c* hay un corazón y en *d* un rombo.
Finalmente se deduce que en 1 hay un trébol y en 2 un corazón.



18.(B) Comenúmeros no se comerá:

a) Los 14 múltiplos de 7 menores que 100: 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91 y 98

b) Los números que contengan el 7 en las decenas, excepto el 70 y el 77: 71, 72, 73, 74, 75, 76, 78 y 79.

c) Los números que contengan el 7 en las unidades, excepto el 7 y el 77: 17, 27, 37, 47, 57, 67, 87 y 97.

En total se comerá 100 – (14 + 8 + 8) = 100 – 30 = 70 números.

19.(E) Interpretando numéricamente los pasos del bombero tenemos: 5 – 8 + 5 = +2, lo que significa que, tras las subidas (+) y las bajadas (–), está situado 2 peldaños por encima del central. Dado que aún le quedan 12 peldaños hasta la parte superior, tenemos 14 peldaños por encima del central y otros 14 por debajo, es decir, la escalera tiene 14 + 1 + 14 = 29 peldaños.

20.(D) Hay 20 – 4 = 16 caramelos en cada bolsa.
16 × 30 niños = 480 caramelos.
Había 480 : 20 = 24 bolsas.

21.(C) Sofía obtuvo 38 + 2 × (17 – 2) = 68 o, lo que es lo mismo, 2 × (17 – 2) = 30, es decir, 2 × 15 = 30. Ahora es fácil encontrar la solución de Santi. Partimos de que el producto del factor *x*, la flor, por el factor (17 – *x*) es igual a 30 y tenemos además la solución de Sofía que lleva a: 2 × 15 = 30. Basta pensar en poner 15 × 2 = 30, para tener 15 × (17 – 15) = 30 y concluir que Santi sustituyó la flor por el número 15. La suma de sus cifras es 6.

22.(A) Pipo tarda en llegar al colegio 8 minutos y recorre 720 metros, luego la velocidad (de los tres) es $\frac{720\ metros}{8\ \text{min}} = 90\ m/\text{min}$.

Pepa, por su parte, camina durante 15 minutos, por lo que recorrerá una distancia igual a 90 × 15 = 1350 metros. Por tanto, la distancia entre las casas de Pepa y Pipo es: 1350 – 720 = 630 metros.

23.(E) María da 20 *pasos pa`lante* y (1 + 2 + 3 +…+ 20) *pasos pa`tras,* por consiguiente le separan $1+2+3+...+19=\frac{1+19}{2}\cdot 19=190$ pasos del punto en que comenzó.

24. (C) La suma de las tres cifras de las unidades tiene que terminar en 2. Para que esto ocurra los tres números pueden ser: dos impares y uno par o los tres pares. Como en las soluciones solamente hay un número impar, el 53, es éste número que no puede ser uno de los que sumó mi hermana.

25.(C) Sea *x* el número de caramelos que dio al menor, tendremos entonces:
x + 2*x* + 4*x* + 8*x* +… = 155. Esto equivale a (1 + 2 + 4 + 8 +…)*x* = 155 = 31 × 5, donde hemos descompuesto 155 en factores primos.
Como es imposible que la suma del paréntesis del primer miembro sea 5, deducimos que (1 + 2 + 4 + 8 +…) = 31, es decir, (1 + 2 + 4 + 8 + 16) = 31. Y los cinco sumandos del paréntesis nos dicen que José María tiene cinco nietos.

XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel II

1. (E) Algunas letras son fáciles de desentrañar: La E debe ser 1; la C debe ser 9; la R es un 0.
Seguimos: la N es un 8. Solo nos queda la O que, después de algún descarte, deducimos que será un 7 y, por tanto, la I es un 2.

$$\begin{array}{rcccc} & & C & O & N \\ + & & & D & E \\ \hline & E & R & I & C \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & & 9 & 7 & 8 \\ + & & & 5 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 9 \end{array}$$

2. (B) Empezamos por el final: el triple de 600 es 1800; la quinta parte de 1800 es 360; el doble 360 es 720; la cuarta parte de 720 es 180.
También podríamos haberlo hecho de golpe: $\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\frac{1}{5}\cdot 3\cdot 600 = \frac{3}{10}\cdot 600 = 180$.

3. (A) Observando cómo se van formando las **M** vemos que para construir la que ocupa el lugar n se necesitan $2n$ palillos para los tramos oblicuos y $2(n+1)$ palillos para las patas. Es decir, un total de $2n + 2(n+1) = 4n + 2$.
Para la **M** que ocupa el lugar 100º ($n = 100$) se necesitan $4\cdot 100 + 2 = 402$ palillos.

4. (D) El enunciado nos asegura que 7 kg de arroz ocupan 8 dm^3.
Como la arista del cubo mayor mide 4 dm, su volumen es de 64 dm^3, por lo que caben $8\cdot 7 = 56$ kg de arroz.

5. (C) Representamos el número como $\underline{a}\ \underline{b}$ donde a es la cifra de las decenas y b la de las unidades. Observa que el número vale $\underline{a}\ \underline{b} = 10a + b$.
Las condiciones del problema nos aseguran que: $4(a + b) = 10a + b$, y ya es fácil:
$4(a + b) = 10a + b \Rightarrow 4a + 4b = 10a + b \Rightarrow 3b = 6a \Rightarrow b = 2a$
Es decir, la cifra de las unidades debe ser el doble que la de las decenas.
Hay, pues, cuatro números con esas propiedades: 12, 24, 36 y 48.

6. (B) Las fracciones y los dibujos se llevan muy bien. Así que hagamos dibujos para representar esas fracciones.
Lo primero: el dibujo que representa al pollo tiene que ser el doble de grande que el dibujo del pavo.
Lo segundo: como el pavo hay que dividirlo en cuatro partes y el pollo en tres partes, lo mejor será dividir ambos en doce partes y todo será más sencillo.

Lo tercero: representamos el pavo con doce unidades y, por tanto, el pollo con veinticuatro.
Lo cuarto: señalamos qué partes corresponden a muslo y qué partes son de pechuga, según el enunciado del problema.

PAVO

Mu	Mu	Mu
Pe	Pe	Pe
Pe	Pe	Pe
Pe	Pe	Pe

POLLO

Mu	Mu	Mu	Mu	Pe	Pe
Mu	Mu	Mu	Mu	Pe	Pe
Mu	Mu	Mu	Mu	Pe	Pe
Mu	Mu	Mu	Mu	Pe	Pe

Según el esquema hay diecisiete partes de pechuga, nueve de las cuales son de pavo. La fracción, es $\frac{9}{17}$.

7. (A) Vamos a tratar de calcular las dimensiones del bloque inicial.
Como 65 solo puede descomponerse de dos formas, 65 = 65·1 = 13·5, deducimos ya que dos de las dimensiones han de ser 13 y 5 (observa que no puede ser 65 y 1 porque si no, nos quedaríamos sin bloque al quitar esa cara).
Las dimensiones iniciales son *a*, 13 y 5.
Al quitar la cara de los 65 cubitos me queda un bloque de dimensiones a –1, 13 y 5.
Ahora hay que quitar otra cara de 30 cubitos, que solo podré hacerlo con la de dimensiones a–1 y 5: $(a-1)\cdot 5 = 30 \Rightarrow a = 7$.
El bloque inicial tiene dimensiones 13, 7 y 5, lo que nos asegura que estaba formado por 13·7·5 = 455 cubitos.
Como hemos quitado 95 cubitos, ahora nos quedan 360 cubitos.

8. (A) Escribamos esa igualdad con potencias de la misma base para así poder usar sus propiedades:

$$4^{10a} = 8^{6b} \Rightarrow \left(2^2\right)^{10a} = \left(2^3\right)^{6b} \Rightarrow 2^{20a} = 2^{18b} \Rightarrow 20a = 18b \Rightarrow 10a = 9b$$

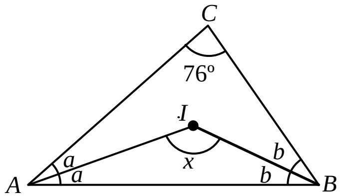
9. (D) Cada lado largo de la bandera hexagonal mide 2015 – 10 = 2005 mm y cada lado corto 5 mm. El perímetro es 3·2005 + 3· 5 = 6030 mm.

10.(E) Empezamos por el número menor y seguimos ordenadamente hasta terminar:

3 – 12 – 21 – 30 – 102 – 111 –102 – 120 – 201 – 210 – 300

Podemos formar diez números.
¿Te atreves ahora con cuatro vasos y tres piedrecitas?

11.(A) Como *AI* y *BI* son bisectrices podemos asegurar que los ángulos con la letra *a* son iguales y lo mismo pasa con los ángulos llamados *b*.
Si nos fijamos ahora en el triángulo *ABI*, observamos que $x = 180º - (a + b)$. Así que si calculamos a + b, habremos resuelto el problema.
En el triángulo *ABC* tenemos que $2a + 2b + 76º = 180º$, es decir, $2a + 2b = 104$ y, por tanto, $a + b = 52$.
Hemos terminado: $x = 180º - (a + b) = 180º - 52º = 128º$.



12.(C) Fijémonos en la serie de Don Retorcido a ver si descubrimos algo:

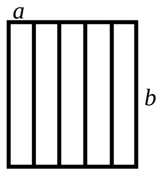
3 4 6 7 9 10 12 13 15 17 18 19 ...

¡Solo aparecen los múltiplos de tres y los múltiplos de tres más uno!
Así pues, en la serie estarán estos números:

2013 2014 2016 2017 2019 2020 ...

El número que no aparece es el 2015.

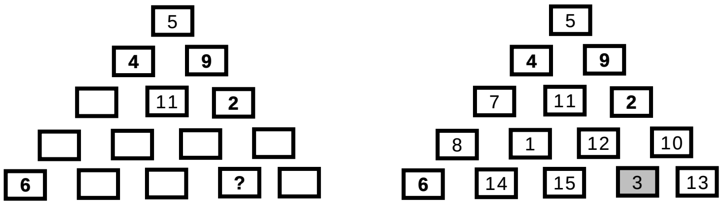
13.(B) Si llamamos *a* al lado menor de cada rectángulo y *b* al lado mayor, conocemos estas dos relaciones:
I. Como se forma un cuadrado: $5a = b$
II. El perímetro de cada rectángulo es 72 cm: $2a + 2b = 72$
La segunda relación podemos escribirla como $2a + 10a = 72$, de donde deducimos que $a = 6$.
Por tanto, el lado del cuadrado es $5·6 = 30$ cm.



14.(E) Primero trabajan ambas *m* minutos, en este tiempo la rápida imprimió $7m$ carteles y la lenta $6m$ carteles, es decir, un total de $13m$ carteles.
Después la lenta trabajó 17 minutos más e imprimió $17·6 = 102$ carteles.
Tenemos pues que $13m + 102 = 440$, de donde $m = 26$ minutos.
La grande imprimió $26·7 = 182$ carteles. (Y la lenta $26·6 + 102 = 258$ carteles)

15.(C) Toca dividir. Fíjate que 1:7 = 0,142857 142857 ...
Para hacer la superdivisión que piden habrá que mover la coma hacia la derecha 33 lugares (que son los ceros que tiene el dividendo). Como el cociente se repite en bloques de seis números y $33 = 5·6 + 3$, vemos que la cifra de las unidades será la que ocupa el tercer lugar en dicho bloque: el 2.

16.(C) Hay que descubrir con cuidado los números que se comió nuestro amigo. Solo podemos escribir un número cuando estemos plenamente seguros.
En una primera ojeada ponemos el 5 y el 11.
Seguimos: debajo del 4 hay un 11, así que a la derecha del 11 podría estar el 15, (15 – 11 = 4) o bien el 7, (11 – 7 = 4). Pero fíjate que el 15 solo podrá estar en la fila de la base porque no hay números cuya resta sea 15 (recuerda que solo trabajamos con los números del 1 al 15). O sea, ponemos un 7.
El siguiente paso será decidir que pareja pones debajo del 11.
Así, poco a poco, puedes rellenar la cascada...
En la interrogación había un 3.

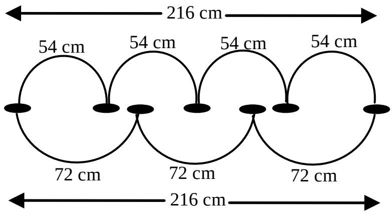


17.(A) Al trabajar con capicúas de cinco cifras está claro que la cifra diferente ha de ser la central y las otras cuatro todas iguales. Has de tener cuidado con no repetir y con la cifra cero.
Si 0 es la central, tenemos nueve números (cifras del 1 al 9): 11011, 22022,...
Si 1 es la central, tenemos ocho números (el 0 no vale porque 00100 = 100 tiene sólo tres cifras y no podemos repetir el 1: 11111).
Si la cifra central es 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 o 9, el caso es similar al anterior y hay ocho capicúas por caso.
En total hay 9 + 9·8 = 81 capicúas con las condiciones requeridas.

18.(A) La única posibilidad válida es que el día 1 del mes de enero sea el martes. De esta manera, el día 20 es domingo. (Mira tus nudillos, el mes de enero tiene 31 días)

19.(D) Como el área del cuadrado grande son 100 cm^2, el porcentaje pedido coincide con el área de la zona negra.
La zona pequeña coloreada de negro tiene un área de $3^2 - 2^2 = 5$.
La zona grande coloreada de negro tiene un área de $10^2 - 7^2 = 51$.
El área de la zona negra total es 51 + 5 = 56. Es decir, el 56% del cuadro mayor.

20. (C) La clave de este problema es averiguar cuáles son las huellas comunes, y eso nos sugiere ir en busca del mínimo común múltiplo: mcm(54, 72) = 216.
Podemos hacer este dibujo que representa las huellas de Saltarín y Brincador:



Así que, sin contar la huella del punto de partida, vemos que cada 216 cm se marcan seis huellas.
Como hay marcadas 73 huellas (la de la salida más otras 72), vemos que el recorrido total está formado por 72:6 = 12 tramos de 216 cm, es decir, 2592 cm.

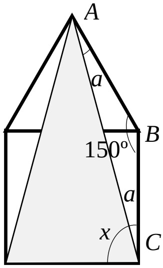
21.(A) Si llamamos x al número de preguntas que tenía la segunda parte del examen podemos formar esta ecuación:

$$\frac{preguntas\ \ acertadas}{preguntas\ \ totales} = nota\ \ final \Rightarrow \frac{12+\frac{2x}{3}}{30+x} = \frac{6}{10} \Rightarrow 10\left(12+\frac{2x}{3}\right) = 6(30+x)$$

es decir, $120+\frac{20x}{3}=180+6x$.

La solución de la ecuación es x = 90, por lo que el examen constaba de un total de 30 + 90 = 120 preguntas.

22.(D) El triángulo *ABC* es isósceles porque *AB* y *BC* miden lo mismo, además su ángulo *B* mide 90º + 60º = 150º. Por tanto, 2*a* + 150º = 180º y entonces *a* = 15º. El ángulo buscado mide *x* = 90º – 15º =75º.



23.(E) El empujón para resolver este problema es observar que el primer número primo, 2, es par y ya todos los demás son impares. Así, para obtener suma impar es obligatorio que uno de los números sea el 2.
El problema pasa a ser ¿cuántas parejas pueden formarse con la condición de que uno de los números sea el 2 y el otro a elegir entre diecinueve?

$$p = \frac{parejas\ \ favorables}{parejas\ \ posibles} = \frac{19+19}{20{\cdot}19} = \frac{1}{10}$$

Lo aclaramos:
Las parejas posibles son 20 (posibilidades del primer número) multiplicado por 19 (posibilidades del segundo número).
Las parejas favorables son 19 (estando el 2 como primer número) más otras 19 (estando el 2 como segundo número).

24.(D) Muchos problemas de porcentajes podemos atacarlos dando valores concretos a las medidas que intervienen y luego calcular el porcentaje y contestar.
Si suponemos que la base mide 10 m y la altura 10 m, su área será de 100 m^2 (¿Has visto qué bien hemos elegido esas medidas?).
La base aumenta un 20 %, es decir, aumenta 2 m y pasa a ser 12 m.
La altura disminuye un 20%, es decir, disminuye 2 m pasa a ser 8 m.
El área es 8 ·12 = 96 m^2.
Así pues, el área ha disminuido 4 m2, es decir, ha disminuido un 4 %.
No ha sido difícil.

25.(D) Vamos a llamar 2*a*, 2*b*, 2*c*, a la capacidad de los recipientes A, B, C, así, cada uno de ellos tiene respectivamente *a*, *b*, *c*, agua.
El primer trasvase nos asegura que $b+c=\frac{3}{4}$ de 2*b*, es decir:
$b+c=\frac{3}{4}\cdot 2b \Rightarrow b+c=\frac{6b}{4}$, al operar se obtiene que $b = 2c$.
El segundo trasvase nos asegura que $a+b+c=\frac{4}{5}$ de 2*a*, que al desarrollar se resume en $3a = 5b + 5c$.
Como la capacidad de C son 8 litros, $c = 4$ y sustituyendo; $b = 8$ y $a = 20$.
La capacidad de A son 40 litros.

XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel III

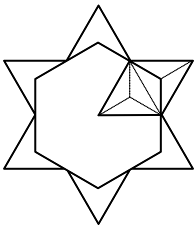
1. (D) Para que la suma sea impar debemos haber sacado una bola par y otra impar. La probabilidad de sacar primero par y después impar es, $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$. A ésta habrá que sumar la probabilidad de sacar primero impar y después par (otro tercio). La probabilidad pedida es $\frac{2}{3}$.

2. (A) $\frac{(n+3)!}{n!}=2^3\cdot 3^3\cdot 7\cdot 13$**.** La división da por otro lado, $(n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3)$. Sólo uno de los tres factores es múltiplo de 3, y por tanto múltiplo de 3^3. Uno debe ser múltiplo de 13 y otro de 7. El reparto de doses nos da la solución: $26 \cdot 27 \cdot 28$. Luego n es 25.

3. (B) $\begin{cases} x+y=76 \\ x-y=44 \\ u+v=y \\ u\cdot v=x \end{cases}$. Las dos primeras ecuaciones nos permiten fácilmente (sumando y restando) hallar x = 60; y = 16. Así sustituyendo en las otras dos ecuaciones obtenemos un sistema relacionado con la ecuación de segundo grado: $u^2-16u+60=0$, obteniéndose $u=\begin{cases}10\\6\end{cases}$, y en paralelo, $v=\begin{cases}6\\10\end{cases}$, siendo en cualquier caso $u^2+v^2=136$.

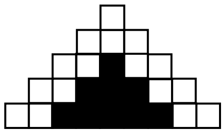
También podríamos (sin calcular expresamente u y v) haber usado la igualdad, $u^2+v^2=(u+v)^2-2uv=16^2-2\cdot 60=136$.

4. (B) Dibujando dos apotemas, vemos en cada punta de la estrella un rombo que queda dividido en una cabeza de flecha y una cometa. El área de la cabeza de flecha es la mitad de la de la cometa, y por tanto el área de la estrella es vez y media la del hexágono.



5. (C) $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)=2^3\cdot3^3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot17$ **.** Los factores primos, 5, 7, 11 y 17, hay que repartirlos entre los cuatro números consecutivos, y el tamaño de lo que queda nos induce a pensar que cada uno de ellos se queda con uno de los primos. Luego habrá dos pares (se repartirán los tres doses) y uno o dos múltiplos de tres. Un poquito más de cavilación, nos da la solución, 33 · 34 · 35 · 36.

6. (C) El total de cuadraditos es $1+3+5+\ldots+(2\cdot32-1)=32^2$.
El de cuadraditos negros es $1+3+5+\ldots+(2\cdot30-1)=30^2$.
La diferencia entre blancos y negros es:
$(32^2-30^2)-30^2=1024-1800=-776$.
Hay 776 cuadraditos negros más que blancos.



7. (A) El polinomio es $P(x)=(x-3)\cdot(x-4)\cdot(x-5)\cdot(x-6)$, luego $P(2)+P(4)=24+24=48$.

8. (E) La suma de los productos de dos en dos de los números del 1 al 6 se puede descomponer en la suma de los productos de dos en dos de los números del 1 al 5, y la suma de los productos de 6 por los números del 1 al 5.
Esta última suma es, 6 · (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 90.
El resultado pedido es, 90 + 85 = 175.

9. (B) El perímetro de un hexágono es $6l$ y el área es $6\cdot\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, y (unidades de medida aparte) esos números deben ser iguales, con lo que, $1=\frac{l\sqrt{3}}{4}$, luego $l=\frac{4}{\sqrt{3}}$.

10.(D) Dicho de otra forma, lo que quiere es que el 80 % del precio de venta sea el 125 % de 200 €, o en lenguaje algebraico, 0,8 x = 1,25·200; es decir, $x=\frac{250}{0{,}8}=312{,}5$ €.

11.(A) El quinto término de nueve es el de en medio, y en una progresión aritmética ése es la media; luego la suma es: 9 · 4 = 36 .

12.(D) 1) Si Ejé va al Norte, Ajá dice en esto la verdad y miente al decir que Ujú no irá al Este. Si Ujú va al Este, Ojó miente al decir que Ejé irá al Este y dice la verdad al afirmar que Ujú va al Oeste. Hemos llegado a una contradicción. Por tanto Ejé no va al Norte, y es verdad que Ujú no va al Este. 2) Si Ejé va al Sur, Ujú dice la verdad cuando dice que Ojó va al Este, y Ojó la verdad cuando dice que Ujú va al Oeste. Así sólo queda el Norte para Ajá.

13.(B) Si llamamos *n* al número de canicas de Alejandra, Celia tiene 2*n* y Hugo 6*n*. Así entre los tres tienen 9 *n*, y por tanto en un reparto igualitario deberían tener cada uno 3*n*. Es Hugo quien tiene que repartir canicas. Tiene que darle *n* a Celia, lo que supone $\frac{1}{6}$ de las que él tiene.

14.(D) El volumen del cilindro A es $\pi r^2 h_1$, igual al de B, $\pi(1{,}1r)^2 h_2$.

Así: $\frac{h_1}{h_2} = \frac{(1{,}1r)^2}{r^2} = 1{,}21$.

15.(C) Si $\left(\sqrt{\pi}, a\right)$ y $\left(\sqrt{\pi}, b\right)$ pertenecen a la curva, $y^2 + x^4 = 2x^2 y + 1$, se tiene que verificar que $a^2 + \pi^2 = 2\pi a + 1$ y $b^2 + \pi^2 = 2\pi b + 1$. Restando ambas expresiones nos queda que: $a^2 - b^2 = 2\pi(a - b)$. Dividiendo por (*a* – *b*), que según el enunciado es distinto de 0, obtenemos que $a + b = 2\pi$. Sumando las expresiones nos queda, $a^2 + b^2 + 2\pi^2 = 2\pi(a+b) + 2$, y cambiando el valor calculado para *a* + *b*, llegamos a, $a^2 + b^2 = 2\pi^2 + 2$, quedando por resolver el sistema,

$\begin{cases} a+b = 2\pi \\ a^2 + b^2 = 2\pi^2 + 2 \end{cases}$, que se transforma en $\begin{cases} a+b = 2\pi \\ a \cdot b = \pi^2 - 1 \end{cases}$, y acaba derivando en la ecuación $a^2 - 2\pi a + \left(\pi^2 - 1\right) = 0$, de soluciones, $\pi + 1$ y $\pi - 1$, que se corresponden (no necesariamente en ese orden) con los valores de *a* y *b* .

Luego $|a - b| = 2$.

16.(B) Sean *n* y *m* ($n \le m$) los lados del rectángulo. Así, $A + P = n \cdot m + 2n + 2m$. Se trata de ver para qué valores de suma (entre los propuestos) hay soluciones enteras para *n* y *m*. Veamos como va la cosa con *n* = 1. $A + P = 3m + 2$, y entonces la suma menos 2 debe ser múltiplo de 3. De las opciones que tenemos sólo ocurre con 104. Si *n* = 2, llegamos a $A + P = 4m + 4$, y entonces, de las dadas, valen 100, 104 y 108. Si *n* = 3, $A + P = 5m + 6$, y vale 106. La única suma que aún no ha funcionado es 102, con lo cual, si el problema está bien puesto (y lo está; basta acabar el razonamiento dando a *n* valores consecutivos hasta 8) hemos terminado.

17.(B) Debemos estudiar las soluciones enteras de la ecuación, $\frac{x+1}{y+1}=\frac{11x}{10y}$, que podemos escribir en la forma, $x\,y+11x-10y=0$, o como, (x – 10) · (y +11) = –110. Las descomposiciones de 110 en dos factores enteros positivos son: 11 y 10, 22 y 5, y, 55 y 2. Como x e y son positivos, x debe ser menor que 10 para que el producto anterior dé negativo. Nos quedan así dos soluciones para el problema, x = 5, y = 11; x = 8, y = 44, pero la última no reúne el requisito de valores primos entre sí.

18.(E) Los martes tiene que correr, ya que si no, de jueves a domingo tendría que correr. tres días y dos de ellos serían consecutivos. De jueves a domingo tiene que correr dos días y nadar uno, y por ello el jueves debe jugar al tenis, ya que no puede hacerlo después de haber corrido o nadado. Debe por tanto nadar el sábado para que los dos días que faltan de correr no sean consecutivos.

19.(A) $\left[(1\lozenge 2)\lozenge 3\right]-\left[1\lozenge(2\lozenge 3)\right]=\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\lozenge 3\right]-\left[1\lozenge\left(2-\frac{1}{3}\right)\right]=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(1-\frac{3}{5}\right)=$

$=\frac{1}{6}-\frac{2}{5}=-\frac{7}{30}$.

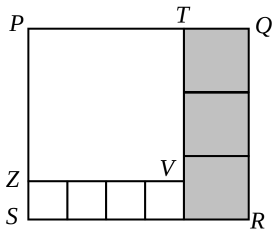
20.(E) El triángulo que se forma es un triángulo rectángulo de vértices: (0, 0), (5, 0) y (0, 12). Dos alturas son los catetos, 5 y 12, y la tercera (altura sobre la hipotenusa) se obtiene igualando áreas: $\frac{cateto\cdot cateto}{2}=\frac{hipotenusa\cdot altura}{2}$. Como la hipotenusa es 13, la altura es $\frac{60}{13}$, y la suma de alturas: $17+\frac{60}{13}=\frac{281}{13}$.

21.(A) Como hay cinco números y la mediana es 9, el 8 sólo puede estar dos veces. Como la media es 10 los dos números que faltan deben ser mayores que 9 y sumar 25. Al ser enteros, el mayor como mucho puede ser 15.

22.(D) Nos preguntan por números entre 5000 y 6000 que tienen algún cero entre sus cifras. Contemos los que comienzan por 5 y no tienen ningún 0. Tenemos el 5 como unidad de millar, nueve cifras para las centenas, nueve cifras para las decenas y nueve para las unidades. Así hay 1 · 9 · 9 · 9 = 729. El resto (1001 – 729 = 272), tienen algún 0 entre sus cifras.

23.(B) El cuadrado PTVZ tiene de lado 20 + x , de forma que, $4\cdot\left(10-x\right)=20+x$.

Así, $x=4$.



24.(A) Podemos (al ser un problema de proporciones) suponer una superficie arbitraria para uno de los dos terrenos. Supondremos que Esteban tiene una parcela de 30 ha, y por tanto la de María es de 20 ha. El terreno dedicado a maíz por Esteban serán los $\frac{4}{5}$ de 30, es decir 24 ha.

Sea x el área dedicada por María al maíz.

Entonces tenemos que: $\frac{24+x}{6+(20-x)}=\frac{7}{3}$, de donde, $x=11$ ha. La proporción maíz/trigo de la parcela de María es: $\frac{11}{9}$.

25.(A) De $\begin{cases} a+b=3 \\ ac+b=18 \end{cases}$ se obtiene $a\cdot(c-1)=15$.

De $\begin{cases} a+b=3 \\ bc+a=6 \end{cases}$; se obtiene $b\cdot(c-1)=3$.

Por tanto, $a+b=\frac{15}{c-1}+\frac{3}{c-1}=3$ y por tanto $c-1=\frac{18}{3}=6$; es decir c = 7.

De las respuestas ofrecidas sólo es válida A).

XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel IV

1. (B) La suma de las bolas será impar si ambas son de distinta paridad. Así pues el suceso pedido es A = $(P_1 \cap I_2) \cup (I_1 \cap P_2)$ en donde P_1, P_2, I_1, I_2 representan los sucesos:

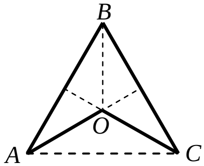
P_i la bola extraída es par en la extracción i.

I_i la bola extraída es impar en la extracción i.

$$p(A) = p(P_1 \cap I_2) + p(I_1 \cap P_2) = \frac{n}{2n}\cdot\frac{n}{2n-1} + \frac{n}{2n}\cdot\frac{n}{2n-1} = \frac{2n^2}{2n(2n-1)} = \frac{n}{2n-1}$$

2. (E) Veamos el número de veces que aparece el factor 3 en cada una de las respuestas. Para simplificar empecemos por 60!.
En 60! hay 20 múltiplos de 3, 6 múltiplos de 9 y 2 múltiplos de 27. Así que el número de veces que aparece el factor 3 en 60! es 20 + 9 + 2 = 28, con lo que no será múltiplo de 3^{29}, siendo entonces 63! la respuesta pedida, ya que 63! tiene 21 + 7 + 2 = 30 veces el factor 3.

3. (A) Observando el triángulo equilátero de arriba, *ABC*, de lado 6, la simetría de la figura nos lleva a decir que *O* es el baricentro de dicho triángulo, por lo que:



$$AO = \frac{2}{3}\left(6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}$$

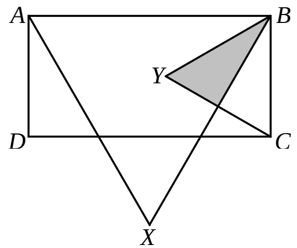
Por lo tanto el lado del hexágono es $4\sqrt{3}$ y su perímetro $24\sqrt{3}$.

4. (B) Los ángulos α, β, γ, en algún orden, son:
180º – (21º + 40º) = 119º, 180º – (21º + 29º) = 130º , 180º – (40º + 29º) = 111º
La diferencia entre el mayor y el menor es 130º – 111º = 19º.

5. (E) Los productos de dos factores del 1 al 7 que no aparecen en el producto de dos factores del 1 al 6 son: 1·7, 2·7, 3·7, 4·7, 5·7 y 6·7, cuya suma es:
7·(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 7·21 = 147.
Por lo tanto la respuesta pedida es 175 + 147 = 322..

6. (D) $\log 1 + \log 2 + ... + \log n = \log(1\cdot 2\cdot ...\cdot n)$ que será mayor que 10 sólo si n! > 10^{10}.
Como $10^{10} = 2^{10} \cdot 5^{10}$ comparamos los factoriales de 11, 12, 13, 14 y 15 con este número. Si empezamos por el central, $13! = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ basta comparar $3^5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 13 \cdot 77 \cdot 243$ con $5^8 = 5^4 \cdot 5^4 = 625 \cdot 625$.
$13 \cdot 77 \cdot 243 < 13 \cdot 80 \cdot 250 = 13 \cdot 20\,000 = 260\,000 < 360\,000 = 600^2 < 625^2$.
Probamos con 14! que se reduciría a comparar $14 \cdot 13 \cdot 77 \cdot 243$ con $625 \cdot 625$. Pero $14 \cdot 77 > 625$ y $13 \cdot 243 > 625$. Así pues la respuesta es $n = 14$.

7. (B) Sabemos que $A\hat{B}Y = 30^o$ y $A\hat{B}X = 60^o$ por lo que $Y\hat{B}X = 30^o$ y como $B\hat{Y}C = 60^o$ se deduce que el triángulo sombreado es rectángulo y su área es la mitad del triángulo *BYC*, es decir, $\frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8}$



8. (E) Basta contar los números de dos cifras distintas, ninguna de ellas cero, tales que la suma de éstas sea múltiplo de 3 en los que la cifra de las decenas sea menor que la de las unidades (para no repetir la carretera a contar).

Éstos son: 12, 15, 18, 24, 27, 36, 39, 45, 48, 57, 19 y 78, en total hay 12.

9. (C) Veamos en primer lugar la probabilidad de que Carlos coja las dos amarillas. La simetría del problema nos conducirá a que el resultado pedido será el anterior multiplicado por 3.
Carlos cogerá las dos amarillas si en las cuatro extracciones anteriores ninguna ha sido amarilla. Esta probabilidad es:

$$p\left(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4\right) = \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

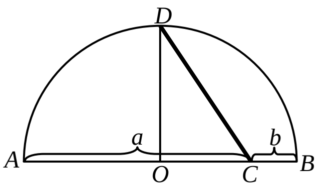
La probabilidad de que Carlos coja las dos bolas del mismo color es $3\cdot\frac{1}{15} = \frac{1}{5}$.

10. (C) En el triángulo rectángulo *ODC* tenemos que:

$OD = OA = \frac{a+b}{2}$ y $OC = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}$.

Entonces $DC^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$,

por lo que $DC = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$



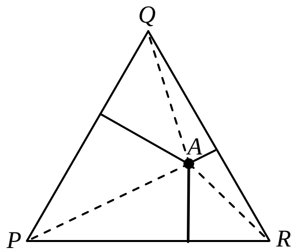
11. (C) Sabemos que $\frac{50P}{100} = \frac{20Q}{100}$, es decir, $P = \frac{2}{5}Q = \frac{40}{100}Q$.

Por lo tanto *P* es el 40 % de *Q*.

.

12. (E) La longitud total de los caminos desde A es la suma de las distancias desde A a los tres lados del triángulo. En un triángulo equilátero dicha suma es la altura del triángulo, independientemente de la situación del punto A interior al triángulo, puesto que, Área PQR = Área PAR + Área QAR + Área PAQ, de donde:

$$\frac{1}{2}l\cdot h=\frac{1}{2}l\cdot h_1+\frac{1}{2}l\cdot h_2+\frac{1}{2}l\cdot h_3 \Rightarrow h=h_1+h_2+h_3 .$$



Así que la longitud total es: $l\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

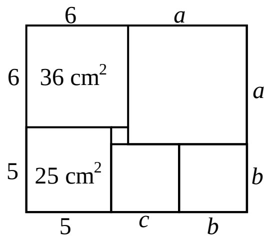
13. (D) Los exponentes deben ser pares para que las correspondientes potencias sean positivas. El –5 lo debemos descartar pues la potencia correspondiente aportará muy poco. Así que $\{a, b, c, d\}=\{-1, -2, -3, -4\}$ con $\{b, d\}=\{-2, -4\}$.

Tomando a = –1 y b = –4 tenemos $(-1)^{-4}+(-3)^{-2}=1+\frac{1}{9}=\frac{10}{9}$.

14. (D) Nombrando a los lados de los cuadrados como indica la figura, resulta que:

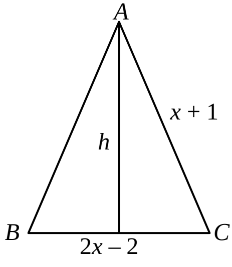
$$\left\{\begin{array}{l} a+b=11 \\ b+c+5=6+a \\ a-6=c-(a-b) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+b\qquad=11 \\ -a+b+c=1 \\ 2a-b-c=6 \end{array}\right.$$

De donde se obtiene a = 7, b = 4, c = 4 y el perímetro pedido es 2·(6 + 7) + 2·(6 + 5) = 48. .

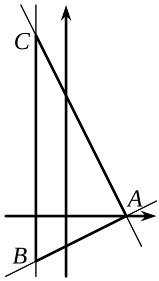


15. (E) La altura, h, sobre BC viene dada por $h=\sqrt{(x+1)^2-(x-1)^2}=\sqrt{4x}=2\sqrt{x}$.

Así pues el área será: $\frac{1}{2}(2x-2)\cdot 2\sqrt{x}=2(x-1)\sqrt{x}$.



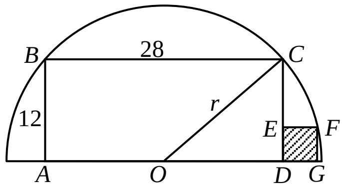
16. (E) El triángulo en cuestión es el de la figura, que es rectángulo ya que las pendientes de las rectas que determinan los lados *BA* y *CA* son $\frac{1}{2}$ y –2, respectivamente.



Los vértices son *A*(4, 0), *B*(–2, –3) y *C*(–2, 12). Los catetos son $AC = \sqrt{6^2+12^2} = 6\sqrt{5}$ y $AB = \sqrt{6^2+3^2} = 3\sqrt{5}$.

El área es $\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{5} = 45$.

17. (E) El triángulo *ODC* nos permite hallar el radio de la semicircunferencia $r = \sqrt{12^2+14^2} = \sqrt{340}$ Si llamamos *x* al lado del cuadrado *DEFG* y consideramos el triángulo rectángulo *OGF* podemos escribir $OF^2 = r^2 = OG^2 + FG^2$, es decir, $340 = (14+x)^2 + x^2 = 2x^2 + 28x + 196$.



Resolviendo la ecuación obtenida, $x^2 + 14x - 72 = 0$ resulta *x* = 4 y por lo tanto el área pedida es 16.

18. (C) Como el número de términos de una progresión aritmética es $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$, en la progresión 1, 3, 5,…, *n* habrá $\frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$ términos y en la progresión 1, 4, 7,…, *n* habrá $\frac{n-1}{3} + 1 = \frac{n+2}{3}$ términos.

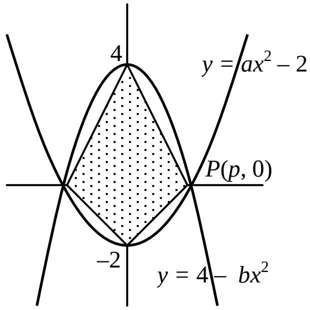
Como $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_n = 320$ podemos escribir $320 = \frac{a_n + a_1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}$.

Análogamente $224 = \frac{a_n + a_1}{2}\cdot\frac{n+2}{3}$. Si dividimos ambas expresiones se obtiene,

$\frac{320}{224} = \frac{3(n+1)}{2(n+2)} \Rightarrow n = 19$.

De la relación $320 = \frac{a_n + a_1}{2}\cdot\frac{19+1}{2}$ se deduce que $\frac{a_n + a_1}{2} = 32$ y por lo tanto la suma de todos los términos de la progresión será, $S = \frac{a_n + a_1}{2}\cdot n = 32\cdot 19 = 608$.

19. (B) Las parábolas en cuestión son las del dibujo, siendo el área del cuadrilátero $\frac{6\cdot 2p}{2}=12$ de donde $p = 2$. Como el punto $P(2, 0)$ pertenece a ambas parábolas , $0 = 4a - 2$ y $0 = 4 - 4b$, así que $a=\frac{1}{2}$, $b = 1$ y $a+b=\frac{3}{2}$.



20. (D) Como $\lg_b c=\frac{1}{\lg_c b}$ escribimos $\lg_a 2+\lg_a 3+\lg_a 4=1$, es decir, $\lg_a 24=1$ y $a = 24$.

21. (C) Si x_1 y x_2 son as raíces del polinomio, $x_1 + x_2 = a$ y $x_1 \cdot x_2 = 2a$, es decir, $x_1\cdot x_2=2(x_1+x_2)\Rightarrow x_1(x_2-2)=2x_2$.

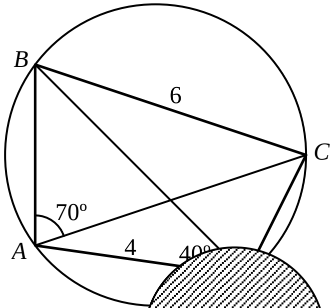
Si $x_2 = 2$ no se daría la igualdad, así que $x_2 \neq 2$ y $x_1=\frac{2x_2}{x_2-2}=2+\frac{4}{x_2-2}$ y al ser x_1 un número entero, $x_2 - 2$ debe ser ± 1, ± 2 ó ± 4.

$x_2 - 2 = 1$ nos lleva a $x_1 = 6$ y $x_2 = 3$, de donde $a = 9$
$x_2 - 2 = -1$ nos lleva a $x_1 = -2$ y $x_2 = 1$, de donde $a = -1$
$x_2 - 2 = 2$ nos lleva a $x_1 = 4$ y $x_2 = 4$, de donde $a = 8$
$x_2 - 2 = -2$ nos lleva a $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$, de donde $a = 0$
$x_2 - 2 = 4$ nos lleva a $x_1 = 3$ y $x_2 = 6$, de donde $a = 9$
$x_2 - 2 = -4$ nos lleva a $x_1 = 1$ y $x_2 = -2$, de donde $a = -1$

Con lo que los posibles valores de a son: 9, –1, 8 y 0. La suma es 16.

22. (D) Al lanzarla n veces la probabilidad de obtener 2 caras es, $\binom{n}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$ y la de obtener 3 caras es, $\binom{n}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}$.

Al ser ambas probabilidades iguales, podemos escribir que $\binom{n}{2}\cdot\frac{3}{4}=\binom{n}{3}\cdot\frac{1}{4}$, es decir, $\frac{3n(n-1)}{2\cdot 4}=\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 4}$ y al ser $n \neq 0$, $n \neq 1$, se obtiene $3=\frac{n-2}{3}$ de donde $n = 11$.

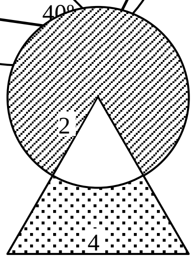


23. (E) La situación del problema es la del dibujo. Los ángulos $A\hat{D}B$ y $A\hat{C}B$ son iguales porque son inscritos que abarcan el mismo arco.

Por lo tanto $A\hat{C}B = 40º$ y el ángulo que falta en el triángulo *ABC* es:

$A\hat{B}C = 180º - (70º + 40º) = 70º$

En consecuencia *ABC* es isósceles y los lados *BC* y *AC* son iguales.
La respuesta es *BC* = *AC* = 6.



24. (A) Si designamos con *C* al área del círculo, con *T* al área del triángulo y con *S* al área del sector de 60º de amplitud, tenemos:

$$C = 4\pi \ , \ T = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \ , \ S = \frac{1}{6}4\pi = \frac{2}{3}\pi \ .$$

La diferencia de ambas zonas, la rayada y la punteada, será:

$$(C - S) - (T - S) = C - T = 4\pi - 4\sqrt{3} = 4\left(\pi - \sqrt{3}\right).$$

25. (C) Veamos que cualquier número *a* > 3 está en el recorrido de la función.
En efecto:

- Si *a* es par, tomamos $b = 2^{\frac{a}{2}} = 2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2$ con $\frac{a}{2}$ veces el factor 2.

  Entonces $r(b) = 2 + 2 + ... + 2 = 2 \cdot \frac{a}{2} = a$.

- Si *a* es impar, tomamos $b = 2^{\frac{a-3}{2}} \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2 \cdot 3$ con $\frac{a-3}{2}$ veces el factor 2 .

  Entonces $r(b) == 2 \cdot \frac{a-3}{2} + 3 = a$.

Así pues, cualquier entero mayor que 3 pertenece al recorrido de la función.
Sin embargo 1, 2, 3 no lo están pues si *r*(*z*) = 1, *r*(*z*) = 2 ó *r*(*z*) = 3, implica que *z* no es compuesto.

Participantes y relación de ganadores del XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

En la primera fase celebrada en los propios centros se superó la cifra de 40 000 estudiantes de 527 centros participantes.

Aunque se inscribieron 3469 concursantes a la segunda fase, el número de participantes fue de 3129. La estadística de participación por niveles y puntuaciones obtenidas puede consultarse en la página de la Sociedad Puig Adam así como la relación de todos los ganadores del concurso y la relación de los centros con mayor puntuación en cada uno de los niveles.

La distribución por niveles de los participantes en la segunda fase, que como siempre tuvo lugar en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, fue la siguiente:

	NIVEL 1		**NIVEL 2**		**NIVEL 3**		**NIVEL 4**	
	5º P y 6º P		**1º ESO, 2º ESO**		**3º ESO, 4º ESO**		**1º B, 2º B**	
nº de participantes	244	532	414	604	394	481	258	202
Totales por nivel	776		1018		875		460	

Los tres, y en algún caso cuatro, ganadores en cada uno de los niveles fueron:

NIVEL I

1. Jimena Lozano Simón (6º Primaria) Colegio Alemán
2. Sergio Pérez Plaza (5º Primaria) Colégio Agustiniano
3. Raúl Sanz Belmar (6º Primaria) CP Pardo Bazán (Leganés)
3. Miguel Soto Martín (6º Primaria) CP Miguel de Cervantes (Tres Cantos)

NIVEL II

1. Pablo Soto Martín (2º ESO) IES José Luis Sampedro (Tres Cantos)
2. Víctor D. Sánchez González (1º ESO) IES Francisco Umbral (Ciempozuelos)
3. Lucas Cuesta Araujo (2º ESO) IES Blas de Otero

NIVEL III

1. Alejandro Epelde Blanco (3º ESO) Montessori School (Los Fresnos)
2. Pablo del Olmo Casas (4º ESO) IES Las Canteras (Collado Villalba)
3. Saúl Rodríguez Martín (4º ESO) Colegio Villa de Griñón (Griñón)

NIVEL IV

1. Daniel Puignau Chacón (1º Bchto) IES Alameda de Osuna
2. Ismael Sierra del Río (2º Bchto) IES San Mateo
3. Gonzalo Gómez Abejón (2º Bchto) IES Ramiro de Maeztu
3. Marc Isern Hacker (1º Bchto) Colegio Alemán

RELACIÓN DE LOS 10 CENTROS CON MEJOR PUNTUACIÓN POR NIVEL

(elaborada con las **tres mejores puntuaciones** de cada centro en cada nivel)

XIX CONCURSO DE PRIMAVERA Mayo2015

NIVEL I		
NOMBREDEL CENTRO	MUNICIPIO	SUMA DE PUNTOS
COLEGIO ALEMÁN DE MADRID	Madrid	293
CP MIGUEL DE CERVANTES	Tres Cantos	277
COLEGIO AGUSTINIANO	Madrid	263
COLEGIO INTERNACIONAL PINOSIERRA	Tres Cantos	257
COLEGIO HÉLADE	Boadilla del Monte	257
COLEGIO NTRA. SRA. DEL RECUERDO	Madrid	251
CP ANTONIO OSUNA	Tres Cantos	248
COLEGIO EUROPEO DE MADRID	Las Rozas	247
COLEGIO VALLMONT	Villanueva del Pardillo	245
COLEGIO AMANECER	Alcorcón	244

NIVEL II		
NOMBREDEL CENTRO	MUNICIPIO	SUMA DE PUNTOS
IES BLAS DE OTERO	Madrid	289
COLEGIO CASVI-BOADILLA	Boadilla del Monte	272
IES JOSÉ LUIS SAMPEDRO	Tres Cantos	271
COLEGIO JOYFE	Madrid	270
COLEGIO SAN AGUSTÍN	Madrid	261
COLEGIO ARCÁNGEL RAFAEL	Madrid	259
COLEGIO AMOR DE DIOS	Madrid	252
RUNNYMEDE COLLEGE	Alcobendas	251
IES SAN JUAN BAUTISTA	Madrid	250
COLEGIO SAN JOSÉ DEL PARQUE	Madrid	247

NIVEL III		
NOMBREDEL CENTRO	MUNICIPIO	SUMA DE PUNTOS
IES EL BURGO DE LAS ROZAS	Las Rozas	255
IES RAMIRO DE MAEZTU	Madrid	228
MONTESSORI SCHOOL LOS FRESNOS	Alpedrete	227
COLEGIO VIRGEN DE ATOCHA	Madrid	222
COLEGIO VILLA DE GRIÑÓN	Griñón	218
COLEGIO ALAMEDA DE OSUNA	Madrid	212
IES JOSÉ LUIS SAMPEDRO	Tres Cantos	209
COLEG NTRA. SRA. DE LAS MARAVILLAS	Madrid	207
IES GRAN CAPITÁN	Madrid	204
COLEGIO SAN JOSÉ DEL PARQUE	Madrid	201

NIVEL IV		
NOMBREDEL CENTRO	MUNICIPIO	SUMA DE PUNTOS
IES SAN MATEO	Madrid	324
IES RAMIRO DE MAEZTU	Madrid	281
IES SAN JUAN BAUTISTA	Madrid	262
COLEGIO ALEMÁN DE MADRID	Madrid	250
IES ALAMEDA DE OSUNA	Madrid	236
RUNNYMEDE COLLEGE	Alcobendas	222
LICEO FRANCÉS	Madrid	221
IES LA ESTRELLA	Madrid	219
IES PABLO NERUDA	Leganés	218
IES ANTARES	Rivas-Vaciamadrid	218

XXXIII CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 13 de junio de 2015

NIVEL I (3º de E.S.O.) Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1. (7 puntos)

En la siguiente posible suma cada letra representa un dígito (0, 1, 2,…, 9), letras diferentes representan dígitos diferentes y ninguno de las tres números empiezan por cero. Encuéntrala o demuestra que no existe tal suma.

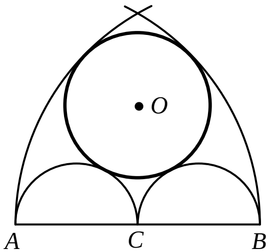
$$\begin{array}{r} \text{S E V E N} \\ +\quad \text{O N E} \\ \hline \text{E I G H T} \end{array}$$

Problema 2. (7 puntos)

En la figura adjunta puedes observar:

- Dos semicircunferencias iguales de diámetros $AC = CB = 10$ cm.
- Una circunferencia de centro O tangente a las dos semicircunferencias anteriores y también tangente a los arcos de centros A y B y radio AB.

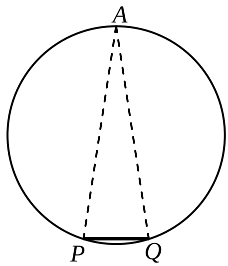
Calcula el radio de esta circunferencia de centro O.



Segunda parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1A. (1 punto)
Si P, U, I, G son enteros positivos tales que $P^2 + U^2 = 20$ y $I^2 + G^2 = 10$, obtén el producto $P \cdot U \cdot I \cdot G$.

Problema 2A. (1,5 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior. Inscribimos en una circunferencia un polígono regular de n lados. En la figura observamos que P y Q son vértices consecutivos del polígono y A es otro vértice de dicho polígono tal que $A\hat{P}Q = A\hat{Q}P = T \cdot P\hat{A}Q$. Calcula el valor de n.



Problema 3A. (2 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior.
Para sumar fracciones no siempre es la mejor forma escribirlos con el mismo denominador. Si descompones hábilmente cada una de las fracciones podrás obtener de una manera fácil la suma siguiente.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{T(T+1)}$$

Problema 1B. (1 punto)
Calcula el mayor divisor primo de $15! - 13!$ (Nota. $6!$ es el producto $6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$)

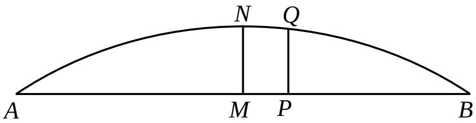
Problema 2B. (1,5 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior. Si el lado del octógono regular *ABCDEFGH* es $\frac{T}{19}$, obtén el valor de $AC^2 - AD$.

Problema 3B. (2 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior y $m = 300\cdot T$. Calcula el número de dos cifras (AB) tal que $3\cdot(BA) + (AB) = m$.

Problema 4. (5 puntos)
Sea $\frac{a}{c}$, irreducible, la respuesta del problema **3A,** b la respuesta del problema **3B** y m la media aritmética de los enteros positivos a, b y c.
Sea S una lista de enteros positivos, no necesariamente distintos, entre los que está el número m. La media aritmética de los números de S es 39. Sin embargo, si quitamos de la lista el número m, la media aritmética de los restantes números de la lista es 37. ¿Cuál es el mayor número que puede aparecer en S?

NIVEL II (4º de E.S.O.) Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1. (7 puntos)
En la figura se observa un segmento circular en el que M es el punto medio de la cuerda AB. Los segmentos MN y PQ son perpendiculares a la cuerda.
Si $MN = 10$, $PQ = 9$ y $PB = 27$ determina la longitud de la cuerda AB.



Problema 2. (7 puntos)
En cierta competición matemática por equipos, de tres componentes cada equipo, se exige que los equipos sean mixtos. Con los alumnos de 4º de ESO del "Club de Matemáticas" de mi instituto se pueden formar 25 equipos diferentes con esas características.
¿Cuántos estudiantes de 4º de ESO hay en el "Club de Matemáticas"?

Segunda parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1A. (1 punto)
Lanzamos al aire una moneda equilibrada n veces. Calcula el menor valor de n para el que la probabilidad de que la moneda muestre todas las veces lo mismo, es decir, siempre cara o siempre cruz, sea menor del 10 %.

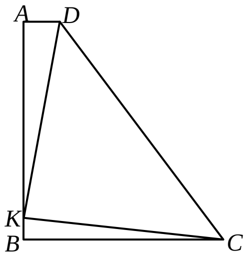
Problema 2A. (1,5 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior. Calcula el menor entero positivo n para que en el dominio de la función $f(x) = \sqrt{-x^2 - 2x + n}$ haya al menos T enteros positivos.

Problema 3A. (2 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior. Calcula el menor número real positivo x tal que $\frac{[x]}{x-[x]} = T$. (Recuerda: $[x]$ representa la parte entera de x)

Problema 1B. (1 punto)
Los vértices del pentágono $ABCDE$ son los puntos $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(6, 6)$, $D(2, 6)$ y $E(0, 2)$. Calcula su área.

Problema 2B. (1,5 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior. La longitud de la diagonal de un rectángulo cuyas dimensiones son las soluciones de la ecuación $x^2 - 3Tx + T^2 = 0$ se puede expresar como $a\sqrt{b}$ en donde a y b son enteros positivos. Calcula el mayor valor posible de a.

Problema 3B. (2 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior.
En el trapecio rectángulo $ABCD$ de la figura, el lado DC mide T cm y las bases AD = 3 cm y BC = 15 cm. Si DK = CK, ¿cuál es la longitud, en cm, del segmento AK?



Problema 4. (5 puntos)
Sean $\frac{a_1}{a_2}$ y $\frac{b_1}{b_2}$ (fracciones irreducibles) las respuestas correspondientes a los problemas **3A** y **3B**, respectivamente.
En una fiesta todos se saludan entre sí una vez, excepto Pedro que se tuvo que ir antes de que llegaran algunos y no pudo saludar a todos. Si hubo en total $(a_1 + a_2 + b_1 + b_2)$ saludos, calcula el número de personas que saludaron a Pedro.

NIVEL III **(1º de Bachillerato)** Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1. (7 puntos)

Se consideran los vectores $\vec{u} = [\overrightarrow{AB}]$, $\vec{v} = [\overrightarrow{AH}]$ y $\vec{w} = [\overrightarrow{AD}]$ determinados por cuatro de los vértices del octógono regular *ABCDEFGH*. Si escribimos el vector $\vec{w}$ como $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ para un único par (*a*, *b*) de números reales, ¿cuál es ese par?

Problema 2. (7 puntos)

Para cada entero positivo k se considera la progresión aritmética infinita S_k cuyo primer término es k y su diferencia k^2. Por ejemplo S_3 = {3, 12, 21, 30,…}. Calcula la suma de todos los k tales que 306 es un elemento de S_k.

Segunda parte (1 hora 30 minutos)

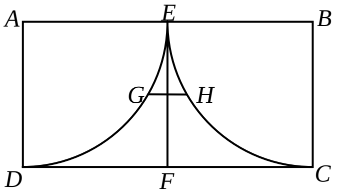
Problema 1A. (1 punto)
Si φ es un ángulo tal que $0º < \varphi < 180º$ y $sen16º \cdot cos286º - cos16º \cdot sen(-106º) = sen\ \varphi$, ¿cuál es el módulo del número complejo $cos\ \varphi + i\ sen\ \varphi$?

Problema 2A. (1,5 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior.
Sean x e y números reales tales que $|x + y - T| + |x - y + 11| = 0$. Calcula el valor de y.

Problema 3A. (2 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior.
La gráfica de la función $y = f(x)$ es simétrica tanto respecto de la recta $x = 4$ como respecto del punto (8, T). Si (3, 7) y (11, k) son puntos de la gráfica, calcula el valor de k.

Problema 1B. (1 punto)
Dos círculos concéntricos verifican que el área del pequeño es igual al área de la corona circular que determinan. Si el radio del círculo pequeño es 1 cm, calcula la longitud de un segmento tangente al círculo pequeño cuyos extremos son puntos de la circunferencia que delimita al círculo mayor.

Problema 2B. (1,5 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior.
En el rectángulo $ABCD$ de la figura, $AD = T$, E y F son los puntos medios de los lados AB y DC respectivamente, los arcos $\overset{\frown}{DGE}$ y $\overset{\frown}{CHE}$ tienen por centro los vértices A y B respectivamente y G y H son puntos de la mediatriz del segmento EF. Si la longitud del segmento GH la escribimos como $p - q\sqrt{3}$, calcula el par de enteros positivos (p, q).



Problema 3B. (2 puntos)
Sea $T = (p, q)$ la respuesta del problema anterior y $r = \dfrac{p}{2q}$.

Calcula la distancia más corta entre un punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ y un punto de la recta $3x + 4y = 12$.

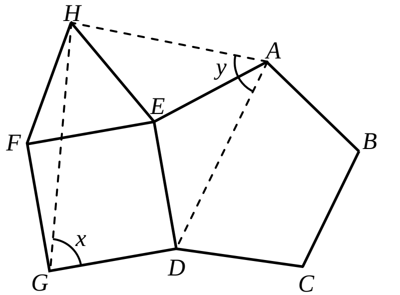
Problema 4. (5 puntos)
Sea a la respuesta del problema **3A** y b la respuesta del problema **3B** y $T = a \cdot b$.
Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una progresión aritmética y $b_1, b_2, b_3, \ldots$ una progresión geométrica.
Consideramos la sucesión $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \ldots$ donde cada $c_n = a_n + b_n$.
Si $c_1 = T - 6$, $c_2 = T - 3$, $c_3 = 2T + 1$ y $c_4 = T - 5$. Calcula c_5.

XV Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

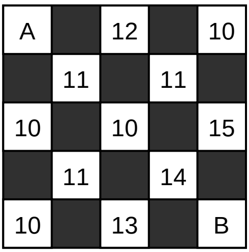
21 de noviembre de 2015

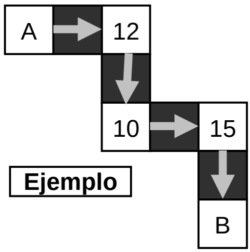
PRUEBA POR EQUIPOS 1º y 2º de E.S.O. (45 minutos)

1. La figura muestra un pentágono regular, *ABCDE*, un cuadrado, *DEFG*, y un triángulo equilátero, *EFH*.
¿Cuál es la diferencia entre los ángulos $D\hat{G}H = x$ y $H\hat{A}D = y$?



2. En la cuadrícula de la figura se parte del cuadradito A y se llega al B. En cada movimiento solo se puede avanzar hacia la derecha o hacia abajo. Por cada cuadradito que se pasa se suma una cantidad, 5 puntos si es negro o el número que aparece si es blanco.
En el camino del ejemplo se sumaría, 5 + 12 + 5 + 10 + 5 + 15 + 5, en total 57.
¿Cuántos caminos hay que sumen 51? Márcalos sobre la figura.





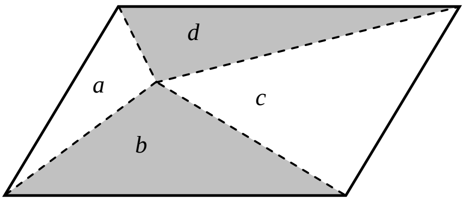
3. La suma de cuatro números primos diferentes es también un número primo. La suma de alguna pareja de esos cuatro, también es un número primo y la suma de alguna terna de esos números, también es un número primo. ¿Cuáles han de ser esos cuatro números primos para que cumplan las condiciones anteriores y la suma de los cuatro sea la menor posible?

PRUEBA POR EQUIPOS 3º y 4º de E.S.O. (45 minutos)

1. Marco escribe varios enteros positivos en la pizarra de forma que sólo dos de ellos son múltiplos de 2. Sin embargo hay exactamente trece que son múltiplos de 13. Si *M* es el mayor de todos, ¿cuál es el menor valor posible de *M*?

2. Encuentra una fracción $\frac{m}{n}$, con $m \neq n$, tal que las seis fracciones $\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n+1}, \frac{m+2}{n+2}, \frac{m+3}{n+3}, \frac{m+4}{n+4}, \frac{m+5}{n+5}$ puedan simplificarse.

3. Desde un punto, elegido al azar en el interior de un paralelogramo, trazamos segmentos a cada uno de sus vértices formando los triángulos *a, b, c* y *d* como muestra la figura.
Prueba que Área (*a*) + Área (*c*) = Área (*b*) + Área (*d*).



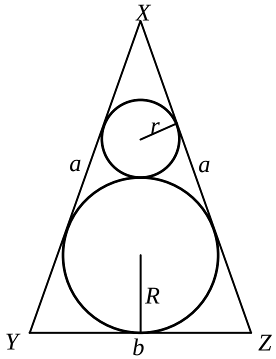
PRUEBA POR EQUIPOS Bachillerato. (45 minutos)

1. Bea y Carlos desarrollan el siguiente juego: Ambos eligen, alternativamente, un número de la lista 1, 2, 3, 4,…, 31. Empieza Bea y luego, cada uno elige un número que no haya sido elegido con anterioridad. El perdedor es aquel que tiene que elegir un número que no sea primo con alguno de los ya elegidos. Escribe un número que pueda elegir Bea con el que siempre va a ganar, independientemente de cómo se desarrolle el juego y justifica por qué ganaría.

2. En el cuadrado mágico de la figura cada fila columna o diagonal suman lo mismo. Si *a*, *b*, *c*, *x*, *y*, *z* son números positivos, determina el producto $x \cdot y \cdot z$ en términos de *a*, *b* y *c*. (Todos los logaritmos que aparecen están en base 10)

$\lg a$	$\lg b$	$\lg x$
p	$\lg y$	$\lg c$
$\lg z$	q	r

3. En el interior del triángulo isósceles XYZ con $XY = XZ = a$, $YZ = b$ y $b < 2a$, dibujamos dos circunferencias, de radios R y r, tangentes entre sí y tangentes al triángulo como muestra la figura. Escribe una expresión para $\frac{R}{r}$ en términos de a y b.



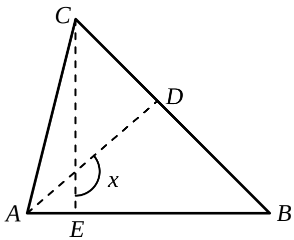
<u>PRUEBA INDIVIDUAL</u> 1º y 2º de E.S.O. (90 minutos)

1. En el triángulo *ABC* el ángulo $\hat{B}$ es el 25 % mayor que el ángulo $\hat{C}$ y el 50 % mayor que el ángulo $\hat{A}$. ¿Cuántos grados mide el ángulo $\hat{B}$?

2. Nueve helados cuestan 11 € y *a* céntimos y 13 helados cuestan 15 € y *b* céntimos, siendo *a* y *b* números enteros positivos menores que 100. ¿Cuál es el precio de cada helado?

3. Si los números *a, b* y *c* verifican las ecuaciones $a + b + c = 500$, $3a + 2b + c = 1000$, ¿cuál es el valor de $3a + 4b + 5c$?

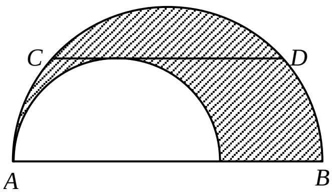
4. En el triángulo *ABC* de la figura, *AD* es la bisectriz del ángulo $\hat{A}$ y *CE* es la altura desde *C*. Si el ángulo *x* es el doble del ángulo $\hat{A}$, ¿cuántos grados mide el ángulo *x*?



5. Los enteros positivos *a, b* y *c* son todos diferentes y ninguno de ellos es un cuadrado perfecto. Sin embargo $a·b$, $a·c$ y $b·c$, los tres son cuadrados perfectos. ¿Cuál es el menor valor posible de $a + b + c$?

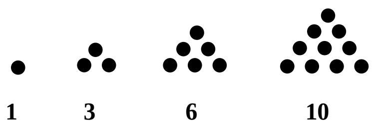
<u>PRUEBA INDIVIDUAL</u> 3º y 4º de E.S.O. (90 minutos)

1. El dibujo muestra dos semicircunferencias. La cuerda *CD*, paralela a *AB*, es tangente a la semicircunferencia pequeña y tiene una longitud de 32 cm. Calcula el área de la región rayada.



2. ¿Cuántos, de los 2015 primeros números triangulares, son múltiplos de 5?

(Recuerda. Los números triangulares son: 1, 3, 6, 10,…



3. Isa y Luisa salen a correr a la vez de cada uno de los extremos de una pista rectilínea. Las dos corren a velocidad constante, pero Isa es más rápida que Luisa. Cuando llegan al extremo opuesto de la pista se dan la vuelta y siguen corriendo a la misma velocidad, cruzándose repetidas veces. La primera vez que se cruzan lo hacen a 20 m del extremo del que partió Luisa y la segunda vez a 10 m del otro extremo. ¿Qué longitud tiene la pista?

4. Calcula los enteros m y n que verifican la igualdad $2^{m+1} + 2^{m} = 3^{n+2} - 3^{n}$.

5. Cortamos un hexágono regular de 2 cm de lado en dos trozos mediante un segmento paralelo a uno de los lados. Si el cociente entre las áreas de estos dos trozos es $\frac{1}{5}$. Calcula la longitud del segmento.

<u>**PRUEBA INDIVIDUAL**</u> **Bachillerato** (90 minutos)

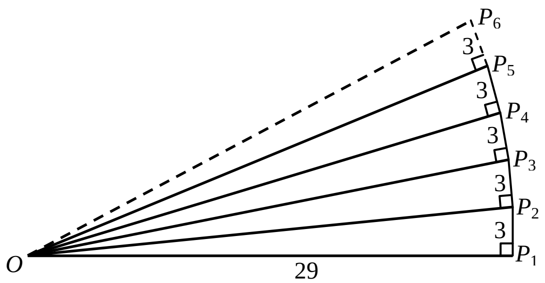
1. La longitud de cada uno de los lados de un rombo es igual a la media geométrica de las longitudes de las diagonales. Calcula la medida del ángulo mayor del rombo.
(Recuerda. La media geométrica de a y b es $\sqrt{a \cdot b}$)

2. La sucesión creciente $\{a_n\} = \{1, 3, 4, 9, 10, 12, 13,\ldots\}$ está formada por los números que, o son potencia de 3 o son suma de dos o más potencias distintas de 3. ¿Cuál es el término a_{70}?

3. Con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 Marta escribe todos los números de siete dígitos que no tienen ningún dígito repetido. Los escribe en una larga lista ordenándolos de menor a mayor. Si parte la lista por la mitad, ¿cuál es el último número de la primera mitad?

4. Encuentra el único número real x tal que $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10} - \sqrt[3]{\sqrt{108}-10} = x$.

5. El dibujo muestra una sucesión de puntos, P_1, P_2, P_3,… describiendo una espiral en torno al punto O. El segmento que une cada punto P_n con el siguiente, P_{n+1}, es perpendicular a OP_n y tiene longitud 3.
Si $OP_1 = 29$, ¿cuál es el siguiente valor de n para el que OP_n es un número entero?



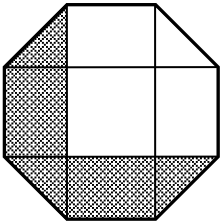
PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

1º y 2º de ESO.-

1A.- ¿Cuántos kilómetros son 25 millones de milímetros?

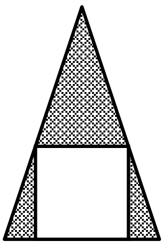
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1B.- Sea "T" la respuesta del problema 2B
La figura adjunta representa un octógono regular de lado T dividido en varias zonas por cuatro diagonales. Cinco de ellas están sombreadas y cuatro no. ¿Cuál es la diferencia entre el área de la zona en blanco y el área de la zona sombreada?



(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1C.- Sea "T" la respuesta del problema 2C.
En el triángulo isósceles de altura $\frac{3}{4}T$ y base $\frac{1}{2}T$ inscribimos un cuadrado como se observa en la figura. Calcula el área de la zona sombreada.



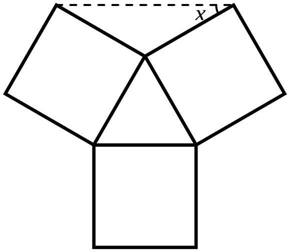
(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

3º y 4º de ESO.-

.

2A.- Sea "T" la respuesta del problema 3A y $n = \sqrt[3]{T}$. Los enteros positivos b y c verifican que las raíces del polinomio $P(x) = 2x^2 + bx + c$ difieren en $2n$. Encuentra el menor valor posible para $b + c$.

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)



2B.- Sobre cada lado de un triángulo equilátero se construye un cuadrado como muestra la figura. ¿Cuánto mide el ángulo *x*?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

2C.- Sea "T" la respuesta del problema 3C.

Si aumentamos la base de un triángulo un $\frac{100}{T}$ % y disminuimos la altura en un p % el área no varía. ¿En qué porcentaje, p, ha disminuido la altura?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

Bachillerato.-

3A.- Sea "T" la respuesta del problema 1A.
En el triángulo isósceles *ABC* los lados *AB* y *BC* miden $5T$ cada uno y el lado *AC* mide $6T$. Si *D* es el punto medio del lado *AC* y *E* y *F* son los pies de las perpendiculares desde *D* a *BC* y *BA*, respectivamente. Calcula el área del triángulo *DEF*.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

3B.- Sea "T" la respuesta del problema 1B y $n = \sqrt{\frac{T}{2}}$.

¿Cuántos subconjuntos de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ tienen exactamente uno o dos números primos?

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

3C.- ¿Cuántas semanas hay en 8! minutos?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

LII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Comunidad de Madrid

FASE CERO: viernes 27 de noviembre de 2015

- En la hoja de respuestas, escribe la letra de la opción que creas correcta
- Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos; cada respuesta en blanco 1 punto, y cada respuesta errónea, 0 puntos.
- No está permitido el uso de calculadoras, instrumentos de medida o de cualquier aparato electrónico.
- TIEMPO: 3 horas.

1. ¿Cuál de los siguientes números es el mayor?

A) $44 \cdot 777$ B) $55 \cdot 666$ C) $77 \cdot 444$ D) $88 \cdot 333$ E) $99 \cdot 222$

2. Javier tarda 16 minutos en llegar desde casa al Instituto. Sus pasos son de 75 cm cada uno y da 90 pasos por minuto. Su hermano Santiago va por el mismo camino, da 100 pasos por minuto pero cada paso es de solo 60 cm. ¿Cuántos minutos tarda Santiago en llegar al Instituto?

A) 14 B) 16 C) 18 D) 20 E) 22

3. Al simplificar $\left(\sqrt[6]{27}-\sqrt{\dfrac{27}{4}}\right)^2$ obtenemos:

A) $\dfrac{3}{4}$ B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ D) $\dfrac{3}{2}$ E) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

4. Si $\dfrac{b}{a}=2$ y $\dfrac{c}{b}=3$, ¿cuál es el cociente $\dfrac{a+b}{b+c}$?

A) $\dfrac{1}{3}$ B) $\dfrac{3}{8}$ C) $\dfrac{3}{5}$ D) $\dfrac{2}{3}$ E) $\dfrac{3}{4}$

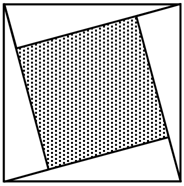
5. Si p, q y r son primos diferentes, ¿cuál de los siguientes números es el menor cubo perfecto que tiene a $n=p\cdot q^2\cdot r^4$ como uno de sus divisores?

A) $p^8\cdot q^8\cdot r^8$ B) $(p\cdot q^2\cdot r^2)^3$ C) $(p^2\cdot q^2\cdot r^2)^3$ D) $p^3\cdot q^3\cdot r^6$ E) $4\cdot p^3\cdot q^3\cdot r^3$

6. Si $8^m=27$, ¿cuál es el valor de 4^m?

A) 3 B) 4 C) 9 D) 13,5 E) No existe ese m

7. En el interior de un cuadrado dibujamos cuatro triángulos rectángulos de hipotenusa el cuádruple de la altura sobre ella, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el cociente entre la longitud del lado del cuadrado sombreado y el lado del cuadrado inicial?



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{15}}{4}$

8. ¿Cuál es el área de un sector circular cuyo perímetro coincide con la longitud de la circunferencia a la que pertenece si el área del círculo correspondiente es 1?

A) $\frac{\pi - 1}{\pi}$ B) $\frac{1}{\pi}$ C) $\frac{\pi}{360}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

9. En la caja A hay a monedas de 1 € y en la B, b monedas también de 1 €. Los números a y b son impares y $a > b$. ¿Cuál es el menor número de monedas que hay que pasar de la caja A a la B para que en la caja B haya más monedas que en A?

A) $\frac{b - a + 2}{2}$ B) $\frac{a - b + 2}{2}$ C) $\frac{b + a - 2}{2}$ D) $\frac{a - b - 2}{2}$ E) $\frac{a + b + 2}{2}$

10. Ali y Bea juegan un cierto número de partidas de un determinado juego. Por cada partida jugada (no hay empates) el ganador recibe 2 puntos y el perdedor recibe 1 punto. Al final, Ali ganó 4 partidas y Bea obtuvo 10 puntos. ¿Cuántas partidas jugaron?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) No es posible determinarlo

11. Después de ir paseando durante 8 km a una velocidad de 4 km/h, Isa empieza a correr a una velocidad de 8 km/h. ¿Cuántos minutos debe estar corriendo para que la velocidad media a lo largo de todo el recorrido sea de 5 km/h?

A) 15 B) 20 C) 30 D) 35 E) 40

12. Si la media de dos números positivos es el 30 % menor que el mayor, ¿qué porcentaje será mayor que el menor?

A) 75% B) 70% C) 30% D) 25% E) 20%

13. En el cuadrado de la figura 1, E y F son los puntos medios de los lados a los que pertenecen. ¿Qué fracción del área del cuadrado representa el pentágono $GECFH$?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{5}{12}$ E) $\frac{4}{15}$

Figura 1.

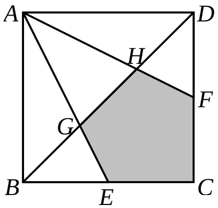
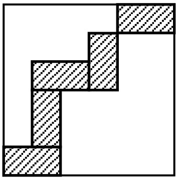


Figura 2.



14. En el interior de un cuadrado de 24 cm de lado dibujamos cinco rectángulos iguales, como muestra la figura 2. ¿Cuál es el área, en cm^2, de cada uno de ellos?

A) 12 B) 16 C) 18 D) 24 E) 32

15. El volumen de un paralelepípedo recto de 32 cm^2 de área total es 8 cm^3. Si las tres dimensiones están en progresión geométrica, la suma, en cm, de las longitudes de todas las aristas es:

A) 28 B) 32 C) 36 D) 40 E) 44

16. Si lanzamos un dado normal seis veces consecutivas, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número mayor o igual que 5 al menos cinco veces?

A) $\frac{13}{729}$ B) $\frac{12}{729}$ C) $\frac{2}{729}$ D) $\frac{3}{729}$ E) Nada de lo anterior

17. ¿Cuántos números podemos escribir como suma de dos enteros positivos distintos, si cada uno de ellos debe ser menor o igual que 100?

A) 196 B) 197 C)198 D)199 E) 200

18. ¿Cuántos números de cuatro cifras tienen al menos una cifra repetida?

A) $62 \cdot 72$ B) $52 \cdot 72$ C) $52 \cdot 82$ D) $42 \cdot 82$ E) $42 \cdot 92$

19. Dos coches, A y B, recorren la misma distancia. El coche A recorre la mitad de la distancia a k km/h y la otra mitad a v km/h. El coche B va la mitad del tiempo a k km/h y la otra mitad a v km/h. Si la velocidad media de A ha sido x km/h y la de B y km/h, entonces:

A) $x \le y$ B) $y \le x$ C) $x = y$ D) $x < y$ E) $x > y$

20. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $\left| x - \left| 2x + 1 \right| \right| = 3$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

21. En el lado BC del triángulo ABC marcamos un punto D tal que $C\hat{A}D = D\hat{A}B = 60º$. Si $AC = 3$ y $AB = 6$, la longitud de AD es:

A) 2 B) 2,5 C) 3 D) 3,5 E) 4

22. Si A, B y C no están alineados, ¿cuál es el valor mínimo del área del triángulo ABC si $A(0, 0)$, $B(36, 15)$ y las coordenadas de C son números enteros?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{13}{2}$ E) No existe tal mínimo

23. Si $|x| + x + y = 10$ y $x + |y| - y = 12$, $x + y$ es igual a:

A) – 2 B) 2 C) $\frac{18}{5}$ D) $\frac{22}{3}$ E) 22

24. Si $tg\alpha$ y $tg\beta$ son las soluciones de la ecuación $x^2 - px + q = 0$ y $\frac{1}{tg\alpha}$ y $\frac{1}{tg\beta}$ son las soluciones de la ecuación $x^2 - r\,x + s = 0$, $r \cdot s$ es necesariamente igual a:

A) $p \cdot q$ B) $\frac{1}{p \cdot q}$ C) $\frac{p}{q^2}$ D) $\frac{q}{p^2}$ E) $\frac{p}{q}$

25. En la sucesión 1, 3, 2, -1, -3,… en la que cada término, después de los dos primeros, es igual al anterior menos el anterior al anterior, es decir, $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ para $n > 2$. ¿Cuál es la suma de los 100 primeros términos de esta sucesión?

A) 5 B) 4 C) 2 D) 1 E) -1

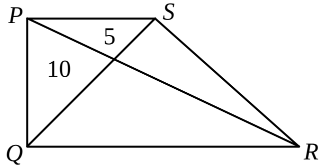
26. En un rectángulo de lados 6 y 11, trazamos las bisectrices de cada uno de los ángulos en los extremos de uno de los lados de longitud 11. Dichas bisectrices dividen al otro lado de longitud 11 en tres partes. Las longitudes de estas partes son:

A) 1, 9, 1 B) 6, 1, 6 C) 3, 5, 3 D) 4, 3, 4 E) 5, 1, 5

27. Si p es primo y las dos raíces de la ecuación $x^2 + px - 444p = 0$ son enteros, entonces:

A) $1 < p \leq 11$ B) $11 < p \leq 21$ C) $21 < p \leq 31$ D) $31 < p \leq 41$ E) $41 < p \leq 51$

28. En el trapecio rectángulo *PQRS* trazamos las diagonales, siendo 5 y 10 las áreas de dos de los triángulos que determinan, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área del trapecio?



A) 60 B) 45 C) 40 D) 35 E) 30

29. María escribió varios enteros positivos distintos, ninguno mayor que 100, tales que su producto no era divisible por 18. ¿Cuántos escribió como mucho?

A) 5 B) 17 C) 68 D) 69 E) 90

30. ¿Cuál es el valor de la suma $[\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+\ldots+[\log_2 1023]+[\log_2 1024]$?

A) 8192 B) 8204 C) 9218 D) $[\log_2(1024!)]$ E) Nada de lo anterior

(Recuerda. [*x*] representa la parte entera de *x*).

REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

LII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Comunidad de Madrid

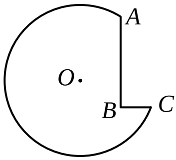
FASE LOCAL: segunda prueba. Viernes 18 de diciembre de 2015
Tiempo: 3h 30 min

1. Sea N el mayor múltiplo de 8 cuyos dígitos son todos distintos. ¿Cuál es el resto de la división de N entre 1000?

2. El lado del cuadrado *ABCD* mide 13 y los puntos *E* y *F* son exteriores al cuadrado con $BE = DF = 5$ y $AE = CF = 12$. Calcula EF^2.

3. En cierta universidad, el Departamento de Matemáticas tiene tres secciones: Puras, Estadística y Computación. En cada sección hay dos profesores y dos profesoras. Se forma un comité con 6 personas, 3 hombres y 3 mujeres de forma que debe haber 2 personas de cada sección. Calcula el número de comités que pueden formarse.

4. La cuchilla de un cortacésped tiene la forma de la figura. El radio del círculo es $\sqrt{50}$ cm, la longitud de *AB* es 6 cm y la de *BC* 2 cm. Si el ángulo en *B* es de 90º, calcula el cuadrado de la distancia, en cm^2, desde *B* hasta el centro, *O*, del círculo.



5. En el triángulo de Pascal, cada elemento que aparece es la suma de los dos que tiene encima.
Alguna de las filas del triángulo son:

Fila 0:					1				
Fila 1:				1		1			
Fila 2:			1		2		1		
Fila 3:		1		3		3		1	
Fila 4:	1		4		6		4		1

¿En qué fila aparecerán tres elementos consecutivos en la razón 3 : 4 : 5?

6. Hay un primo *p* para el que $16p + 1$ es el cubo de un entero. Calcula dicho primo.

7. En el triángulo *ABC*, $AB = \frac{20}{11}AC$. Sea *D* el punto de corte del lado *BC* con la bisectriz del ángulo $\hat{A}$, *M* es el punto medio de *AD* y *P* el punto de corte del lado *AC* con la prolongación de *BM*. Si $\frac{PC}{PA} = \frac{m}{n}$, irreducible, calcula $m + n$.

8. En un trapecio isósceles de bases log192 y log3 y altura log16, escribimos el perímetro en la forma $\log(2^p \cdot 3^q)$ siendo *p* y *q* enteros positivos. Calcula $p + q$:

9. En el trapecio *ABCD*, de bases *BC* y *AD*, *BC* = 1000 y *AD* = 2016. Si $\hat{A} = 37º$ y $\hat{D} = 53º$ y *M* y *N* son los puntos medios de *BC* y *AD* respectivamente, calcula la longitud *MN*.

10. En cierta competición matemática quedan 8 estudiantes de todo el territorio español, de los cuales 3 son de la Comunidad de Madrid. La prueba que deben pasar consiste en resolver unos problemas por parejas, hechas aleatoriamente. Si $\frac{m}{n}$, irreducible, es la probabilidad de que una de las cuatro parejas constituidas esté formada por dos estudiantes de Madrid, calcula $m + n$.

LII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Prueba de selección
Comunidad de Madrid

Primera sesión, viernes 15 de enero de 2016

No está permitido el uso de calculadoras. Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.

1. Las tres raíces del polinomio $x^3 - 14x^2 + Bx - 84$ son los lados de un triángulo rectángulo. Hallar *B*.

2. En un triángulo *ABC* la bisectriz por *A*, la mediana por *B* y la altura por *C* son concurrentes y además la bisectriz por *A* y la mediana por *B* son perpendiculares. Si el lado *AB* mide una unidad, determinar la medida de los otros dos lados.

3. Cada 20 minutos durante una semana se trasvasa una cantidad exacta de litros de agua (siempre la misma cantidad) desde un tanque con 25 000 litros a otro depósito inicialmente vacío. Desde este segundo depósito, a intervalos regulares de tiempo, se extrae primero 1 litro, luego2, luego 3, etc. Justo al final de la semana coinciden el último trasvase y la última extracción, quedando en ese momento vacío el segundo depósito. Determinar cuánta agua se ha extraído en total durante la semana, en caso de que los datos del problema lo permitan.
(Se supone que los trasvases y las extracciones se realizan instantáneamente. El primer trasvase se hace pasados los primeros 20 minutos y la primera extracción, pasado el primer intervalo de tiempo.)

Segunda sesión, Sábado 16 de enero de 2016

Tiempo: 3 horas y media

4. Para pertenecer a un club cada nuevo socio debe pagar como cuota de inscripción a cada miembro del club la misma cantidad que él tuvo que pagar en total cuando ingresó en el club más un euro. Si el primer socio pagó un euro, ¿cuánto deberá pagar en total el *n-ésimo* socio?

5. Dos circunferencias *C* y *C'* son secantes en dos puntos *P* y *Q*. La recta que une los centros corta a *C* en *R* y a *C'* en *R'*, la que une *P* y *R'* corta a *C* en $X \neq P$ y la que une *P* y *R* corta a *C'* en $X' \neq P$. Si los tres puntos *X*, *Q*, *x'* están alineados se pide:
   (i) hallar el ángulo $\angle XPX'$.
   (ii) Demostrar que $(d + r - r')(d - r + r') = r \cdot r'$, donde *d* es la distancia entre los centros de las circunferencias y *r* y *r'* sus radios.

6. Encontrar cuántas soluciones enteras tiene la ecuación:

$$|5 - x_1 - x_2| + |5 + x_1 - x_2| + |5 + x_2 + x_3| + |5 + x_2 - x_3| = 20$$

XXIª OLIMPIADA de MAYO
Primer Nivel
Mayo de 2015

Olimpíada de Mayo
Competencia Juvenil Iberoamericana de Matemática

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

PROBLEMA 1
El profe pensó en secreto un número *S* de tres dígitos. Los alumnos *A*, *B*, *C* y *D* intentaron adivinarlo, diciendo, respectivamente, 541, 837, 291 y 846. El profe les dijo: "Cada uno de vosotros ha acertado exactamente un dígito de *S* y en la posición correcta. Además, para cada dígito de *S* hubo al menos un acierto". ¿Cuál es el número *S*?

PROBLEMA 2
Tenemos 6 monedas indistinguibles, 4 son auténticas, todas del mismo peso, y 2 son falsas, una es más liviana que las auténticas y la otra, más pesada que las auténticas. Las dos falsas pesan, en conjunto, lo mismo que dos monedas auténticas. Hallar dos monedas auténticas utilizando dos veces una balanza de dos platos, sin pesas.
ACLARACIÓN: Una balanza de dos platos solo informa si el plato izquierdo pesa más, igual o menos que el derecho.

PROBLEMA 3
En el cuadrilátero *ABCD*, el ángulo $\hat{C}$ es el triple del ángulo $\hat{A}$. Sean *P* en el lado *AB* tal que $D\hat{A}P = 90^{\circ}$ y *Q* en el lado *AD* tal que $B\hat{Q}A = 90^{\circ}$. Los segmentos *DP* y *BQ* se cortan en *O* de modo que $BO = CO = DO$. Calcular la medida de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{C}$.

PROBLEMA 4
Decimos que un número es *supersticioso* cuando es igual a 13 veces la suma de sus cifras. Encontrar todos los números supersticiosos.

PROBLEMA 5
En una casa se reúnen veintiséis personas. Alicia es amiga de solo una persona, Bruno es amigo de dos personas, Carlos es amigo de tres, Daniel de cuatro, Elías de cinco, y así siguiendo cada persona es amiga de una persona más que la persona anterior, hasta llegar a Yvonne, la persona número veinticinco, que es amiga de todos. ¿De cuántas personas es amiga Zoila, la persona número veintiséis?
ACLARACIÓN: Si A es amigo de B entonces B es amigo de A.

XXIª OLIMPIADA de MAYO
Segundo Nivel
Mayo de 2015

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

PROBLEMA 1
Ana y Celia venden varios objetos y obtienen por cada objeto tantos euros como objetos vendieron. El dinero obtenido está constituido por algunos billetes de 10 euros y menos de 10 monedas de 1 euro. Deciden repartir el dinero del siguiente modo: Ana toma un billete de 10 euros y después Celia, y así sucesivamente hasta que Ana toma el último billete de 10 euros, y Celia se lleva todas las monedas de 1 euro. ¿Cuántos euros más que Celia se llevó Ana? Dar todas las posibilidades.

PROBLEMA 2
Se tiene un tablero de 7×7. Se desea pintar algunas de sus casillas de manera tal que cualquier subtablero de 3×3 tenga más casillas pintadas que sin pintar. ¿Cuál es la menor cantidad de casillas que se deben pintar? Mostrar una configuración con esa cantidad de casillas pintadas y explicar porqué no es posible con menos.
ACLARACIÓN: Un subtablero de 3×3 es un cuadrado formado por 9 casillas del tablero.

PROBLEMA 3
Sea *ABCDEFGHI* un polígono regular de 9 lados. Los segmentos *AE* y *DF* se cortan en *P*. Demostrar que *PG* y *AF* son perpendiculares.

PROBLEMA 4
En una pizarra están escritos los primeros 510 enteros positivos: 1, 2, 3, ..., 510. Una operación consiste en borrar dos números cuya suma sea un número primo. ¿Cuál es el máximo número de operaciones seguidas que se puede hacer? Mostrar cómo se logra y explicar porqué no se puede hacer más operaciones.

PROBLEMA 5
Se tienen 65 puntos del plano. Se trazan todas las rectas que pasan por dos de ellos y se obtienen exactamente 2015 rectas distintas. Demostrar que al menos cuatro de los puntos están alineados.

XXI OLIMPIADA DE MAYO – 2015. RESULTADOS DE ESPAÑA

PRIMER NIVEL

	Apellidos y nombre	Premio
1	Sánchez González, Víctor David	ORO
2	Domínguez Monreal, Hernán	PLATA
3	Villegas Taillefer, Andrés	PLATA
4	Martínez Caldas, Diego	BRONCE
5	Soto Martín, Miguel	BRONCE
6	Bonilla Rangel, Marta	BRONCE
7	Andrés Torrijos, Jorge	BRONCE
8	Moreno Nieto, Mª Ángeles	MENCIÓN
9	Turuelo Menéndez, Javier	MENCIÓN
10	Domínguez del Campo, Cristina	MENCIÓN

SEGUNDO NIVEL

1	Epelde Blanco, Alejandro	ORO
2	Rodríguez Martín, Saúl	PLATA
3	Soto Martín, Pablo	PLATA
4	Alonso Ciria, Pablo	BRONCE
5	Arenas Ferrándiz, Manuel	BRONCE
6	Zhang, Shenghao	BRONCE
7	Ruiz de la Puente, Alejandro	BRONCE
8	Ridouane, Noryne	MENCIÓN
9	Pérez Mugía, Alberto	MENCIÓN
10	Monrobel Ugidos, Paula	MENCIÓN

Dirección General de Mejora de la Calidad de la Enseñanza
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN
Comunidad de Madrid

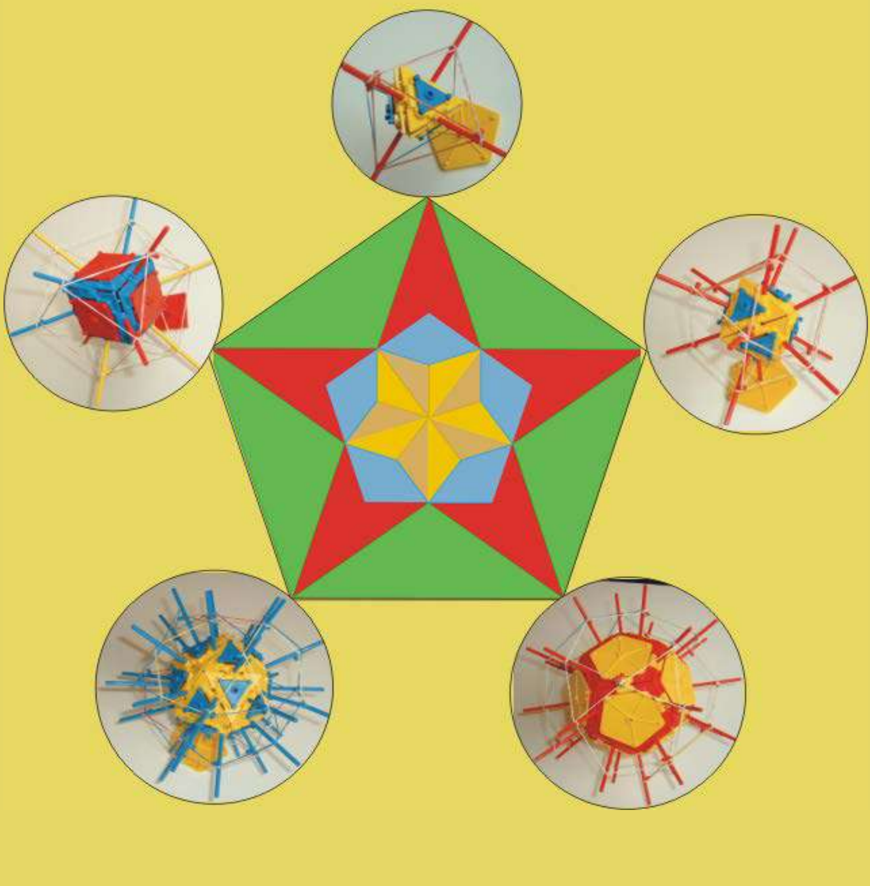
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Consejo Social de la UCM

sm

ANAYA

El Corte Inglés

XXI concurso de primavera Matemáticas 2017



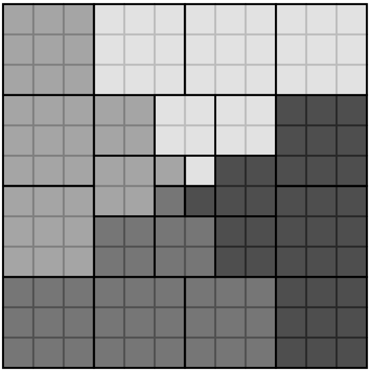
Comunidad
de Madrid

Comité organizador del Concurso de Primavera

Alfredo Martínez Sanz
Esteban Serrano Marugán
Francisco López Álvarez
Hugo Fernández Hervás
Isabel Benito Miguel
Javier Soler Areta
Jesús García Gual
Joaquín Hernández Gómez
José María Sordo Juanena
Juan Jesús Donaire Moreno
Luis Ferrero de Pablo
Marco Castrillón López
María Gaspar Alonso-Vega,
María Moreno Warleta
Merche Sánchez Benito
Miguel Ángel Baeza Alba
Pablo Martínez Dalmau
Pilar Ruiz Cervigón
Víctor Manuel Sánchez González

“ …
Quién pudiera como tú, a la vez quieto y en marcha, cantar siempre el mismo verso pero con distinta agua.
…” *Romance del río Duero (Gerardo Diego)*

…Suma de los primeros cubos



La base del cuadrado marco es $4 \cdot 3$, pero también (mirando la diagonal) $2 \cdot (1+2+3)$.

$$4 \cdot 1^2 + 8 \cdot 2^2 + 12 \cdot 3^2 = 4 \cdot \left(1^2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^2\right) = 4 \cdot \left(1^3 + 2^3 + 3^3\right) = \left(4 \cdot 3\right)^2 = \left(2 \cdot \left(1+2+3\right)\right)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(1+2+3+\ldots+n\right)^2$$

Presentación

Se le acusó al poeta de mirar tanto a la Luna que no veía donde pisaba. Se defendió con un “y tú más”:
“Vosotros miráis la *realidad* y guasapeáis con vuestros móviles, pero ni veis ni habláis”.

El Comité Organizador

AGRADECIMIENTOS

A los participantes en el Concurso, a sus padres y profesores.

A los voluntarios que nos ayudan en la 2ª fase.

A la Facultad de Matemáticas de la UCM.

Al Consejo Social y al Vicerrectorado de alumnos de la UCM.

A la Subdirección General de Formación del Profesorado de la Dirección General de Innovación, Becas y Ayudas a la Educación de la Consejería de Educación, Juventud y Deporte de la Comunidad de Madrid.

A las editoriales Grupo **ANAYA** y Ediciones **S.M.**

Al grupo empresarial El Corte Inglés.

A Smartick.

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 2 de marzo de 2016

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

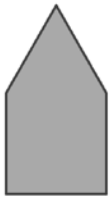
1 ¿Con cuál de estas operaciones se obtiene el número mayor?

A) $20 \times 1{,}6$ **B)** $(20-1)\times 6$ **C)** $20\times(1+6)$ **D)** $20{,}1 \times 6$ **E)** $20 + 16$

2 Miriam ha dibujado un círculo y luego, con mucha paciencia, ha trazado 2016 diámetros diferentes. ¿En cuántos gajos ha quedado dividido su círculo?

A) 2016 **B)** 2032 **C)** 4032 **D)** 2017 **E)** 4030

3 Juntando un cuadrado y un triángulo equilátero hemos formado un pentágono de perímetro 40 cm. ¿Cuál era el perímetro del triángulo?



A) 24 cm **B)** 18 cm **C)** 20 cm **D)** 16 cm
E) 30 cm

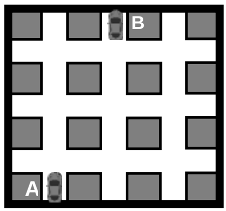
4 El producto $60 \times 24 \times 365 \times 2$ representa...

A) Las horas que hay en dos años
B) Los días que hay en 120 años
C) Los minutos que hay en dos años
D) Los días que hay en 730 años
E) Los segundos que hay en dos años

5 Cinco lombrices se encuentran en el borde de un reloj, justo en la marca de las TRES, y deciden explorar el perímetro del reloj arrastrándose hacia arriba: Pepa recorre 110º, Pepe recorre 450º, Pepi recorre 124º, Pepo recorre tres cuartos de reloj y Pepu recorre medio reloj más la tercera parte de la otra mitad. ¿Qué lombriz se ha detenido más cerca de las OCHO?

A) Pepa **B)** Pepe **C)** Pepi **D)** Pepo **E)** Pepu

6 A Maribel se le ha roto el mando de su coche teledirigido y ya solo puede ir hacia adelante y girar a la derecha. Tiene el coche en A y quiere aparcarlo en B. ¿Cuántos giros a la derecha tendrá que hacer como mínimo para conseguirlo?



A) 4 **B)** 2 **C)** 5 **D)** 3
E) Es imposible hacer la maniobra.

7 Don Retorcido ha escrito en la pizarra todos los números desde el 1 al 200. Después, en un despiste de Don Retorcido, Comenúmeros se ha tragado siete múltiplos de 15. ¿Cuántos múltiplos de quince quedan aún en la pizarra?

A) 15 **B)** 13 **C)** 193 **D)** 6 **E)** 5

8 Cornelia Lamur siempre despide sus Whatsapp con tres emoticonos. Pero no usa cualquiera, a ella solo le gustan estos cuatro: 💔, ☺, 💘, 💋. Aquí tienes tres posibles despedidas de Cornelia: 💋💘💋, 💋💋💘 y 💔☺💘. ¿De cuántas formas puede despedirse Cornelia?

A) 81 **B)** 12 **C)** 27 **D)** 24 **E)** 64

9 Multiplicamos un número por 3, al resultado le sumamos 2, después lo dividimos entre 4 y al restarle 5 obtenemos 15. ¿Cuál era el número de partida?

A) 14 **B)** 26 **C)** 29 **D)** 126 **E)** 234

10 Este año para Halloween compramos una calabaza de 2 kg. Después de vaciarla y decorarla pesaba 1500 gramos. ¿Qué fracción de la calabaza hemos desechado?

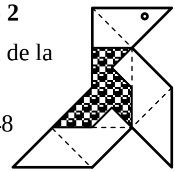
A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{15}{20}$ **D)** $\frac{2}{15}$

E) $\frac{13}{15}$

11 Los 28 niños y niñas de la guardería terminaron la clase muy contentos. Había 10 con una pegatina verde en la frente, 12 con una pegatina roja en el cuello y 9 que iban sin pegatina. ¿Cuántos salieron felices con dos pegatinas?

A) 6 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 13 **E) 2**

12 En la figura podemos apreciar dos pajaritas semejantes. Si el área de la mayor es 72 cm^2, el área de la pequeña, en cm^2, es:



A) 18 **B)** 24 **C)** 32 **D)** 36 **E)** 48

13 La editorial Paganini envió cromos a un colegio para los alumnos de 5º y 6º de primaria. Tocaban a 25 cromos por alumno y sobraban 8. Como cuatro de los niños no quisieron coger cromos, se repartieron todos los cromos sobrantes y tocaron a tres cromos más. ¿Cuántos niños cogieron cromos?

A) 42 **B)** 40 **C)** 38 **D)** 36 **E)** 32

14 En esta suma cada letra representa una cifra diferente.
¿Cuál es la cifra B?

$$\begin{array}{cccc} & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ + & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \hline & \mathbf{B} & \mathbf{B} & \mathbf{B} \end{array}$$

A) 6 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 2 **E)** 9

15 Elisa ha dibujado un cuadrado de 4 metros de lado y ha señalado uno de los vértices y los dos puntos medios de los lados a los que no pertenece dicho vértice. Con estos tres puntos ha formado un triángulo. ¿Cuál es, en m^2, el área de ese triángulo?

A) 6 **B)** 5,5 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

16 He calculado que por cada diez vueltas de la rueda de mi bici avanzo 18 metros. ¿Cuántas vueltas ha dado hoy que he recorrido cuatro kilómetros y medio?

A) 5000 **B)** 4500 **C)** 250 **D)** 500 **E)** 2500

17 Cuando Ainhoa cumplió nueve años su padre le dijo: "cuando tú naciste yo tenía tres veces la edad que tienes ahora". ¿Cuántos años tiene el padre de Ainhoa?

A) 36 **B)** 38 **C)** 54 **D)** 45 **E)** 27

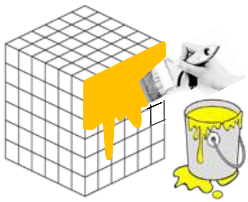
18 Cuatro aves se encuentran en la laguna verde y hablan así:
Pito dice: yo no vivo en el lago Noss y por el camino me encontré con la que vive en Nass.
Poto dice: creo que me estoy enamorando de la que vive en Nass.
Pato dice: ni de casualidad me iría a vivir a Ness ni a Nass.
Peto dice: cada una vivimos en lagos diferentes y además sé que Pito vive en Niss.
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

A) Pato vive en Niss **B)** Ni Pato ni Peto viven en Nass
C) Pito vive en Nass **D)** Pato vive en Noss
E) Poto no vive en Ness

19 Si sumamos las edades de los hermanos Tita, Tito y Titi por parejas obtenemos nueve, once y doce años. ¿Cuántos años tiene el mediano?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 3 **E)** 7

20 Francisco ha coloreado las seis caras de este cubo formado por cubitos de un centímetro de arista. ¿Cuántos cubitos tienen ahora exactamente dos caras coloreadas?



A) 48 **B)** 72 **C)** 60 **D)** 112 **E)** 152

21 Don Retorcido se ha inventado la operación torreta. Observa en qué consiste:

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\boxed{a}} \\ \boxed{b} & \boxed{c} \end{array} = a \times (b + c)$$

¿Cuál de estas cinco torretas da como resultado un número sin decimales?

A) $\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\boxed{5}} \\ \boxed{7{,}5} & \boxed{0{,}4} \end{array}$ **B)** $\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\boxed{1{,}2}} \\ \boxed{0{,}6} & \boxed{5{,}4} \end{array}$ **C)** $\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\boxed{0{,}7}} \\ \boxed{3{,}2} & \boxed{6{,}8} \end{array}$ **D)** $\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\boxed{9{,}1}} \\ \boxed{1{,}3} & \boxed{2{,}3} \end{array}$ **E)** $\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\boxed{5{,}3}} \\ \boxed{3{,}5} & \boxed{1{,}5} \end{array}$

22 En una caja hay cinco bolas rojas, ocho negras y seis verdes. Añadiendo bolas, ¿con cuál de las siguientes opciones se consigue que la probabilidad de sacar bola roja sea $\frac{1}{3}$?

A) Dos rojas y tres negras **B)** Dos verdes y una negra

C) Cuatro rojas y una verde **D)** Tres rojas y dos negras

E) Dos rojas, una negra y dos verde.

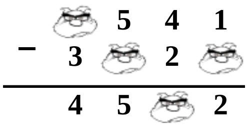
23 Jaimito ha sacado de quicio a su profesora y esta le ha mandado escribir NOHABLARÉENCLASENOHABLARÉENCLASENOHABL… hasta que se le seque el bolígrafo. Justo cuando terminó de escribir la letra número 999 se secó el bolígrafo. ¿Cuál fue la última letra que escribió Jaimito?

A) C **B)** L **C)** A **D)** S **E)** E

24 Cinco pelotas pesan lo mismo que una peonza y un yoyó. Una peonza pesa lo mismo que dos pelotas y un yoyó. ¿Cuántas pelotas pesan lo mismo que dos peonzas?

A) 5 **B)** 9 **C)** 8 **D)** 6 **E)** 7

25 A Comenúmeros le ha dado hambre resolver tantos problemas y se ha comido algunas cifras de esta resta. ¿Cuánto suman los números que se ha comido el muy glotón?



A) 17 **B)** 19 **C)** 15 **D)** 11 **E)** 13

XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 2 de marzo de 2016

NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

1 Multiplicamos un número por 4, al resultado le sumamos 2, después lo dividimos entre 3 y al restarle 5 obtenemos el número de partida. ¿Cuál es este número?

A) 10 **B)** 13 **C)** 16 **D)** 19 **E)** 22

2 En una caja están las primeras nueve bolas de billar, numeradas del 1 al 9. Cinco letras amigas van cogiendo por turno una bola y luego se ordenan de menor a mayor según el número que les ha tocado: P < R < I < M < A. La R está feliz porque es la única que tiene un número primo y la P está triste porque su número es justo la mitad que el de M.
¿Cuánto suman los cinco números de nuestras amigas PRIMA?

A) 33 **B)** 31 **C)** 32 **D)** 30 **E)** 28

3 Usando enteros positivos diferentes solo hay un cuarteto {1, 2, 3, 5} cuya suma sea 11. ¿Cuántos cuartetos de enteros positivos diferentes hay que sumen 15?

A) 6 **B)** 7 **C)** 5 **D)** 8 **E)** 3

4 Lola compara el precio de un billete de avión para NY en dos agencias, Rayantour y Vuelinair. La diferencia de precio entre los dos billetes es de 70 euros, y el precio del billete con la agencia Vuelinair vale los dos tercios del precio del billete en Rayantour. ¿Cuántos euros cuesta el billete más caro?

A) 280 **B)** 244 **C)** 210 **D)** 420 **E)** 235

5 La suma de las tres cifras del número que está pensando Joaquín es cinco. La diferencia entre el mayor y el menor número que cumplen esa condición es:

A) 138 **B)** 396 **C)** 387 **D)** 199 **E)** 421

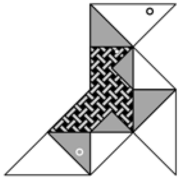
6 Al descomponer 2016 en factores podemos escribir $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7^1$. Siguiendo ese esquema, $\Delta^\Delta \times \Delta^\Delta \times \Delta^\Delta$ y usando esos mismos números: 1, 2, 2, 3, 5, 7, ¿cuál es el menor producto que podemos formar?

A) 1400 **B)** 31 **C)** 150 **D)** 256 **E)** 200

7 Julia dice: "tengo una hermana más que hermanos". Y su hermano Julio dice: "tengo el doble de hermanas que de hermanos". ¿Cuántos hermanos son en total, entre chicas y chicos?

A) 9 **B)** 6 **C)** 8 **D)** 12 **E)** 10

8 En la figura podemos apreciar tres pajaritas semejantes. Si la mayor tiene de perímetro 72 cm, el perímetro de la pequeña, en cm, es:



A) 18 **B)** 24 **C)** 32 **D)** 36 **E)** 48

9 Cuando Ainhoa cumplió nueve años su padre le dijo: “cuando tú naciste yo tenía tres veces la edad que tienes ahora”. ¿Cuántos años tiene el padre de Ainhoa?

A) 36 **B)** 38 **C)** 54 **D)** 45 **E)** 27

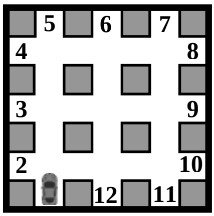
10 Juan sube las escaleras de su casa dando zancadas de dos en dos escalones y las baja a zancadas de tres en tres. Si para subir da siete zancadas más que para bajar, ¿cuántos escalones tiene la escalera de su casa?

A) 42 **B)** 26 **C)** 91 **D)** 35 **E)** 65

11 El reloj de la cocina atrasa 5 minutos cada dos horas y el mío adelanta 5 minutos cada hora. A las 8:00 puse los dos relojes en hora y al volver del colegio mi reloj marcaba una hora más que el de la cocina. ¿A qué hora volví del cole?

A) 16:00 **B)** 16:45 **C)** 15:40 **D)** 15:30 **E)** 14: 45

12 A Maribel se le ha roto el mando de su coche teledirigido y ya solo puede ir hacia adelante y girar a la derecha. Tiene el coche aparcado en la plaza número 1 y lo quiere mover a otra plaza diferente. ¿Cuál es la suma de los números de las plazas a las que no podrá llegar?



A) 30 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 0

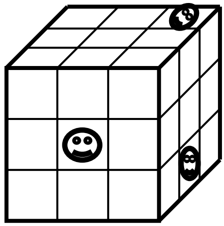
13 María y Esteban juegan al “pilla-pilla”. María está a 150 metros de Esteban que comienza a perseguirla. Si Esteban avanza 10 metros cada vez que María avanza 6, ¿cuántos metros habrá recorrido Esteban cuando pille a María?

A) 286 **B)** 375 **C)** 524 **D)** 853 **E)** 301

14 Elena y Alba se entretienen formando esta cadena: **♥♦ ♦♥♦ ♦♥♦ ♦♥♦ ♦**...
¿Qué posición ocupará en esta cadena el rombo número 97?

A) 144 **B)** 194 **C)** 145 **D)** 147 **E)** 146

15 Con 27 cubitos he formado un cubo y he pintado tres cabecitas sonrientes como puedes ver en mi dibujo. Luego he quitado los cubitos con las cabecitas sonrientes y todos los que se tocan con ellos, cara con cara. ¿Cuántos cubitos quedan?



A) 12 **B)** 18 **C)** 14 **D)** 15 **E)** 13

16 Rosalinda cuida su jardín de esta manera: cada día riega o bien 12 claveles o bien 8 tulipanes. Si al final de la semana ha regado un total de 76 flores, ¿cuántos días se ocupó de los claveles?

A) 6 **B)** 5 **C)** 4 **D)** 3 **E)** 2

17 Don Retorcido ha escrito en la pizarra todos los números desde el 1 al 400. Después, en un despiste de Don Retorcido, Comenúmeros se ha tragado siete cuadrados perfectos. ¿Cuántos cuadrados perfectos quedan escritos en la pizarra?

A) 17 **B)** 13 **C)** 23 **D)** 12 **E)** 31

18 El mínimo común múltiplo de 99 y 999 es:

A) 10 989 **B)** 98 901 **C)** 99 999 **D)** 8991 **E)** 111 111

19 Mi rectángulo es especial: cada lado mide un número entero de centímetros, la base mide siete centímetros más que la altura, la suma de las longitudes de tres de sus lados es 70 cm. ¿Cuántos centímetros mide el perímetro de mi rectángulo?

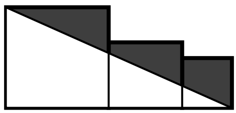
A) 96 **B)** 98 **C)** 92 **D)** 86 **E)** 100

20 Don Retorcido se encuentra con dos enteros positivos, los observa, los estudia, los revuelve, reflexiona y exclama: ¡qué cosa tan bonita, la suma de estos dos números es el doble de su resta! ¿Qué podemos asegurar con seguridad de esos dos números?

A) Son iguales **B)** Uno es la mitad del otro **C)** Uno es el triple del otro

D) Su producto es 28 **E)** Es imposible, Don Retorcido se ha confundido

21 Rocío ha juntado tres cuadrados de lados 5 cm, 6 cm y 9 cm como muestra su dibujo. ¿Qué área, en cm^2, ocupa la parte sombreada?

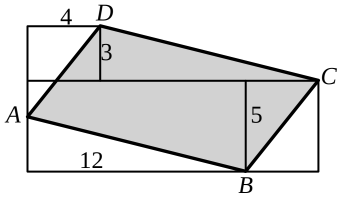


A) 52 **B)** 50 **C)** 71 **D)** 92 **E)** 42

22 El número 1a69b es múltiplo de 2, 9 y 11. ¿Cuánto vale el producto $a \cdot b$?

A) 0 **B)** 2 **C)** 24 **D)** 16 **E)** 8

23 El área del paralelogramo *ABCD* sombreado es:



A) 72 **B)** 56 **C)** 63
D) 97 **E)** 60

24 Una epidemia de fraccionitis está afectando a los pobres habitantes de Matelandia. El primer mes se infectó el 10% de la población. En el segundo mes, el 10% de los enfermos sanó y el 10% de los sanos enfermó. ¿Qué porcentaje de la población padece fraccionitis en este momento?

A) 19% **B)** 18% **C)** 10% **D)** 9% **E)** 1%

25 ¡Ayyy, que se acaba el tiempo!, tic-tac, tic-tac,… Cada cuarto de hora la manecilla de las horas gira un ángulo de …

A) 0,5º **B)** 2,5º **C)** 7,5º **D)** 15º **E)** 30º

XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 2 de marzo de 2016

NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

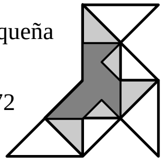
COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

1 En un bombo de lotería quedan cinco bolas. Tres con número par y dos con número impar. Si damos vueltas al bombo y extraemos dos bolas, ¿cuál es la probabilidad de que la suma sea impar?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{2}{5}$ **D)** $\frac{3}{5}$ **E)** $\frac{3}{4}$

2 En la figura podemos apreciar tres pajaritas semejantes. Si la pequeña tiene de perímetro 18 cm, el perímetro de la grande, en cm, es:

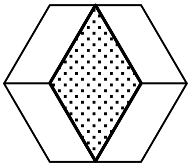


A) 24 **B)** 32 **C)** 36 **D)** 48 **E)** 72

3 Si $\begin{cases} x^2 + y^2 = 212 \\ x + y = 18 \end{cases}$, el valor de $\left|x^2 - y^2\right|$ es:

A) 288 **B)** 252 **C)** 216 **D)** 180 **E)** 144

4 En un hexágono regular, aprovechando los puntos medios de dos lados opuestos hemos construido un rombo de lados paralelos a cuatro lados del hexágono. Si el hexágono regular tiene un área de 48 cm^2, la del rombo, en cm^2, es:



A) 32 **B)** 30 **C)** $24\sqrt{3}$ **D)** 24

E) 16

5 2016 es múltiplo de 16. ¿Cuántos números de la forma 2000 + *b*, con *b* natural y menor que 1000, son divisibles por b?

A) 12 **B)** 16 **C)** 18 **D)** 20 **E)** 24

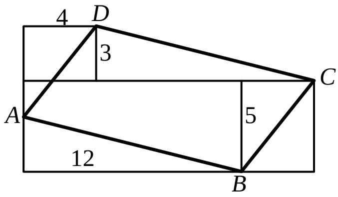
6 El mínimo común múltiplo de 999 y 9999 es:

A) 1 109 889 **B)** $10^6 - 1$ **C)** $10^{12} - 1$ **D)** 110 889 **E)** 333 333 333

7 La suma de todos los productos de cinco en cinco de los números del 1 al 6 acaba en:

A) 0 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

8 El área del paralelogramo *ABCD* es:



A) 72 **B)** 56 **C)** 63

D) 97 **E)** 60

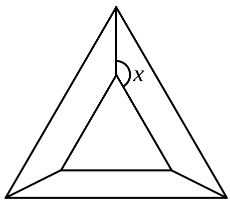
9 Los números 3, *b* y *c* están en progresión geométrica. En cambio, 2*b*, 3*b* y 48 están en progresión aritmética. La suma de la razón y la diferencia de ambas progresiones es:

A) 16 **B)** 15 **C)** 12 **D)** 10 **E)** 7

10 Si *m* es un entero par y *n* es un entero impar, ¿cuál de los siguientes números es un entero impar?

A) $3m + 4n$ **B)** $5mn$ **C)** $(m + 3n)^2$ **D)** $m^3 \cdot n^3$ **E)** $5m + 6n$

11 En el interior de un triángulo equilátero dibujamos otro triángulo, también equilátero, con los lados paralelos al primero y con el mismo centro, como indica la figura. ¿Cuál es el valor del ángulo *x*?



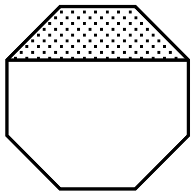
A) 100º **B)** 110º **C)** 120º **D)** 130º

E) 150º

12 ¿Cuál de los siguientes números tiene exactamente 8 divisores?

A) 90 **B)** 60 **C)** 50 **D)** 45 **E)** 30

13 En el octógono regular de la figura, el área de la zona sombreada es de 3 cm^2. ¿Cuál es, en cm^2, el área del octógono?



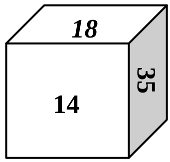
A) 9 **B)** 10 **C)** $8 + 4\sqrt{2}$ **D)** 12

E) $8\sqrt{2}$

14 Si *p*, *q* y *r* son enteros positivos tales que $p + \dfrac{1}{q + \dfrac{1}{r}} = \dfrac{25}{19}$, ¿cuál es el valor de $p \cdot q \cdot r$?

A) 6 **B)** 10 **C)** 18 **D)** 36 **E)** 42

15 En el dibujo de la derecha, las rectas *PQ* y *RS* son paralelas. ¿Cuál es el valor del ángulo $Q\hat{Z}Y$?



A) 30º **B)** 20º **C)** 40º

D) 50º **E)** 60º

16 En la ecuación N·U·(M + E + R + O) = 33, cada letra representa un dígito diferente. ¿De cuántas formas diferentes podemos elegir el valor de las letras?
Por ejemplo: 3·1·(2 + 4 + 0 + 5) sería una de ellas.

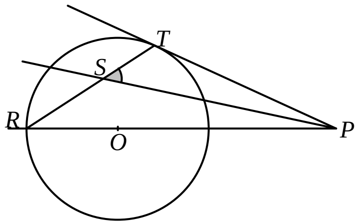
A) 12 **B)** 24 **C)** 30 **D)** 48 **E)** 60

17 En una zona pantanosa las ranas son azules o verdes. Desde el año pasado el número de ranas azules ha crecido un 60 % mientras que el de ranas verdes ha decrecido en la misma proporción, otro 60 %. Ahora resulta que el cociente entre el número de ranas azules y el de ranas verdes es el mismo que el cociente entre el número de ranas verdes y el de ranas azules que había antes. ¿En qué porcentaje ha decrecido el número total de ranas?

A) 5 % **B)** 10 % **C)** 20 % **D)** 25 %

E) Hay las mismas ranas que antes

18 Desde un punto *P* exterior a una circunferencia se trazan dos rectas, una que pasa por el centro *O* y otra tangente en *T*, como muestra la figura. La bisectriz del ángulo $O\hat{P}T$ corta al segmento *RT* en *S*. ¿Cuál es la medida del ángulo $T\hat{S}P$?



A) 22,5º **B)** 30º **C)** 37,5º

D) 45º **E)** 52,5º

19 Don Retorcido tiene una calculadora tan antigua que solo le funcionan las teclas $\boxed{\text{ON}}$, $\boxed{+}$, $\boxed{-}$, $\boxed{\times}$ y $\boxed{\div}$, pero el funcionamiento de las mismas es un poco particular, solo suma o resta. Cuando pulsa $\boxed{\text{ON}}$ marca 0. Cuando pulsa $\boxed{+}$ suma 51 y si pulsa $\boxed{-}$ resta 51. Al pulsar $\boxed{\times}$ suma 85 y si se pulsa $\boxed{\div}$ resta 85. El otro día intentó llegar a 2016 y no lo consiguió. ¿Cuál es el número más próximo a 2016 que se puede conseguir?

A) 2005 **B)** 2006 **C)** 2007 **D)** 2017 **E)** 2023

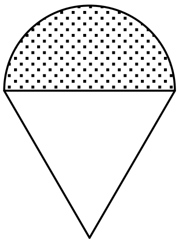
$\boxed{20}$ El resultado de $9^{20} + 9^{20} + 9^{20}$ es:

A) 27^{20} **B)** 9^{60} **C)** 3^{23} **D)** 3^{41} **E)** 27^{60}

$\boxed{21}$ A las 12:00 de la mañana sale un AVE de Sevilla a Zaragoza y a las 12:40 sale otro de Zaragoza a Sevilla. Ambos circulan a la misma velocidad constante y tardan 3 horas y media en hacer el trayecto. ¿A qué hora se cruzan?

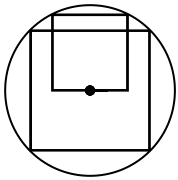
A) 13:45 **B)** 14:00 **C)** 14:05 **D)** 14:15 **E)** 14:25

$\boxed{22}$ Tomando como diámetro el lado de un triángulo equilátero hemos dibujado un semicírculo. El cociente entre el área del semicírculo y la del triángulo es:



A) 1 **B)** $\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$ **C)** $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$ **D)** $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{2}}$ **E)** $\dfrac{\pi}{3}$

$\boxed{23}$ En la figura se observa un cuadrado inscrito en una circunferencia y otro más pequeño con dos vértices en la circunferencia. El centro de la circunferencia es el punto medio de un lado del cuadrado pequeño. El cociente entre las áreas de los cuadrados es:

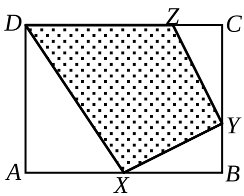


A) $\dfrac{5}{2}$ **B)** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ **C)** 3 **D)** 2 **E)** $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

$\boxed{24}$ Tiramos dos veces un dado cuyas caras están numeradas con: – 3, – 2, – 1, 0, 1, 2. Si multiplicamos los dos números obtenidos, ¿cuál es la probabilidad de obtener un producto negativo?

A) $\dfrac{1}{2}$ **B)** $\dfrac{1}{3}$ **C)** $\dfrac{1}{4}$ **D)** $\dfrac{11}{36}$ **E)** $\dfrac{13}{36}$

$\boxed{25}$ En tres de los lados del rectángulo *ABCD* hemos tomado los puntos *X*, *Y*, *Z*, de manera que *AX* = *XB*, *CY* = 2·*BY*, *DZ* = 3CZ. Con los puntos *D*, *X*, *Y*, *Z*, se determina un cuadrilátero. ¿Qué fracción del área del rectángulo representa el área del cuadrilátero *DXYZ*?



A) $\dfrac{1}{2}$ **B)** $\dfrac{7}{12}$ **C)** $\dfrac{2}{3}$ **D)** $\dfrac{3}{4}$ **E)** $\dfrac{3}{5}$

XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 2 de marzo de 2016

NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática

Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid

El Corte Inglés

Grupo ANAYA

Grupo SM

Smartick

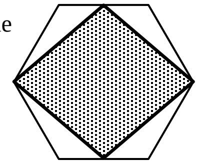
1 En un bombo de lotería quedan $2n + 1$ bolas, $n + 1$ pares y n impares. Si damos vueltas al bombo y extraemos dos bolas, ¿cuál es la probabilidad de que la suma sea impar?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{n-1}{2n+1}$ **C)** $\frac{n}{2n+1}$ **D)** $\frac{n+1}{2n+1}$ **E)** $\frac{n-1}{2n}$

2 ¿Cuál es el factorial más pequeño que es múltiplo de 2^{29}?

A) 32! **B)** 31! **C)** 30! **D)** 25! **E)** 24!

3 El área del rombo inscrito al hexágono regular de la figura es de 24 cm^2. La del hexágono regular, en cm^2, es:



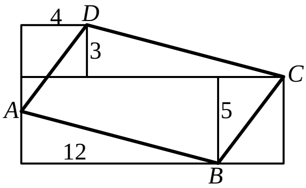
A) 27 **B)** 30 **C)** $24\sqrt{3}$ **D)** 36

E) 48

4 El polinomio de segundo grado en x con coeficientes reales, $ax^2 + bx + a$, verifica que:

A) Su raíz es doble **B)** Sus raíces son inversas **C)** Sus raíces son opuestas
D) Sus dos raíces son reales **E)** Sus dos raíces son estrictamente complejas

5 El seno de uno de los ángulos del paralelogramo *ABCD* es:



A) $\frac{65}{3\sqrt{17}\cdot\sqrt{41}}$ **B)** $\frac{19}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{41}}$

C) $\frac{24}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{41}}$ **D)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **E)** $\frac{56}{65}$

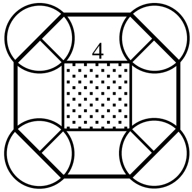
6 La hipérbola, $y = \frac{2x+1}{x-1}$, puede ser escrita en forma implícita mediante la ecuación, $(x - a) \cdot (y - b) = k$. ¿Cuál es el valor de k?

A) 1 **B)** –1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** – 4

7 La suma de todos los productos de ocho en ocho de los números del 1 al 9 acaba en:

A) 0 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

8 El lado del cuadrado central de la figura mide 4 cm. El área, en cm^2, del octógono regular es:



A) $32\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)$ **B)** 48 **C)** $32\cdot\left(4-\sqrt{2}\right)$

D) $128\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)$ **E)** 64

9 ¿Cuál es el dígito de las decenas de $2016^2 - 2016$?

A) 0 **B)** 1 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

10 Los números x e y satisfacen las ecuaciones $x(y + 2) = 100$; $y(x + 2) = 60$. ¿Cuál es el valor de $x - y$?

A) 60 **B)** 50 **C)** 40 **D)** 30 **E)** 20

11 María fue a nadar ayer. Cuando había hecho un quinto de la distancia prevista se tomó un descanso. Después de hacer seis largos más había cubierto un cuarto de lo que iba a hacer. ¿Cuántos largos tenía programado hacer?

A) 40 **B)** 72 **C)** 80 **D)** 100 **E)** 120

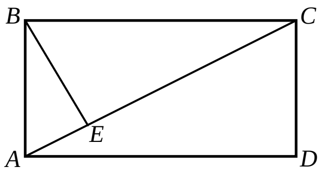
12 En la tienda todos los precios son de la forma a,99 €, en donde a es un número entero positivo. Si un día me gasté 65,76 €, ¿cuántos artículos compré?

A) 4 **B)** 6 **C)** 14 **D)** 24 **E)** Hay varias posibilidades

13 En una lista de cinco enteros la media es 9, la mediana 10 y la moda 11. ¿Cuál es el entero más pequeño que podemos escribir?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

14 Los lados del rectángulo de la figura son uno el doble que otro. Si BE es perpendicular a la diagonal AC, ¿cuál es el cociente entre el área del triángulo ABE y el área del rectángulo $ABCD$?



A) $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$ **B)** $\dfrac{1}{6}$ **C)** $\dfrac{1}{8}$

D) $\dfrac{1}{10}$ **E)** $\dfrac{1}{12}$

15 ¿Para qué enteros n, mayores que 1, se verifica que $4^n - 1$ es un número primo?

A) Para todos los primos mayores que 4 **B)** Para todos los impares mayores que 4
C) Para todos salvo $n = 2$ y $n = 3$ **D)** Sólo para $n = 15$
E) Para ninguno

16 Un día un estudiante le dijo a Don Retorcido que todos los enteros de la forma $8n + 3$, con n entero positivo, tenían un divisor primo que era también de la forma $8q + 3$, con q entero positivo. Don Retorcido le hizo notar que eso no era verdad mostrándole un contraejemplo. ¿Qué números de estos le mostró?

A) 19 **B)** 33 **C)** 91 **D)** 99 **E)** 803

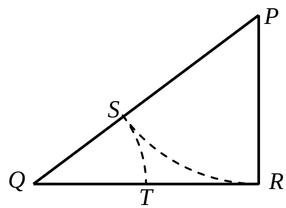
17 ¿Cuántos puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 50$ tienen al menos una de las coordenadas entera?

A) 16 **B)** 30 **C)** 48 **D)** 60 **E)** 100

18 Dos vértices de un cuadrado son los puntos (1, 0) y (2, 0). ¿Cuál de las siguientes rectas lo divide en dos trozos de igual área?

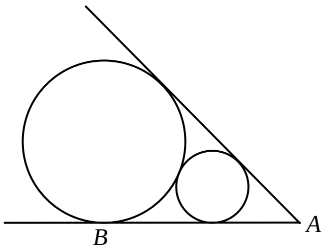
A) $2y = x$ **B)** $3y = x$ **C)** $3y = 2x$ **D)** $2y = \sqrt{2}x$ **E)** $4y - x = 0$

19 El triángulo PQR es rectángulo en R. La circunferencia con centro P y radio PR corta a PQ en S y la circunferencia con centro Q y radio QS corta a QR en T. Si T es el punto medio del lado QR, ¿cuál es el cociente entre QS y SP?



A) $\frac{7}{12}$ **B)** $\frac{5}{12}$ **C)** $\frac{5}{8}$
D) $\frac{3}{4}$ **E)** $\frac{2}{3}$

20 En la figura se observan dos circunferencias de radios 90 y 40, respectivamente, tangentes entre sí y tangentes a dos rectas que se cortan en el punto A. Si B es un punto de tangencia, ¿cuál es la distancia de A a B?

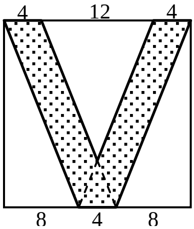


A) 216 **B)** 220 **C)** 224
D) 236 **E)** 240

21 La solución de la ecuación $5^x - 5^{x-2} = 120\sqrt{5}$ es un número racional $\frac{a}{b}$, irreducible. ¿Cuál es el valor de $a \cdot b$?

A) 2 **B)** 6 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 28

22 En el cuadrado de la figura, de lado 20 cm, hemos dibujado esta "V" con las dimensiones que se indican. ¿Cuál es el área, en cm^2, que ocupa la letra "V"?



A) 136 **B)** 150 **C)** 164 **D)** 188

E) 200

23 Si a, b y c son enteros positivos con $abc + ab + ac + bc + a + b + c = 104$, $a^2 + b^2 + c^2$ es igual a:

A) 49 **B)** 51 **C)** 54 **D)** 56 **E)** 60

24 Si $tg\, x + tg\, y = 25$ y $ctg\, x + ctg\, y = 30$, ¿cuál es el valor de $tg\,(x + y)$?

A) 100 **B)** 120 **C)** 150 **D)** 180 **E)** 200

25 En el complejo $z = 9 + bi$ en el que $b > 0$, se verifica que las partes imaginarias de z^2 y de z^3 son iguales. ¿Cuál es el valor de b?

A) 10 **B)** 15 **C)** 20 **D)** 25 **E)** 30

XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 23 de abril de 2016

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática

Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid

El Corte Inglés

Grupo ANAYA

Grupo SM

Smartick

1 Don Retorcido escribió todos los números de tres cifras que son múltiplos de 5 y la suma de sus cifras es 8. ¿Cuántos números escribió Don Retorcido?

A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

2 Este año hemos aprendido a hacer punto y entre todos hemos hecho una bufanda muy colorida que mide cinco metros. Unos niños hicieron 7 franjas rojas de 15 centímetros cada una; otros niños hicieron 12 franjas verdes de 2 decímetros cada una y los niños más pequeños hicieron 6 franjas moradas de 125 milímetros cada una. La franja central la hizo el profesor de color azul. ¿Cuánto medía la franja que hizo nuestro profe?

A) 36,35 dm **B)** 1475 mm **C)** 13 cm **D)** 8 dm **E)** 2,96 m

3 Inés tarda una hora y cuarto desde que se levanta hasta que llega al cole. Está en el colegio seis horas y media y, cuando sale, tarda en llegar a su casa cuarenta y cinco minutos. Si llega a su casa a las cinco menos cuarto, ¿a qué hora se levanta Inés?

A) 8:00 **B)** 9:45 **C)** 7:45 **D)** 8:30 **E)** 8:15

4 Ana hace abdominales cada cuatro días, baila cada cinco días y juega al tenis cada seis, excepto los días que le coinciden dos o las tres actividades, que las sustituye por salir a correr. Hoy le han coincidido las tres, así que ha salido a correr. ¿Cuántas veces hará abdominales en los próximos cien días?

A) 25 **B)** 20 **C)** 15 **D)** 13 **E)** 12

5 Rafa colecciona monedas de diez céntimos y tiene una curiosa forma de ordenarlas: hace el cuadrado más grande posible con ellas y con las que le sobran hace un montoncito. Si tiene en total 26 euros, ¿cuántas monedas habrá en el montoncito?

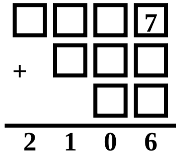
A) 1 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 10

E) 20

6 Luisa es muy olvidadiza y ha pensado que a partir de ahora todas sus contraseñas serán tres letras distintas de su nombre seguidas de dos cifras. Por ejemplo: LSU22 y ASL05 son dos posibles contraseñas. ¿Cuántas contraseñas diferentes hay en total?

A) 120 **B)** 500 **C)** 2700 **D)** 6000 **E)** 12 000

7 Si completas esta suma con los números del 1 al 9 sin repetir ninguno, ¿qué tres números pondrás en la columna de las decenas?
(El 7 ya está puesto).



A) 2, 6 y 5 **B)** 5, 6 y 9 **C)** 2, 8 y 9 **D)** 2, 3 y 5
E) 4, 8 y 9

8 Estas cinco figuras tienen igual área, pero ¿cuál es la que tiene mayor perímetro?

A) **B)** **C)** **D)** **E)**

9 La edición que tengo de El Quijote tiene 1106 páginas. He calculado que cada página tiene unas 1548 letras. ¿Qué número aproxima mejor el número de letras que tiene El Quijote?

A) 1 500 000 **B)** 1 550 000 **C)** 1 600 000 **D)** 1 650 000 **E)** 1 700 000

10 Cervantes nació en Alcalá de Henares el 29 de septiembre de 1547 y ayer, viernes 22 de abril, se cumplieron 400 años de su muerte. ¿Cuántos años tenía Miguel de Cervantes cuando murió?

A) 23 **B)** 47 **C)** 68 **D)** 69
E) 70

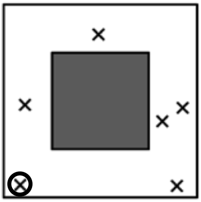
11 ¿Cuántas vueltas da en tres días la aguja de los minutos de un reloj?

A) 72 **B)** 216 **C)** 720 **D)** 2160 **E)** 4320

12 He pensado tres números distintos del 1 al 9. Si sumo los tres obtengo como resultado 10. ¿Cuál de estos números no puede ser el resultado de multiplicarlos?

A) 14 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 24 **E)** 30

13 Seis amigos juegan al escondite en una habitación con una gran columna central. Ana no puede ver a nadie. Dani ve a Emilio y a Bea. Bea puede ver a tres personas. Emilio solo ve a Dani. Carla y Fani son gemelas. ¿Cuál de ellos es el que está en el redondelito?



A) Bea **B)** Carla **C)** Dani **D)** Emilio **E)** Fani

A partir de aquí las respuestas en blanco valen un punto.

14 Si repartiera mis caramelos entre mis compañeros de clase, cada uno tocaría a cuatro y sobrarían dos. También podría repartir mis canicas y, como tengo 26 canicas más que caramelos, cada uno tocaría a cinco y sobrarían siete. ¿Cuál es la suma de las cifras del número de canicas que tengo?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 9 **E)** 14

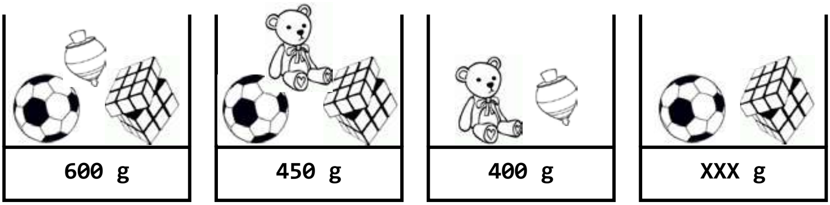
15 ¿ Hansel y Gretel salieron de su casa y fueron tirando una miguita de pan cada medio metro, pero los pajarillos se comieron tres cuartos de las migas y solo quedaron 1200. ¿Cuántos kilómetros recorrieron?

A) 2,4 **B)** 1,5 **C)** 9,6 **D)** 4,8 **E)** 4,5

16 Un ratón le dice a un elefante: "Solo tu trompa pesa 5000 veces más que yo". A lo que el elefante contesta: "Pues sí que eres pequeño. Yo peso 40 veces lo que pesa mi trompa". Si el elefante pesa 5600 kg, ¿cuántos gramos pesa el ratoncito?

A) 28 **B)** 560 **C)** 140 **D)** 56 **E)** 112

17 He puesto en una báscula algunos de mis juguetes, pero la báscula se ha roto en la cuarta pesada. ¿Cuánto marcaría si no se hubiese roto?



A) 400 **B)** 425 **C)** 375 **D)** 300 **E)** 325

18 Javier escribió un número de cuatro cifras y Comenúmeros se comió la cifra de las centenas. Si el número no tenía cifras repetidas y la cifra que se comió no era ni la más grande ni la más pequeña y era impar, ¿qué cifra se zampó?

3  **8 5**

A) 1 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

19 Irene observa en el laboratorio cómo se reproducen unas bacterias. El primer día había 1000, el segundo día había el doble que el primero, el tercer día había el triple que el segundo y el cuarto había cuatro veces lo que había el tercero. De seguir a ese ritmo, ¿cuántas bacterias dirías que habrá el décimo día?

A) Menos de sesenta mil **B)** Cerca de cuatro millones
C) Unas treinta y seis millones **D)** Trescientos sesenta millones aproximadamente
E) Más de tres mil millones

20 En mi colección de figuras geométricas hay tres círculos azules y dos rojos, dos cuadrados verdes, tres azules y uno rojo, cinco triángulos verdes y cuatro rojos. A Marta no le gustan los círculos ni el color rojo. Si coge una figura sin mirar, ¿qué probabilidad tiene de que le toque algo que no le guste?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{3}{5}$ **C)** $\frac{3}{20}$ **D)** $\frac{7}{20}$ **E)** $\frac{13}{20}$

21 Entre Lucía, Julián y Orlando se han comido trece churros y siete porras. Todos comieron piezas enteras y más de una de cada cosa. Orlando comió la misma cantidad de churros que de porras. Julián comió el triple de churros que de porras y Lucía comió la misma cantidad de porras que Julián. ¿Cuántos churros comió Lucía?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** No se puede saber

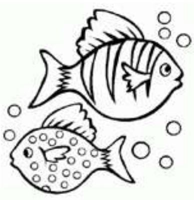
22 El rectángulo gris tiene 54 cm de perímetro y su base es el doble de su altura. A su lado hemos dibujado un rectángulo y cuatro cuadrados. ¿Cuál es el área del rectángulo formado por esas seis figuras?

A) 108 cm^2 **B)** 252 cm^2 **C)** 1008 cm^2
D) 148 cm^2 **E)** 504 cm^2

23 Ana, Blas, Cris, Dani y Elia juegan a un juego en el cada uno es ratón o zorro. Los ratones siempre dicen la verdad mientras que los zorros mienten siempre.
Ana dice que Blas es un ratón. Cris dice que Dani es un zorro.
Elia dice que Ana no es un zorro. Blas dice que Cris no es un ratón.
Dani dice que Ana y Elia son animales distintos. ¿Cuántos zorros hay?

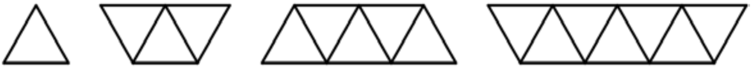
A) 1 **B)**2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

24 Yo antes tenía quince pececitos bebé y un bote de comida para peces me duraba doce días. Ahora han crecido y comen el doble que antes y, como ya no me caben en la pecera, he regalado cinco a Joaquín. ¿Cuántos días me durará ahora un bote de comida?



A) 9 **B)** 12 **C)** 10 **D)** 6 **E)** 15

25 Juanje construye triángulos con palillos. Primero hizo uno y usó tres palillos, después hizo tres y usó siete palillos, después cinco y usó once palillos…



¿Cuántos palillos necesita para construir la figura que está formada por 101 triángulos?

A) 253 **B)** 203 **C)** 303 **D)** 304 **E)** 202

XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 23 de abril de 2016

NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** X LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

1 Pancho miente los lunes, miércoles y viernes, y el resto de los días dice la verdad. Un día se encuentra con don Olvidadizo y mantienen este diálogo:
(Don Olvidadizo) ¿Qué día es hoy Pancho?
(Pancho) Ay, qué cabeza tiene usted, hoy es lunes.
(Don Olvidadizo) ¿Y qué día será mañana?
(Pancho) Pues, ¿qué va a ser?, será jueves.
¿Qué día de la semana tuvo lugar esa conversación?

A) Lunes **B)** Martes **C)** Miércoles **D)** Jueves **E)** Viernes

2 Todos los amigos se fueron juntos a comer y en el restaurante llenaron un montón de mesas de siete. Como estaban muy apretados, la encargada trajo tres mesas más y ahora volvieron a ocuparlas pero mucho más anchos: eran seis por mesa. ¿Cuántos amigos eran?

A) 84 **B)** 45 **C)** 63 **D)** 168 **E)** 126

3 Cuando Comenúmeros está hambriento no hay quien le pare. Esta vez las víctimas han sido algunos múltiplos de 86, distintos, de tres cifras. Se ha puesto a comer algunas cifras como un loco:

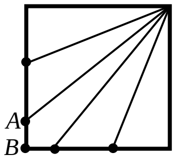
¿Cuánto suman las ocho cifras que ha devorado Comenúmeros?

A) 38 **B)** 25 **C)** 32 **D)** 28 **E)** 19

4 Para hacer sus manualidades, Delia y Álvaro han cogido dos cuerdas que necesitan cortarlas en trocitos de 20 cm. Cuando Delia divide su cuerda, al final le sobran 14 cm. Si la cuerda de Álvaro tiene triple longitud que la de Delia, ¿cuántos centímetros le sobrarán después de cortarla en trocitos de 20 cm?

A) 18 **B)** 6 **C)** 2 **D)** 14 **E)** 12

5 Ismael ha dividido un cuadrado de lado 60 cm en cinco partes de igual área y ha hecho un dibujo para que lo entiendas.
¿Cuántos centímetros mide el segmento *AB*?



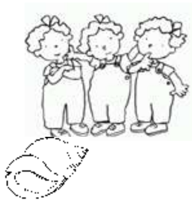
A) 10 **B)** 24 **C)** 15 **D)** 20 **E)** 12

6 Don Retorcido llama *repedós* a los números de cuatro cifras que tienen exactamente dos cifras iguales. ¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor *repedós*?

A) 8885 **B)** 8985 **C)** 9975 **D)** 8787 **E)** 8997

7

Las tres mellizas han salido a buscar caracolas por la playa. Ana ha reunido 48 conchas, Elena 60 y Teresa 72. Deciden hacer paquetitos, cada una con sus conchas, con igual número de caracolas en cada paquete, para que cada niña reparta sus tesoros. ¿Cuál es el menor número de paquetes que tienen que hacer entre las tres trillizas para empaquetar todas las caracolas?



A) 30 **B)** 12 **C)** 10 **D)** 15 **E)** 3

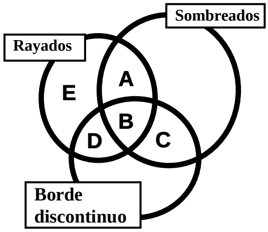
8

Don Pintón elabora sus propios colores para sus cuadros. Tiene muchos botes iguales de tres colores distintos: blanco, amarillo y rojo. Elige tres botes al azar y los mezcla. ¿Con esta técnica, cuántos colores distintos puede obtener don Pintón?

A) 8 **B)** 10 **C)** 18 **D)** 6 **E)** 27

9

Observa el diagrama que te mostramos. 
¿En qué región debemos colocar a este triángulo?



A) A **B)** B **C)** C **D)** D
E) E

10

Don Retorcido es peculiar: lee y monta en bicicleta a la vez. Y además tiene tiempo para inventarse otro problema:
Si letras diferentes representan cifras diferentes, ¿cuánto vale la letra **D** en esta multiplicación?

```
      L E E
    × L E E
  ---------
  ▪▪▪▪▪▪▪
 ▪▪▪▪▪▪▪▪
▪▪▪▪▪▪▪
  ---------
  P E D A L
```

A) 4 **B)** 3 **C)** 6 **D)** 5
E) 8

11

En mi rectángulo, el doble de la base es igual a la mitad del triple de la altura. Si el perímetro mide 84 cm, ¿cuántos cm^2 mide su área?

A) 441 **B)** 405 **C)** 440 **D)** 432 **E)** 360

12 Comenúmeros lo ha vuelto a hacer. Se encontró una tabla de sumar formada por quince enteros positivos, todos ellos diferentes, y zas, empezó a devorarlos. Yo solo recuerdo que el mayor número era 21.
Cuando ya iba a reventar se quedó en la casilla que ves a echarse la siesta. ¿Cuál fue el último número que se zampó Comenúmeros?

+			
	8	12	
	10		
	13		

A) 15 **B)** 21 **C)** 19 **D)** 18 **E)** 20

13 Al multiplicar por cuatro, NOTAR se dio la vuelta y se convirtió en RATÓN. Si letras diferentes representan cifras diferentes, ¿cuánto suma un **R+A+T+O**?

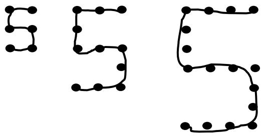
A) 25 **B)** 12 **C)** 19 **D)** 27 **E)** 22

A partir de aquí las respuestas en blanco valen un punto.

14 Ha habido otra gran fiesta de diez números: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, y 9. Han formado cinco parejas para bailar y fíjate, han sumado los dos números de cada pareja y han resultado cinco números primos diferentes. Si el 1 y el 4 siempre bailan juntos, ¿cuál de estas parejas sí se ha formado?

A) 2 y 5 **B)** 2 y 3 **C)** 3 y 8 **D)** 0 y 7 **E)** 5 y 6

15 A Isa no se le dan nada bien los números CINCO y por eso, su madre le ha hecho una plantilla con puntos para que aprenda a escribirlos. Aquí tienes los tres primeros CINCOS de Isa que, como ves, van creciendo cada vez más. ¿Cuántos puntitos tendrá el CINCO que ocupa el lugar 55?



A) 330 **B)** 276 **C)** 281 **D)** 165 **E)** 550

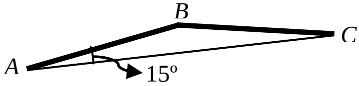
16 Si se dibuja en una hoja una circunferencia y un cuadrado, ¿cuál es el máximo número de puntos de la circunferencia que pueden estar en los lados del cuadrado?

A) Uno **B)** Cuatro **C)** Ocho **D)** Dieciséis **E)** Infinitos

17 Si aumento los lados de un cuadrado en un cierto porcentaje, su área aumenta un 96%. ¿En qué porcentaje hubiera disminuido su área si en vez de alargar los lados, los acorto en dicho porcentaje?

A) 4% **B)** 64% **C)** 96% **D)** 48% **E)** 36%

18 *AB* y *BC* son dos lados consecutivos de un polígono regular que, para chincharos un poco, no hemos querido terminar de dibujar. A cambio os damos el valor de un ángulo y debéis averiguar cuántos lados tiene nuestro polígono.

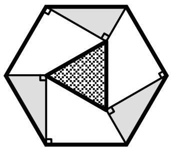


A) Ocho **B)** Nueve **C)** Diez **D)** Once **E)** Doce

19 ¿Cuántas cifras tiene el número $8^{672} \times 25^{1008}$?

A) 2016 **B)** 2017 **C)** 1680 **D)** 1683 **E)** 1000

20 Ayudándonos de algunas perpendiculares hemos dibujado un triángulo en el interior de un hexágono regular. Si el área del hexágono es 120 cm^2, ¿cuál es el área, en cm^2, del triángulo central?



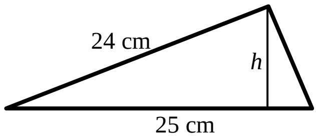
A) 20 **B)** 12 **C)** 10 **D)** 15

E) 24

21 Cuatro ardillas han encontrado un saco lleno de piñones. La primera se comió tres cuartos del total; la segunda tres cuartos de lo que quedó; la tercera tres cuartos de lo que quedó. La cuarta dijo: *A mí me tocaron los últimos tres piñones que quedaban, ¡qué ricos me supieron!* ¿Cuántos piñones había al principio en el saco?

A) 432 **B)** 240 **C)** 144 **D)** 324 **E)** 192

22 La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 25 cm y el cateto mayor, 24 cm. ¿Cuántos centímetros mide la altura *h* que cae sobre la hipotenusa?



A) 5,25 **B)** 6,12 **C)** 6,72

D) 6 **E)** 6,24

23 Cinco amapolas se dan besos entre sí. Ja, Ka y Li dieron besos a dos amigas; Oh y Uh solo dieron un beso a una amiga; Oh y Li se dieron un beso. ¿Qué beso de los siguientes es seguro que no se produjo?

A) Ja – Ka **B)** Ka – Li **C)** Li – Uh **D)** Ja – Li **E)** Ja – Uh

24 Mari Carmen se jubila este curso y sus alumnos han decidido hacerle un bonito regalo: pentágonos y hexágonos. Se ha puesto muy contenta y en total ha contado 282 lados y 49 figuras. Si los que regalaron hexágonos hubieran regalado pentágonos y los que regalaron pentágonos hubiesen regalado hexágonos, ¿cuántos lados habría en total?

A) 282 **B)** 270 **C)** 257 **D)** 331 **E)** 260

25 Don Retorcido solo comete errores cada cien mil millones de segundos. ¿Cuál de estas opciones se acerca más a ese tiempo?

A) 300 años **B)** 30 años **C)** 3000 siglos **D)** 3000 días **E)** 3000 años

XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 23 de abril de 2016

NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática

Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid

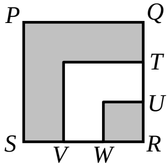
El Corte Inglés

Grupo ANAYA

Grupo SM

Smartick

1



En el cuadrado *PQRS* de lado 3, los puntos *T, U, V* y *W* dividen a cada lado en partes iguales. Si todos los ángulos que aparecen en la figura son rectos, ¿cuál es el cociente entre el área de la superficie sombreada y el área de la superficie en blanco?

A) 2 **B)** $\frac{7}{3}$ **C)** $\frac{7}{4}$ **D)** $\frac{5}{4}$ **E)** 3

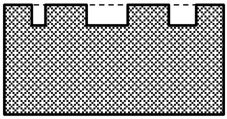
2

En el cuadrado mágico de la figura, la suma de cada fila, cada columna y cada diagonal es la misma.
¿Cuál es el valor de $a + b + c$?

a	13	*b*
19	*c*	11
12	*d*	16

A) 46 **B)** 47 **C)** 49 **D)** 50 **E)** 54

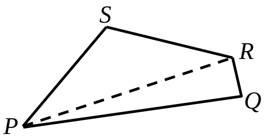
3



De una pieza rectangular de metal, de dimensiones 80×40, cortamos tres pequeños rectángulos, todos de la misma altura y bases 5, 15 y 10 como se observa en la figura. Si el área de la pieza resultante es 2990, ¿cuál es la altura de estos rectángulos?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

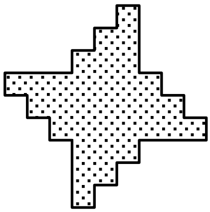
4



La diagonal *PR* del cuadrilátero *PQRS* divide a éste en dos triángulos isósceles en los que *PS* = *RS* y *PQ* = *PR*. Si el perímetro de cada uno de los triángulos es 22 y el del cuadrilátero 24, ¿cuánto mide el lado *PS*?

A) 6 **B)** 6,5 **C)** 7 **D)** 7,5 **E)** 8

5



Todos los ángulos de la figura son rectos, los cuatro lados mayores son de la misma longitud y todos los demás, más pequeños, también son iguales. Si el área de la figura es 528, ¿cuál es su perímetro?

A) 72 **B)** 92 **C)** 132 **D)** 144

E) 264

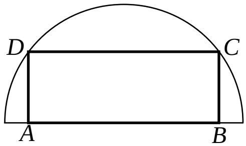
6 Si $\left(\frac{a}{c}+\frac{a}{b}+1\right):\left(\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+1\right)=11$ con a, b y c enteros positivos, ¿cuántas ternas (a, b, c) verifican que $a + 2b + c \leq 40$?

A) 33 **B)** 37 **C)** 40 **D)** 42 **E)** 45

7 ¿Para cuántos enteros n se verifica que $72\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n$ es un entero?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

8 El rectángulo *ABCD* está inscrito en un semicírculo. Si la longitud del diámetro es 20 y la del lado *AB* es 16, ¿cuál es la longitud del lado *AD*?



A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

9 Los puntos $A(-1, q)$ y $B(-3, r)$ pertenecen a una recta paralela a la de ecuación $3x-2y+1=0$. ¿Cuál es el valor de $r-q$?

A) 3 **B)** $\frac{4}{3}$ **C)** $-\frac{3}{4}$ **D)** $-\frac{4}{3}$ **E)** -3

10 Si un triángulo equilátero tiene el mismo perímetro que un hexágono regular, ¿cuál es el cociente entre el área del triángulo y el área del hexágono?

A) $\frac{2}{3}$ **B)** $\frac{3}{4}$ **C)** $\frac{\sqrt{6}}{3}$ **D)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **E)** $\frac{4}{9}$

11 La media de tres números es 7 unidades mayor que el pequeño y 9 unidades menor que el mayor. Si la mediana de los tres es 6, ¿cuál es su suma?

A) 24 **B)** 30 **C)** 32 **D)** 36 **E)** 48

12 Todas las reservas de petróleo de Alaska durarían 35 años si sólo las consumiera EEUU. Si también las consumiera China durarían solamente 10 años. ¿Cuántos años durarían si sólo las consumiera China?

A) 13 **B)** 14 **C)** 18 **D)** 22 **E)** 25

13 Si $|u-10| = v$ y $u < 10$, ¿cuál es el valor de $u - v$?

A) $10 - 2v$ **B)** $10 + 2v$ **C)** $10 - 2u$ **D)** 10 **E)** $|u-10| - u$

A partir de aquí las respuestas en blanco valen un punto.

14 ¿Cuál de las siguientes gráficas no corta al eje de ordenadas, *OY*?

A) $x^2 + y^2 = 2xy$ **B)** $|y| + 4 = |x|$ **C)** $\sqrt{x} = 6 - \sqrt{y}$

D) $8^x + 8^y - 65 = 0$ **E)** $\dfrac{x}{10} - \dfrac{10}{y} = \dfrac{x+10}{6}$

15 Si *A* y *B* son enteros positivos con $A < B$, ¿qué fracción es la mayor?

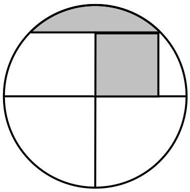
A) $\dfrac{A-1}{B-1}$ **B)** $\dfrac{A^2-1}{B^2-1}$ **C)** $\dfrac{A^3-1}{B^3-1}$ **D)** $\dfrac{A+1}{B+1}$ **E)** Depende de *A* y *B*

16 Si los cuatro enteros *C, D, C + D* y *C – D* son números primos, su suma tiene que ser:

A) múltiplo de 2 **B)** múltiplo de 3 **C)** múltiplo de 5

D) múltiplo de 7 **E)** un número primo

17 La zona sombreada está formada por un cuadrado y un segmento circular. Si el radio de la circunferencia mide 4, el área *A* de la zona sombreada verifica:



A) $12,5 < A < 12,6$ **B)** $A = \pi\sqrt{12}$ **C)** $A = \pi^2$

D) $A > 12,6$ **E)** $A = 3\left(\pi + \sqrt{2}\right)$

18 Juanje escoge al azar tres números del conjunto {1, 2, 3, 4} y María Jesús uno del conjunto {2, 4, 6, 8, 10}. ¿Cuál es la probabilidad de que el número que escoge María Jesús sea mayor que la suma de los tres que escogió Juanje?

A) $\dfrac{3}{8}$ **B)** $\dfrac{1}{3}$ **C)** $\dfrac{3}{10}$ **D)** $\dfrac{5}{8}$ **E)** $\dfrac{2}{3}$

19 En una circunferencia de radio $r = \frac{5}{\sqrt{2}}$ inscribimos un triángulo rectángulo. Si las longitudes de los catetos vienen dadas por enteros diferentes, ¿cuál es el producto de estas longitudes?

A) 33 **B)** 32 **C)** 30 **D)** 27 **E)** 7

20 ¿Cuántos puntos de la recta determinada por $P(3, 5)$ y $Q(19, 45)$ están entre P y Q y tienen coordenadas enteras?

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 10

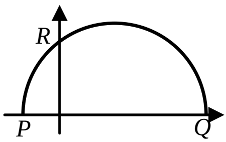
21 ¿Cuántos enteros entre 3 y 89 no pueden escribirse como suma de exactamente dos elementos del conjunto {1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55}?

A) 34 **B)** 43 **C)** 51 **D)** 55 **E)** 57

22 La media de una lista de tres impares consecutivos es 7. Si añadimos otro entero positivo *m* a la lista, distinto de los tres, la media de la nueva lista también es un entero. ¿Cuál es la suma de los tres menores valores de *m* que podemos añadir?

A) 6 **B)** 9 **C)** 21 **D)** 29 **E)** 33

23 En la figura adjunta los puntos $P(-4, 0)$ y $Q(16, 0)$ son los extremos del diámetro de una semicircunferencia. Si el punto $R(0, t)$ también pertenece a la semicircunferencia, t es:



A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

24 ¿Cuál es la probabilidad de que un número de 10 cifras contenga los 10 dígitos?

A) $\frac{9\cdot 9!}{10^{10}}$ **B)** $\frac{10!-9!}{10^9-1}$ **C)** $\frac{9!}{9\cdot 10^9}$ **D)** $\frac{10!-9!}{10^{10}-1}$ **E)** $\frac{9!}{10^9}$

25 Nuestro asiduo profesor, además de Retorcido es un poco presumido; al preguntarle su edad salió con este acertijo:

"El número de años que cumplí ayer es un primo de dos cifras. Si le sumo los que tiene mi hijo obtengo otro número primo, pero si se los resto obtengo un múltiplo de 3 y de 11. Si sumo las cifras de mi edad con las cifras de la edad de mi hijo obtengo 8"

¿Cuánto suman las cifras de la edad de don Retorcido?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 23 de abril de 2016

NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

No contestes en ningún caso al azar. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

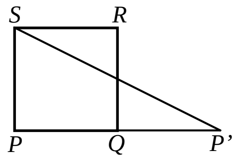
COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

1 En una asociación benéfica formada por padres, profesores y alumnos de un centro, el 25% del dinero donado proviene de los padres. El resto lo donan entre profesores y alumnos. El cociente entre el dinero donado por los profesores y el donado por los alumnos es $\frac{2}{3}$. ¿Cuál es el cociente entre el dinero donado por los padres y el dinero donado por los alumnos?

A) $\frac{20}{9}$ **B)** $\frac{5}{6}$ **C)** $\frac{5}{9}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{5}{12}$

2 *PQRS* es un cuadrado y *P’* es el punto simétrico de *P* respecto de *Q*. Si la longitud de *SP’* es 90 mm, ¿cuál es, en mm^2, el área del cuadrado *PQRS*?



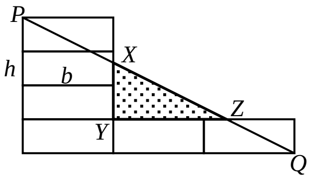
A) 324 **B)** 1620 **C)** 1800 **D)** 2025 **E)** 2700

3 ¿Cuál es el producto de las soluciones de la siguiente ecuación?

$$(x-4)(x-2)+(x-2)(x-6)=0$$

A) 12 **B)** 20 **C)** 48 **D)** 10 **E)** 96

4 Seis rectángulos idénticos, de base *b* y altura *h*, están colocados como muestra la figura. El segmento *PQ* intercepta a un lado vertical de uno de ellos en *X* y a un lado horizontal de otro en *Z*. Si en el triángulo rectángulo *XYZ* se verifica que $YZ = 2\cdot XY$, entonces $\frac{h}{b}$ es igual a:



A) $\frac{2}{3}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{3}{8}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** $\frac{3}{4}$

5 ¿Cuántas parejas de enteros positivos (p, q) con $p + q \leq 100$ verifican la ecuación $\dfrac{p+q^{-1}}{p^{-1}+q}=17$?

A) Ninguna **B)** 1 **C)** 2 **D)** 4 **E)** 5

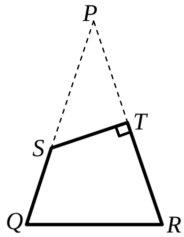
6 Si $30^A = 6$, $30^B = 10$ y $30^C = 15$ ¿Cuál es la media de *A*, *B* y *C*?

A) $\frac{4}{9}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{2}{3}$ **D)** $\frac{2}{9}$ **E)** $\frac{1}{3}$

7 Tres vértices de un paralelogramo son los puntos $O(0, 0)$, $A(1, 4)$ y $B(4, 1)$. ¿Cuál es el área del paralelogramo?

A) 12 **B)** 15 **C)** 16 **D)** 17 **E)** 19

8 En el triángulo isósceles PQR de la figura, $PQ = PR$ y $QR = 300$. Sobre el lado PR se toma un punto T y sobre el PQ otro punto S de manera que ST es perpendicular a PR y $ST = 120$. Si $TR = 271$, $QS = 221$, ¿cuál es el área del cuadrilátero $STRQ$?



A) 21 275 **B)** 40 605 **C)** 46 860 **D)** 54 000 **E)** 54 603

9 ¿Cuántos enteros, a, verifican que $a^{2015} + a^{2016}$ es múltiplo de 5, con $1 \leq a \leq 10$?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

10 Las ordenadas en el origen de tres rectas paralelas son 2, 3 y 4. La suma de las abscisas de los puntos de corte de las rectas con el eje OX es –36. ¿Cuál es la pendiente de estas rectas?

A) $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{2}{9}$ **C)** $\frac{1}{6}$ **D)** 4 **E)** $\frac{1}{4}$

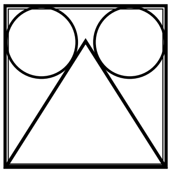
11 Hay dos valores de k para los que la ecuación $x^2 + 2kx + 7k - 10 = 0$ tiene una sola raíz real. La suma de estos valores de k es:

A) 0 **B)** –3 **C)** 3 **D)** –7 **E)** 7

12 Si $\cos 60^\circ = \cos 45^\circ \cdot \cos\alpha$ con $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$, entonces α es igual a:

A) 15º **B)** 22,5º **C)** 30º **D)** 45º **E)** 60º

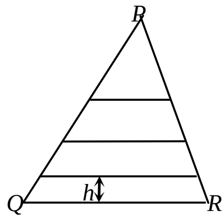
13 La primera imagen de don Retorcido es una caricatura que le hicieron hace 20 años (cuando comenzaron los Concursos de Primavera). Está enmarcada en un cuadrado de 6 dm de lado, la nariz es un triángulo equilátero y cada lente, circular, es tangente a dos lados del marco y a un lado de la nariz. ¿Cuánto mide el radio, en dm, del círculo que representa cada lente?



A) 2 **B)** $\sqrt{2}$ **C)** $\sqrt{3} - \frac{1}{2}$ **D)** $3 - \sqrt{3}$ **E)** $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

A partir de aquí las respuestas en blanco valen un punto.

14 En el triángulo isósceles PQR de la figura, en el que $QP = 150$ y $PR = QR = 125$, hay tres segmentos paralelos a QR que lo dividen en cuatro regiones de igual área. La altura h del trapecio inferior es:



A) $60\left(2\sqrt{3}-3\right)$ **B)** $60\left(2-\sqrt{3}\right)$

C) $60\left(\sqrt{2}-1\right)$ **D)** $60\left(3-2\sqrt{2}\right)$ **E)** 16

15 Los tres números reales a, b y c están, en ese orden, en progresión geométrica. Si su suma es 114 y su producto 46 656, ¿cuál es el valor de $a + c$?

A) 78 **B)** 76 **C)** 54 **D)** 36 **E)** 24

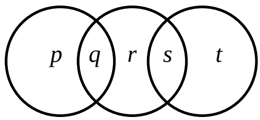
16 Si $x^2 = 8x + y$ e $y^2 = 8y + x$ con $x \neq y$, el valor de $x^2 + y^2$ es:

A) 9 **B)** 49 **C)** 63 **D)** 21 **E)** 56

17 ¿Cuántos enteros hay entre 10 y 1000 que verifican que la suma de sus cifras es 3?

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

18 En el dibujo que observas, p, q, r, s y t representan cinco enteros consecutivos, no necesariamente en ese orden. Los dos enteros del círculo de la izquierda suman 63 y los del círculo de la derecha suman 57. ¿Cuál es r?



A) 20 **B)** 24 **C)** 28 **D)** 30 **E)** 32

19 Hay dos formas de elegir seis números diferentes de la lista 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, de forma que el producto de estos seis números sea un cuadrado perfecto. Si estos cuadrados son m^2 y n^2 con m y n positivos y $m \neq n$, ¿cuál es el valor de $m + n$?

A) 108 **B)** 91 **C)** 61 **D)** 56 **E)** 144

20 Los enteros 789 y 998 no tienen otras cifras que no sean 7, 8 o 9. ¿Cuántos enteros de tres cifras no tienen cifras distintas a 7, 8 o 9?

A) 6 **B)** 9 **C)** 18 **D)** 36 **E)** 27

21 Los vértices del triángulo *ABC* son los puntos de intersección de las rectas r: $x = 13$, s: $y = 0$, t: $y = \sqrt{3}(x-1)$ .Si la bisectriz interior del ángulo que forman las rectas s y t corta a la recta r en un punto D, ¿cuál es la ordenada de este punto?

A) $4+\sqrt{3}$ **B)** $2\sqrt{3}$ **C)** $\frac{10}{\sqrt{3}}$ **D)** $\frac{12}{\sqrt{3}}$ **E)** $6\sqrt{3}$

22 Alicia y Bea juegan con una moneda equilibrada lanzando la moneda una vez cada una hasta un máximo de tres lanzamientos cada una. Empieza Alicia y gana la primera que consiga una cara. Si ninguna obtiene cara hay empate. ¿Cuál es la probabilidad de que gane Alicia?

A) $\frac{21}{32}$ **B)** $\frac{5}{8}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{11}{16}$ **E)** $\frac{9}{16}$

23 Si a, b y c son enteros diferentes que verifican las condiciones:

- $a \cdot b \cdot c = 17\,955$
- a, b y c están en progresión aritmética (en ese orden)
- $3a + b$, $3b + c$ y $3c + a$ están en progresión geométrica (en ese orden)

¿Cuál es el valor de $a + b + c$?

A) – 63 **B)** – 42 **C)** – 682 **D)** – 48 **E)** – 106

24 ¿Cuántos pares de enteros, (x, y) con $0 \le x \le y$ verifican la ecuación $5x^2 - 4xy + 2x + y^2 = 624$?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

25 Marta tiene ocho sobres numerados del 1 al 8 y ocho tarjetas, numeradas también del 1 al 8. ¿De cuántas formas puede distribuir las tarjetas, una en cada sobre, de forma que ninguna de las tarjetas 1, 2 y 3 esté en el sobre con su misma numeración?

A) 27 240 **B)** 29 160 **C)** 27 360 **D)** 27 600 **E)** 25 200

XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (1ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**C**	1	**B**	1	**D**	1	**D**
2	**C**	2	**C**	2	**C**	2	**A**
3	**A**	3	**A**	3	**D**	3	**D**
4	**C**	4	**C**	4	**E**	4	**B**
5	**E**	5	**B**	5	**C**	5	**C**
6	**A**	6	**E**	6	**A**	6	**D**
7	**D**	7	**E**	7	**C**	7	**D**
8	**E**	8	**D**	8	**A**	8	**A**
9	**B**	9	**A**	9	**A**	9	**C**
10	**B**	10	**A**	10	**C**	10	**E**
11	**B**	11	**A**	11	**E**	11	**E**
12	**A**	12	**B**	12	**E**	12	**D**
13	**D**	13	**B**	13	**D**	13	**B**
14	**C**	14	**E**	14	**C**	14	**D**
15	**A**	15	**A**	15	**E**	15	**E**
16	**E**	16	**B**	16	**D**	16	**C**
17	**A**	17	**B**	17	**C**	17	**C**
18	**D**	18	**A**	18	**D**	18	**B**
19	**B**	19	**B**	19	**E**	19	**E**
20	**A**	20	**C**	20	**D**	20	**A**
21	**C**	21	**A**	21	**C**	21	**D**
22	**D**	22	**A**	22	**B**	22	**B**
23	**C**	23	**A**	23	**A**	23	**D**
24	**E**	24	**B**	24	**B**	24	**C**
25	**A**	25	**C**	25	**B**	25	**B**

XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (2ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**D**	1	**E**	1	**A**	1	**C**
2	**D**	2	**E**	2	**B**	2	**B**
3	**E**	3	**A**	3	**D**	3	**D**
4	**D**	4	**C**	4	**A**	4	**C**
5	**C**	5	**E**	5	**D**	5	**E**
6	**D**	6	**B**	6	**D**	6	**C**
7	**C**	7	**D**	7	**E**	7	**B**
8	**D**	8	**B**	8	**A**	8	**C**
9	**E**	9	**A**	9	**E**	9	**C**
10	**C**	10	**C**	10	**A**	10	**E**
11	**A**	11	**D**	11	**A**	11	**E**
12	**D**	12	**D**	12	**B**	12	**D**
13	**C**	13	**A**	13	**A**	13	**D**
14	**B**	14	**A**	14	**B**	14	**B**
15	**A**	15	**B**	15	**D**	15	**A**
16	**A**	16	**C**	16	**E**	16	**C**
17	**E**	17	**B**	17	**A**	17	**D**
18	**D**	18	**E**	18	**C**	18	**D**
19	**E**	19	**B**	19	**E**	19	**A**
20	**A**	20	**D**	20	**C**	20	**E**
21	**C**	21	**E**	21	**C**	21	**D**
22	**B**	22	**C**	22	**D**	22	**A**
23	**D**	23	**C**	23	**C**	23	**A**
24	**A**	24	**C**	24	**E**	24	**E**
25	**B**	25	**E**	25	**D**	25	**A**

XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel I

1. (C) Realizamos las operaciones y comparamos los resultados
A) 20 × 1,6 = 32
B) (20 – 1) × 6 = 114
C) 20 × (1 + 6) = 140
D) 20,1 × 6 = 120,6
E) 20 + 16 = 36
Con la operación C se obtiene el número mayor.

2. (C) Mediante el análisis de la siguiente tabla se puede observar que el número de partes que se hacen a un círculo trazando diámetros, es igual al doble del número de diámetros que se tracen en él.

Nº de diámetros	1	2	3	4	5	…	2016
Nº de partes	2	4	6	8	10	…	4032

El círculo ha quedado dividido en 4032 gajos.

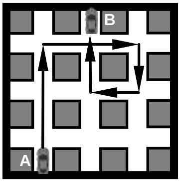
3. (A) El perímetro del triángulo equilátero es igual a multiplicar la longitud de un lado por tres. Como los cinco lados del pentágono obtenido tienen la misma longitud; por tanto, el lado del triángulo se calcula dividiendo el perímetro del pentágono entre cinco.
Longitud de un lado: 40 cm : 5 = 8 cm
Perímetro triángulo: 8 cm × 3 = 24 cm
El perímetro del triángulo equilátero es 24 cm

4. (C) La operación 60 × 24 × 365 × 2 representa los minutos (C) que hay en dos años
365 = número de días del año
24 = número de horas de un día
60 = número de minutos de una hora
365 × 24 + 60 = 525 600 es el número de minutos que hay en un año
525 600 × 2 = 1 051 200 minutos que hay en dos años.

5. (E) Las lombrices recorren el reloj en sentido contrario a la de las agujas.
- Pepa se ha detenido entre las 11 y las 12 horas, más cerca de las once.
- Pepe se ha detenido en las doce.
- Pepi se ha detenido entre las seis y las siete, más cerca de las siete.
- Pepo se ha detenido en las seis.
- Pepu se encuentra en las siete horas.

Pepu (E) es la lombriz que se ha detenido más cerca de las ocho.

6. (A) Como mínimo tiene que realizar cuatro giros a su derecha. En el esquema se indica el recorrido que tiene que hacer.



7. (D) Hay trece múltiplos de 15 menores que 200 (15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150, 165, 180 y 195), si eliminamos siete quedan seis, 13 – 7 = 6.

8. (E) Para calcular el número de formas en las que puede despedirse aplicamos el cálculo de variaciones con repetición: $4^3 = 64$
Cornelia se puede despedir de 64 formas.

El desarrollo de este problema, para los escolares de Primaria, se puede hacer mediante un diagrama de árbol. Es decir, el primer emoticón lo puede elegir de cuatro formas. Una vez hecho esto, para cada una de esas formas puede elegir el segundo emoticón de cuatro formas distintas, con lo que tenemos $4 \times 4 = 16$ formas de poner los dos primeros emoticones. Finalmente para cada una de esas 16 formas puede elegir el tercer emoticón de cuatro formas distintas con lo que tenemos $16 \times 4 = 64$ formas distintas de despedirse.

9. (B) *Deshaciendo* las operaciones, es decir, haciéndolas en orden inverso, tenemos:

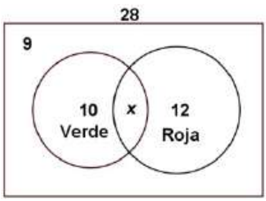
15 + 5 = 20; $20 \times 4 = 80$; 80 – 2 = 78; 78 : 3 = 26

El número de partida es 26.

10.(B) Expresamos las cantidades en la misma unidad de medida:
Como 2 kg son 2000 g se han desechado 2000 – 1500 = 500 g.

Por lo tanto la fracción desechada es: $\dfrac{500}{2000} = \dfrac{1}{4}$

11.(B) En el esquema adjunto "*x*" representa el número de alumnos con dos pegatinas, una verde y otra roja. Con ayuda del mismo es fácil ver que el número de alumnos con alguna pegatina es $(10 + 12 - x)$ y como el número de escolares sin pegatina es 9, tenemos:



$(10 + 12 - x) + 9 = 28$, es decir, $31 - x = 28$.

Por lo tanto $x = 3$.

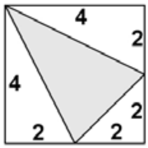
12.(A) Como la pajarita grande es dos veces mayor, en dimensiones lineales, que su semejante pequeña, su área será cuatro veces mayor ($2^2 = 4$) que la de la pequeña.
Por tanto el área de la pajarita pequeña es igual a la cuarta parte del área de la pajarita grande:
$72 \text{ cm}^2 : 4 = 18 \text{ cm}^2$.

13.(D) Como 4 de los alumnos no quisieron cromos entonces sobraron $4 \times 25 + 8 = 108$.
Al repartirse estos cromos entre los restantes alumnos tocaron a 3, es decir, los restantes alumnos eran $108 : 3 = 36$.
Se puede concluir que el número de alumnos de 5º y 6º era 40, que el número de cromos que regaló la editorial: $40 \times 25 + 8 = 1008$ y que el número de alumnos que cogieron cromos 36.

14.(C) Hallar las soluciones a estas actividades exige numerosas hipótesis, deducciones y numerosos cálculos escritos y mentales. Para su resolución se sugiere aplicar la estrategia de ensayo y error.
Es evidente que A solo puede ser 1 ó 2 porque 3A más las que te llevas solo tiene una cifra. Como 3B más las que te llevas acaba en B, B solamente podría ser, 4 ó 9, pero si B = 9, C = 3 y no te llevas nada en la primera suma. Por lo tanto B solamente puede ser 4.
Ahora ya si se quiere se puede completar la suma.

$$\begin{array}{r} \mathbf{1\;\;4\;\;8} \\ \mathbf{1\;\;4\;\;8} \\ +\;\mathbf{1\;\;4\;\;8} \\ \hline \mathbf{4\;\;4\;\;4} \end{array}$$

15.(A) Este es uno de los cuatro dibujos que podría haber realizado Elisa.
El área del triángulo dibujado se calcula hallando la diferencia del área del cuadrado menos el área de los tres triángulos que le bordean.
El área del cuadrado es: $4 \text{ m} \times 4 \text{ m} = 16 \text{ m}^2$.
La suma de las áreas de los triángulos es $4 \text{ m}^2 + 4 \text{ m}^2 + 2 \text{ m}^2 = 10 \text{ m}^2$.
El área del triángulo es igual a $16 \text{ m}^2 - 10 \text{ m}^2 = 6 \text{ m}^2$.



16.(E) Por cada vuelta de la rueda la bicicleta avanza 1,8 metros.
En 4,5 km que son 4500 m habrá dado $4500 : 1{,}8 = 2500$ vueltas.

17.(A) Cuando nació Ainhoa la edad del padre era el triple de la edad que tiene hoy Ainhoa, es decir, $9 \times 3 = 27$ años.
Al cabo de 9 años la edad del padre es $27 + 9 = 36$ años.
Es lo mismo que decir que la edad del padre hoy es igual a cuatro veces la edad de la niña.
Por lo tanto el padre de Ainhoa tiene 36 años.

18. (D) Para obtener la solución seguimos las afirmaciones de los patos, a la vez que cumplimentamos esta tabla de doble entrada:

El primer **SI** es el que corresponde a Pito que vive en Niss. Al decir Pato que no se iría a vivir ni a Ness ni a Nass deberá vivir en Niss o en Noss, pero como Pito vive en Niss él debe vivir en Noss. Poto no puede vivir en Nass porque se está enamorando de la que vive en Nass, luego vive en Ness y ya está todo completo.

	Nass	Ness	Niss	Noss
Pito	no	no	**SI**	no
Poto	no	**SI**	no	no
Pato	no	no	no	**SI**
Peto	**SI**	no	no	no

La afirmación correcta es (D): Pato vive en Noss.

19.(B) La suma de los tres sumandos dados en el enunciado equivale a dos veces la suma de las edades de los tres hermanos: 9 + 11 + 12 = 32.

La suma de las edades es igual a 16 y las edades de cada uno de ellos se obtienen restando a 16 la suma de cada pareja. 16 – 9 = 7; 16 – 11 = 5; 16 – 12 = 4.

Las edades de los tres hermanos son: 7, 5 y 4 años. El mediano tiene 5 años.

20.(A) Los cubos con solo dos caras coloreadas están situados en las aristas del cubo. En cada arista hay seis cubos, dos de ellos, los que forman los vértices, tienen tres caras a la vista; por tanto, solo cuatro cubos en cada arista tienen dos caras coloreadas.

12 aristas × 4 cubos/arista= 48 cubos.

21. (C) Resolvemos las operaciones:

A) $5 \times (7{,}5 + 0{,}4) = 39{,}5$ B) $12 \times (0{,}6 + 5{,}4) = 7{,}2$

C) $0{,}7 \times (3{,}2 + 6{,}8) = 7$ D) $9{,}1 \times (1{,}3 + 2{,}3) = 32{,}76$

E) $5{,}3 \times (3{,}5 + 1{,}5) = 26{,}5$

La operación C es la única cuyo resultado no tiene decimales.

22. (D) La probabilidad de *sacar bola roja* en cada uno de los casos, añadiendo las bolas que se indican es:

A) $\frac{7}{24}$; B) $\frac{5}{22}$; C) $\frac{9}{24}$; D) $\frac{8}{24}$; E) $\frac{7}{24}$

La opción de sacar un tercio es $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$ la letra D.

23.(C) El período corresponde a la frase NOHABLARÉENCLASE que tiene 16 letras
Dividimos 999 entre 16
999 : 16 = 62 y resto 7
Conclusión, hay 62 veces el periodo (la frase) y luego las 7 primeras letras.
La letra que hace el número 7 es la última que escribió Jaimito.
Corresponde a la letra A.

24.(E) Designemos con ***P*** al peso de cada pelota, con ***p*** al de cada peonza y con ***y*** al de cada yoyó.
Cinco pelotas pesan lo mismo que una peonza más un yoyó. ($5P = p + y$); por lo tanto una pelota pesa lo mismo que cinco pelotas menos un yoyó. ($p = 5P – y$)
Una peonza pesa lo mismo que dos pelotas y un yoyó. ($p = 2P + y$)
Ahora ya podemos escribir que $2p = p + p = (5P – y) + (2P + y) = 7P$, es decir, dos peonzas pesan lo mismo que siete pelotas ($2p = 7P$).

25.(A) Primero, buscamos las cifras que ha comido Comenúmeros en la resta mediante tanteos; después, sumamos las cifras.

		5	**4**	**1**			**7**	**5**	**4**	**1**
-	**3**		**2**		→	**-**	**3**	**0**	**2**	**9**
	4	**5**		**2**			**4**	**5**	**1**	**2**

7 + 0 + 9 + 1 = 17
La suma de las cifras que se ha comido Comenúmeros es 17.

XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

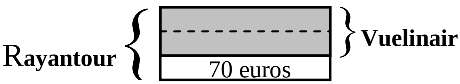
Soluciones 1ª Fase Nivel II

1. (B) Llamado x al número podemos conseguir una ecuación si escribimos las operaciones que hemos realizado con él (atención a los paréntesis) e igualamos el resultado final al propio número:$(4x + 2) : 3 – 5 = x$.
Resolvemos poco a poco la ecuación:
$(4x + 2) : 3 = x + 5$; $4x + 2 = 3\cdot(x + 5)$; $4x + 2 = 3x + 15$; $x = 13$
y comprobamos que, efectivamente 13 cumple el enunciado.

2. (C) Como no hay muchas posibilidades, vamos a considerar los valores posibles que puede tener P y descartando los que no nos sirven:
Si P tuviera el 1, M tendría el 2 que es primo. Esto no puede ser pues R es la única que tiene un número primo. Además, entre 1 y 2 no nos cabrían R e I.
P no puede tener ni el 2 ni el 3 pues R es la única que tiene un primo.
Si P tuviera el 4, M tendría el 8, R el 5, I el 6 (pues 7 es primo) y A el 9.
P no puede tener un número mayor que 4 pues M sería mayor que 9.
Así pues, la suma de las cifras es 4 + 5 + 6 + 8 + 9 = 32.

3. (A) Para resolver este problema hay que ser sistemático. Una forma es ir cambiando los números de atrás hacia adelante:
{**1, 2**, 3, 9}; {**1, 2**, 4, 8}; {**1, 2**, 5, 7} Ya no hay más con 1, 2.
{**1, 3**, 4, 7}; {**1, 3**, 5, 6}; Ya no hay más con 1, 3.
Con 1, 4 no hay ninguna y, por tanto, ya no hay más que contengan un 1.
{**2, 3**, 4, 6} Ya no hay más con 2, 3 y esta es la última que se puede formar.
Hemos encontrado 6 cuartetos y, por la forma de buscarlos podemos estar seguros de que no hay más.

4. (C) El rectángulo representa el precio del billete más caro. Esta sencilla representación nos ayuda a resolver el problema sin hacer prácticamente ningún cálculo.
El precio del billete caro es, pues, $70 \cdot 3 = 210$ euros.



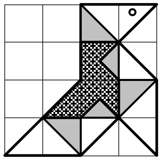
5. (B) El número de tres cifras más pequeño y tal que la suma de sus tres cifras es cinco es el 104. El más grande es el 500 y la diferencia entre ambos es 500 – 104 = 396.

6. (E) Está claro que una buena estrategia es usar 1^7.
Si comparamos las potencias que nos quedan: $5^2 < 2^5$ y $2^3 < 3^2$.
Así pues, el número más pequeño de esa forma es $1^7 \cdot 2^3 \cdot 5^2 = 8 \cdot 25 = 200$.

Podemos asegurar que es el menor de los propuestos porque 31 es primo y, por lo tanto no tiene la forma buscada y $150 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2$ por lo que no usa los números adecuados.

7. (E) Si llamamos a al número de chicas y b al número de chicos, Julia tiene $(a - 1)$ hermanas y b hermanos lo que nos da la ecuación $a - 1 = b + 1$. Esta ecuación es equivalente a $a = b + 2$, por lo que hay dos chicas más que chicos.
Julio tiene a hermanas y $(b - 1)$ hermanos con lo que $a = 2(b - 1) = 2b - 2$.
Si $a = b + 2$ y $a = 2b - 2$, entonces $b + 2 = 2b - 2$, es decir, $b = 4$.
Son 4 chicos y 6 chicas, en total 10 hermanos.

8. (D) En el dibujo se aprecia que cada trazo de la pajarita grande es el doble del correspondiente trazo de la pajarita pequeña. Así pues el perímetro de la pequeña es la mitad del de la grande, es decir, $72 : 2 = 36$ cm.



9. (A) Cuando nació Ainhoa su padre tenía $3 \cdot 9 = 27$ años. Como de eso hace 9 años, el padre tiene ahora $27 + 9 = 36$ años.

10.(A) Si llamamos x al número de zancadas que da al bajar, el número de escalones es $3x$. Como al subir da $(x + 7)$ zancadas, el número de escalones es $2(x + 7)$.
Como el número de escalones es el mismo al subir que al bajar, obtenemos la ecuación $3x = 2(x + 7)$ y $x = 14$ y el número de escalones es $3 \cdot 14 = 42$.

11.(A) Como en dos horas mi reloj adelanta 10 minutos, cada dos horas la diferencia entre los dos relojes es de 15 minutos. Para que haya una diferencia de una hora deben pasar $2 \cdot 4 = 8$ horas, así que volví del colegio a las 16:00.

12.(B) Las únicas plazas a las que no puede llegar son la 4 y la 7 ya que por la calle que va de 1 a 5 solo puede circular de sur a norte y por la que va de 4 a 8 solo lo puedo hacer de oeste a este.
A la plaza 5 llega sin problemas. A las plazas 8, 9 y 10 llega girando a la derecha donde corresponda desde la calle que va de la 1 a la 5. A las 12 y 11 llega girando a la derecha desde la calle 2-10. Para llegar a las plazas 2 y 3 debe girar tres veces a la derecha y para llegar a la 6 cuatro veces.
La suma de los números es $4 + 7 = 11$.

13.(B) Por cada tramo de10 metros que recorre Esteban la distancia entre ambos se reduce 4 metros. Como $150 : 4 = 37{,}5$ Esteban deberá hacer 37,5 tramos de 10 metros para alcanzar a María. Es decir, debe recorrer $37{,}5 \cdot 10 = 375$ metros.

14.(E) Observa cómo funciona con algunos números: por cada dos rombos avanzo tres posiciones:
2 rombos $\rightarrow$ Posición 3
4 rombos $\rightarrow$ Posición 6
6 rombos $\rightarrow$ Posición 9
$2n$ rombos $\rightarrow$ Posición $3n$
Así que con $96 = 2\cdot 48$ rombos llegaré a la posición $3\cdot 48 = 144$. Después viene un corazón en la posición 145 y el rombo 97 ocupa la posición 146.

15.(A) El cubo de la carita central tiene cinco caras en contacto con otros cubos: además de los cuatro visibles, está la del interior. Así que quitamos 6 cubos. El cubo que está en el vértice tiene tres caras visibles. Las otras tres caras están en contacto con tres cubos que debemos quitar, así que quitaremos 4 cubos. El cubo que está en la arista tienen dos caras visibles y las otras cuatro caras tienen contacto con cuatro cubos que aún no hemos quitado, luego quitaremos otros 5 cubos más. Con el que está en el cubo del vértice debo quitar tres más: en total $1 + 3 = 4$.
Así pues, quitaremos $6 + 4 + 5 = 15$ cubitos. Como había 27 quedarán $27 – 15 = 12$ cubitos.

16.(B) Todos los días riega al menos 8 flores y el día que riegue los claveles regará 4 más. Así que como mínimo riega $8 \cdot 7 = 56$ flores a la semana. Las $76 – 56 = 20$ extra son de días que regó 4 flores más, es decir $20 : 4 = 5$ días regó los claveles.
También se puede plantear un sistema llamando x al número de días que regó los claveles e y al número de días que regó los tulipanes.
Como la semana tiene siete días, tenemos la ecuación $x + y = 7$.
Como en total regó $12\cdot x$ claveles y $8\cdot y$ tulipanes, tenemos que $12x + 8y = 76$.

17.(B) Los cuadrados perfectos son: $1^2, 2^2, \ldots ,20^2 = 400$. Así que había 20 cuadrados perfectos. Quedaron $20 – 7 = 13$ cuadrados perfectos.

18.(A) Factoricemos los números poco a poco:
$99 = 9 \cdot 11 = 3^2\cdot 11$ y $999 = 9\cdot 111 = 3^3\cdot 37$
El mínimo común múltiplo es $3^3\cdot 11\cdot 37 = 297\cdot 37 = 10\,989$.
Para los poco amigos de las cuentas: usando los criterios de divisibilidad del 9 y del 11 podemos descartar rápidamente las opciones C), D) y E). A continuación, mirando el producto que debemos hacer para calcular el mínimo común múltiplo, observamos que la cifra de las unidades es 9 y descartamos la opción B) concluyendo que la respuesta es A) sin necesidad de calcular el producto.

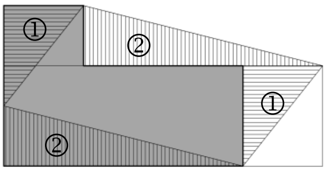
19.(B) Veamos qué tres lados se han sumado para obtener como resultado 70. Si fueran los dos grandes y uno pequeño, 70 – 14 = 56 tendría que ser múltiplo de tres, pero no lo es. De modo que se han sumado los dos pequeños y uno grande y cada lado pequeño mide (70 – 7) : 3 = 21 cm. Los lados grandes miden 28 cm y el perímetro es $2\cdot 21 + 2\cdot 28 = 98$ cm.

20.(C) Si llamamos a los números a y b con $a < b$, tenemos que $a + b = 2(b - a)$.
Operando tenemos $a + b = 2b - 2a$, luego $3a = b$ y la afirmación correcta es la C).

21.(A) Debes observar que el área de la zona sombreada es el área de los tres cuadrados menos el área del triángulo blanco.
Área de los tres cuadrados = $5^2 + 6^2 + 9^2 = 25 + 36 + 81 = 142$ cm^2.
Área del triángulo blanco = $\dfrac{(5+6+9)\cdot 9}{2} = 90$ cm^2.
Así pues, el área de la zona sombreada es $142 - 90 = 52$ cm^2.

22.(A) Usando los criterios de divisibilidad de los tres números tenemos que:
Por el criterio del 2: b puede ser 0, 2, 4, 6 o 8
Por el criterio del 9: $1 + a + 6 + 9 + b = a + b + 16$ debe ser múltiplo de 9.
Luego $a + b$ puede ser 2 o 11.
Recuerda que el criterio del 11 dice que: $(1 + 6 + b) - (a + 9) = b - a - 2$ debe ser múltiplo de 11.
Vayamos viendo los casos:
Si $b = 8$, por el criterio del 9, $a = 2$, pero $(1 + 6 + 8) - (2 + 9) = 4$ no vale.
Si $b = 6$, $a = 5$, pero $(1 + 6 + 6) - (5 + 9) = -1$ no vale.
Si $b = 4$, $a = 7$, pero $(1 + 6 + 4) - (7 + 9) = -5$ no vale.
Si $b = 2$ hay dos casos: $a = 9$ que no vale, pues $(1 + 6 + 2) - (9 + 9) = -9$.
$a = 0$ que sí vale pues $(1 + 6 + 2) - (0 + 9) = 0$.
Probemos el último caso: si $b = 0$, $a = 2$ y $(1 + 6 + 0) - (2 + 9) = -4$ no vale.
Entonces la única posibilidad es $a = 0$ y $b = 2$, el número es 10692 y el producto de las cifras a y b es 0.

23.(A) Observa que los triángulos con la misma numeración son iguales y, por tanto, el área del paralelogramo es igual a la suma de las áreas del rectángulo superior, de 4×3, y del inferior, de 12×5.
Así pues, el área del paralelogramo es:
$4 \cdot 3 + 12 \cdot 5 = 12 + 60 = 72$ cm^2.



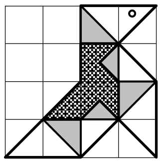
24.(B) Una buena estrategia es partir de 100 habitantes.
En el primer mes hay 10 enfermos y 90 sanos.
Tras el segundo mes el 10% de los 10 enfermos sanaron, es decir, había uno sano y 9 enfermos. Además, el 10% de los 90 sanos enfermó, es decir 9 enfermaron y 81 permanecieron sanos.
Así que tras en el segundo mes había 1 + 81 = 82 sanos y 9 + 9 = 18 enfermos, lo que supone el 18% de los 100 habitantes.

25.(C) La manecilla de las horas da una vuelta completa en 12 horas. Es decir, recorre un ángulo de 360º en 12 · 4 = 48 cuartos de hora. Así pues, en un solo cuarto de hora recorre 360 : 48 = 7,5º.

XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

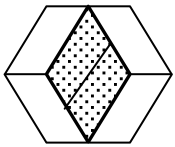
Soluciones 1ª Fase Nivel III

1. (D) Para que la suma sea impar tenemos que sacar primero una bola par y después una impar o viceversa. La probabilidad de primera par y segunda impar es, $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$, y la de primero impar y luego par también $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$, luego la probabilidad de suma impar es $\frac{3}{5}$.



2. (C) La pajarita pequeña y la grande está en proporción 1:2 de semejanza, luego si el perímetro de la pequeña es 18, el de la grande es 36.

3. (D) Si $\begin{cases} x^2+y^2=212 \\ x+y=18 \end{cases}$, entonces $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=212+2xy=18^2$, de donde $2xy$ = 112. El conocido sistema suma-producto, $\begin{cases} x+y=18 \\ xy=56 \end{cases}$, tiene por soluciones, (14,4) y (4,14). Por tanto $\left|x^2-y^2\right|=180$.



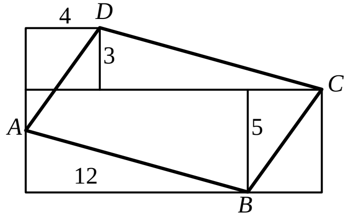
4. (E) Si en el rombo trazamos una paralela media a dos lados, dividimos el hexágono en seis paralelogramos iguales, cada uno de área 8, y por tanto el área del rombo es 16.

5. (C) Para que 2000 + *b* sea múltiplo de *b*, debe ocurrir que 2000 lo sea. Tenemos que ver cuántos divisores de 2000 son menores que 1000, y lo son todos menos el 1000 y el 2000. Como $2000=2^4\cdot5^3$, el número de divisores de 2000 es $(4+1)\cdot(3+1)$. Quitamos dos al producto y nos da 18.

6. (A) $999 = 9 \cdot 111 = 9 \cdot 3 \cdot 37 = 3^3 \cdot 37$: $9999 = 99 \cdot 101 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101$.
El mcm de esos números es:
$3^2 \cdot 11 \cdot 37 \cdot 101 = 27 \cdot 11 \cdot 37 \cdot 101 = 9999 \cdot 1111 =$ 1 109 889.

7. (C) En todos esos productos interviene un 5 y al menos un 2 (del 2, del 4 o del 6) salvo en el producto, $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6$ (que no tiene el 5). Los primeros acaban en 0 y este último, 144, en 4.

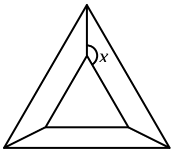
8. (A) Si nos fijamos bien, el área del paralelogramo equivale a la suma del área del rectángulo superior y la del rectángulo inferior de la izquierda. Su área es por tanto, $4 \cdot 3 + 12 \cdot 5 = 72$.



9. (A) De la progresión aritmética sacamos que, $2 \cdot 3b = 2b + 48$, de donde b =12, y la diferencia es b = 12. Y si 3, 12 y c están en progresión geométrica, c es 48 y la razón es 4. Diferencia y razón suman 16.

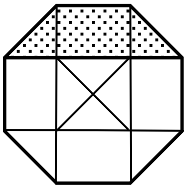
10.(C) Echando un vistazo a las distintas expresiones sólo $(m + 3n)^2$ produce resultado impar, ya que m es par, $3n$ es impar, $m + 3n$ es impar y de ahí su cuadrado.

11.(E) Realmente fácil. x, su simétrico en el dibujo y 60º suman 360º, luego x es 150º.



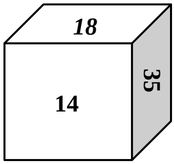
12.(E) $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$; luego tiene $(1 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 12$ divisores.
$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$; luego tiene $(2 + 1) \cdot (1+ 1) \cdot (1 + 1) = 12$ divisores.
$50 = 2 \cdot 5^2$; luego tiene $(1+ 1) \cdot (2 + 1) = 6$ divisores.
$45 = 3^2 \cdot 5$; luego tiene $(2+ 1) \cdot (1 + 1) = 6$ divisores.
$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$; luego tiene $(1+ 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 8$ divisores.

13.(D) Si trazamos líneas auxiliares (como se ve en el dibujo), el octógono regular queda dividido en cuatro rectángulos iguales, un cuadrado central y en las esquinas, cuatro triángulos rectángulos isósceles. Estos cuatro triángulos equivalen al cuadrado central, y por ello el octógono se puede considerar formado por ocho triángulos y cuatro rectángulos. Pero dos triángulos y un rectángulo forman nuestro trapecio sombreado de área 3 cm^2, luego el área del octógono es 12.



14.(C) Partimos de que $p + \dfrac{1}{q + \dfrac{1}{r}} = \dfrac{25}{19}$ y como p, q y r son enteros positivos, por tamaño de la suma, p debe ser 1. Haciendo cálculos ahora, nos queda $\dfrac{r}{rq + 1} = \dfrac{6}{19}$, y como r y $rq + 1$ son primos entre sí, se tiene que necesariamente $r = 6$, y $rq + 1 = 19$. Luego $q \cdot r = 18$ y por tanto, $p \cdot q \cdot r = 18$.

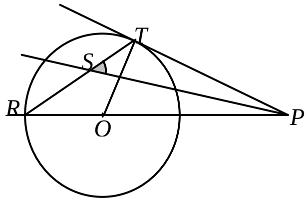
15.(E) Los tres números primos deben ser distintos para que las sumas de caras opuestas sean iguales. Dos de ellos pues deben ser impares, y la paridad obliga a que sean opuestos a las caras visibles con número par. El tercero debe ser par (es decir el 2) y opuesto al 35, luego la suma a conservar es 37, y el opuesto al 14 es el 23.



16.(D) Como $33 = 3 \cdot 11$, N·U es igual a 3 o igual a 11 (la posibilidad de 33 queda excluida porque entonces el paréntesis debería sumar 1, y las cuatro cifras que lo componen no podrían ser distintas). También debemos descartar el resultado de 11, ya que N y U son cifras. Así que N = 1, y U = 3, o N =3, y U = 1. Nos queda por investigar de cuantas maneras podemos obtener 11 como suma de cuatro cifras distintas (diferentes de 3 y de 1). Eso solo ocurre con 0, 2, 4 y 5. Así que tenemos dos posibilidades para la pareja N-U y 24 para el grupo M-E-R-O. En total 2·24 = 48.

17.(C) Llamando a al número de ranas azules del año pasado y v al número de ranas verdes, tenemos que: $\frac{a \cdot 1{,}6}{v \cdot 0{,}4} = \frac{v}{a}$, de donde $\frac{a^2}{v^2} = \frac{1}{4}$, es decir $v = 2a$. Luego hemos pasado de tener $a + v = 3a$ ranas, a tener, $1{,}6a + 0{,}4v = 2{,}4a$ ranas. Así el número de ranas se ha multiplicado por 0,8. Ha habido una disminución del 20%.

18.(D) La tangencia en T nos sugiere el trazado del radio OT. Así $P\hat{T}O = 90^{\circ}$ y si llamamos α al ángulo $O\hat{P}T$, tenemos que el ángulo $T\hat{O}P = 90^{\circ} - \alpha$ y $R\hat{O}T = 180^{\circ} - (90^{\circ} - \alpha) = 90^{\circ} + \alpha$.
Como el triángulo OTR es isósceles, se tiene a su vez que $O\hat{T}R = \frac{90^{\circ} - \alpha}{2}$, y por tanto,



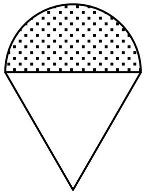
$P\hat{T}S = 90^{\circ} + 45^{\circ} - \frac{\alpha}{2}$. Entonces, $T\hat{S}P = 180^{\circ} - P\hat{T}S - \frac{\alpha}{2} = 45^{\circ}$.

19.(E) Sumando y restando 51 y 85 obtendremos siempre un múltiplo de 17. Si dividimos 2016 entre 17 obtenemos de resto 10. Lo más cerca de 2016 que podemos llegar es sumarle 7.

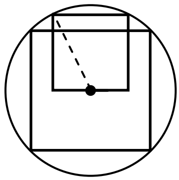
20.(D) $9^{20} + 9^{20} + 9^{20} = 3 \cdot 9^{20} = 3 \cdot (3^2)^{20} = 3^{41}$.

21.(C) En el trayecto emplean 210 minutos, y por tanto en 40 minutos recorren $\frac{40}{210}$ del trayecto. Los dos están en marcha a la vez durante $\frac{70}{210}$ del trayecto. Se encontrarán cuando hayan recorrido los $\frac{85}{210}$ del trayecto, y en ello emplearán 85 minutos, que sumados a las 12 h 40 min, nos da las 14 h 05 min.

22.(B) Si llamamos l al lado del triángulo equilátero, el área del semicírculo es $\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 : 2$, y la del triángulo es $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$. El cociente de ambas es: $\frac{\pi l^2}{8} : \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.



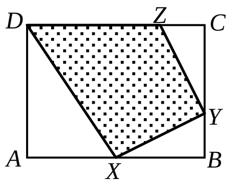
23.(A) Llamamos R al radio de la circunferencia. El área del cuadrado inscrito es (leído como rombo): $\frac{2R\cdot 2R}{2} = 2R^2$.
Para el cuadrado pequeño trazamos un radio hasta un vértice superior. Así tenemos (llamando l al lado del cuadrado) que: $l^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = R^2$, de donde $l^2 = \frac{4}{5}R^2$.



El cociente entre las áreas de los dos cuadrados es: $2R^2 : \frac{4}{5}R^2 = \frac{5}{2}$.

24.(B) Para obtener producto negativo tendremos que sacar en la primera tirada positivo y en la segunda negativo, o viceversa. La probabilidad es: $\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6} + \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

25.(B) Sean m y n respectivamente la base y la altura del rectángulo. El área del rectángulo es $m\cdot n$. La del triángulo AXD es: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m\cdot n = \frac{m\cdot n}{4}$; la del triángulo XBY es: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m\cdot\frac{1}{3}n = \frac{m\cdot n}{12}$; y la del triángulo YCZ, $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}m\cdot\frac{2}{3}n = \frac{m\cdot n}{12}$. Luego el área del cuadrilátero es $m\cdot n - \frac{5}{12}(m\cdot n) = \frac{7}{12}(m\cdot n)$.



XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel IV

1. (D) La probabilidad de que la suma sea impar es que resulte una bola par y otra impar, y esta es $p(suma\ impar) = 2 \cdot \frac{n+1}{2n+1} \cdot \frac{n}{2n} = \frac{n+1}{2n+1}$

2. (A) En 31! hay un total de 26 veces el factor 2. En 32! hay 31 veces el factor 2. El primer factorial que es múltiplo de 2^{29} es 32!

3. (D) Sea R es el radio de la circunferencia circunscrita al hexágono regular.

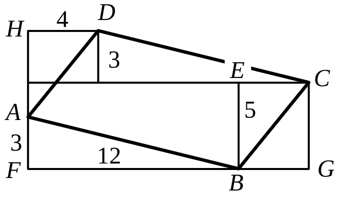
El área del rombo es $A_{Rombo} = 4 \cdot \frac{R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot R}{2} = R^2\sqrt{3} = 24$.

El área del hexágono es $A_{Hexágono} = 6 \cdot \frac{R^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2} \cdot R^2\sqrt{3} = \frac{3}{2} \cdot 24 = 36$.

4. (B) Recordando que el producto de las raíces del polinomio $ax^2 + bx + a$ es $\frac{c}{a}$, las raíces de $ax^2 + bx + a$ tiene producto igual a 1, y por eso son inversas.

5. (C) Los dos ángulos distintos del paralelogramo son suplementarios, y por tanto tienen el mismo seno.
Como $AD = BC$ podemos concluir que los triángulos rectángulos ADH y CBG son iguales, por lo que $AH = 5$, $AF = 3$, $AD = BC = \sqrt{41}$ y $AB = 3\sqrt{17}$.

Si descomponemos el ángulo $A\hat{B}C$ como suma de los ángulos $A\hat{B}E = a$ y $E\hat{B}C = b$ tenemos que $sen(a) = \frac{12}{3\sqrt{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$



y $\cos(a) = \frac{3}{3\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$, mientras que

$sen(b) = \frac{4}{\sqrt{41}}$ y $\cos(b) = \frac{5}{\sqrt{41}}$.

Así, el seno del ángulo ABC es

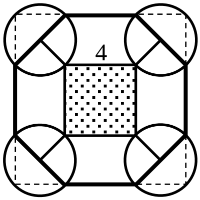
$$sen(A\hat{B}C) = sen(a+b) = sen(a)\cos(b) + \cos(a)sen(b) =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} + \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \frac{4}{\sqrt{41}} = \frac{24}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{41}}$$

6. (D) $y = \dfrac{2x+1}{x-1} = \dfrac{2(x-1)+3}{x-1} = 2 + \dfrac{3}{x-1} \Rightarrow y-2 = \dfrac{3}{x-1} \Rightarrow (y-2)\cdot(x-1) = 3$

7. (D) La suma pedida es $\sum_{k=1}^{9} \dfrac{9!}{k} = 9!\cdot\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{9}\right)$. Pero todos los sumandos de esta suma terminan en 0 excepto $\dfrac{9!}{5}$, que termina en 6.

8. (A) Si el lado del cuadrado es 4, el lado del octógono regular también es 4. Añadiendo cuatro triángulos rectángulos isósceles al octógono, completamos junto con él un cuadrado. Los catetos de dichos triángulos miden $2\sqrt{2}$, y el lado del cuadrado mide $4+4\sqrt{2}$.



El área del octógono es el área del cuadrado menos las áreas de los cuatro triángulos.

$$A_8 = \left(4+4\sqrt{2}\right)^2 - 4\cdot\frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{2} = 16+32\sqrt{2}+32-16 = 32\cdot\left(1+\sqrt{2}\right).$$

9. (C) $2016^2 - 2016 = 2016\cdot 2015 = (2000+16)\cdot(2000+15) =$

$= 4\,000\,000 + 30\,000 + 32\,000 + 240 = 4\,062\,240.$

10. (E) $\left.\begin{array}{r} x(y+2)=100 \\ y(x+2)=60 \end{array}\right\}$ Restando las dos ecuaciones: $2x-2y=40 \Rightarrow x-y=20$.

11. (E) $\left(\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{4}\right)x = 6 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{1}{20}x = 6 \quad\Rightarrow\quad x = 120$.

12. (D) El total gastado en la tienda comprando k artículos es de la forma z + k·0,99, donde z es un número entero. Este total se puede poner como z + k – k·0,01, siendo z + k entero. Como 65,76 = 66 – 24 · 0,01 = 42 + 24 – 24·0,01 = 42 + 24·0,99, k es 24.

13. (B) La lista de los cinco enteros será *a*, *b*, 10, 11, 11. Como la media es 9, *a* + *b* = 13, y como *b* debe ser menor que 10, *a* debe ser mayor que 3, por lo que el más pequeño posible es 4.

14. (D) Sea 1 la altura del rectángulo; su base es 2 y su diagonal $\sqrt{5}$. Como *ABE* es rectángulo, aplicamos el teorema del cateto y $1^2 = \sqrt{5} \cdot AE \quad \Rightarrow \quad AE = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras, $BE^2 = 1^2 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \dfrac{4}{5} \Rightarrow BE = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

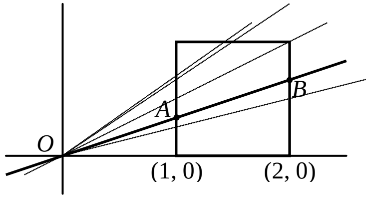
El área del triángulo *ABE* es $\dfrac{1}{5}$, y la del rectángulo 2, de modo que su cociente es $\dfrac{1}{10}$.

15. (E) $4^n - 1 = (2^n - 1)(2^n + 1)$. Si $n > 1$, $2^n - 1 > 1$, y no hay ningún primo.

16. (C) 19, 99 y 803 son enteros de la forma $8n + 3$, que en efecto tienen un divisor primo de la forma $8q + 3$: Para $n = 2$, $q = 2$ (el propio 19 es primo). Para $n = 12$, $q = 1$ ($99 = 11 \cdot 9$) y para $n = 100$, $q = 1$ ($803 = 11 \cdot 73$). 33 no es un entero de la forma $8n + 3$. Por último, 91 que sí es de la forma $8n + 3$ se descompone en factores primos como $13 \cdot 7$, y ni 13 ni 7 son de la forma $8q + 3$.

17. (C) Hay 30 puntos con x entero: desde –7 hasta 7, incluyendo el 0, son 15 abscisas enteras. Consideramos el doble porque con la misma *abscisa* hay dos puntos con *ordenadas* opuestas. Igualmente hay 30 puntos con y entero. Pero hay 12 puntos que tienen tanto x como y enteros, los pares $(\pm5,\pm5)$, $(\pm1, \pm7)$ y $(\pm7, \pm1)$. Así pues, la respuesta es $30 + 30 - 12 = 48$.

18. (B). Supondremos que los vértices dados son consecutivos y que los otros dos se encuentran en el primer cuadrante, pues de lo contrario las rectas dadas, que pasan por el origen y tienen pendiente positiva, no cortarían al cuadrado.



Las coordenadas de los puntos *A* y *B* han de ser de la forma $A(1, a)$ y $B(2, 1 - a)$ para que el área de las dos regiones que determinan tengan igual área.

La recta $2y = x$ determina los puntos $A\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ y $B(2, 1)$.

La recta $3y = x$ determina los puntos $A\left(1, \dfrac{1}{3}\right)$ y $B\left(2, \dfrac{2}{3}\right)$ que es la respuesta válida.

La recta $3y = 2x$ determina los puntos $A\left(1, \dfrac{2}{3}\right)$ y $B\left(\dfrac{3}{2}, 1\right)$

La recta $2y = \sqrt{2}\,x$ determina los puntos $A\left(1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $B\left(\sqrt{2}, 1\right)$

La recta $4y - x = 0$ determina los puntos $A\left(1, \frac{1}{4}\right)$ y $B\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

Solamente una de las rectas divide al cuadrado en dos partes de igual área.

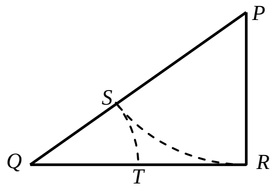
19. (E) En la figura, $QP^2 = QR^2 + PR^2 = (2QS)^2 + PS^2$.

$(QS+PS)^2 = 4QS^2 + PS^2$;

$QS^2 + PS^2 + 2 \cdot QS \cdot PS = 4QS^2 + PS^2$;

$QS^2 + PS^2 + 2 \cdot QS \cdot PS = 4QS^2 + PS^2$;

$2 \cdot QS \cdot PS = 3QS^2$; $2 \cdot PS = 3 \cdot QS$; $\dfrac{QS}{PS} = \dfrac{2}{3}$.

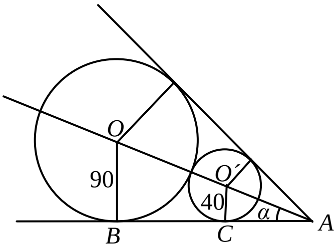


20. (A) En la figura

$$sen\alpha = \frac{90}{OA} = \frac{40}{O'A} = \frac{90-40}{OA-O'A} = \frac{50}{OO'} = \frac{50}{130} = \frac{5}{13}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}\text{ ; } \tan\alpha = \frac{5}{12}\text{ ;}$$

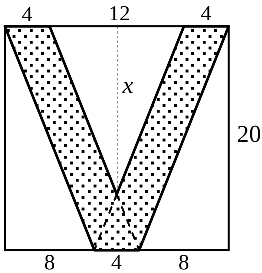
$$AB = \frac{90}{\tan\alpha} = 216\text{ .}$$



21. (D) $5^x - 5^{x-2} = 120\sqrt{5} \Rightarrow \dfrac{24}{25}5^x = 120\sqrt{5} \Rightarrow 5^x = 125\sqrt{5} \Rightarrow x = \dfrac{7}{2}$.

22. (B) El área del paralelogramo que forma uno de los lados de la “V” es 4 × 20. El área de la “V” es el doble del área de ese paralelogramo menos el área del triángulo común a los dos lados de la “V”.

Podemos calcular la altura de ese triángulo por semejanza de triángulos: $\dfrac{20}{8} = \dfrac{x}{6} \Rightarrow x = 15$, y la altura del triángulo común mide 5.



Como la base del triángulo mide 4, su área mide 10, y el área de la “V” es 160 – 10 = 150.

23. (D) $abc + ab + ac + bc + a + b + c = 104 \quad \Rightarrow \quad a(bc + b + c) + a + bc + b + c = 104$

$$\Rightarrow bc + b + c = \frac{104 - a}{a + 1}.$$

Como b y c son enteros, a tiene que ser par. Los posibles valores de a son:

$a = 2$	$bc + b + c = 34$
$a = 4$	$bc + b + c = 20$
$a = 6$	$bc + b + c = 14$

Para el resto de valores pares de a, se obtienen valores para $bc + b + c$ no enteros. En cada uno de los tres casos posibles, los valores posibles de b y c forman junto con el valor de a la terna única 2, 4, 6. Por tanto $a^2 + b^2 + c^2 = 4 + 16 + 36 = 56$.

24. (C) $\cot x + \cot y = \frac{1}{tgx} + \frac{1}{tgy} = \frac{tgx + tgy}{tgx \cdot tgy} \Rightarrow tgx \cdot tgy = \frac{tgx + tgy}{\cot x + \cot y}$.

Por tanto: $tg(x + y) = \frac{tgx + tgy}{1 - tgx \cdot tgy} = \frac{tgx + tgy}{1 - \frac{tgx + tgy}{\cot x + \cot y}} = \frac{25}{1 - \frac{25}{30}} = 150$.

25. (B) $z^2 = (9 + bi)^2 = 81 - b^2 + 18bi$. $\quad z^3 = (9 + bi)^3 = 729 + 243bi - 27b^2 - b^3 i$.

Como las partes imaginarias de ambos son iguales:

$18b = 243b - b^3$; $\ b^3 - 225b = 0$.

Esta ecuación tiene tres soluciones: – 15, 0 y 15. Pero solo una es positiva, $b = 15$.

XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel I

1. (D) Los que terminan en cero: 800, 710, 620, 530, 440, 350, 260 y 170.
Los que terminan en 5: 305, 215 y 125.
En total 11 números.

2. (D) Primero, expresamos las cantidades en la misma unidad de medida, en milímetros. Después**,** encontramos que entre los tres grupos de niños tejieron:
$7 \times 150 + 12 \times 200 + 125 \times 6 = 4200$ mm. Dado que la bufanda mide 5000 mm, el profe tricotó una franja de 800 milímetros, es decir, de 8 dm.

3. (E) Inés, entre ida y vuelta al colegio tarda hora y cuarto más tres cuartos de hora, lo que completa dos horas exactas.
Como permanece en el colegio durante 6 horas y media, en total, desde que salió de casa hasta su vuelta a las 16 h 45 min, tarda 8 h 30 min. Por lo tanto se levantó de la cama a las (16 h 45 min) – (8 h 30 min) = 8 h 15 min de la mañana.

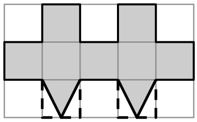
4. (D) Como el m.c.m. de 4 y 5 es 20 y $100 = 20 \times 5$, habrá cinco coincidencias de abdominales y baile en los próximos 100 días. Como el m.c.m. de 4 y 6 es 12 y $100 = 12 \times 8 + 4$, existirán ocho coincidencias de abdominales y tenis, por lo que de los $100 : 4 = 25$ días que debería hacer abdominales, debería dejar de hacerlos $8 + 5 = 13$ días. Sin embargo, dado que el m.c.m. de 4, 5 y 6 es 60, hay un día de triple coincidencia que lo hemos contado dos veces. Con lo que el número de días que hará abdominales es $25 – 12 = 13$..

5. (C) Calculamos el número de monedas: $26 \times 10 = 260$ monedas.
El mayor número de monedas que pueden formar un cuadrado más próximo por defecto a 260 es con 256 monedas (16^2). $260 – 256 = 4$.
Quedan 4 monedas.

6. (D) La primera letra la puede elegir de 5 formas distintas (cada una de las letras de LUISA), una vez hecho esto, la segunda letra puede escogerla de 4 formas y para la tercera le quedan 3 posibilidades. A continuación, para cada una de las dos cifras tiene 10 posibilidades.
Por tanto dispondrá de $5 \times 4 \times 3 \times 10 \times 10 = 6000$ contraseñas diferentes.

7. (C) La columna de las unidades tiene que sumar necesariamente 16, por lo que la columna de las decenas tendrá que sumar 9 o 19. Entre las soluciones ofrecidas la única que cumple esa condición es la C.

8. (D) Los perímetros de las figuras A, C y E miden respectivamente 12, 14 y 18 unidades. Si llamamos d a la longitud de cada uno de los segmentos oblicuos de la figura D, tendremos que los perímetros de B y D son respectivamente $10 + 4d$ y $12 + 4d$. Ahora solo resta decidir entre 18 y $12 + 4d$, pero la figura adjunta permite ver que $6 > 4d$, luego 18 es el mayor de los dos.



9. (E) Esa edición tiene $1106 \times 1548 = 1\,712\,088$ letras. Como $1\,700\,000$ es el número mayor de los ofrecidos y es menor que el número de letras, ese es el que da mejor aproximación.

10. (C) Deducimos que Cervantes murió en abril del año 2016 – 400 = 1616. Como nació en septiembre de 1547, cumpliría 1616 – 1547 = 69 años en septiembre de 1616. Por lo tanto tenía 68 años al morir el mes de abril.

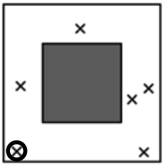
11.(A) Como la aguja de los minutos da una vuelta por hora, en tres días dará $3 \times 24 = 72$ vueltas.

12.(D) Descomponiendo los números que nos dan en producto de tres números distintos elegidos entre el 1 y el 9 y cuya suma es 10, tenemos:

$14 = 1 \times 2 \times 7$	$18 = 1 \times 3 \times 6$	$20 = 1 \times 4 \times 5$
$24 = 2 \times 3 \times 4$	$30 = 2 \times 3 \times 5$	

Observamos que en todos los casos excepto para el 24 la suma de los tres factores es 10. Y es inmediato comprobar que es imposible descomponer 24 en tres factores distintos cuya suma sea 10.

13.(C) Realmente hubiese bastado, para resolver el problema, que nos dijesen “Emilio solo ve a Dani”, ya que el único que solo ve a otro es el situado encima del redondelito. Luego en el redondelito está Dani.



14.(B) Si en lugar de cinco repartiera cuatro canicas a cada uno de mis compañeros, sobrarían 26 + 2 = 28 canicas, pero si reparto una más a cada uno, sobran 7, luego tengo 28 – 7 = 21 compañeros.
Esto nos lleva a deducir que yo tengo $4 \times 21 + 2 = 86$ caramelos y que, por tanto, tengo 86 + 26 = 112 canicas. La suma de sus cifras es 4.

15.(A) Si 1200 migas corresponden a un cuarto, el total es $1200 \times 4 = 4800$ migas.
$4800 \times 0{,}5$ m = 2400 m = 2,4 km.

16.(A) Si el elefante pesa 40 veces más que su trompa, y esta 5000 veces lo que el ratón, el elefante pesará $40 \times 5000 = 200\,000$ veces más que el ratón. Como el elefante pesa 5 600 000 gramos, el peso del ratón es de $5\,600\,000 : 200\,000 = 28$ gramos.

17.(E) Tenemos que averiguar lo que pesan juntos el balón y el cubo de Rubik. Si sumamos las dos primeras pesadas tendremos que dos veces el (balón más el cubo) más el (osito más la peonza) pesan $600 + 450 = 1050$ gramos. Por otra parte, de la tercera pesada, sabemos que el (osito más la peonza) pesan 400 gramos, por lo tanto, dos veces el (balón más el cubo) pesan $1050 - 400 = 650$ y de aquí, el peso del (balón más el cubo) será $650 : 2 = 325$ gramos.

18.(D) Como no era la más grande, no puede ser el 9 y como no era la más pequeña, descartamos la cifra 1. Solo queda la cifra 7.

19.(E) Tendremos:

Día 1: 1000 bacterias

Día 2: 1000×2 bacterias

Día 3: $1000 \times 2 \times 3$ bacterias

...

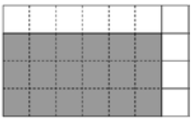
Día 10: $1000 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 1000 \times 3\,628\,800$ bacterias.

Por tanto habrá más de tres mil millones.

20.(A) A Marta no le gustan 3 círculos azules, 2 círculos rojos, 1 cuadrado rojo y 4 triángulos rojos, es decir, no le gustan $3 + 2 + 1 + 4 = 10$ figuras. Como en la colección hay en total $(3 + 2 + 1 + 4) + 2 + 3 + 5 = 20$ figuras, la probabilidad de que le toque algo que no le guste es: $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.

21.(C) Orlando comió y porras e y churros. Por su parte, si Julián comió z porras, tuvo que comer $3z$ churros y, finalmente Lucía comió z porras y x churros.
Dado que comieron 7 porras tenemos: $2z + y = 7$, y como z e y son mayores o iguales que 2 la única solución posible es $y = 3$; $z = 2$, de lo que deducimos que Orlando comió 3 porras y 3 churros, Julián 2 porras y 6 churros y Lucía 2 porras. Solo falta conocer el número x de churros que comió Lucía. Pero sabemos que comieron 13 churros en total, por lo tanto, $3 + 6 + x = 13$ de donde $x = 4$.

22.(B) Como la anchura del rectángulo gris es el doble que su altura, podemos completar el dibujo dividiendo el rectángulo grande en $7 \times 4 = 28$ cuadraditos pequeños como se muestra en la figura.



Por otra parte, el semiperímetro del rectángulo gris mide

54 : 2 = 27 cm y está limitado por 9 cuadraditos, de donde deducimos que el lado del cuadradito mide 27 : 9 = 3 cm.
Por lo tanto el área pedida mide $28 \times 3^2 = 252$ cm^2.

El problema es aún más fácil de resolver con ayuda del álgebra:
Primero, calculamos las dimensiones del rectángulo gris:
Altura: x cm, base: $2x$ cm, perímetro: $2(x + 2x) = 6x = 54$ cm $\Rightarrow x = 9$ cm.
Segundo, las dimensiones de la figura completa son:
Altura 9 + 3 = 12 cm, base 18 + 3 = 21 cm, área = 12 cm × 21 cm = 252 cm^2.

23.(D) Ante todo tengamos presente que los ratones siempre dicen la verdad y que los zorros mienten siempre. Supongamos que Ana dice verdad, entonces Blas dice la verdad y, en consecuencia, Cris es mentiroso, lo que lleva a que Dani dice la verdad y esto a que Elia es lo contrario que Ana, es decir, Elia miente. Pero si Elia miente, entonces Ana debe mentir en contra de lo supuesto inicialmente. En consecuencia, estamos seguros de que Ana no puede decir la verdad.
Dado que Ana **miente** Bea también debe mentir y si ésta **miente**, Cris dice la verdad y, por tanto Dani **miente** y de aquí deducimos que Ana y Elia son lo mismo y, por lo tanto, Elia **miente**. Solo Cris dice la verdad y los otros 4 mienten y por consiguiente son Zorros.

24.(A) En cada bote hay 15 × 12 = 180 raciones de comida para pececitos. Como luego solamente me quedan 10 peces, pero comen el doble, cada bote de comida durará 180 : (10 × 2) = 180 : 20 = 9 días.

25.(B) Añadiendo los triángulos de 2 en 2, Juanje tiene que poner cada vez 4 palillos más.
Por lo que podemos construir la tabla siguiente:

Triángulos	Palillos
1	3
3	$7 = 2 \times 3 + 1$
5	$11 = 2 \times 5 + 1$
7	$15 = 2 \times 7 + 1$
…	…
101	$2 \times 101 + 1 =$ **203**

XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel II

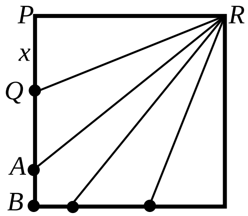
1. (E) Podemos ir examinando cada una de las posibles respuestas.
(Lunes) No puede ser porque el lunes le toca mentir y ha dicho una verdad: que es lunes.
(Martes) No puede ser porque debe decir la verdad y Pancho dijo mentira: que es lunes.
(Miércoles) Como le toca mentir no vale porque ha dicho una verdad: que mañana será jueves.
(Jueves) Debería decir verdades y no lo ha hecho.
(Viernes) Le toca decir mentiras y así lo hace: hoy es lunes y mañana jueves.
Por tanto estaban hablando un viernes.

2. (E) Si los amigos pueden sentarse en mesas de 6 y 7 comensales, es porque han de ser un múltiplo de 42. Descartamos pues 45 y 63 y probamos las otras respuestas.
(84) Como 84 = 7comensales × 12mesas, entonces 84 debería ser igual a 6comensales × 15mesas y esto no es cierto.
(168) Como 168 = 7comensales × 24mesas, entonces 168 debería ser igual a 6comensales × 27mesas y esto no es cierto.
(126) Como 126 = 7comensales × 18mesas, entonces 126 debería ser igual a 6comensales × 21mesas y esto sí es cierto.
Por tanto, hay 126 amigos.
Si se manejan ya las ecuaciones puede resolverse llamando m al número de mesas de 7 comensales y planteando la ecuación $7m = 6(m + 3)$, que al resolverla nos da que $m = 18$. Por lo que el número de amigos es $7 \cdot 18 = 126$.

3. (A) Los múltiplo de 86 de tres cifras son:
172 – 258 – 344 – 430 – 516 – 602 – 688 –774 – 860 – 946
Tenemos dudas con los que acaban en 4 y en 6.
El que empieza por 5 está identificado: **5**16. Por tanto, el otro que acaba en 6 ha de ser 94**6**.
El que empieza por 7 también: **7**74. Por tanto, el otro que acaba en 4 tiene que ser 34**4**.
Los cuatro números son 34**4** – **5**16 – 94**6** – **7**74, por lo que las cifras que se zampó Comenúmeros suman 3 + 4 + 1 + 6 + 9 + 4 +7 + 4 = 38.

4. (C) La cuerda de Álvaro tendrá el triple de trocitos que la Delia más $3 \cdot 14 = 42$ cm, con los que puede hacer otros dos trocitos más de 20 cm y le sobran solo 2 cm.

5. (E) El área del cuadrado son 60·60 = 3600 cm^2, por lo que cada una de las partes tiene un área de 3600 : 5 = 720 cm^2. Como el área del triángulo *PQR* ha de ser 720 cm^2, la longitud *x* del segmento *PQ* debe cumplir que $\frac{60 \cdot x}{2} = 720$, de donde deducimos que *x* = 24. Como los triángulos *AQR* y *PQR* tienen igual área, entonces *QA* también mide 24 cm. Por todo esto, *AB* = 60 – 24 – 24 = 12 cm.



6. (B) El mayor *repedós* es el número 9987 y el menor es 1002. La diferencia entre ambos es 9987 – 1002 = 8985.

7. (D) El menor número de paquetitos se conseguirá con el mayor número de caracolas por paquetito, es decir, con el máximo común divisor de las caracolas que tiene cada trilliza, mcd(48, 60, 72) = 12 caracolas. Ana hará 48:12 = 4 paquetitos, Elena 60:12 = 5 paquetitos y Teresa 72:12 = 6 paquetitos. En total 15 paquetitos.

8. (B) Llamando a cada color con su inicial, las mezclas que podemos conseguir combinando tres son:

AAA AAB AAR ABB ABR ARR BBB BBR BRR RRR

Diez colores distintos. Fíjate que las mezclas AAB, ABA, BAA son la misma.
(Como siempre, en estos problemas es fundamental llevar un orden para saber cuándo terminamos sin dejarnos ningún caso por el camino. En este caso, hemos seguido un orden alfabético)

9. (A) Nuestro triángulo es rayado y sombreado pero no de borde discontinuo, por tanto debe estar en la región A.

10.(C) La L de LEE solo puede ser 1, 2 o 3, porque ya a partir de 3 el producto LEE × LEE tendría más de cinco cifras (400·400 = 160 000) y no encaja con las cinco cifras de PEDAL.
Si observamos la L de PEDAL, vemos que no puede ser 3 ni 2 porque un cuadrado nunca tiene esas terminaciones. La única posibilidad es que L = 1 y por tanto E = 9 para que E·E termine en 1. Así pues, LEE es 199 y PEDAL es 199·199 = 39 601. La D es un 6.

11.(D) Como el doble de la base *b* es la mitad del triple de la altura *a*, podemos relacionar las dimensiones así: $2b = \frac{3a}{2}$, es decir, $b = \frac{3a}{4}$.
Como el perímetro es 84 cm, entonces:

$$2b+2a=84 \Rightarrow 2\cdot\frac{3a}{4}+2a=84 \Rightarrow \frac{3a}{2}+2a=84 \Rightarrow 3a+4a=168 \Rightarrow a=24 \text{ cm}$$

La base es $b=\frac{3a}{4}=\frac{3\cdot 24}{4}=18$ cm. El área mide 24·18 = 432 cm^2.

12.(D) Como es una tabla de sumar, si observamos las casillas del 8 y el 12, deducimos que la segunda columna es la primera columna más cuatro.

+			
	8	12	
	10	14	
	13	17	

El número más alto, 21, estará en la esquina inferior derecha y por tanto, fijándonos en el 17 y en el 21, deducimos de nuevo que la tercera columna será la segunda columna más cuatro. Comenúmeros se zampó un 18. Y para terminar la tabla hay que tener en cuenta que no hay números repetidos.

+			
	8	12	16
	10	14	**18**
	13	17	21

+	7	11	15
1	8	12	16
3	10	14	**18**
6	13	17	21

13.(A) Como RATÓN tiene el mismo número de cifras que NOTAR, esto nos asegura que la N de NOTAR solo puede ser un 1 o un 2 para que no haya llevadas. Si nos fijamos en la N de RATÓN debemos descartar N = 1 porque los múltiplos de 4 son pares.

2	**O**	**T**	**A**	**R**
			×	**4**
R	**A**	**T**	**O**	**2**

Seguimos: la R de NOTAR será 8 o 3. Habrá que descartar uno de los dos valores fijándonos en la R de RATÓN. Pero ya lo dejamos para ti y no mires todavía la solución que Don Retorcido se enfadará. ¡Que no mires!
La solución final es 21978·4 = 87912.
Un RATO suma 8 + 7 + 9 + 1 = 25.

14.(A) Una pareja es la (1, 4), cuya suma es 5. Así pues todas las posibles parejas, descartando la suma 5, son:

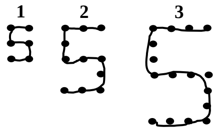
Suma 2: (0, 2)
Suma 3: (0, 3)
Suma 7: (0, 7) (2, 5)
Suma 11: (2, 9) (5, 6) (8, 3) (9, 2)
Suma 13: (5, 8) (6, 7)
Suma 17: (8, 9)

Ahora debemos ir descartando con sumo cuidado. Solo vamos a encontrar la primera pareja y luego tú deberás seguir con la búsqueda minuciosa.

El 9 no puede bailar con el 2 porque entonces eliminaríamos ya la suma 11 y entonces, por una lado 8 está obligado a bailar con 5 (suma 13) pero también 6 está obligado a ser pareja de 7 (suma 13). Así pues, imposible la pareja (9, 2).
Por tanto, una pareja es (8, 9). Y ahora te toca seguir a ti, poco a poco.
Al final las cinco parejas son:

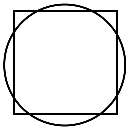
$(0, 3) \to 3$; $(1, 4) \to 5$; $(2, 5) \to 7$; $(6, 7) \to 13$; $(8, 9) \to 17$

15.(B) Cada CINCO está formado por tres tramos horizontales iguales y dos tramos verticales iguales. Cada tramo horizontal tiene un punto más que el lugar que ocupa el CINCO, y cada tramo vertical tiene un punto menos que el lugar que ocupa el CINCO.



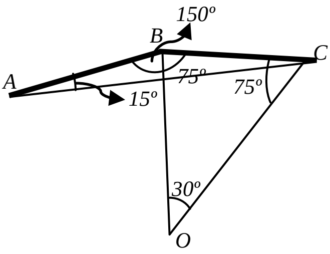
Así, el CINCO del lugar 55 tendrá $3\cdot(55 + 1) + 2\cdot(55 - 1) = 276$ puntitos.

16.(C) Como mucho, una circunferencia puede cortar a un segmento en dos puntos, así pues, a los cuatro lados de un cuadrado, en ocho puntos como máximo.



17.(B) Podemos trabajar con un cuadrado de lado 10, cuya área es 100 y nos resulta muy cómodo. Al aumentar sus lados, el área pasa a ser 100 + 96 = 196, es decir, un cuadrado de lado $\sqrt{196} = 14$. Es decir, los lados aumentaron 4 unidades y si las hubiéramos disminuido habríamos tenido un cuadrado de lado 10 – 4 = 6, cuya área es 36, es decir, el porcentaje de área disminuiría en un 100 – 36 = 64 %.

18.(E) Como el triángulo *ABC* es isósceles, entonces el ángulo *C* vale también 15º y el ángulo *B* mide 150º. ¿Qué polígono regular tiene ángulos de 150º? Si te acuerdas de la fórmula, bienvenida sea. Si no, podemos discurrir así: uniendo los vértices *B* y *C* con el centro *O* del polígono formamos el triángulo isósceles *OBC*, cuyos ángulos miden *B* = *C* = 75º (la mitad de 150º) y el ángulo central en *O* mide, por tanto, 30º. Fijándonos en este ángulo central ya podemos responder, el polígono tiene 360º : 30º = 12 lados.

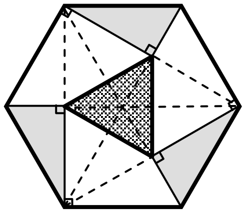


19.(B) Solo hay que trastear un poco con la operación para conseguir potencias de 10:

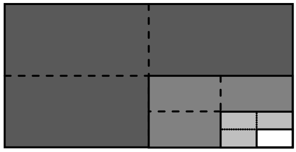
$$8^{672} \times 25^{1008} = (2^3)^{672} \times (5^2)^{1008} = 2^{2016} \times 5^{2016} = 10^{2016}$$

Es decir, un “uno” seguido de 2016 “ceros”. El número tiene 2017 cifras.
Más fácil de lo que parecía.

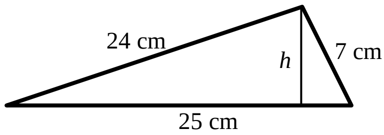
20. (D) Si descomponemos el hexágono en figuras iguales es muy fácil resolver este problema. Trazamos algunos segmentos (trazo discontinuo) y…
El área del triángulo equilátero grande (sus vértices son vértices alternos del hexágono) es la mitad que la del hexágono, es decir, 60cm^2. El triángulo central es la cuarta parte del triángulo equilátero grande, por tanto su área mide 60:4 = 15 cm^2.



21.(E) Si representamos el total de piñones mediante un rectángulo, es fácil resolver el problema, coloreando lo que coge cada ardilla. El rectangulito blanco representa los tres piñones que se llevó la cuarta ardilla. Por tanto, en el rectángulo grande hay 3·4·4·4 = 192 piñones.



22.(C) Con ayuda del teorema de Pitágoras encontramos la medida del otro cateto x:
$25^2 = 24^2 + x^2 \rightarrow x = 7$ cm.
Para averiguar la altura h del triángulo calculamos su área A de dos maneras diferentes.

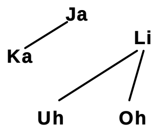


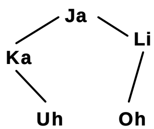
Por un lado, trabajando con el triángulo según se muestra, $A = \dfrac{25 \cdot h}{2}$.

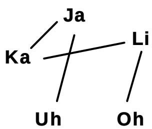
Y si apoyamos el triángulo sobre uno de sus catetos, $A = \dfrac{7 \cdot 24}{2} = 84$ cm^2.

Por tanto, $\dfrac{25 \cdot h}{2} = 84 \Rightarrow h = \dfrac{2 \cdot 84}{25} = 6{,}72$ cm.

23.(C) El beso Oh–Li está asegurado porque lo dice el enunciado. Si hubiese un beso Li–Uh, esto implicaría que tendríamos un beso Ja–Ka y ya no podríamos seguir.
Así pues, el beso imposible es Li–Uh.
Así pues, Uh ha de besar a Ka o a Ja y tendríamos estas dos posibles situaciones:







24.(C) Si llamamos *p* al número de pentágonos y *h* al de hexágonos, podemos formar este sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 5p+6h=282 \\ p+h=49 \end{cases}$

Es fácil resolverlo, multiplicando por 5 la segunda ecuación y luego restándosela a la primera:

$$\begin{cases} 5p+6h=282 \\ p+h=49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5p+6h=282 \\ 5p+5h=245 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=37 \\ p=12 \end{cases}$$

Si bailamos los valores obtenidos, 37 pentágonos y 12 hexágonos tienen un total de 37·5 + 12·6 = 257 lados.

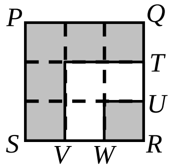
25.(E) Toca multiplicar y luego dividir. En un año hay 60·60·24·365 = 31 536 000 segundos, que podemos aproximarlo a 30 000 000 segundos. Así pues, en 100 000 000 000 segundos hay alrededor de 3000 años. (El cálculo exacto arroja un tiempo de casi 3171 años)

XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel III

1. (A) Dividimos la figura en partes iguales como muestra el dibujo.

De esta forma es fácil observar que $\frac{A_{sombreada}}{A_{blanca}} = \frac{6}{3} = 2$



2. (B) Dejamos como desconocida la casilla *a*, la suma constante es $31 + a$, con lo que $31 + a = a + 13 + b$, luego $b = 18$ y podemos rellenar las casillas con este dato y el cuadrado queda:

a	13	b
19		11
12		16

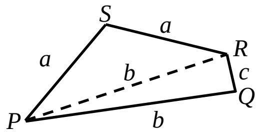
→

a	13	18
19	a+1	11
12	a+3	16

Fijándonos ahora en la segunda columna, escribimos $13 + a + 1 + a + 3 = 31 + a$, resolviendo encontramos $a = 14$, $b = 18$, $c = 15$. La suma pedida será 47.

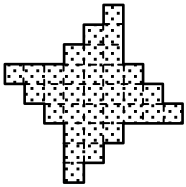
3. (D) Llamando *x* a la altura de los pequeños rectángulos que recortamos. El área de la pieza será igual al área del rectángulo menos los rectangulitos que cortamos. Es decir, $A_{pieza} = 80 \cdot 40 - 5x - 15x - 10x = 2990$. De donde sacamos que $x = 7$.

4. (A) Con los datos del enunciado, nombramos los lados de los triángulos como se indica y obtenemos las siguientes ecuaciones.



$2a + b = 22$, $2b + c = 22$, $2a + b + c = 24$. Restando a la tercera ecuación la primera obtenemos $c = 2$. Sustituyendo en la segunda se obtiene $b = 10$, y en la primera, $a = 6$.

5. (D) Dividiendo la figura en cuadraditos, como se muestra al margen, hay 33 cuadraditos iguales. Como el área de la figura es 528, cada cuadradito tendrá un área de 16, por tanto, el lado mide 4. Y el perímetro de la figura que tiene 36 lados será de 144.



6. (D) Como $\left(\frac{a}{c} + \frac{a}{b} + 1\right) : \left(\frac{b}{a} + \frac{b}{c} + 1\right) = 11$, $\left(\frac{ab + ac + bc}{bc}\right) : \left(\frac{bc + ab + ac}{ac}\right) = 11$, es decir, $\frac{a}{b} = 11$, $a = 11b$. Al ser $a + 2b + c \le 40$, resulta que $13b + c \le 40$. Como *a*, *b*, *c* son enteros positivos:

• si $b = 1$, $c \le 27$, por lo que tendríamos 27 ternas. (1, 11, c) con $c \le 27$
• si $b = 2$, $c \le 14$, por lo que tendríamos 14 ternas. (2, 22, c) con $c \le 14$
• si $b = 3$, $c \le 1$, por lo que tendríamos 1 terna. (3, 33, 1)
En total habrá 42 ternas.

7. (E) Si $n = 0$, el número $72 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$ es entero.

Si $n > 0$, el número $72 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$ será entero si 72 es múltiplo de la potencia de 2, es decir 2, 2^2, 2^3. Solo lo cumple $n = 1, 2 \text{ y } 3$ ya que $72 = 2^3 \cdot 3^2$

Si $n < 0$, el número $72 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$ será entero si 72 es múltiplo de la potencia de 3, es decir 3, 3^2. Solo lo cumple $n = -1, -2$.

En total solo hay 6 valores de *n* que lo verifique.

8. (A) Llamamos *O* al centro de la circunferencia. Fijándonos en el triángulo *ADO*, que es rectángulo, de hipotenusa 10 (ya que es el radio de la circunferencia) y de cateto 8, el otro cateto será, por tanto, $AD = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$.

9. (E) La pendiente de la recta es $\frac{3}{2}$, así que $\frac{r-q}{-2} = \frac{3}{2}$, por lo que $r - q = -3$.

10.(A) El lado del triángulo es el doble del lado del hexágono, por lo que el área del triángulo es cuatro veces el área de cada uno de los seis triángulos equiláteros en que podemos dividir un hexágono, siendo entonces, $\frac{A_{triángulo}}{A_{hexágono}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

11.(E) Llamando *a* al pequeño, tenemos que el mayor es *a* + 16, por lo que la media de los tres es $\frac{a+6+a+16}{3}$. Así que $\frac{2a+22}{3} = a + 7$ y de aquí $a = 1$ y la suma de los tres es: 1 + 6 + 17 = 24.

12.(B) Llamando *r* al total de reservas de petróleo de Alaska, *u* al consumo de EEUU en un año y *c* al consumo de China en un año, tenemos que $u = \frac{r}{35}$, $u + c = \frac{r}{10}$, así que $c = \frac{r}{10} - \frac{r}{35} = \frac{7r - 2r}{70} = \frac{r}{14}$. Con lo que en un año, China consumirá $\frac{r}{14}$ de las reservas de petróleo, así que estas durarían 14 años si solo las consumiera China.

13.(A) Al ser $u < 10$, $|u-10| = 10-u = v$, es decir $u = 10 - v$. Por lo tanto $u - v = (10 - v) - v = 10 - 2v$.

14.(B) Una gráfica no corta al eje de ordenadas si no hay ningún valor de y cuando $x = 0$. Esto ocurre en la gráfica B: $|y| + 4 = |x|$, pues la ecuación $|y| + 4 = 0$ no tiene solución.

15.(D) Teniendo en cuenta que $A < B$ y que A y B son positivos, voy comparando las fracciones propuestas.

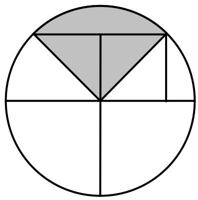
$\frac{A-1}{B-1} > \frac{A^2-1}{B^2-1}$, ya que $\frac{B^2-1}{B-1} > \frac{A^2-1}{A-1} \Rightarrow B+1 > A+1$

$\frac{A-1}{B-1} > \frac{A^3-1}{B^3-1}$, ya que $\frac{B^3-1}{B-1} > \frac{A^3-1}{A-1} \Rightarrow B^2+B+1 > A^2+A+1$

$\frac{A-1}{B-1} < \frac{A+1}{B+1}$, ya que $AB + A - B - 1 < AB - A + B - 1 \Rightarrow 2A < 2B$

16.(E) Si C y D son primos, no pueden ser impares ya que la suma de los dos sería par y por tanto $C + D$ no sería primo. Así que uno de los dos es el 2, además como $C - D$ también es primo queda que $D = 2$. Por tanto los números primos de los que hablamos son $C - 2, C, C + 2$.
Como la única terna de primos (impares consecutivos) es la 3, 5, 7 resulta ser $C = 5$ y los cuatro enteros dados son 5, 2, 7 y 3 que suman 17, por tanto un número primo también.

17.(A) La zona sombreada está formada por un cuadrado cuya diagonal es 4 (el radio de la circunferencia) y un segmento circular. Si el cuadrado lo dividimos en dos triángulos al unirlos al segmento circular componen un sector circular de 90º. Por tanto el área de la zona sombreada será un cuarto del área del círculo $A_{sombreada} = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 4^2 = 4\pi$. Aproximando la solución 4·3,14=12,56. Es decir la solución A.



18.(C) María Jesús gana con seguridad si escoge el 10, y también gana si escoge el 8 y Juanje no escoge (1, 3, 4), ni (2, 3, 4). En cualquier otro caso, el número elegido por María Jesús no será superior a la suma de los números elegidos por Juanje. Así pues, $P(n^{o} \text{ de M.Jesús es mayor}) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{10}$.

19.(E) Un triángulo rectángulo está inscrito en una circunferencia si y solo si la hipotenusa es el diámetro de la circunferencia. Por tanto, la hipotenusa medirá $2\cdot\frac{5}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$.

Si llamamos *a* y *b* a los catetos del triángulo, resulta que $a^2+b^2=50$. Como *a* y *b* son números enteros diferentes, la única posibilidad es que midan 1 y 7. Así que el producto será 7.

20.(C) La recta determinada por *P* y *Q* tendrá una pendiente $m=\frac{45-5}{19-3}=\frac{5}{2}$. Para que los puntos tengan coordenadas enteras, desde *P* hay que moverse 2 a la derecha y 5 arriba, hasta llegar a Q. Nos fijamos solo en las abscisas que van de 3 a 19 de dos en dos. Por tanto, hay que buscar todos los impares entre 4 y 18, es decir, 7 valores.

21.(C) Vamos a contar cuántos enteros pueden escribirse como suma de dos de la lista y los que no se pueden contar serán el resto.
Calculamos en número de combinaciones de nueve elementos tomados de dos en dos. $C_{9,2}=\frac{9!}{2!\cdot 7!}=36$. También hay que fijarse que ninguna de las sumas de dos elementos darán el mismo resultado, ya que cada número es la suma de los dos anteriores. La suma más alta es 55 + 34 = 89 y la más baja 1 + 2 = 3. Por tanto, del 3 al 89 (ambos incluidos) hay 87 números que buscar y nos salen 36. Así pues, faltan 87 – 36 = 51.

22.(D) Llamando *a*, *a+2* y *a+4* a los tres enteros impares consecutivos, resulta que $\frac{a+a+2+a+4}{3}=7 \Rightarrow a=5$. Añadiendo *m* a la lista tenemos que $\frac{5+7+9+m}{4}$ será entero si 21 + *m* es un múltiplo de 4 siendo *m* entero y distinto de 5, 7 y 9. Los menores serán *m* = 3, *m* = 11, *m* = 15. Éstos sumarán 29.

23.(C) *PQR* forman un triángulo rectángulo donde *PQ* es la hipotenusa. Aplicamos el teorema de la altura $OR^2=OP\cdot OQ$ donde $OR=t$, $OP=4$, $OQ=16$, así pues $t^2=4\cdot 16 \Rightarrow t=8$.

24.(E) Contemos en primer lugar los números de diez cifras que hay: $VR_{10}^{10}-VR_{10}^{9}=10^{10}-10^{9}$ (pues los que empiezan por cero tienen solo nueve cifras).

Los números de 10 cifras que contienen los diez dígitos son: $V_{10}^{10}-V_{9}^{9}=10!-9!$. Así pues la probabilidad pedida es $P=\frac{10!-9!}{10^{10}-10^{9}}=\frac{9!(10-1)}{10^{9}(10-1)}=\frac{9!}{10^{9}}$.

25.(D) Llamando ($10a + b$) y ($10c + d$) a las edades respectivas de padre e hijo, tenemos que $a > c$, $10a + b$ es primo, $(10a + b) + (10c + d)$ es primo, $(10a + b) – (10c + d)$ que es igual $10(a – c) + (b – d)$ es múltiplo de 33 y $a + b + c + d = 8$.

$10(a – c) + (b – d)$ será 33 o 66 (pues 99 implicaría $10a+b=99$ y no es primo).

Como la suma de todas las cifras es 8, $a \leq 8$.

Si $a = 8$, el resto de cifras serían 0, pero entonces $10a + b$ no es primo.

Si $a = 7$, para que $10a + b$ sea primo, b tiene que ser 1 y c y d serían 0, entonces $(10a + b) – (10c + d)$ no sería múltiplo de 33.

Si $a = 6$, $c \leq 2$ para que se cumpla que $a + b + c + d = 8$.

Si $c = 0$, para que $10(a – c) + (b – d)$ sea múltiplo de 33, entonces $b – d = 6$, por tanto $b \geq 6$ y entonces la suma de todas las cifras daría más de 8.

Si $c = 1$, $10(a – c) + (b – d)$ no sería múltiplo de 33.

Si $c = 2$, el resto de cifras serían 0 para que todas sumaran 8 y la edad de don Retorcido sería 60 que no es primo.

Si $a = 5$, entonces $c \leq 3$.

Si $c = 0$ sería imposible que se cumpliera lo de múltiplo de 33.

Si $c = 1$, como $a+b+c+d=8$, $b \leq 2$.

Si $c = 2$, $b \leq 1$.

Si $c = 3$, $b = 0$.

En todos estos casos la edad de don Retorcido sería 50, 51 o 52 y ninguno es primo.

Si $a = 4$, como los únicos primos con 4 en las decenas son 41, 43 y 47, b debería ser 1, 3 o 7, pero b no puede ser 7 ya que $a+b+c+d=8$.

Si b fuera 1, $c + d$ sería 3 y la diferencia de las edades no sería nunca múltiplo de 33.

Así pues, b tiene que ser 3, entonces la edad de don Retorcido sería 43 y la del hijo 10.

Estas edades cumplen todas las condiciones. Por tanto, la suma pedida es 7.

XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

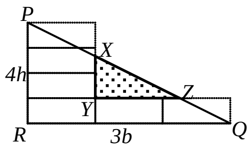
Soluciones 2ª Fase Nivel IV

1. (C) El 75% del dinero lo donan profesores y alumnos, en proporción 2:3, así que los profesores donan $\frac{2}{5} \cdot 75\% = 30\%$, por tanto, los alumnos el 45%. Con lo que el cociente entre lo donado por los padres y los alumnos es $\frac{25}{45} = \frac{5}{9}$.

2. (B) Llamando x al lado del cuadrado, tenemos que $90^2 = x^2 + (2x)^2$, $x^2 = \frac{90^2}{5} = 1620$.

3. (D) Sacando factor común a la ecuación dada, nos queda $(x-2)(x-4+x-6)=0$ $(x-2)(2x-10)=0$, las soluciones son 2 y 5. Por tanto, el producto es 10.

4. (C) El triángulo XYZ y el triángulo PQR son semejantes, así que $\frac{XY}{YZ} = \frac{4h}{3b}$. Como nos dicen que $\frac{XY}{YZ} = \frac{1}{2}$, por tanto, $\frac{4h}{3b} = \frac{1}{2}$, es decir, $\frac{h}{b} = \frac{3}{8}$.



5. (E) $\frac{p+q^{-1}}{p^{-1}+q} = \frac{p+\frac{1}{q}}{\frac{1}{p}+q} = \frac{(pq+1)p}{(1+pq)q} = \frac{p}{q} = 17$, $p = 17q$. Al ser $p + q \leq 100$, tenemos que $18q \leq 100$, así pues q =1, 2, 3, 4 ó 5. Habiendo, por tanto, 5 parejas de enteros positivos.

6. (C) Tenemos, A = $\log_{30}$ 6, B = $\log_{30}$ 10, C = $\log_{30}$ 15, así que la media, $\frac{A+B+C}{3}$, será $\frac{\log_{30}(6 \cdot 10 \cdot 15)}{3} = \frac{\log_{30} 900}{3} = \frac{2}{3}$.

7. (B) Hay dos paralelogramos con estos datos O(0, 0), A(1, 4), B(4, 1). El cuarto vértice puede ser *C(3,-3)* ó *C(5, 5)*. Obtengamos el área de cada uno de ellos, restando al área del rectángulo "circunscrito" de lados paralelos a los ejes los correspondientes triángulos y rectángulos no ocupados por el paralelogramo.
El primero (de vértice *C(5, 5)*) tiene de área $5 \cdot 5 - (2+1+2+2+1+2) = 15$.

El segundo (de vértice *C(3, -3)*) tiene de área $4 \cdot 7 - \left(2+2+\frac{9}{2}+\frac{9}{2}\right) = 15$.

En ambos casos el área es 15.

8. (A) Al ser $PQ = PR$, si $PT = x$, entonces $PS = x + 50$ y las dimensiones de los catetos del triángulo rectángulo PTS son x y 120 y la hipotenusa $x + 50$, por tanto, $(x+50)^2 = x^2 + 120^2$, de donde $x=119$, así el área del triángulo PTS es $\frac{120 \cdot 119}{2} = 7140$.

Por otro lado, calculamos el área del triángulo isósceles PQR, para ello calculamos el valor de la altura sobre el lado $QR = \sqrt{390^2 - 150^2} = 360$. Por tanto, el área será $\frac{300 \cdot 360}{2} = 54000$, con lo que el área pedida es $54000 - 7140 = 46860$.

9. (C) Escribimos $a^{2015} + a^{2016}$ como $a^{2015}(1+a)$. Tenemos que si $a=5$ ó 10, a^{2015} es múltiplo de 5, y si $a=4$ ó 9 $(1+a)$ lo es. En ningún otro caso será múltiplo de 5, por tanto, los valores posibles de a son 4, 5, 9 y 10, en total, cuatro.

10.(E) La recta de ordenada en el origen 2 y pendiente m corta al eje OX en el punto de abscisa $-\frac{2}{m}$, análogamente, las otras rectas cortarán en las abscisas $-\frac{3}{m}$ y $-\frac{4}{m}$.

Por tanto, $-\frac{2}{m} - \frac{3}{m} - \frac{4}{m} = -36 \Rightarrow m = \frac{1}{4}$.

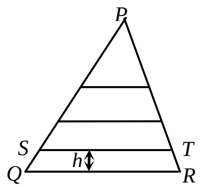
11.(E) La ecuación $x^2 + 2kx + 7k - 10 = 0$ tendrá una única solución real si el discriminante de la ecuación de segundo grado es cero. Es decir, $4k^2 - 4(7k - 10) = 0 \Rightarrow k^2 - 7k + 10 = 0$ Las soluciones son 5 y 2 que suman 7.

12.(B) Despejando cos α obtenemos $\cos\alpha = \frac{\cos 60^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$.

13.(A) Prolongando uno de los lados del triángulo equilátero, que no sea el horizontal, hasta que dicha prolongación corte a un lado horizontal del cuadrado, resulta que la hipotenusa del triángulo rectángulo formado, a, viene dada por la igualdad $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{a} \Rightarrow a = 4\sqrt{3}$, así que una de las lentillas está inscrita en el triángulo rectángulo de cateto 6, hipotenusa $4\sqrt{3}$ y el otro cateto $2\sqrt{3}$. El área de dicho triángulo es $\frac{6 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.

Como en cualquier triángulo, el área es $A = \frac{P \cdot r}{2}$, siendo P el perímetro y r el radio del círculo inscrito. Por tanto, tenemos que $6\sqrt{3} = \frac{6+6\sqrt{3}}{2} \cdot r$ $\Rightarrow r = \frac{6\sqrt{3}}{3+3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2} = 3 - \sqrt{3}$.

14.(B) Empezamos calculando el área del triángulo *PQR*, como el triángulo es isósceles y el lado desigual es el *PQ*, calculamos la altura sobre dicho lado $\sqrt{125^2 - 75^2} = 100$ así que el área del triángulo es $\frac{1}{2} \cdot 150 \cdot 100 = 7500$. El área del triángulo *PST* es $\frac{3}{4} \cdot 7500 = 5625$ y como dicho triángulo es semejante al *PQR*, tenemos que $\frac{ST^2}{125^2} = \frac{5625}{7500}$, de donde $ST = \frac{125\sqrt{3}}{2}$.



Finalmente, el área del trapecio *STRQ*, es $\frac{1}{4} \cdot 7500$ y también es $\frac{1}{2}\left(125 + \frac{125\sqrt{3}}{2}\right) \cdot h = \frac{125}{4}\left(2+\sqrt{3}\right) \cdot h = 1875$, despejando h de esta expresión, $h = \frac{7500}{125\left(2+\sqrt{3}\right)} = \frac{60}{2+\sqrt{3}} = 60\left(2-\sqrt{3}\right)$.

15.(A) Como *a*, *b* y *c* están en progresión geométrica cumplen que $a = \frac{b}{r}$, $c = b \cdot r$. Así que $abc = b^3$ $\Rightarrow b^3 = 46656 = 2^6 \cdot 3^6$ $\Rightarrow b = 36$. Por otro lado, $a + b + c = 114$, por tanto, $a + c = 114 - b = 114 - 36 = 78$.

16.(C) Sumando ambas igualdades, tenemos $x^2 + y^2 = 9 \cdot (x+y)$ y restándolas, $x^2 - y^2 = 7(x-y)$ que es lo mismo que escribir $(x+y) \cdot (x-y) = 7(x-y)$ y como $x \neq y$ $\Rightarrow x + y = 7$, por lo que $x^2 + y^2 = 9 \cdot 7 = 63$.

17.(D) Para contar los números cuyas cifras suman 3, solo hay que ser un poco ordenados, podremos utilizar las cifras 0, 1, 2 y 3.
De dos cifras tenemos 12, 21 y 30.
De tres cifras tenemos 102, 111, 120, 201, 210, 300.
En total 9 números.

18.(D) Tenemos que $p+q=63$ y $s+t=57$. Como los números son consecutivos y las sumas son tan diferentes, está claro que los pequeños serán *s* y *t* y los mayores *p* y *q*. La media de *p* y *q* es 31,5, así que , *p* y *q* serán 31 y 32. Hacemos lo mismo con *s* y *t*, como la media es 28,5, resulta que *s* y *t* serán 28 y 29. Como todos son consecutivos tenemos que *r* es 30.

19.(A) Para que el producto sea un cuadrado perfecto no podemos elegir ni 5 ni 7, pues no aparecen un número par de veces. Así que hay que elegir seis números de una lista de siete (1, 2, 3, 4, 6, 8, 9), por tanto, solo sobra uno. Factorizamos los números para que nos ayude en buscar el cuadrado perfecto. 1, 2, 3, 2^2, $2\cdot 3$, 2^3, 3^2. Para que el producto sea un cuadrado perfecto sobra el 2 ó 8. Por tanto, los dos números son $m^2=2^6\cdot 3^4$ y $n^2=2^4\cdot 3^4$. Por lo que m = 72, n = 36. El valor de m + n es 108.

20.(E) Son las variaciones con repetición de 3 elementos (7, 8 y 9) tomadas de 3 en 3, o sea, 3^3=27 .

21.(D) La recta *t* forma con la recta *s* (y = 0) un ángulo de 60º, ya que la pendiente es $\sqrt{3}$, por lo que la bisectriz interior de *t* y *s* formará un ángulo de 30º con ambas, por tanto, la pendiente de dicha bisectriz será $\frac{1}{\sqrt{3}}$ y su ecuación $y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$ siendo la ordenada de *D*, $y=\frac{1}{\sqrt{3}}(13-1)=\frac{12}{\sqrt{3}}$.

22.(A) Alicia gana en los siguientes casos: C_A , $+_A\ +_B\ C_A$, $+_A\ +_B\ +_A\ +_B\ C_A$. Por tanto la probabilidad de que gane será. $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}=\frac{21}{32}$.

23.(A) Como *a, b* y *c* están en progresión aritmética, podemos escribir $a=b-d$, $c=b+d$, de este modo, $3a+b=4b-3d$, $3b+c=4b+d$, $3c+a=4b+2d$ y como éstos están en progresión geométrica, tenemos $(4b+d)^2=(4b-3d)(4b+2d)\Rightarrow 16b^2+8bd+d^2=16b^2-4bd-6d^2$

$\Rightarrow 12bd=-7d^2$, como $d\neq 0$ pues en otro caso *a*=*b*=*c* y 17955 no es un cubo perfecto, resulta que $d=-\frac{12}{7}b$, por tanto, $a=\frac{19}{7}b$, $c=-\frac{5}{7}b$. Y como *a*·*b*·*c*=17955, tenemos entonces $\frac{19}{7}b\cdot b\cdot\left(-\frac{5}{7}b\right)=17955\Rightarrow b^3=-9261\Rightarrow b=-21$ en cuyo caso, *a*=-57, *c*=15 y entonces, *a*+*b*+*c*= -63.

24.(E) Poniendo $5x^2 - 4xy + 2x + y^2$ como $4x^2 - 4xy + 2x + y^2 + x^2$ y sumando 1 a cada término de la ecuación, nos queda $4x^2 - 4xy + 2x + y^2 + x^2 + 1 = 625$, $(2x - y)^2 + (x + 1)^2 = 25^2$. Las únicas parejas cuya suma de cuadrados da 625 son (0, 25), (15, 20), (7, 24). Si llamamos m al primer término ($2x - y$) y n al segundo ($x + 1$), tenemos que $x = n - 1$, $y = 2n - m - 2$.
Para que se cumpla la condición del enunciado ($0 \le x \le y$), n tiene que ser mayor o igual a 1 y los m negativos siempre serán válidos. Por tanto las parejas (m, n) válidas por el momento son (–15, 20), (–20, 15), (–24, 7), (–7, 24). Probando con el resto de parejas (m, n) posibles y comprobando si $y \ge x$, vemos que también sirven (0, 25), (15, 20), (7, 24). En total 7.

25.(A) Sin haber restricciones habría 8! formas de distribuir las tarjetas, habrá que quitarles aquellas donde esté bien la tarjeta 1 (7!), la tarjeta 2 (7!), la tarjeta 3 (7!), pero hemos quitado de más, aquellas donde está bien la 1 y la 2 que las hemos contado dos veces (6!), y la 1 y la 3 (6!) y la 2 y la 3 (6!), ahora hemos puesto de más, hay que quitar los casos donde estén bien la 1, la 2 y la 3 (5!). Así que el número pedido es:

$$8! - 3 \cdot 7! + 3 \cdot 6! - 5! = 5!\,(8 \cdot 7 \cdot 6 - 3 \cdot 7 \cdot 6 + 3 \cdot 6 - 1) = 5! \cdot 217 = 27\,240$$

Participantes y relación de ganadores del XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

En la primera fase celebrada en los propios centros se superó la cifra de 40 000 estudiantes de más de 500 centros participantes.

Aunque se inscribieron 3477 concursantes a la segunda fase, el número de participantes fue de 3104. La estadística de participación por niveles y puntuaciones obtenidas puede consultarse en la página de la Sociedad Puig Adam así como la relación de todos los ganadores del concurso y la relación de los centros con mayor puntuación en cada uno de los niveles.

La distribución por niveles de los participantes en la segunda fase, que como siempre tuvo lugar en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, fue la siguiente:

	NIVEL 1		NIVEL 2		NIVEL 3		NIVEL 4	
	5º P y 6º P		1º ESO, 2º ESO		3º ESO, 4º ESO		1º B, 2º B	
nº de participantes	231	504	395	617	389	509	258	201
Totales por nivel	735		1012		898		459	

Los tres, y en algún caso cuatro, ganadores en cada uno de los niveles fueron:

NIVEL I

1. Pablo Ruiz Torralba — (6º Primaria) Colégio San Luis Gonzaga (Majadahonda)
2. Enrique Matorras Muñoz — (6º Primaria) Colégio Laude Fontenebro II (Collado Villalba)
3. Álvaro Gamboa Rodríguez — (5º Primaria) CP Escuelas Bosque

NIVEL II

1. Nicolás Rey Rodríguez — (2º ESO) Colegio Fray Luis de León
2. Alejandro García Martinez de G. — (1º ESO) Colegio Mirabal (Villanueva de la Cañ.)
3. Miguel Balo Mejías — (2º ESO) Colégio de Jesús (Barajas)

NIVEL III

1. Martín Gómez Abejón — (4º ESO) IES Ramiro de Maeztu
2. Alonso M. Mayorga Nieto — (3º ESO) Colegio San Pablo CEU (Montepríncipe)
3. Alejandro Epelde Blanco — (4º ESO) Montessori School (Alpedrete)
4. Alberto Almagro Sánchez — (4º ESO) IES Ramiro de Maeztu

NIVEL IV

1. Ismael Morales López — (2º Bchto) IES Al Satt (Algete)
2. Jia Jie Tao — (1º Bchto) IES San Mateo
3. Diego José Sánchez Martín — (2º Bchto) Colegio Virgen de Mirasierra

RELACIÓN DE LOS 10 CENTROS CON MEJOR PUNTUACIÓN POR NIVEL

(Elaborada con las **tres mejores puntuaciones** de cada centro en cada nivel)

XX CONCURSO DE PRIMAVERA Mayo 2016

NIVEL I

NOMBREDEL CENTRO	MUNICIPIO	SUMA DE PUNTOS
COLEGIO NTRA SRA BUEN CONSEJO	Madrid	319
COLEGIO SAN JOSÉ DEL PARQUE	Madrid	277
COLEGIO AMANECER	Alcorcón	275
COLEGIO AGUSTINIANO	Madrid	267
COLEGIO SAINT ANNE'S SCHOOL	Madrid	264
COLEGIO LOPE DE VEGA	Alcalá de Henares	262
CP ASUNCIÓN RINCÓN	Madrid	261
COLEGIO SAN AGUSTÍN	Madrid	260
COLEGIO CHAMBERÍ	Madrid	258
CP NTRA SRA DEL VAL	Alcalá de Henares	254
COLEGIO AMORÓS	Madrid	254

NIVEL II

NOMBREDEL CENTRO	MUNICIPIO	SUMA DE PUNTOS
COLEGIO CORAZÓN DE MARÍA	Madrid	294
COLEGIO SAN AGUSTÍN	Madrid	289
COLEGIO ALEMÁN DE MADRID	Madrid	274
COLEGIO RETAMAR	Pozuelo de Alarcón	258
COLEGIO JOYFE	Madrid	249
IES SAN JUAN BAUTISTA	Madrid	247
IES LEONARDO DA VINCI	Majadahonda	246
IES CERVANTES	Madrid	244
COLEGIO FRAY LUIS DE LEÓN	Madrid	244
COLEGIO CARDENAL SPÍNOLA	Madrid	243

NIVEL III		
NOMBREDEL CENTRO	MUNICIPIO	SUMA DE PUNTOS
IES EL BURGO DE LAS ROZAS	Las Rozas	281
IES RAMIRO DE MAEZTU	Madrid	273
COLEGIO RETAMAR	Pozuelo de Alarcón	258
IES JOSÉ LUIS SAMPEDRO	Tres Cantos	252
IES CERVANTES	Madrid	251
MONTESSORI SCHOOL LOS FRESNOS	Alpedrete	250
COLEGIO CORAZÓN DE MARÍA	Madrid	248
IES FORTUNY	Madrid	246
COLEGIO INTERNACIONAL NUEVO CENTRO	Madrid	245
COLEGIO ARCÁNGEL RAFAEL	Madrid	242

NIVEL IV		
NOMBREDEL CENTRO	MUNICIPIO	SUMA DE PUNTOS
IES SAN MATEO	Madrid	284
COLEGIO VILLA DE GRIÑÓN	Madrid	271
IES FORTUNY	Madrid	242
IES RAMIRO DE MAEZTU	Madrid	234
COLEGIO BASE	Alcobendas	231
COLEGIO INTL. SEK-EL CASTILLO	Villanueva de la Cañ.	200
COLEGIO ALEMÁN DE MADRID	Madrid	199
RUNNYMEDE COLLEGE	Alcobendas	197
IES EL ESPINILLO	Madrid	192
IES JUAN DE LA CIERVA	Madrid	190

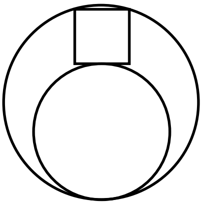
XXXIV CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 11 de junio de 2016

NIVEL I (3º de E.S.O.) Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1. (7 puntos)

Juan efectúa las mil divisiones enteras siguientes: 2016 entre 1, 2016 entre 2, 2016 entre 3, y así hasta llegar a 2016 entre 1000. ¿Cuál es el mayor resto que ha obtenido?

Problema 2. (7 puntos)

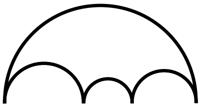


En la figura se observan dos circunferencias tangentes interiores y un cuadrado, uno de cuyos lados es tangente a la circunferencia pequeña, estando los vértices opuestos a ese lado en la circunferencia mayor. Si los radios de las circunferencias son 50 cm y 35 cm, calcula la longitud del lado del cuadrado.

Segunda parte (1 hora 30 minutos)

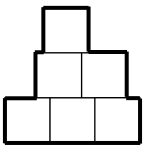
Problema 1A. (1 punto)
En mi clase de Alemán somos 10 estudiantes y la nota media de toda la clase es 6,4. Las notas de las chicas han sido mejores que las de los chicos, pues han sacado un 7 de media mientras que la media de los chicos ha sido un 5. ¿Cuántas chicas hay en mi clase?

Problema 2A. (1,5 puntos)



Sea T la respuesta del problema anterior. En la figura se observan cuatro semicircunferencias cuyos centros están alineados. Si el perímetro de la figura es P y el radio de la mayor es $\frac{T}{14}$, calcula $\frac{P}{\pi}$

.**Problema 3A.** (2 puntos)



Sea T la respuesta del problema anterior. Con seis cuadrados de lado T formamos la figura que ves. ¿Cuál es su perímetro?

Problema 1B. (1 punto)

Calcula el número n para que $20^{2016} = 10^{2000} \cdot 40^{16} \cdot 2^{n}$

Problema 2B. (1,5 puntos)

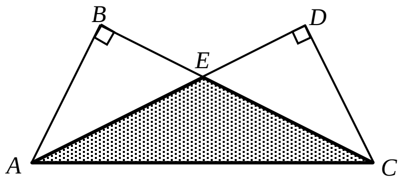
Sea T la respuesta del problema anterior y k la suma de sus cifras.

Una planta de k cm de altura crece a un ritmo de 3 cm cada 2 años. Una segunda planta de 58 cm de altura crece a un ritmo de 5 cm cada 6 años. Si ambas duraran mucho tiempo, ¿dentro de cuántos años tendrían la misma altura?

Problema 3B. (2 puntos)

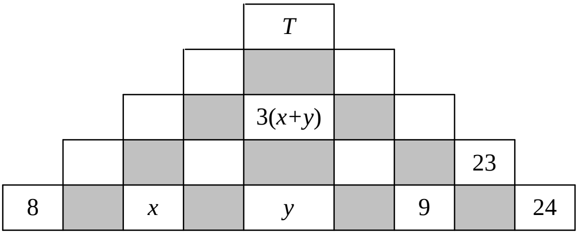
Sea T la respuesta del problema anterior.

En la figura que observas, $AB = DC = T$, $BC = AD = 72$ y los ángulos en B y D son rectos. Calcula el área del triángulo AEC.



Problema 4. (5 puntos)

Sea a la respuesta del problema 3A, b la respuesta del problema 3B y T la suma de las cifras de $a{\cdot}b$. En el diagrama que observas, el número que aparece en cada casilla en blanco es la suma de los de las casillas en blanco que tiene inmediatamente debajo. Calcula $\dfrac{x}{y}$.



NIVEL II **(4º de E.S.O.)** Primera parte (1 hora 30 minutos)

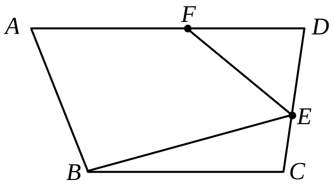
Problema 1. (7 puntos)

Escribe todas las parejas de enteros positivos (x, y) que verifican la ecuación $\frac{1}{x}+\frac{540}{xy}=2$

Problema 2. (7 puntos)

En el trapecio $ABCD$ de la figura se verifica que el cociente entre las longitudes de las bases es $\frac{BC}{AD}=\frac{5}{7}$.

Los puntos E y F están en los lados CD y DA respectivamente y verifican que $\frac{CE}{ED}=\frac{2}{3}$, $\frac{AF}{FD}=\frac{4}{3}$.



Si el área del cuadrilátero $ABEF$ es 123, calcula el área del trapecio.

Segunda parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1A. (1 punto)

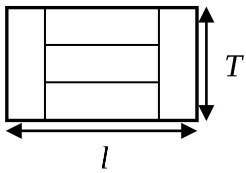
El área de un hexágono regular de lado h es el triple del área de un cuadrado de lado l.

Calcula $\frac{l^4}{h^4}$ y expresa dicho cociente como fracción irreducible.

Problema 2A. (1,5 puntos)

Sea $\frac{a}{b}$ (irreducible) la respuesta del problema anterior y $T = ab$. Con cinco rectángulos idénticos formamos otro grande como muestra la figura.

Si la anchura de este rectángulo grande es T cm, ¿cuál es su longitud, l ?



Problema 3A. (2 puntos)

Sea T la respuesta del problema anterior. En una bolsa hay nueve bolas numeradas con números enteros positivos. Cuatro de ellas tienen números impares cuya suma es $T + 4$ y las restantes, números pares, en concreto: 4, 8, 12, 18 y 32. Luis coge cuatro bolas y al coger Ana otras cuatro se da cuenta de que las que eligió ella suman el triple de las que eligió Luis. ¿Qué bola no cogió ninguno de los dos?

Problema 1B. (1 punto)

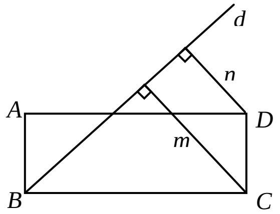
Sea p un número primo. Hace p años, las edades de tres niños estaban en progresión geométrica de suma p y razón 2. ¿Cuál es la suma de las edades actuales de los tres?

Problema 2B. (1,5 puntos)

Sea T la respuesta del problema anterior. Se pretende dividir un cono de altura $\frac{T}{7}$ en dos partes de igual volumen mediante un plano paralelo a la base. ¿A qué distancia del vértice debe estar el plano?

Problema 3B. (2 puntos)

Sea T la respuesta del problema anterior y $k = T^3 - 2$.
Cuando Ali tenía la edad de Billy, Celi tenía el doble de la edad de Billy.
Cuando Celi tenía la edad de Ali, Billy tenía k años.
Cuando Billy tenga la edad de Celi, Ali tendrá 88 años.
Cuando Billy tenga la edad de Ali, ¿cuál será la suma de las edades de los tres?



Problema 4. (5 puntos)
Sea a la respuesta del problema 3A, b la respuesta del problema 3B y m y n las sumas de las cifras de a y b respectivamente. En el rectángulo $ABCD$ de la figura, triple de largo que de ancho, la recta d pasa por el vértice B y dista m y n de los vértices C y D respectivamente. ¿Cuál es el área de dicho rectángulo?

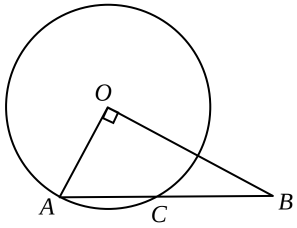
<u>NIVEL III</u> (1º de Bachillerato) Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1. (7 puntos)

Sea f una función tal que, para todo x se verifica que $f(x) = f(x-1) + f(x+1)$. Si $f(20) = 16$ y $f(16) = 20$, calcula $f(2016)$.

Problema 2. (7 puntos)

En la figura se observa una circunferencia de centro *O* y un triángulo *OAB*, rectángulo en *O* siendo *A* un punto de la circunferencia. La hipotenusa *AB* vuelve a cortar a la circunferencia en el punto *C* siendo $AC = 8$ y $CB = 10$. Calcula $\cos\hat{B}$.



Segunda parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1A. (1 punto)

Cuando un triángulo rectángulo gira sobre un cateto, el volumen del cono obtenido es 800π cm^3 y cuando gira sobre el otro, 1920π cm^3. ¿Cuál es, en cm, la longitud de la hipotenusa del triángulo?

Problema 2A. (1,5 puntos)

Sea T la respuesta del problema anterior y $k = T - 2$.
¿Cuántos cuadrados perfectos, menores que 10^6 son múltiplos de k?

Problema 3A. (2 puntos)

Sea T la respuesta del problema anterior y k el producto de sus cifras.
Si N es un número formado por las seis cifras 1, 2, 3, 3, 4 y 5 (en algún orden), calcula el menor valor de N divisible por $11k$.

Problema 1B. (1 punto)

Calcula $\dfrac{2}{\log_4\left(2000^6\right)}+\dfrac{3}{\log_5\left(2000^6\right)}$ dando el resultado como fracción irreducible.

Problema 2B. (1,5 puntos)

Sea $T = m+n$, siendo $\dfrac{m}{n}$ la respuesta del problema anterior.

En el cuadrado *ABCD*, los puntos *E* y *F* están en los lados *AD* y *BC* respectivamente, de forma que $BE = EF = FD = T+3$. Calcula el área de dicho cuadrado.

Problema 3B. (2 puntos)

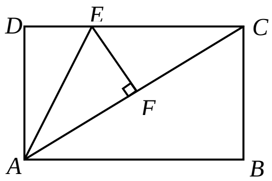
Sea T la respuesta del problema anterior y $k=\dfrac{T}{15}$.

Si *P(x, y)* es un punto de la circunferencia $x^2+y^2-14x-6y=k$, ¿cuál es el mayor valor posible para $3x+4y$?

Problema 4. (5 puntos)

Sea *a* la respuesta del problema 3A, *b* la respuesta del problema 3B y *m* y *n* las sumas de las cifras de *a* y *b* respectivamente.

En el rectángulo *ABCD,* el punto *E* está en CD de forma que $B\hat{A}C = E\hat{A}D$ y el punto *F* está en la diagonal *AC* siendo $EF \perp AC$. Si el área del triángulo *ABC* es *m* y el área del triángulo *CEF* es *n*, calcula el seno de $C\hat{A}E$.



XVI Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

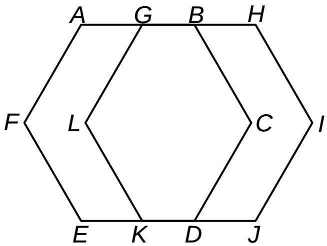
19 de noviembre de 2016

PRUEBA POR EQUIPOS 1º y 2º de E.S.O. (45 minutos)

1. El cuadrado de la figura es mágico respecto del producto, es decir, el producto de los tres números de cada fila, de cada columna y de cada diagonal es el mismo. Si en ninguna casilla hay un cero, complétalo.

	32	
16	8	

2. Los hexágonos regulares *ABCDEF* y *GHIJKL* de la figura son iguales siendo la longitud de cada lado 24 cm. Estos hexágonos se solapan pues *G* está en el lado *AB*, *B* está en *GH*, *K* en *DE* y *D* en *JK*. Si el área del hexágono *GBCDKL* es la mitad de la del *ABCDEF*, calcula la longitud *FL*.



3. Escribe todas las parejas de números de dos cifras, de la forma [*ab*] y [*ac*] tales que la suma de sus cuadrados sea 1313.

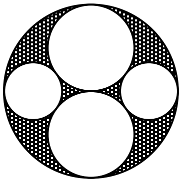
PRUEBA POR EQUIPOS 3º y 4º de E.S.O. (45 minutos)

1. Completa el siguiente “crucinúmeros”. Cada uno de los tres números en horizontal es un número de cuatro cifras (Ninguno empieza por cero).

1H: Cubo de la suma de las cifras de 1V
2H: Sus cifras, de izquierda a derecha, están en orden estrictamente decreciente
3H: Sus cifras, de izquierda a derecha, están en orden estrictamente decreciente
1V: Cuarta potencia de un número entero
2V: Cuadrado perfecto
3V: Sus cifras están en progresión geométrica
4V: Uno de sus factores primos es un número de dos cifras.

	1V	2V	3V	4V
1H				
2H				
3H				

2. En la figura se observan cinco circunferencias tangentes entre sí: dos pequeñas iguales, dos medianas también iguales y una grande. Si el radio de la circunferencia grande es $\frac{30}{\sqrt{\pi}}$, calcula el área sombreada.



3. Encuentra el mayor número de cuatro cifras que es igual a la suma de los factoriales de sus centenas, decenas y unidades.

PRUEBA POR EQUIPOS Bachillerato. (45 minutos)

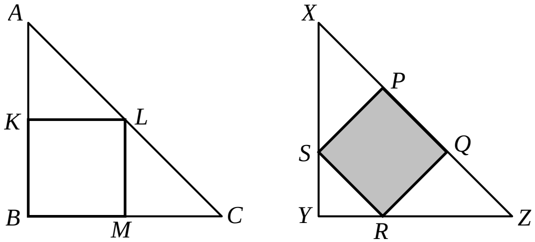
1. Encuentra todos los números primos p para los que $p^2 + 21p - 1$ es también un número primo.

2. La función $f(x) = \dfrac{x^4 + 3x^3 - 4x^2}{x^2 + 4x - 4}$ es negativa en dos intervalos de R. Calcula la suma de las longitudes de estos intervalos.

3. Calcula el menor entero positivo t que verifica la ecuación $2^{13} + 2^{10} + 2^x = t^2$ en la que x es un entero positivo.

<u>PRUEBA INDIVIDUAL</u> 1º y 2º de E.S.O. (90 minutos)

1. En la figura se observan dos triángulos rectángulos isósceles iguales, *ABC* y *XYZ* y dos cuadrados *KLMB* y *PQRS*. Si el área del cuadrado *KLMB* es 189, ¿cuál es el área del cuadrado *PQRS*?

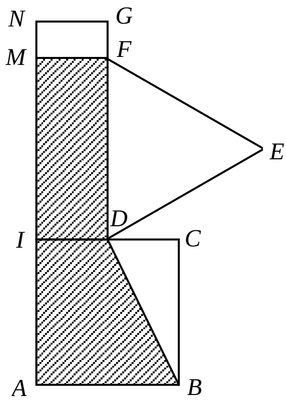


2. En un edificio de apartamentos la mitad de las ventanas tienen cortinas, la cuarta parte de las ventanas tienen macetas con flores y la sexta parte tienen cortinas y macetas con flores. Hay 375 ventanas que no tienen ni cortinas ni macetas con flores. Por otra parte sabemos que un quinto de los apartamentos tienen 5 ventanas, dos quintos de los apartamentos tienen 3 ventanas y el resto tienen 2 ventanas. ¿Cuántos apartamentos tiene el edificio?

3. ¿Cuántos números, de los cien primeros enteros positivos, verifican que sus inversos tienen un desarrollo decimal periódico?

4. El rectángulo *DGNI*, el cuadrado *ABCI* y el triángulo equilátero *DEF* tienen 24 cm de perímetro cada uno de ellos. *D* es el punto medio de *IC* y *MF* es paralelo a *NG*.

i. ¿Cuál es el área de la figura sombreada de vértices *ABDFM*?
ii. ¿Cuál es el perímetro de la figura de vértices *ABCDEFGN*?



<u>PRUEBA INDIVIDUAL</u> 3º y 4º de E.S.O. (90 minutos)

1. ¿Cuántos enteros positivos, menores que 2016, pueden escribirse como diferencia de dos cuadrados perfectos?

2. En un hexágono regular de lado 1 consideramos los veinte triángulos cuyos vértices son vértices del hexágono. Calcula la media de las áreas de estos veinte triángulos.

3. Un fabricante de tres productos, de precios unitarios 50, 65 y 70 €, recibe un pedido de 100 unidades por un total de 6850 € con la condición de que envíe el máximo número posible del producto más caro. ¿Cuántas unidades de cada producto debe enviar?

4. Los cinco hermanos Pérez se llevan muy bien y han pasado un verano bastante entretenido. Cada uno de los seis días de la semana, de lunes a sábado, cuatro de ellos hacían una determinada actividad siendo 38, 35, 36, 36, 38 y 39 la suma de las edades de los cuatro. Si ninguno estuvo los seis días, averigua las edades de cada uno de los cinco.

<u>PRUEBA INDIVIDUAL</u> Bachillerato (90 minutos)

1. Demuestra que en cualquier triángulo rectángulo la suma de los inversos de las longitudes de los catetos es igual al inverso de la distancia del pie de la bisectriz del ángulo recto a cualquiera de los catetos.

2. Las ecuaciones $x^3 + Ax + 10 = 0$ y $x^3 + Bx^2 + 50 = 0$ tienen dos raíces comunes. Calcula el producto de estas dos raíces comunes.

3. En una reunión de afectados por un accidente nuclear, cada uno de los asistentes tiene 3, 4, 5, 6 ó 7 dedos en cada mano, siendo $p(k) = \dfrac{2^{2-|5-k|}}{10}$ la probabilidad de tener k dedos en una mano. Si el número de dedos en la mano izquierda es independiente del número de dedos en la mano derecha, calcula la probabilidad de que un asistente elegido al azar tenga al menos 10 dedos entre ambas manos.

4. ¿Cuántos enteros no negativos x verifican la ecuación $\left[\dfrac{x}{44}\right] = \left[\dfrac{x}{45}\right]$?

(Recuerda: $[a]$ es la parte entera de a, es decir, el mayor entero menor o igual que a)

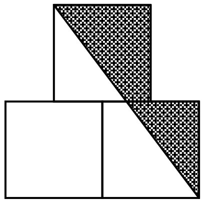
PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

1º y 2º de ESO.-

1A.- Los puntos P, Q, R y S están alineados en ese orden. Si $PR = 15$ cm, $QS = 12$ cm y $PS = 20$ cm, calcula, en cm, la distancia entre Q y R.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1B.- Sea "T" la respuesta del problema 2B
En la figura adjunta se observan tres cuadrados iguales de lado $\frac{T}{7}$ cm y tal que el punto medio del lado inferior del cuadrado de arriba es un vértice de los de abajo. ¿Cuántos cm^2 tiene el área sombreada?

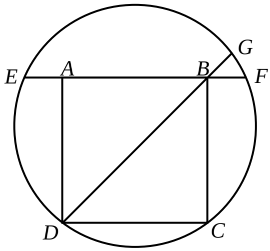


(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1C.- Sea "T" la respuesta del problema 2C.
Isa y Alicia parten al mismo tiempo de dos puntos diametralmente opuestos de una pista circular y corren a distintas velocidades y en sentido contrario. Cuando se encuentran la primera vez Alicia ha recorrido T metros y, desde ese momento y hasta que se encuentran por segunda vez, Isa ha recorrido $\frac{3T}{2}$ metros. Si sus velocidades son constantes, ¿cuál es la longitud, en metros, de la pista?

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

3º y 4º de ESO.-
.
2A.- Sea "T" la respuesta del problema 3A.
En la figura adjunta observas un cuadrado $ABCD$, de lado T, dos de cuyos vértices, C y D, están en una circunferencia. Si la cuerda EF tiene longitud 98 y la cuerda DG pasa por B, calcula BG.



(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

2B.- Hoy es el cumpleaños de tres chicos cuya suma de edades es 44 años. ¿Cuál será la suma de sus edades la próxima vez que dicha suma vuelva a ser un número con dos cifras iguales?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

2C.- Sea "T" la respuesta del problema 3C.
Calcula el área del trapecio limitado por los ejes de coordenadas y las rectas $x + y = T$, $x + y = T - 10$.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

Bachillerato.-

3A.- Sea "T" la respuesta del problema 1A.

Considera los diez enteros positivos más pequeños que puedas, de forma que haya exactamente T divisibles entre T, y exactamente $T - 2$ divisibles entre $T - 2$. ¿Cuál es el mayor de los diez números?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

3B.- Sea "T" la respuesta del problema 1B y k la suma de las cifras de T.

En un triángulo rectángulo la longitud de la hipotenusa es k veces la longitud de la altura sobre ella. Calcula el cociente entre las longitudes del mayor y el menor de los segmentos en que dicha altura divide a la hipotenusa.

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

3C.- Si a, b y c son enteros positivos con $a + b + c = 7$, calcula el menor valor posible para $a^2 + b^2 + c^2$.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

LIII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

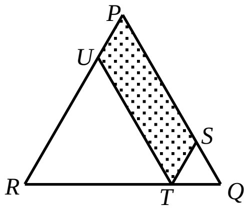
Comunidad de Madrid

FASE CERO: viernes 25 de noviembre de 2016

- En la hoja de respuestas, escribe la letra de la opción que creas correcta
- Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos; cada respuesta en blanco 1 punto, y cada respuesta errónea, 0 puntos.
- No está permitido el uso de calculadoras, instrumentos de medida o de cualquier aparato electrónico.
- TIEMPO: 3 horas.

1. Si el perímetro del triángulo equilátero *PQR* es 48 cm, ¿cuál es, en cm, el perímetro del paralelogramo *PSTU* ?

A) 26 B) 28 C) 30 D) 32 E) 34

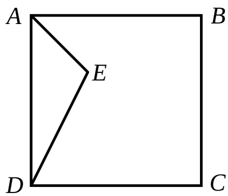


2. La media, mediana y moda del conjunto de siete números 60, 100, x, 40, 50, 200 y 90 son todas iguales a x. ¿Cuál es el valor de x?

A) 50 B) 60 C) 75 D) 90 E) 100

3. En el dibujo que observas, el perímetro del cuadrado *ABCD* es 120 y el perímetro del triángulo *AED* es $2x$. ¿Cuál de las siguientes expresiones corresponde al perímetro del pentágono *ABCDE*?

A) $120 + 2x$ B) $40 + 2x$ C) $60 + 2x$ D) $90 + 2x$ E) $30 + 2x$



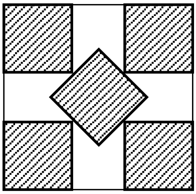
4. Las dimensiones de una caja de base rectangular vienen expresadas por números enteros y están en la proporción 1 : 3 : 4. ¿Cuál de los siguientes números puede corresponder al volumen de la caja?

A) 18 B) 56 C) 72 D) 96 E) 144

5. En cierto campamento de verano cada uno de los 100 estudiantes que hay sabe cantar, bailar o hacer teatro pero ninguno sabe hacer las tres cosas. Hay 42 que no saben cantar, 65 que no saben bailar y 29 que no saben hacer teatro. ¿Cuántos estudiantes saben hacer dos de estas tres cosas?

A) 16 B) 25 C) 36 D) 49 E) 64

6. En el interior de un cuadrado de lado 1 hemos dibujado cinco cuadrados iguales como muestra la figura. El punto medio de cada uno de los lados del cuadrado central coincide con uno de los vértices de cada uno de los otros cuatro cuadrados. Si la longitud del lado de cada uno de estos cinco cuadrados es $\frac{a-\sqrt{2}}{b}$ con a y b enteros positivos, $a + b$ es igual a:



A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

7. ¿Qué porcentaje de números de cuatro cifras diferentes, todas impares, son divisibles entre 3?

A) 80% B) 25% C) 33% D) 40% E) 75%

8. El número 33^{33} podemos escribirlo como la suma de 33 impares consecutivos. El mayor de todos ellos es:

A) $33^{32} + 32$ B) $33^{31} + 32$ C) $33^{32} - 32$ D) $33^{33} - 32$ E) 33^{32}

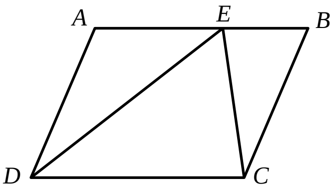
9. ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación?

$$123\,456\,785 \cdot 123\,456\,782 - 123\,456\,783 \cdot 123\,456\,784$$

(Como ves, se trata de una resta y productos de números de nueve cifras)

A) – 2 B) – 1 C) 0 D) 2 E) Nada de lo anterior

10. En el paralelogramo *ABCD* de la figura, se verifica que $\frac{AE}{EB} = \frac{3}{2}$. ¿Cuál es el cociente entre el área del cuadrilátero *AECD* y el área del paralelogramo *ABCD*?



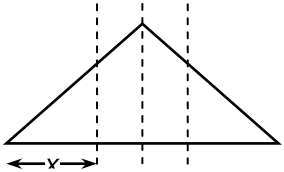
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{6}$

11. La diferencia entre una fracción positiva y su inversa es $\frac{9}{20}$. ¿Cuál es la suma de dicha fracción y su inversa?

A) $\frac{41}{40}$ B) $\frac{20}{9}$ C) $\frac{25}{16}$ D) $\frac{41}{20}$ E) 5

12. La base (lado desigual) del triángulo isósceles de la figura tiene 12 cm de longitud. Trazando tres rectas perpendiculares a la base, dividimos dicho triángulo en cuatro partes de igual área. ¿Cuál es la longitud del segmento x?



A) $3\sqrt{2}$ B) 4 C) 4,5 D) 5 E) $3\sqrt{3}$

13. Una recta que pasa por el origen de coordenadas corta a las rectas $x = 1$ e $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ formando un triángulo equilátero. ¿Cuál es el perímetro de este triángulo?

A) $2\sqrt{6}$ B) $2 + 2\sqrt{3}$ C) 6 D) $3 + 2\sqrt{3}$ E) $6 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

14. Los puntos de corte de la parábola $y = x^2 - 2ax + 2a$ con el eje de abscisas tienen coordenadas enteras. ¿Cuál es la suma de todos los valores posibles de a?

A) 7 B) 8 C) 16 D) 17 E) 18

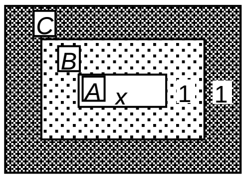
15. Ali, Bea y Celia escogen al azar un número entre los diez primeros enteros positivos, siendo diferentes todos los escogidos.¿Cuál es la probabilidad de que el número de Ali sea múltiplo del de Bea y el de Bea sea múltiplo del de Celia?

A) $\frac{1}{64}$ B) $\frac{1}{72}$ C) $\frac{1}{80}$ D) $\frac{1}{90}$ E) $\frac{3}{200}$

16. De cuántas formas podemos escribir 345 como suma de una lista creciente de dos o más enteros positivos consecutivos?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 6 E) 7

17. En el interior del rectángulo grande dibujamos otros dos cuyos lados son paralelos a los del primero, como muestra la figura. Si las áreas de las tres regiones, A, B y C, están en progresión aritmética, la altura del rectángulo pequeño es 1 cm y la anchura de las regiones B y C también es de 1 cm, ¿cuánto mide la base, x, del rectángulo pequeño?



A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

18. Los vértices de un cuadrilátero son los puntos $P(a, b)$, $Q(b, a)$, $R(-a, -b)$ y $S(-b, -a)$, siendo a y b enteros y $a > b > 0$. Si el área de dicho cuadrilátero es 16, ¿cuál es el valor de $a + b$?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 12 E) 13

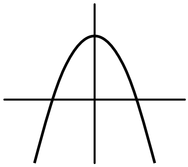
19. ¿Cuál es la suma de las soluciones positivas de la ecuación $\left(x^2 - x\right)^2 = 18\left(x^2 - x\right) - 72$?

A) 5 B) 7 C) 8 D) 9 E) 18

20. Si x es cualquier número real, el menor valor que toma la expresión $x^2 - 4x + 3$ es:

A) –1 B) 0 C) 1 D) 3 E) –3

21. La gráfica de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ es la que observas, cuyo vértice está en el eje de ordenadas. ¿Qué afirmación de las siguientes tiene que ser verdadera?



A) $a + b + c = 0$ B) $a + b - c < 0$ C) $a - b + c < 0$
D) $a + b + c < 0$ E) No hay información suficiente.

22. Si $p(x) = (x-2)^{2016}(x+2016) + (x-2)^{2015}(x+2015) + ... + (x-2)(x+1)$ la suma de los coeficientes del polinomio $p(x)$ es:

A) 1008 B) 2016 C) 2027090 D) 0 E) 1

23. En un cuadrante de una circunferencia inscribimos otra circunferencia, como muestra la figura 1. ¿Cuál es el cociente entre el área del círculo pequeño y el área del cuadrante?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $3\left(2-\sqrt{3}\right)$ D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ E) $4\left(3-2\sqrt{2}\right)$

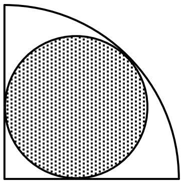


Figura 1

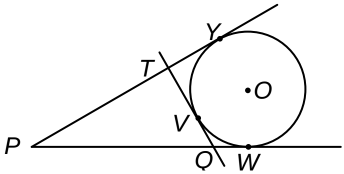


Figura 2

24. En el triángulo *PQT* de la figura 2, *PQ* = 10 cm, *QT* = 5 cm y el ángulo $\angle PQT = 60º$. Los puntos *Y*, *W* y *V* son los puntos de tangencia de la circunferencia de centro *O* con las rectas que determinan los lados del triángulo. ¿Cuál es, en cm, el radio de dicha circunferencia?

A) $5\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)$ B) $\frac{5\left(3-\sqrt{3}\right)}{2}$ C) $\frac{5\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$ D) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{25\sqrt{3}}{6}$

25. Seleccionamos al azar tres enteros diferentes entre 1 y 2016, ambos inclusive. Si llamamos p a la probabilidad de que el producto de los tres sea impar, entonces:

A) $p < \frac{1}{8}$ B) $p = \frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{8} < p < \frac{1}{3}$ D) $p = \frac{1}{3}$ E) $p > \frac{1}{3}$

26. ¿Cuál es el área encerrada por la gráfica de la curva $x^2 + y^2 = |x| + |y|$?

A) $\pi + \sqrt{2}$ B) $\pi + 2$ C) $\pi + 2\sqrt{2}$ D) $2\pi + \sqrt{2}$ E) $2\left(\pi + \sqrt{2}\right)$

27. La gráfica de $x^2(x + y + 1) = y^2(x + y + 1)$ está formada por:

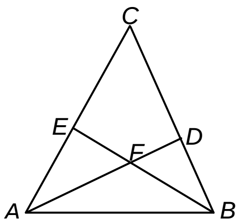
A) Dos rectas paralelas   B) Dos rectas que se cortan   C) Una recta y una parábola

D) Tres rectas concurrentes en un punto   E) Tres rectas no concurrentes en un punto

28. Los tres vértices del triángulo *ABC* están en la gráfica de la parábola $y = x^2$. El vértice *A* es el origen de coordenadas y el lado *BC* es paralelo al eje de abscisas. Si el área del triángulo es 64, ¿cuál es la longitud del lado *BC*?

A) 4   B) 6   C) 8   D) 10   E) 16

29. En el triángulo *ABC* de la figura de lados *AB* = 6, *BC* = 7 y *CA* = 8, las bisectrices *AD* y *BE* de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ respectivamente, se cortan en el punto *F*. ¿Cuál es el cociente $\dfrac{AF}{FD}$?



A) $\dfrac{3}{2}$ B) $\dfrac{5}{3}$ C) 2   D) $\dfrac{7}{3}$ E) $\dfrac{5}{2}$

30. En el triángulo *PQR*, el ángulo $\hat{R}$ es el doble del ángulo $\hat{P}$, *PR* = 5 y *QR* = 4. ¿Cuál es la longitud del lado *PQ*?

A) $2\sqrt{10}$ B) 6   C) 7   D) $2\sqrt{7}$ E) $5\sqrt{2}$

REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

LIII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

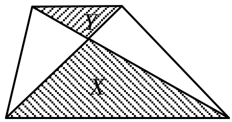
Comunidad de Madrid

FASE LOCAL: segunda prueba. Viernes 21 de diciembre de 2016
Tiempo: 3h 30 min

1. El producto de dos números del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 26\}$ es igual a la suma de los restantes. Encuentra dichos números.

2. Un "capicúa" es un número que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. (Por ejemplo, 323 ó 19591). ¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor capicúa, si ambos son de cinco cifras y múltiplos de 45?

3. Dividimos el trapecio de la figura en cuatro triángulos trazando las diagonales. Si X e Y son las áreas de los triángulos sombreados, obtén en función de X e Y el área del trapecio.

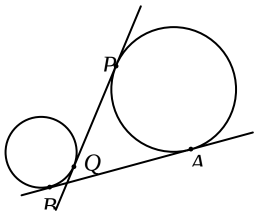


4. Considera las ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ en las que a, b y c son números primos de una sola cifra. ¿En cuántas de estas ecuaciones hay al menos una solución entera?

5. En una bolsa hay bolas rojas y bolas azules, en total menos de 2016. Sabemos que la probabilidad de que al coger dos bolas (sin reemplazamiento) sean ambas del mismo color, es $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es el máximo número de bolas rojas que puede haber en la bolsa?

6. Los puntos de corte de la parábola $y = x^2 - ax + 2a$ con el eje de abscisas, tienen coordenadas enteras. ¿Cuál es la suma de todos los valores posibles de a?

7. El dibujo muestra dos circunferencias y dos rectas tangentes a ambas siendo A, B, P y Q los puntos de tangencia. Si la longitud del segmento PQ es 14 y la del AB es 16, calcula el producto de los radios de las circunferencias.



8. En una circunferencia de centro *O* y diámetro *AB* marcamos un punto *C* (distinto de *A* y *B*) desde el que trazamos la perpendicular al diámetro *AB*, al que corta en el punto *D*. Si *M* es un punto de la cuerda *BC* tal que $B\widehat{M}O = 90^{\circ}$ y $DB = 3 \cdot OM$, calcula el ángulo $A\hat{B}C$.

9. Hay un único triángulo *ABC* para el que $AC = 14$, $\cos \mathrm{A} = \dfrac{4}{5}$ y el radio del círculo inscrito es 4. Calcula el área de dicho triángulo.

10. Sean *x*, *y*, *z* números reales tales que: $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} + 3\sqrt{z-9} = \dfrac{x+y+z}{2}$.

Determinar el valor de $x + 2y + 3z$.

LIII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Prueba de selección
Comunidad de Madrid

Primera sesión, viernes 13 de enero de 2017

No está permitido el uso de calculadoras. Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.

1. Describir todas las soluciones enteras positivas (m, n) de la ecuación $8m - 7 = n^2$, y dar, si existe, el primer valor de m mayor que 1959.

2. (a) Se colorean los números del conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2017\}$ en dos colores, rojo y azul. Demostrar que es posible hacerlo de manera que si x, y, z son números de A, no necesariamente distintos, verificando $8(x + y) = z$, los números x, y, z tengan los dos colores.
   (b) Determinar el mayor valor de n para el que es posible colorear en rojo y azul los números del conjunto $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, de modo que cualquier terna (x, y, z) de números de X, no necesariamente distintos, verificando $8(x + y) = z$, tenga los dos colores.

3. Calcular el número máximo de raíces reales distintas que puede tener un polinomio ***P*** que verifique la siguiente propiedad: el producto de dos raíces distintas de ***P*** sigue siendo una raíz de ***P***.

Segunda sesión, Sábado 16 de enero de 2016

Tiempo: 3 horas y media

4. Encontrar todas las soluciones enteras positivas de:
$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b+c-2} = 1$$

5. Demostrar que hay infinitos números primos que dan de resto 2 al ser divididos entre 3. .

6. El triángulo ABC es acutángulo. Los pies de las alturas trazadas desde A, B y C son los puntos D, E y F respectivamente.
   Demostrar que $DE + DF \leq BC$ y caracterizar los triángulos para los que se obtiene la igualdad.

XXIIª OLIMPIADA de MAYO
Primer Nivel
Mayo de 2016

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 27 de mayo

PROBLEMA 1
En una hoja están escritos siete números enteros positivos diferentes. El resultado de la multiplicación de los siete números es el cubo de un número entero. Si el mayor de los números escritos en la hoja es N, determinar el menor valor posible de N. Mostrar un ejemplo para ese valor de N y explicar por qué no es posible que N sea más pequeño.

PROBLEMA 2
En una competición deportiva en la que se realizan varias pruebas, solo participan los tres atletas A, B, C. En cada prueba, el ganador recibe x puntos, el segundo recibe y puntos y el tercero recibe z puntos. No hay empates y los números x, y, z son enteros positivos distintos con x mayor que y e y mayor que z.
Al terminar la competición resulta que A ha acumulado 20 puntos, B ha acumulado 10 puntos y C ha acumulado 9 puntos. Sabemos que el atleta A fue segundo en la prueba de 100 metros. Determinar cuál de los tres atletas resultó segundo en la prueba de salto.

PROBLEMA 3
En el triángulo ABC se marcaron el punto D en el lado BC y el punto E en el lado AC de manera que $CD = DE = EB = BA$. El ángulo $A\hat{C}B$ mide 20º. Calcular la medida del ángulo $A\hat{D}E$.

PROBLEMA 4
Dado un tablero de 3×3 se quiere escribir en sus casillas los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y un número entero positivo M, no necesariamente distinto de los anteriores. El objetivo es que la suma de los tres números de cada fila sea la misma.

a) Hallar todos los valores posibles de M para los que esto es posible.
b) ¿Para cuáles de los valores de M hallados en a) es posible acomodar los números de modo que no solo las tres filas sumen lo mismo, sino que también las tres columnas sumen lo mismo?

PROBLEMA 5

En el pizarrón están escritos los 400 números enteros 1, 2, 3, …, 399, 400. Luis borra 100 de estos números, luego Martín borra otros 100. Martín gana si la suma de los 200 números borrados es igual a la suma de los no borrados, en otro caso, gana Luis. ¿Cuál de los dos tiene estrategia ganadora?

¿Y si Luis borra 101 números y Martín 99?

En cada caso, explicar cómo puede asegurarse la victoria el jugador que tiene estrategia ganadora.

XXIIª OLIMPIADA de MAYO
Segundo Nivel
Mayo de 2016

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 27 de mayo

PROBLEMA 1

Decimos que un número de cuatro cifras $\overline{abcd}$, que comienza por a y termina por d, es *"intercambiable"* si existe un entero $n > 1$ tal que $n \times \overline{abcd}$ es un número de cuatro cifras que comienza por d y termina por a.
Por ejemplo, 1009 es intercambiable ya que $1009 \times 9 = 9081$.
Hallar el mayor número intercambiable.

PROBLEMA 2

¿Cuántas casillas se deben pintar como mínimo en un tablero de 5×5 de tal modo que en cada fila, en cada columna y en cada cuadrado de 2×2 haya al menos una casilla pintada?

PROBLEMA 3

Decimos que un número entero positivo es *cua-divi* se es divisible por la suma de los cuadrados de sus dígitos, y además ninguno de sus dígitos es igual a cero.

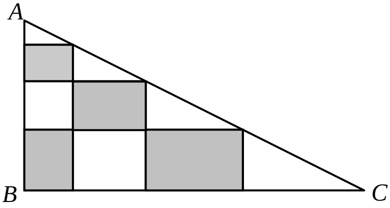
a) Encontrar un número cua-divi tal que la suma de sus dígitos sea 24.
b) Encontrar un número cua-divi tal que la suma de sus dígitos sea 1001.

PROBLEMA 4

En un triángulo ABC, sean D y E puntos de los lados BC y AC, respectivamente. Los segmentos AD y BE se cortan en O. Supongamos que la base media del triángulo, paralela a AB, divide al segmento DE por la mitad. Demostrar que el triángulo ABO y el cuadrilátero $ODCE$ tienen áreas iguales.

PROBLEMA 5

Rosa y Sara juegan con un triángulo *ABC*, recto en *B*. Rosa comienza marcando dos puntos interiores de la hipotenusa *AC*, luego Sara marca un punto interior de la hipotenusa *AC* distinto de los de Rosa. Luego, desde estos tres puntos se trazan las perpendiculares a los lados *AB* y *BC*, formándose la siguiente figura.



Sara gana si el área de la superficie sombreada es igual al área de la superficie no sombreada, en otro caso gana Rosa. Determinar quién de las dos tiene estrategia ganadora.

XXII OLIMPIADA DE MAYO – 2016. RESULTADOS DE ESPAÑA

PRIMER NIVEL

	Apellidos y nombre	Premio
1	Jimena Lozano Simón	ORO
2	Miguel Navarro Muñoz	PLATA
3	Felipe Lorenzo Martínez	PLATA
4	Daniel Ribalta Andrés	BRONCE
5	Alejandro Martínez Sánchez	BRONCE
6	Miguel Soto Martín	BRONCE
7	Gabriela García Pérez	MENCIÓN
8	Pablo Raichs Fernández	MENCIÓN
9	María Dorado Ordás	
10	Mario Casero Sánchez	

SEGUNDO NIVEL

1	Alberto Pérez Mugía	ORO
2	Soto Martín, Pablo	PLATA
3	Víctor David Sánchez González	BRONCE
4	Noryne Ridouane	BRONCE
5	Ignacio Bolivar Centeno	BRONCE
6	Laura Sánchez Pérez	BRONCE
7	Javier Martínez Ciria	BRONCE
8	Shenghao Zhang	MENCIÓN
9	Jorge Lorente Jerez	MENCIÓN
10	Hernán Domínguez Monreal	MENCIÓN

Comunidad
de Madrid

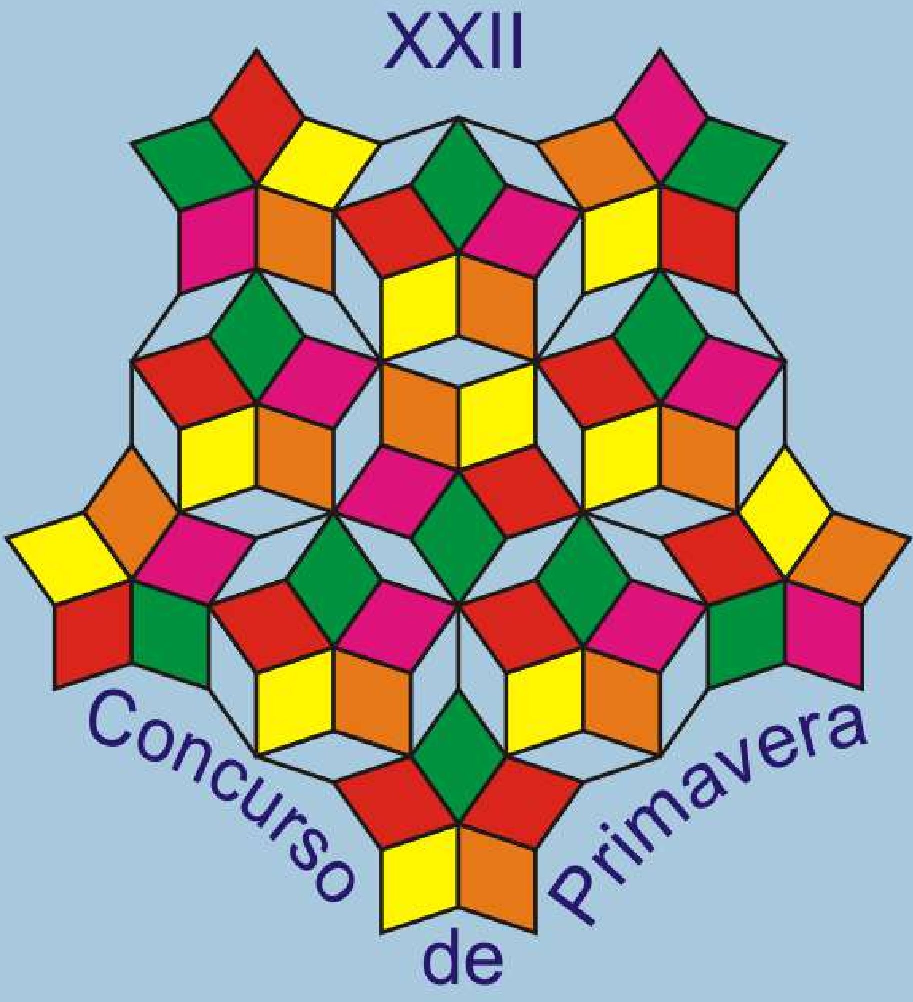
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Consejo Social de la UCM

sm

ANAYA

El Corte Inglés

Smartick



Comunidad de Madrid

Edita: Asociación Matemática Concurso de Primavera

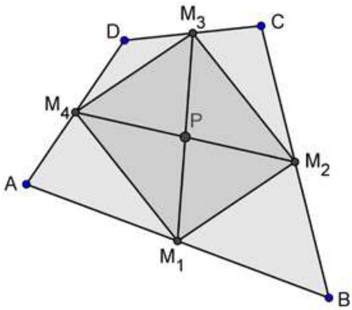
ISBN: 978-84-608-5881-2

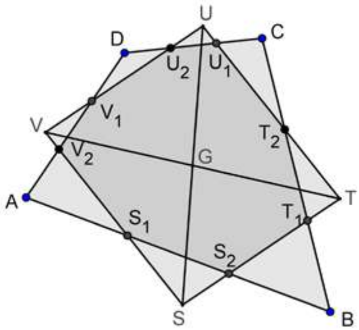
Depósito Legal: M-8301-2017

Comité organizador del Concurso de Primavera

Alfredo Martínez Sanz
Esteban Serrano Marugán
Francisco López Álvarez
Hugo Fernández Hervás
Isabel Benito Miguel
Javier Soler Areta
Jesús García Gual
Joaquín Hernández Gómez
Jorge González Ortega
José María Sordo Juanena
Juan Jesús Donaire Moreno
Luis Ferrero de Pablo
Marco Castrillón López
María Gaspar Alonso-Vega,
María Moreno Warleta
Merche Sánchez Benito
Miguel Ángel Baeza Alba
Pablo Martínez Dalmau
Roberto Tomé Grasa
Víctor Manuel Sánchez González

Paralelogramo de Varignon **Paralelogramo de Wittenbauer**





Paralelogramo de Varignon: Si unimos mediante segmentos (en orden circular) los puntos medios de los lados de un cuadrilátero convexo ABCD, obtenemos un paralelogramo, cuyo centro P es centro de pesos de los vértices.

Paralelogramo de Wittenbauer:
Si en un cuadrilátero convexo, ABCD, dibujamos los puntos tercios de los lados, y unimos mediante rectas los puntos tercios más próximos a un vértice de los lados que en él concurren, aquellas definen un paralelogramo, cuyo centro G es centro de gravedad del cuadrilátero de partida.

Presentación

- ¡Si nos encuentran estamos perdidos!
- ¿Cómo vamos a estar perdidos si nos encuentran?

(Diálogo de los hermanos Marx en Sopa de ganso)

Si no nos encontramos, estamos perdidos.

El Comité Organizador

AGRADECIMIENTOS

A los participantes en el Concurso, a sus padres y profesores.

A los voluntarios que nos ayudan en la 2ª fase.

A la Facultad de Matemáticas de la UCM.

Al Consejo Social y al Vicerrectorado de alumnos de la UCM.

A la Subdirección General de Formación del Profesorado de la Dirección General de Innovación, Becas y Ayudas a la Educación de la Consejería de Educación, Juventud y Deporte de la Comunidad de Madrid.

A las editoriales Grupo **ANAYA** y Ediciones **S.M.**

A Smartick.

ÍNDICE

concurso de primavera MATEMÁTICAS

XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 22 de febrero de 2017

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

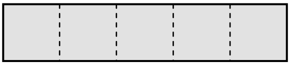
COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

1 ¿Con cuál de estas operaciones se obtiene el número mayor?

A) $1{,}3 \times 1{,}3$ **B)** $2 - 0{,}32$ **C)** $3{,}3 \div 2$ **D)** $0{,}69 + 1{,}01$ **E)** $2{,}8 \times 0{,}6$

2 Un rectángulo está formado por cinco cuadrados como se muestra en la figura.



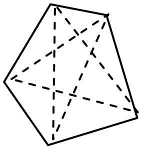
Si el perímetro de un cuadrado mide 12 cm, ¿cuál es el área del rectángulo?

A) 36 cm^2 **B)** 45 cm^2 **C)** 90 cm^2 **D)** 18 cm^2 **E)** 54 cm^2

3 Manuela ha estado tres cuartos de hora delante de la tele para ver un capítulo completo de Bob Esponja. Si el capítulo duraba 38 minutos, ¿cuántos minutos de anuncios han puesto?

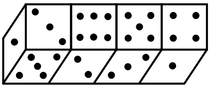
A) 4 **B)** 12 **C)** 9 **D)** 7 **E)** 22

4 En un pentágono puedes trazar cinco diagonales, como ves en la figura. ¿Cuántas diagonales puedes trazar en un decágono regular? Por si no lo sabes, un decágono es un polígono de diez lados.



A) 10 **B)** 25 **C)** 30 **D)** 35 **E)** 40

5 ¿Cuánto suman los puntos de las caras que no ves en el dibujo?

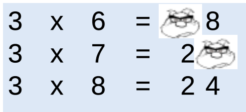


A) 54 **B)** 45 **C)** 21 **D)** 14 **E)** 35

6 Irene y Rafa tienen un ovillo de lana de 120 metros de largo. Van a hacer conjuntos de adornos que cada uno consta de un collar, una pulsera y un anillo. Para cada collar necesita 12 dm de lana, para cada pulsera 24,5 cm y para cada anillo 55 mm. ¿Cuántos conjuntos completos pueden hacer?

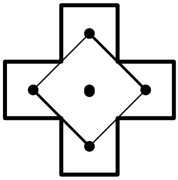
A) 4 **B)** 12 **C)** 80 **D)** 120 **E)** 22

7 Marta ha hecho un bonito póster con las tablas de multiplicar del 2 al 9: desde $2 \times 1 = 2$ hasta $9 \times 10 = 90$. En cuanto se ha despistado ha llegado Comenúmeros y ¡zas! se ha zampado absolutamente todos los unos que había en el póster. ¿Cuántos unos se ha comido el bribón?



A) 16 **B)** 20 **C)** 28 **D)** 36 **E)** 44

8 El cuadrado central tiene sus vértices en los centros de los brazos de la cruz griega. Si el área del cuadrado es 8 cm^2, el área de la cruz griega es:



A) 24 cm^2 **B)** 22 cm^2 **C)** 20 cm^2 **D)** 18 cm^2
E) 16 cm^2

9 Julián compró tres paquetes de folios a 2,35 euros cada uno y cinco carpetas. Pagó con un billete de 20 euros y le devolvieron 4,20 euros. ¿Cuántos euros costaba cada carpeta?

A) 0,75 **B)** 1,25 **C)** 1,5 **D)** 1,75 **E)** 2,25

10 Jaime, María y Vania han escrito sus nombres en el ordenador, no sabemos en qué orden. Después han cambiado el tipo de letra de Arial a Wingdings y les ha quedado esto:

💣✌☼✋✌ ✞✌☠✋✌ ☺✌✋💣☜

¿Cómo quedaría el nombre de Javier si lo escribiéramos en Wingdings?

A) ✞✋☼✌☠ **B)** ☠✌✞☼✋☜ **C)** ☺✌✞✋☜☼
D) ☼☜☠✋✌☺ **E)** ☺☜💣✋✌☼

11 Este es O*sodrilo*. La parte *oso* duerme de 18:00 a 6:00 y la parte *drilo* duerme de 9:00 a 23:00. Mientras uno duerme y el otro no, ocurre lo siguiente: si *drilo* duerme, *oso* camina hacia el norte a 10 km/h, y si *oso* duerme, *drilo* camina hacia el sur a 2 km/h. Cuando ambos están despiertos comen y charlan. Ahora son las 8:00 y están desayunando en un claro del bosque. ¿A qué distancia del claro estarán dentro de 24 horas?

A) 120 km **B)** 72 km **C)** 76 km **D)** 192 km **E)** 114 km

12 Don Retorcido te pone a prueba. ¿Cuáles de estas afirmaciones son ciertas?
P: No existe un triángulo cuyos lados midan 15 cm, 7 cm y 5 cm.
Q: En un triángulo isósceles el lado desigual es siempre el más corto.
R: Si todos los lados de un cuadrilátero miden lo mismo entonces es un cuadrado.

A) Todas **B)** Solo P **C)** P y R **D)** Solo Q **E)** Ninguna

13 Asier tiene diez mil cubitos de un centímetro de arista y quiere armar un cubo gigante con ellos. ¿Cuánto mide la arista del cubo más grande que puede formar?

A) 10 cm **B)** 20 cm **C)** 100 cm **D)** 12 cm

E) 21 cm

14 Para escribir los números del 1 al 14: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 se utilizan 19 cifras. Si empleamos exactamente 207 cifras, ¿cuál es el último número que escribiremos?

A) 105 **B)** 103 **C)** 94 **D)** 90 **E)** 88

15 Comenúmeros se ha comido uno de los números de esta serie. ¿Qué número es?

$2 \to 5 \to 11 \to 23 \to 47 \to$  $\to 191$

A) 101 **B)**94 **C)**70 **D)**111 **E)** 95

16 Jesús tarda dos horas en pintar una pared de 4 m × 4 m. Para pintar una pared de 2 m × 2 m tardará…

A) 30 min **B)** 45 min **C)** 60 min **D)** 90 min **E)** 15 min

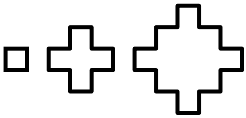
17 Ánder tiene diez años menos que Carlos. La suma de sus edades es 22 años. ¿Qué edad tiene Carlos?

A) 12 **B)** 6 **C)** 9 **D)** 18 **E)** 16

18 En una tienda de animales hay nueve hámsteres: dos hembras y siete machos. Ana cogió uno al azar y resultó ser un macho. ¿Qué probabilidad tiene ahora de sacar una hembra y llevarse una parejita?

A) $\frac{2}{9}$ **B)** $\frac{1}{9}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{1}{8}$ **E)** $\frac{3}{8}$

19 Vemos los tres primeros polígonos crucigramas de una serie. Si el lado de esos polígonos mide 1 cm, ¿cuántos centímetros mide el perímetro del quinto polígono de la serie?

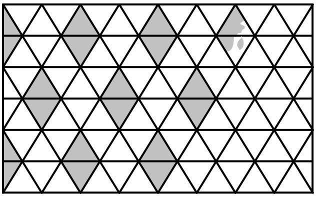


A) 20 **B)** 24 **C)** 28 **D)** 32 **E)** 36

20 Don Retorcido se ha inventado este juego: Él te da un número. Si es par lo multiplicas por 2 y le sumas 1. Si es impar lo multiplicas por 3 y le sumas 1. Si después de aplicar la regla al número que te ha dado Don Retorcido y dos veces seguidas a cada uno de los números que vas obteniendo, llegas al 208, ¿qué número te dio Don Retorcido?

A) 20 **B)** 15 **C)** 12 **D)** 11 **E)** 9

21 Lucía está coloreando un bonito diseño con triángulos equiláteros en una cartulina. Observa el patrón. ¿Qué fracción de la cartulina estará coloreada de gris cuando termine?



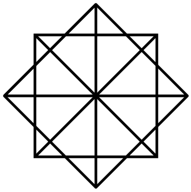
A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{39}{100}$ **C)** $\frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{3}$ **E)** $\frac{7}{10}$

22 Lino, que no tenía caramelos, no para de pedírselos a Luca. ¡Ya no te doy más caramelos! dice Luca enfadado. Si te diera otro caramelo entonces tú comerías el doble de caramelos que yo. Si Luca ya le había dado trece caramelos a Lino ¿cuántos caramelos tenía al principio Luca?

A) 30 **B)** 27 **C)** 26 **D)** 23 **E)** 21

23 ¿Cuántos cuadrados se pueden encontrar en esta figura?



A) 12 **B)** 10 **C)** 8 **D)** 15

E) 9

24 Ramón sabe dar patadines, patadones y chutazos. Un patadón es el triple de fuerte que un patadín y la mitad de fuerte que un chutazo. Si con un chutazo la pelota recorre 120 metros, ¿cuántos metros recorrerá con un patadín?

A) 12 **B)** 20 **C)** 30 **D)** 40 **E)** 60

25 El concurso llega a su fin. Para terminar…, ¿cuánto suman las cifras del número que al multiplicarlo por seis y después restarle 23 da como resultado 2017?

A) 7 **B)** 10 **C)** 5 **D)** 11 **E)** 13

XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 22 de febrero de 2017

NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

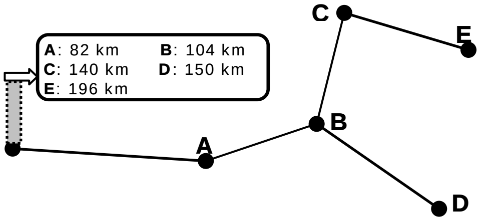
COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

1 El número 4385 está formado por cuatro cifras distintas que suman veinte. Si sumas el mayor y el menor número de cuatro cifras distintas que suman veinte, obtienes…

A) 11 119 **B)** 11 116 **C)** 11 115 **D)** 11 114 **E)** 11 110

2 Aquí podéis ver el plano de carreteras de mi comarca con un cartel donde se indican las distancias kilométricas desde mi pueblo a los cinco más cercanos. ¿Cuántos kilómetros hay del pueblo **D** al **E** por carretera?



A) 182 **B)** 346 **C)** 114 **D)** 92 **E)** 138

3 A Miriam le ha dado por investigar los números que puede formar usando exclusivamente las cifras 1 y 2: 1 – 2 – 11 – 12 – 21 – 22 – 111 – 112... (como ves, su lista ordenada ya tiene ocho números). Si los va ordenando de menor a mayor, ¿qué lugar ocupará el número 1121 en esa lista?

A) 17 **B)** 14 **C)** 18 **D)** 15 **E)** 16

4 Julián ha comprado tres paquetes de folios a 2,35 euros cada uno y cinco carpetas. Ana compró un paquete de folios y tres carpetas. Ambos pagaron con un billete de 20 euros. Si a Julián le devolvieron 4,20 euros, ¿cuántos euros tienen que devolver a Ana?

A) 15,20 **B)** 12,40 **C)** 14 **D)** 8,40 **E)** 16,20

5
– Don Retorcido, ¿tiene usted familia?
– Sí, somos varios hermanos y cada uno de nosotros tiene tantos hijos como hermanos. Ah, y en total somos más de 66 y menos de 99.

¿Cuántas personas forman la familia de don Retorcido?

A) 76 **B)** 81 **C)** 75 **D)** 69 **E)** 94

6 ¿Cuántos capicúas de tres cifras son múltiplos de 3?

A) 24 **B)** 25 **C)** 27 **D)** 28 **E)** 30

7 Emma es una lectora muy disciplinada. Acaban de regalarle una novela de 210 páginas y hace la siguiente programación: “Todos los días leeré el mismo número de páginas salvo los viernes que leeré 5 páginas menos, los sábados no leeré y los domingos únicamente leeré 10 páginas”. De esta manera, Emma calcula que terminará su libro leyendo tres semanas completas. ¿Cuántas páginas leerá cada viernes?

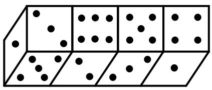
A) 7 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 13

8 Utilizando todas estas tarjetas, una sola vez cada una, tienes que formar cuatro números entre 13 y 53 de tal manera que no haya dos de ellos consecutivos. Si sumas el mayor y el menor de estos cuatro números, ¿qué cantidad obtienes?

8 0 7 2 6 2 5 4

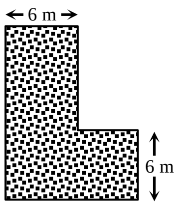
A) 107 **B)** 73 **C)** 78 **D)** 76 **E)** 80

9 ¿Cuánto suman los puntos de las caras que no ves en el dibujo?



A) 54 **B)** 45 **C)** 21 **D)** 14 **E)** 35

10 Como ves, Laura ha diseñado su jardín en forma de L y tiene una superficie de 120 m^2. ¿Cuánto mide su perímetro?



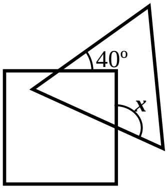
A) 52 m **B)** 60 m **C)** 48 m **D)** 80 m

E) 56 m

11 Solo una de estas operaciones da como resultado un número entero. ¿Cuál?

A) 5 – 1:2 **B)** $2{,}46 + 3{,}64$ **C)** $5\cdot(1{,}2 - 2{,}4)$ **D)** $0{,}25\cdot 42$ **E)** $\sqrt{9+81}$

12 En la figura vemos un triángulo equilátero y un cuadrado. ¿Cuánto mide el ángulo x?



A) 120º **B)** 110º **C)** 100º **D)** 80º **E)** 75º

13 ¡Qué extraño! Comenúmeros estaba hambriento y se ha encontrado con una serie muy interesante: cada número es la suma de los tres anteriores.

	¿?	¿?	¿?	¿?	¿?	15	– 6	– 2	7	– 1	4

No se ha podido resistir y se ha comido los primeros números. Y ahí podemos verle en la casilla del último número que se zampó. ¿Cuál es ese número?

A) 64 **B)** –32 **C)** 82 **D)** 75 **E)** 71

14 Delia se ha inventado la operación **Delita** y ha elaborado la tabla de **Delitar** de los cinco primeros números.

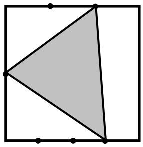
Como se aprecia, $1 \Delta 1 = 2$, $2 \Delta 5 = 4$ y $4 \Delta 2 = 5$.

Si tú también sabes **Delitar**, ¿cuál es el resultado de la operación $\{1 \Delta [(2 \Delta 3) \Delta 4]\} \Delta 5$?

Δ	1	2	3	4	5
1	2	1	4	5	3
2	1	3	2	5	4
3	4	2	1	3	5
4	5	5	3	5	2
5	3	4	5	2	4

A) 5 **B)** 4 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 1

15 Hemos dividido en dos partes iguales un lado de un cuadrado, otro lado en tres y un tercer lado en cuatro. Aprovechando algunas de estas divisiones formamos un triángulo como se aprecia en el dibujo. Si el área del cuadrado es de 144 cm^2, ¿qué área, en cm^2, tiene nuestro triángulo?



A) 96 **B)** 60 **C)** 48 **D)** 72 **E)** 51

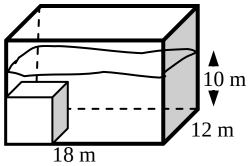
16 Cuando Comenúmeros no tiene hambre juega con los números: escribe un número; si ese número es impar, le suma uno; y si el número es par, lo duplica y luego le resta uno. Esta mañana empezó por el 1 y va formando una bonita serie:

$$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 7 \to 8 \to 15 \to 16 \to 31 \to \dots$$

Solo uno de los siguientes números aparecerá en la serie de Comenúmeros. ¿Cuál?

A) 1019 **B)** 1020 **C)** 1021 **D)** 1022 **E)** 1023

17 Si introducimos un cubo de 6 m de arista en una piscina cuya base es un rectángulo de 18 m × 12 m, el nivel del agua sube hasta los 10 m. ¿A qué altura llegará el agua si sacamos ese cubo de la piscina?



A) 8 m **B)** 9 m **C)** 7 m **D)** 9,5 m **E)** 8,5 m

18 El producto de tres números naturales distintos es 30. ¿Cuál de los siguientes resultados no puede ser su suma?

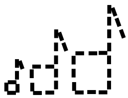
A) 10 **B)** 12 **C)** 14 **D)** 16 **E)** 18

19 En una caja hemos metido las quince bolas numeradas (desde el 1 hasta el 15) de un billar americano. Si sacamos una bola al azar, ordena estos tres sucesos de menor a mayor probabilidad:

P = "que salga par o múltiplo de 5"
Q = "que salga impar"
R = "que salga múltiplo de 3 o que acabe en 0"

A) RQP **B)** PRQ **C)** QRP **D)** QPR **E)** PQR

20 Sonia compone una serie de corcheas usando rayitas y aquí puedes ver las tres primeras. Anoche, cuando dibujó las 30 primeras, se fue a dormir agotada. ¿Cuántas rayitas necesitó Sonia para diseñar su última corchea?



A) 184 **B)** 183 **C)** 182 **D)** 181 **E)** 180

21 ¡Qué desastre!, estas cinco operaciones están mal resueltas. Pero, fíjate, todas ellas menos una pueden "arreglarse" sin más que añadir algún paréntesis. ¿Cuál es la operación que no se arregla ni con paréntesis?

A) $2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 = 40$ **B)** $7 - 2 - 1 = 6$ **C)** $4 + 3 \cdot 2 = 14$
D) $-2 \cdot 3 - 5 = -4$ **E)** $4 \cdot 1 + 2 + 3 = 24$

22 ¡Ya está Caracolito situado en el vértice de salida! Tiene un gran reto por delante: recorrer el perímetro de un polígono regular de 37 lados. ¿Preparado? ¿Listo? ¡Ya! Justo ahora, cuando se cumplen18 días desde que empezó la prueba, Caracolito acaba de superar el 42% del total de su hazaña. ¿Cuántos lados completos ha recorrido Caracolito?

A) 14 **B)** 15 **C)** 16 **D)** 17 **E)**18

23 He dibujado un cuadrado en mi ordenador. Ha venido Sara y ha alargado los lados horizontales en un 20% y ha acortado los verticales en un 20%. Cuando lo ha visto Julia, ha acortado los lados horizontales en un 20% y ha alargado los verticales en un 20%. ¿Qué figura ha quedado al final?

A) Un rectángulo con los lados horizontales mayores que los verticales
B) Un cuadrado algo menor que el mío
C) Un cuadrado igual al mío
D) Un cuadrado algo mayor que el mío
E) Un rectángulo con los lados horizontales menores que los verticales

24 Cuando Comenúmeros se come la cifra 3 del número 2358 se convierte en el 258. Esta mañana Comenúmeros se encontró con esta resta y se planteó así su desayuno: me comeré tres cifras de cada número para que el resultado de la resta sea el número positivo más pequeño posible.

$$\begin{array}{rrrrrrr} & \mathbf{7} & \mathbf{9} & \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{3} \\ - & \mathbf{4} & \mathbf{9} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{1} & \mathbf{8} \\ \hline \end{array}$$

¿Cuánto suman las seis cifras que desayunó Comenúmeros?

A) 30 **B)** 31 **C)** 32 **D)** 33 **E)** 34

25 Nuestro año, el 2017, cumple que 20 – 17 = 3. ¿Cuántos números de cuatro cifras tienen esta propiedad: el número formado por sus dos primeras cifras menos el formado por sus dos últimas, es tres?

A) 89 **B)** 97 **C)** 99 **D)** 80 **E)** 90

XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
1ª FASE: 22 de febrero de 2017
NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

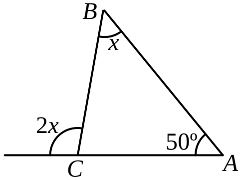
ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

1 En la figura adjunta, x representa la medida del ángulo $C\hat{B}A$. ¿Cuál es el valor de x?

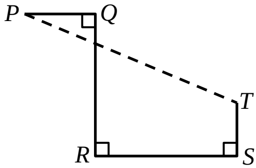


A) 60º **B)** 50º **C)** 45º **D)** 40º **E)** 30º

2 Si una recta de pendiente 2 pasa por los puntos $A(2, 7)$ y $B(a, 3a)$, ¿cuál es el valor de a?

A) $\frac{5}{2}$ **B)** 10 **C)** 3 **D)** $\frac{11}{5}$ **E)** $\frac{12}{5}$

3 En la figura que ves, los ángulos en Q, R y S son rectos. Si $PQ = 4$, $QR = RS = 8$ y $ST = 3$, la distancia de P a T es:



A) 16 **B)** $4\sqrt{10}$ **C)** $\sqrt{153}$ **D)** 14 **E)** 13

4 De las siguientes fracciones solamente hay una comprendida entre $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{4}$. ¿Cuál es?

A) $\frac{5}{12}$ **B)** $\frac{5}{36}$ **C)** $\frac{5}{24}$ **D)** $\frac{5}{60}$ **E)** $\frac{5}{48}$

5 ¿Cuántos ceros tiene el número $N = 10^{100} \cdot 100^{10}$ si lo escribimos como un 1 seguido de ceros?

A) 120 **B)** 112 **C)** 200 **D)** 1000 **E)** 2000

6 ¿Cuál es la cifra de las decenas del menor entero positivo divisible entre 20, 16 y 2016?

A) 0 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

7 Tenemos tres enteros positivos que, si los sumamos por parejas, obtenemos los números 998, 1050 y 1234. ¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor de esos tres enteros?

A) 262 **B)** 248 **C)** 224 **D)** 250 **E)** 236

8 El rey y sus mensajeros viajan desde el castillo hacia el palacio de verano con una velocidad de 5 km/h. Cada hora, el rey envía un mensajero de vuelta al castillo. Si los mensajeros viajan con una velocidad de 10 km/h, ¿cuál es el intervalo de tiempo entre la llegada de dos mensajeros consecutivos al castillo?

A) 30 min **B)** 60 min **C)** 75 min **D)** 90 min **E)** 120 min

9 Había tres dígitos distintos en la pizarra, Pedro los sumó y obtuvo 15 como resultado. Luego borró uno de ellos y lo cambió por un 3. A continuación Laura multiplicó los tres dígitos distintos que había ahora y obtuvo como resultado 36. ¿Qué número borró Pedro?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

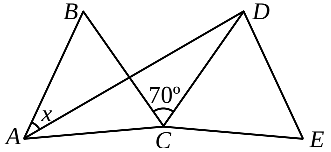
10 Si a y b son enteros tales que $4 < a < b < 22$ y la media de estos cuatro números, 4, a, b, 22 es 13, el número de posibles parejas (a, b) es:

A) 10 **B)** 8 **C)** 7 **D)** 9 **E)** 6

11 Si x e y satisfacen las igualdades $\dfrac{x-y}{x+y}=9$, $\dfrac{x\cdot y}{x+y}=-60$, entonces $(x+y)+(x-y)+xy$ es:

A) 210 **B)** –150 **C)** 14 160 **D)** –14 310 **E)** –50

12 Los triángulos ABC y CDE de la figura son equiláteros e iguales y $B\hat{C}D = 70^{\circ}$. ¿Cuál es la medida, x, del ángulo $D\hat{A}B$?

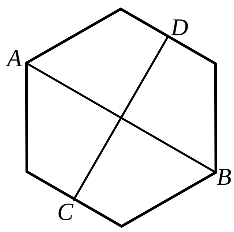


A) 20º **B)** 25º **C)** 30º
D) 35º **E)** 40º

13 ¿Cuál de los siguientes números es el mayor?

A) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{17}$ **B)** $\sqrt{20}\cdot 17$ **C)** $20\sqrt{17}$ **D)** $\sqrt{201}\cdot 7$ **E)** $\sqrt{2017}$

14 En la figura se observa un hexágono regular en el que C y D son los puntos medios de dos lados opuestos.
Si el área del hexágono es 60, el producto de las longitudes $AB \cdot CD$ es:



A) 100 **B)** 80 **C)** 60 **D)** $40\sqrt{3}$
E) $30\sqrt{3}$

15 En un examen de Matemáticas, si cada chico hubiera obtenido 3 puntos más de lo que obtuvo, la media de toda la clase, chicos y chicas, habría sido 1,2 puntos más de la que fue. ¿Qué porcentaje de chicas hay en la clase?

A) 20% **B)** 30% **C)** 40% **D)** 60% **E)** Es imposible saberlo

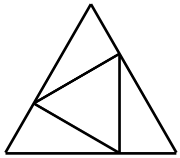
16 ¿Cuál es el menor número n tal que la suma $1 + 2 + 3 +\ldots+ n$ es mayor que 1000?

A) 43 **B)** 44 **C)** 45 **D)** 46 **E)** 47

17 El mayor número de divisores de un número menor que 100 es:

A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 15

18 En la figura vemos dos triángulos equiláteros, uno inscrito en el otro y con sus lados respectivamente perpendiculares. Si el pequeño tiene de lado 12 cm, el lado del grande, en cm, es:



A) 18 **B)** $9\sqrt{6}$ **C)** $12\sqrt{3}$ **D)** $12\sqrt{2}$ **E)** 21

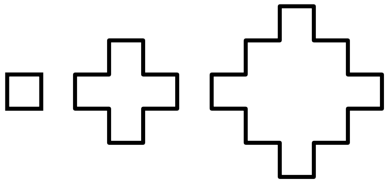
19 El valor de a en el sistema: $\begin{cases} a+\sqrt{2}\,b=\sqrt{2} \\ \sqrt{2}\,a+b=\sqrt{2} \end{cases}$, es:

A) $\sqrt{2}$ **B)** $\sqrt{2}-1$ **C)** $2-\sqrt{2}$ **D)** $1-\sqrt{2}$ **E)** $2\sqrt{2}$

20 El número 2017 se puede escribir de forma única como suma de dos cuadrados perfectos. Las bases de esos cuadrados suman:

A) 47 **B)** 41 **C)** 53 **D)** 55 **E)** 57

21 Vemos los tres primeros polígonos crucigramas de una serie. Si el lado de esos polígonos mide 1 cm, la fórmula del perímetro del crucigrama que ocupa el puesto n es, en cm, del tipo $a \cdot n + b$. El valor de $a - b$ es:

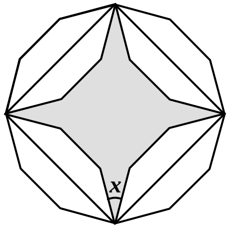


A) 6 **B)** 7 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 12

22 Si un número de más de dos cifras termina en 25 su cuadrado también termina en 25. ¿Cuántas terminaciones de dos cifras se conservan al elevar al cuadrado?

A) dos **B)** tres **C)** cuatro **D)** cinco **E)** seis

23 En un dodecágono regular hemos inscrito un cuadrado y usando sus lados como ejes de simetría hemos dibujado una estrella sombreada de cuatro puntas. ¿Cuánto mide el ángulo ***x***?

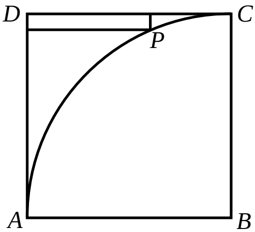


A) 20º **B)** 24º **C)** 25º **D)** 30º **E)** 36º

24 ¿Cuál es el resto de la división de $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdot 7^7$ entre 8?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 7

25 Con centro en el vértice *B* del cuadrado *ABCD* trazamos un arco de circunferencia de radio igual a la longitud del lado del cuadrado. Un punto *P* de dicho arco dista 8 del lado *AD* y 1 del lado *DC*. ¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado?



A) 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** 13

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 22 de febrero de 2017

NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

1 La ecuación $\log_2 \sqrt{x+1} + \log_2 x = \log_2 \sqrt{x-1} + \log_2(-x)$

A) Tiene una solución real **B)** Tiene dos soluciones reales
C) Tiene infinitas soluciones reales **D)** No tiene soluciones reales
E) Tiene un número finito, mayor que dos, de soluciones reales

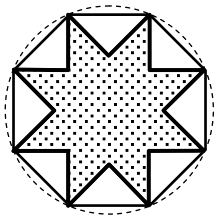
2 Si $\log_2 \sqrt[n]{0{,}125} = x$, el valor de $x \cdot n$ es:

A) – 1 **B)** 2 **C)** – 3 **D)** 4 **E)** – 5

3 ¿Cuántos números menores que 100 son el producto de tres primos?

A) 18 **B)** 19 **C)** 20 **D)** 21 **E)** 22

4 El lado del octógono regular mide 4 cm. El área de la estrella octogonal de la figura, en cm^2, es:



A) $32\sqrt{2}$ **B)** 32 **C)** $24\sqrt{2}$

D) $16\sqrt{2}$ **E)** 24

5 Dado el complejo $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$, la suma $1 + z + z^2 + \ldots + z^8$ es:

A) 1 **B)** i **C)** 0 **D)** – i **E)** – 1

6 Teniendo en cuenta que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2 = 385$, ¿cuánto suman todos los productos de dos números distintos tomados del 1 al 10?

A) 1650 **B)** 1540 **C)** 1430 **D)** 1320 **E)** 1210

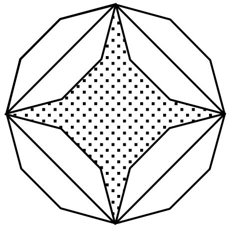
7 Una de las asíntotas de la hipérbola, $y = \frac{3x^2 - 5x + 1}{x - 2}$ es:

A) $y = x + 1$ **B)** $y = 3x - 1$ **C)** $y = x + 3$ **D)** $y = 3x + 1$ **E)** $y = x - 2$

8 El número de soluciones del sistema $\begin{cases} y = x^2 - x + 1 \\ x = y^2 - y + 1 \end{cases}$, es:

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

9 En un dodecágono regular hemos inscrito un cuadrado y usando sus lados como ejes de simetría hemos dibujado la estrella sombreada de cuatro puntas de la figura. Si el lado del dodecágono mide 1 cm, el área de la estrella, en cm^2, es:



A) $2+\sqrt{3}$ **B)** $\frac{6+\sqrt{2}}{2}$ **C)** $2\sqrt{3}$

D) $5-\sqrt{2}$ **E)** 4

10 En una feria cada diez minutos se sortea un premio entre diez papeletas. Con una papeleta en cada sorteo, ¿cuántas veces debo participar al menos para que la probabilidad de llevarme premio sea mayor que $\frac{1}{2}$?

A) 8 **B)** 7 **C)** 6 **D)** 5 **E)** 4

11 Si 2 + 3*i* es una raíz cuarta de z, también lo es:

A) 2 – 3*i* **B)** 3 – 2*i* **C)** 3 + 2*i* **D)** – 2 + 3*i* **E)** – 3 – 2*i*

12 El rectángulo de la figura está dividido en dos cuadrados y un rectángulo pequeño. Si el rectángulo pequeño es semejante al rectángulo original y el lado de cada cuadrado es 1, ¿cuál es la longitud del lado largo del rectángulo original?

A) $2\sqrt{3}-14$ **B)** $1+\sqrt{2}$ **C)** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **D)** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ **E)** $8\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

13 ¿Cuántos puntos comunes tienen las gráficas de las funciones $y=x^2$, $y=\frac{1}{1+x^2}$?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

14 Si la base mayor de un trapecio isósceles mide igual que la diagonal y la base menor mide igual que la altura del trapecio, ¿cuál es el cociente entre la longitud de la base menor y la de la base mayor?

A) $\frac{2}{5}$ **B)** $\frac{3}{5}$ **C)** $\frac{2}{3}$ **D)** $\frac{3}{4}$ **E)** $\frac{4}{5}$

15 El máximo valor que alcanza la función $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}^3 x \cdot \cos x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ es:

A) $\frac{1}{8}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** 1

16 Lanzamos un dado normal seis veces. Si p es la probabilidad de que en los seis lanzamientos se obtengan números distintos, entonces el número p verifica:

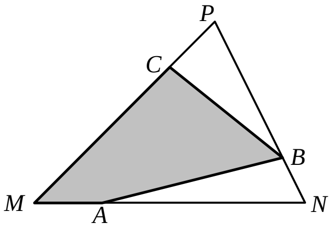
A) $p \leq 0{,}02$ **B)** $0{,}02 < p \leq 0{,}04$ **C)** $0{,}04 < p \leq 0{,}0$

D) $0{,}06 < p \leq 0{,}08$ **E)** $p > 0{,}1$

17 Si $x^2+xy+y^2=84$ y $x-\sqrt{xy}+y=6$, ¿cuál es el valor de xy?

A) 16 **B)** 25 **C)** 36 **D)** 49 **E)** 64

18 Los puntos A, B y C de la figura dividen a cada lado del triángulo MNP en dos trozos que están en la relación 1:3. ¿Qué fracción del área del triángulo está sombreada?



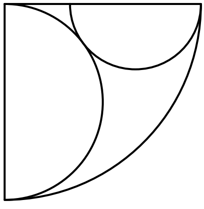
A) $\frac{7}{16}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{9}{16}$

D) $\frac{5}{8}$ **E)** $\frac{11}{16}$

19 Una bolsa contiene m bolas blancas y n bolas negras. Extraemos una bola al azar y la devolvemos a la bolsa añadiendo otras k bolas del mismo color que la extraída. Posteriormente sacamos otra bola. ¿Cuál es la probabilidad de que esta segunda bola sea blanca?

A) $\frac{m}{m+n}$ **B)** $\frac{n}{m+n}$ **C)** $\frac{m}{m+n+k}$ **D)** $\frac{m+k}{m+n+k}$ **E)** $\frac{m+n}{m+n+k}$

20 El dibujo muestra un cuarto de circunferencia de radio 2 y dos semicircunferencias tangentes.
¿Cuál es el radio de la semicircunferencia pequeña?



A) $\frac{\pi}{6}$ **B)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{1}{\sqrt{3}}$

E) $\frac{2}{3}$

21 ¿Cuáles de las siguientes desigualdades no tienen soluciones reales?

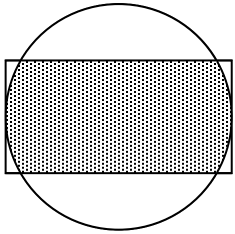
1. $2x < 2^x < x^2$
2. $x^2 < 2x < 2^x$
3. $2^x < x^2 < 2x$
4. $x^2 < 2^x < 2x$
5. $2^x < 2x < x^2$
6. $2x < x^2 < 2^x$

A) 1 y 3 **B)** 1 y 6 **C)** 2 y 4 **D)** 2 y 5 **E)** 3 y 5

22 ¿Cuál es el menor de los siguientes números?

A) $10-3\sqrt{11}$ **B)** $8-3\sqrt{7}$ **C)** $5-2\sqrt{6}$ **D)** $9-4\sqrt{5}$ **E)** $7-4\sqrt{3}$

23 El círculo y el rectángulo de la figura tienen el mismo centro. Si las dimensiones del rectángulo son 6×12 y los dos lados pequeños del rectángulo son tangentes al círculo, ¿cuál es el área de la región común al rectángulo y al círculo?



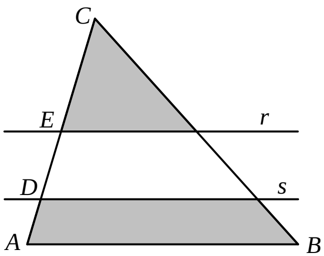
A) $12\pi+18\sqrt{3}$ **B)** $24\pi-3\sqrt{3}$ **C)** $18\pi-8\sqrt{3}$

D) $18\pi+12\sqrt{3}$ **E)** $24\pi+18\sqrt{3}$

24 En un triángulo rectángulo la bisectriz de un ángulo agudo corta al cateto opuesto en dos trozos de longitudes 1 y 2. ¿Cuál es la longitud del segmento de bisectriz interior al triángulo?

A) $\sqrt{2}$ **B)** $\sqrt{3}$ **C)** 2 **D)** $\sqrt{5}$ **E)** $\sqrt{6}$

25 Las rectas paralelas r y s son también paralelas al lado AB del triángulo ABC de la figura. Si las zonas sombreadas tienen igual área y $\dfrac{CD}{DA}=4$, ¿cuál es el valor de $\dfrac{CE}{EA}$?



A) 1 **B)** 2 **C)** 3

D) $\dfrac{3}{2}$ **E)** $\dfrac{4}{3}$

XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 22 de abril de 2017

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

PUNTUACIÓN

En los problemas 1 a 13:

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	**5 *puntos***
*Cada pregunta **en blanco o errónea***	**0 *puntos***

En los problemas 14 a 25:

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{\text{X}}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.
SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM
ORGANIZA
Asociación Matemática *Concurso de Primavera*
COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

1 ¿Qué dos números son los siguientes en esta serie?

4, 7, 8, 13, 12, 19, 16,...

A) 25 y 24 **B)** 20 y 24 **C)** 24 y 20 **D)** 25 y 20 **E)** 20 y 28

2 Dispones de una cinta de un metro de longitud. Si cada día cortas dos centímetros, ¿en cuántos días queda cortada toda la cinta?

A) 39 **B)** 40 **C)** 50 **D)** 49 **E)** 99

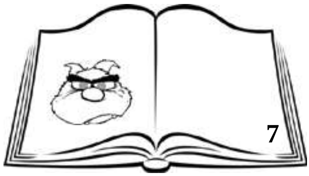
3 Ya sabes que dos puntos sobre una recta determinan un único segmento. ¿Cuántos segmentos diferentes determinan en la recta los seis puntos *A*, *B*, *C*, *D*, *E* y *F*?

A) 12 **B)** 15 **C)** 10 **D)** 18 **E)** 36

4 Un tarro lleno de miel pesa 500 gramos y ese mismo tarro lleno de leche pesó 350 gramos. Si sabemos que la leche pesa la mitad que la miel, ¿cuántos gramos pesa ese tarro vacío?

A) 100 **B)** 150 **C)** 175 **D)** 200 **E)** 225

5 Comenúmeros está descontrolado. Ayer cogió mi libro de Lengua y se comió una a una todas las cifras que numeraban las páginas, salvo los sietes que le sientan mal. Mi libro tiene 86 páginas y todas estaban numeradas. ¿Cuántas cifras se comió el glotón?



A) 145 **B)** 141 **C)** 162 **D)** 132 **E)** 150

6 Ainhoa tiene muchos palitos de longitudes 3, 5 y 10 cm. ¿Cuántos triángulos distintos puede construir con sus palitos?

A) 3 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 9 **E)** 12

7 Para celebrar el vigésimo primer aniversario del Concurso de Primavera, Joaquín asó un cordero lechal de 3 kg y 600 g. Durante el asado, el cordero perdió un tercio de su peso. Entre Joaquín, Juan Jesús, Javier, María, Merche, Esteban, Alfredo e Isabel comieron el cordero asado a partes iguales. ¿Cuántos gramos de cordero comió María?

A) 200 **B)** 220 **C)** 280 **D)** 300 **E)** 320

8 Si tiras cuatro dados iguales, ¿de cuántas formas puede ocurrir que la suma de los puntos obtenidos sea 15?

A) 10 **B)** 12 **C)** 8 **D)** 11 **E)** 9

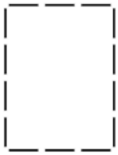
9 *Osodrilo* come peces a la orilla de un río. *Oso* dice: "*Drilo*, te has puesto morado; por cada pez que me he comido yo, tú te has comido ocho". "Claro, yo los engullo de cinco en cinco", contestó *Drilo*. Si en el río había más de 100 peces y menos de 150, ¿cuántos peces más comió *Drilo* que *Oso*?

A) 45 **B)** 70 **C)** 80 **D)** 91 **E)** 105

10 Dentro de cinco años la suma de las edades de los cuatro hijos del señor Carpanta será 50. ¿Cuál será esta suma dentro de dos años?

A) 34 **B)** 36 **C)** 38 **D)** 40 **E)** 42

11 Miguel ha formado este rectángulo ayudándose de 14 palitos iguales. Si Miguel usara exactamente 24 palitos para hacer cada rectángulo, ¿cuántos rectángulos diferentes podría formar?

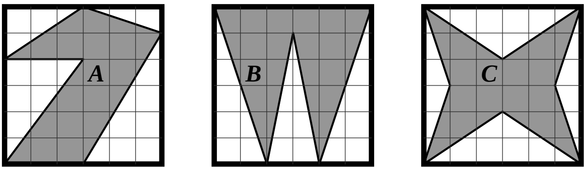


A) 6 **B)** 3 **C)** 9 **D)** 4 **E)** 8

12 En el pueblo de don Retorcido hay dos relojes. El reloj del ayuntamiento adelanta cinco segundos cada hora y el reloj de la iglesia se retrasa quince segundos cada hora. El alcalde y el cura han puesto a la vez los dos relojes en hora. ¿Cuántas horas tienen que pasar como mínimo para que un reloj marque una hora más que el otro?

A) 360 **B)** 282 **C)** 180 **D)** 228 **E)** 280

13 Hemos dibujado tres figuras en una cuadrícula. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?



A) Todas tienen igual área **B)** El área de *A* es mayor que el área de *B*
C) El área de *B* es mayor que la de *C* **D)** El área de *C* es mayor que el área de *A*
E) Todas las áreas son distintas

A partir de aquí las respuestas en blanco valen un punto.

14 ¿Cuántos triángulos podremos formar que tengan sus vértices en los vértices de un pentágono regular?

A) 6 **B)** 60 **C)** 20 **D)** 12 **E)** 10

15 Tengo cinco matrioskas. La altura de cada una mide 3/4 de lo que mide la anterior. Si la más grande mide 16 cm, ¿qué número aproxima mejor los milímetros que mide la más pequeña?

A) 20 **B)** 35 **C)** 45 **D)** 50 **E)** 65

16 En una cesta hay en total veinte frutas entre peras, manzanas y naranjas. Hemos contado doce manzanas, más peras que naranjas y nueve frutas podridas. Si sabemos además que hay siete manzanas sanas y tres naranjas podridas, ¿cuántas peras hay en la cesta?

A) 3 **B)** 4 **C)**5 **D)** 6 **E)**7

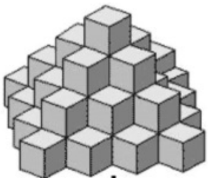
17 En el cajón de los calcetines tengo 10 calcetines azules, 12 rojos, 8 verdes y 4 marrones. A oscuras saco uno, que resulta ser azul, ¿cuál es la probabilidad de que al coger otro también sea azul?

A) $\frac{10}{33}$ **B)** $\frac{3}{11}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{9}{34}$ **E)** $\frac{5}{17}$

18 En un juego entre tres personas, cuando uno pierde, debe pagar a los otros dos y darle tantos euros como cada uno tenga; es decir, debe duplicar el dinero de cada uno de los adversarios. Tras una partida todos terminan con 24 euros, ¿cuántos euros tenía el que perdió la partida?

A) 72 **B)** 122 **C)** 64 **D)** 86 **E)** 48

19 ¿Cuántos cubos se han usado para la construcción de esta torre?



A) 25 **B)** 30 **C)** 44 **D)** 48
E) 31

20 He dibujado un rectángulo en el que la longitud de la base es el doble de la longitud de la altura. Si el área de mi rectángulo es 50 cm^2, ¿cuál es, en centímetros, su perímetro?

A) 25 **B)** 15 **C)** 20 **D)** 50 **E)** 30

21 El nanómetro es una medida de longitud que se usa para cosas muy pequeñas. Un metro son mil millones de nanómetros. Para calcular el grosor de una hoja de papel Lucía ha visto que un taco de diez hojas mide un milímetro. ¿Cuántos nanómetros mide una sola hoja?

A) 100 000 **B)** 1000 **C)** 10 000 **D)** 1 000 000 **E)** 100

22 El lunes, Don Retorcido regaló a Pilar la mitad de las fracciones que llevaba; el martes dio la mitad de las que le quedaban a Jesús; el miércoles, la mitad del resto a Pablo. Y siguió así con Luis, después con Hugo, y por último con Marco. Al final le quedaron tres fracciones. ¿Cuántas fracciones recibió Hugo?

A) 6 **B)** 9 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 12

23 En un cine hay 200 personas. De ellas, 130 son mujeres y sabemos además que 90 personas llevan gafas. He observado que, curiosamente, la mitad de los hombres llevan gafas. ¿Cuántas mujeres no llevan gafas?

A) 80 **B)** 85 **C)** 75 **D)** 55 **E)** 70

24 Luis cumple hoy 36 años. Su edad es nueve veces la de su gato Bisbís. La edad de su perro Guaguá es tres medios la de Bisbís. La suma de las edades de Guaguá y Bisbís es…

A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 13

25 Dispones de seis fichas; dos con el número 1, otras dos con el número 2 y otras dos con el número 3. ¿Cuántos números distintos de tres cifras puedes formar con esas fichas?

A) 24 **B)** 18 **C)** 27 **D)** 15 **E)** 30

XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 22 de abril de 2017

NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

PUNTUACIÓN

En los problemas 1 a 13:

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	**5 *puntos***
*Cada pregunta **en blanco o errónea***	**0 *puntos***

En los problemas 14 a 25:

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.
SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

1 ¿Cuál de estos resultados está más cerca de 100?

A) $(20 - 17)\cdot(20 + 17)$ **B)** $201 + 7\cdot20 + 17$ **C)** $20\cdot17 - (201 + 7)$
D) $20\cdot(1 + 7) - 20 - 17$ **E)** $20 + 17 + 20 + 17$

2 Alba colecciona pirámides y prismas, todos ellos de base cuadrada. Si en total tiene 42 figuras y ha contado 288 vértices, ¿cuántas pirámides hay en su colección?

A) 24 **B)** 14 **C)** 22 **D)** 26 **E)** 16

3 La báscula de doña Esmeralda está estropeada y siempre marca un peso 120 gramos inferior al real. Por otro lado doña Esmeralda cree que su báscula marca siempre 180 gramos más que el peso verdadero. Con todo este lío, doña Esmeralda pesó un melón y dedujo que pesaba 2 kilos. ¿Cuántos gramos pesa realmente el melón?

A) 2180 **B)** 1940 **C)** 2060 **D)** 1700 **E)** 2300

4 El área de un triángulo rectángulo es de 84 m^2. Si un cateto mide 24 m, ¿cuántos metros mide su hipotenusa?

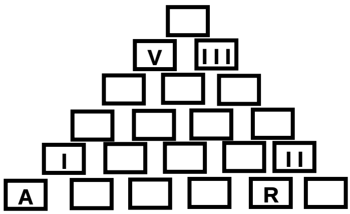
A) 25 **B)** 26 **C)** 27 **D)** 28 **E)** 30

5 Definimos la operación $a \heartsuit b = a\cdot(a + b)$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

I. $8\heartsuit2 - 2\heartsuit8 = 6\heartsuit4$ II. Si $4\heartsuit b = 28$, entonces $b = 3$

A) Solo I **B)** Solo II **C)** I y II **D)** Ninguna **E)** Imposible saberlo

6 He construido una pared triangular con ladrillos rojos (R), verdes (V) y amarillos (A), de forma que un ladrillo no está en contacto con otro ladrillo de su mismo color. ¿Cuál es la secuencia de colores de los ladrillos I–II–III?



A) R–A–A **B)** R–A–R
C) V–A–R **D)** V–A–A
E) V–V–A

7 Don Retorcido colecciona figuras geométricas. La mitad de las que tiene son triángulos, la tercera parte del resto son círculos y un cuarto de las que quedan son trapecios. Yo sé que don Retorcido tiene exactamente 20 trapecios. ¿Sabes tú cuántos triángulos tiene en su colección?

A) 80 **B)** 120 **C)** 140 **D)** 160 **E)** 200

8 Todos los días, ininterrumpidamente y sin variar la velocidad, sale a cada hora en punto un barco que va de la isla Pi a la isla Pa y exactamente igual otro barco que va de Pa a Pi. Si el trayecto dura cuatro horas, te preguntamos: ¿Cuántos cruces de barcos se producen en el mar (no vale en el puerto) en el período que va desde las 10:59 h a las 15:01 h?

A) 15 **B)** 31 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 36

9 Tres preguntas: ¿Qué número hay que sumar a –7 para obtener –1? ¿Qué número hay que restar a –5 para obtener 4? ¿Qué número hay que restar a 9 para obtener –4? Y una pregunta final: ¿Cuál es la suma de esos tres números?

A) – 4 **B)** 12 **C)** 8 **D)** –2 **E)** 10

10 Don Retorcido está aburrido. Coge una hoja de papel que mide 40 cm x 20 cm; hace dos dobleces, a lo largo y a lo ancho, por la mitad; corta por esos dobleces y consigue cuatro hojas más pequeñas, todas iguales. Como sigue aburrido, vuelve a repetir sus cortes con cada una de las hojas. Don Retorcido ya no está aburrido porque tiene un nuevo problema: ¿Cuál es la suma de los perímetros de todas esas hojitas que hay ahora?

A) 480 cm **B)** 6 m **C)** 120 cm **D)** 4 m **E)** 240 cm

11 Tres amigas están a sus cosas y comentan.

Ana: "Ya me sé los tres quintos de los versos que tengo que aprenderme".

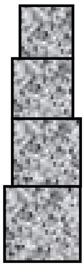
Berta: "Es curioso porque yo me sé el mismo número de versos que tú pero aún me quedan dos tercios para terminar".

Carolina: "Es fascinante, yo aún no he empezado y tengo que aprenderme 48 versos, o sea, justo el doble de lo que os queda a vosotras juntas".

¿Cuántos versos en total tenían que aprenderse las tres amigas?

A) 88 **B)** 96 **C)** 90 **D)** 80 **E)** 144

12 Hugo está contento. Dibuja un cuadrado de 10 cm de lado, encima uno de 9 cm de lado y luego otro de 8 cm, y así piensa continuar hasta que coloque el cuadrado de 1 cm de lado. ¿Cuántos centímetros medirá el perímetro de su figura cuando termine de colocar los diez cuadrados?



A) 110 **B)** 120 **C)** 130 **D)** 125 **E)** 129

13 Tienes que colocar todos los números enteros desde el 1 hasta el 9 en esa cuadrícula, teniendo en cuenta que los números exteriores indican el producto de las tres casillas de su fila o columna correspondiente. ¿En qué casilla está el 2?

A	D	G	21
B	E	H	60
C	F	I	288
112	72	45	

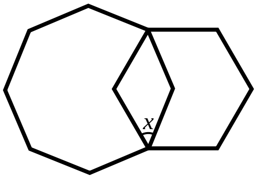
A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

A partir de aquí las respuestas en blanco valen un punto.

14 Mi número tiene seis cifras y empieza por 1: 1*ABCDE*. Si lo multiplico por tres, el 1 pega un brinco y pasa al final, obteniendo así este número: *ABCDE*1. ¿Cuál es el valor de $A+B+C+D+E$?

A) 26 **B)** 19 **C)** 28 **D)** 22 **E)** 25

15 María ha construido un octógono regular y Esteban un hexágono también regular, aunque ha tenido que utilizar lados ligeramente más grandes que los del octógono para que al superponerlos coincidan los dos vértices que muestra la figura. ¿Cuál es la amplitud del ángulo *x*?

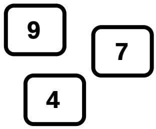


A) 54,5º **B)** 60º **C)** 52,5º **D)** 62,5º **E)** 66º

16 Comenúmeros se entretiene con tres números *a*, *b*, *c*, distintos y mayores que 1. Si te dice que mcm $(a, b) = 12$ y que mcm $(a, c) = 15$, ¿cuál de estas cinco opciones no puede ser el resultado de $b + c$?

A) 27 **B)** 19 **C)** 9 **D)** 17 **E)** 7

17 Miriam tiene tres tarjetas en las que ha escrito seis números diferentes, uno en cada cara. Aquí te enseña una cara de cada tarjeta. Luego juega a voltearlas y anota las ocho posibles sumas que pueden obtenerse: 10, 12, 12, 14, 16, 18, 18, 20. ¿Cuánto suman las tres caras que no se ven?



A) 10 **B)** 12 **C)** 14 **D)** 16 **E)** 18

18 Álvaro dibuja dos circunferencias. El área que encierra una mide 100π m^2 y el perímetro de la otra mide 100π m. ¿Cuál es, en metros, la diferencia de los radios de estas circunferencias?

A) 10 **B)** 50 **C)** 90 **D)** 40 **E)** 0

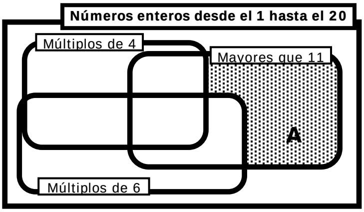
19 Si los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{2}{5}$ de A es igual que los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{3}{5}$ de B, ¿qué podemos asegurar de los números A y B?

A) $A = 2B$ **B)** $3A = 4B$ **C)** $2A = 5B$ **D)** $A = 3B$ **E)** $2A = 3B$

20 ¿Cuántos números hay que colocar en el recinto punteado, A?

A) 7 **B)** 2 **C)** 5

D) 8 **E)** 6



21 Si ordenamos estos tres números, $P = 11^{51}$, $Q = 1317^{17}$, $R = 37^{34}$, de menor a mayor, obtenemos…

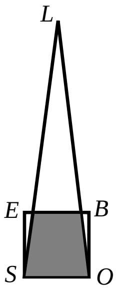
A) $P < Q < R$ **B)** $R < Q < P$ **C)** $R < P < Q$ **D)** $Q < P < R$ **E)** $Q < R < P$

22 Comenúmeros me ha quitado la calculadora y ha bailado todas las teclas numéricas salvo la del cero. Ningún número se corresponde con el correcto. Estos son algunos resultados que me salen ahora: $12 \cdot 12 = 1156$, $3 \cdot 3 = 81$, $45 \cdot 45 = 144$, $67 \cdot 67 = 5625$. ¿Qué número aparece en pantalla cuando pulso la tecla 9?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

23 Si el área del cuadrado *BESO* es 16 cm^2 y el área del triángulo *SOL* es el doble, ¿cuál es, en cm^2, el área del trapecio coloreado?

A) 14 **B)** 10 **C)** 15 **D)** 13 **E)** 12



24 Dentro de cinco años podré afirmar: “dentro de dieciséis años mi edad será el doble que la que tenía hace dos años”. Si x representa la edad que tengo hoy, ¿cuál de estas ecuaciones se corresponde con dicha situación?

A) $x + 21 = 2(x + 14)$ **B)** $x + 21 = 2(x - 19)$

C) $x + 21 = 2(x + 3)$ **D)** $x + 21 = 2(x - 2)$

E) $x + 16 = 2(x + 3)$

25 Perico recita todos los números desde el 1 hasta el 40 y la rana Gustavita, cada vez que oye un número primo avanza tantos metros como indica dicho número. Al final ha recorrido 230 metros y Perico le advierte que ha tomado por primo un número que no lo era. ¿En qué número se equivocó Gustavita?

A) 27 **B)** 33 **C)** 9 **D)** 15 **E)** 21

XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 22 de abril de 2017

NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

PUNTUACIÓN

En los problemas 1 a 13:

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	**5 *puntos***
*Cada pregunta **en blanco o errónea***	**0 *puntos***

En los problemas 14 a 25:

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.
SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

1 En cada casilla de la figura debe haber un entero positivo menor que 10. La suma de los números de cada fila ha de ser la misma, al igual que la suma de los de cada columna, aunque esta suma no tiene por qué ser igual a la suma de cada fila. ¿Qué número debe estar en la casilla sombreada?

2	**4**		**2**
	3	**3**	
6		**1**	

A) 1 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 9

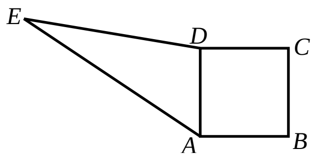
2 Bea dice que el 25 % de sus libros son novelas y que $\frac{1}{9}$ del total son libros de poesía. Si el número de libros que tiene está entre 50 y 100, ¿cuántos de ellos no son ni novelas ni de poesía?

A) 46 **B)** 47 **C)** 48 **D)** 49 **E)** 50

3 Dos lados de un cuadrilátero miden 4 y 1. Una de las diagonales, de longitud 2, divide al cuadrilátero en dos triángulos isósceles. ¿Cuál es el perímetro del cuadrilátero?

A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

4 El lado del cuadrado *ABCD* mide 4 cm. Si el triángulo *EAD* tiene igual área que el cuadrado, ¿cuál es la distancia del vértice *E* a la recta determinada por *B* y *C*?



A) 8 **B)** $4+2\sqrt{3}$ **C)** 12

D) $10\sqrt{2}$ **E)** Depende de la posición de *E*

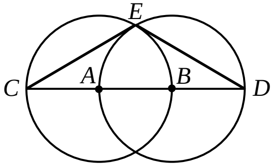
5 Uno de los problemas del Concurso de Primavera se le atascaba a Jorge, pero fue capaz de llegar a las siguientes conclusiones, todas ellas correctas:

- Si la respuesta **A** fuera correcta, también lo sería la respuesta **B**.
- Si la respuesta **C** no es la correcta, tampoco lo sería la **B**.
- Si la respuesta **B** no es la correcta, entonces ni la **D** ni la **E** son la correcta.

¿Cuál de las siguientes respuestas es la correcta?

A) A **B) B** **C) C** **D) D** **E) E**

6 Las circunferencias de la figura son iguales y de centros *A* y *B*. Cada una de ellas pasa por el centro de la otra y la recta que pasa por los centros corta también a las circunferencias en los puntos *C* y *D*. Si *E* es un punto común a ambas circunferencias, ¿cuál es el ángulo $C\hat{E}D$?

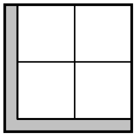


A) 105º **B)** 110º **C)** 120º **D)** 130º **E)** 135º

7 Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, escritos en algún orden, formamos el número de cinco cifras *PQRST*. Si el número de tres cifras *PQR* es divisible por 4, el *QRS* es divisible por 5 y el *RST* es divisible por 3, ¿qué cifra representa la letra *P*?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

8 Dividimos un cuadrado de 125 cm^2 de área en cinco regiones, cuatro cuadrados y un polígono en forma de L sombreado en la figura, todas de igual área. ¿Cuál es la longitud, en cm, del lado más corto del polígono en forma de L?

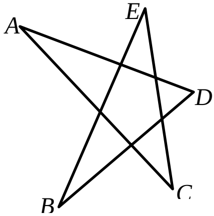


A) 1 **B)** 1,5 **C)** $2\left(\sqrt{5}-2\right)$ **D)** $\sqrt{5}-1$ **E)** $5\left(\sqrt{5}-2\right)$

9 Los números *a, b, c, d, e* verifican: $a{\cdot}b = 2$, $b{\cdot}c = 3$, $c{\cdot}d = 4$ y $d{\cdot}e = 5$. ¿Cuál es el valor de $\dfrac{e}{a}$?

A) $\dfrac{15}{8}$ **B)** $\dfrac{5}{6}$ **C)** $\dfrac{3}{2}$ **D)** $\dfrac{4}{5}$ **E)** 2

10 ¿Cuál es la suma de la medida de los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$ y $\hat{E}$ de la estrella de la figura?



A) 270º **B)** 180º **C)** 210º **D)** 240º

E) 360º

11 Tengo dos dados cúbicos, uno rojo y otro azul. Si lanzo los dos dados a la vez, ¿cuál es la probabilidad de que el número que muestra el dado rojo sea mayor que el que muestra el dado azul?

A) $\dfrac{1}{2}$ **B)** $\dfrac{19}{36}$ **C)** $\dfrac{2}{3}$ **D)** $\dfrac{5}{12}$ **E)** $\dfrac{4}{9}$

12 Todos los estudiantes de una clase hicieron una prueba. Cinco de ellos obtuvieron la puntuación máxima, 100 puntos, ninguno obtuvo menos de 60 puntos y la media de la clase fue de 76 puntos. ¿Cuántos estudiantes, como poco, había en la clase?

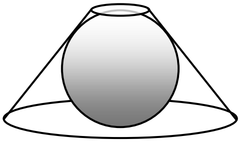
A) 10 **B)** 11 **C)** 13 **D)** 15 **E)** 20

13 Los puntos *A*, *B*, *C* y *D*, en este orden, determinan un cuadrilátero inscrito en una circunferencia. Los lados *AB* y *CD* son paralelos, el ángulo $A\hat{D}C = 50º$ y los ángulos $B\hat{A}C$ y $B\hat{C}A$ son iguales. ¿Cuánto mide el ángulo $D\hat{A}C$?

A) 110º **B)** 105º **C)** 90º **D)** 85º **E)** 50º

A partir de aquí las respuestas en blanco valen un punto.

14 Los radios de las bases de un tronco de cono son 18 y 2. ¿Cuál es el radio de la esfera inscrita en ese tronco de cono?



A) 6 **B)** $4\sqrt{5}$ **C)** 9 **D)** 10 **E)** $6\sqrt{3}$

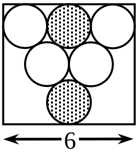
15 Ayer nacieron cuatro bebés en un hospital. Se consideran los siguientes sucesos:

A: "Los cuatro fueron del mismo sexo"
B: "Exactamente tres son del mismo sexo"
C: "Dos son niños y dos niñas"
D: "Más de dos son niños".

Suponiendo que es igual de probable que nazca un niño que una niña, ordena de menor a mayor probabilidad los cuatro sucesos:

A) ABCD **B)** DABC **C)** ADCB **D)** ADBC **E)** BADC

16 En el interior del rectángulo de la figura, uno de cuyos lados mide 6 cm, hay seis circunferencias iguales, tangentes entre sí y tangentes a los lados del rectángulo. ¿Cuál es la distancia entre los puntos más cercanos de los círculos sombreados?

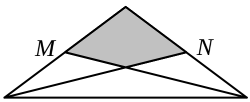


A) $\frac{3}{2}$ **B)** $\sqrt{2}$ **C)** $2(\sqrt{3}-1)$ **D)** $\frac{\pi}{2}$ **E)** 2

17 Si Raquel se sube en una mesa y Pablo se queda en el suelo, Raquel es 80 cm más alta que Pablo, pero si es Pablo el que se sube a la mesa y Raquel se queda en el suelo, entonces Pablo es un metro más alto que Raquel. ¿Cuál es, en cm, la altura de la mesa?

A) 50 **B)** 60 **C)** 70 **D)** 80 **E)** 90

18 En la figura se observa un triángulo isósceles dividido en cuatro regiones de las que conocemos las áreas de los tres triángulos: 3, 3 y 6. Si M y N son los puntos medios de los lados iguales, ¿cuál es el área del cuadrilátero sombreado?



A) 4 **B)** 4,5 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

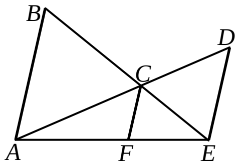
19 ¿Qué edad tienes?, le preguntan a Pablo y así contesta: "Si yo viviera 100 años, mi edad actual sería los cuatro tercios de la mitad de lo que me quedaría por vivir". ¿Cuál es la edad de Pablo?

A) 20 **B)** 40 **C)** 50 **D)** 60 **E)** 80

20 El volumen de un cono construido con un sector circular de radio 3 y ángulo de 40º es:

A) $\frac{4\pi\sqrt{5}}{81}$ **B)** $\frac{10\pi}{9}$ **C)** $\frac{4\pi\sqrt{5}}{243}$ **D)** 9π **E)** $\frac{8\pi}{27}$

21 En la figura adjunta los segmentos *AB*, *FC* y *ED* son paralelos. Si la longitud del segmento *AB* es 10 y la del *ED* es 7, la longitud del segmento *FC* es:



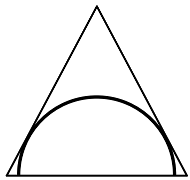
A) $\frac{70}{17}$ **B)** $\frac{14}{3}$ **C)** $\frac{47}{14}$ **D)** $\frac{32}{5}$

E) $\frac{30}{7}$

22 Una bolsa contiene 3 bolas rojas y 2 bolas verdes. Sacamos, una a una y sin devolución, bolas de la bolsa hasta que hayamos sacado todas las bolas de uno de los colores. ¿Cuál es la probabilidad de que hayamos sacado las tres bolas rojas?

A) $\frac{3}{10}$ **B)** $\frac{2}{5}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{3}{5}$ **E)** $\frac{7}{10}$

23 Inscribimos una semicircunferencia en un triángulo isósceles de base 16 y altura 15, como muestra la figura. ¿Cuál es su radio?



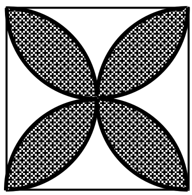
A) $4\sqrt{3}$ **B)** $\frac{120}{17}$ **C)** 5 **D)** $\frac{17\sqrt{2}}{2}$

E) $\frac{17\sqrt{3}}{2}$

24 ¿Cuál es el resto de la división de $x^{100} - 2x^{99} + 4$ entre $x^2 - 3x + 2$?

A) $x + 2$ **B)** $x + 1$ **C)** $2x + 1$ **D)** $x - 1$ **E)** $3x - 2$

25 Sobre los lados de un cuadrado se trazan unas semicircunferencias de radio *a*, como muestra la figura. ¿Cuál es el área de la zona sombreada?



A) $(2\pi - 4)a^2$ **B)** $\frac{\pi}{8}a^2$ **C)** $\frac{8-\pi}{4}a^2$

D) $(4\pi - 2)a^2$ **E)** $2a^2$

concurso de primavera MATEMÁTICAS

XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 22 de abril de 2017

NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)

¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

PUNTUACIÓN

En los problemas 1 a 13:

Cada respuesta ***correcta*** *te aportará*	**5** ***puntos***
Cada pregunta ***en blanco o errónea***	**0** ***puntos***

En los problemas 14 a 25:

Cada respuesta ***correcta*** *te aportará*	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes ***en blanco***	***1 puntos***
Cada respuesta ***errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** $\boxed{\text{X}}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid

El Corte Inglés

Grupo ANAYA

Grupo SM

Smartick

1 Si f es una función lineal que verifica $f(2017) - f(2005) = 100$, ¿cuál es el valor de $f(2035) - f(2017)$?

A) 75 **B)** 100 **C)** 120 **D)** 150 **E)** 180

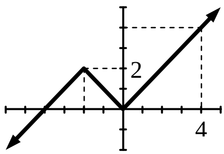
2 Considera todos los números de nueve cifras. Escribimos cada uno de ellos en una tarjeta y los metemos en una enorme caja. ¿Cuál es el mínimo número de tarjetas que debemos sacar para estar seguros de que al menos dos de ellos coinciden en el primer dígito?

A) 9! **B)** 8! **C)** 72 **D)** 10 **E)** 9

3 El número $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ es igual a:

A) $\sqrt{5}-1$ **B)** 1 **C)** $\sqrt[3]{2}$ **D)** $\sqrt{5}-\sqrt[3]{2}$ **E)** $\sqrt[3]{4}$

4 La gráfica de la función f está compuesta por tres trozos rectilíneos, como muestra la figura. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f\left(f\left(f(x)\right)\right) = 0$?



A) 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1 **E)** 0

5 Si f es una función periódica de periodo T = 5 y en el intervalo [3, 8) verifica que $f(x) = x^2 - 10x + 25$, ¿cuál es el valor de $f(2017)$?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 4 **E)** 9

6 Un círculo de radio r está dentro de otro de radio R. Si el cociente entre el área del círculo grande y el área de la región que está fuera del pequeño pero dentro del grande es $\dfrac{x}{y}$, ¿cuál de las siguientes expresiones representa el cociente $\dfrac{R}{r}$?

A) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ **B)** $\dfrac{x}{\sqrt{x-y}}$ **C)** $\dfrac{y}{\sqrt{x-y}}$ **D)** $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-y}}$ **E)** $\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x-y}}$

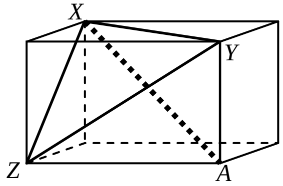
7 ¿Cuántas parejas de enteros (x, y), con $x \le y$, verifican que su producto es igual a cinco veces su suma?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

8 Si f es la función $f\left(\dfrac{x}{1-x}\right)=\sqrt{x}$ definida en el intervalo (0, 1) y $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$, entonces $f\left(tg^2\theta\right)$ es igual a:

A) $sen\theta$ **B)** $cos\theta$ **C)** $cotg\theta$ **D)** $sec\theta$ **E)** $cosec\theta$

9 Las longitudes de los lados del triángulo *XYZ* son 8, 9 y $\sqrt{55}$. ¿Cuál es la longitud de la diagonal *XA* del ortoedro de la figura?



A) $\sqrt{90}$ **B)** 10 **C)** $\sqrt{120}$

D) 11 **E)** $\sqrt{200}$

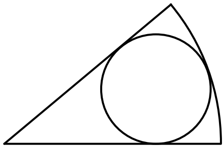
10 El conjunto de puntos del plano (x, y) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $x^2-xy+x-y=0$ es:

A) Una elipse **B)** Una parábola **C)** Un punto **D)** Una recta **E)** Dos rectas secantes

11 En un cajón hay calcetines de ocho colores y ocho de cada color. Si sacamos dos calcetines al azar del cajón, ¿cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

A) $\dfrac{1}{7}$ **B)** $\dfrac{1}{8}$ **C)** $\dfrac{1}{9}$ **D)** $\dfrac{7}{64}$ **E)** $\dfrac{9}{64}$

12 Si el cociente entre el radio del sector circular y el radio del círculo inscrito es 3, ¿cuál es el cociente entre sus áreas?



A) $\dfrac{3}{2}$ **B)** $\dfrac{4}{3}$ **C)** $\dfrac{5}{3}$ **D)** $\dfrac{6}{5}$

E) $\dfrac{5}{4}$

13 ¿Cuál es el resto de la división $\left(x^{200}-2x^{199}+x^{50}-2x^{49}+x^2+x+1\right):\left(x^2-3x+2\right)$?

A) $2x-1$ **B)** 7 **C)** $2x+3$ **D)** 1 **E)** $6x-5$

A partir de aquí las respuestas en blanco valen un punto.

14 Si las soluciones de la ecuación $x^2 - bx + c = 0$ son $x_1 = sen\frac{\pi}{7}$, $x_2 = \cos\frac{\pi}{7}$, entonces b^2 es igual a:

A) c **B)** $1 + 2c$ **C)** $1 + c$ **D)** $1 - c$ **E)** $1 + c^2$

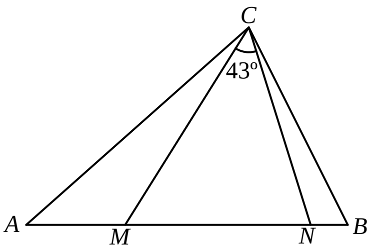
15 Alicia tenía escritos diez enteros positivos consecutivos y Comenúmeros se comió uno de ellos. Si la suma de los restantes es 2017, ¿qué número se comió?

A) 218 **B)** 219 **C)** 228 **D)** 235 **E)** 237

16 Cuando un cierto sólido se funde y pasa al estado líquido su volumen crece $\frac{1}{12}$. Si a continuación se solidifica, ¿cuánto decrece ahora su volumen?

A) $\frac{1}{10}$ **B)** $\frac{1}{11}$ **C)** $\frac{1}{12}$ **D)** $\frac{1}{13}$ **E)** $\frac{1}{14}$

17 En el triángulo *ABC* de la figura, los puntos *M* y *N* están en el lado *AB* y verifican *AN* = *AC* y *BM* = *BC*. Si el ángulo $M\hat{C}N$ es de 43º, cuál es la medida del ángulo $A\hat{C}B$?



A) 86º **B)** 89º **C)** 90º
D) 92º **E)** 94º

18 Los puntos *A* y *B* están en la gráfica de la parábola $y = x^2 + 7x - 1$ siendo el origen de coordenadas el punto medio del segmento *AB*. ¿Cuál es la longitud de dicho segmento?

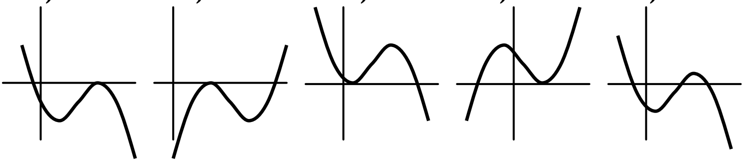
A) $10\sqrt{2}$ **B)** $5+\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C)** $5+\sqrt{2}$ **D)** 7 **E)** $5\sqrt{2}$

19 Si *x* e *y* son números reales, ¿cuántas soluciones (*x*, *y*) tiene la ecuación $x^2 + y^2 = |x| + |y|$?

A) 3 **B)** 5 **C)** 7 **D)** 9 **E)** Infinitas

20 Si $a < b$, ¿cuál de las siguientes gráficas podría ser la de la función $f(x) = (a - x)(b - x)^2$?

A) **B)** **C)** **D)** **E)**



21 Un cuadrado tiene un vértice en el punto $P(1, 2)$ y otro en la recta $y - 3x = 4$. ¿Cuál es el menor valor posible para su área?

A) 5 **B)** 4 **C)** 2,5 **D)** 1,25 **E)** 1

22 ¿Cuántos ángulos α, entre 0 y 2π verifican que $sen\alpha + \cos\alpha = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

23 Si a, b y c son números positivos tales que $b = a^{30}$ y $c = a^{42}$, el $\log_b c$ es igual a:

A) $\frac{5}{7}$ **B)** 12 **C)** 9^{12} **D)** –12 **E)** $\frac{7}{5}$

24 Definimos la “distancia taxi” entre los puntos del plano $P(a, b)$ y $Q(c, d)$ mediante la expresión $d_{taxi}(P, Q) = |a - c| + |b - d|$. ¿Qué figura determina el conjunto de puntos del plano cuya distancia taxi al origen es 2?

A) Un cuadrado **B)** Una recta **C)** Una circunferencia

D) Dos rectas **E)** El conjunto vacío

25 ¿Cuál de los siguientes números es el más próximo a $\sqrt{101} - 10$?

A) $\frac{1}{16}$ **B)** $\frac{1}{18}$ **C)** $\frac{1}{20}$ **D)** $\frac{1}{22}$ **E)** $\frac{1}{24}$

XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (1ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**D**	1	**A**	1	**B**	1	**D**
2	**B**	2	**E**	2	**C**	2	**C**
3	**D**	3	**A**	3	**E**	3	**E**
4	**D**	4	**B**	4	**C**	4	**A**
5	**A**	5	**B**	5	**A**	5	**A**
6	**C**	6	**E**	6	**E**	6	**D**
7	**D**	7	**B**	7	**E**	7	**D**
8	**C**	8	**D**	8	**D**	8	**B**
9	**D**	9	**A**	9	**D**	9	**A**
10	**C**	10	**A**	10	**B**	10	**B**
11	**C**	11	**C**	11	**B**	11	**B**
12	**B**	12	**B**	12	**D**	12	**B**
13	**E**	13	**C**	13	**D**	13	**C**
14	**A**	14	**A**	14	**B**	14	**B**
15	**E**	15	**E**	15	**D**	15	**A**
16	**A**	16	**E**	16	**C**	16	**A**
17	**E**	17	**B**	17	**D**	17	**A**
18	**C**	18	**D**	18	**C**	18	**D**
19	**E**	19	**A**	19	**C**	19	**A**
20	**D**	20	**D**	20	**C**	20	**E**
21	**A**	21	**D**	21	**E**	21	**E**
22	**E**	22	**B**	22	**C**	22	**A**
23	**B**	23	**B**	23	**D**	23	**A**
24	**B**	24	**C**	24	**C**	24	**C**
25	**A**	25	**E**	25	**E**	25	**D**

XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (2ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**D**	1	**A**	1	**B**	1	**D**
2	**D**	2	**E**	2	**A**	2	**D**
3	**B**	3	**E**	3	**D**	3	**B**
4	**D**	4	**A**	4	**C**	4	**A**
5	**A**	5	**C**	5	**C**	5	**D**
6	**C**	6	**D**	6	**C**	6	**D**
7	**D**	7	**B**	7	**A**	7	**A**
8	**D**	8	**B**	8	**E**	8	**A**
9	**E**	9	**E**	9	**A**	9	**B**
10	**C**	10	**A**	10	**B**	10	**E**
11	**A**	11	**C**	11	**D**	11	**C**
12	**C**	12	**C**	12	**C**	12	**A**
13	**C**	13	**B**	13	**B**	13	**E**
14	**E**	14	**A**	14	**A**	14	**B**
15	**D**	15	**C**	15	**C**	15	**C**
16	**C**	16	**E**	16	**C**	16	**D**
17	**B**	17	**A**	17	**E**	17	**E**
18	**E**	18	**D**	18	**D**	18	**A**
19	**C**	19	**B**	19	**B**	19	**E**
20	**E**	20	**C**	20	**A**	20	**A**
21	**A**	21	**D**	21	**A**	21	**D**
22	**A**	22	**E**	22	**B**	22	**C**
23	**C**	23	**A**	23	**B**	23	**E**
24	**C**	24	**C**	24	**A**	24	**A**
25	**A**	25	**B**	25	**A**	25	**C**

XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel I

1. (D) Realizamos las operaciones y comprobamos.
$1,3 \times 1,3 = 1,69$; $2 - 0,32 = 1,68$; $3,3 \div 2 = 1,65$; $0,69 + 1,01 = 1,70$;
$2,8 \times 0,6 = 1,68$. El resultado mayor es 1,70

2. (B) Si el perímetro del cuadrado mide 12 cm su lado medirá 3 cm de donde obtenemos que los lados del rectángulo medirán, respectivamente, 3 cm y $5 \times 3 = 15$ cm. cm. Por tanto, el área será $15 \times 3 = 45$ cm^2.

3. (D) Los minutos de anuncio son igual al número de minutos ante la tele, menos el número de minutos que dura el capítulo, es decir:
Tres cuartos de hora = 45 minutos. 45 – 38 = 7 minutos.

4. (D) Resolución a)
El número de diagonales es igual al número de segmentos que unen, dos a dos, los 10 vértices menos el número de lados (10 en nuestro caso). Dicho de otra forma: el número de diagonales es igual al número de parejas de vértices menos el número de lados.
El primer vértice se puede emparejar con los otros 9; el segundo solo con 8 (con el primero ya estaba emparejado); el tercero solamente con 7 (ya estaba emparejado con los dos primeros) y así sucesivamente hasta el noveno que solo se podrá emparejar con el décimo. Por lo tanto el número de diagonales es:
(9 + 8 + 7 + 6+ 5 + 4 + 3 + 2 + 1) – 10 = 45 – 10 = 35.

Resolución b)
Cada uno de los vértices puede emparejarse con los otros nueve, pero cada una de las parejas estaría repetida (el segmento *AB* es el mismo que el *BA*). Por lo tanto el número de segmentos que pueden obtenerse es $(10 \times 9) : 2 = 45$.
El número de diagonales será entonces, 45 – 10 = 35.

Resolución c)
Un método sencillo para la resolución de este problema consiste en el cálculo de diferencias de los términos de una serie. Para ello construimos esta tabla.

Nº de lados del polígono	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Nº de diagonales	0	2	5	9	14	20	27	35	44

+2 +3 + 4 + 5 +6 +7 +8 +9

Un decágono regular tiene 35 diagonales

5. (A) Como la suma de puntos de un solo dado es 21 y hay cuatro dados, la suma total de puntos será $4 \times 21 = 84$. Por otra parte, dado que tenemos 30 puntos a la vista, la suma de los puntos ocultos será $84 – 30 = 54$.

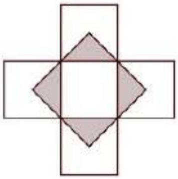
6. (C) Midiendo todo en mm tenemos:
Un ovillo de 120 000 mm para hacer conjuntos completos constituidos por:
Un collar de 1200 mm, más una pulsera de 245 mm, más un anillo de 55 mm.
Como para cada conjunto necesita $1200 + 245 + 55 = 1500$ mm de lana, podrá hacer $120\,000 : 1500 = 80$ conjuntos completos.

7. (D) Tenemos que analizar 8 tablas. En cada una de ellas tenemos, al comienzo y al final un uno (por ejemplo 3×1 y 3×10), con lo que contamos ya con 16 unos. Por otra parte debemos considerar los números de dos cifras que comiencen o terminen en uno. De los que comienzan por uno, solo consideramos los números: 10, 12, 14, 15, 16 y 18, ya que los otros son primos. Veremos ahora cuántas veces aparece cada uno de ellos:

$10 = 2 \times 5 = 5 \times 2$ | $12 = 2 \times 6 = 6 \times 2 = 3 \times 4 = 4 \times 3$
$14 = 2 \times 7 = 7 \times 2$ | $15 = 3 \times 5 = 5 \times 3$
$16 = 2 \times 8 = 8 \times 2 = 4 \times 4$ | $18 = 2 \times 9 = 9 \times 2 = 3 \times 6 = 6 \times 3$

Lo que nos hace contar $2 + 4 + 2 + 2 + 3 + 4 = 17$ unos más.
De los que terminan en uno es inmediato ver que solo aparecen el 21 y el 81:
$21 = 3 \times 7 = 7 \times 3$ y $81 = 9 \times 9$, lo que añade 3 unos más.
Concluimos pues que Comenúmeros se ha zampado $16 + 17 + 3 = 36$ unos.

8. (C) A la vista de la figura tenemos que cada triangulito sombreado tiene un área que es la cuarta parte de cada uno de los cinco cuadraditos que forman la cruz griega. Luego entre los cuatro tendrán una superficie igual a la de uno de esos cuadraditos. Se deduce que nuestro cuadrado de 8 cm^2 tiene dos veces el área de un cuadradito, que será $8 : 2 = 4$ cm^2 . Por lo tanto el área de la cruz griega es $4 \times 5 = 20$ cm^2.



9. (D) Julián pago realmente $20 – 4{,}20 = 15{,}80$ €.
Si a esa cantidad le restamos los $3 \times 2{,}35 = 7{,}05$ € que pagó por los folios, tenemos que con $15{,}80 – 7{,}05 = 8{,}75$ € compró las 5 carpetas. En consecuencia cada carpeta costó: $8{,}75 : 5 = 1{,}75$ €

10.(C) Como María y Vania tienen la misma terminación "ia" podemos afirmar que les corresponden los dos primeros nombres en Wingdings, identificando además:

i ≡ ✋ ; a ≡ ✌

Como Jaime tiene que ser necesariamente el tercer nombre, tendremos:

j ≡ ☺ ; m ≡ 💣 ; e ≡ ☜

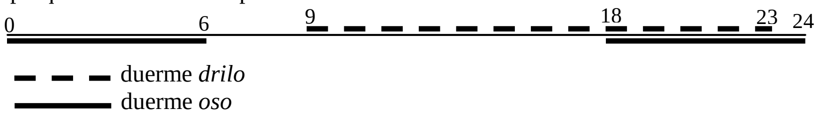
Ahora estamos en condiciones de afirmar que el primer nombre en Wingdings es María y el segundo Vania, lo que conduce a las identificaciones:

r ≡ ☼ ; v ≡ ✞ ; n ≡ ☠

Por fin, traduciendo letra a letra: Javier ≡ ☺ ✌ ✞ ✋ ☜ ☼

11.(C) Oso camina hacia el norte desde las 9 hasta las 18, es decir, durante 9 horas. Drilo, a su vez, camina hacia el sur desde las 23 hasta las 6, esto es, durante 7 horas. Tenemos que calcular el movimiento de Osodrilo desde las 8 hasta la 8 del día siguiente. Dado que de 8 a 9 ambos están despiertos, Oso comienza a caminar a las 9 y lo hará hasta las 18, recorriendo $10 \times 9 = 90$ km hacia el norte. De 18 a 23 ambos están dormidos y no caminan.

De 23 a 6 Drilo caminará hacia el sur $2 \times 7 = 14$ km y de 6 a 8 Osodrilo está parado porque ambos están despiertos. Por tanto estarán a $90 - 14 = 76$ km del claro.



12.(B) La afirmación P es cierta ya que 15 es mayor que 7 + 5. La Q es falsa porque el lado desigual de un triángulo isósceles puede ser mayor o menor que cada uno de los otros dos lados. La R también es falsa porque no solo el cuadrado tiene los cuatro lados iguales, también los tiene iguales el rombo.

13.(E) Tanteemos un poco: $10^3 = 1000$; $20^3 = 8000$; $21^3 = 9261$; $22^3 = 10\,648$. Por lo tanto, el mayor cubo que podemos formar con los diez mil cubitos, tiene 21 cm de arista.

14.(A) Para escribir los nueve primeros números necesitamos nueve cifras. Para los 90 números de dos cifras (del 10 al 99), emplearemos $90 \times 2 = 180$ cifras más. Quedan todavía $207 - (9 + 180) = 18$ cifras por emplear en números de tres cifras. Podemos pues escribir: $18 : 3 = 6$ números más y, en consecuencia, el último número será el $99 + 6 = 105$.

15.(E) Si realizamos las diferencias de cada tèrmino con el anterior, hasta el valor 47, encontramos la serie: $3 \to 6 \to 12 \to 24 \to \ldots$ (cada una el doble que la anterior). La diferencia siguiente sería 48, con lo que el número comido sería: $47 + 48 = 95$.

Calculemos, a modo de comprobación, el término siguiente a 95.

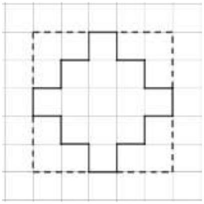
La siguiente diferencia sería 96 y por tanto $95 + 96 = 191$.

16.(A) Como 4 m^2 es la cuarta parte de 16 m^2, pintará los 4 m^2 en la cuarta parte de tiempo que los 16 m^2, es decir, los pintara en $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ hora = 30 minutos.

17.(E) Si A es la edad de Ánder entonces la edad de Carlos será A + 10 y la suma de sus edades $2A + 10 = 22$ de donde $2A = 12$ y $A = 6$**.**
Por tanto la edad de Carlos será 6 + 10 = 16 años.

18.(C) En la tienda, tras la acción de Ana, hay ocho hámsters de los que dos son hembras, luego la probabilidad de escoger al azar una hembra es: $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

19.(E) De la figura se deduce que el perímetro de cada polígono crucigrama es igual al del cuadrado que lo "circunscribe", como se muestra en la figura. De esta forma podemos sustituir los polígonos de la serie por cuadrados de lados: 1, 3, 5, 7, 9,…
En consecuencia, el quinto polígono de la serie tendrá un perímetro de $4 \times 9 = 36$ cm.



20.(D) Resolución a):
Sea N el número dado por Don Retorcido. Si N fuese par, aplicando la regla tendremos: "2 por par + 1= impar".
Aplicando de nuevo la regla: "3 por impar + 1 = par" y aplicándola por tercera vez: "2 por par + 1= impar". Dado que se llega al 208, N es necesariamente impar.
Aplicando la regla tres veces tendremos:
$3N + 1 = N_1$ (par); $2N_1 + 1 = N_2$ (impar); $3N_2 + 1 = 208$.
Deshaciendo el camino:

$$\frac{208-1}{3}=69=N_2\ ;\ \frac{69-1}{2}=34=N_1\ ;\ \frac{34-1}{3}=11=N$$

Resolución b):
Utilizamos la estrategia de "empezar por el final", siguiendo los pasos que pide el problema a la inversa; así:
Primero, al resultado final (208) le restamos 1 y lo dividimos entre 3 por obtener número impar: 208 – 1 = 207; 207 : 3 = 69.
Segundo, al resultado obtenido (69) le restamos 1 y le dividimos entre 2 por obtener número par y no múltiplo de 3: 69 – 1 = 68; 68 : 2 = 34.
Tercero, al resultado obtenido (34) le restamos 1 y dividimos entre tres por obtener número impar: 34 – 1 = 33; 33 : 3 = 11
El número que nos dio Don Retorcido es 11.

21.(A) Cada banda horizontal está formada por quince triángulos más dos medios triángulos en los extremos; en total la superficie de diez y seis triángulos.
Por otra parte, vemos que en cada banda está coloreada la superficie equivalente a cuatro triángulos (en unas cuatro triángulos completos y en otras tres más dos mitades). Por lo tanto la fracción coloreada será: $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

22.(E) Luca le había dado 13 caramelos a Lino. Si le da uno más, Lino tiene 14 y Luca la mitad, es decir 7. Luego hay 14 + 7 = 21 caramelos, que Luca tenía al principio.

23.(B) Las diagonales de cada uno de los dos cuadrados grandes forman en el otro cuatro cuadrados, con lo que ya tenemos ocho cuadrados, que junto con los dos grades suman en total diez cuadrados.

24.(B) Si con tres patadines el balón recorre la mitad que con un chutazo (120 : 2 = 60 m), con un patadín recorrerá la tercera parte, es decir, 60 : 3 = 20 m.

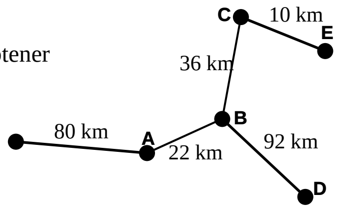
25.(A) Hacemos las operaciones en sentido inverso: 2017 + 23 = 2040; 2040 : 6 = 34.
El número de partida era el 34 y la suma de sus cifras es 7.

XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel II

1. (A) El menor número de cuatro cifras distintas cuyas cifras suman 20 es 1199 y el mayor es 9920, así pues la suma vale 11 119.

2. (E) Restando las distancias que nos dan es fácil obtener la longitud de cada tramo de carretera:
Para ir de D a E debemos hacer el recorrido D→B→C→ E que hacen un total de 92 + 36 + 10 = 138 km.



3. (A) Como en cada cifra podemos elegir entre dos números distintos, de una cifra hay 2 números, de dos cifras 2·2 = 4 y de tres cifras hay 2·2·2 = 8. Escribimos ahora los primeros números de cuatro cifras hasta llegar al 1121: 1111, 1112, 1121.
El 1121 ocupa la posición 2 + 4 + 8 + 3 = 17.

4. (B) Si a Julián le devolvieron 4,20 € en total pagó 20 – 4,20 = 15,80 €.
Los tres paquetes de folios costaron 2,35·3 = 7,05 €, así que cada carpeta cuesta (15,80 – 7,05)/ 5 = 1,75 €.
A Ana le devolvieron 20 – (2,35 + 3·1,75) = 20 – 7,60 = 12,40 €.

5. (B) Si en total son n hermanos y cada hermano tiene $n – 1$ hijos, el número total de hijos es $n(n – 1)$. Si a este número le sumamos los hermanos tenemos que la familia tienen $n + n(n – 1) = n^2$ miembros. El único cuadrado perfecto que hay entre 66 y 99 es 81, que es el número de miembros de la familia de Don Retorcido.

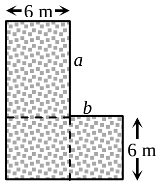
6. (E) Un capicúa de tres cifras tiene la forma *aba* y para que sea múltiplo de 3 la suma de sus cifras debe serlo también. Busquemos pues qué valores pueden tomar a y b para que $2a + b$ sea múltiplo de tres, teniendo en cuenta que deben ser enteros de 0 a 9 y que a no puede ser 0.
Si $a = 1$, $b = 1$, 4 o 7; si $a= 2$, $b = 2$, 5 o 8 y si $a = 3$, $b = 0$, 3, 6 o 9.
Observa que si a es múltiplo de 3 hay cuatro valores posibles para b y que si a no es múltiplo de 3 hay tres posibilidades para b. Así que en total hay 3 · 4 + 6 · 3 = 30 capicúas de tres cifras que son múltiplos de 3.

7. (B) Para acabar en tres semanas Emma debe leer cada semana 70 páginas. Si de lunes a jueves lee x páginas diarias, el viernes leerá $x – 5$ y con las 10 del domingo obtenemos la ecuación: $4x + (x – 5) + 10 = 70$ cuya solución es $x = 13$. ¡Ojo! 13 son las páginas que lee de lunes a jueves, pero nos preguntan cuántas lee el viernes que son 13 – 5 = 8.

8. (D) Observamos que el 0, 6, 7 y 8 deben ocupar las posiciones de las unidades. El 5 solo puede ocupar la posición de las decenas con el 0 en las unidades y, para que no haya números consecutivos el 2 tendrá que ir con el 6 y el 8. Así pues, los números son: 26, 28, 47 y 50 y la suma del mayor y el menor es 50 + 26 = 76.

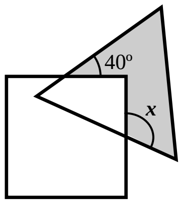
9. (A) La suma de los puntos de las seis caras de un dado es 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21. Como hay 4 dados, todos los puntos sumarán $4 \cdot 21 = 84$ y como hay 30 puntos visibles, en total hay 84 – 30 = 54 no visibles.

10.(A) Llamando *a* y *b* a los lados que ves en la figura y usando el dato del área obtenemos que $6a + 36 + 6b = 120$ por lo que $a + b = 14$. Como no tenemos más datos, no vamos a poder calcular cuánto valen *a* y *b*, pero con saber el valor de la suma tenemos suficiente.
El perímetro de la L es: $6 + a + b + 6 + (b + 6) + (6 + a) =$
$= 2a + 2b + 24 = 2(a + b) + 24 = 2 \cdot 14 + 24 = 52$ m.



11.(C) Calculemos cada una de ellas atendiendo al orden de las operaciones:
A) $5 - 1:2 = 5 - 0{,}5 = 4{,}5$ **B)** $2{,}46 + 3{,}64 = 6{,}1$
C) $5 \cdot (1{,}2 - 2{,}4) = 5 \cdot (-1{,}2) = -6$ **D)** $0{,}25 \cdot 42 = 10{,}5$
E) $\sqrt{9 + 81} = \sqrt{90} \approx 9{,}5$
Así pues, la única operación que da como resultado un número entero es **C).**

12.(B) Fíjate en el pentágono gris. La suma de sus ángulos debe ser $180º \cdot (5 - 2) = 540º$.
Así pues, $40º + 60º + 60º + x + 270º = 540º$ y, por lo tanto, $x = 540º - 430º = 110º$.



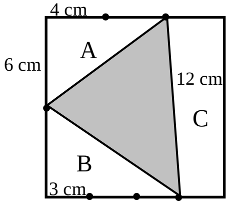
13.(C) Reconstruyamos la serie poco a poco:

	*e*	*d*	*c*	*b*	*a*	15	–6	–2	7	–1	4

Como $-2 = a + 15 + (-6)$ entonces $a = -11$.
Como $-6 = b + (-11) + 15$ entonces $b = -10$.
Como $15 = c + (-10) + (-11)$ entonces $c = 36$.
Como $-11 = d + 36 + (-10)$ entonces $d = 15$.
Como $-10 = e + 15 + 36$ entonces $e = -61$.
Y por fin, como $36 = f + (-61) + 15$, entonces el número que se comió Comenúmeros en último lugar fue el 82.

14.(A) Si vamos poco a poco fijándonos en la tabla, todos podemos **Delitar**:
{1 Δ [**(2 Δ 3)** Δ 4]}Δ 5 = {1 Δ **[2 Δ 4]**}Δ 5 = **{1 Δ 5}** Δ 5 = **3 Δ 5** = 5.

15.(E) Como el área es 144 cm^2, los lados del cuadrado miden 12 cm.
En lugar de calcular el área del triángulo vamos a calcular el área de cada zona blanca y después restaremos.



A es un triángulo rectángulo de catetos 6 y 8 y, por lo tanto, su área es 24 cm^2.
B es un triángulo rectángulo de catetos 6 y 9 y, por lo tanto, su área es 27 cm^2.
C es un trapecio rectángulo de bases 3 cm y 4 cm y altura 12 cm y, por lo tanto, su área es $\frac{3+4}{2}\cdot 12 = 42$ cm^2.
Así pues, el área del triángulo gris es 144 – (24 + 27 + 42) = 51 cm^2.

16.(E) Observa que los números que ocupan posiciones pares en la secuencia son potencias de 2: 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, … y el número que está delante es una potencia de 2 menos 1. Las primeras potencias de 2 son: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024,… así que el único número que aparecerá es 1024 – 1 = 1023.

17.(B) En total hay $18\cdot 12\cdot 10 - 6^3 = 6^3\cdot 10 - 6^3 = 6^3\cdot 9$ m^3 de agua. Como el área de la base de la piscina es $18\cdot 12 = 6^3$ m^2, el agua llegará a una altura de 9 m.

18.(D) Como 30 = 2·3·5, solo hay cuatro posibilidades:
30 = 2·3·5 y la suma de los factores es 10.
30 = 1·2·15 y la suma de los factores es 18.
30 = 1·3·10 y la suma de los factores es 14
30 = 1·5·6 y la suma de los factores es 12.
El número que sobra es el 16.

19.(A) Para calcular las probabilidades escribamos todos los casos favorables.
P = "que salga par o múltiplo de 5" = {2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15}.
La probabilidad de P es $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.

Q = "que salga impar" = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15}. La probabilidad de Q es $\frac{8}{15}$.

R = "que salga múltiplo de 3 o que acabe en 0" = {3, 6, 9, 10, 12, 15}. $p(R) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

Como $\frac{6}{15} < \frac{8}{15} < \frac{9}{15}$, el orden es RQP.

20.(D) El cuadrado tiene 30 palitos de lado así que para hacerlo necesitará 30·4 =120 palillos. Para el palito vertical necesita 31 palillos y para el inclinado 30. En total usó 120 + 31 + 30 = 181 palillos.

21.(D) Pongamos los paréntesis en todas las que se nos ocurra y si solo nos queda una habremos terminado:
A) $2\cdot(3+1)\cdot 5=40$ **B)** $7-(2-1)=6$ **C)** $(4+3)\cdot 2=14$ **E)** $4\cdot(1+2+3)=24$
D) $-2\cdot 3-5=-4$ es la única cuenta para la que no se me ocurre nada.

22.(B) El 42% de 37 lados son (42·37)/100 = 15,54. Así pues, Caracolito ha recorrido 15 lados completos (y más de la mitad de otro).

23.(B) Para hacer las cuentas fáciles, supongamos que los lados del cuadrado inicial miden 100 unidades (cm, palmos, …. Da igual).
Tras el paso de Sara los lados horizontales miden 120 unidades y los verticales 80.
Ahora viene Julia que deja los horizontales a 0,8 · 120 = 96 unidades y los verticales a 1,2 · 80 = 96 unidades.
Así que al final queda un cuadrado un poco más pequeño que el inicial.

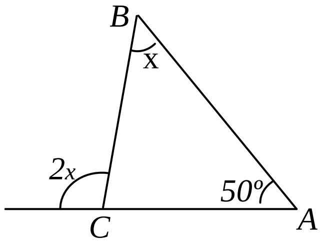
24.(C) Tras observar un rato la resta me he dado cuenta de que la resta que da el menor resultado positivo es 963 – 961 = 2. Así que la suma de los números que se ha comido nuestro amigo es 7 + 5 + 1 + 4 + 7 + 8 = 32.

25.(E) El número tiene que ser de la forma | $a+3$ | a | con a y $a+3$ números de dos cifras.
Como $a+3$ debe ser mayor que 9, a debe ser mayor que 6 y como $a+3$ debe ser menor de 100, a debe ser menor que 97. Así que hay 90 valores posibles para a: del 7 al 96.

XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel III

1. (B) $2x$ y $x + 50º$ son suplementarios del ángulo $\hat{C}$ del triángulo, y por tanto son iguales.
Así, $2x = x + 50º$, luego $x = 50º$.

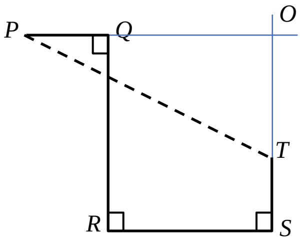


2. (C) Si pasa por los puntos $A(2, 7)$ y $B(a, 3a)$ la pendiente es $\frac{3a-7}{a-2}=2$, y por tanto,

$3a - 7 = 2(a - 2)$, de donde $a = 3$.

3. (E) Alargamos las líneas PQ y TS hasta encontrarse en *O*. Como $PQ = 4$ y $RS = 8$, entonces $PO = 12$. Como $QR = 8$ y $ST = 3$, $OT = 5$.

La distancia de *P* a *T* es $\sqrt{12^2+5^2}=13$.



4. (C) $\frac{1}{6}=\frac{2}{12}=\frac{4}{24}=\frac{6}{36}=\frac{8}{48}=\frac{10}{60}$; $\frac{1}{4}=\frac{3}{12}=\frac{6}{24}=\frac{9}{36}=\frac{12}{48}=\frac{15}{60}$. Solo $\frac{5}{24}$ está comprendida entre las dos fracciones.

5. (A) $N=10^{100}\cdot 100^{10}=10^{100}\cdot 10^{20}=10^{120}$. El 1 está seguido de 120 ceros.

6. (E) mcm(20, 16 y 2016) = 2016 · 5 =10 080 (empleamos que el mcm debe ser múltiplo de 2016 y deberemos añadirle los factores primos novedosos en 20 y 16, pero como 2016 = 2000 + 16 es múltiplo de 16, solo debemos aportar un 5.

7. (E) Si sumamos a su vez las sumas por parejas, 998 + 1050 + 1234 = 3282, habremos sumado los tres números dos veces, luego la suma de los tres será la mitad, 1641. Si a la suma de los tres le quitamos cada una de las sumas por parejas obtenemos los números por separado.
El mayor es, 1641 – 998 = 643 y el menor, 1641 – 1234 = 407. La diferencia de ambos es 236.

8. (D) El primer mensajero enviado de vuelta al castillo llega al castillo hora y media después de haber salido (en la primera hora, acompañando al rey recorrió 5 km, y luego los tuvo que hacer de vuelta, empleando en ello media hora). De igual forma el mensajero *n* acompaña al rey durante 5*n* km, y luego los recorre de vuelta, tardando en total $\left(n+\frac{n}{2}\right)$ horas.
La diferencia en horas entre el mensajero n y el (*n* – 1), es de hora y media.

9.(D) Si el producto final es 36 y uno de ellos es 3, el producto de los dos dígitos no borrados es 12. Doce puede ser expresado como producto de dos dígitos como 3·4 o como 2·6. Pero los tres dígitos finales son también distintos y eso excluye que sean, 3, 4 y 3. Así los dos no borrados son 2 y 6 y el tercero 7.

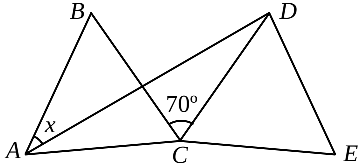
10. (B) Si la media de, 4, *a*, *b* y 22 es 13, su suma es 52 y así $a + b = 26$. Pero por el orden entre ellos y por ser enteros, $5 \le a < b \le 21$. Empezamos en la pareja (5, 21) y acabamos en la (12, 14). Luego hay 12 – 5 + 1 = 8 posibles parejas.

11. (B) Si $\frac{x-y}{x+y}=9$ y $\frac{x\cdot y}{x+y}=-60$, cambiando $x + y$ por *a*, tendremos que:

$\begin{cases} x-y=9a \\ x\cdot y=-60a \end{cases}$ y también $\begin{cases} x-y=9a \\ x+y=a \end{cases}$, de donde $x = 5a$, $y = -4a$.

Así, $x \cdot y = -20a^2 = -60a$, y así $a = 0$ (no vale ya que *a* de partida aparece como denominador) o $a = 3$.
De resultas, $x = 15$, $y = -12$ y $(x + y) + (x - y) + (x\cdot y) = 3 + 27 - 180 = -150$.

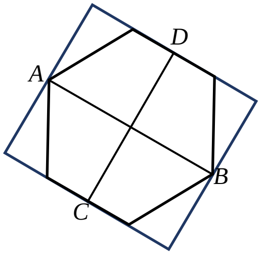
12. (D) Aparece como triángulo clave el *ACD*, que es isósceles y cuyo ángulo distinto mide 70º + 60º, luego los iguales son de 25º. Así *x* resulta ser, 60º – 25º = 35º.



13. (D) Escribimos en forma de radical los diferentes números:

$\sqrt{20}\cdot\sqrt{17}=\sqrt{340}$; $\sqrt{20\cdot17}=\sqrt{5780}$; $20\cdot\sqrt{17}=\sqrt{6800}$; $\sqrt{201\cdot7}=\sqrt{9849}$; $\sqrt{2017}$

El más grande es el cuarto.
El problema podría ser resuelto con un pequeño cálculo mental:
$\sqrt{20}\cdot\sqrt{17}$, está entre 16 y 25; $\sqrt{20\cdot17}$, está entre 68 y 85 ; $20\cdot\sqrt{17}$, está entre 80 y 100 ; $\sqrt{201\cdot7}$, está entre 98 y 105 ; $\sqrt{2017}$ está entre 44 y 45.



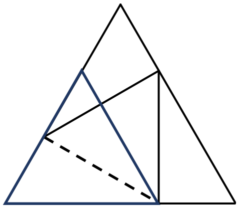
14. (B) Las líneas *AB* y *CD* son perpendiculares, y así su producto equivale al área del rectángulo que hemos circunscrito al hexágono regular. El hexágono puede ser dividido en seis triángulos equiláteros iguales y el rectángulo equivale a ocho de ellos. Si el área del hexágono es 60, la del rectángulo es 80.

15. (D) Si hay *m* chicos y *n* chicas, y *p* y *q* son las notas medias respectivas de ambos grupos, tenemos que $\frac{m\cdot p+n\cdot q}{m+n}+1{,}2=\frac{m\cdot(p+3)+n\cdot q}{m+n}$. Quitando denominadores nos queda, $(m\cdot p + n\cdot q)+ 1{,}2(m + n) = m(p + 3) + n\cdot q$, y operando tendríamos que, $(m + n)\cdot1{,}2 = 3m$; $1{,}2\cdot n =1{,}8\cdot m$, y así $\frac{n}{m}=\frac{3}{2}$, y $\frac{n}{m+n}=\frac{3}{2+3}=\frac{3}{5}=60\ \%$

16. (C) La suma 1 + 2 + 3 +…+ *n* es igual a $\frac{(n+1)\cdot n}{2}$ (la mitad del producto de un natural por su consecutivo). Si queremos que se aproxime a 1000 tendremos que buscar un natural tal que su cuadrado se aproxime a 2000. Hallamos la raíz cuadrada de 2000 que es 44 y pico. El cuadrado de 44 es 1936 y si le sumamos 44 no llega a 2000 (sin embargo el cuadrado de 45 pasa ya de 2000).

17. (D) Para hallar el número de divisores de un número se descompone en factores primos y se hace el cálculo de coger los exponentes de los factores primos diferentes, aumentarlos en una unidad y multiplicarlos. Como buscamos números menores que 100, estos pueden tener hasta seis doses, no más de cuatro treses, a lo más dos cincos, o dos sietes. Por tamaño es mejor tener al menos tantos doses como treses, o tantos treses como cincos o sietes. Como $2\cdot3\cdot5\cdot7$ pasa de 100 vamos a partir de dos doses y ver como los acompañamos. 2^6 tiene 7 divisores; $2^5\cdot3$ tiene 12 divisores; $2^4\cdot3$ y $2^4\cdot5$ tienen 10 divisores; $2^3\cdot3^2$ tiene 12 divisores; $2^2\cdot3\cdot5$ y $2^2\cdot3\cdot7$ tienen 12 divisores.

18. (C) Conviene darse cuenta que el lado del pequeño es altura de un triángulo equilátero, que está en proporción lineal de 2:3 con el triángulo mayor. Si 12 es la altura, el lado es $\frac{24}{\sqrt{3}}$ (solución positiva de $12^2 = m^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2$), y el lado buscado es $\frac{24}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} = 12\sqrt{3}$.



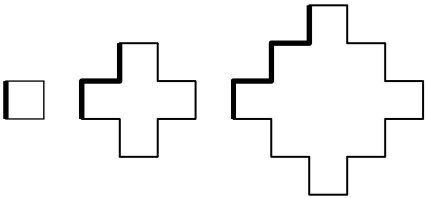
19. (C) $\begin{cases} a + \sqrt{2}\, b = \sqrt{2} \\ \sqrt{2}\, a + b = \sqrt{2} \end{cases}$. El sistema es lineal, simétrico y de solución única, luego $a = b$.

Por lo tanto $a + \sqrt{2}\, a = \sqrt{2}$, y así $a = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}{2-1} = 2 - \sqrt{2}$.

20. (C) Empezamos la búsqueda:

2017 = 2016 +1, ($\sqrt{2016}$ está entre 44 y 45); $44^2 + 9^2 = 1936 + 81 = 2017$ (esta es la suma buscada). Las bases son 44 y 9 y su suma es 53..

21. (E) El primer cuadrado tiene 4 cm de perímetro. El segundo 12 y el tercero 20. Los perímetros van aumentando de 8 en 8 (son, en cm, cuatro veces los palitos de la escaleras dibujadas en línea gruesa) y por tanto siguen una fórmula 8*n* + *b*.

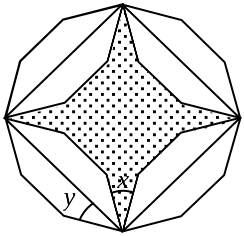


Para hallar *b*, basta con ajustar la fórmula para *n* = 1. $8 \cdot 1 + b = 4 \Rightarrow b = -4$ y $a - b = 12$.

22. (C) Para que se conserven las dos últimas cifras debe conservarse la última. Al elevar al cuadrado se conservan las terminaciones, 0, 1, 5, y 6. Como hablamos de terminaciones de dos cifras en una multiplicación, podemos restringirnos a números de dos cifras. La terminación 00 es la única acabada en 0 que se conserva al cuadrado. La penúltima cifra de $(n\cdot 10+1)^2 = n^2\cdot 100 + 20n + 1$, es la final de 2*n*, y solo coinciden si *n* =0. La terminación de dos cifras de $(n\cdot 10+5)^2$ es 25. La penúltima cifra de $(n\cdot 10+6)^2$ es la última de 2*n* + 3, y solo coinciden si *n* =7. Así que se conservan al elevar al cuadrado las terminaciones, 00, 01, 25 y 76.

23. (D) El ángulo del dodecágono regular mide $180^{\circ}-\frac{360^{\circ}}{12}=150^{\circ}$.

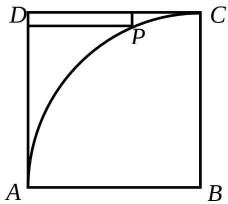
El ángulo "*y*" mide la mitad de 150º – 90º, es decir 30º. El ángulo *x* mide 150º – 4*y* es decir 30º.



24. (C) El número $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdot 7^7$ es múltiplo de 4, y no de 8. Al dividir por 8 el resto es 4.

25. (E) Sea *r* el lado del cuadrado.

Así, $PB^2 = r^2 = (r-1)^2 + (r-8)^2$. Y trabajando en la ecuación, llegamos a $r^2 - 18r + 65 = 0$, cuyas soluciones son 5 y 13.
La solución 5 no es posible, ya que es inferior a 8.



XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel IV

1. (D) Al aparecer en el enunciado $\log_2(-x)$, x debe ser negativo, pero como también aparece $\log_2 \sqrt{x-1}$, x – 1 sería, en ese caso, negativo, por lo que no hay ningún número real solución de la ecuación.

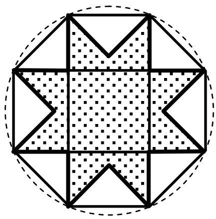
2. (C) Como $2^x = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{n}}$, tenemos $2^{x \cdot n} = 2^{-3} \Rightarrow x \cdot n = -3$.

3. (E) El mayor factor primo que puede tener cualquier número de los buscados es 23, pues si aparece el siguiente primo, 29, resultaría que el menor número producto de tres primos, uno de cuyos factores sea 29, es $2 \cdot 2 \cdot 29$, que es mayor que 100.
Así pues, hay que ver cuántos números menores que 100 son producto de tres primos de la lista: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.
La mejor forma de contarlos es ir escribiendo ordenadamente tres factores, de forma que cada factor sea mayor o igual que el que está a su izquierda.

$2 \cdot 2 \cdot 2,\ 2 \cdot 2 \cdot 3,\ 2 \cdot 2 \cdot 7, \ldots,\ 2 \cdot 2 \cdot 23$ (9 números)
$2 \cdot 3 \cdot 3,\ 2 \cdot 3 \cdot 5,\ 2 \cdot 3 \cdot 7, \ldots,\ 2 \cdot 3 \cdot 13$ (5 números)
$2 \cdot 5 \cdot 5,\ 2 \cdot 5 \cdot 7,\ 2 \cdot 7 \cdot 7$ (3 números)
$3 \cdot 3 \cdot 3,\ 3 \cdot 3 \cdot 5,\ 3 \cdot 3 \cdot 7,\ 3 \cdot 3 \cdot 11,\ 3 \cdot 5 \cdot 5$ (5 números)

En total obtenemos 22 números.

4. (A) Una forma cómoda es restar al área del octógono la suma de las áreas de los ocho triángulos rectángulos isósceles blancos.
Al trazar las cuatro diagonales que se indican en la figura adjunta, el octógono se descompone en: un cuadrado de lado 4, cuatro triángulos rectángulos isósceles de catetos $2\sqrt{2}$ y cuatro rectángulos de lados 4 y $2\sqrt{2}$.



Así pues, el área pedida es: $4^2 + 4\left(4 \cdot 2\sqrt{2}\right) + 4\left(\frac{1}{2} \cdot \left(2\sqrt{2}\right)^2\right) - 8\left(\frac{1}{2} \cdot \left(2\sqrt{2}\right)^2\right) = 32\sqrt{2}$.

5. (A) Al ser $z = 1_{45^\circ}$ resulta que $z^4 = -1$ y que $z^5 = -z,\ z^6 = -z^2,\ z^7 = -z^3,\ z^8 = -z^4$.
Así que la suma pedida es: $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 - z - z^2 - z^3 - z^4 = 1$.

6. (D) La suma pedida es $S = 1{\cdot}2 + 1{\cdot}3 + \ldots 1{\cdot}10 + 2{\cdot}3 + 2{\cdot}4 + \ldots + 2{\cdot}10 + \ldots + 9{\cdot}10$ y utilizando el hecho de que: $(1+2+\ldots+10)^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + 10^2 + 2\cdot S$, resulta que:

$$55^2 = 385 + 2S \Rightarrow S = \frac{1}{2}\left(55^2 - 385\right) = 1320\,.$$

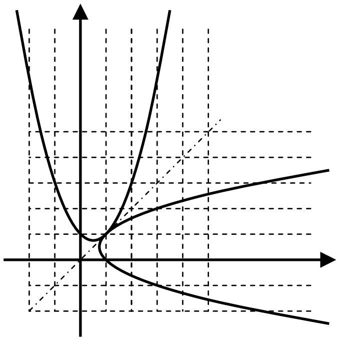
7. (D) Efectuando la división obtenemos $\dfrac{3x^2 - 5x + 1}{x-2} = 3x + 1 + \dfrac{3}{x-2}$, por lo que la recta $y = 3x + 1$ es asíntota de dicha gráfica.

8. (B) Si (x, y) es solución del sistema, restando, obtenemos: $y - x = x^2 - y^2 - x + y$, es decir $x^2 = y^2$. Así pues:

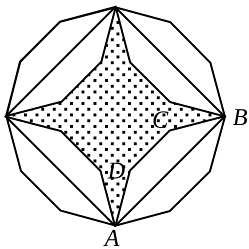
- Si $x = y$ en la primera ecuación obtenemos $x = x^2 - x + 1 \Rightarrow x = 1$, es decir, la solución es (1, 1).
- Si $x = -y$ resulta en dicha ecuación $-x = x^2 - x + 1 \Rightarrow x^2 = -1$ sin solución real.

Por lo tanto la única solución del sistema es (1, 1).

Representando gráficamente las dos parábolas, simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante, se observa claramente que la solución única es (1, 1).



9. (A) Restamos al área del cuadrado inscrito la suma de las áreas de los cuatro trapecios isósceles (en blanco). Como el ángulo interior de un dodecágono regular es 150º, el ángulo agudo de cada trapecio es 30º, así que su base mayor, que es el lado AB del cuadrado, es:

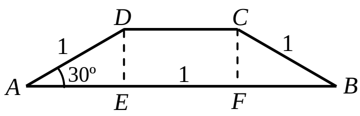


$$AB = AE + EF + FB = 1 + 2\left(1\cdot\cos 30^{\text{o}}\right) = 1 + \sqrt{3}$$

y su altura $DE = 1\cdot sen 30^{\text{o}} = \dfrac{1}{2}$.

Por lo tanto el área de la estrella es:

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^2 - 4\cdot\frac{1+\sqrt{3}+1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 2 + \sqrt{3}.$$



10. (B) En cada sorteo la probabilidad de no llevarme premio es $\frac{9}{10}$ y al jugar n sorteos la probabilidad de no obtener premio en ninguno es $\left(\frac{9}{10}\right)^n$, por lo que la probabilidad de llevarme premio es $1-\left(\frac{9}{10}\right)^n$. Como nos piden encontrar el menor n para que

$1-\left(\frac{9}{10}\right)^n > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^n < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\cdot 9^n < 10^n$.

Si n = 4, $2\cdot 9^4 = 2\cdot 81^2 > 2\cdot 80^2 = 2\cdot 6400 = 12\,800 > 10^4$

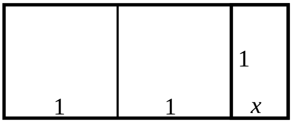
Si n = 5, $2\cdot 9^5 = 2\cdot 59049 > 10^5$. Si n = 6, $2\cdot 9^6 = 2\cdot\left(9^3\right)^2 = 2\cdot 729^2 = 1062882 > 10^6$.

Pero si n = 7, $2\cdot 9^7 = 9\,565\,938 < 10^7$. Así que jugando 7 veces tengo probabilidad mayor que $\frac{1}{2}$ de llevarme premio.

11. (B) Si $z_1 = 2+3i = \left(\sqrt{13}\right)_\beta$ es una raíz cuarta de $z = 169_{4\beta}$ entonces también lo serán $z_2 = \left(\sqrt{13}\right)_{\beta+90°} = z_1\cdot 1_{90°} = (2+3i)\cdot i = -3+2i$, $z_3 = z_1\cdot 1_{180°} = (2+3i)\cdot(-1) = -2-3i$ y $z_4 = z_1\cdot 1_{270°} = (2+3i)\cdot(-i) = 3-2i$.

De las propuestas solamente $3-2i$ es solución.

12. (B) Llamando x a la longitud del menor de los lados del rectángulo pequeño, resulta que el lado largo del rectángulo original es $2+x$ y por semejanza tenemos, $\frac{2+x}{1} = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$ cuyas soluciones

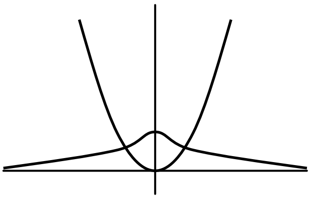


son $x = -1 \pm \sqrt{2}$ y solo la positiva, $x = -1+\sqrt{2}$ tiene sentido.

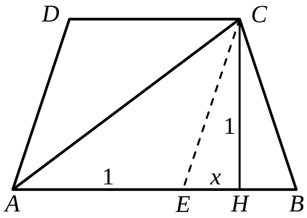
Por lo tanto la longitud del lado pedido es $2+\left(-1+\sqrt{2}\right) = 1+\sqrt{2}$.

13. (C) Esbozando las gráficas de ambas funciones vemos que hay dos puntos de corte.

También podríamos haber llegado a esa conclusión resolviendo el sistema formado con las ecuaciones de las dos funciones.



14. (B) Trazando el segmento *CE* paralelo a *DA* y la altura *CH*, como muestra la figura, podemos tomar *DC* = *CH* = *AE* como la unidad y llamar *x* al segmento *EH*.



En este caso la diagonal es *AC* = *AB* = 1 + 2*x* y en el triángulo rectángulo *AHC* se verifica que, $(1+2x)^2 = (1+x)^2 + 1^2 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0$ cuyas soluciones son $x_1 = -1;\ x_2 = \frac{1}{3}$ y solo tiene sentido la positiva. Por lo tanto $AB = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ y $\frac{AB}{DC} = \frac{\frac{5}{3}}{1} = \frac{5}{3}$.

15. (A) Escribiendo $f(x) = \frac{sen^3 x \cdot cos\, x}{1 + tg^2 x}$ como

$$f(x) = \frac{sen^3 x \cdot cos\, x}{\frac{1}{cos^2 x}} = sen^3 x \cdot cos^3 x = \frac{1}{8}(2\, sen\, x\ cos\, x)^3 = \frac{1}{8}(sen 2x)^3$$ podemos observar que el máximo de la función se alcanza cuando *sen*2*x* = 1 y en este caso, $Máx(f(x)) = \frac{1}{8}$.

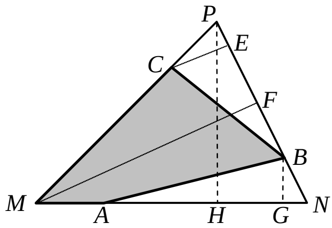
16. (A) Al lanzar 6 dados, distinguibles, hay $VR_6^6 = 6^6$ casos posibles que puede presentar la cara superior de los 6 dados.

De todas estas posibilidades hay P_6 = 6! casos en los que las caras superiores son distintas, así que la probabilidad pedida es,

$$p = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6^6} = \frac{20}{6^4} = \frac{20}{1296} < \frac{20}{1000} = 0{,}02\,.$$

17. (A) Con la primera igualdad podemos escribir que $(x+y)^2 = 84 + xy$ y con la segunda $(x+y)^2 = 36 + xy + 12\sqrt{xy}$.

Igualando ambas expresiones se obtiene $84 + xy = 36 + xy + 12\sqrt{xy}$ y de aquí $12\sqrt{xy} = 48 \Rightarrow \sqrt{xy} = 4 \Rightarrow xy = 16$.

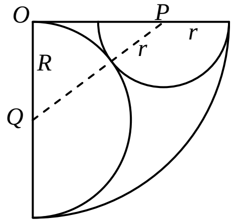


18. (D) Llamando S al área del triángulo MNP la del triángulo ANB será $\frac{3}{16}S$ ya que su base $AN = \frac{3}{4}MN$ y su altura $BG = \frac{1}{4}PH$. Análogamente $S_{PCB} = \frac{3}{16}S$ puesto que $BP = \frac{3}{4}NP$ y $CE = \frac{1}{4}MF$.

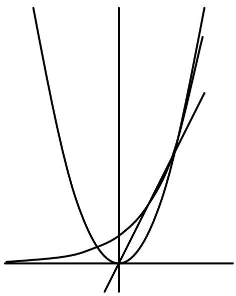
Restando al área del triángulo MNP la de los triángulos ANB y PCB obtenemos el área del cuadrilátero $MABC$. $S_{MABC} = S - \frac{3}{16}S - \frac{3}{16}S = \frac{5}{8}S$

19. (A) Consideramos los sucesos
B_1 : "La primera bola extraída es blanca"
B_2 : "La segunda bola extraída es blanca"
N_1: "La primera bola extraída es negra"
Entonces $p(B_2) = p[(B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap B_2)] = p(B_1 \cap B_2) + p(N_1 \cap B_2)$.

$$p(B_2) = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{m+k}{m+n+k} + \frac{n}{m+n} \cdot \frac{m}{m+n+k} = \frac{m(m+n+k)}{(m+n)(m+n+k)} = \frac{m}{m+n}$$



20. (E) Sean P y Q los centros de las dos semicircunferencias que están alineados, obviamente, con el punto de tangencia. Como el radio del cuadrante es 4 entonces $R = PQ = 2$. En el triángulo rectángulo OPQ, $PQ^2 = OQ^2 + OP^2$ es decir, $(2+r)^2 = 2^2 + (4-r)^2 \Rightarrow 6r = 4 \Rightarrow r = \frac{2}{3}$



21. (E) Con la ayuda de las gráficas de las funciones podemos decir que:

1: tiene soluciones en (2, 3), 2: tiene soluciones en (0, 1)

4: tiene soluciones en (–3, –2), 6: tiene soluciones en (9, 10)

pero en cambio las desigualdades 3 y 5 no se verifican para ningún número real.

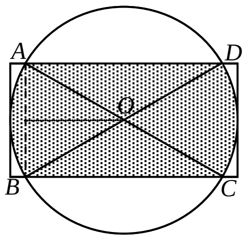
22. (A) $10-3\sqrt{11}=\dfrac{100-99}{10+3\sqrt{11}}=\dfrac{1}{10+3\sqrt{11}}$; $8-3\sqrt{7}=\dfrac{1}{8+3\sqrt{7}}$; $5-2\sqrt{6}=\dfrac{1}{5+2\sqrt{6}}$

$9-4\sqrt{5}=\dfrac{1}{9+4\sqrt{5}}$; $7-4\sqrt{3}=\dfrac{1}{7+4\sqrt{3}}$. La menor será aquella que tenga el mayor denominador.

Son claras las desigualdades $10+3\sqrt{11}>8+3\sqrt{7}>5+2\sqrt{6}$ y $9+4\sqrt{5}>7+4\sqrt{3}$ entonces solo falta comprobar cuál es mayor si $10+3\sqrt{11}$ o $9+4\sqrt{5}$.

$10+3\sqrt{11}>10+3\sqrt{9}=19$. $9+4\sqrt{5}<9+4\sqrt{6{,}25}=9+4\cdot 2{,}5=19$ luego $10+3\sqrt{11}>19>9+4\sqrt{5}$ y se concluye que el número menor es $10-3\sqrt{11}$.

23. (A) El triángulo *AOB* es equilátero de lado *AO* = 6, por lo que el ángulo $A\hat{O}B$ = 60º. La figura se compone de dos sectores circulares de 60º de amplitud y dos triángulos isósceles, *ADO* y *BCO*.

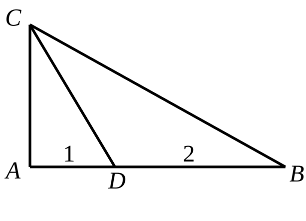


La altura del triángulo equilátero de lado 6 es $3\sqrt{3}$ por lo que $AD=6\sqrt{3}$ y el área del triángulo *ADO* es $\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{3}\cdot 3=9\sqrt{3}$.

El área del sector circular es $\frac{1}{6}\pi 6^2=6\pi$.

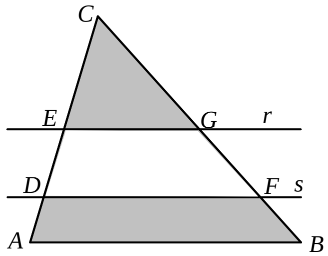
Así pues, el área pedida es: $2\left(6\pi+9\sqrt{3}\right)=12\pi+18\sqrt{3}$.

24. (C) El teorema de la bisectriz nos dice que $\dfrac{CA}{AD}=\dfrac{CB}{DB}$



es decir, si a = *AC*, $\dfrac{a}{1}=\dfrac{CB}{2}\Rightarrow CB=2a$.

Entonces, en *ABC*, $4a^2=a^2+3^2\Rightarrow a^2=3.$ y en *ADC*, $CD^2=a^2+1^2=4\Rightarrow CD=2$.



25. (D) Tomando $AD = 1$ entonces $DC = 4$ y $AC = 5$.
Los triángulos CDF y CAB son semejantes con razón de semejanza $k = \frac{DC}{AC} = \frac{4}{5}$ y razón de las áreas $k^2 = \frac{16}{25}$.

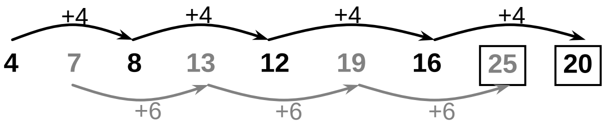
Luego $S_{CDF} = \frac{16}{25} S_{CAB}$ y el área del trapecio $ABFD$ es $\frac{9}{25} S_{CAB}$ que es el área del triángulo CEG.

Los triángulos CEG y CAB también son semejantes y la razón de sus áreas es $\frac{9}{25}$ luego la razón de semejanza es $\frac{3}{5}$. Esto nos indica que $\frac{CE}{CA} = \frac{3}{5}$ y como $CA = 5$ entonces $CE = 3$ y $EA = 2$. Como consecuencia $\frac{CE}{EA} = \frac{3}{2}$.

XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel I

1. (D) En la serie, los números pares se obtienen sumando 4 al número par anterior; los números impares se obtienen sumando 6 al anterior número impar; de esta forma los dos números siguientes de la serie son: 25 y 20
19 + 6 = 25; 16 + 4 = 20



2. (D) Un metro tiene 100 centímetros. 100 : 2 = 50 trozos de 2 centímetros. Cada corte proporciona un trozo de 2 cm y en el corte 49 obtiene dos trozos de 2 cm.
La cinta queda cortada en 49 días.

3. (B) En la recta dibujada se obtienen 15 segmentos. Son los siguientes: AB, AC, AD, AE, AF, BC, BD, BE, BF, CD, CE, CF, DE, DF y EF
Una tabla de doble entrada como la que se muestra facilita el conteo de segmentos.

	A	B	C	D	E	F
A		AB	AC	AD	AE	AF
B			BC	BD	BE	BF
C				CD	CE	CF
D					DE	DF
E						EF
F						

4. (D) La miel pesa el doble que la leche, entonces, leche + leche + tarro = 500 g
Como la leche más el tarro pesan 350 g, se deduce que la leche pesa:
500 – 350 = 150 g
El tarro pesa 350 – 150 = 200 g

5. (A) Primero, calculamos el número de cifras que tiene el libro de 86 páginas.
- Número de cifras de las páginas 1 a 9……..… 9 cifras
- Número de cifras de las páginas 10 a 79……140 cifras
- Número de cifras de las páginas 80 a 86…….14 cifras

TOTAL: 163 cifras

Después, contamos los números que contienen la cifra 7. En estos 17 números: 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78 y 79, hay 18 sietes.:
Por último, restamos 18 al número total de cifras.
163 – 18 = 145 cifras comió Comenúmeros.

6. (C) Solo se pueden construir triángulos que cumplan que la longitud de cada lado de un triángulo tiene que ser mayor que la diferencia de las longitudes de los otros dos lados y menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados.
Con estas condiciones y con los datos dados se pueden construir siete triángulos cuyos lados medirán: a) 3, 3 y 3; b) 3, 3 y 5; c) 3, 5 y 5; d) 5, 5 y 5; e) 10, 10 y 10; f) 10, 10 y 3; g) 10, 10 y 5.

7. (D) Primero, se expresa en gramos el peso del cordero: 3 kg 600 g = 3600 g
Después, se calcula la pérdida de peso durante el asado:
$\frac{2}{3}$ de 3.600 = $\frac{2}{3} \cdot 3600 = 2400\text{ g}$
Por último, se calcula la cantidad que comió cada uno de los afortunados:
2400 : 8 = 300 g
María comió 300 gramos de cordero.

8. (D) Para los escolares de Primaria, se sugiere que la resolución del problema se proponga de forma experimental y que no se utilicen contenidos de combinatoria.

Al lanzar cuatro dados cuya suma de puntos sea 15 se obtienen estos once resultados:
a) 6 – 6 – 2 – 1; b) 6 – 5 – 3 – 1; c) 6 – 5 – 2 – 2; d) 6 – 4 – 4 – 1;
e) 6 – 4 – 3 – 2; f) 6 – 3 – 3 – 3; g) 5 – 5 – 4 – 1; h) 5 – 5 – 3 – 2;
i) 5 – 4 – 4 – 2; j) 5 – 4 – 3 – 3; k) 4 – 4 – 4 – 3.

9. (E) Se busca el múltiplo de 8 y de 5 comprendido entre 100 y 150.
El múltiplo de 8 y de 5 mayor que 100 y menor que 150 es 120. Dilo comió 120 peces. Oso comió: 120 : 8 = 15 peces.
Restando 15 a 120 se halla el número de peces que comió Dilo más que Oso.
120 – 15 = 105 peces comió más Dilo que Oso

10. (C) La suma actual de las edades de los cuatro hijos del señor Carpanta se calcula restando cinco a 50 por cada hijo:
50 – 5 × 4 = 50 – 20 = 30
La suma actual de las edades de los cuatro hijos es 30. Dentro de dos años la suma de sus edades será: 30 + 2 × 4 = 30 + 8 = 38.

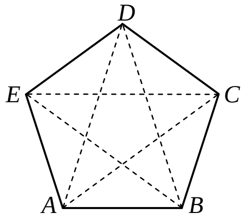
11. (A) El perímetro de un rectángulo es igual a dos veces la suma de las longitudes de la base y de la altura: $p = 2 \times (b + a)$. Por lo tanto $b + a = 12$ palillos.
Se pueden formar seis rectángulos de longitudes cuyas dimensiones son:

base	1	2	3	4	5	6
altura	11	10	9	8	7	6

12. (C) La diferencia que marcan los dos relojes de cada hora es de 20 segundos.
Una hora tiene $60 \times 60 = 3600$ segundos. $3600 : 20 = 180$ horas
Tienen que pasar 180 horas

13. (C) Primero, calculamos el área de la parte sombreada de cada una de las figuras, para ello lo mejor es restar a la superficie del cuadrado la de los triángulos en blanco.
Figura A = 36 – (3 + 1,5 + 6 + 7,5) = 36 – 18 = 18 u.c.
Figura B = 36 – (6 + 5 + 6) = 36 – 17 = 19 u.c.
Figura C = 36 – (6 + 3 + 3 + 6) = 36 – 18 = 18 u.c.
La única afirmación cierta es la C

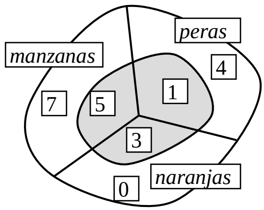
14. (E) Se pueden formar 10 triángulos que son los siguientes:
ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE.
(Para no olvidar o repetir alguno, están ordenados alfabéticamente)



15. (D) La altura de la matrioska más pequeña es igual a**:**

$$16 \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{81}{16} = 5{,}0625 \text{ cm} = 50{,}625 \text{ mm} \cong 50 \text{ mm}$$

16. (C) De las 9 frutas podridas que hay en la cesta, 5 son manzanas, 3 naranjas y, por tanto, 1 pera. Además, 9 frutas podridas + 7 manzanas sanas = 16 frutas. Faltan 4 frutas para completar las 20, que necesariamente tienen que ser peras para que su número sea mayor que el de naranjas. En la cesta hay 5 peras, 4 sanas y 1 podrida.
El esquema aclara la situación.



17. (B) Número de calcetines que hay en el cajón: 10 + 12 + 8 + 4 = 34 calcetines
Sacamos un calcetín, quedan: 34 – 1 = 33 calcetines en el cajón.
Número de calcetines azules que quedan en el cajón: 10 – 1 = 9
Probabilidad de sacar un calcetín azul = $\frac{9}{33}$ que simplificado es $\frac{3}{11}$.

18. (E) Si los jugadores son A, B y C y el que perdió la partida fue, por ejemplo, el A, al final de la partida A duplicó el dinero de B y de C.
Al comienzo de la partida, los jugadores B y C tenían 12 € cada uno, la mitad de 24 €, por lo que el jugador A pagó 12 euros más a cada uno, por tanto, el jugador A perdió 24 euros (12 + 12). El jugador A comenzó la partida con 48 euros, 24 que pagó a B y C más 24 con los que finalizó la partida.

19. (C) Sumamos los cubos de cada planta: 1 + 5 + 13 + 25 = 44
Se han usado 44 cubos

20. (E) Como la base es doble que su altura, el área del rectángulo se puede expresar así:
$50 = 2a \times a = 2a^2$ De aquí se deduce que $a^2 = 25$ y por lo tanto $a = 5$ cm y $b = 10$ cm.
Perímetro = $2(a + b) = 2(5 + 10) = 30$ cm

21. (A) El grosor de una hoja es $\frac{1}{10}$ de milímetro

1 m = 1 000 000 000 nm
1 mm = 1 000 000 nm
$\frac{1}{10}$ de mm = 1 000 000 : 10 = 100 000 nm
El grosor de una hoja es de 100 000 nanómetros

22. (A) Si le quedaron 3 quiere decir que Marco recibió otras 3. Después de darle a Hugo sus fracciones a Don Retorcido le quedaron 6 y eso quiere decir que a Hugo le dio otras 6.

23. (C) Para obtener la solución planteamos una tabla de doble entrada como la siguiente en la que hemos escrito los datos conocidos.

	Mujeres	Hombres	TOTAL
Llevan gafas			90
No llevan gafas			
TOTAL	130		200

Con los datos conocidos podemos completar la tabla:
- El número de hombres es: 200 – 130 = 70
- El número de hombres que llevan gafas es: 70 : 2 = 35
- El número de hombres que no llevan gafas es 35
- El número de mujeres y hombres que no llevan gafas es: 200 – 90 = 110
- El número de mujeres que no llevan gafas es: 110 – 35 = 75

	Mujeres	Hombres	TOTAL
Llevan gafas	55	35	90
No llevan gafas	**75**	35	110
TOTAL	130	70	200

24. (C) Calculamos la edad de Bisbís:
36 : 9 = 4. Bisbís tiene 4 años
Calculamos la edad de Guaguá:
$\frac{3}{2}$ de 4 = 6. Guaguá tiene 6 años
La suma de las edades de Guaguá y Bisbís es: 6 + 4 = 10

25. (A) Utilizando el método de ensayo y error, se buscan los números que empiezan por 1 y se obtienen ocho números; de la misma forma encontraremos otros ocho números que empiecen por 2, y otros ocho que empiecen por 3. Total: $8 \times 3 = 24$.

112 – 113 – 121 – 122 - 123 – 131 – 132 – 133
211 – 212 – 213 – 221 – 223 – 231 – 232 – 233
311 – 312 – 313 – 321 – 322 – 323 – 331 – 332

XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel II

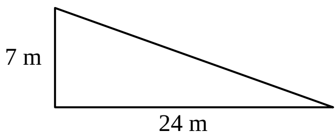
1. (A) No nos queda otra que operar:
A) (20 – 17)·(20 + 17) = 3·37 = 111
B) 201 + 7·20 + 17 = 201 + 140 + 17 = 358
C) 20·17 – (201 + 7) = 340 – 208 = 132
D) 20·(1 + 7) – 20 – 17 = 20·8 – 20 – 17 = 160 – 20 – 17 = 123
E) 20 + 17 + 20 + 17 = 74
El resultado más cercano a 100 es el de la operación A.

2. (E) Sabemos que las pirámides de base cuadrada tiene 5 vértices y los prismas de base cuadrada tiene tres vértices más, es decir, 8 vértices. Si las 42 figuras fuesen prismas, contaríamos 8·42 = 336 vértices, o sea, nos pasaríamos en 336 – 288 = 48 vértices. Como por cada tres vértices que nos pasamos representa una pirámide, Alba tiene 48 : 3 = 16 pirámides.

3. (E) Si Esmeralda pensó que el melón pesaba 2 kg es porque la báscula marcó 2180 gramos, (2000 + 180). Por tanto, el peso real del melón es lo que marcó la báscula más 120 gramos, es decir, 2180 + 120 = 2300 gramos.

4. (A) En un triángulo rectángulo sabemos que su área podemos calcularla tomando un cateto como base y el otro como altura. Así pues:

$$\text{Área} = \frac{\text{CAT}\times\text{cat}}{2} \Rightarrow 84 = \frac{24\times\text{cat}}{2} \Rightarrow \text{cat} = 7\ \text{m}.$$

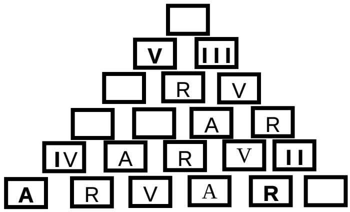


Y la hipotenusa la calculamos con nuestro querido teorema de Pitágoras:

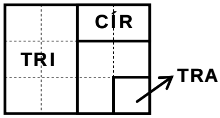
$$\text{hip}^2 = \text{CAT}^2 + \text{cat}^2 \Rightarrow \text{hip}^2 = 24^2 + 7^2 = 576 + 49 = 625 \Rightarrow \text{hip} = 25\,\text{m}.$$

5. (C) Operemos con el corazón:
I. $8 \heartsuit 2 - 2 \heartsuit 8 = 8\cdot(8+2) - 2\cdot(2+8) = 60 \qquad 6 \heartsuit 4 = 6\cdot(6+4) = 60$
(La afirmación I es cierta)
II. $4 \heartsuit b = 28 \Rightarrow 4\cdot(4+b) = 28 \Rightarrow 4 + b = 7 \Rightarrow b = 3$
(La afirmación II también es cierta)

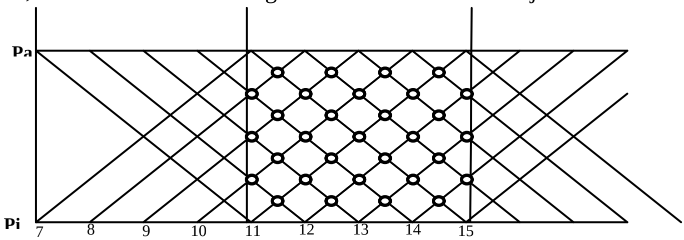
6. (D) No nos quedemos parados, solo hay que probar. El ladrillo I puede ser Rojo o Verde. Si supones que es Rojo, verás que al ir asignando los colores a los ladrillos de la pared, llegas a una situación no válida. Así que ha de ser Verde. De esta manera se llega a la solución válida: V–A–A.



7. (B) Si representamos mediante un rectángulo las figuras que tiene Don Retorcido, vemos que un cuadradito contiene 20 figuras.
Así pues, hay 6·20 = 120 triángulos.



8. (B) En efecto, este problema es un poco trastornante. Hay más cruces de los que parece en un principio, ten en cuenta que hay cruces a las horas en punto y a las medias.
Por suerte, cuando Juan Jesús navegó de Pi a Pa hizo este dibujo:



Se producen 31 cruces.

9. (E) ¿Qué número hay que sumar a –7 para obtener –1? – 7 + P = –1, P = 6.
¿Qué número hay que restar a –5 para obtener 4? – 5 – Q = 4, Q = –9.
¿Qué número hay que restar a 9 para obtener –4? 9 – R = –4, R = 13.
La suma de P, Q y R es 6 + (–9) + 13 = 10

10. (A) Don Retorcido empezó con una hoja de 40 cm x 20 cm y, después de sus dos primeros cortes pasó a tener cuatro piezas de 20 cm x 10 cm. Por último, acabó con dieciséis hojitas de 10 cm x 5 cm, por lo que el perímetro total final es $16\cdot(10+10+5+5)=480$ cm.

11. (C) Si representamos con cuadraditos BLANCOS los versos que se saben y con cuadraditos NEGROS los que aún no se saben…

Ana: □□□ ■■

Berta: □□□ ■■■ ■■■

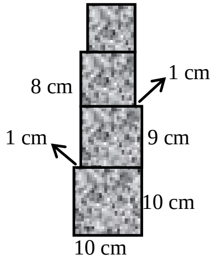
Carolina: ■■ ■■ ■■■ ■■■ ■■■ ■■■

Como los cuadraditos negros de Carolina representan a 48 versos, cada cuadradito son 48:16 = 3 versos.

Las amigas tenían que aprenderse un total de $(5+9+16)\cdot 3 = 90$ versos.

12. (C) El perímetro nos lo da esta cuenta:

$10+2\cdot(10+9+8+7+6+5+4+3+2+1)+10\cdot 1 = 130$ cm.



13. (B)

A	D	G	$21=3\cdot 7$
B	E	H	$60=2^2\cdot 3\cdot 5$
C	F	I	$288=2^5\cdot 3^2$
$112=2^4\cdot 7$	$72=2^3\cdot 3^2$	$45=3^2\cdot 5$	

El 7 podemos colocarlo fácilmente sin más que ver en qué fila y columna coinciden un factor 7.
Igual ocurre con el 5.

A=7	D	G	$21=3\cdot 7$
B	E	H=5	$60=2^2\cdot 3\cdot 5$
C	F	I	$288=2^5\cdot 3^2$
$112=2^4\cdot 7$	$72=2^3\cdot 3^2$	$45=3^2\cdot 5$	

Ahora vamos con el $8=2^3$. Su lugar debe ser C o F pero hay que descartar F porque si no, D o E deberían ser 9 y si miramos sus filas correspondientes vemos que no puede ser.

A=7	D	G	$21=3\cdot 7$
B	E	H=5	$60=2^2\cdot 3\cdot 5$
C=8	F	I	$288=2^5\cdot 3^2$
$112=2^4\cdot 7$	$72=2^3\cdot 3^2$	$45=3^2\cdot 5$	

Y ya podemos saber quiénes son B y E.

A=7	D	G	$21=3\cdot 7$
B=2	E=6	H=5	$60=2^2\cdot 3\cdot 5$
C=8	F	I	$288=2^5\cdot 3^2$
$112=2^4\cdot 7$	$72=2^3\cdot 3^2$	$45=3^2\cdot 5$	

Y ya terminamos: el 4 solo puede ser F y podemos rellenar toda la cuadrícula.

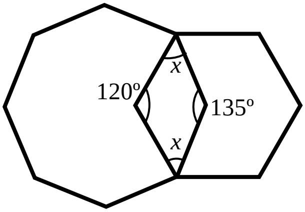
A=7	D=3	G=1	$21=3\cdot 7$
B=2	E=6	H=5	$60=2^2\cdot 3\cdot 5$
C=8	F=4	I=9	$288=2^5\cdot 3^2$
$112=2^4\cdot 7$	$72=2^3\cdot 3^2$	$45=3^2\cdot 5$	

14. (A) Si escribimos la multiplicación en la forma habitual es muy sencillo y entretenido ir averiguando los valores de las letras. Con un primer vistazo averiguamos que la E ha de valer 7. Y ya puedes seguir tú hasta que encuentres la solución. Piensa bien en las que te llevas cada vez.

$$\begin{array}{r} 1ABCDE \\ \times \quad\quad 3 \\ \hline ABCDE1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 142857 \\ \times \quad\quad 3 \\ \hline 428571 \end{array}$$

$A+B+C+D+E = 4+2+8+5+7 = 26$

15. (C) Cada ángulo de un octógono regular mide: $\dfrac{6\cdot 180^o}{8} = 135^o$.



Y cada ángulo de un hexágono regular mide $\dfrac{4\cdot 180^o}{6} = 120^o$.

Así pues, fijándonos en el cuadrilátero central podemos hallar el ángulo pedido, $x + x + 120^o + 135^o = 360^o \rightarrow x = 52{,}5^o$.

16. (E) Como mcm $(a, b) = 2^2\cdot 3$ y mcm $(a, c) = 3\cdot 5$, deducimos que, a la fuerza, $a = 3$. De esta manera, b solo puede tomar dos valores, $b = 2^2 = 4$ o $b = 3\cdot 4 = 12$ y con c ocurre algo similar, $c = 5$ o $c = 3\cdot 5 = 15$. La única suma imposible de $b + c$ es 7.

17. (A) Podemos llamar A, B, C a cada una de las tarjetas y A_1 y A_2 a cada una de las dos caras de la tarjeta A. Así vemos que al voltearlas hay ocho posibilidades:

$A_1\ B_1\ C_1 \quad A_1\ B_1\ C_2 \quad A_1\ B_2\ C_1 \quad A_1\ B_2\ C_2$

$A_2\ B_1\ C_1 \quad A_1\ B_1\ C_2 \quad A_1\ B_2\ C_1 \quad A_2\ \mathrm{B}_2\ C_2$

El enunciado nos dice que la suma total de todas esas caras que ahí aparecen es 120. Como cada cara aparece cuatro veces podemos deducir que la suma de las seis caras es 120:4 = 30.

Y terminamos, la suma de las caras que no se ven es 30 – (9 + 4 + 7) = 10.

18. (D) Si $\text{Área} = 100\pi\ \text{m}^2 \rightarrow 100\pi = \pi r_1^2 \rightarrow r_1^2 = 100 \rightarrow r_1 = 10\ \text{m}$

Si $\text{Perímetro} = 100\pi\ \text{m} \rightarrow 100\pi = 2\pi r_2 \rightarrow r_2 = 50\ \text{m}$

La diferencia entre sus radios son 40 metros.

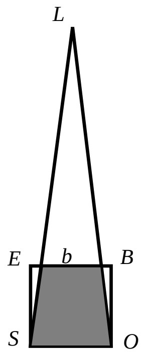
19. (B) La condición del enunciado dice que $\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2}{5}\cdot A = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{5}\cdot B$ y operando obtenemos que $\dfrac{3}{10}\cdot A = \dfrac{2}{5}\cdot B$, es decir, $15A = 20B$, por tanto, si dividimos todo entre 5 obtenemos la respuesta: $3A = 4B$.

20. (C) En el recinto **A** debemos colocar los números desde el 1 hasta el 20 que sean mayores que 11 y no sean múltiplos ni de 4 ni de 6.
¿Qué números son esos? Pues el 13, el 14, el 15, el 17 y el 19. Cinco números.

21. (D) Escribimos los tres números como potencias de exponente 17 y comparamos:
$P = 11^{51} = 11^{3\cdot 17} = (11^3)^{17} = 1331^{17}$ $\quad Q = 1317^{17}$ $\quad R = 37^{34} = 37^{2\cdot 17} = (37^2)^{17} = 1369^{17}$
Respondemos: $Q < P < R$.

22. (E) Este es un problema para recordar algunos cuadrados perfectos. Si escribimos entre paréntesis las teclas pulsadas y entre corchetes los números reales con los que se ha hecho la operación, tenemos:
$(12)\cdot(12) = 1156 = [34]\cdot[34] \Rightarrow (1) \to [3] \quad (2) \to [4]$
$(3)\cdot(3) = 81 = [9]\cdot[9] \Rightarrow (3) \to [9]$
$(45)\cdot(45) = 144 = [12]\cdot[12] \Rightarrow (4) \to [1] \quad (5) \to [2]$
$(67)\cdot(67) = 5625 = [75]\cdot[75] \Rightarrow (6) \to [7] \quad (7) \to [5]$
Las únicas teclas que quedan por pulsar son el (8) y el (9) y los únicos números por asignar son el [6] y el [8]. Por tanto, si pulso (8) es en realidad un [6] y si pulso (9) es en realidad un [8].

23. (A) Sabemos que el lado del cuadrado *BESO* mide 4 cm y, por tanto, la altura del triángulo *SOL* (como tiene área 32 cm^2) ha de medir 16 cm. Para calcular el área del trapecio nos falta saber la longitud *b* de su base menor. Fíjate que el triángulo superior blanco es semejante a *SOL*, así pues el cociente entre sus alturas es igual al cociente entre sus bases:
$$\frac{16-4}{16} = \frac{b}{4} \to b = \frac{4\cdot 12}{16} = 3\,\text{cm}.$$
Área del trapecio: $\frac{4+3}{2}\cdot 4 = 14$ cm^2.



24. (C) Como la frase «dentro de dieciséis años mi edad será el doble que la que tenía hace dos años» se dirá dentro de cinco años, si la pronunciáramos hoy sería «dentro de veintiún años mi edad será el doble que la que tendré dentro de tres años». Si *x* representa la edad que tengo hoy, la ecuación que se corresponde con dicha situación es $x + 21 = 2(x+3)$.

25. (B) La suma de los primos menores que 40 es:
$$2+3+5+7+11+13+17+19+23+29+31+37 = 197$$
Por tanto Gustavita se equivocó en el número $230 - 197 = 33$.

XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel III

1. (B)

2	**4**	***x***	**2**
y	**3**	**3**	***z***
6	***u***	**1**	***t***

Las sumas horizontales son $8 + x$, $6 + y + z$, $7 + u + t$, y valen las tres lo mismo.

Las sumas verticales son $8 + y$, $7 + u$, $4 + x$, $2 + z + t$, y también tienen las cuatro el mismo valor.

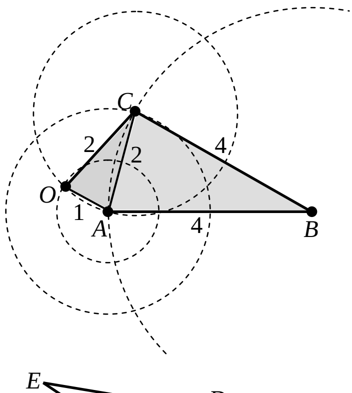
De las primeras, $8 + x = 7 + u + t$.

De las segundas $4 + x = 7 + u$.

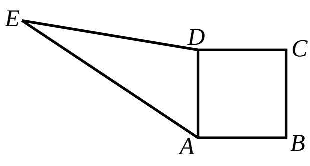
Restando estas dos ecuaciones, miembro a miembro tenemos $4 = t$.

2. (A) Según los datos, el número total de libros ha de ser múltiplo de 4 y de 9. Como estos son primos entre sí, el número tiene que ser múltiplo de 36. El único múltiplo de 36 comprendido entre 50 y 100 es 72. Así, hay 18 (72/4) libros de novela y 8 (72/9) libros de poesía. No son ni novelas ni libros de poesía 72 – 18 – 8 = 46.

3. (D) Como la suma de los dos lados menores de un triángulo ha de ser mayor que el lado mayor, los dos lados indicados y la diagonal han de ser concurrentes. Los lados del cuadrilátero, entonces miden 4, 1, 4 y 2. Y su perímetro es 11. (Ver figura adjunta)

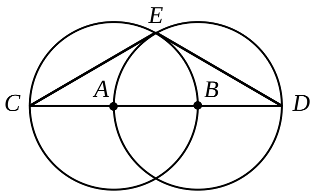


4. (C) El área del triángulo mide 16 cm^2 y su base mide 4 cm. Su altura, distancia desde *E* hasta el lado *AD*, mide 8 cm. Y la distancia desde *E* hasta la recta *BC* mide 12 cm.



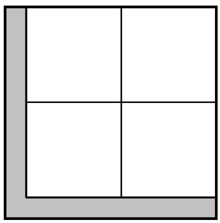
5. (C) En el Concurso de Primavera, como es bien sabido, en cada pregunta sólo hay una respuesta correcta. Con los datos aportados, la única respuesta que puede ser correcta es **C**. Pues si **A** fuera correcta, también lo sería **B** y habría dos respuestas correctas, lo que no puede ser. Si **B** fuera correcta, también lo sería **C** (por el contrarrecíproco de no **C** $\Rightarrow$ no **B**), lo que tampoco puede ser. La misma causa excluye **D** o **E** como respuestas correctas. Sólo queda **C**.

6. (C) El triángulo ABE es equilátero, de modo que el ángulo $A\hat{E}B$ mide 60º. Como los triángulos CEA y DEB son isósceles y sus ángulos centrales miden 120º cada uno, los ángulos $C\hat{E}A$ y $D\hat{E}B$ miden 30º cada uno, y el ángulo $C\hat{E}D$ mide 30º + 60º + 30º = 120º.



7. (A) Como QRS es múltiplo de 5, S necesariamente es 5. Al ser PQR múltiplo de 4, QR debe ser múltiplo de 4. Las únicas posibilidades son 12, 24, 32 y 52. La última se descarta porque $S = 5$ y no puede ser $Q = 5$. Ahora, RST es múltiplo de 3. Como S es 5 y R sólo puede ser 2 o 4, con $R = 2$ tenemos $25T$, que sólo es múltiplo de 3 con $T = 2$ o $T = 5$, imposible, en cualquier caso. Con $R = 4$ tenemos $45T$, que sólo puede ser múltiplo de 3 con $T = 3$. De modo que $QR = 24$ y $PQRST = 12453$. Y esto implica que $P = 1$.

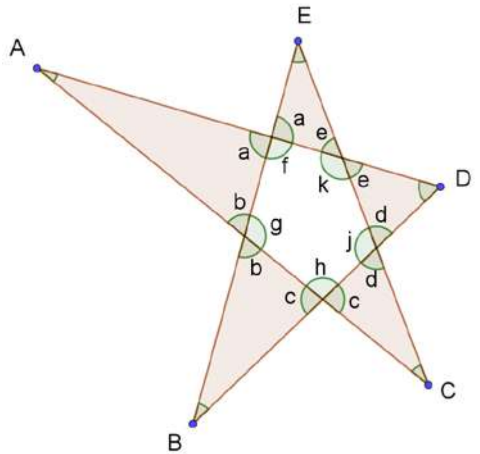
8. (E) Si el área del cuadrado es 125 cm^2, el lado mide $5\sqrt{5}$ cm, y el área del polígono en forma de L de la figura, 25 cm^2. Llamando x al lado menor del polígono, tenemos que $5\sqrt{5}\,x + \left(5\sqrt{5} - x\right)x = 25$. Esta ecuación se puede escribir como $x^2 - 10\sqrt{5}x + 25 = 0$, cuyas soluciones son $x = 5\sqrt{5} - 10$ y $x = 5\sqrt{5} + 10$. La segunda solución sería mayor que el lado del cuadrado inicial, por lo que se desecha. La solución correcta es $5\sqrt{5} - 10 = 5 \cdot \left(\sqrt{5} - 2\right)$.



9. (A)
$$\left.\begin{array}{l} E_1 \;\; a \cdot b = 2 \\ E_2 \;\; b \cdot c = 3 \\ E_3 \;\; c \cdot d = 4 \\ E_4 \;\; d \cdot e = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow E_2 \cdot E_4 \div \left(E_1 \cdot E_3\right) \quad \frac{e}{a} = \frac{15}{8}$$

10. (B) Un polígono estrellado se denota por N/M, siendo N el número de vértices y M el paso (nº de orden del siguiente vértice con el que se une uno dado). El polígono estrellado de la figura es 5/2. Sólo son posibles los polígonos estrellados en los que N/M es una fracción irreducible, es decir, aquellos en los que N y M son primos entre sí. En ellos, la suma de los ángulos interiores es 180º·(N – 2M). En nuestro caso 180º·(5 – 2·2) = 180º.

Pero…es claro que esta información no la tienen todos los niños que participan en el concurso, de modo que aportaremos otro método de resolución. Observando la figura, tenemos:



$$\left.\begin{aligned} A+a+b&=180^{\circ}\\ B+b+c&=180^{\circ}\\ C+c+d&=180^{\circ}\\ D+d+e&=180^{\circ}\\ E+e+a&=180^{\circ}\end{aligned}\right\}\Rightarrow A+B+C+D+E+2(a+b+c+d+e)=900^{\circ}$$

Ahora, al ser *a* y *f* adyacentes, lo mismo que *b* y *g*, *c* y *h*, *d* y *j*, *e* y *k* $\left.\begin{aligned} a&=180^{\circ}-f\\ b&=180^{\circ}-g\\ c&=180^{\circ}-h\\ d&=180^{\circ}-j\\ e&=180^{\circ}-k\end{aligned}\right\}$

tenemos que $A+B+C+D+E+2[900^{\circ}-(f+g+h+j+k)]=900^{\circ}$

La suma de los ángulos interiores de un pentágono convexo es 540º, por tanto $A+B+C+D+E=900^{\circ}-2\cdot(900^{\circ}-540^{\circ})=900^{\circ}-720^{\circ}=180^{\circ}$.

11. (D) En la tabla se recogen los resultados igualmente posibles y los favorables:
Los casos favorables están denotados por 1 y los no favorables por 0. La probabilidad de que el número que muestra el dado rojo sea mayor que el que muestra el dado azul es:

$$p = \frac{1+2+3+4+5}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

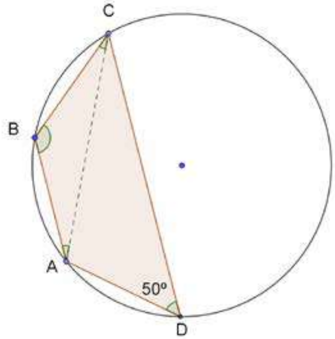
A \ R	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	1	1
2	0	0	1	1	1	1
3	0	0	0	1	1	1
4	0	0	0	0	1	1
5	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0

12. (C) Puesto que la media fue 76, ninguno obtuvo menos de 60 puntos y 5 obtuvieron 100 puntos, llamando *x* al número total de estudiantes e *y* a la puntuación mínima, podemos plantear el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 76x = 500 + y(x-5) \\ y \geq 60 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{76x-500}{x-5} \geq 60 \Rightarrow 76x - 500 \geq 60x - 300 \Rightarrow 16x \geq 200$$

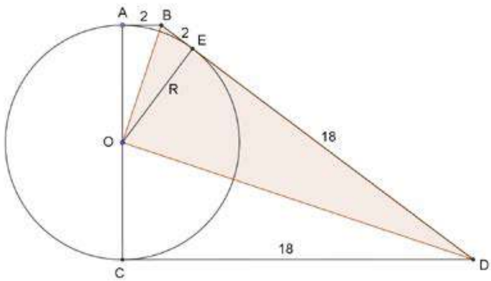
Y el número mínimo de estudiantes que verifica la inecuación es $x = 13$.

13. (B) Sabemos que los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia son suplementarios, por lo que el ángulo $A\hat{B}C = 130º$. Esto indica que los dos ángulos iguales del triángulo *ABC* miden 25º cada uno. Como *AB* es paralelo a *CD*, el cuadrilátero es un trapecio, y al estar inscrito en la circunferencia, es isósceles. Por tanto, el ángulo $B\hat{C}D = 50º$, $A\hat{C}D = 25º$ y $D\hat{A}C = 105º$.



14. (A) En la figura se observa que el radio de la esfera es la altura de un triángulo rectángulo en el que las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 2 y 18 cm. respectivamente. Aplicando el Teorema de la Altura, tenemos que:

$$R = \sqrt{2 \times 18} = \sqrt{36} = 6$$



15. (C) Las probabilidades de los cuatro sucesos son:

$$p(A)=\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^4=0'125$$

$$p(B)=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}=0'5$$

$$p(C)=6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=0'375$$

$$p(D)=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^4=0'3125$$

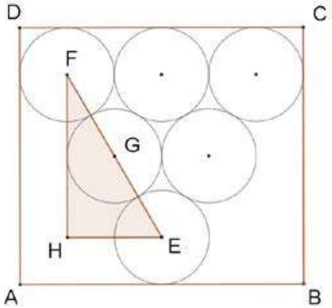
El orden de probabilidades crecientes de los cuatro sucesos es *ADCB*

16. (C) Como *AB* = 6 cm. y dicha longitud es 6 veces el radio de cada circunferencia, los radios miden todos 1 cm. En el triángulo *EHF*, el lado *HE* mide 2 cm y el lado EF mide 4 cm.

Así $FH=\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

La distancia que se pide es:

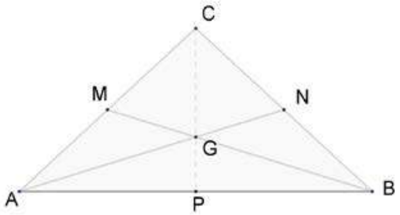
$FH-2R=2\sqrt{3}-2=2\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)$.



17. (E) Si llamamos *x* a la altura de la mesa, *R* a la de Raquel y *P* a la de Pablo, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x+R=P+80 \\ x+P=R+100 \end{array}\right\}\Rightarrow 2x+P+R=P+R+180\Rightarrow 2x=180\Rightarrow x=90.$$

18. (D) Al trazar la tercera mediana, *CP*, el triángulo *ABC* queda dividido en 6 triángulos de igual área. Por tanto, el cuadrilátero *MGNC* tiene área igual a 6 cm^2.



19. (B) Si la edad de Pablo es *x*, entonces $x=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(100-x)$; $3x=200-2x$; $x=40$

20. (A) La longitud del arco del sector es la longitud de la circunferencia de la base del cono. Así, podemos obtener el radio de la base: $\frac{3\times 40º}{180º}\cdot\pi = 2\pi R$; $R=\frac{1}{3}$.

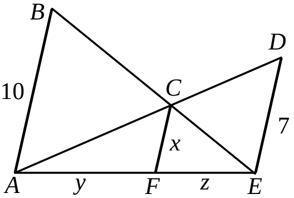
Aplicando el Teorema de Pitágoras, obtenemos la altura del cono:

$$h=\sqrt{3^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{80}{9}}=\frac{4}{3}\sqrt{5}$$

Y el volumen del cono es: $V=\frac{1}{3}\pi\cdot R^2\cdot h=\frac{1}{3}\pi\frac{1}{9}\cdot\frac{4\sqrt{5}}{3}=\frac{4\pi\sqrt{5}}{81}$

21. (A) Si llamamos *x* a la longitud del segmento *FC, y* a la del segmento *AF* y *z* a la del segmento *FE*, por semejanza de triángulos tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{y+z}{10}=\frac{z}{x}\\ \frac{y+z}{7}=\frac{y}{x}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{17}{70}\cdot(y+z)=\frac{y+z}{x}\Rightarrow x=\frac{70}{17}$$

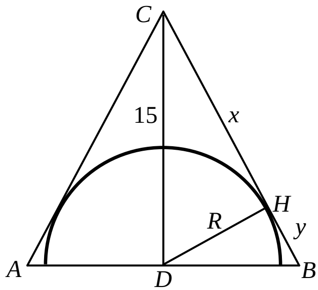


22. (B). Los casos favorables son: RRR, RRVR, RVRR y VRRR. Las probabilidades de cada uno de los casos son, por el mismo orden, $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$. Pero las cuatro tienen el mismo valor, $\frac{1}{10}$. Así, la probabilidad pedida es $p=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

23. (B) Aplicando el Teorema de la Altura, tenemos que $R^2=x\cdot y$. Como el lado del triángulo isósceles mide 17, pues es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 15 y 8, los segmentos *x* e *y* se pueden calcular aplicando el Teorema de los Catetos: $x=\frac{15^2}{17}$; $y=\frac{8^2}{17}$.

De modo que

$$R^2=x\cdot y=\frac{15^2\cdot 8^2}{17^2}\Rightarrow R=\frac{120}{17}.$$



24. (A) El grado del cociente es 98, y el grado del resto es 1, de modo que podemos escribir:

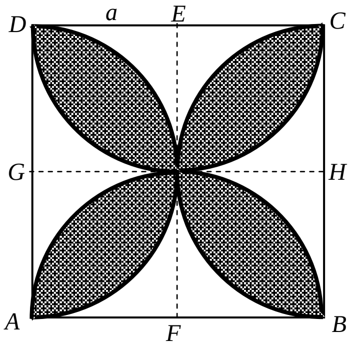
$x^{100} - 2x^{99} + 4 = \left(x^2 - 3x + 2\right) \cdot C(x) + mx + n$.

Ahora, sustituyendo x por 1 y 2 sucesivamente tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow 3 = m + n \\ x = 2 \Rightarrow 4 = 2m + n \end{array}\right\} \Rightarrow m = 1; \quad n = 2. \Rightarrow R(x) = x + 2.$$

25. (A) El área de cada pétalo se puede calcular restando al área del cuadrado de lado *a*, el doble de la diferencia entre el área del cuadrado y el área del cuarto de círculo. Es decir, el área del pétalo vale: $a^2 - 2 \cdot \left(a^2 - \frac{\pi \cdot a^2}{4} \right) = a^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$.

Como el área sombreada es 4 veces el área de un pétalo, es $A = \left(2\pi - 4\right) \cdot a^2$



XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel IV

1. (D) Al ser una función lineal trabajamos con la pendiente que es constante.

$$m=\frac{f(2017)-f(2005)}{2017-2005}=\frac{f(2035)-f(2017)}{2035-2017}$$, de donde

$$\frac{100}{12}=\frac{f(2035)-f(2017)}{18}$$, por tanto $f(2035)-f(2017)=150$.

2. (D) La primera cifra de todos los números con nueve cifras puede ser del 1 al 9. Por tanto, el número mínimo de cartas que hay que sacar para que se repita la primera cifra son diez, ya que lo peor que puede pasar es que saque nueve cartas con la primera cifra diferente y la décima carta ya tiene que ser un número con la primera cifra repetida.

3. (B) Llamamos k al número pedido, $k=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$. Por tanto,

$$k^3=2+\sqrt{5}+3\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{5}\right)^2\cdot\left(2-\sqrt{5}\right)}+3\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{5}\right)\cdot\left(2-\sqrt{5}\right)^2}+2-\sqrt{5}$$

$$=4+3\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{5}\right)\cdot(4-5)}+3\sqrt[3]{(4-5)\cdot\left(2-\sqrt{5}\right)}=4-3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}-3\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

$$=4-3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)=4-3k.$$ Solo nos queda resolver $k^3=4-3k$.

Aplicando Ruffini podemos factorizar la ecuación en $(k-1)\left(k^2+k+4\right)=0$. La única solución real es $k = 1$, por tanto, $k=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1$.

4. (A) Observando la gráfica vemos que para que $f(f(f(x)))$ sea 0, $f(f(x))$ tiene que ser – 4 ó 0. Vamos a estudiar cada caso:

- Para que $f(f(x))$ sea – 4, entonces $f(x)$ tiene un único valor (en la gráfica no se puede determinar el valor exacto, será un valor negativo menor que – 4, llamémoslo a).

  i) Para que $f(x)$ sea a, entonces x tiene un único valor $b < a < -4$.

- Para que $f(f(x))$ sea 0, entonces $f(x)$ tiene que ser – 4 ó 0.

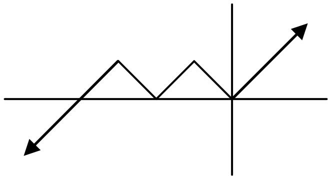
  ii) Para que $f(x)$ sea 0, entonces x tiene que ser – 4 ó 0.

  iii) Para que $f(x)$ sea – 4, entonces x tiene un único valor que es a.

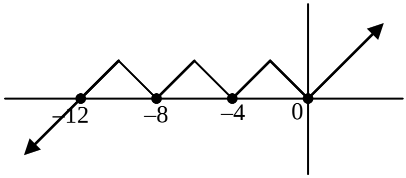
En total, cuatro soluciones, de menor a mayor b, a, – 4 y 0.

Resulta interesante hallar y representar las funciones $f\left(f(x)\right)$ y $f\left(f\left(f(x)\right)\right)$

$$f\left(f(x)\right)=\begin{cases} x+8 & si \quad x<-6 \\ -x-4 & si \quad -6\le x<-4 \\ x+4 & si \quad -4\le x<-2 \\ -x & si \quad -2\le x<0 \\ x & si \quad 0\le x \end{cases}$$



$$f\left(f(x)\right)=\begin{cases} x+12 & si \quad x<-10 \\ -x-8 & si \quad -10\le x<-8 \\ x+8 & si \quad -8\le x<-6 \\ -x-4 & si \quad -6\le x<-4 \\ x+4 & si \quad -4\le x<-2 \\ -x & si \quad -2\le x<0 \\ x & si \quad 0\le x \end{cases}$$



En la gráfica se ven claramente las cuatro soluciones: $-12,\ -8, -4$ y 0.

5. (D) Que *f* sea una función periódica de periodo T = 5 y en el intervalo [3, 8) significa que $f(3)=f(8)=f(13)=...=f(2013)$, por tanto $f(2017)=f(7)=4$.

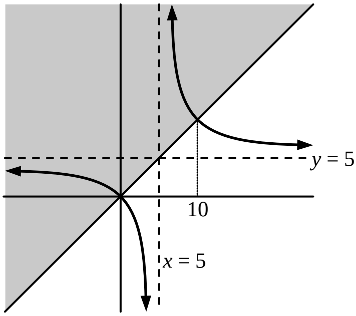
6. (D) El cociente entre el área del círculo grande y el área de la región que está fuera del pequeño pero dentro del grande es $\dfrac{x}{y}=\dfrac{\pi R^2}{\pi R^2-\pi r^2}=\dfrac{R^2}{R^2-r^2}$.

Operamos $xR^2-xr^2=R^2y \ \Rightarrow (x-y)R^2=xr^2 \Rightarrow \dfrac{R^2}{r^2}=\dfrac{x}{x-y}$.

Solo queda $\dfrac{R}{r}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-y}}$.

7. (A) Los números que verifican que su producto es igual a cinco veces su suma cumplen $xy=5(x+y) \ \Rightarrow y=\dfrac{5x}{x-5}$. Representamos la función y la condición $x \le y$. La recta $x = 5$ es la asíntota vertical de la función. Los puntos de corte entre la curva y la recta $\begin{cases} y=\dfrac{5x}{x-5} \\ x=y \end{cases}$ son $O(0, 0)$ y $P(10, 10)$. En la gráfica se ve claramente que las posibles soluciones estarán en $(-\infty, 0]\cup(5,10]$.

• En $x \in (-\infty, 0]$, los valores posibles de y son 0, 1, 2, 3 y 4. De los cuales solo cumplen la condición de ser enteros los puntos (–20, 4) y (0, 0).
• En $x \in (5, 10]$, los valores posibles de x son 6, 7, 8, 9 y 10. De los cuales solo cumplen la condición de ser enteros los puntos (6, 30) y (10, 10).
En total, cuatro soluciones.

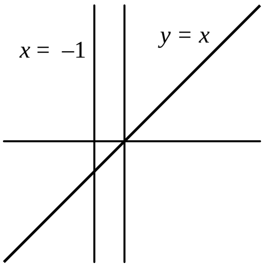


8. (A) $f\left(tg^2\theta\right) = f\left(\dfrac{sen^2\theta}{\cos^2\theta}\right) = f\left(\dfrac{sen^2\theta}{1 - sen^2\theta}\right) = \sqrt{sen^2\theta} = sen\theta$

9. (B) Llamamos a, b y c a los lados del ortoedro. Los lados del triángulo XYZ son las diagonales de las caras. Por tanto obtenemos las siguientes condiciones $\left.\begin{array}{l} a^2+b^2=64 \\ b^2+c^2=81 \\ a^2+c^2=55 \end{array}\right\}$ sumando las tres ecuaciones obtenemos $2a^2+2b^2+2c^2=200$.

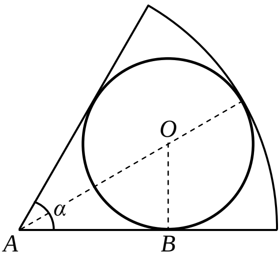
Es decir, $a^2+b^2+c^2=100$, por tanto la diagonal del ortoedro será $\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{100} = 10$.

10. (E) Trabajamos la ecuación dada. $x^2 - xy + x - y = 0$ $\Rightarrow x(x-y)+(x-y)=0$ $\Rightarrow (x+1)(x-y)=0$. Esta ecuación tiene dos soluciones $\begin{cases} x=-1 \\ x=y \end{cases}$. Si lo representamos gráficamente vemos que son dos rectas que se cortan.



11. (C) En total hay 64 calcetines, el primero que cogemos puede ser de cualquier color y quedarán 7 calcetines del mismo color de un total de 63. Por tanto, $P = \dfrac{7}{63} = \dfrac{1}{9}$.

12. (A) En el triángulo rectángulo *ABO*, $OB = r$, $AO = 2r$ y por tanto $sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$ De aquí se deduce que $\frac{\alpha}{2} = 30^o \Rightarrow \alpha = 60^o$.



Luego, si la amplitud del sector es 60º,

$$\frac{A_{sector}}{A_{circulo}} = \frac{\frac{\pi R^2}{6}}{\pi r^2} = \frac{R^2}{6r^2} = \frac{(3r)^2}{6r^2} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

13. (E) La división pedida también se puede escribir como $P(x):(x-1)(x-2)$. Cuando simplificamos el dividendo y el divisor entre $(x-2)$, el resto de la división $P(x):(x-1)$ también queda simplificado por $(x-2)$. Pasa lo mismo cuando simplificamos entre $(x-1)$.
Aplicando el teorema del resto, resulta fácil encontrar el resto de la división $P(x):(x-1)$ (será $P(1)$) y el resto de $P(x):(x-2)$ (será $P(2)$). Luego tendremos que trabajar con dichos restos.
El resto de la división pedida será $P(2)(x-1) - P(1)(x-2) = 7(x-1)-(x-2)$ que tiene por solución $6x-5$.

14. (B) Si las soluciones de la ecuación son x_1 y x_2 sabemos que $x_1 + x_2 = b$ y $x_1 \cdot x_2 = c$, es decir $c = sen\frac{\pi}{7} \cdot \cos\frac{\pi}{7}$.

$$b = sen\frac{\pi}{7} + \cos\frac{\pi}{7} \Rightarrow b^2 = sen^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{\pi}{2} + 2\, sen\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} = 1 + 2c.$$

15. (C) El cociente de dividir 2017 entre 9 es 224 y el resto 1. Eso significa que si sumamos 220 + 221+ …+ 224 + … + 227 + 228 = 2016. Como solo le falta uno para la suma pedida, ponemos 229 y quitamos el 228.

16. (D) Llamando V_s al volumen del sólido y V_l al volumen del líquido tenemos que $V_l = \left(1 + \frac{1}{12}\right)V_s$, cuando se solidifica $V_s = \frac{1}{1+\frac{1}{12}}V_l = \frac{12}{13}V_l$.

Por tanto, disminuye $\frac{1}{13}$.

17. (E) Llamamos $x = A\hat{C}M$, $y = B\hat{C}N$. Como AN = AC, entonces el triángulo ACN es isósceles y por tanto el ángulo $A\hat{N}C = x + 43^o$. Del mismo modo, como BM = BC, el triángulo MBC es isósceles y por tanto el ángulo $B\hat{M}C = y + 43^o$. Fijándonos en los ángulos del triángulo MNC, tenemos $43^o + x + 43^o + y + 43^o = 180^o$, de donde $x + y = 51^o$. Por tanto, $A\hat{C}B = x + 43^o + y = 43^o + 51^o = 94^o$.

18. (A) A y B pertenecen a la parábola, por tanto, $A(a, a^2 - 7a - 1)$, $B(b, b^2 - 7b - 1)$. Como el origen de coordenadas es el punto medio, cumple que

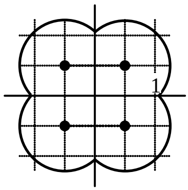
$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = 0 \\ \dfrac{a^2 - 7a - 1 + b^2 - 7b - 1}{2} = 0 \end{cases}.$$

Las soluciones del sistema son $a = 1,\ b = -1$ ó $a = -1,\ b = 1$. En ambos casos los puntos serán (1, -7) y (-1, 7). La distancia entre ellos es:

$$d = \sqrt{(1+1)^2 + (-7-7)^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} .$$

19. (E) Para valores de $x > 0$, $y > 0$, nos queda la ecuación $x^2 + y^2 = x + y$ que es la ecuación de una circunferencia $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ de centro $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y radio $\frac{\sqrt{2}}{2}$. De todos los puntos de la circunferencia solo valen los que cumplen $x > 0$, $y > 0$, pero éstos ya son infinitos.

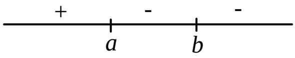
Como curiosidad, mostramos la representación gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = |x| + |y|$.



20. (A) Buscamos algunas de las características de la función $f(x) = (a - x)(b - x)^2$ y así vamos descartando.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. Por tanto, solo pueden ser A), C) o E).

Cortes con el eje X. $(a - x)(b - x)^2 = 0$, tiene por soluciones $x=a$ y $x=b$. Tendrá dos puntos de corte. Por tanto, solo pueden ser A) o C)
Estudiamos el signo de la función
Por tanto, es la A).



21. (D) Para conseguir el cuadrado de área más pequeña, la distancia del punto a la recta (distancia más corta) tendrá que ser la diagonal del cuadrado (distancia más larga).

$d_{\mathrm{Pr}} = \dfrac{|3-2+4|}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$. Un cuadrado de lado l tiene una diagonal que mide $l\sqrt{2}$.

Por tanto, $\dfrac{\sqrt{10}}{2} = l\sqrt{2} \Rightarrow l = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. En cuyo caso, el área será $\dfrac{5}{4}$.

22. (C). Trabajamos con la afirmación dada $sen\alpha + \cos\alpha = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

$$(sen\alpha + \cos\alpha)^2 = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow sen^2\alpha + \cos^2\alpha + 2sen\alpha\cos\alpha = \frac{1+3+2\sqrt{3}}{4}$$

$\Rightarrow 1 + sen2\alpha = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow sen2\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, por tanto, $2\alpha = 60º$ ó $120º$. De este modo α tendrá por soluciones 30º ó 60º. Es decir, dos soluciones.

23. (E) El $\log_b c = \log_{a^{30}} a^{42} = x$. Aplicando la definición $\left(a^{30}\right)^x = a^{42} \Rightarrow 30x = 42$. Por tanto, $x = \dfrac{7}{5}$.

24. (A) Sea $P(x, y)$ y $Q(0, 0)$, la "distancia taxi" queda definida como $d_{taxi}(P, Q) = |x-0| + |y-0| = 2$. Solo hay que analizar la figura que forman.

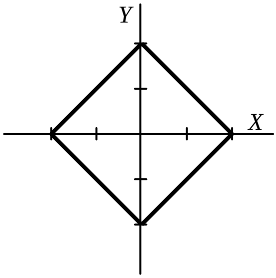
Si $x > 0, y > 0 \Rightarrow x + y = 2$

Si $x > 0, y < 0 \Rightarrow x - y = 2$

Si $x < 0, y > 0 \Rightarrow -x + y = 2$

Si $x < 0, y < 0 \Rightarrow -x - y = 2$

Forman un cuadrado.



25. (C) Para analizar qué número está próximo a $\sqrt{101} - 10$, multiplicamos y dividimos por el conjugado. $\dfrac{\left(\sqrt{101}-10\right)\left(\sqrt{101}+10\right)}{\sqrt{101}+10} = \dfrac{101-100}{\sqrt{101}+10} = \dfrac{1}{\sqrt{101}+10} \approx \dfrac{1}{20}$.

Participantes y relación de ganadores del XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Una vez más en la primera fase celebrada en los propios centros se superó la cifra de 40 000 estudiantes de más de 500 centros participantes.

Aunque se inscribieron 3485 concursantes a la segunda fase, el número de participantes fue de 3406. La estadística de participación por niveles y puntuaciones obtenidas puede consultarse en la página de la Sociedad Puig Adam así como la relación de todos los ganadores del concurso y la relación de los centros con mayor puntuación en cada uno de los niveles.

La distribución por niveles de los participantes en la segunda fase, que como siempre tuvo lugar en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, fue la siguiente:

	NIVEL 1		NIVEL 2		NIVEL 3		NIVEL 4	
	5º P y 6º P		1º ESO, 2º ESO		3º ESO, 4º ESO		1º B, 2º B	
nº de participantes	234	631	444	628	440	516	337	176
Totales por nivel	865		1072		956		513	

Los tres, y en algún caso cuatro, ganadores en cada uno de los niveles fueron:

NIVEL I

1. Raúl Martínez Castillo (6º Primaria) Edith Stein, CPR
2. Diego López Aragón (5º Primaria) CP La Navata
3. Daniel Ribalta Andrés (6º Primaria) CP de Prácticas Asunción Rincón

NIVEL II

1. Daniel Mecha Martín (2º ESO) CPR Gredos San Diego Guadarrama
2. HyongGuk Hwang. (1º ESO) IES Gerardo Diego
3. Álvaro Torrico Espiga (2º ESO) CPR San Agustín

NIVEL III

1. Shenghao Zhang (4º ESO) CPR Arcángel Rafael
2. Nicolás Rey Rodríguez (3º ESO) CPR Fray Luis de León
3. Javier Durán Fernández (4º ESO) Colegio Alemán de Madrid

NIVEL IV

1 Alejandro Epelde Blanco (1º Bchto) Montessori School Los Fresnos
1\. Saúl Rodríguez Martín (2º Bchto) CPR Villa de Griñón
3\. Jia Jie Tao (2º Bchto) IES San Mateo
3\. Marcos Vázquez Verdejo (2º Bchto) CPR Divina Pastora

RELACIÓN DE LOS 10 CENTROS CON MEJOR PUNTUACIÓN POR NIVEL

(Elaborada con las **tres mejores puntuaciones** de cada centro en cada nivel)

XXI CONCURSO DE PRIMAVERA Mayo 2017

NIVEL I		
NOMBREDEL CENTRO	MUNICIPIO	SUMA DE PUNTOS
CP TIRSO DE MOLINA	Madrid	281
CP DE PRÁCTICAS ASUNCIÓN RINCÓN	Madrid	218
COLEGIO ALEMÁN DE MADRID	Madrid	212
CPR SAN AGUSTÍN	Madrid	265
CP ESCUELAS BOSQUE	Madrid	258
CP FEDERICO GARCÍA LORCA	Majadahonda	252
CP JOSÉ CALVO SOTELO	Madrid	251
CPR EDITH STEIN	Madrid	247
CPR AGUSTINIANO	Madrid	247
CPR SAN JOSÉ DEL PARQUE	Madrid	243

NIVEL II		
NOMBREDEL CENTRO	MUNICIPIO	SUMA DE PUNTOS
CPR SAN AGUSTÍN	Madrid	283
IES SAN JUAN BAUTISTA	Madrid	269
COLEGIO ALEMÁN DE MADRID	Madrid	266
CPR JOYFE	Madrid	247
IES RAMIRO DE MAEZTU	Madrid	244
CPR SAN JOSÉ DEL PARQUE	Madrid	240
IES JOSÉ LUIS SAMPEDRO	Tres Cantos	238
IES MARÍA GUERRERO	Collado Villalba	236
CPR NORFOLK	Cobeña	230
IES GRAN CAPITÁN	Madrid	225
CPR NUESTRA SRA DEL BUEN CONSEJO	Madrid	225

NIVEL III		
NOMBREDEL CENTRO	MUNICIPIO	SUMA DE PUNTOS
COLEGIO ALEMÁN DE MADRID	Madrid	283
CPR AMOR DE DIOS	Madrid	246
CPR JOYFE	Madrid	239
KING´S COLLEGE	Tres Cantos	230
CPR SAN JOSÉ DEL PARQUE	Madrid	228
CPR ARCANGEL RAFAEL	Madrid	226
IES ÁNGEL CORELLA	Colmenar Viejo	209
RUNNYMEDE COLLEGE	Alcobendas	202
IES JOSÉ LUIS SAMPEDRO	Tres Cantos	200
CPR SAN AGUSTÍN	Madrid	196

NIVEL IV		
NOMBREDEL CENTRO	MUNICIPIO	SUMA DE PUNTOS
IES SAN MATEO	Madrid	266
IES RAMIRO DE MAEZTU	Madrid	271
IES FORTUNY	Madrid	217
CPR VILLA DE GRIÑÓN	Griñón	195
CPR MIRABAL	Boadillo del Monte	191
CPR SAN JOSÉ DEL PARQUE	Madrid	178
IES CERVANTES	Madrid	177
IES CARDENAL CISNEROS	Madrid	177
CPR VIRGEN DE ATOCHA	Madrid	174
IES ARQUITECTO VENTURA RODRÍGUEZ	Boadillo del Monte	172

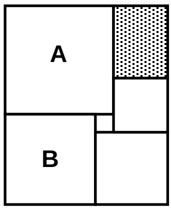
XXXV CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 3 de junio de 2017

NIVEL I (3º de E.S.O.) Primera parte (1 hora 30 minutos)

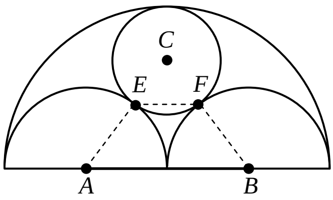
Problema 1. (7 puntos)

El rectángulo de la figura está dividido en seis regiones. Cinco de ellas, que no están sombreadas, son cuadrados. Si el área del cuadrado A es 144 y el área del cuadrado B es 100, ¿cuál es el área del rectángulo sombreado?



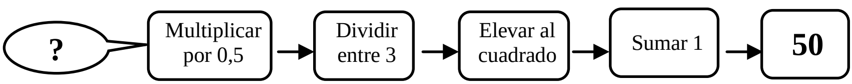
Problema 2. (7 puntos)

En un semicírculo de radio 2 dibujamos dos semicircunferencias de radio 1 con centros *A* y *B* y una circunferencia con centro *C* y tangente a las tres semicircunferencias. Los puntos *E* y *F* son los de tangencia de la circunferencia con las dos semicircunferencias pequeñas. Calcula el área del trapecio *ABFE*.



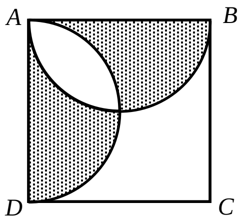
Segunda parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1A. (1 punto)
Para llegar a 50 en la siguiente cadena de operaciones, ¿por qué número positivo tendrías que haber comenzado?



Problema 2A. (1,5 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior y *n* la suma de las cifras de *T*. La media de las edades del abuelo, la abuela y sus *n* nietos es 28 años. La media de las edades de los nietos es 10 años. Si el abuelo tiene 4 años más que la abuela, ¿qué edad tiene el abuelo?

Problema 3A. (2 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior y k el cociente de sus cifras ($k > 1$). En la figura se muestra un cuadrado de lado k y dos semicircunferencias de diámetros AB y AD.
¿Cuál es el área de la región sombreada?

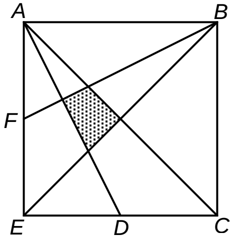


Problema 1B. (1 punto)
Sean m, n, p y q números enteros diferentes tales que $2^m + 2^n - 2^p + 2^q = 131$.
Calcula $m + n + p + q$.

Problema 2B. (1,5 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior. Andrés y Beatriz deciden ir en moto desde un pueblo hasta otro que se encuentra a $4T$ km de distancia. Andrés va a una velocidad constante de 50 km/h . En cambio Beatriz conduce la mitad del trayecto a 40 km/h y la otra mitad a 60 km/h. Calcula la diferencia, en segundos, entre los tiempos que emplean cada uno.

Problema 3B. (2 puntos)
¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $P + S = C$ donde P es un número primo, S un cuadrado perfecto y C un cubo perfecto, todos menores que T. Por ejemplo: 7 + 1 = 8 es una solución.

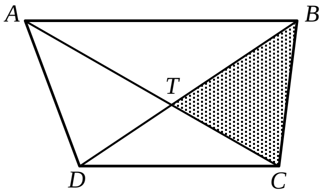
Problema 4. (5 puntos)
Sea a la respuesta del problema 3A, b la respuesta del problema 3B. En el cuadrado de la figura la longitud de sus lados es $\frac{b}{a}$, D y F son los puntos medios de los lados CE y EA, respectivamente. Calcula el área del cuadrilátero sombreado.



NIVEL II **(4º de E.S.O.)** Primera parte (1 hora 30 minutos)

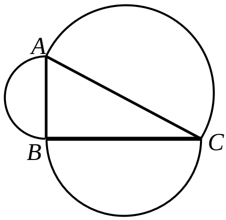
Problema 1. (7 puntos)
Cinco enteros positivos consecutivos, $p < q < r < s < t$, todos menores que 2000, tienen por suma un cuadrado perfecto, mientras que la suma de los tres centrales, q, r y s es un cubo perfecto. Calcula la raíz cuadrada de la suma de los cinco.

Problema 2. (7 puntos)
En el trapecio *ABCD* de la figura se verifica que el área del triángulo *ABC* es 150 y el área del triángulo *ACD* es 120. Calcula el área del triángulo *BCT*.



Segunda parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1A. (1 punto)
Los lados del triángulo rectángulo *ABC* con ángulo recto en *B*, son diámetros de tres semicircunferencias, como muestra la figura. Si el área del semicírculo de diámetro *AB* es 8π y la longitud del arco de diámetro *AC* es $\frac{17}{2}\pi$, calcula la longitud del diámetro *BC*.



Problema 2A. (1,5 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior. La media de una lista de $T - 4$ enteros positivos es 10, la mediana es 9 y la única moda que es 8. ¿Cuál es el mayor entero que puede aparecer en dicha lista?

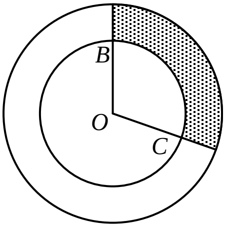
Problema 3A. (2 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior y $k = \frac{T}{5}$. ¿Cuántos enteros n, de tres cifras pero no mayores que 200, verifican que $(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ es divisible entre k?

Problema 1B. (1 punto)

Obtén la única solución real de la ecuación $\sqrt{7-2x} = 2x - 1$.

Problema 2B. (1,5 puntos)

Sea T la respuesta del problema anterior. Si el cociente entre los radios de las circunferencias concéntricas de la figura es T, calcula el cociente entre el área de la parte de corona circular sombreada y el área del sector circular OBC.



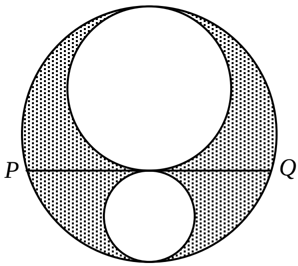
Problema 3B. (2 puntos)

Sea T la respuesta del problema anterior y $k = 4T$. Calcula la diferencia entre el perímetro y el doble de la hipotenusa de un triángulo rectángulo en el que el radio del círculo inscrito es k.

Problema 4. (5 puntos)

Sea a la respuesta del problema 3A, b la respuesta del problema 3B y sea k la suma de todas las cifras de a y b. En la figura adjunta se observan dos circunferencias más pequeñas, tangentes entre sí y también tangentes a la circunferencia mayor.

Si el área de la zona sombreada es igual a $k\pi$, ¿cuál es la longitud de PQ?



<u>NIVEL III</u> (1º de Bachillerato) Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1. (7 puntos)

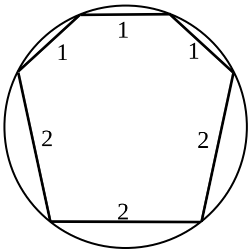
En el conjunto de los números reales positivos definimos la función f mediante la expresión:

$$f(x)=\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^6-\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)-2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)}\quad .$$

¿Cuál es el valor mínimo que toma f? ¿Para qué valor de x se alcanza ese valor mínimo?

Problema 2. (7 puntos)

¿Cuál es el área del círculo de la figura en el que los lados del hexágono inscrito, de manera consecutiva, son: 1, 1, 1, 2, 2, 2?



Segunda parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1A. (1 punto)

La media de seis números reales distintos es 275, la media de los cuatro más pequeños es 200 y la media de los cuatro mayores es 340. ¿Cuál es la media de los dos centrales?

Problema 2A. (1,5 puntos)

Sea T la respuesta del problema anterior. Calcula el perímetro de un rectángulo cuya área es $\frac{2T+1}{8}$ y su diagonal $\frac{T}{2}$.

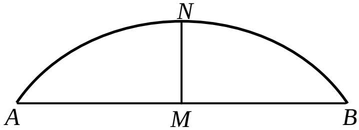
Problema 3A. (2 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior y k un número real tal que el área de la región situada por encima del eje de abscisas y formada por los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen las desigualdades: $|2x|+|y|\leq 2k;\quad |x|+|y|\geq k$ es T. Calcula k.

Problema 1B. (1 punto)
Si a es la solución de la ecuación $\log_{\sqrt{2}} x = 20$, calcula $\log_2 \sqrt{a}$.

Problema 2B. (1,5 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior. En "*Relevoslandia*" la unidad monetaria es el "*relev*". Esteban tiene billetes de 20 relevs y billetes de 80 relevs, siendo la media de relevs por billete $7T - 1$. ¿Cuál es el menor número de billetes que puede tener Esteban?

Problema 3B. (2 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior. Antonio tiene $\frac{T}{15}$ monedas y Beatriz $\frac{T}{6}$ todas perfectamente equilibradas. Cada uno tira sus monedas y gana quien obtenga más caras. Si la probabilidad de que gane Antonio es $\frac{p}{q}$, fracción irreducible, calcula $p + q$.

Problema 4. (5 puntos)
Sean a y b las respuestas de los problemas 3A y 3B, respectivamente y sea $k = 3(b - a)$. En la figura se observa un segmento circular en el que la cuerda AB es kn y la flecha, MN, es n. Si n es un entero positivo, ¿cuál es el menor valor de n para el que el radio del círculo al que pertenece dicho segmento circular, sea también un entero positivo?



XVII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

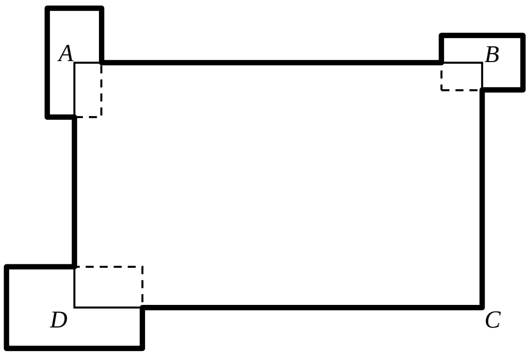
18 de noviembre de 2017

PRUEBA POR EQUIPOS 1º y 2º de E.S.O. (45 minutos)

1. Las edades de Carlos, Hugo y Elvira vienen dadas por números enteros. Hugo tiene 65 años y la suma de las edades de Carlos y Elvira es 100 años. Hace 9 años la edad de Elvira era un número múltiplo de 17 que, además, no era primo con el número de la edad actual de Hugo. ¿Cuál es la edad actual de Carlos?

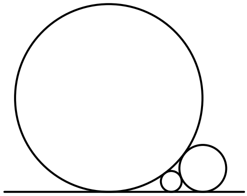
2. Los números A = 878 787 878 787 y B = 787 878 787 878, de 12 cifras cada uno, están formados sólo por sietes y ochos. ¿Cuál es su máximo común divisor?

3. El perímetro del rectángulo *ABCD* es de 30 cm. Dibujamos otros tres rectángulos cuyos centros son los vértices *A*, *B* y *D* y sus lados paralelos a los del rectángulo *ABCD*, como muestra la figura que no está hecha a escala. Si la suma de los perímetros de estos tres rectángulos es 20 cm, ¿cuál es el perímetro del polígono cuyos lados están marcados con línea gruesa?

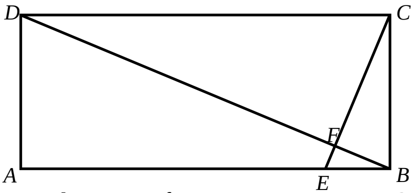


PRUEBA POR EQUIPOS 3º y 4º de E.S.O. (45 minutos)

1. En la figura adjunta se observan tres circunferencias tangentes entre sí y también tangentes a una recta. Si los radios de las circunferencias mayores miden 36 y 9, ¿cuánto mide el radio de la pequeña?



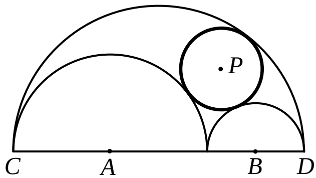
2. En el rectángulo *ABCD* de la figura, *AB* = 24 y *AD* = 10. El segmento *CE* es perpendicular a la diagonal *BD* y el punto *F* la intersección de ambos segmentos. ¿Cuál es la longitud del segmento *EF*?



3. ¿Cuántos números de cinco cifras, que empiecen por 37, verifican que tanto [37abc], como [37bca] y [37cab] son múltiplos de 37? Por ejemplo: 37296, 37962 y 37629 son tres de ellos.
Nota. La expresión [37abc] representa al número cuyas cifras son 3, 7, a, b, c.

PRUEBA POR EQUIPOS Bachillerato. (45 minutos)

1. En la figura se observan dos semicircunferencias de centros *A* y *B* y radios 2 y 1 respectivamente. Otra semicircunferencia de diámetro *CD*, tangente exterior a ambas semicircunferencias y una circunferencia de centro *P* que es tangente a las tres semicircunferencias anteriores. ¿Cuál es el radio de esta circunferencia de centro *P*?



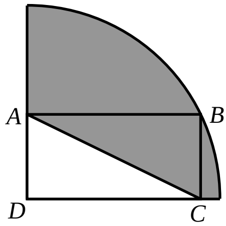
2. Sean x e y números reales tales que $|x| \neq |y|$ y que verifican las ecuaciones $\left.\begin{array}{l} x^3 = 13x + 3y \\ y^3 = 3x + 13y \end{array}\right\}$. Calcular $\left(x^2 - y^2\right)^2$.

3. Determinar el valor de $x + y$ sabiendo que: $\left.\begin{array}{r} [x] + [y] + y = 43{,}8 \\ x + y - [x] = 18{,}4 \end{array}\right\}$

Nota. $[a]$ es la parte entera de a, es decir, el mayor entero menor o igual que a.

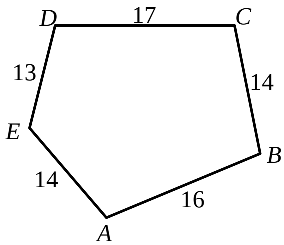
<u>PRUEBA INDIVIDUAL</u> 1º y 2º de E.S.O. (90 minutos)

1. En la figura adjunta se observa un cuadrante de circunferencia de centro D y radio r y un rectángulo $ABCD$ inscrito en el cuadrante. Si el perímetro del rectángulo es 16 y el perímetro de la región sombreada es $10 + 3\pi$, ¿cuál es el valor del radio r ?

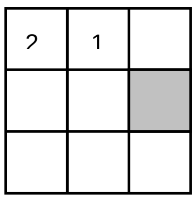


2. Escribimos en una lista todos los números enteros desde el 1 hasta el 2017. Si suprimimos todos los cuadrados perfectos y también todos los cubos perfectos, ¿cuántos números nos quedarán en esa lista?

3. Se considera el pentágono $ABCDE$ de la figura en el que se indican las longitudes de sus lados. Con centro en cada uno de sus vértices, dibujamos cinco circunferencias de forma que las que tienen por centro dos vértices del mismo lado son tangentes entre sí. ¿Cuál es el centro de la mayor que hemos dibujado y cuál es su radio?



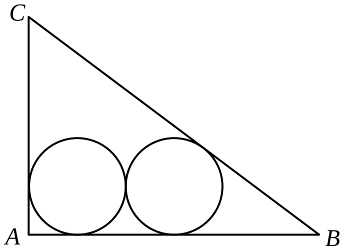
4. Las nueve casillas del "cuadrado mágico" de la figura están ocupadas por los nueve divisores de 100. (El producto de los números de cada fila, cada columna y cada diagonal es el mismo). Si el 20 y el 1 ocupan las casillas que muestra la figura, ¿qué número ocupará la casilla sombreada?



PRUEBA INDIVIDUAL **3º y 4º de E.S.O.** (90 minutos)

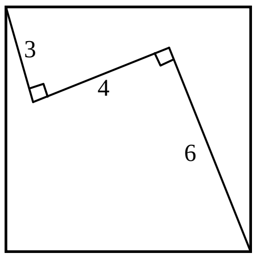
1. ¿Hay algún triángulo en el que las medidas de sus ángulos, en grados sexagesimales, vengan dadas por números enteros y que verifiquen que la suma de la medida de uno de ellos más el producto de las medidas de los otros dos sea 2017?
Indicación. Te puede ayudar saber que 919 es un número primo.

2. En el triángulo rectángulo ABC, de catetos $AC = 3$ y $AB = 4$, inscribimos dos circunferencias iguales, tangentes entre sí y tangentes a los lados del triángulo como se muestra en la figura. Calcula el radio de las circunferencias.



3. En un trayecto en tren entre dos ciudades, una hora después de la salida, el tren se detuvo por un pequeño fallo mecánico que se solucionó en media hora pero que hizo que el tren continuara su viaje a la mitad de la velocidad normal. Por esta circunstancia llegó a su destino con dos horas de retraso. Expertos consultados aseguraron que si la avería se hubiera producido 100 km más adelante, la demora habría sido de sólo una hora. ¿Cuál es la distancia que separa a estas dos ciudades?
Nota. Suponemos que el tren circula siempre a velocidad constante.

4. Calcula el área del cuadrado de la figura.



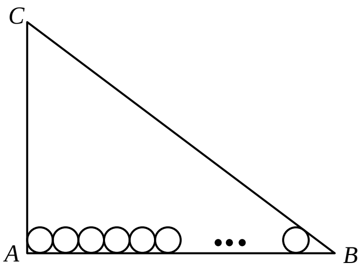
<u>PRUEBA INDIVIDUAL</u> Bachillerato (90 minutos)

1. Los números *x, y, z,* son enteros. ¿Cuántas soluciones tiene el siguiente sistema?

$$\left.\begin{aligned} x^2 - 3xy + 2y^2 - z^2 &= 31 \\ -x^2 + 6yz + 2z^2 &= 44 \\ x^2 + xy + 8z^2 &= 100 \end{aligned}\right\}$$

2. Encuentra todas las parejas de enteros positivos (*x*, *y*) tales que $4^y - 615 = x^2$.

3. En el triángulo rectángulo *ABC*, de catetos *AC* = 3, *AC* = 4, inscribimos *n* circunferencias iguales, tangentes entre sí y tangentes a los lados del triángulo como se muestra en la figura. ¿Para qué valor de *n* se verifica que el radio de cada una de ellas es $\dfrac{1}{2017}$?



4. El número 21! Tiene más de 60 000 divisores (positivos). Si elegimos al azar uno de ellos, ¿cuál es la probabilidad de que sea impar?

PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

1º y 2º de ESO.-

1A.- El peso total de un frasco y su contenido, que son 20 pastillas idénticas, es 180 gramos. Cuando el frasco contiene 15 pastillas vemos que el peso total es 165 gramos. ¿Cuántos gramos pesa el frasco?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1B.- Sea "T" la respuesta del problema 2B
Los números m, n, p y q son enteros positivos y diferentes.
Si además satisfacen la ecuación $(7-m)(7-n)(7-p)(7-q)=T$, ¿cuál es el valor de su suma?

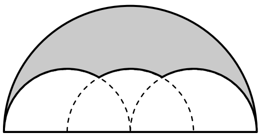
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1C.- Sea "T" la respuesta del problema 2C.
En el último examen de Matemáticas de mi clase la nota media ha sido $5+\dfrac{T}{100}$. Si la nota media de las chicas fue de 6 y la de los chicos de 5, ¿cuántos estudiantes hay en mi clase si no puede haber más de 30?

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

3º y 4º de ESO.-

2A.- Sea "T" la respuesta del problema 3A.
En la figura adjunta se observa un semicírculo de radio T, y tres semicírculos iguales de radio $\dfrac{T}{2}$. ¿Cuál es el área de la zona sombreada?.



(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

2B.- En un cajón hay 3 calcetines blancos, 2 negros y 5 rojos. Sin mirar dentro del cajón, ¿cuál es el número mínimo de calcetines que hay que sacar para estar seguros de que sacamos dos del mismo color?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

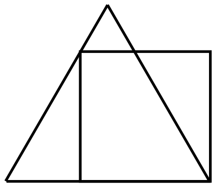
2C.- Sea "T" la respuesta del problema 3C.

Dos trenes viajan a velocidad constante. El más lento recorre en 15 minutos $\dfrac{T}{27}$ km menos que el más rápido y tarda 15 segundos más que el más rápido en recorrer 4 km. ¿Cuál es, en km/h, la velocidad del tren más rápido?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

Bachillerato.-

3A.- Sea "T" la respuesta del problema 1A.
En la figura se observa un triángulo equilátero y un cuadrado de perímetro T que tiene un vértice común con el triángulo y otros dos en lados del triángulo. Si escribimos el perímetro del triángulo como $a+b\sqrt{3}$ con a y b enteros positivos, ¿calcula el número $\dfrac{a}{b}$?



(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

3B.- Sea "T" la respuesta del problema 1B.

Los puntos $A\left(\dfrac{T}{2},\ 92\right)$; $B(17,\ 76)$ y $C(19,\ 84)$ son los centros de tres círculos de radio 3. Una recta que pasa por el punto B corta a los tres círculos de forma que la suma de las áreas de los trozos de círculo que deja a cada lado es la misma. ¿Cuál es la pendiente de la recta?

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

3C.- El producto de las edades de un padre y sus dos hijos es 4018. Si actualmente el padre tiene menos de 45 años, ¿qué edad tenía cuando nació el hijo mayor?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

LIV OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Comunidad de Madrid

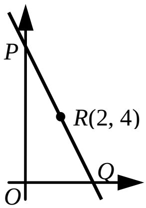
FASE CERO: viernes 24 de noviembre de 2017

- En la hoja de respuestas, escribe la letra de la opción que creas correcta
- Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos; cada respuesta en blanco 1 punto, y cada respuesta errónea, 0 puntos.
- No está permitido el uso de calculadoras, instrumentos de medida o de cualquier aparato electrónico.
- TIEMPO: 3 horas.

1. Colocamos cifras en los huecos del número 2☐☐, una en cada hueco, para formar un número de tres cifras. ¿De cuántas formas podemos hacerlo para que el número obtenido sea mayor que 217?

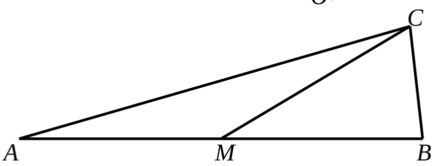
A) 81 B) 82 C) 83 D) 92 E) 93

2. En la siguiente gráfica el punto P está en el eje OY, Q es el (4, 0) y la recta PQ pasa por el punto R(2, 4). ¿Cuál es el área del triángulo OPQ?



A) 8 B) 12 C) 32 D) 24 E) 16

3. En el triángulo de la figura, el punto M es el punto medio del lado AB, $C\hat{M}B = 30º$ y $C\hat{A}B = 15º$. ¿Cuánto mide el ángulo $C\hat{B}A$?



A) 75º B) 65º C) 60º D) 80º E) 85º

4. Jorge tiene 144 cubitos idénticos de 1 cm de arista. Utiliza todos para construir un prisma rectangular cuya base tiene un perímetro de 20 cm, pero hay distintas posibilidades. ¿Cuál es la suma de todas las posibles alturas del prisma?

A) 31 B) 25 C) 15 D) 22 E) 16

5. Irene es más baja que Jorge, Francisco es más alto que Gustavo, Jorge es más alto que Francisco y Herminia es más baja que Gustavo. ¿Quién es el más alto?

A) Francisco B) Gustavo C) Herminia D) Irene E) Jorge

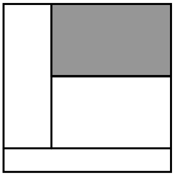
6. El cociente entre la longitud del lado menor de un rectángulo y la longitud del lado mayor es igual al cociente del lado mayor y la diagonal. ¿Cuál es el cuadrado del cociente entre la longitud del lado menor y la diagonal?

A) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{6}-1}{2}$

7. En el triángulo ABC, $AB = 6$, $AC = 8$ y $BC = 10$. Si D es el punto medio del lado BC, ¿cuál es la suma de los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos ADB y ADC?

A) $1+\sqrt{5}$ B) $\frac{11}{4}$ C) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ D) $\frac{17}{6}$ E) 3

8. El cuadrado $PQRS$, de lado 42, está dividido en cuatro rectángulos del mismo perímetro, tal y como muestra la figura. ¿Cuál es el área del rectángulo sombreado?



A) 252 B) 432 C) 441 D) 490 E) 540

9. Las longitudes de los lados de un triángulo obtusángulo son:10, 17 y x. Si x es un número entero, ¿cuál es la suma de los posibles valores de x?

A) 161 B) 148 C) 63 D) 323 E) 224

10. La región del espacio formada por los puntos que distan 3 unidades del segmento AB tiene por volumen 216π. ¿Cuál es la longitud de dicho segmento?

A) 6 B) 12 C) 18 D) 20 E) 24

11. Conduciendo a velocidad constante, Alberto tarda 3 horas en ir desde su casa a casa de sus padres. Un día empezó a conducir a su velocidad habitual pero, después de llevar la tercera parte del camino, empezó a llover y redujo su velocidad en 20 km/h, tardando en total 276 minutos. ¿Qué distancia hay entre la casa de Alberto y la de sus padres?

A) 132 km B) 135 km C) 138 km D) 141 km E) 144 km

12. Isa tiene 30 varillas, de longitudes enteras y diferentes, entre 1 y 30 cm. Toma tres de ellas, de longitudes 3 cm, 7 cm y 15 cm y las coloca encima de una mesa. Debe elegir una cuarta para formar con las cuatro un cuadrilátero. ¿Cuántas de las 27 restantes puede elegir?

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

13. En un triángulo rectángulo, de lados 3, 4 y 5, inscribimos de dos formas diferentes dos cuadrados. El primero, de lado x, tiene un vértice que coincide con el vértice del triángulo correspondiente al ángulo recto. El segundo, de lado y, tiene dos vértices consecutivos en la hipotenusa. ¿Cuál es el valor de $\frac{x}{y}$?

A) $\frac{12}{13}$ B) $\frac{35}{37}$ C) 1 D) $\frac{37}{35}$ E) $\frac{13}{12}$

14. En el rectángulo $ABCD$, $AB = 3$ y $BC = 4$. El punto E es el pie de la perpendicular desde B a la diagonal AC. ¿Cuál es el área del triángulo AED?

A) 1 B) $\frac{42}{25}$ C) $\frac{28}{15}$ D) 2 E) $\frac{54}{25}$

15. Prolongamos por B el diámetro AB, de una circunferencia de radio 2, hasta un punto D de tal forma que $BD = 3$. Elegimos un punto E tal que $ED = 5$ y los segmentos ED y AD sean perpendiculares. El segmento AE corta a la circunferencia en el punto C, entre A y E. ¿Cuál es el área del triángulo ABC?

A) $\frac{100}{37}$ B) $\frac{140}{39}$ C) $\frac{145}{39}$ D) $\frac{140}{37}$ E) $\frac{120}{31}$

16. ¿Cuántos enteros positivos menores o iguales que 2017, escritos en la notación habitual, llevan la cifra cero?

A) 469 B) 471 C) 475 D) 478 E) 481

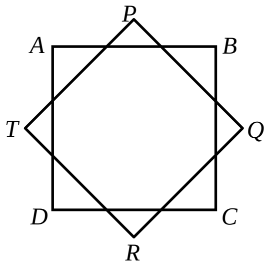
17. Si a y b son números reales positivos y las raíces de las ecuaciones $x^2 + ax + 2b = 0$ y $x^2 + 2bx + a = 0$ son todas reales, el menor valor posible $a + b$ es:

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

18. La ecuación $\left||x-2|-1\right| = a$ tiene exactamente tres raíces reales. ¿Cuál es el valor de a?

A) 0 B) 1 C) $\frac{7}{3}$ D) $\sqrt{3}$ E) 3

19. En la figura adjunta se observan dos cuadrados: el $ABCD$, de área S, y el $PQRT$, de área S'. Si los puntos de intersección dividen a los lados del cuadrado $ABCD$ en tres partes iguales, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?



A) $S = S'$ B) $2S = 3S'$ C) $5S = 6S'$

D) $8S = 9S'$ E) Nada de lo anterior

20. El número x es positivo y $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$. ¿Cuánto vale $x^5 + \frac{1}{x^5}$?

A) 55 B) 63 C) 322 D) 123 E) $49\sqrt{7}$

21. Si x e y son números positivos que verifican $[x]\cdot x = 36$, $[y]\cdot y = 71$, $x + y$ es igual a:

A) $\frac{107}{8}$ B) $\frac{119}{8}$ C) $\frac{125}{9}$ D) $\frac{107}{6}$ E) $\frac{101}{7}$

Recuerda: $[a]$ "parte entera de a" es el mayor entero menor o igual que a.

22. Pedro elige tres enteros positivos *a*, *b* y *c*. Quino determina el valor de $a+\frac{b}{c}$ y obtiene como respuesta 101. Rosa calcula $\frac{a}{c}+b$ y obtiene 68. Sara determina el valor de $\frac{a+b}{c}$ y obtiene como resultado *k*. ¿Cuál es el valor de *k*?

A) 13 B) 168 C) 152 D) 12 E) 169

23. Amalia tiene una moneda defectuosa en la que la probabilidad de obtener cara al realizar un lanzamiento es de $\frac{1}{3}$ y Bruno tiene otra en la que la probabilidad de obtener cara es de $\frac{2}{5}$. Tira cada uno, alternativamente, su moneda empezando Amalia y gana el primero que obtenga cara. Si $\frac{p}{q}$, irreducible, es la probabilidad de que gane Amalia, $q-p$ es igual a:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

24. En el triángulo equilátero *ABC* prolongamos desde *B* el lado *AB* hasta el punto *B'* de tal manera que *BB'* = 3*AB*. Análogamente en los otros dos lados: *CC'* = 3*BC* y *AA'* = 3*CA*. ¿Cuál es el cociente entre el área del triángulo *A'B'C'* y el área del triángulo *ABC*?

A) 9 B) 16 C) 25 D) 36 E) 37

25. ¿Cuántos triángulos hay que tengan los vértices en los puntos (*i*, *j*) donde *i* y *j* son enteros del 1 al 5, ambos inclusive?

A) 2128 B) 2148 C) 2154 D) 2160 E) 2300

26. Sea *S* el conjunto de puntos (*x*, y) del plano tales que dos de los tres números, 3, (*x* + 2), (*y* + 4) son iguales y el tercero es menor o igual que esos otros dos. ¿Cuál de las siguientes es una correcta descripción de *S* ?

A) *S* es un punto B) *S* es un par de rectas que se cortan C) *S* es un triángulo

D) *S* es: tres rectas que se cortan dos a dos en tres puntos diferentes

E) *S* es: tres semirrectas con un punto común

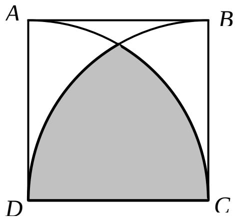
27. Los lados *AB* y *AC* del triángulo equilátero *ABC* son tangentes a una circunferencia en los puntos *B* y *C*, respectivamente. ¿Qué fracción del área de dicho triángulo cae fuera de la circunferencia?

A) $\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi-\frac{1}{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{8}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$ E) $\frac{4}{3}-\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi$

28. Los tres vértices del triángulo equilátero están en la hipérbola $x \cdot y = 1$, siendo uno de los vértices de la hipérbola el baricentro del triángulo. ¿Cuál es el área de dicho triángulo?

A) $\sqrt{48}$ B) $\sqrt{60}$ C) $\sqrt{108}$ D) $\sqrt{120}$ E) 13

29. En un cuadrado de lado a trazamos dos cuadrantes de circunferencia, como muestra la figura, con centros en A y B. ¿Cuál es el área de la parte sombreada?



A) $\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)a^2$ B) $\frac{1}{6}a^2$ C) $\frac{\pi}{6}a^2$

D) $\frac{\sqrt{3}-1}{6}a^2$ E) Faltan datos

30. Si $f(x) = senx + 2\cos x + 3tgx$ (con x en radianes), ¿en qué intervalo está el menor valor positivo de x para el que $f(x) = 0$?

A) (0, 1) B) (1, 2) C) (2, 3) D) (3, 4) E) (4, 5)

REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

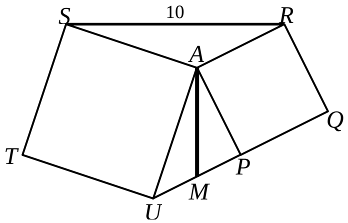
LIV OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Comunidad de Madrid

FASE LOCAL: segunda prueba. Viernes 20 de diciembre de 2017
Tiempo: 3h 30 min

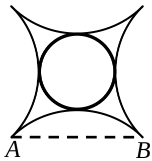
1. Considera un entero N de cinco cifras. Forma el entero P, de seis cifras, colocando un 2 al comienzo de N, y el entero Q, también de seis cifras, colocando un 2 al final de N. Si $Q = 3P$, escribe todos los valores posibles de N.

2. En la figura adjunta se observan dos cuadrados: $APQR$ y $ASTU$, que tienen un vértice común, A. Si $SR = 10$ y M es el punto medio de UP, calcula la longitud de AM.



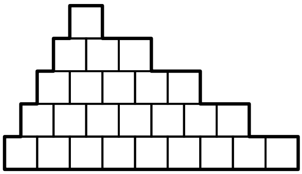
3. Norine tiene una lista de varios enteros consecutivos y efectúa el producto de todos ellos obteniendo como resultado un número N, de seis cifras, que empieza por 47 y acaba en 74. ($N = 47\ldots74$). Escribe la lista que tiene Norine.

4. En la figura adjunta puedes ver una circunferencia tangente a cuatro arcos iguales, siendo cada uno de ellos la cuarta parte de una circunferencia. Si $AB = 2$ cm, calcula el radio de la circunferencia.



5. Con cuatro dígitos diferentes, ninguno igual a cero, sabes que es posible formar 24 números de cuatro cifras cada uno, todos distintos. ¿Cuál es el mayor divisor primo de la suma de estos 24 números?

6. En la figura puedes ver una “pirámide” de cuadrados de lado 1 con las siguientes condiciones:



a. El número de cuadrados de la fila de abajo es impar (nueve en el dibujo)
b. Cada fila, salvo la de abajo, tiene dos cuadrados menos que la que tiene debajo.
c. Cada cuadrado se apoya en dos cuadrados de la fila que tiene debajo.
d. En la fila superior hay un cuadrado solo.

Si la “pirámide” tiene n filas, encuentra una relación que exprese su área A en función de su perímetro P.

7. Los habitantes del planeta *EMO* son rojos o verdes y tienen 2, 3 ó 4 cabezas. Colocamos en fila a seis de ellos, cada uno con una de las seis características citadas, es decir, R2, R3, R4, V2, V3, V4, de forma que cualesquiera dos que estén juntos difieren en el color y en el número de cabezas. ¿De cuántas formas los podemos colocar en esa fila?

8. El entero positivo N tiene exactamente seis divisores. Si el producto de cinco de ellos es 648, ¿cuál es el otro divisor de N?.

9. Hugo y María, ambos con menos de 80 años pero más de 10, observan que si escriben sus edades una a continuación de la otra, primero la de Hugo, obtienen un número de cuatro cifras que es un cuadrado perfecto. A continuación, Hugo se da cuenta de que eso volverá a pasar dentro de 17 años. ¿Cuál es la edad actual de Hugo?

10. Para el conjunto $\{a, b, c, \mathrm{d}\}$ la suma de todos los productos de dos factores de sus elementos es:
$ab + ac + ad + bc + bd + cd$ y la suma de todos los productos de tres factores es:
$abc + abd + acd + bcd$.
Sea $f(n)$ la suma de los productos de n factores de los 2017 primeros enteros positivos.
Así por ejemplo $f(1) = 1 + 2 +\ldots+ 2017$.
¿Cuál es el valor de $f(1) + f(2) + f(3) +\ldots+ f(2017)$?

LIV OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Prueba de selección
Comunidad de Madrid

Primera sesión, viernes 19 de enero de 2018

No está permitido el uso de calculadoras. Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.

1. Determinar los números reales $x > 1$ para los cuales existe un triángulo cuyos lados tienen longitudes $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1, \quad 2x^3 + x^2 + 2x + 1, \quad x^4 - 1$

2. Sea n un número natural. Probar que si la última cifra de 7^n es 3, la penúltima es 4.

3. Sea AD la mediana de un triángulo ABC tal que $\angle ADB = 45º$ y $\angle ACB = 30º$. Determinar el valor de $\angle BAD$.

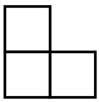
Segunda sesión, Sábado 20 de enero de 2018

Tiempo: 3 horas y media

4. Diremos que un entero positivo es "*curioso*" si puede expresarse como suma de los cuadrados de tres divisores suyos diferentes. Demostrar:
   a. Cualquier número *curioso* es múltiplo de 3.
   b. Hay infinitos números *curiosos*.

5. Sean x, y, z números reales distintos entre sí dos a dos. Determinar todos los valores de a para que $x - \frac{y}{z} - \frac{z}{y} = y - \frac{z}{x} - \frac{x}{z} = z - \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = a$.

6. Se han coloreado 46 cuadrados unitarios de una cuadrícula 9×9. ¿Hay, en la cuadrícula, alguna figura del tipo



(no necesariamente con la orientación que muestra el dibujo) con las tres casillas coloreadas?

XXIII^a OLIMPIADA de MAYO
Primer Nivel
Mayo de 2017

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 27 de mayo

PROBLEMA 1
A cada número de tres dígitos Matías le sumó el número que se obtiene invirtiendo sus dígitos. Por ejemplo, al número 927 le sumó el 729. Calcular en cuántos casos el resultado de la suma de Matías es un número con todos sus dígitos impares.

PROBLEMA 2
¿Es posible pintar 33 casillas de un tablero de 9×9 de forma que cada fila y cada columna del tablero tenga como máximo 4 casillas pintadas, pero si además pintamos cualquier otra casilla aparece alguna fila o columna que tiene 5 casillas pintadas?

PROBLEMA 3
Sea $ABCD$ un rombo de lados $AB = BC = CD = DA = 13$. Sobre el lado AB se construye el rombo $BAFE$, exterior al $ABCD$ y tal que el lado AF es paralelo a la diagonal BD del $ABCD$. Si el área del $BAFE$ es igual a 65, calcular el área del $ABCD$.

PROBLEMA 4
Sea n un entero par mayor que 2. Sobre los vértices de un polígono regular de n lados se pueden colocar fichas rojas o azules. Dos jugadores, A y B, juegan alternándose turnos del siguiente modo: cada jugador, en su turno, elige dos vértices que no tengan fichas y coloca en uno de ellos una ficha roja y en el otro una ficha azul. El objetivo de A es conseguir que haya tres vértices consecutivos con fichas del mismo color. El objetivo de B es impedir que esto suceda. Al comienzo del juego no hay fichas en ninguno de los vértices.
Demostrar que independientemente de quien empiece a jugar, el jugador B siempre podrá conseguir su objetivo.

PROBLEMA 5
Diremos que dos números enteros positivos a y b forman una *pareja adecuada* si $a+b$ divide a ab (su suma divide a su multiplicación). Hallar 24 números enteros positivos que se puedan distribuir en 12 parejas adecuadas, y de modo que cada número entero figure en una sola pareja y el mayor de los 24 números sea lo menor posible.

Segundo Nivel

PROBLEMA 1

Decimos que un número entero positivo es *ascendente* si sus cifras leídas de izquierda a derecha están en orden estrictamente creciente. Por ejemplo, 458 es ascendente y 2339 no lo es.
Hallar el mayor número ascendente que es múltiplo de 56.

PROBLEMA 2

Varios números reales diferentes están escritos en el pizarrón. Si a, b, c son tres de estos números, distintos entre sí, al menos una de las sumas $a+b, b+c, c+a$ también es uno de los números del pizarrón. ¿Cuál es la mayor cantidad de números que pueden estar escritos en el pizarrón?

PROBLEMA 3

En un cuadrilátero $ABCD$ se cumple que $A\hat{B}C = A\hat{D}C = 90º$ y $B\hat{C}D$ es obtuso. En el interior del cuadrilátero se ubica el punto P tal que $BCDP$ es un paralelogramo. La recta AP corta al lado BC en M. Además $BM = 2$, $MC = 5$ y $CD = 3$.
Determinarla longitud de AM.

PROBLEMA 4

Consideramos todos los números de 7 dígitos que se obtienen permutando de todas las maneras posibles los dígitos de 1234567.¿Cuántos de ellos son divisibles entre 7?

PROBLEMA 5

Ababa juega con una palabra formada por las letras de su nombre y se ha puesto ciertas reglas:
Si encuentra una A seguida inmediatamente de una B las puede sustituir por BAA.
Si encuentra dos B consecutivas las puede borrar.
Si encuentra tres A consecutivas las puede borrar.
Ababa empieza con la palabra ABABABAABAAB. Con las reglas anteriores, ¿cuántas letras tiene la palabra más corta a la que puede llegar? ¿Por qué no puede llegar a una palabra más corta?

XXIII OLIMPIADA DE MAYO – 2017. RESULTADOS DE ESPAÑA

PRIMER NIVEL

	Apellidos y nombre	Premio
1	Álvaro Gamboa Rodríguez	ORO
2	Sergio Pérez Plaza	PLATA
3	Félix García Taboada	PLATA
4	Alejandro Krum de Vicente	BRONCE
5	Pablo Robles	BRONCE
6	Pablo Cobo Cuenca	BRONCE
7	Jaime Martins-Soares Larrinaga	BRONCE
8	Nieves Fernández González	MENCIÓN
9	Miguel Garniza del Amo	MENCIÓN
10	Enrique Matorras Muñoz	MENCIÓN

SEGUNDO NIVEL

1	Javier Nistal Salas	ORO
2	Gabriel Salov	PLATA
3	Jimena Lozano Simón	PLATA
4	Víctor David Sánchez González	BRONCE
5	Marta Bonilla Rangel	BRONCE
6	Inés Blanco Rivas	BRONCE
7	Daniel Mecha Martín	BRONCE
8	Pablo López Renedo	MENCIÓN
9	Miguel Navarro Muñoz	MENCIÓN
10	Jorge Carrasco Coquillat	MENCIÓN

Comunidad de Madrid

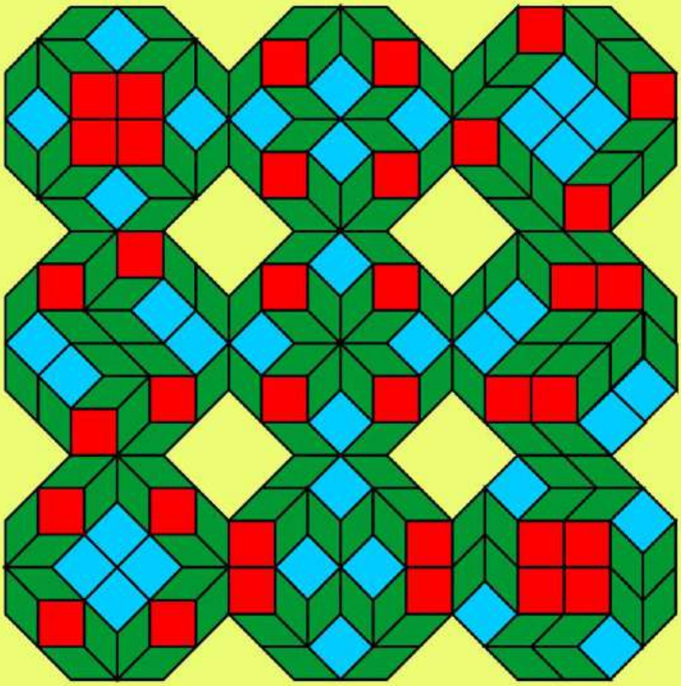
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Consejo Social de la UCM

sm

ANAYA

Smartick

XXIII
Concurso de Primavera



Matemáticas 2019

Comunidad
de Madrid

Comité organizador del Concurso de Primavera

Alfredo Martínez Sanz	*José María Sordo Juanena*
Belén Alzola Bujarrabal	*Juan Jesús Donaire Moreno*
Carlos Ramírez Carrillo	*Luis Ferrero de Pablo*
Esteban Serrano Marugán	*Marco Castrillón López*
Francisco López Álvarez	*María Gaspar Alonso-Vega*
Hugo Fernández Hervás	*María Moreno Warleta*
Isabel Benito Miguel	*Merche Sánchez Benito*
Javier Soler Areta	*Miguel Ángel Baeza Alba*
Jesús García Gual	*Pablo Martínez Dalmau*
Joaquín Hernández Gómez	*Roberto Tomé Grasa*
Jorge González Ortega	*Víctor Manuel Sánchez González*

Edita: Asociación Matemática Concurso de Primavera

ISBN: 978-84-608-5881-2

Depósito Legal: M-8301-2017

In memoriam

En la Comunidad de Madrid, todas las personas relacionadas con las matemáticas sabemos quién es Joaquín, un profe con barbas lleno de entusiasmo. Profesores de universidad y de secundaria y estudiantes interesados por las matemáticas, todos ellos conocen a Joaquín. Y ahora estamos tristes porque el pasado 19 de octubre, Joaquín falleció. Nos ha dejadohuérfanos pero, aun así, una gran satisfacción nos conforta al comprobar que la obra de Joaquín sigue adelante.

¡Aquí lo tenéis!, otro libro del Concurso de Primavera, otra alegría. Gracias, Joaquín, por compartir con nosotros tu entusiasmo por las Matemáticas.

El Comité Organizador

Joaquín Hernández Gómez, profesor de matemáticas

Joaquín nació en 1953 en Fuente del Arco, un pequeño pueblo de Badajoz. Era hijo de maestros y como el mismo Joaquín recordaba a menudo, ya con doce años repetía sin cesar que quería ser profesor de matemáticas. Estudió los primeros cursos de la carrera de Matemáticas en la Universidad de Sevilla y terminó la licenciatura en la Universidad Complutense de Madrid. Empezó a cumplir su sueño, se hizo profesor de instituto, dio sus primeras clases en La Rioja y tiempo después recaló en el IES San Juan Bautista de Madrid donde permaneció los últimos 25 años.

Desde sus comienzos Joaquín destacó por su forma de enseñar matemáticas. Pasión, rigor, problemas y amor por sus alumnos, fueron los cuatro pilares que sustentaron su actividad profesional. Siempre creyó que una selección adecuada de los problemas era la mejor manera de enganchar a los alumnos y todo ello sin perder nunca el rigor necesario. A esto le añadía un entusiasmo contagioso, daba igual que estuviera justificando que el ángulo inscrito que abarca un diámetro es recto, o que se encontrara resolviendo una sencilla ecuación, sus pizarras llenas de su inconfundible letra daban testimonio de su entrega ilimitada. Como además respetaba y quería a todos sus alumnos, Joaquín se convirtió en un profesor admirado por estudiantes y compañeros, en todos ellos dejó huella y la lista de vocaciones matemáticas que despertó es enorme. Joaquín ha sido capaz de acercar dos mundos que tanto se necesitan y que muchas veces parecen lejanos: la enseñanza secundaria y la universitaria.

Y, como él decía, comenzó a *producir*. Además de profesor de instituto, Joaquín ha sido…

– Director de Instituto en IES Rafael Alberti, de Coslada

– Profesor en la Facultad de Matemáticas de la UCM.

– Profesor del Máster de Formación del Profesorado en Matemáticas en la UCM.

– Preparador de estudiantes para las Olimpiadas Matemáticas.

– Ponente en infinidad de cursos dirigidos a profesores de secundaria.

– Uno de los creadores del Concurso de Primavera de Matemáticas de la Comunidad de Madrid. La mayor reunión matemática del país que mueve anualmente más de 50.000 alumnos de Secundaria y Bachillerato. Concurso que se ha extendido a La Rioja y al País Vasco.

– Creador del Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid que ahora, por decisión de sus organizadores, lleva el nombre de Joaquín Hernández. Un original concurso por equipos para centros escolares que participan en tres pruebas (individual, equipos y relevos). La próxima edición será la XIX.

– Principal responsable en los últimos años del Concurso Puig Adam de resolución de problemas, destinado a estudiantes de 3º ESO, 4º ESO y 1º BACH. Este curso se celebrará la XXXVII edición.

– Profesor pionero del Proyecto ESTALMAT en Madrid. Un proyecto destinado a detectar y estimular el talento matemático entre niños de 12 y 13 años. El proyecto se inició en Madrid en 1998 y actualmente está funcionando en diez comunidades autónomas.

– Profesor pionero de la Escuela de Pensamiento Matemático de Torrelodones, creada en 2003.

– Fundador de la editorial La Tortuga de Aquiles.

– Autor de libros de texto (3º ESO, 4º ESO y BACH) de Matemáticas de la editorial SM.

– Autor de numerosos libros de divulgación matemática en la editorial Nivola.

Y todas estas actividades realizadas con absoluta dedicación.

El pasado mes de junio, Joaquín recibió el Premio a la Mejor Historia Docente. Un reconocimiento que otorga *Smartick* a personas que han destacado en el ámbito de la educación matemática. ¡Qué merecido se lo tenía!

Pero las matemáticas y la docencia no lo eran todo en su vida. Tenía una pasión desaforada por la montaña y cada vez que podía iba al Pirineo a perderse por sus valles, cimas y senderos, que conocía de Este a Oeste. No era nada raro que mientras descansaba en un collado contemplando los picos nevados, después de horas de ascenso, te sorprendiera con alguna de sus preguntas, ¿qué es mayor, e^{π} o π^{e}?

Joaquín era trabajador, siempre aprendiendo, con ilusión contagiosa, alegre, sabía disfrutar, era buena persona, gran lector, interesado por muchísimos temas, dispuesto siempre a ayudar, humilde, generoso, con sentido del humor, comprensivo,… , ¡era la caña!

Pero más allá de su trabajo y de sus pasiones estaba su gran amor: su familia. Su mujer, Luisa, a la que adoraba y sus hijos, Alicia y Pedro, a los que quería con locura. A ellos les dedicamos este libro, un recuerdo agradecido y alegre de nuestro amigo y maestro Joaquín.

Como decía a sus alumnos cuando contestaban con especial acierto: ¡¡¡Tate!!!

Gracias, Joaquín, por compartir con nosotros tu pasión por la vida.

Comité Organizador del Concurso de Primavera

AGRADECMIENTOS:

A los participantes en el Concurso, a sus padres y profesores.

A los voluntarios que nos ayudan en la 2ª fase.

A la Facultad de Matemáticas de la UCM

Al vicerrectorado de alumnos de la UCM

A la Subdirección General de Formación del Profesorado de la Dirección General de Innovación, Becas y Ayudas a la Educación de la Consejería de Educación, Juventud y Deporte Comunidad de Madrid.

Alas editoriales Grupo **ANAYA** y Ediciones **SM.**

A Smartick

ÍNDICE

XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 21 de febrero de 2018

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

1 “¡Qué frío hace aquí!” dice Nadia. Lucía enciende la calefacción y en una hora la temperatura sube 15º. ¿A qué temperatura estaba la casa antes si ahora está a 23º?

A) 12º **B)** 2º **C)** 16º **D)** 38º **E)** 8º

2 Luca compró doce cuadernos, pagó con un billete de 20 € y le devolvieron 5,12 €. ¿Cuánto le devolvieron a Lino que compró seis cuadernos y pagó con un billete de 10 €?

A) 5,12 € **B)** 4,98 € **C)** 4,56 € **D)** 4,12 € **E)** 2,56 €

3 En mi clase se han presentado tres chicos y cinco chicas como candidatos para formar parte del grupo de mediación. En mi papeleta debo escribir el nombre de un chico y de una chica. Si todos me parecen buenos candidatos, ¿de cuántas formas podré rellenar la papeleta?

A) 3 **B)** 5 **C)** 8 **D)** 15 **E)** 18

4 El rollo de cocina que tenemos en el aula de plástica tiene 82,5 metros de largo y 22 cm de ancho. Está troquelado para cortar servilletas cuadradas. ¿Cuántas servilletas tiene el rollo?

A) 350 **B)** 3500 **C)** 35 000 **D)** 375 **E)** 3750

5 Santiago tiene un bote lleno de monedas de dos céntimos. Para calcular el dinero que tiene ha pesado un bote igual, pero vacío, y el bote lleno. El primero pesa 250 g y el segundo 1,7 kg. Después ha averiguado en internet que una moneda de 2 céntimos pesa 3,06 g. ¿Qué número aproxima mejor la cantidad de dinero que hay en el bote?

A) 1 € **B)** 5 € **C)** 10 € **D)** 50 € **E)** 100 €

6 Miguel es muy pequeñín. Come cada cuatro horas y hace caca cada dieciocho. El lunes a las 10:00 ocurrió el terrible momento en que hace las dos cosas a la vez. ¿Cuándo volverán a coincidir ambos eventos por primera vez?

A) El lunes a las 22:00 **B)** El martes a las 10:00 **C)** El martes a las 18:00

D) El martes a las 22:00 **E)** El miércoles a las 18:00

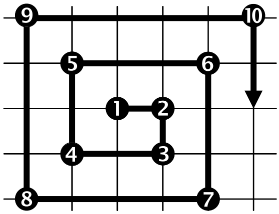
7 Diego ha aprendido hoy el criterio de divisibilidad del 3: *Un número es múltiplo de tres si la suma de sus cifras es múltiplo de tres*. Adriana le propone un reto: “Dime qué número puedo poner en el hueco para que sea múltiplo de tres este número tan largo: 23 □ 41775”. Diego le dice que hay más de una posibilidad. “Pues dime la suma de todos los posibles”, le dice Adriana. ¿Qué debe contestar Diego?

A) 9 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 18 **E)** 21

8 Marta tiene en su escritorio un bote con bolígrafos. La mitad de los bolis no pintan, y de los restantes, tres son azules, dos rojos y uno negro. Si coge un boli sin mirar, ¿qué probabilidad tiene de que pinte rojo?

A) $\frac{1}{6}$ **B)** $\frac{2}{6}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{7}$ **E)** $\frac{4}{12}$

9 Con estacas y cuerda Joaquín está construyendo esta bonita espiral. Si entre la estaca 1 y la 2 hay un metro de distancia, ¿cuántos metros de cuerda habrá utilizado en total cuando llegue a la estaca 20?



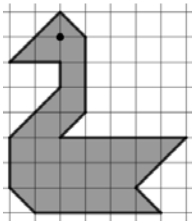
A) 80 **B)** 100 **C)** 120

D) 200 **E)** 240

10 En mi fiesta de cumpleaños Juan mezcló en un vaso *Trinafantus* con *Loca-Cola* al 50%. Olivia se bebió la mitad de la mezcla y, para disimular, rellenó el vaso con *Loca-Cola*. Después vino Rafa, se bebió la mitad y volvió a disimular rellenando el vaso con *Trinafantus*. ¿Qué fracción del líquido es ahora *Loca-Cola*?

A) $\frac{3}{8}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** $\frac{2}{5}$ **E)** $\frac{1}{4}$

11 Juanje ha dibujado al pato Gauss usando una cuadrícula de 1cm x 1cm. ¿Cuál es, en cm^2, el área del patito?



A) 20 **B)** 23,5 **C)** 24

D) 25 **E)** 25,5

12 Des-pa-ci-to, haz todos los cálculos muy despacito. Pasito a pasito, pon gran cuidadito y dinos qué cuenta da el resultado mayor.

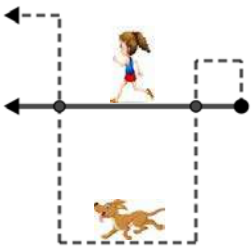
A) 10 + 3 x (5 – 2) **B)** 4 + 4 x 4 **C)** 23 – 14 + 2 x 3

D) 6 + 3 x 5 – 2 **E)** 215 – 199

13 Goraspita coge tres números, multiplica cada uno de ellos por sí mismo y después al mayor de esos productos le resta la suma de los otros dos productos. Por ejemplo, con el trío (8, 10, 3) obtendría: $10 \times 10 - (8 \times 8 + 3 \times 3) = 27$. Goraspita se pone muy contento cuando el resultado de la cuenta da cero. Para hoy se ha propuesto ver qué pasa con estos cuatro tríos de números: (3, 4, 5); (13, 10, 12); (12, 13, 5); (9, 12, 15). ¿Con cuántos de ellos obtendrá cero?

A) Con todos **B)** Con uno **C)** Con dos **D)** Con tres **E)** Con ninguno

14 Todas las mañanas Ana sale a correr 12 km acompañada de su perrita Phoebe. Ana lo hace en línea recta, pero Phoebe va y viene formando cuadrados alrededor de la trayectoria de Ana y cruzándose con ella de vez en cuando, como ves en la figura, hasta coincidir con ella al final de la trayectoria. ¿Cuántos kilómetros corre Phoebe?



A) 12 **B)** 24 **C)** 36 **D)** 48
E) Depende de la trayectoria

15 Alicia y María están en el duelo de *Saber y Ganar*. Alicia tiene 240 puntos y María 300. Tienen que apostar sobre la última pregunta de cada una. La que acierte su pregunta añadirá a su cuenta los puntos apostados, restando la mitad de estos a la cuenta de la otra. Si falla perderá de su cuenta los puntos apostados, sumando la mitad de estos a la cuenta de la otra. Alicia apostó 80 puntos y acertó. María apostó 60 y falló. ¿Con cuántos puntos se quedó María?

A) 220 **B)** 240 **C)** 180 **D)** 200 **E)** 160

16 A la niña Centésima le encanta jugar a las sumas. Pone las cuatro tarjetas de la figura sobre la mesa, coge el número de tarjetas que quiere y suma los números que hay en ellas. ¿Cuántos números entre 2 y 21 no podrá obtener Centésima al hacer las sumas?

A) 7 **B)** 9 **C)** 5 **D)** 8 **E)** 11

17 Comenúmeros estaba hambriento y se ha comido todas las cifras que son números primos que ha encontrado en la lista de números del 100 al 199:

100 – 101 – 10**– 10** **– 104 – 10** **–...**

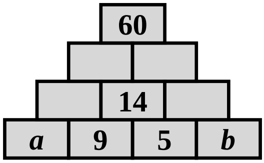
¿Cuántas cifras se ha merendado el glotón?

A) 40 **B)** 60 **C)** 70 **D)** 80 **E)** 90

18 Sofía recogió un cesto de manzanas del jardín. Le dio la mitad de las manzanas a Fernando. Después le dio tres manzanas a Martita, cuatro a Richi y aún quedaron seis para ella. ¿Cuántas manzanas recogió Sofía?

A) 13 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 24 **E)** 26

19 En esta pirámide, el número de cada ladrillo es la suma de los dos que están en los ladrillos que tiene justo debajo. ¿Cuánto debe valer ***a*** + ***b*** si queremos llegar al 60?



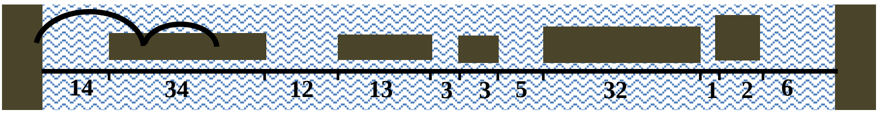
A) 12 **B)** 18 **C)** 32

D) 46 **E)** No se puede saber

20 Un número es impar de orden 1 si es impar y al sumarle 1 y dividir por 2 sale par.
Un número es impar de orden 2 si es impar y al sumarle 1 y dividir por 2 el resultado es un impar de orden 1.
Un número es impar de orden 3 si es impar y al sumarle 1 y dividir por 2 el resultado es un impar de orden 2.
Y así sucesivamente... ¿Cuál de los siguientes números es el impar con mayor orden?

A) 25 **B)** 29 **C)** 33 **D)** 37 **E)** 41

21 Pataplúm, la pulga saltarina, puede recorrer hasta 20 metros de un solo salto. Hoy quiere cruzar el río de la figura saltando de isla en isla sin mojarse. ¿Cuál es el mínimo número de saltos que tiene que dar Pataplúm para llegar de una orilla a la otra? (En el dibujo, que no está a escala, todas las medidas están en metros).



A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

22 Formamos una secuencia comenzando con los números 1, 2 y 3. El cuarto número es la suma de los tres anteriores: 1 + 2 + 3 = 6, y el quinto la suma de los tres anteriores: 2 + 3 + 6 = 11. Si seguimos así, ¿qué número ocupará la novena posición?

A) 125 **B)** 37 **C)** 68 **D)** 230 **E)** 59

23 Esteban y Carmen juegan al quién es quién con números. Carmen ha elegido uno de estos dieciséis números. Esteban pregunta y Carmen contesta:

99	27	60	120
21	332	303	214
18	435	15	42
17	224	25	130

— ¿Es par? No.
— ¿Es múltiplo de tres? Sí.
— ¿La suma de sus cifras es un número par? Sí.

¿Cuánto suman todos los números que pudo haber pensado Carmen?

A) 417 **B)** 852 **C)** 549 **D)** 879 **E)** 1076

24 “¡La base de mi rectángulo mide el doble que su altura!”, grita Lucía. “¡Pues la altura del mío mide el triple que su base!”, exclama Julián. Si la base del de Julián mide lo mismo que la altura del de Lucía y el de Lucía tiene 54 cm de perímetro, ¿cuál es el perímetro del de Julián?

A) 108 cm **B)** 81 cm **C)** 72 cm **D)** 54 cm **E)** 27 cm

25 Y para terminar, Don Retorcido pregunta: “Adivina, adivinanza. ¿Cómo se llama el polígono de cuatro lados cuyas diagonales, que se cortan en su punto medio, son distintas y perpendiculares entre sí?”

A) Rectángulo **B)** Romboide **C)** Trapecio **D)** Cuadrado **E)** Rombo

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 21 de febrero de 2018

NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

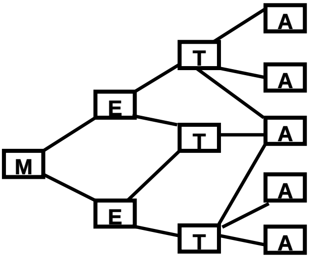
ORGANIZA
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

1 ¿Cuántos caminos diferentes hay para conseguir la **META**?

A) 11 **B)** 8 **C)** 30

D) 18 **E)** 5



2 En el zoo juegan con números: Alce y Buey escriben, cada uno de ellos, un número de tres cifras; Cocodrilo y Delfín escriben, cada uno, un número de una sola cifra; y Elefante escribe un 5. Al sumarlos todos obtengo 2018 y a ti te pregunto: ¿Cuánto suman todas las cifras de los números de los cinco animales?

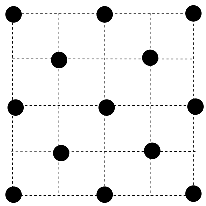
A) 74 **B)** 11 **C)** 59 **D)** 37 **E)** 69

3 Panda tarda 24 minutos en limpiar una piña y Perezoso, mucho más lento, tarda 3 horas. Si los dos trabajan juntos para el gran banquete, ¿en cuánto tiempo limpiarán 51 piñas?

A) 18 h **B)** 16 h **C)** 17 h

D) 25 h 30 min **E)** 86 h 42 min

4 Candela dibuja una cuadrícula en la que el lado de cada cuadradito mide 1 cm. Isabel señala trece puntos en esa cuadrícula. Gabriela dibuja todos los cuadrados posibles que pueden formarse usando esos puntos como vértices. Don Retorcido, que no para, te pregunta: ¿Cuánto suman las áreas, en cm^2, de todos esos cuadrados que dibujó Gabriela?



A) 36 **B)** 44 **C)** 48 **D)** 64 **E)** 52

5 Lo sentimos pero en este problema solo puedes trabajar con números de seis cifras formados únicamente por unos y doses. En estas condiciones, ¿cuál es la resta del mayor múltiplo de nueve y el menor múltiplo de seis?

A) 111 000 **B)** 90 909 **C)** 110 990 **D)** 110 889 **E)** 111 111

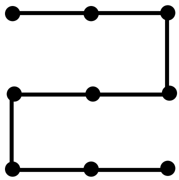
6 Por allí vienen las trillizas a toda velocidad. Abren el cajón de sus calcetines, todos desparejados y revueltos: ocho rojos, diez negros y doce azules. Hay muy poca luz y no distinguen bien los colores. ¿Cuántos calcetines tienen que coger como mínimo para asegurarse de que cada una obtenga un par de calcetines del mismo color?

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

7 En el ascensor del gran pino pueden montarse como máximo 102 ardillas o 68 mapaches. Si acaban de subirse 42 ardillas, ¿cuántos mapaches pueden subirse todavía hasta llenar el ascensor?

A) 60 **B)** 40 **C)** 28 **D)** 26 **E)** 30

8 Noor quiere poner en su móvil una clave de desbloqueo que cumpla estas condiciones: tiene que empezar en el vértice superior de la izquierda; ha de pasar por los nueve puntos sin cruzarse nunca con ningún camino anterior; y todos los trazos han de ser horizontales o verticales pero no valen oblicuos. Aquí te mostramos una posible clave. ¿Cuántas claves diferentes tiene Noor para elegir?



A) 5 **B)** 6 **C)** 10 **D)** 4 **E)** 8

9 Dos amigas coleccionan círculos, unos rojos y otros verdes. Los tres quintos de los círculos de Andrea son rojos y la mitad de los círculos de Paula son rojos. Sabiendo que ambas tienen la misma cantidad de círculos rojos, ¿qué podemos asegurar del número A de círculos verdes de Andrea y el número P de los verdes de Paula?

A) $6A = 5P$ **B)** $3A = 2P$ **C)** $2A = 3P$ **D)** $A = 3P$ **E)** $5A = 6P$

10 Un número es impar de orden 1 si es impar y al sumarle 1 y dividir por 2 sale par.
Un número es impar de orden 2 si es impar y al sumarle 1 y dividir por 2 el resultado es un impar de orden 1.
Un número es impar de orden 3 si es impar y al sumarle 1 y dividir por 2 el resultado es un impar de orden 2. Y así sucesivamente...
Si 65 es el primer impar de orden 6, ¿cuál es el primer impar de orden 7?

A) 131 **B)** 129 **C)** 121 **D)** 97 **E)** 85

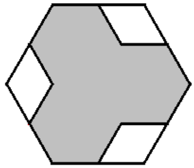
11 Profe, se me dan fatal los números decimales, me lío con las comas.
¡Ah, ¿sí?!, gritó Don Retorcido, ¿pues a ver si resuelves esta operación que me puso mi profesor cuando yo era como tú? $(0{,}2 \cdot 0{,}03)$ **:** $(0{,}004 \cdot 0{,}0005)$

A) 3000 **B)** 400 **C)** 0,003 **D)** 30 000 **E)** 0,000 000 012

12 Si un número termina en la cifra 4, su cubo también termina en 4. ¿Cuántas terminaciones se conservan al elevar al cubo?

A) Cuatro **B)** Cinco **C)** Seis **D)** Ocho **E)** Las diez

13 Dos de los vértices de los rombos que se ven en la figura son puntos medios de los lados del hexágono regular. Si el área del hexágono es de 36 cm^2, el área, en cm^2, de la zona sombreada es:



A) 33 **B)** 30 **C)** 27
D) 24 **E)** 21

14 He repartido mi bizcocho entre mis tres amigos. En principio, di a Don Retorcido 2/3 del total; a Comenúmeros 1/5 del total; y lo que sobró para Mozart. Al instante, Comenúmeros protestó y Don Retorcido, gruñendo, le dijo "anda, comilón, toma 1/4 de mi parte". Mozart quedó triste y Don Retorcido le dio 1/5 de lo que ahora tenía. Si después de la última negociación el trozo de Mozart pesaba 140 gramos, ¿cuántos gramos pesaba la porción final de Comenúmeros?

A) 180 **B)** 220 **C)** 140 **D)** 240 **E)** 200

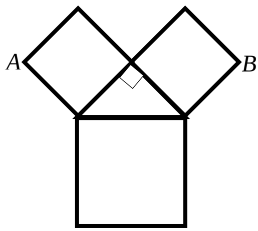
15 ¿No conocéis a la niña Centésima? Es una niña que disfruta con las matemáticas y siempre está inventándose problemas. Este es el primero que pone en nuestro concurso:
Mi número favorito es el 5 *y por eso he pensado en el número* A *que está formado por* 55 *cincos. Si multiplico el número* A *por* 1001 *me sale un número grandísimo al que llamo* B. ¿*Cuánto suman las cifras del número* B? (¡Jolines con la niña Centésima!)

A) 82 **B)** 81 **C)** 290 **D)** 30 **E)** 289

16 ¿A qué exponente hay que elevar 8 para obtener 16^{21}?

A) 42 **B)** 63 **C)** 168 **D)** 28 **E)** 62

17 La figura que te mostramos está formada por un triángulo rectángulo isósceles y tres cuadrados. Si la distancia entre *A* y *B* son 12 cm, ¿cuál es el área, en cm^2, de la figura?



A) 108 **B)** 90 **C)** 84
D) 72 **E)** 81

18 ¿Cuánto vale el número $x = 10 + 11 - 12 - 13 + 14 + 15 - 16 - 17 + ... + 46 + 47 - 48 - 49 + 50$?

A) 49 **B)** 10 **C)** –29 **D)** 50 **E)** 70

19 Alicia y María están en el duelo de *Saber y Ganar*. Alicia tiene 240 puntos y María 300. Tienen que apostar sobre la última pregunta de cada una. La que acierte su pregunta añadirá a su cuenta los puntos apostados, restando la mitad de estos a la cuenta de la otra. Si falla perderá de su cuenta los puntos apostados, sumando la mitad de estos a la cuenta de la otra. Alicia apostó 80 puntos y acertó. María apostó 60 y falló. ¿Cuál es la diferencia de puntos entre las puntuaciones finales de Alicia y María?

A) 150 **B)** 140 **C)** 139 **D)** 120 **E)** 100

20 Luis juega con cinco cartas ABCDE a desordenarlas de una curiosa manera.
Cambio 1: coge la carta del centro y la pone la primera, quedando CABDE.
Cambio 2: coge la última carta y la pone en el medio, quedando CAEBD.
El cambio 3 es igual que el cambio 1, el cambio 4 es igual que el cambio 2 y así sucesivamente.
Y así sigue sin pausa hasta que al realizar el cambio número 2018 queda agotado. ¿Qué carta ocupa la primera posición?

A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

21 Con los porcentajes hay que andarse con cuidado. ¿Cuáles de las siguientes frases son verdaderas?

P) El 27 % de 39 es igual al 39 % de 27.

Q) El 20 % del 30 % de cierta cantidad es lo mismo que el 60 % de dicha cantidad.

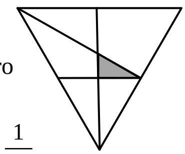
R) Una cantidad menos su 20 % es lo mismo que el 80 % de esa cantidad.

A) Solo R **B)** Solo Q y R **C)** Solo P y R **D)** Las tres **E)** Solo P

22 Si a y b son números no nulos que cumplen $3a + 2b = 5a + b$, ¿cuánto vale b dividido entre a?

A) 3 **B)** 8 **C)** 1 **D)** 2 **E)** 0,5

23 En el triángulo equilátero hemos marcado los puntos medios de cada lado y aprovechándolos, hemos construido el triángulo relleno de pintura gris. ¿Qué fracción del triángulo equilátero ocupa el triángulo gris?



A) $\frac{1}{12}$ **B)** $\frac{1}{24}$ **C)** $\frac{1}{8}$ **D)** $\frac{1}{16}$ **E)** $\frac{1}{32}$

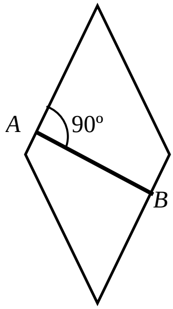
24 Cati se jubila y el último día de clase sus alumnos le regalan este problema:
Profe, te aseguramos que solo uno de estos números es un cuadrado perfecto. ¿Cuál es?

A) 346 927 **B)** 346 928 **C)** 346 923 **D)** 346 922 **E)** 346 921

25 Terminamos con un rombo. Si el perímetro del rombo mide 24 cm y su área 24 cm^2, ¿cuál es la longitud, en cm, del segmento *AB*?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4

D) 5 **E)** 6



XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 21 de febrero de 2018

NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

Cada respuesta ***correcta*** *te aportará*	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes ***en blanco***	***1 puntos***
Cada respuesta ***errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** X LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

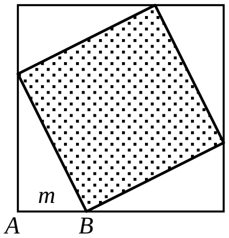
ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

1 En un cuadrado de lado 1 inscribimos un segundo cuadrado como vemos en la figura. Si $AB = m$, el área del cuadrado interior es:



A) $m^2 + 2m + 1$ **B)** $m^2 - 2m + 1$

C) $2m^2 - 2m + 1$ **D)** $2m^2 + 2m + 1$

E) $m^2 + m + 1$

2 Dos descuentos sucesivos del 10 % y del 20 % son equivalentes a un descuento del:

A) 30 % **B)** 15 % **C)** 25 % **D)** 28 % **E)** 35 %

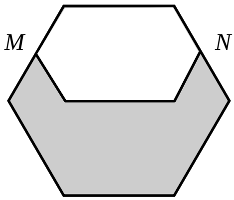
3 Una escalera de 25 m de longitud está apoyada en una pared vertical, de forma que el pie de la escalera dista 7 m de la pared. Si la volvemos a colocar, estando ahora el punto más alto de la escalera 4 m más bajo que antes, ¿a qué distancia estará ahora el pie de la pared?

A) 9 m **B)** 10 m **C)** 11 m **D)** 12 m **E)** 15 m

4 Sean a y b son enteros positivos. Si $a + b$ y $a^3 + b^3$ terminan en 3, entonces $a^2 + b^2$ termina en:

A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

5 En la figura, M y N son puntos medios de dos lados del hexágono regular. El hexágono interior, no regular, tiene los lados paralelos e iguales dos a dos. Si el área del hexágono regular es 180 cm², el área, en cm², de la cabeza de gato (zona sombreada) es:



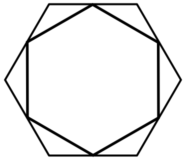
A) 105 **B)** 120 **C)** 126

D) 132 **E)** 144

6 Dos corredores A y B parten a la vez de Madrid a Alcalá, ciudades que distan 30 km entre sí. El corredor A va a una velocidad de 4 km/h menos que el B. Cuando el B llega a Alcalá da la vuelta y encuentra al A a 6 km de Alcalá. ¿Cuál es, en km/h, la velocidad del corredor A?

A) 4 **B)** 8 **C)** 12 **D)** 16 **E)** 20

7 Inscribimos en un hexágono regular otro hexágono regular cuyos vértices son los puntos medios de los lados del primero. ¿Cuál es el cociente entre el área del hexágono mayor y el área del inscrito?

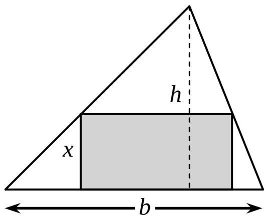


A) $\frac{6}{5}$ **B)** $\frac{3}{2}$ **C)** $\frac{4}{3}$ **D)** $\frac{5}{4}$ **E)** 2

8 ¿En cuál de las siguientes ecuaciones se verifica que y no es ni directa ni inversamente proporcional a x?

A) $x + y = 0$ **B)** $3xy = 10$ **C)** $x = 5y$ **D)** $3x + y = 10$ **E)** $\frac{x}{y} = \sqrt{3}$

9 En un triángulo de base b y altura h inscribimos un rectángulo como se muestra en la figura. Si la altura x del rectángulo es la mitad de la base de dicho rectángulo, entonces se verifica que:



A) $x = \frac{h}{2}$ **B)** $x = \frac{bh}{b+h}$ **C)** $x = \frac{bh}{b+2h}$

D) $x = \sqrt{\frac{bh}{2}}$ **E)** $x = \frac{b}{2}$

10 El cociente entre el área del cuadrado inscrito en una circunferencia y el área del cuadrado circunscrito a la misma circunferencia es:

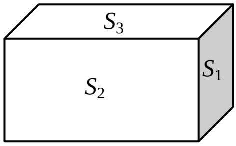
A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{2}{3}$ **C)** $\frac{2}{5}$ **D)** $\frac{3}{4}$ **E)** $\frac{3}{5}$

11 Si x e y son números positivos, con $x > y$, $z \neq 0$, la desigualdad que no siempre es verdadera es:

A) $x + z > y + z$ **B)** $x - z > y - z$ **C)** $x z > y z$ **D)** $\frac{x}{z^2} > \frac{y}{z^2}$

E) $x z^2 > y z^2$

12 De un paralelepípedo (caja rectangular) conocemos el área de la cara lateral, S_1, de la cara frontal, S_2, y de la cara superior, S_3. Si V es el volumen de la caja, entonces:



A) $S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 = V$ **B)** $S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 = \sqrt{V}$

C) $S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 = 2V$ **D)** $S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 = V^2$ **E)** $S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 = V^3$

13 Tomamos un número cualquiera de tres cifras, *abc*, y con él formamos el número de seis cifras N = *abc abc*. Entonces podemos asegurar que el número N es divisible por:

A) 14 **B)** 26 **C)** 33 **D)** 99 **E)** 143

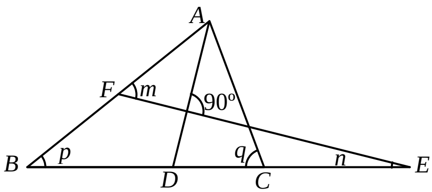
14 El área de un trapecio es 1400 cm^2 y su altura 50 cm. Nos piden encontrar la longitud de las bases sabiendo que ambas longitudes, en cm, son múltiplos de 8. El número de soluciones del problema es:

A) Ninguna **B)** Una **C)** Dos **D)** Tres **E)** Más de tres

15 Un triángulo y un trapecio tienen la misma área y la misma altura. Si la base del triángulo mide 18 cm, la longitud de la paralela media del trapecio es:

A) 30 cm **B)** 9 cm **C)** 18 cm
D) No se puede obtener con esos datos **E)** Nada de lo anterior

16 En el triángulo *ABC* de la figura, *AD* es la bisectriz del ángulo $\hat{A}$ y perpendicular a *EF*. Llamando a los ángulos marcados como se indica en la figura, entonces se verifica que:

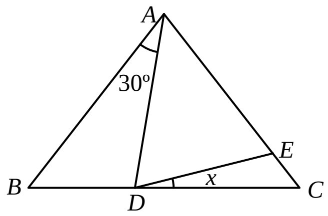


A) $m = \frac{1}{2}(p - q)$ **B)** $m = \frac{1}{2}(p + q)$ **C)** $n = \frac{1}{2}(p + q)$

D) $n = \frac{1}{2}m$ **E)** Nada de lo anterior

17 En la figura adjunta $AB = AC$, $B\hat{A}D = 30^{o}$ y $AE = AD$.

La medida del ángulo x es:



A) 7º 30´ **B)** 10º **C)** 12º 30´

D) 15º **E)** 20º

18 ¿Cuántos triángulos escalenos hay, de perímetro menor que 13, que tengan la medida de sus lados expresada con números enteros?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 18

19 Sacamos al azar tres tarjetas de una caja que contiene cinco tarjetas numeradas del 1 al 5. ¿Cuál es la probabilidad de que el mayor número que aparece en las tarjetas sea el 4?

A) $\frac{3}{10}$ **B)** $\frac{1}{10}$ **C)** $\frac{1}{5}$ **D)** $\frac{2}{5}$ **E)** $\frac{1}{2}$

20 Si M es un entero positivo, designamos por $M!$ al producto $1·2·3·\ldots·M$. ¿Cuál es el mayor entero n para el que 5^n es divisor de $98! + 99!+100!$?

A) 23 **B)** 24 **C)** 25 **D)** 26 **E)** 27

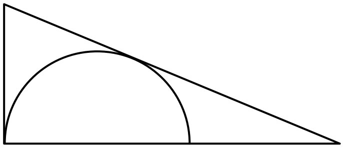
21 Elegimos al azar un entero entre 1000 y 9999. ¿Cuál es la probabilidad de que sea impar y con todos sus dígitos diferentes?

A) $\frac{14}{75}$ **B)** $\frac{56}{225}$ **C)** $\frac{107}{400}$ **D)** $\frac{7}{25}$ **E)** $\frac{9}{25}$

22 Si a, b y c son números reales no nulos y $a + b + c = 0$, ¿cuál es el valor o los posibles valores de $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$?

A) 0 **B)** 1 y –1 **C)** 2 y –2 **D)** 0, 2 y –2 **E)** 0, 1 y –1

23 En el triángulo rectángulo de catetos 5 y 12 inscribimos una semicircunferencia como muestra la figura. ¿Cuál es su radio?



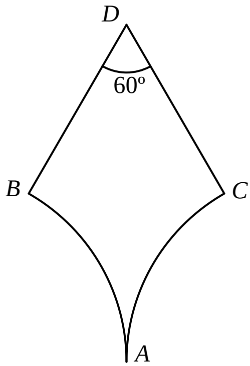
A) $\frac{17}{6}$ **B)** $\frac{13}{5}$ **C)** $\frac{59}{18}$

D) $\frac{10}{3}$ **E)** $\frac{60}{17}$

24 María tiene tres nietos que la llaman por teléfono regularmente. Uno cada 3 días, otro cada 4 y el otro cada 5. El 31 de diciembre de 2017 la llamaron los tres. ¿Cuántos días del año 2018 no recibirá ninguna llamada?

A) 78 **B)** 80 **C)** 144 **D)** 146 **E)** 152

25 En la figura que observas, DB y DC son segmentos de longitud 2, el ángulo $B\hat{D}C$ es de 60º y los arcos BA y CA son iguales y miden un sexto de la longitud de una circunferencia de radio 2. ¿Cuál es el área de la figura?



A) $3\sqrt{3}-\pi$ **B)** $4\sqrt{3}-\frac{4\pi}{3}$

C) $2\sqrt{3}$ **D)** $4\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$

E) $4+\frac{4\pi}{3}$

XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 21 de febrero de 2018

NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

1 La raíz cúbica de $3^{\left(3^3\right)}$ es:

A) 3^3 **B)** $3^{\left(3^3-1\right)}$ **C)** $3^{\left(2^3\right)}$ **D)** $3^{\left(3^2\right)}$ **E)** $\left(\sqrt[3]{3}\right)^3$

2 Seis gatos se comieron 20 ratones. El primer gato se comió un ratón, el segundo dos y el tercero tres. El cuarto gato se comió más ratones que cualquiera de los otros cinco. ¿Cuál es el mínimo número de ratones que se pudo comer el cuarto gato?

A) 8 **B)** 7 **C)** 6 **D)** 5 **E)** 4

3 Las gráficas de las funciones $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ y $g(x) = 2x$ se cortan en:

A) Un punto de abscisa 2 **B)** Un punto de abscisa 0 **C)** Ningún punto
D) En dos puntos **E)** Más de dos puntos

4 Las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son una inversa de la otra siempre que:

A) $a = c$ **B)** $a = bc$ **C)** $a = b$ **D)** $b = c$ **E)** $c = ab$

5 Si m y n son números impares, con $m > n$, el mayor entero que divide a todos los posibles números de la forma $m^2 - n^2$ es:

A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 16

6 Las expresiones $a + bc$ y $(a + b)(a + c)$ son:

A) Siempre iguales **B)** Nunca iguales **C)** Iguales si $a + b + c = 1$
D) Iguales si $a + b + c = 0$ **E)** Iguales solamente cuando $a = b = c = 0$

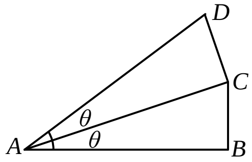
7 Los números reales x, y, z verifican las desigualdades $0 < x < 1$, $-1 < y < 0$, $1 < z < 2$. De los siguientes números, ¿cuál es, con seguridad, positivo?

A) $y + x^3$ **B)** $y + xz$ **C)** $y + y^2$ **D)** $y + 2y^2$ **E)** $y + z$

8 ¿Cuál de las siguientes funciones tiene su gráfica simétrica respecto del eje de ordenadas?

A) $y = x^2 + x$ **B)** $y = x^2 \operatorname{sen} x$ **C)** $y = x \cos x$ **D)** $y = x \operatorname{sen} x$ **E)** $y = x^3$

9 En la figura adjunta, AB = 1, $A\hat{B}C = A\hat{C}D = 90^{\text{o}}$ y $C\hat{A}B = D\hat{A}C = \theta$. ¿Cuál es la longitud de AD?



A) $\cos\theta + tg\theta$ **B)** $\dfrac{1}{\cos 2\theta}$ **C)** $\cos^2\theta$

D) $\cos 2\theta$ **E)** $\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

10 Se considera la sucesión de números $10^{\frac{1}{13}}, 10^{\frac{2}{13}}, 10^{\frac{3}{13}}, \ldots, 10^{\frac{n}{13}}, \ldots$ ¿Cuál es el menor entero positivo n tal que el producto de los n primeros términos de la sucesión es mayor que 100 000?

A) 8 **B)** 7 **C)** 6 **D)** 5 **E)** 11

11 El complejo sen 300º– i cos 300º se puede también escribir como:

A) $1_{210^{\text{o}}}$ **B)** $1_{150^{\text{o}}}$ **C)** $1_{240^{\text{o}}}$ **D)** $1_{120^{\text{o}}}$ **E)** $1_{330^{\text{o}}}$

12 Si a, b y c son números positivos que verifican el sistema $\begin{cases} ab = 26 \\ ac = 128 \\ bc = 52 \end{cases}$, la suma $a + b + c$ es igual a:

A) 29 **B)** $\dfrac{37}{2}$ **C)** 49 **D)** $\dfrac{93}{4}$ **E)** $\dfrac{109}{4}$

13 La suma de las cifras del mayor número menor que 1000, con cuatro divisores primos diferentes es:

A) 10 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 18 **E)** 21

14 Si $f(x) = ax + b$ y $f^{-1}(x) = bx + a$, ¿cuál es el valor de $a + b$?

A) –2 **B)** –1 **C)** 0 **D)** 1 **E)** 2

15 Si $4^x = 9$ y $9^y = 256$, el producto xy es igual a:

A) 21 **B)** 4 **C)** 10 **D)** 36 **E)** 48

16 Si m y n son enteros positivos con $n > 1$ y tales que $m^n = 2^{25} \cdot 3^{40}$, $m + n$ es igual a:

A) 209 962 **B)** 1954 **C)** 209 957 **D)** 6598 **E)** 2018

17 ¿Cuál de los siguientes números es igual a la suma de 100 enteros consecutivos?

A) 1 627 384 950 **B)** 2 345 678 910 **C)** 3 579 111 300
D) 4 692 581 470 **E)** 5 815 937 260

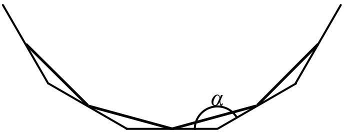
18 En un programa de televisión hay tres cuestiones de opción múltiple con tres respuestas cada una. Un concursante contesta al azar y gana si acierta al menos dos de las cuestiones. ¿Cuál es la probabilidad de que gane?

A) $\frac{1}{27}$ **B)** $\frac{1}{9}$ **C)** $\frac{2}{9}$ **D)** $\frac{7}{27}$ **E)** $\frac{1}{2}$

19 Alicia no se quiere sentar al lado de Beatriz ni al lado de Carlos. Darío no se quiere sentar al lado de Emilio. ¿De cuántas formas pueden sentarse los cinco en una fila de cinco sillas?

A) 12 **B)** 16 **C)** 28 **D)** 32 **E)** 40

20 El cociente entre las áreas del polígono regular de ángulo interior α y el polígono regular inscrito en él con vértices en los puntos medios de los lados es:

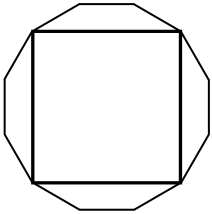


A) $\frac{2}{1-\cos\alpha}$ **B)** $\frac{2}{1+\cos\alpha}$ **C)** $\frac{4}{1+sen\alpha}$ **D)** $\frac{4}{2-\cos\alpha}$ **E)** 2

21 En el conjunto de enteros positivos definimos una función f tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para cualesquiera x e y. Si $f(10) = 14$ y $f(40) = 20$, ¿cuál es el valor de $f(500)$?

A) 29 **B)** 30 **C)** 39 **D)** 48 **E)** 50

22 El cuadrado de la figura tiene de área 2 dm^2. El área, en dm^2, del dodecágono regular circunscrito es:



A) $1+\sqrt{2}$ **B)** $2\sqrt{2}$ **C)** 3

D) $3\sqrt{2}-1$ **E)** 4

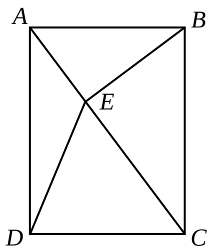
23 Pablo recuerda que la clave que puso en la cerradura de su maleta era de cuatro cifras distintas y solo dos eran impares. ¿Cuántas claves, como máximo, deberá introducir para abrir la maleta?

A) 2400 **B)** 2000 **C)** 1896 **D)** 1800 **E)** 1680

24 En un triángulo rectángulo de catetos a y b, si llamamos x a la altura sobre la hipotenusa, se verifica:

A) $ab = x^2$ **B)** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x}$ **C)** $\frac{1}{x}=\frac{b}{a}$ **D)** $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{x^2}$ **E)** $a^2+b^2=2x^2$

25 Las dimensiones del rectángulo de la figura son AB = 3 y BC = 4. Si el punto E es el pie de la perpendicular desde B a la diagonal AC, ¿cuál es el área del triángulo AED?



A) 1 **B)** $\frac{42}{25}$ **C)** $\frac{28}{15}$

D) 2 **E)** $\frac{54}{25}$

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 21 de abril de 2018

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

PUNTUACIÓN

En los problemas 1 a 13:

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	**5 *puntos***
*Cada pregunta **en blanco o errónea***	**0 *puntos***

En los problemas 14 a 25:

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.
SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

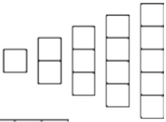
COLABORAN

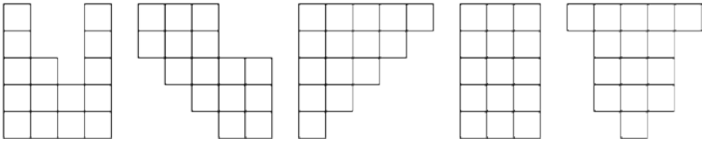
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

1 El número 42 es el resultado de multiplicar dos números de una sola cifra, $42 = 6 \times 7$. ¿Cuántos números mayores que 40 son producto de dos números de una sola cifra?

A) Doce **B)** Once **C)** Diez **D)** Nueve **E)** Ocho

2 Estas cinco piezas pueden colocarse para formar cuatro de las cinco figuras que ves abajo. ¿Cuál de ellas es la que no se puede formar?





A) **B)** **C)** **D)** **E)**

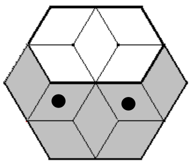
3 Cuando el viento sopla a favor el Capitán Primavera navega a 45 km/h y cuando sopla en contra lo hace a 25 km/h. Si hoy ha recorrido 310 km en 10 horas, a ratos con el viento a favor y a ratos con él en contra, ¿cuántas horas sopló el viento a favor?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

4 Una bolsa de garrapiñados cuesta 2 €. La gente compra las bolsas de una en una y paga con dos monedas de 1 € o con un billete de 5 €. Si hemos dispuesto de cien monedas de 1 € para dar cambio, y una de cada tres personas paga el precio exacto, ¿cuántas bolsas podremos vender como máximo sin ir a buscar más cambio?

A) 45 **B)** 51 **C)** 66 **D)** 75 **E)** 81

5 La figura hecha con diamantes es una cabeza de gato (zona sombreada) con diadema. Si la cabeza de gato tiene un perímetro de 48 cm, el perímetro, en cm, de la diadema es:



A) 32 **B)** 36 **C)** 30 **D)** 16

E) 24

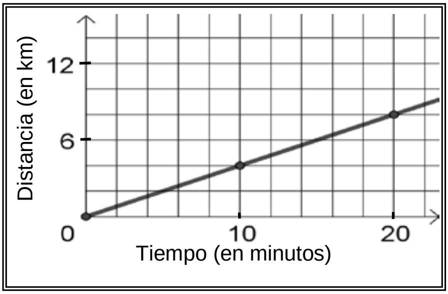
6 En 2018 celebramos la 22ª edición del Concurso de Primavera. ¿Qué edición celebraremos en 2081?

A) 92ª **B)** 85ª **C)** 93ª **D)** 89ª **E)** 84ª

7 Todo el mundo sabe que en Canarias hay una hora menos que en Madrid, pero tal vez no sepas que en Canarias hay tres horas más que en Buenos Aires. Y cuando en Buenos Aires son las diez de la mañana, en Nueva York aún son las ocho. Pero lo más sorprendente es que cuando en Nueva Delhi son las nueve y media de la noche, en Nueva York son las doce del mediodía. ¿Qué hora es en Madrid cuando en Nueva Delhi son las 21:00?

A) 15:30 **B)** 15:00 **C)** 6:00 **D)** 18:30 **E)** 17:30

8 La gráfica muestra la distancia que va recorriendo Irene con su bici. Si sigue a la misma velocidad durante una hora y media, ¿cuántos kilómetros recorrerá?



A) 20 **B)** 24 **C)** 32 **D)** 36 **E)** 40

9 He pensado un número, lo he dividido entre 3 y he obtenido el mismo resultado que si le hubiera restado 14. ¿Cuánto suman las cifras del número que he pensado?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

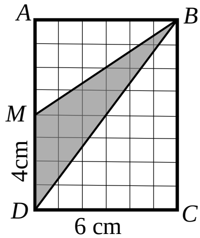
10 Esteban va a la playa con Ariel. Esteban se baña cada 20 minutos y sus baños duran 5 minutos. Ariel se baña cada media hora y sus baños duran un cuarto de hora. Si ambos salen del agua a las 10:00, ¿a partir de qué momento volverán a coincidir 5 minutos en el agua?

A) 12:00 **B)** 11:45 **C)** 11:30 **D)** 11:00 **E)** 10:15

11 Alfredo y Juanje saltan a la comba. Alfredo lo hace lentamente: uuuuno, dooos,…, pero Juanje va a toda velocidad: udotr… Tanto es así, que por cada dos saltos que da Alfredo, Juanje da siete. Los dos empiezan a saltar a la vez y cuando Alfredo ha terminado su entrenamiento después de 100 saltos, Juanje aún ha seguido y ha dado 50 saltos más. ¿Cuántos saltos ha dado Juanje en total?

A) 300 **B)** 400 **C)** 500 **D)** 350 **E)** 450

12 En el rectángulo *ABCD*, *AD* mide 8 cm y *AB* mide 6 cm. *M* es el punto medio del lado *AD*. ¿Cuál es, en cm^2, el área del triángulo sombreado *MBD*?



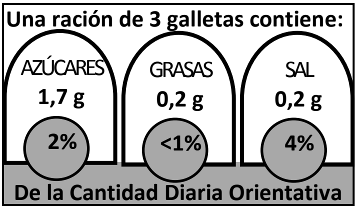
A) 8 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 12,5 **E)** 15

13 Inés tiene una cartulina rectangular de 594 mm por 841 mm.
Quiere hacer cuadrados de 15 cm de lado haciendo cortes siempre paralelos a los lados. ¿Cuántos cuadrados podrá hacer como máximo?

A) 10 **B)** 15 **C)** 18 **D)** 20 **E)** 24

A partir de aquí las respuestas en blanco valen un punto.

14 En esta etiqueta aparecen los gramos de azúcares, grasas y sal que contiene una ración de 3 galletas y el porcentaje de la cantidad diaria orientativa que representan dichos gramos. Según eso, ¿cuántos gramos de sal se corresponden con la cantidad diaria orientativa?



A) 0,9 **B)** 1,8 **C)** 5 **D)** 6,3 **E)** 9

15 ¡Mira cómo mola! Tengo un rectángulo de 24 cm de perímetro, pero si prolongo su altura 2 cm obtengo un cuadrado. ¿Cuál es el área de mi rectángulo?

A) 24 cm^2 **B)** 144 cm^2 **C)** 35 cm^2 **D)** 36 cm^2 **E)** 48 cm^2

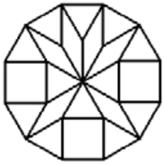
16 ¡Pues mi rectángulo mola mucho más! Su área es 24 cm^2 y si prolongo su base 2 cm obtengo un cuadrado. ¿Cuál es el perímetro de mi rectángulo?

A) 20 cm **B)** 12 cm **C)** 48 cm **D)** 16 cm **E)** 9 cm

17 En carnaval nos vamos a disfrazar de animales y el profesor nos ha dicho que tiene que haber ocho mamíferos, cinco aves, cuatro reptiles, cuatro peces y cuatro anfibios. Hemos metido 25 papelitos con los nombres de las especies en una bolsa para rifar quién irá de qué. Mariquilla quiere ir de sapo. Va a sacar su papelito en quinto lugar, cuando ya han salido dos mamíferos, un ave y un anfibio. Cruza los dedos y… ¿Qué probabilidad tiene de que le toque anfibio?

A) $\frac{4}{25}$ **B)** $\frac{3}{20}$ **C)** $\frac{3}{25}$ **D)** $\frac{1}{7}$ **E)** $\frac{1}{5}$

18 ¿Cuántos segmentos hay dibujados en la figura?



A) 36 **B)** 39 **C)** 42

D) 45 **E)** 48

19 Hada y Adán son dos tortolitos muy enamorados y el día de San Valentín se regalaron estas sumas. Si letras distintas representan cifras distintas, ¿cuánto vale la suma **N** + **I** + **D** + **O**?

	A	**M**	**O**
	+		**A**
A	**D**	**A**	**N**
O	**N**	**D**	**A**

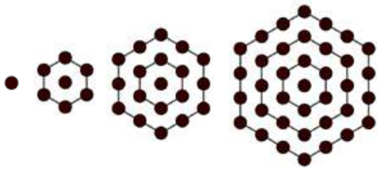
	A	**M**	**O**
	+		**A**
H	**A**	**D**	**A**
M	**I**	**M**	**O**

A) 13 **B)** 15 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 20

20 Los espías antiguos utilizaban el método de César para enviarse mensajes secretos. El método consiste en cambiar cada letra por la que está tres posiciones después en el orden alfabético. Si quieren escribir HOLA, escriben KRÑD. ¿Cuál de estos mensajes tiene sentido si se descifra usando el método de César?

A) HUUO **B)** FRUZ **C)** WDTI **D)** ELHP **E)** XEGW

21 El primer día del otoño Ardilleta encontró una nuez. El segundo encontró seis e hizo un hexágono alrededor de la primera nuez. Y quiso seguir cada día del otoño buscando las nueces necesarias para completar un nuevo hexágono, pero a los quince días ya estaba agotada. ¿Cuántas nueces tuvo que encontrar Ardilleta el último día?



A) 1200 **B)** 180 **C)** 108 **D)** 90 **E)** 84

22 Belén y Harry juegan al quién es quién con números. Belén ha elegido uno de estos dieciséis números. Harry hizo tres preguntas, Belén contestó afirmativamente a todas y con eso Harry supo con certeza absoluta cuál era el número. Si las dos primeras preguntas fueron ¿es un número par? y ¿la suma de sus cifras es menor que 16? ¿Cuál pudo ser la tercera pregunta?

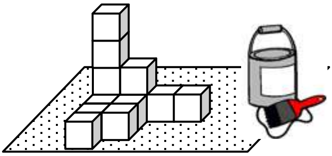
777	495	1000	888
301	238	658	735
357	26	764	336
154	343	922	989

A) ¿Es múltiplo de 4? **B)** ¿Una de sus cifras es 6?

C) ¿Es múltiplo de 7? **D)** ¿La suma de sus cifras es mayor que 18?

E) ¿La cifra de las unidades es 8?

23 Ferb ha hecho la construcción que ves con cubitos blancos y una vez terminada la ha pintado de rojo sin levantarla del suelo. Phineas, que venía distraído, ha tropezado con ella y los cubos han quedado desperdigados. ¿Cuántos de los cubitos tienen exactamente tres de sus caras pintadas de rojo?



A) Ninguno **B)** Uno **C)** Dos **D)** Tres **E)** Cuatro

24 La niña Centésima quería hacer esta enorme multiplicación:

6340502127 x 948300057

Pero antes de que empezara vino Comenúmeros y se comió todas las cifras impares, así que Centésima hizo una multiplicación mucho más pequeña con las cifras que quedaron. ¿Cuál es la suma de las cifras del resultado de la multiplicación que hizo Centésima?

A) 24 **B)** 26 **C)** 42 **D)** 18 **E)** 14

25 Y para terminar pregunta Don Retorcido: ¿Cuál es la suma de las cifras del menor número de cuatro cifras que es múltiplo de 7?

A) 2 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 21 de abril de 2018

NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

PUNTUACIÓN

En los problemas 1 a 13:

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	**5 *puntos***
*Cada pregunta **en blanco o errónea***	**0 *puntos***

En los problemas 14 a 25:

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.
SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

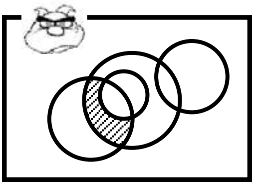
COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

1 ¿Preparados?, ¿listos?, ¡ya! Uno de fracciones para empezar. ¿Qué fracción hay que sumar a $1-\frac{2}{3}$ para obtener $4-\frac{5}{6}$?

A) $\frac{7}{2}$ **B)** $\frac{19}{6}$ **C)** $\frac{10}{3}$ **D)** $\frac{8}{3}$ **E)** $\frac{17}{6}$

2 Dentro del rectángulo grande, Comenúmeros ha colocado los veinte números naturales que hay desde el 1 hasta el 20. Ha distribuido dentro de cuatro círculos los que son múltiplos de 2, de 3, de 4 o de 7. ¿Cuántos números hay dentro de la región rayada?

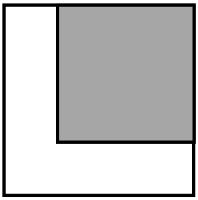


A) 5 **B)** 4 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 1

3 Daniel juega con sus relojes de arena que tienen todos media hora de duración. Da la vuelta a uno y cada 8 minutos va dando la vuelta a un nuevo reloj. Justo cuando lleva 47 minutos con este juego, ¿cuántos relojes tendrán todavía arena sin caer en la parte superior?

A) 7 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 3

4 Sobre mi cuadrado blanco ha caído encima uno gris cuyo lado mide 2 cm menos que el del blanco. Si la superficie visible blanca es de 36 cm^2, ¿cuántos centímetros mide el lado del cuadrado gris?



A) 8 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 7 **E)** 6

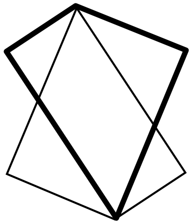
5 Tres amigos juegan con números de dos cifras. Cada uno escribe una pareja de números pero solo nos dejan ver uno de ellos: Daniel muestra el 14, Gabriel el 20 y Luis el 36. Y lo que son las casualidades, ¡los tres productos de cada pareja dan el mismo resultado! ¿Cuánto suman los tres números que no nos han enseñado los amigos?

A) 164 **B)** 188 **C)** 200 **D)** 70 **E)** 126

6 Don Retorcido ha cogido dos números a y b, enteros positivos. Ha visto que $a + b$ termina en 1 y que $a^2 + b^2$ termina en 3. ¿En qué cifra termina $a^{2018} + b^{2018}$?

A) 6 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 7 **E)** 3

7 Aprovechando dos rectángulos (uno de lados 5 cm y 15 cm y el otro de lados 9 cm y 13 cm) hemos diseñado una cometa como puedes ver en el boceto. ¿Qué área, en cm^2, tiene la cometa?



A) 60 **B)** 42 **C)** 96 **D)** 100 **E)** 82

8 Paula, Rubén, Miguelito y Luci se reunieron para celebrar la Primavera. Paula y Rubén compraron tres tartas iguales, Paula compró dos y Rubén una. Al final, como Miguelito y Luci no tenían dinero, pagaron a los dos compradores con 24 canicas. ¿Cuál es el reparto justo de las canicas entre Paula y Rubén?

A) 20 y 4 **B)** 16 y 8 **C)** 12 y 12 **D)** 18 y 6 **E)** 19 y 5

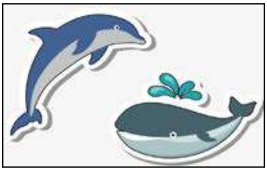
9 ¡Examen de divisiones enteras! (¡¡Biennnnn!!) Leed con calma estas cuatro afirmaciones:

I. Si multiplico por 3 el divisor el cociente quedará dividido entre 3.
II. Si divido entre 4 el dividendo y el divisor, el cociente quedará multiplicado por 4.
III. Si sumo 5 al dividendo y al divisor, el cociente no varía.
IV. Si resto 6 al divisor, el cociente aumentará en 3 unidades.

¿Cuántas de estas afirmaciones son correctas siempre?

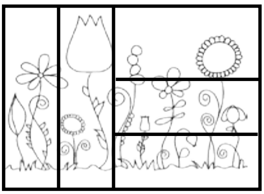
A) Ninguna **B)** Solo la I y III **C)** Solo la III **D)** Todas **E)** Solo la IV

10 Al examen de natación se presentaron 15 delfines y 10 ballenas y la nota media fue 16. Sabiendo que la nota media de los delfines fue 18, ¿cuál fue la nota media de las ballenas?



A) 13 **B)** 17 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 15

11 Ana y Pablo están diseñando la bandera de la Primavera y han decidido que tendrá cinco franjas (dos verticales y tres horizontales) y podrán usar los colores de la primavera: verde, rojo y azul. Si prohíben que dos franjas que se toquen tengan el mismo color, ¿cuántas banderas cumplirán sus condiciones?



A) 15 **B)** 6 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 8

12 La niña Centésima calcula muy deprisa y por eso muchas veces se equivoca. Si cada operación correcta es 1 punto y las incorrectas son 0 puntos, ¿qué nota sacará Centésima en este miniexamen?

$3 - (3 - 4)^3 = 2$ $\qquad$ $3 - (3 - 4)\cdot(3 - 4) - 4 = -2$

$3 - (3 - 4)^2 = 4$ $\qquad$ $3 - 4 - 3 = 2$

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

13

Nuestro querido profesor
además de retorcido
es un poco presumido
y al preguntarle su edad
salió con este acertijo

Tengo el triple de edad que mi hijo, y si sumo las dos cifras de mi edad con las de la suya, obtengo, ¡oh! sorpresa, el número de años que tiene mi hijo.
¡Me faltan datos!, protestó alguien.
¡Ah sí!, apuntó don Retorcido, *la suma de las dos cifras de mi edad es igual a la suma de las de mi hijo*.
¿Cuántos años suman entre los dos?

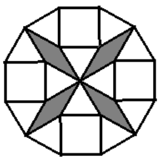
A) 88 **B)** 72 **C)** 96 **D)** 36 **E)** 61

A partir de aquí las respuestas en blanco valen un punto.

14 Del triángulo *ABC* sabemos que el ángulo *B* mide 58º y el *C* mide 42º. Además, la bisectriz del ángulo *A* corta a su lado opuesto en el punto *P*.
En el triángulo *APC*, la bisectriz del ángulo *P* corta a su lado opuesto en el punto *Q*.
En el triángulo *APQ*, ¿cuánto mide el ángulo *Q*?

A) 80º **B)** 49º **C)** 91º **D)** 98º **E)** 90º

15 Hemos dividido un dodecágono regular en cuadrados, triángulos equiláteros y rombos. Si cada uno de los rombos sombreados tiene 12 cm^2 de área. ¿Cuál es el área, en cm^2, de cada cuadrado?



A) 15 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 24 **E)** 30

16 – *Don Retorcido, ¿puede usted decirme qué hora es?*
– *Desde luego, fíjese: si a la mitad del tiempo de día transcurrido le suma usted la tercera parte de lo que queda de día, aún faltan siete horas para ser la hora actual.*
– *¡¿Perdón?! Si lo sé, pregunto a Comenúmeros.* ¿Qué hora es?

A) 18 h **B)** 15 h **C)** 16 h **D)** 21 h **E)** 12 h

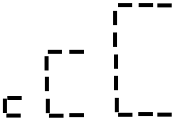
17 Nuestros amigos juegan con piedras y calculan de maravilla.
Pitágoras le dice a Tales: *Un cuarto de mis piedras son un sexto de las tuyas*.
Tales le dice a Arquímedes: *Un tercio de mis piedras son dos quintos de las tuyas*.
Si entre los tres tienen 180 piedras, juega tú también y dinos cuántas piedras tiene Pitágoras.

A) 72 **B)** 52 **C)** 48 **D)** 45 **E)** 60

18 El menor número divisible por 3, 5 y 7 cuyas cifras son 3, 5 y 7, es también divisible por…

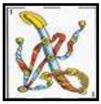
A) 49 **B)** 25 **C)** 9 **D)** 11 **E)** 13

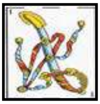
19 A la niña Centésima le encanta la letra inicial de su nombre y con ayuda de unos palitos va formando ces más y más grandes. De repente se hace esta pregunta: ¿Cuántos palitos necesitaré en total si solo quiero construir la  número 10 y la  número 100?

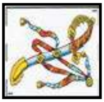


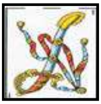
A) 438 **B)** 440 **C)** 330 **D)** 118 **E)** 341

20 Eva, Alicia y Clara se han pasado toda la tarde jugando a las cartas. Tanto que casi están mareadas y empiezan a ver visiones. Por muchas vueltas que le hayan dado al as de espadas, ¿cuál de estas cartas es imposible conseguir?



A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

21 Lo nunca visto, Don Retorcido y Comenúmeros frente a frente en la competición mundial de suma de fracciones monstruosas. Don Retorcido realiza siete sumas a la hora y Comenúmeros, más lento, hace cinco sumas a la hora. Si Comenúmeros tardó 14 horas más que Don Retorcido en completar la competición, ¿de cuántas sumas constaba el campeonato?

A) 217 **B)** 140 **C)** 420 **D)** 245 **E)** 175

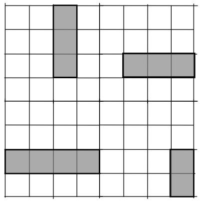
22 Si el complementario de un ángulo más el suplementario de ese ángulo suman 208º, ¿cuánto mide el ángulo?

A) 47º **B)** 28º **C)** 62º **D)** 52º **E)** 31º

23 En un agujero he metido los diez números que van del 10 al 19. Cojo cuatro y veo que *A* es un cuadrado perfecto, *B* es un múltiplo de 6, *C* es impar y *D* es múltiplo de 4. Si la suma de los cuatro es múltiplo de 5, ¿cuál es el número *C*?

A) 11 **B)** 13 **C)** 15 **D)** 17 **E)** 19

24 Tienes que colocar un barquito de 2 × 1, horizontal o vertical en este tablero. ¿En cuántas posiciones puedes situarlo si está absolutamente prohibido que dos barquitos estén en contacto, ni siquiera en un único vértice?



A) 22 **B)** 17 **C)** 15 **D)** 19

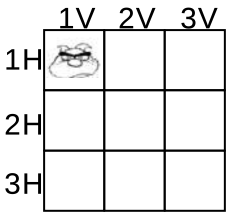
E) 24

25 Un crucinúmero con tres números en horizontal, tres números en vertical y una cifra en cada casilla.

1H: múltiplo de 11. 1V: el mismo número que 1H.
2H: un cuadrado perfecto. 2V: la suma de sus cifras es 20.
3H: múltiplo de 11. 3V: una potencia de 6.

¡Hasta el año que viene! Huy, casi nos olvidamos de la pregunta.
¿Qué cifra hay en la casilla de Comenúmeros?

A) 9 **B)** 8 **C)** 2 **D)** 7 **E)** 6



XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 21 de abril de 2018

NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

PUNTUACIÓN

En los problemas 1 a 13:

Cada respuesta ***correcta*** *te aportará*	**5** ***puntos***
Cada pregunta ***en blanco o errónea***	**0** ***puntos***

En los problemas 14 a 25:

Cada respuesta ***correcta*** *te aportará*	***5 puntos***
Cada pregunta que dejes ***en blanco***	***1 puntos***
Cada respuesta ***errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.
SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

1 ¿Cuál es el valor de 2,018 · 2017 – 10,17 · 201,8?

A) 2016 **B)** 2017 **C)** 2018 **D)** 20,18 **E)** 201,7

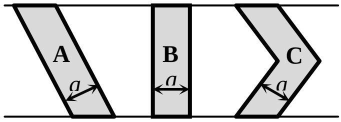
2 En el triángulo *ABC* el ángulo $\hat{C}$ es el triple del ángulo $\hat{A}$ y el ángulo $\hat{B}$ es el cuádruple del ángulo $\hat{A}$. Entonces, el triángulo *ABC* es:

A) Equilátero **B)** Obtusángulo **C)** Rectángulo **D)** Acutángulo **E)** Isósceles

3 ¿Cuál de los siguientes números es impar para todo entero *n*?

A) $2019n$ **B)** $n^2 + 2019$ **C)** n^3 **D)** $n + 2018$ **E)** $2n^3 + 2019$

4 En la figura adjunta las tres cintas A, B y C tienen el mismo ancho *a*. Las tres se apoyan en dos rectas paralelas. ¿Qué cinta tiene la menor área?



A) La cinta A **B)** La cinta B **C)** La cinta C
D) Las tres tienen la misma área **E)** Depende del valor de *a*

5 La suma de las áreas de los cuadrados cuyos lados son los lados de un triángulo rectángulo isósceles es 72 cm^2. ¿Cuál es el área de dicho triángulo?

A) 6 cm^2 **B)** 8 cm^2 **C)** 9 cm^2 **D)** 12 cm^2 **E)** 18 cm^2

6 El perímetro de un triángulo equilátero es 2018 cm mayor que el de un cuadrado. Si cada lado del triángulo es *d* cm mayor que el lado del cuadrado, ¿cuántos enteros positivos no son posibles para valores de *d* ?

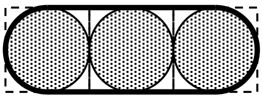
A) 0 **B)** 9 **C)** 221 **D)** 672 **E)** Infinitos

7 En esta suma cada letra, *x, y, z,* representa una cifra distinta de cero. ¿Qué cifra representa la letra *x*?

$$\begin{array}{ccc} & x & x \\ & y & y \\ + & z & z \\ \hline z & y & x \end{array}$$

A) 1 **B)** 2 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

8 En la figura que ves hay tres cuadrados y tres círculos rodeados por una línea gruesa. Si el área de cada cuadrado es *a* y el área de cada círculo *b*, ¿cuál es el área del recinto interior a la línea gruesa?

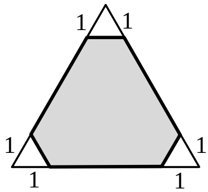


A) $3b + a$ **B)** $3a – b$ **C)** $a + 2b$ **D)** $2a + 2b$ **E)** $2a + b$

9 Cuando un barril está lleno al 30 % tiene 30 litros menos que cuando le falta el 30 % para estar lleno. ¿Cuántos litros contiene el barril lleno?

A) 60 **B)** 75 **C)** 90 **D)** 100 **E)** 120

10 En un triángulo equilátero de lado 5 hemos trazado paralelas a los lados construyendo el hexágono sombreado. ¿Qué porcentaje del área del triángulo ocupa el hexágono?



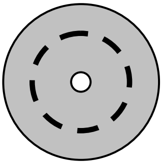
A) 72 % **B)** 75 % **C)** 80 %

D) 85 % **E)** 88 %

11 La mediana de una lista de cinco enteros positivos es 1 más que la moda y 1 menos que la media. ¿Cuál es la mayor diferencia que puede haber entre dos números de la lista?

A) 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

12 En la corona circular de la figura, determinada por dos circunferencias de radios 2 y 14, hemos dibujado otra circunferencia (a trazos) que divide a dicha corona en dos regiones de igual área. ¿Cuál es el radio de esta circunferencia?



A) 7,5 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 9,5 **E)** 10

13 En una caja hay 2 calcetines blancos, 3 azules y 4 rojos. Sé que de los 9 hay 3 con agujeros, pero no sé de qué color. Sin mirarlos, cojo unos cuantos. ¿Cuántos debo coger, como mínimo, para estar seguro de ponerme un par del mismo color y sin agujeros?

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

A partir de aquí las respuestas en blanco valen un punto.

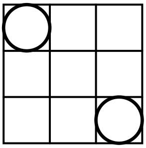
14 Alberto hace una travesía de 210 km en bicicleta. Al final resulta que ha alcanzado una media de 5 km/h más de la que había previsto y ha llegado una hora antes de lo esperado. ¿Qué velocidad media ha alcanzado?

A) 35 km/h **B)** 21 km/h **C)** 42 km/h **D)** 30 km/h **E)** 36 km/h

15 María tiene unos dados muy curiosos. En sus caras figuran los números: **–1**, **2**, **–3**, **4**, **–5**, **6**. Si lanza dos de ellos y suma los resultados obtenidos, ¿cuál de las siguientes sumas no podrá obtener?

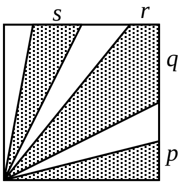
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 8

16 Dividimos un cuadrado de lado 3 en nueve cuadrados de lado 1. En dos de las esquinas inscribimos sendas circunferencias como muestra la figura. Si elegimos un punto de cada circunferencia y calculamos la distancia entre ambos, ¿cuál es la menor distancia que podemos obtener?



A) $2\sqrt{2}-1$ **B)** $\sqrt{2}+1$ **C)** $2\sqrt{2}$ **D)** 2 **E)** $3\sqrt{2}-2$

17 En un cuadrado de 36 cm^2 de área sombreamos algunas regiones como se muestra en la figura. Si el área sombreada es de 27 cm^2, ¿cuál es, en cm, la suma $p + q + r + s$?



A) 4 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

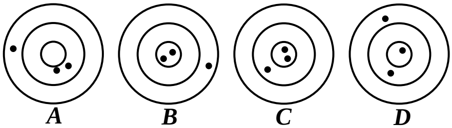
18 Escribimos en la pizarra varios enteros positivos diferentes. Si el producto de los dos menores es 16 y el producto de los dos mayores es 225, ¿cuánto suman todos los números?

A) 38 **B)** 42 **C)** 44 **D)** 58 **E)** 63

19 En una caja hay ocho tarjetas numeradas con: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 y 128. Bea toma unas cuantas al azar y Carlos el resto. Cuando las tienen, Bea observa que la suma de las suyas supera en 31 a la suma de las de Carlos. ¿Cuántas tarjetas cogió Bea?

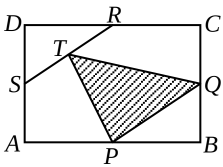
A) 6 **B)** 5 **C)** 4 **D)** 3 **E)** 2

20 Juan Jesús lanza tres dardos a cada una de las cuatro dianas de las figuras. Obtiene 29 puntos en la diana *A*, 43 en la diana *B* y 47 en la *C*. ¿Cuántos puntos obtuvo en la diana *D*?



A) 31 **B)** 33 **C)** 36 **D)** 38 **E)** 39

21 En el rectángulo *ABCD* los puntos *P, Q, R, S,* son los puntos medios de los lados. Si *T* es el punto medio de *RS*, ¿qué fracción del área del rectángulo ocupa el triángulo *PQT* ?



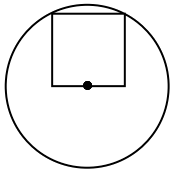
A) $\frac{2}{7}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** $\frac{3}{8}$ **E)** $\frac{2}{9}$

22 El área total de un ortoedro (prisma rectangular recto) es 22 cm^2 y la suma de las longitudes de todas sus aristas es 24 cm. ¿Cuál es, en cm, la máxima distancia entre dos de los vértices de dicho prisma?

A) $\sqrt{11}$ **B)** $\sqrt{12}$ **C)** $\sqrt{13}$ **D)** $\sqrt{14}$

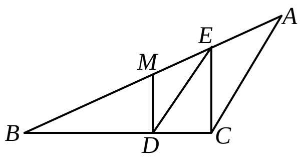
E) No se puede determinar

23 En la figura adjunta puedes ver una circunferencia y un cuadrado del que dos de sus vértices están en la circunferencia y uno de sus lados pasa por el centro de dicha circunferencia. Si el radio de la circunferencia mide 1 cm, ¿cuál es, en cm^2, el área del cuadrado?



A) $\frac{4}{5}$ **B)** $\frac{\pi}{3}$ **C)** $\frac{5}{4}$ **D)** 1 **E)** $\frac{\pi}{4}$

24 En el triángulo obtusángulo *ABC* de la figura, *M* es el punto medio del lado *AB* y *MD* y *EC* son perpendiculares al lado *BC*. Si el área de dicho triángulo es 24, ¿cuál es el área del triángulo *EBD* ?



A) 9 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 18

25 Consideramos 2018 puntos de los cuales unos son azules y los otros verdes. Asignamos a cada punto una fracción cuyo numerador es el número de puntos del otro color y el denominador es el número de puntos de su color (incluido él). ¿Cuál es la suma de las 2018 fracciones así construidas?

A) 2018 **B)** 1346 **C)** 1009 **D)** 505

E) Hace falta más información

XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 21 de abril de 2018

NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

PUNTUACIÓN

En los problemas 1 a 13:

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	**5 *puntos***
*Cada pregunta **en blanco o errónea***	**0 *puntos***

En los problemas 14 a 25:

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.
SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

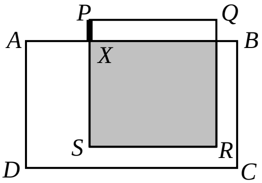
ORGANIZA

Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

1 En la figura se observa un rectángulo *ABCD* de lados 10 y 6 y un cuadrado *PQRS* de lado 6. Si el área del rectángulo sombreado es la mitad del área del rectángulo *ABCD*, ¿cuál es la longitud del segmento *PX* ?



A) 0,5 **B)** 1 **C)** 1,2
D) 1,5 **E)** 2

2 Tenemos 18 tarjetas y en cada una de ellas escribimos el 4 o el 5. Si la suma de todos los números escritos es divisible entre 17, ¿en cuántas tarjetas está escrito el 4?

A) 13 **B)** 9 **C)** 7 **D)** 5 **E)** 4

3 En cada uno de los cinco cuadrados de la figura escribo un número de forma que cada uno de los tres centrales es la media aritmética de los dos que tiene a su lado. ¿Qué número es *x*?

x	**26**			**8**

A) 28 **B)** 30 **C)** 31 **D)** 32 **E)** 34

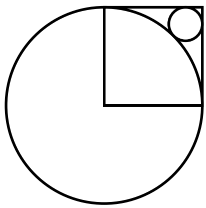
4 ¿Para cuántos enteros n con $1 \le n \le 100$ se verifica que el número n^n es un cuadrado perfecto?

A) 55 **B)** 54 **C)** 50 **D)** 15 **E)** 51

5 En una hoja de papel dibujamos cuatro rectas diferentes y contamos los puntos en los que se cortan dos o más rectas. ¿Cuál de los siguientes números no puede ser el número que obtenemos?

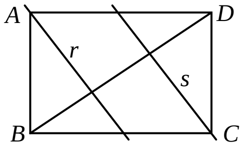
A) 6 **B)** 5 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 1

6 La figura adjunta muestra dos circunferencias tangentes entre sí y un cuadrado de lado 10 cm, con un vértice en el centro de la circunferencia mayor y dos lados tangentes a ambas circunferencias. Si escribimos el radio de la circunferencia menor como $\left(a - b\sqrt{2}\right)$ cm, el valor de $a + b$ es:



A) 30 **B)** 40 **C)** 50 **D)** 60
E) 70

7 En el rectángulo *ABCD* de la figura, las rectas *r* y *s*, que pasan por los vértices *A* y *C*, son perpendiculares a la diagonal *BD* y la dividen en tres trozos iguales de 1 cm de longitud cada uno. El área de dicho rectángulo, en cm^2, y redondeada a las décimas es:



A) 4,1 **B)** 4,2 **C)** 4,3 **D)** 4,4 **E)** 4,5

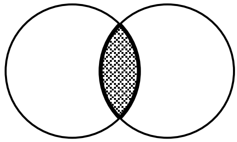
8 ¿Cuántos enteros *n* verifican que $n^4 + 6n < 6n^3 + n^2$?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** Nada de lo anterior

9 Los números enteros *a, b, c, d,* verifican la igualdad $a\log 2 + b\log 3 + c\log 5 + d\log 7 = 2018$. ¿Cuál es el valor de $a + b + c + d$? (log significa logaritmo en base 10)

A) 2016 **B)** 2017 **C)** 2018 **D)** 4036 **E)** 5034

10 Dos circunferencias de radio 2 se solapan de forma que el arco de cada una interior a la otra es el 25 % de su longitud. ¿Cuál es el área de la zona solapada?



A) $\pi - 2$ **B)** $2\pi - 4$ **C)** $2\pi - 2$
D) $2\pi - 3$ **E)** π

11 Un número de dos cifras verifica que el producto de sus cifras más la suma de ambas coincide con dicho número. ¿Cuál es la cifra de las unidades del número en cuestión?

A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

12 Si el número real α verifica que $\cos\alpha = tg\alpha$, ¿cuál es el valor de $\dfrac{1}{sen\alpha} + \cos^4\alpha$?

A) – 2 **B)** – 1 **C)** 0 **D)** 1 **E)** 2

13 ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $\left|x - |2x+1|\right| = 3$?

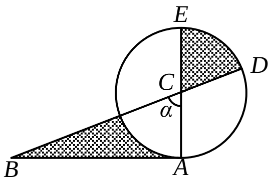
A) Ninguna **B)** Una **C)** Dos **D)** Tres **E)** Cuatro

A partir de aquí las respuestas en blanco valen un punto.

14 Un polígono convexo tiene exactamente tres ángulos obtusos. ¿Cuál es el máximo número de lados de dicho polígono?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

15 La figura adjunta muestra una circunferencia de centro *C* y diámetro *AE*, un segmento *AB* perpendicular a dicho diámetro y un segmento *BD* que contiene al centro *C*.



Si $\alpha = A\hat{C}B$, en radianes, y las dos zonas sombreadas tienen la misma área, entonces:

A) $tg\alpha = \alpha$ **B)** $tg\alpha = 2\alpha$ **C)** $tg\alpha = 4\alpha$ **D)** $tg 2\alpha = \alpha$ **E)** $tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \alpha$

16 Si *a* y *b* son números reales con *a* > 1, *b* ≠ 0 y se verifica que $a\,b = a^b$ y $\frac{a}{b} = a^{3b}$, entonces el valor de b^{-a} es:

A) 4 **B)** 8 **C)** 16 **D)** 32 **E)** $8\sqrt{2}$

17 Dos semirrectas que parten de un punto *O* forman un ángulo de 30º. Los puntos *A* y *B* están uno en cada una y *AB* = 1. ¿Cuál es la máxima longitud posible del segmento *OB*?

A) 1 **B)** $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ **C)** $\sqrt{3}$ **D)** 2 **E)** $\frac{4}{\sqrt{3}}$

18 Si $a = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}$ y $b = \sqrt{9-\sqrt{9-\sqrt{9-\ldots}}}$, ¿cuál es el valor de *ab*?

A) $\frac{3}{2}\left(\sqrt{26}-2\right)$ **B)** $\frac{3}{2}\left(\sqrt{37}-1\right)$ **C)** $4\sqrt{5}-2\sqrt{2}$ **D)** $3\sqrt{6}+1$

E) Nada de lo anterior

19 Dos de las alturas de un triángulo escaleno miden 4 y 12 cm. Si la longitud de la tercera altura, en cm, viene dada también por un número entero, ¿cuál es el máximo valor que puede tener este número?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 10

20 Si $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ consideramos los números $A = (\cos\alpha)^{\cos\alpha}$, $B = (sen\alpha)^{\cos\alpha}$ y $C = (\cos\alpha)^{sen\alpha}$, ¿qué afirmación de las siguientes es verdadera?

A) $A < B < C$ **B)** $A < C < B$ **C)** $B < A < C$
D) $B < C < A$ **E)** $C < A < B$

21 Dos de las medianas de un triángulo son perpendiculares y miden 8 y 12 cm. Entonces el área del triángulo, en cm^2, es:

A) 24 **B)** 32 **C)** 48 **D)** 64 **E)** 96

22 Si *a, b* y *c* son enteros positivos que verifican $a < b < c$ y $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$, ¿cuál es el valor de $a + b + c$?

A) 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** 13

23 Supongamos que contestas al azar las tres últimas cuestiones de esta prueba. ¿Cuál es el número de aciertos más probable?

A) Cero **B)** Uno **C)** Dos **D)** Tres
E) Todos son igual de probables

24 ¿Cuántos enteros positivos menores o iguales que 2018 verifican que alguna de sus cifras es cero?

A) 470 **B)** 472 **C)** 476 **D)** 479 **E)** 482

25 Si sen x + cos $x = a$, entonces $\text{sen}^4 x + \cos^4 x$ es:

A) $1-\frac{(1-a^2)^2}{2}$ **B)** a^4 **C)** $\frac{1-(1-a^2)^2}{2}$ **D)** $a^4 + 1$ **E)** $1+\frac{(1-a^2)^2}{2}$

XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (1ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**E**	1	**B**	1	**C**	1	**D**
2	**E**	2	**A**	2	**D**	2	**C**
3	**D**	3	**A**	3	**E**	3	**C**
4	**D**	4	**E**	4	**D**	4	**A**
5	**C**	5	**D**	5	**A**	5	**D**
6	**D**	6	**C**	6	**B**	6	**C**
7	**B**	7	**B**	7	**C**	7	**E**
8	**A**	8	**E**	8	**D**	8	**D**
9	**B**	9	**B**	9	**C**	9	**E**
10	**A**	10	**B**	10	**A**	10	**E**
11	**D**	11	**A**	11	**C**	11	**A**
12	**B**	12	**C**	12	**D**	12	**E**
13	**D**	13	**C**	13	**E**	13	**D**
14	**C**	14	**B**	14	**D**	14	**A**
15	**D**	15	**A**	15	**B**	15	**B**
16	**A**	16	**D**	16	**B**	16	**C**
17	**D**	17	**E**	17	**D**	17	**A**
18	**E**	18	**B**	18	**C**	18	**D**
19	**B**	19	**A**	19	**A**	19	**C**
20	**C**	20	**B**	20	**D**	20	**A**
21	**C**	21	**C**	21	**B**	21	**C**
22	**A**	22	**D**	22	**A**	22	**C**
23	**B**	23	**B**	23	**D**	23	**A**
24	**C**	24	**E**	24	**D**	24	**D**
25	**E**	25	**C**	25	**B**	25	**E**

XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (2ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**C**	1	**E**	1	**C**	1	**B**
2	**B**	2	**D**	2	**C**	2	**D**
3	**C**	3	**E**	3	**E**	3	**D**
4	**D**	4	**A**	4	**B**	4	**A**
5	**A**	5	**B**	5	**C**	5	**D**
6	**B**	6	**E**	6	**D**	6	**C**
7	**E**	7	**C**	7	**D**	7	**B**
8	**D**	8	**A**	8	**E**	8	**B**
9	**A**	9	**A**	9	**B**	9	**D**
10	**A**	10	**A**	10	**E**	10	**B**
11	**B**	11	**C**	11	**A**	11	**E**
12	**C**	12	**B**	12	**E**	12	**E**
13	**B**	13	**B**	13	**C**	13	**C**
14	**C**	14	**C**	14	**A**	14	**C**
15	**C**	15	**D**	15	**D**	15	**B**
16	**A**	16	**A**	16	**A**	16	**C**
17	**D**	17	**C**	17	**E**	17	**D**
18	**C**	18	**A**	18	**C**	18	**B**
19	**E**	19	**A**	19	**B**	19	**B**
20	**D**	20	**C**	20	**C**	20	**E**
21	**E**	21	**D**	21	**B**	21	**D**
22	**E**	22	**E**	22	**D**	22	**C**
23	**D**	23	**E**	23	**A**	23	**A**
24	**A**	24	**B**	24	**B**	24	**A**
25	**A**	25	**E**	25	**A**	25	**A**

XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel I

1. (E) Calculamos la diferencia de temperaturas:
23 – 15 = 8
La casa estaba a 8 grados.

2. (E) Realizamos las siguientes operaciones:
20 € – 5,12 € = 14,88 € pagó Luca por 12 cuadernos
14,88 : 12 = 1,24 € vale cada cuaderno
1,24 × 6 = 7,44 € valen los seis cuadernos de Lino
10 € – 7,44 € = 2,56 €
A Lino le devolvieron 2,56 €

3. (D) Utilizamos una tabla de doble entrada para calcular el número de formas distintas en las que se puede rellenar la papeleta. Nombremos a las chicas con las letras: A, B, C, D y E, y a los chicos con las letras X, Y y Z.

	A	B	C	D	E
X	A, X	B, X	C, X	D, X	E, X
Y	A, Y	B, Y	C, Y	D, Y	E, Y
Z	A, Z	B, Z	C, Z	D, Z	E, Z

Podemos rellenar de estas formas la papeleta:
(A, X), (B, X), (C, X), (D, X), (E, X), (A, Y), (B, Y), (C, Y), (D, Y), (E, Y), (A, Z), (B, Z), (C, Z), (D, Z), (E, Z).
En total 15 formas distintas.

4. (D) La longitud del lado de una servilleta cuadrada es 22 cm. Expresamos en centímetros la longitud del rollo y operamos:
82,50 m × 100 = 8250 cm
8250 cm : 22 cm = 375
El rollo tiene 375 servilletas.

5. (C) Expresamos los pesos en la misma unidad y operamos:
1,7 kg = 1700 g
1700 g – 250 g = 1450 g pesan las monedas
1450 g : 3,06 g = 473,8562 monedas de 2 céntimos
473,8562 × 2 = 947,7124 céntimos
947,7124 céntimos ≅ 10 euros
En el bote hay aproximadamente 10 €.

6. (D) Calculamos el múltiplo común más pequeño de 4 y de 18.
mcm(2^2, 2×3^2) = $2^2 \times 3^2 = 36$. Al cabo de 36 horas vuelven a coincidir.
36 horas = 1 día y medio
Come y hace caca cada 36 horas, lo que es igual a un día y medio
10 h + 36 h = 46 h = 24 h + 22 h
Lunes 10 h + 1 día y 12 horas = martes 22 h
Los dos eventos vuelven a coincidir el martes a las 22:00 horas.

7. (B) Un número es múltiplo de tres cuando la suma de sus cifras es múltiplo de tres.
Sumamos las cifras conocidas del número que le ha dado Adriana:
2 + 3 + 4 + 1 + 7 + 7 + 5 = 29
Buscamos múltiplos de tres mayores que 29:
30 = 29 + 1; 33= 29 + 4; 36 = 29 + 7.
Las cifras que se pueden poner en el cuadrado son: 1, 4 y 7
Su suma es: 1 + 4 + 7 = 12

8. (A) En total hay 6 bolígrafos; de los cuales $\frac{1}{2}$ son bolígrafos que no pintan y $\frac{2}{6}$ son bolígrafos rojos que pintan. $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$

La probabilidad de coger un boli que pinte rojo es $\frac{1}{6}$.

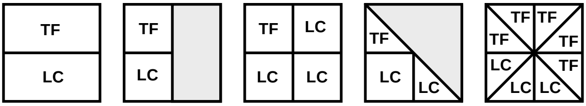
9. (B) Siguiendo el desarrollo de la espiral, observamos que la distancia entre dos estacas impares consecutivas es igual al número par entre esos dos impares expresado en metros.
Por tanto, hasta la estaca 21 habrá 2 + 4 +…+ 18 + 20 = 110 m
En consecuencia, hasta la estaca 20 tendremos 110 – 10 = 100 m
Una forma sencilla de realizar la suma anterior es:
(2 + 20) + (4 + 18) + (6 + 16) + (8 + 14) + (10 + 12) = 22 × 5 = 110 m

10.(A) Para facilitar la resolución del problema, nombramos Trinafantus con TF y Loca-Cola con LC.
Seguimos estos pasos:

- En el vaso de Juan hay1/2 (50%) de TF y 1/2 (50%) de LC.
- Después de que Olivia bebiese la mitad del contenido quedan en el vaso un cuarto (1/4) de TF y un cuarto (1/4) de LC.
- A continuación, rellena el vaso con 1/2 de LC. Ahora en el vaso hay un cuarto (1/4) de TF y tres cuartos (3/4) de LC.
- Después de que Rafa bebiese la mitad del contenido de vaso, queda un octavo (1/8) de TF y tres octavos (3/8) de LC.
- Finalmente rellena el vaso con 1/2 de TF. El vaso contiene 5/8 de TF y 3/8 de LC

Quedan en el vaso3/8 tres octavos de Loca-Cola.

Puede resultar de ayuda tratar geométricamente el problema mediante un esquema como el de la figura.



11.(D) Como la cuadrícula es de 1 cm × 1 cm, la superficie de cada casilla es de 1 cm^2. Para calcular el área del patito podríamos dividir la superficie del patito en diferentes figuras planas; pero la mejor forma es contando uno a uno el número de casillas que ocupa el patito (10 medias casillas y 20 casillas completas).
El área del patito es de 25 cm^2.

12.(B) Resolvemos cada una de las operaciones y obtenemos estos resultados:
A: $10 + 3 \times (5 - 2) = 10 + 3 \times 3 = 10 + 9 = 19$
B: $4 + 4 \times 4 = 4 + 16 = \mathbf{20}$
C: $23 - 14 + 2 \times 3 = 23 - 14 + 6 = 15$
D: $6 + 3 \times 5 - 2 = 6 + 15 - 2 = 19$
E: $215 - 199 = 16$

13.(D) Realizamos las mismas operaciones que hizo Goraspita con cada uno de los tríos de números:
$5 \times 5 - (4 \times 4 + 3 \times 3) = 25 - 25 = 0$
$13 \times 13 - (10 \times 10 + 12 \times 12) = -75$
$13 \times 13 - (12 \times 12 + 5 \times 5) = 0$
$15 \times 15 - (12 \times 12 + 9 \times 9) = 0$
Se obtiene cero con tres tríos.

14.(C) Según el gráfico, la velocidad de la perrita es tres veces mayor que la de Ana
$12 \times 3 = 36$
Phoebe recorre 36 kilómetros.

15.(D) Puntos de Alicia: 240 + 80 = 320
Puntos de María: 300 – 40 = 260; 260 – 60 = 200
María se quedó con 200 puntos.

16.(A) En primer lugar, realizamos todas las sumas posibles con los cuatro números de la tabla: 2 + 3 = 6; 2 + 7 = 9; 3 + 7 = 10; 2 + 9 = 11; 3 + 9 = 12; 7 + 9 = 16; 2 + 3 + 7 = 12; 2 + 3 + 9 = 14; 2 + 7 + 9 = 18; 3 + 7 + 9 = 19; 2 + 3 + 7 + 9 = 21; A continuación, tachamos las sumas obtenidas y los números de las tarjetas: ~~2~~, ~~3~~, 4, 5, 6, ~~7~~, 8, ~~9~~, ~~10~~, ~~11~~, ~~12~~, 13, ~~14~~, 15, ~~16~~, 17, ~~18~~, ~~19~~, 20, ~~21~~
Quedan estos números sin tachar: 4, 6, 8, 13, 15, 17, 20.
Centésima no podrá obtener siete números.

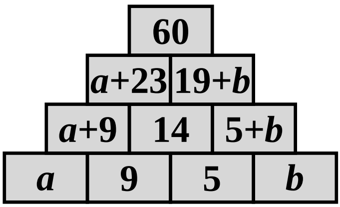
17.(D) Las cifras que son números primos son:, 2, 3, 5 y 7. En cada decena hay 4 números que tienen esas cifras. Además en los números en los que la cifra de las decenas es cualquiera de estas cuatro cifras, habrá otras 10 cifras que son números primos.
En total Comenúmeros se habrá comido 4 + 4 + 14 + 14 + 4 + 14 + 4 + 14 + 4 + 4, es decir, 90 cifras.
Una tabla con los números del 100 al 199 facilita la resolución de este problema.

100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	4 cifras
110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	4 cifras
120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	14 cifras
130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	14 cifras
140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	4 cifras
150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	14 cifras
160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	4 cifras
170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	14 cifras
180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	4 cifras
190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	4 cifras

TOTAL: 90 cifras

18.(E) Las manzanas que dio a Martita (3), a Richi (4) y las que quedaron para Sofía (6) hacen la mitad de las manzanas que recogió en el jardín.
3 + 4 + 6 = 13 manzanas. 13 × 2 = 26. Sofía recogió 26 manzanas.

19.(B) Teniendo en cuenta que el número de cada ladrillo es la suma de los dos números que están en los ladrillos de debajo, podemos poner los números de cada ladrillo en función de a y b, como se muestra en la figura. Se sigue de ahí que $60 = (a + 23) + (19 + b)$ y, por lo tanto, $a + b = 60 – 23 – 19 = 18$.



20.(C) El resultado de los cinco números es el siguiente:
25: orden 3; 29: orden 2; 33: orden 5; 37: orden 2; 41: orden 3
El número impar con mayor orden es el 33.

21.(C) Sumamos las distancias:
14 + 34 + 12 + 13 + 3 + 3 + 5 + 32 + 1 + 2 + 6 = 125 m
125 : 20 = 6,25
Pataplum tiene que dar 7 saltos completos.

22.(A) Secuencias:
4ª**:** 1 + 2 + 3 = 6; 5ª: 2 + 3 + 6 = 11; 6ª: 3 + 6 + 11 = 20; 7ª: 6 + 11 + 20 = 37;
8ª: 11 + 20 + 37 = 68; 9ª: 20 + 37 + 68 = 125
El 125 es el número que ocupa la novena posición.

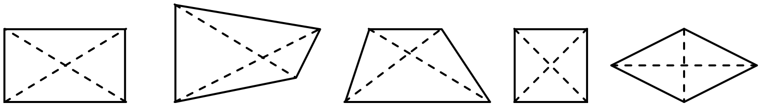
23.(B) Siguiendo las indicaciones, se tachan los siguientes números

99	~~27~~	~~60~~	~~120~~
~~21~~	~~332~~	303	~~214~~
~~18~~	435	15	~~42~~
~~17~~	~~224~~	~~25~~	~~130~~

Quedan sin tachar los números: 99, 303, 435, 15
99 + 303 + 435 + 15 = 852
La suma de los números que ha pensado Carmen es 852.

24.(C) Dado que el perímetro de un rectángulo es igual a:
2 × (longitud de la *base* + longitud de la *altura*)
El perímetro del rectángulo de Lucía es:
2 × (2 × *altura* + *altura*) = 6 × *altura* = 54 cm y, por tanto, la altura del de Lucia mide 9 cm.
Por otra parte, el perímetro del rectángulo de Julián es:
2 × (*base* + 3 × *base*) = 8 × *base*.
Como la base del de Julián es igual a la altura del de Lucía, tendremos que el perímetro del de Julián es: 8 × 9 = 72 cm.

25.(E) El único cuadrilátero que sus diagonales son perpendiculares y de distinta longitud es el Rombo.



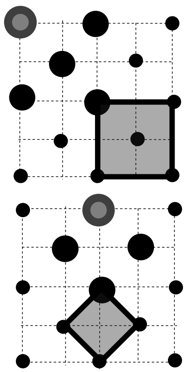
XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel II

1. (B) Para obtener la solución solo hay que ir recorriendo los caminos de forma sistemática. Hay ocho caminos.

2. (A) Vamos a sumar dos números de 3 cifras, que como mucho pueden sumar 999 · 2 = 1998 con tres números de una cifra, que como mucho pueden sumar 5 + 9 · 2 = 23 y queremos que el resultado sea 2018.
Observa que si las cifras de las centenas o las decenas de los números pensados por Alce y Buey no fueran 9, no podríamos alcanzar esa cantidad pues 989 + 999 + 23 = 2011. Así que el número que pensó alce es 99*a*, el que pensó Buey es 99*b*, el que pensó Cocodrilo es *c*, Delfín es *d* y el que pensó Elefante es 5.
La suma es 990 ·2 + (5 + *a* + *b* + *c* + *d*) = 1980 + (5 + *a* + *b* + *c* + *d*) = 2018.
Así que la suma de las unidades de esos cinco números es 5 + *a* + *b* + *c* + *d* = 38.
No podemos saber qué número escribió cada uno, pero sabemos que la suma de las cifras de los números escritos es 9 + 9 + 9 +9 + 5 + *a* + *b* + *c* + *d* = 36 + 38 = 74.

3. (A) Panda en 240 minutos = 4 horas limpia 10 piñas, así que en dos horas limpia 5 piñas.
Veamos cuántas limpian juntos en 6 horas (que es múltiplo de 2 y de 3). En 6 horas Panda limpia 5 · 3 = 15 piñas y Perezoso 2, así que juntos limpian 17 piñas.
Como 51 = 3 · 17, en tres periodos de 6 horas habrán terminado.
Es decir, tardan 6 · 3 = 18 horas.



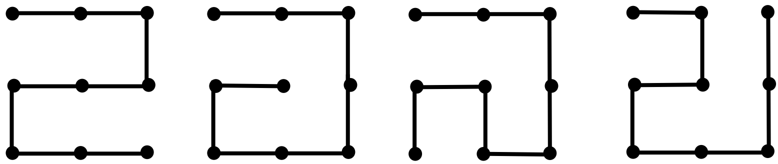
4. (E) Vamos poco a poco para no olvidarnos de ningún cuadrado:
En el primer cuadrado hemos marcado en grande los puntos que podemos usar como vértice superior izquierdo de un cuadrado si usamos la cuadrícula para trazar los lados, como el del ejemplo. Todos ellos tienen área 4 cm^2 y hay 5.
Con el punto gris se puede formar además otro cuadrado grande de área 16 cm^2.
En el cuadrado de abajo los puntos grandes son el vértice superior de los cuadrados que se forman trazando diagonales, como el del ejemplo.
Todos ellos tienen área 2 cm^2 y hay 4. Además, con el gris se puede formar un cuadrado más grande de área 8 cm^2.
Así pues, el área total es 5 · 4 + 16 + 4 · 2 + 8 = 52 cm^2.

5. (D) Recuerda los criterios de divisibilidad: un número es múltiplo de 9 si la suma de sus cifras es múltiplo de 9 y es múltiplo de 6 si lo es de 2 y de 3, es decir: la cifra de las unidades es par y la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
Para hacer el múltiplo de 9 más grande posible, escribamos 222 222 como la suma de sus cifras es 12, tendremos que cambiar doses por unos hasta que la suma sea 9. Empezamos por el de las unidades, decenas, … porque así será el mayor. En total hay que cambiar 3 doses: 222 111.
Para hacer el menor múltiplo de 6 procedemos igual: partiendo de 111 112, que es par y cuya suma de cifras es 7, cambiamos unos por doses de derecha a izquierda hasta obtener suma 9: 111 222.
La diferencia es 222 111 – 111 222 = 110 889.

6. (C) Para resolver este problema hay que ponerse en lo peor. Si cogen 6, podrían ser tres de un color y tres de otro, así que hay que coger más. Si cogen 7, podrían ser tres de un color, tres de otro y el séptimo del tercer color, así que tampoco es suficiente. Veamos qué pasa con 8.
Podrían ser todos del mismo color y tendrían 4 pares.
Podrían ser 7 de un color y el octavo de otro, tendrían 3 pares.
Podrían ser 6 y 2 o 6, 1 y 1 y siempre habría al menos 3 pares.
Podrían ser 5 y 3 o 5, 2 y 1. También tendrían tres pares.
Podrían ser 4 y 4 o 4, 3 y 1 o 4, 2 y 2. En cualquier caso las trillizas estarían contentas.
Por último, podrían ser 3, 3 y 2 y también tendrían sus tres pares.

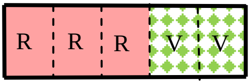
7. (B) Observa que $102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$ y $68 = 2 \cdot 2 \cdot 17$, así que 3 ardillas pesan como 2 mapaches. Si ya hay 42 ardillas, podríamos meter otras 60 ardillas más, que equivalen a 40 mapaches.

8. (E) Vamos a hacer todas las que comienzan conectando con el punto de la derecha:

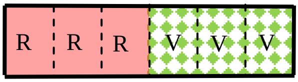


Podremos hacer otras 4 comenzando con el punto de abajo, sí que hay 8 claves que cumplen las condiciones de Noor.

9. (B) Representamos los círculos de Andrea en un rectángulo dividido en 5 partes iguales:



Como por un lado sabemos que Paula tiene la misma cantidad de círculos rojos que Andrea y por otro que los rojos son la mitad de los verdes, los círculos de Paula se pueden representar así:



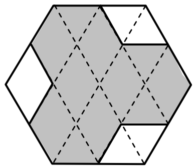
Si A es el numero de círculos verdes de Andrea y P es el número de círculos verdes de Paula, está claro que $3A = 2P$.

10.(B) Una posibilidad es probar con las 5 opciones y ver qué pasa. Empezaríamos con 131:
$131 \rightarrow (132:2) = 66$ Par. Así que es de orden 1…
$129 \rightarrow (130:2) = 65 \rightarrow (66:2) = 33 \rightarrow (34:2) = 17 \rightarrow (18:2) = 9 \rightarrow (10:2) = 5 \rightarrow$
$\rightarrow (6:2) = 3 \rightarrow (4:2) = 2$. Hemos realizado siete divisiones así que es de orden 7.
Como nos piden el menor, tendremos que hacer lo mismo con las otras tres opciones y comprobaremos que 121 es de orden 3, 97 es de orden 5 y 85 es de orden 2, por lo que 129 es el menor número de orden 7 de las cinco opciones que nos ofrecen.
Más bonito es demostrar que 129 es el menor impar de orden 7 de todos los enteros positivos posibles. Veamos cómo se hace:
Si queremos que sea lo más pequeño posible, en la séptima división nos tiene que dar el menor par posible, es decir, 2. Haciendo el proceso inverso siete veces a partir de 2 tenemos:
$2 \rightarrow (2 \cdot 2) - 1 = 3 \rightarrow (3 \cdot 2) - 1 = 5 \rightarrow (5 \cdot 2) - 1 = 9 \rightarrow (9 \cdot 2) - 1 = 17 \rightarrow$
$\rightarrow (17 \cdot 2) - 1 = 33 \rightarrow (33 \cdot 2) - 1 = 65 \rightarrow (65 : 2) - 1 = 129$.

11.(A) Las multiplicaciones son fáciles, solo hay que contar números después de las comas para colocar la coma bien.
$(0{,}2 \cdot 0{,}03) \rightarrow 2 \cdot 3$ es 6. A partir del 6 contamos tres posiciones hasta la coma y da 0,006.
$(0{,}004 \cdot 0{,}0005) \rightarrow 4 \cdot 5$ es un 20. A partir del cero contamos 7 posiciones hasta la coma: 0,000 002 0 = 0,000 000 2.
Dividir entre 0,000 000 2 es lo mismo que dividir entre 2/1 000 000 que es como multiplicar por 1 000 000 y dividir entre 2.
$0{,}006 \cdot 1\,000\,000 = 6000$ y $6000 : 2 = 3000$.

12.(C) Si un número acaba en 0, su cubo acaba en 0. Si acaba en 1, su cubo acaba en 1 pues $1^3 = 1$. Si el número acaba en 2, el cubo acaba en 8. Si acaba en 3, el cubo acaba 7 ($3^3 = 27$), si acaba en 4, el cubo también acaba en 4. El cubo acaba en 5 si el número acaba en 5 y si acaba en 6, su cubo también acaba en 6. El cubo de un número que acaba en 8 acaba 2 y el de un número que acaba en 9 acaba en 9.
Así que nos sirven los números que acaban en 0, 1, 4, 5, 6 y 9.

13.(C) Trazando algunas líneas desde los puntos medios ves que se forman 12 rombos (debes unir los triángulos de abajo y de arriba). El área de cada rombo es 36:12 = 3 cm^2 y como en el dibujo hay 9 coloreados, el área de la figura es $9 \cdot 3 = 27$ cm^2.



14.(B) Empezamos operando con las fracciones de lo que recibió cada uno inicialmente:

Don Retorcido $\rightarrow$ 2/3 del total
Comenúmeros $\rightarrow$ 1/5 del total
Mozart $\rightarrow 1-\frac{2}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$

Tras el primer cambio cada uno tiene:

Don Retorcido$\rightarrow \frac{2}{3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$ Comenúmeros $\rightarrow \frac{1}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{11}{30}$ Mozart $\rightarrow \frac{2}{15}$

Tras el último cambio:

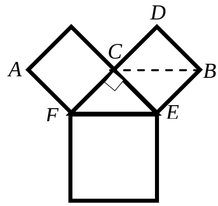
Don Retorcido $\rightarrow \frac{1}{2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{10}$ Comenúmeros $\rightarrow \frac{11}{30}$ Mozart $\rightarrow \frac{2}{15}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{30}$

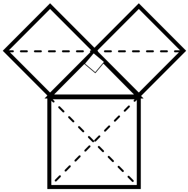
Por lo que si 7/30 del total son 140 gramos, 1/30 son 20 gramos y Comenúmeros recibirá $11\cdot 20 = 220$ gramos.

15.(A) Si multiplicamos un número por 1001 hacemos lo mismo que si lo multiplicamos por 1000 y luego le sumamos el número inicial (para conseguir 1001). Nuestra suma queda algo de la forma 555…5000 + 555…5555, teniendo cada número 55 cincos.
Si sumamos las tres últimas cifras obtenemos 3 cincos, la cuarta cifra nos da un cero y nos llevamos una.
Así completamos todas las cifras hasta las tres primeras en las que obtenemos 556 (por la que nos llevamos).
Tenemos entonces: dos cincos al principio y tres al final, un seis y 51 unos. Sumándolos $51 + 5\cdot 5 + 6 = 82$

16.(D) Trabajando con potencias: $16^{21} = \left(2^4\right)^{21} = 2^{84} = 2^{3\cdot 28} = \left(2^3\right)^{28} = 8^{28}$

17.(E) Como el triángulo rectángulo es isósceles los dos cuadrados son iguales y sus diagonales miden 6 cm. Utilizando Pitágoras (en el triángulo *BCD*) vemos que el cuadrado del lado del cuadrado mide 18 cm, por lo que el área de cada cuadrado pequeño mide 18 cm^2 y la del triángulo 9 cm^2. Utilizando Pitágoras (en el triángulo *CEF*) de nuevo calculamos el cuadrado de la hipotenusa del triángulo y obtenemos que mide 36 cm^2, que debe coincidir con el área del cuadrado grande.
En total 18·2 + 9 + 36 = 81 cm^2.
Y ahora otra manera de resolverlo sin palabras.
Observa el dibujo y… termina el razonamiento.





18.(B) Agrupamos los números de cuatro en cuatro y vemos que siempre obtenemos el mismo resultado, – 4. Al juntar todos los números del 10 al 49 (el 50 queda fuera de los grupos) de cuatro en cuatro obtenemos 10 grupos. Operando los grupos con el 50 obtenemos el resultado: (– 4)·10 + 50 = – 40 + 50 = 10.

19.(A) Cada vez que alguien acierta mejora la diferencia contra su concursante en una vez y media los puntos apostados, y cuando falla empeora la situación en esa misma cantidad. Alicia acierta una apuesta de 80, por lo que mejora su diferencia en 120 puntos y María falla una apuesta de 60 por lo que empeora su diferencia en 90 puntos.
Si empieza Alicia perdiendo por 60 y luego mejora su situación en 120 + 90 = 210 puntos, al final acaba ganando por 150 puntos.

20.(B) Ponemos los diez primeros movimientos por orden:
ABCDE → CABDE → CAEBD → ECABD → ECDAB → DECAB → DEBCA →
→ BDECA → BDAEC → ABDEC → ABCDE.
Comprobamos que se repite el patrón cada diez movimientos por lo que tenemos que fijarnos como queda tras el octavo movimiento ya que 2018 = 201·10 + 8.
Es, decir *BDAEC*, la primera letra es la *B*.

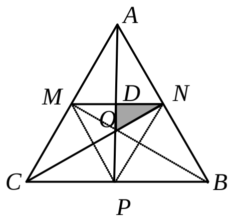
21.(C) La letra P equivale numéricamente a $\frac{27}{100}\cdot 39 = \frac{39}{100}\cdot 27$. Por lo que es cierta.

La letra Q equivale numéricamente a $\frac{20}{100}\cdot\frac{30}{100} = \frac{60}{100}$. Por lo que es falsa ya que multiplicando se obtiene 6/100.

La letra R equivale numéricamente a $1-\frac{20}{100}=\frac{80}{100}$. Por lo que es cierta.

22.(D) Tenemos que: $3a + 2b = 5a + b$.
Si restamos b en cada lado de la ecuación obtenemos $3a + b = 5a$.
Restando ahora $3a$ a cada lado de la ecuación obtenemos $b = 2a$,
Por lo que $b/a = 2$.

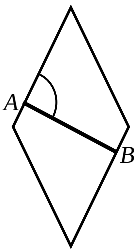
23.(B) Trazamos tres líneas adicionales en el dibujo, *MP*, *NP* y *MB*, que pasa por *O*. Vemos que el triángulo *MPN* es 1/4 del triángulo grande, *ABC*, y que el triángulo sombreado *OND* es 1/6 del triángulo *MPN* por lo que el área es $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$ del grande.

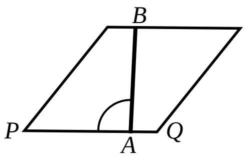


También se puede resolver utilizando semejanza de triángulos:
Los triángulos *DNO* y *PCO* son semejantes, siendo *DN* la mitad de *PC* y *PC* la mitad de *BC*. De esto deducimos que *DN* es una cuarta parte de *BC*.
Como *DO* es la mitad de *PO* deducimos que *DO* es un tercio de *DP*. Como *DP* es la mitad de *AP* (que es la altura del triángulo original) obtenemos que *DO* es un sexto de la altura original.
Hemos obtenido entonces que la base de nuestro triángulo sombreado es un cuarto que la del original y la altura un sexto por lo que el área es 1/24 del grande.

24.(E) Como los cuadrados perfectos solo pueden acabar en 0, 1, 4, 5, 6 o 9 el único que puede ser un cuadrado perfecto es el 346 921. De hecho, $589^2 = 346\,921$.

25.(C) Girando la figura podemos considerar el rombo como un paralelogramo cuya altura es el segmento pedido y cuya base, *PQ*, es uno de los lados del rombo. Como el perímetro del rombo es de 24 cm, cada lado mide 6 cm. Como el área del paralelogramo es base por altura, resulta que $6\cdot AB = 24 \Rightarrow AB = 4$ cm.



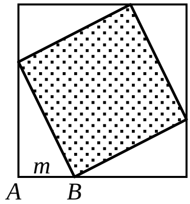


XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel III

1. (C) El lado del cuadrado interior es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos *m* y 1 – *m*, es decir, mide $\sqrt{m^2+(1-m)^2}$.

Y su área, $m^2+(1-m)^2 = 2m^2-2m+1$ ..



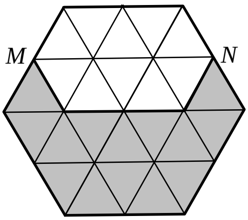
2. (D) Habrá que pagar el 90% · 80% = 72% .Por ello tendremos un descuento del 28%.

3. (E) Manejamos dos triángulos rectángulos de hipotenusa 25. El primero tiene 7 de cateto y el otro mide $\sqrt{25^2-7^2}=24$. Calculada la altura de la escalera en su primera posición, la altura en la segunda es 20, y el otro cateto mide $\sqrt{25^2-20^2}=15$.

4. (D) Especulemos con las terminaciones de *a* y *b*.

	a	b	a^3+b^3	a^2+b^2
terminación	0	3	7	
	1	2	9	
	4	9	**3**	**7**
	5	8	7	
	6	7	9	

5. (A) Dividimos el hexágono en orejas de gato y nos salen 24 triángulos, de los cuales 14 forman la cabeza del gato. Si los 24 tienen 180 cm^2 de área, 2 tienen 15 cm^2 y la cabeza, 105.

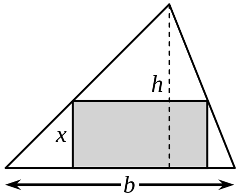


6. (B) Si llamamos *v* y *v* + 4 a las velocidades respectivas de A y B, resulta que hasta el momento del encuentro, B ha recorrido 12 km más, y por tanto han transcurrido 3 horas desde el comienzo de la carrera. A ha ido a 8 km/h y B a 12km/h.

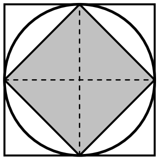
7. (C) Si dividimos el hexágono interior en seis triángulos equiláteros, podemos darnos cuenta de que los triángulos extra del hexágono regular mayor son un tercio de esos triángulos equiláteros.
Así la relación de áreas es de 4 a 3.

8. (D) Dos soluciones de la ecuación, $3x + y = 10$ son (1, 7) y (3, 1). Vemos que de una a otra la x aumenta al triple. Sin embargo, el valor de la y ni se hace triple ni tampoco se transforma en un tercio de su valor.

9. (C) La base del rectángulo mide $2x$. El triángulo sobre el rectángulo y el de partida son semejantes, y por ello: $\frac{h-x}{h}=\frac{2x}{b}$, de donde $(h-x)\cdot b = 2x\cdot h$,y operando $h\cdot b = 2x\cdot h + x\cdot b$, luego $x=\frac{h\cdot b}{2h+b}$.



10.(A) El cuadrado inscrito puede dibujarse teniendo como vértices los puntos medios de los lados del cuadrado circunscrito. Un rápido vistazo nos avisa que el área del primero es la mitad del área del segundo.

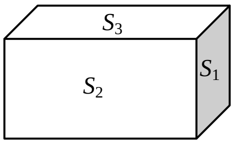


11.(C) Una igualdad se conserva si a ambos miembros les sumamos un número, sea este positivo o negativo. También se conserva una desigualdad si multiplicamos (o dividimos) ambos miembros por un número estrictamente positivo. Sin embargo la desigualdad cambia al multiplicar ambos miembros por un número estrictamente negativo. En el enunciado no se especifica si z es positivo o negativo, con lo que la igualdad de C no será cierta en el segundo caso.

12.(D) Si a, b y c, son respectivamente el largo, el ancho y el alto de la caja, el volumen es $V = a\cdot b\cdot c$.

Como $S_1 = b\cdot c$, $S_2 = a\cdot b$ y $S_3 = a\cdot c$ tenemos que:

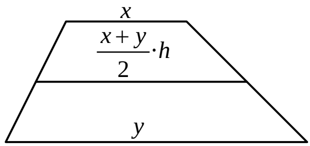
$S_1\cdot S_2\cdot S_3 = V^2$



13.(E) El número $abcabc$ = $abc\cdot 1001$, pero 1001 = 7·11·13 y descomponiendo las posibles respuestas solo 143 = 11·13 divide a 1001.

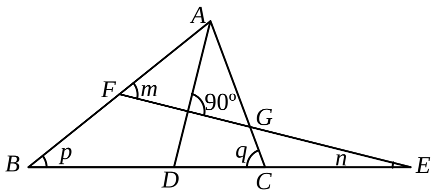
14.(D) Si el área es 1400 cm^2 y la altura 50 cm, la semisuma de las bases es 28 cm. Las bases suman 56 y este número debe ser suma de dos múltiplos de 8. Pueden ser: 8 y 48, 16 y 40, 24 y 32.

15.(B) El área del triángulo es $\dfrac{b\cdot h}{2}$, y la del trapecio, $\dfrac{x+y}{2}\cdot h$ **.** Si las áreas y las alturas son iguales la mitad de la base del triángulo es igual a la semisuma de las bases del trapecio y por tanto a su paralela media.



16.(B) Si llamamos G a la intersección de *AC* y *EF*, el triángulo *AFG* es isósceles (ya que la bisectriz de $\hat{A}$ es perpendicular a *FG*) y si llamamos $\alpha = B\hat{A}D = D\hat{A}C$, entonces, $m = A\hat{G}F = C\hat{G}E = 90º - \alpha$, y como $q = n + 90º - \alpha = n + m$,

tenemos que $p + q = 180º - 2\alpha = 2m \Rightarrow m = \dfrac{p+q}{2}$.

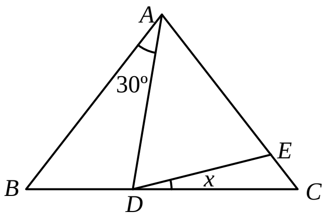


17.(D) Recordemos que los triángulos *ABC* y *ADE* son isósceles.

Si llamamos $\alpha = D\hat{A}E,\ \hat{B} = \hat{C} = \dfrac{150º - \alpha}{2}$.

Como $A\hat{E}D = 90º - \dfrac{\alpha}{2}$, $D\hat{E}C = 90º + \dfrac{\alpha}{2}$, y

$x = 180º - \dfrac{150º - \alpha}{2} - \left(90º + \dfrac{\alpha}{2}\right) = 15º$.



18.(C) Tendremos que jugar primero con que los lados formen un triángulo, y por ello el mayor será menor que la suma de los otros dos. Así escritos por tamaño, los posibles triángulos escalenos con perímetro menor que 13 y lados enteros son solo (5, 4, 3), (5, 4, 2) y (4, 3, 2).

19.(A) Para que el mayor número sea el 4, tiene que haber una tarjeta con un 4 y ninguna con un 5. Así que tenemos tres tarjetas para dos puestos. Hay 3 casos favorables sobre 10 posibles (las formas de elegir sin orden tres tarjetas de un grupo de cinco).

20.(D) 98! + 99! + 100! = 98! · (1 + 99 + 99·100) = 98! · 10 000. Es decir que esa suma de factoriales tiene *cuatro cincos más* que 98!, ($10\,000 = 2^4 \cdot 5^4$). De 1 a 98 hay diecinueve múltiplos de 5 y tres múltiplos de 25, luego 5^{19+2} es la mayor potencia de 5 que divide a 98!, y 22 + 4 la respuesta requerida.

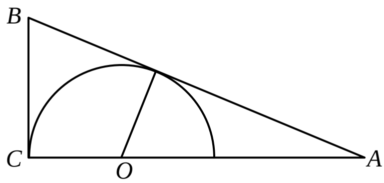
21.(B) Entre 1000 y 9999 hay 9000 enteros. Un número impar de cuatro cifras que está en ese rango, tiene 5 posibles terminaciones, y si sus cifras han de ser diferentes, hay 8 posibles cifras para la unidad de millar (el 0 no es posible), 8 para la centena (ahora sí puede entrar el 0) y 7 para decena. Así que candidatos hay: 5·8·8·7, y la probabilidad pedida es, $\frac{5\cdot 8\cdot 8\cdot 7}{9000} = \frac{56}{225}$.

22.(A) Si $a + b + c = 0$, tiene que haber dos positivos y uno negativo, o dos negativos y uno positivo. Sean a y b los de igual signo.

En el primer caso $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{a\cdot b\cdot c}{|a\cdot b\cdot c|} = 1+1-1-1 = 0$.

En el segundo caso $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{a\cdot b\cdot c}{|a\cdot b\cdot c|} = -1-1+1+1 = 0$.

23.(D) El triángulo tiene hipotenusa 13. Si dibujamos el radio de la circunferencia perpendicular a la hipotenusa, el triángulo *ABC* queda dividido en dos triángulos: *OBC* de área $\frac{5r}{2}$ y *OAB* de área $\frac{13r}{2}$. Luego el área de nuestro triángulo *ABC* que es $\frac{5\cdot 12}{2} = 30$, es también 9*r*. Luego $r = \frac{30}{9} = \frac{10}{3}$.



24.(D) Vuelven a coincidir los tres cada 3·4·5 = 60 días. De dos en dos lo hacen cada 12, 15 y 20 días. La pregunta se puede cambiar por "¿Cuántos números del 1 al 365 no son múltiplos ni de 3, ni de 4 ni de 5? Para la respuesta haremos el cálculo de cuántos números del 1 al 365 son, o múltiplos de 3, o de 4, o de 5.

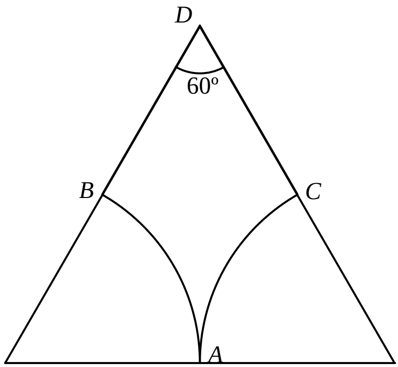
De 3 tenemos 121, de 4 tenemos 91 y de 5 tenemos 73. A la suma deberemos descontarles los que son múltiplos de 12 (30), los que son múltiplos de 15 (24) y los que son múltiplos de 20 (18), porque han sido contados dos veces. Al resultado deberemos añadir los múltiplos de 60 (6), ya que fueron contados al principio tres veces y descontados después tres veces. Así la cuenta nos da:

121 + 91 + 73 – 30 – 24 – 18 + 6 = 219. Quedan 365 – 219 = 146 días en que no llama ninguno de los nietos.

25.(B) La figura puede ser mirada como un triángulo equilátero de lado 4, al que le hemos quitado dos sectores circulares de radio 2 y ángulo 60º.

Su área será: $\dfrac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - \dfrac{\pi \cdot 2^2}{3} = 4\sqrt{3} - \dfrac{4\pi}{3}$.

.



XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 1ª Fase Nivel IV

1. (D) El cálculo requerido es: $\sqrt[3]{3^{\left(3^3\right)}}$.

Desarrollando poco a poco la expresión: $\sqrt[3]{3^{\left(3^3\right)}} = 3^{\frac{3^3}{3}} = 3^{3^{2-1}} = 3^{3^2}$. De forma que obtenemos el resultado buscado.

2. (C) Entre los primeros tres gatos se comieron 1 + 2 + 3 = 6 ratones, luego quedaron 14 ratones para los gatos cuarto, quinto y sexto. Buscamos el mínimo número de ratones que se pudo comer el cuarto gato comiendo más que cualquiera de los otros 5. Siendo sistemáticos, y empezando por la menor opción del enunciado:
Si el cuarto gato se hubiera comido 4, quedarían 10 ratones para el quinto y sexto y al menos uno de ellos habría tenido que comerse 5 o más ratones en contradicción con que el cuarto comiese más que él.
Si el cuarto gato se hubiera comido 5, quedarían 9 ratones para el quinto y sexto y ocurriría lo mismo que antes con uno de ellos comiendo 5 o más otra vez.
Sin embargo, si el cuarto gato se hubiera comido 6, podría darse el caso en que el quinto y sexto se hubieran comido cada uno 4 ratones, completando el total de 14, y comiendo el cuarto gato más ratones que cualquiera de los demás.

3. (C) En primer lugar, recordemos la expresión notable "suma por diferencia":
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.
Con ella, podemos reescribir la función f para $x \neq 2$ (donde f está definida) como:
$f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2} = \dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x+2$. De esta forma, $f(x)$ y $g(x)$ se cortarán si $f(x) = g(x)$ para algún valor de x. $f(x) = g(x) \Rightarrow x+2 = 2x \Rightarrow x = 2$.
Sin embargo f no está definida en $x = 2$, por lo que no hay ningún punto de corte.

4. (A) Si un número x es solución de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ y su inverso $\dfrac{1}{x}$ también lo es, entonces ha de verificarse además la ecuación $a\dfrac{1}{x^2} + b\dfrac{1}{x} + c = 0$.
Multiplicando por x^2, $a + bx + cx^2 = 0$. Igualando la primera ecuación con ésta, se tiene $ax^2 + bx + c = 0 = a + bx + cx^2$; de donde se deduce que $a\left(x^2-1\right) = c\left(x^2-1\right)$.
Dividiendo por x^2-1 (caso general), se obtiene en efecto $a = c$.
Otro método. El producto de las dos soluciones es: $x\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{c}{a} \Rightarrow a = c$.

5. (D) Si $m > n$ son impares, entonces pueden escribirse de la forma $m = 2m_0 + 1$ y $n = 2n_0 + 1$ con $m_0 > n_0$ números naturales (0, 1, 2…). Por tanto, recurriendo nuevamente a la expresión notable "suma por diferencia", deducimos que

$$m^2 - n^2 = (m+n)(m-n) = ((2m_0+1)+(2n_0+1))((2m_0+1)-(2n_0+1)) =$$
$$= (2(m_0+n_0+1)2(m_0+n_0)) = 4(m_0+n_0+1)(m_0+n_0).$$

Podríamos pensar que ya hemos acabado y que el mayor entero que divide a todos los posibles números $m^2 - n^2$ con $m > n$ impares es 4. ¡Pero cuidado! $m_0 + n_0$ y $m_0 + n_0 + 1$ son números naturales consecutivos, luego al menos uno de ellos es par y aporta un nuevo factor 2 a la descomposición. Nuestro candidato es pues el 8. Si no estamos seguros de poder descartar un número mayor, basta con coger $m = 3 > 1 = n$ donde $m^2 - n^2 = 3^2 - 1^2 = 8$ para ver que 8 es, en efecto, el mayor entero que divide a todos los números así construidos.

6. (C) Desarrollando la expresión $(a+b)(a+c) = a^2 + ab + ac + bc = a(a+b+c) + bc$.
Se tiene pues que $(a+b)(a+c) = a + bc$ si $a(a+b+c) + bc = a + bc$; es decir, si $a(a+b+c) = a$. Esto ocurrirá si $a = 0$ o si $a + b + c = 1$. Podemos descartar así las opciones A, B y D. Además, la opción E indica que el resultado sólo acontece en caso de que se dé a = b = c = 0, lo cual no es cierto pues hemos deducido que también se tiene si $a + b + c = 1$. Esto último es lo que indica la respuesta C.

7. (E) Razonemos sobre cada una de las opciones:

A – Si $x = \frac{1}{2},\ y = -\frac{1}{4}$, entonces $y + x^2 = -\frac{1}{8} < 0$.

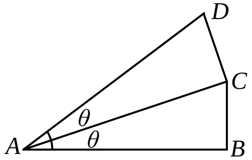
B – Si $x = \frac{1}{3},\ y = -\frac{3}{4},\ z = \frac{3}{2}$, entonces $y + xz = -\frac{1}{4} < 0$.

C – Si $y = -\frac{1}{2}$, entonces $y + y^2 = -\frac{1}{4} < 0$.

D – Si $y = -\frac{1}{4}$, entonces $y + 2y^2 = -\frac{1}{8} < 0$.

E – Siendo $-1 < y$; $1 < z$, sumando ambas inecuaciones concluimos que $0 < y + z$, y por tanto que la expresión se corresponde con un número positivo.

8. (D) La gráfica de la función $y = f(x)$ es simétrica respecto del eje de ordenadas si se cumple $f(x) = f(-x)$ para todo valor de x. Podríamos probar con todas las opciones para descartar una a una, pero centrémonos en la respuesta correcta D donde se propone $f(x) = x\,\mathrm{sen}x$. $f(-x) = (-x)\mathrm{sen}(-x) = (-x)\,(-\mathrm{sen}x) = x\,\mathrm{sen}x = f(x)$. Por tanto, se concluye que la gráfica en D es simétrica respecto del eje de ordenadas.



9. (E) De acuerdo con las indicaciones del enunciado, en el triángulo *ABC*, dado que $A\hat{B}C = 90^{\circ}$ y $C\hat{A}B = \theta$, se verifica $\cos\theta = \dfrac{AB}{AC}$. De igual manera, en el triángulo *ACD*, dado que $A\hat{C}D = 90^{\circ}$ y $D\hat{C}B = \theta$, se verifica $\cos\theta = \dfrac{AC}{AD}$. Multiplicando ambas expresiones, se concluye que $\cos^2\theta = \dfrac{AB}{AD}$. Como por hipótesis *AB* = 1, invirtiendo ambos lados de la igualdad se llega a $AD = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$.

10.(E) El producto de los *n* primeros términos de la sucesión $10^{\frac{1}{13}}, 10^{\frac{2}{13}}, 10^{\frac{3}{13}}, \ldots, 10^{\frac{n}{13}}$ es $10^{\frac{1+2+3+\ldots+n}{13}}$, donde la suma de los *n* primeros números naturales se puede calcular como $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Escribiendo 100 000 como una potencia de 10, se deduce que ésta es $10^5 = 10^{\frac{65}{13}}$. Por tanto, buscamos el menor entero positivo *n* tal que $\dfrac{n(n+1)}{2}$ sea mayor o igual que 65. En particular, con *n* = 10 se tiene $\dfrac{n(n+1)}{2} = 55$ y con *n* = 11 se tiene $\dfrac{n(n+1)}{2} = 66$. Por tanto la respuesta es *n* = 11.

11.(A) Recordemos en primer lugar la siguiente relación entre el seno y coseno de un ángulo: $sen x = \cos(x - 90^{\circ})$. Y, equivalentemente: $\cos x = sen(x + 90^{\circ})$. De esta forma, sen300º = cos210º y $-\cos 300^{\circ} = -sen 390^{\circ} = sen(-390^{\circ}) = sen 330^{\circ} = sen 210^{\circ}$.
Por tanto, podemos reescribir el número complejo dado como:
$sen 300^{\circ} - i \cos 300^{\circ} = |1| \cos 210^{\circ} + i |1| sen 210^{\circ}$. Una vez expresado en la forma módulo argumental, es inmediato que el número es $1_{210^{\circ}}$.

12.(E) Podemos establecer las siguientes relaciones:
$a^2 = \dfrac{ab \cdot ac}{bc} = \dfrac{26 \cdot 128}{52} = 64$, luego $a = 8$.

$b^2 = \dfrac{ab \cdot bc}{ac} = \dfrac{26 \cdot 52}{128} = \dfrac{169}{16}$, luego $b = \dfrac{13}{4}$.

$c^2 = \dfrac{ac \cdot bc}{ab} = \dfrac{128 \cdot 52}{26} = 256$, luego $c = 16$.

Así, $a + b + c = 8 + \dfrac{13}{4} + 16 = \dfrac{32 + 13 + 64}{4} = \dfrac{109}{4}$.

13.(D) Busquemos el número empezando por el 999, siendo éste el mayor número menor que 1000, descartando aquellos números cuyas cifras no sumen una de las posibles respuestas (10, 12, 15, 18 ó 21) hasta encontrar uno que incluya en su factorización cuatro divisores primos diferentes: 999 hasta 994 tienen cifras con suma no propuesta, $993 = 3 \cdot 331$ (suma 21), 992 y 991 tienen cifras con suma no propuesta, $990 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$, ¡eureka! Como sus cifras suman 18, ésta es la respuesta.

14.(A) Si $f(x) = ax + b$ y $f^{-1}(x) = bx + a$, entonces $x = f^{-1}\left(f(x)\right)\ \forall x$

$f^{-1}\left(f(x)\right) = f^{-1}\left(ax + b\right) = b(ax + b) + a = abx + b^2 + a = x,\ \forall x. \Rightarrow ab = 1,\ b^2 + a = 0$

Como $a = -b^2$ sustituyendo en la otra expresión se obtiene $-b^3 = 1 \Rightarrow b = -1$ y por lo tanto $a = -1$. Por lo tanto $a + b = -2$.

15.(B) Sabiendo que $4^x = 9$, entonces $4^4 = 256 = 9^y = \left(4^x\right)^y = 4^{xy} \Rightarrow xy = 4$.

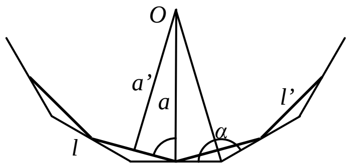
16.(C) Queremos expresar el número $2^{25} \cdot 3^{40}$ en la forma m^n con m y n enteros positivos y $n > 1$. Por tanto, necesitamos que con $\dfrac{25}{n}$ y $\dfrac{40}{n}$ enteros y $n > 1$. Dado que los únicos divisores comunes de 25 y 40 son el 1 y el 5, tiene que cumplirse que $n = 5$ y, así, $m = 2^{\frac{25}{5}} \cdot 3^{\frac{40}{5}} = 2^5 \cdot 3^8 = 209\,952$. El resultado pedido es por tanto $m + n = 209\,957$.

17.(A) Supongamos que vamos a sumar los 100 enteros consecutivos a partir del n. En tal caso, querremos computar $n + (n + 1) + (n + 2) + \ldots + (n + 99)$. Si reagrupamos los sumandos, vemos que el cálculo es equivalente a $100n + (1 + 2 + \ldots + 99)$. Ahora bien, la suma de los primeros 100 números enteros positivos es $\dfrac{1 + 99}{2} \cdot 99 = 4950$, luego la suma de nuestros 100 enteros consecutivos será $100n + 4950$. Si nos damos cuenta, este número debe tener un 5 en las decenas y un 0 en las unidades, por lo que la única respuesta posible es la A (donde $n = 16273800$, ¡bien grande!).

18.(D) Contestando al azar, el concursante dispone de tres opciones para la 1ª pregunta, por tres opciones para la 2ª y por tres opciones para la 3ª tercera. Luego dispone de 3·3·3 = 27 opciones para sus respuestas. De entre ellas, sólo ganará si contesta al menos dos de las tres cuestiones correctamente. Si falla la 1ª pregunta con cualquiera de las dos opciones incorrectas, deberá contestar correctamente a la 2ª y la 3ª. De la misma forma, le ocurrirá que tendrá dos formas de fallar únicamente tanto la 2ª pregunta como la 3ª. Esto hace un total de 2 + 2 + 2 = 6 opciones de acertar exclusivamente dos de las cuestiones. Si además, consideramos la posibilidad de que acierte las tres preguntas, tendrá un total de 6 + 1 = 7 opciones ganadoras. De esta forma, la probabilidad de que gane será de $\frac{7}{27}$.

19.(C) Designemos a cada uno por la inicial de su nombre y distingamos casos según dónde se siente Alicia (A), la más tiquismiquis:
Si A se sienta la primera de la fila, tenemos las siguientes opciones: {A,D,B,C,E}, {A,D,B,E,C}, {A,D,C,B,E}, {A,D,C,E,B}, {A,E,B,C,D}, {A,E,B,D,C}, {A,E,C,B,D}, {A,E,C,D,B}. En total, 8 formas de sentarse.
Si A se sienta la segunda de la fila, las opciones son: {D,A,E,B,C}, {D,A,E,C,B}, {E,A,D,B,C}, {E,A,D,C,B }. En total, 4 formas de sentarse.
Si A se sienta en medio, pueden recurrir a: {B,D,A,E,C}, {B,E,A,D,C}, {C,D,A,E,B}, {C,E,A,D,B}. En total, 4 formas de sentarse.
Si A se sienta la cuarta o quinta, hay tantas como si se sienta la segunda o primera (respectivamente) por simetría.
Así pues, hay un total de 8 + 4 + 4 + 4 + 8 = 28 formas de que se sienten en la fila.

20.(A) Sean *l* el lado y *a* la apotema del polígono regular de ángulo interior α y *l'* el lado y *a'* la apotema de polígono regular inscrito en él con los vértices en los puntos medios de los lados (también de ángulo interior α al tener el mismo número de lados). Con ayuda del



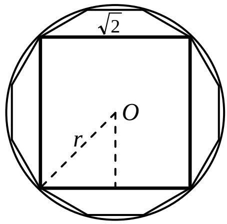
dibujo podemos apreciar que $sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{a'}{a}$ y que $sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{l'/2}{l/2}=\frac{l'}{l}$. El área de un polígono regular de *n* lados viene dada por la expresión: $S=\frac{perímetro\ \cdot\ apotema}{2}$.

Luego el cociente de las áreas indicado es : $\frac{S}{S'}=\frac{\frac{l\cdot n\cdot a}{2}}{\frac{l'\cdot n\cdot a'}{2}}=\frac{l}{l'}\cdot\frac{a}{a'}=\frac{1}{sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{2}{1-\cos\alpha}$.

Hemos aplicado la fórmula del seno del ángulo mitad. .

21.(C) Ateniendo a la definición de *f* como 10 = 2·5, entonces 14 = *f*(10) = *f*(2) + *f*(5). Además, aplicando de forma reiterada la definición a 40 = 2^3 ·5, se tiene $20 = f(40) = f\left(2^3\right) + f(5) = f\left(2^2\right) + f(2) + f(5) = 3f(2) + f(5)$. Así, si resolvemos el sistema formado por ambas expresiones en *f*(2) y *f*(5), obtenemos *f*(2) = 3 y *f*(5) = 11. Finalmente, como 500 = $2^2 \cdot 5^3$, se obtiene $f(500) = 2f(2) + 3f(5) = 2\cdot 3 + 3\cdot 11 = 39$.

22.(C) Sabemos que el área del cuadrado es 2 dm^2, por lo que su lado medirá $\sqrt{2}$ dm. Sabiendo esto, calculamos el radio *r* de la circunferencia circunscrita al cuadrado, usando el Teorema de Pitágoras. $r^2 + r^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 \Rightarrow r = 1$.

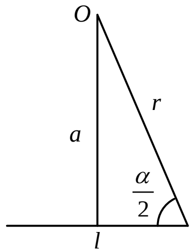


Las expresiones de la apotema y el lado de un polígono regular en función de su ángulo interior y el radio de la circunferencia circunscrita son:

$$sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a}{r} \Rightarrow a = r\cdot sen\left(\frac{\alpha}{2}\right); \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{l/2}{r} \Rightarrow l = 2r\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

El área del polígono regular de *n* lados se puede obtener ahora mediante la expresión:

$$S = \frac{l\cdot n\cdot a}{2} = \frac{2r\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot n\cdot r\, sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2} = \frac{r^2\cdot n\cdot sen\,\alpha}{2}$$ y resulta



$$S == \frac{1^2\cdot 12\cdot sen\left(\frac{360^{\circ}}{12}\right)}{2} = 6\cdot sen\,30^{\circ} = 6\cdot\frac{1}{2} = 3$$

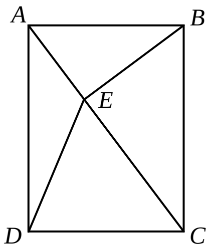
23.(A) La clave que puso Pablo en la cerradura de su maleta consistía de cuatro cifras distintas con solamente dos de ellas impares y, por tanto, las otras dos pares. Veamos en primer lugar cuántos grupos distintos de cifras pudo haber tomado Pablo. Para las cifras impares hubo de seleccionar dos de las cinco posibles, luego pudo tomar $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$. De la misma manera pudo proceder con las cifras pares en su clave, por lo que en total tuvo diez posibilidades para las cifras pares por las diez de las cifras impares; en total, 10^2. Si además consideramos de cuántas formas pudo ordenar cada posible grupo de cuatro cifras, estas ordenaciones son 4! = 24. De esta forma, el número de claves distintas que pudo haber configurado es de $10^2 \cdot 24 = 2400$. Si tiene la mala suerte de tener que probar todas hasta dar con la correcta para abrir la maleta, deberá probar como máximo 2400 claves.

24.(D) El área del triángulo rectángulo de catetos a y b es $S=\frac{a\cdot b}{2}$.

Pero además, conociendo la hipotenusa mediante el Teorema de Pitágoras $h=\sqrt{a^2+b^2}$ y la altura x sobre la misma, también podemos calcular dicho área como: $S=\frac{x\cdot h}{2}=\frac{x\cdot\sqrt{a^2+b^2}}{2}$. Igualando ambas expresiones se deduce que $ab=x\sqrt{a^2+b^2}$ Si elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad entonces $a^2b^2=x^2\left(a^2+b^2\right)$. Y si finalmente dividimos la igualdad por $a^2b^2x^2$ se concluye que $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}$.

25.(E) El triángulo ABC es rectángulo, por tanto es aplicable el Teorema de Pitágoras $AC^2=AB^2+BC^2=3^2+4^2=25\Rightarrow AC=5$. Sabiendo esto, el área del triángulo ABC la podemos calcular bien mediante el producto de los catetos o bien mediante el producto de la hipotenusa por la altura sobre la misma.

$$\frac{AB\cdot BC}{2}=\frac{AC\cdot BE}{2}\Rightarrow\frac{3\cdot 4}{2}=\frac{5\cdot BE}{2}\Rightarrow BE=\frac{12}{5}$$



Como E es el pie de la perpendicular desde B a la diagonal AC, el triángulo AEB es rectángulo. Aplicando de nuevo el Teorema de Pitágoras se tiene:

$$AE^2=AB^2-BE^2=9-\frac{144}{25}=\frac{225-144}{25}=\frac{81}{25}\Rightarrow AE=\frac{9}{5}$$

Dado que el segmento AC es la diagonal del rectángulo, los triángulos ABE y AED tienen la misma altura sobre la base común AE y por tanto la misma área. Concluimos así que el área del triángulo AED es $S_{AED}=\frac{AE\cdot BE}{2}=\frac{\frac{9}{5}\cdot\frac{12}{5}}{2}=\frac{54}{25}$.

XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel I

1. (C) Comenzamos multiplicado sucesivamente 9 por 9, 8, 7,… hasta obtener un producto menor que 40. Como 9 × 5 = 45 y 9 × 4 = 36, hemos obtenido **cinco** productos mayores que 40. A continuación, y dado que no debemos volver a emplear el 9, multiplicamos 8 por 8,7 y 6, con lo que hemos obtenido otros **tres** productos mayores que 40 (8 × 5 = 40). Procediendo del mismo modo, con el 7 obtenemos **dos** productos más, 7 × 7 y 7 × 6. Y puesto que 6 × 6 = 36 aquí termina el proceso
En total tenemos 5 + 3 + 2 = 10 números mayores que 40.

2. (B) Salta a la vista que en B) no es posible encajar la pieza formada por cinco cuadraditos.

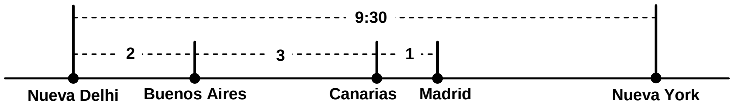
3. (C) Si el capitán estuvo *t* horas navegando con el viento a favor, durante ese tiempo recorrió 45 × *t* km y con el viento en contra recorrió 25 × (10 – *t*) = 250 – 25 × *t* km. Luego, en total, recorrió 250 – 20 × *t* km que, sabemos, es igual a 310 km. Por tanto, 20 × *t* = 310 – 250 = 60, de donde $t = \frac{60}{20} = 3$ horas.

4. (D) Si *N* es la tercera parte de las bolsas pagadas con dos monedas de 1 € cada una, se ha dispuesto en total de (100 + 2 × N) € para devolver por la compra de las restantes 2 × N bolsas compradas con billetes de 5 € y, como a cada comprador se le devuelven 3 €, nos quedaremos sin cambio cuando:
100 + 2 × N = 3 × 2 × N , es decir, 100 = 4 × N, por lo que *N* = 25..
Luego como máximo podremos vender 25 × 3 = 75 bolsas sin ir a buscar más cambio.

5. (A) De la simetría de la diadema deducimos que el perímetro del hexágono es igual al perímetro de la cabeza de gato. Por tanto, medio lado del hexágono mide $\frac{48}{12} = 4$ cm.
Dado que el perímetro de la diadema es de 8 medios lados, dicho perímetro mide 8 × 4= 32 cm.

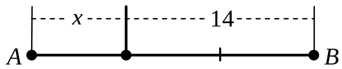
6. (B) Como 2081 – 2018 = 63 y 63 + 22 = 85, entonces en 2081 celebraremos la 85ª edición.

7. (E) El enunciado del problema dice:
Hay una hora más en Madrid que en Canarias; hay 3 horas más en Canarias que en Buenos Aires; hay 2 horas más en Buenos Aires que en Nueva York y hay 9:30 horas más (21:30 – 12:00 = 9:30) en Nueva Delhi que en Nueva York. Lo que permite ordenar los tiempos en un diagrama como el siguiente:
dónde se ve inmediatamente que la hora de Nueva Delhi menos la de Madrid es:
9:30 – (2:00 + 3:00 + 1:00) = 3:30 horas. Por lo que cuando en Nueva Delhi sean las 21:00 en Madríd serán las 21:00 – 3:30 = 17:30 horas.



8. (D) La gráfica nos muestra que la distancia recorrida es proporcional al tiempo empleado en recorrerla. Como en 10 minutos recorre 4 km, en 90 minutos recorrerá 9 veces esa distancia, es decir, recorrerá 9 × 4 = 36 km.

9. (A) En la figura el segmento *AB* representa el número pensado, *x* es su tercera parte y 14 es el doble de esa tercera parte. Por tanto $x = 7$ y nuestro número es 3 × 7 = 21. La suma de sus cifras es 3.



10.(A) Esteban comienza sus baños a los 20 minutos de llegar a la playa y luego se baña cada 20 + 5 = 25 minutos, por lo que se baña sucesivamente entre los [20, 25]; [45, 50]; [70, 75]; [95,100]; [120, 125]; [145, 150]… minutos de llegar.
Ariel, por su parte, comienza su primer baño 30 minutos después de llegar a la playa y se baña sucesivamente cada 30 + 15 = 45 minutos, es decir, entre los [30, 45]; [75, 90]; [120, 135]… minutos de llegar a la playa.
Vemos pues que a los 120 minutos de llegar coinciden durante 5 minutos y, puesto que han llegado a las 10:00, coincidirán a las 12:00.

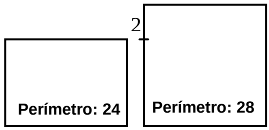
11.(B) Mientras Alfredo da 2 saltos Juanje da 7. Cuando Alfredo de 100 saltos Juanje dará *x*.
Luego $x = \dfrac{100 \times 7}{2} = 350$
Como Juanje da 50 saltos más, en total ha dado 400 saltos.

12.(C) Si tomamos como base del triángulo el lado *MD* la altura viene dada por *AB* y el área será: $\dfrac{4 \times 6}{2} = 12 \text{ cm}^2$.

13.(B) La cartulina de Inés, es de 59,4 cm por 84,1 cm. Como 59,4 : 15 = 3,96 solo podrá aprovechar 3 tiras paralelas al lado de 84,1 cm.
Igualmente, como 84,1 : 15 = 5,6066… únicamente aprovechará 5 tiras paralelas al otro lado del rectángulo. Por lo tanto podrá hacer $3 \times 5 = 15$ cuadrados como máximo.

14.(C) Si al 4% corresponden 0,2 g de sal, al 100% corresponderán x g de sal. De donde $x = \dfrac{100 \times 0{,}2}{4} = 5$ g de sal.

15.(C) En la figura hemos representado el rectángulo de perímetro 24 cm y el cuadrado de perímetro 28 cm (24 + 2 + 2). Se deduce que el lado del cuadrado mide 28 : 4 = 7 cm y que, por tanto, la base del rectángulo también mide 7 cm y su altura 7 – 2 = 5 cm.



En consecuencia, el área del rectángulo es $7 \times 5 = 35$ cm^2.

16.(A) Como al prolongar en 2 cm uno de los lados del rectángulo se obtiene un cuadrado, deducimos que la diferencia de sus lados es de 2 cm.
Por otra parte, como $24 = 6 \times 4$, vemos inmediatamente la solución: el rectángulo mide de base 4 cm y 6 cm de altura, luego su perímetro es de 6 + 6 + 4 + 4 = 20 cm.

17.(D) Cuando Mariquilla saca su papelito, de la bolsa se han extraído cuatro papeletas, de las que una de ellas corresponde a anfibios. Quedan pues 21 papelitos de los que 3 son de anfibios, por lo tanto la probabilidad de sacar anfibio es $\dfrac{3}{21} = \dfrac{1}{7}$.

18.(C) El problema es organizar bien el conteo de segmentos.
Lados del dodecágono: 12 segmentos.
Seis rombos: $6 \times 4 = 24$. Pero tienen 3 lados en común, luego 24 – 3 = 21 segmentos.
Tres cuadrados (sin un lado cada uno): 9 segmentos.
En total: 12 + 21 + 9 = 42 segmentos.

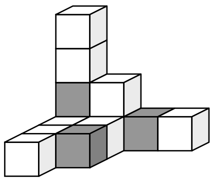
19.(E) La columna de las unidades de la segunda suma implica A = 0 o A = 5. Si A = 0 es fácil ver que todas las letras tienen que representar 0, por lo que desechamos esa solución. Si A = 5, la columna de los millares de la primera suma conduce a O = 6. A continuación la columna de las unidades de la primera suma lleva a N = 4; la columna de los millares de la primera suma hace D = 9; la columna de las decenas de la primera suma implica M = 3 y la columna de los millares de la segunda suma hace I = 1. Por tanto N + I + D + O = 4 + 1 + 9 + 6 = 20.

20.(D) Con el alfabeto delante es inmediato ver que el único mensaje con sentido es ELHP que, descifrado, significa BIEN.

21.(E) Haciendo un listado con las nueces que encuentra cada día se ve sin dificultad la regla de formación.
Día 1: 1
Día 2: 6
Día 3: $(3 - 1) \times 6 = 12$
Día 4: $(4 - 1) \times 6 = 18$
….
Día 15: $(15 - 1) \times 6 = 84$

22.(E) La respuesta afirmativa a las dos primeras preguntas selecciona los números 1000, 238, 26, 336, 154 y 922. En principio, la pregunta E) resuelve el problema pues solo el número 238 se ajusta a ella.
No obstante podemos comprobar que entrelos números seleccionados hay dos múltiplos de 4 (1000 y 336) y que otros dos incluyen la cifra 6. Además ninguno es tal que la suma de sus cifras es mayor que 18 y hay 3 múltiplos de 7 (238, 336 y 154).
Confirmamos pues que la E) es la tercera pregunta.

23.(D) En la figura se han señalado los tres únicos cubitos que tienen exactamente tres de sus caras pintadas de rojo.



24.(A) Comenúmeros ha reducido la multiplicación a $640\,022 \times 48\,000 = 30\,721\,056\,000$. La suma de sus cifras es $3 + 7 + 2 + 1 + 5 + 6 = 24$.

25.(A) Dado que $1000 : 7 \cong 142{,}85$ el número que dividido entre 7 sea igual a 143 será el menor número de cuatro cifras que es múltiplo de 7.
Por lo que ese número es $143 \times 7 = 1001$.Y la suma de sus cifras es 2.

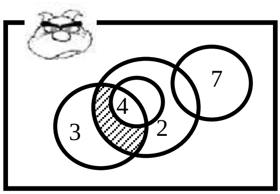
XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel II

1. (E) Nos preguntan: ¿cuánto hay que sumar a $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ para obtener $4-\frac{5}{6}=\frac{19}{6}$?

Sencillo, restamos y se acabó: $\frac{19}{6}-\frac{1}{3}=\frac{17}{6}$.

2. (D) Tenemos que identificar qué hay en esos círculos. El círculo que está contenido en otro es el que corresponde a los múltiplos de 4 y el que lo contiene es el de los múltiplos de 2. Como no hay múltiplos de 4 y 7 en los números que hay hasta el 20, ya hemos identificado todos los círculos.
La parte rayada corresponde a los múltiplos de 3 y de 2 que no son múltiplos de 4. O sea, el 6 y el 18. Hay dos números.



3. (E) Puedes hacer un esquema o un dibujo o una tabla.

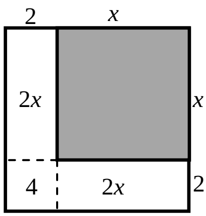
Min: 8	16	24	32	40	48	
30	22	14	6			
	30	22	14	6		
		30	22	14	6	
			30	22	14	
				30	22	

A los 47 minutos habrá tres relojes con arena todavía por caer: a uno le quedarán 7 minutos, a otro 15 y a otro 23.

4. (A) Si llamamos x a la longitud, en cm, del cuadrado gris, podemos asegurar que el área de la zona blanca es:

$$36=2x+2x+4.$$

Por tanto, $x=8$.



5. (B) Si llamamos por sus iniciales a los números ocultos de los tres amigos, tenemos que $14 \cdot \mathrm{D} = 20 \cdot \mathrm{G} = 36 \cdot \mathrm{L}$ y si factorizamos veremos todo más claro: $2 \cdot 7 \cdot \mathrm{D} = 2^2 \cdot 5 \cdot \mathrm{G} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot \mathrm{L}$. Como los números buscados son de dos cifras, podemos encontrarlos fácilmente sin más que completar los factores que faltan para obtener las igualdades: $2 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 3^2 \cdot 5) = 2^2 \cdot 5 \cdot (3^2 \cdot 7) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot (5 \cdot 7)$

$\mathrm{D} = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90 \quad \mathrm{G} = 3^2 \cdot 7 = 63 \quad \mathrm{L} = 5 \cdot 7 = 35$

La suma de los tres números es $\mathrm{D} + \mathrm{G} + \mathrm{L} = 90 + 63 + 35 = 188$.

Observa que ya no hay más soluciones válidas porque los números ya no serían de dos cifras.

6. (E) Podemos elaborar una tabla con las terminaciones de dichas operaciones. No hace falta calcularlas, solo nos interesa el último dígito, el de las unidades.

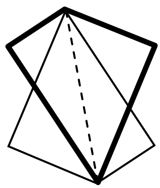
a	**b**	**a + b**	a^2	b^2	$a^2 + b^2$
1	0	1	1	0	1
2	9	1	4	6	0
3	8	1	9	4	3
4	7	1	6	9	5
5	6	1	5	6	1

Por tanto, ya hemos identificado que los dos números en cuestión terminan, uno en 4 y el otro en 7. Y ahora calcular hasta encontrar algo interesante:

a	b	$a+b$	a^2	b^2	a^2+b^2	a^3	b^3	a^3+b^3	a^4	b^4	a^4+b^4	a^5	b^5	a^5+b^5
3	8	1	9	4	3	7	2	9	1	6	7	3	8	1

Anda, las terminaciones se repiten de cuatro en cuatro. Como 2018 = 504·4 + 2, la terminación de $a^{2018} + b^{2018}$ es la misma que la de $a^2 + b^2$, es decir, 3.

7. (C) La cometa está formada por dos triángulos rectángulos cuyos catetos son los lados de los dos rectángulos. El área de la cometa es, por tanto, es $A = \frac{5 \cdot 15}{2} + \frac{9 \cdot 13}{2} = 96$ cm^2.



8. (A) El reparto justo hay que realizarlo en función de la cantidad de tarta que dan Paula y Rubén a sus amigos. Vamos a elaborar una tabla:

	Cantidad de tarta que…		
	… compran	**…comen**	**… dan a sus amigos**
Paula	2	3/4	2 – 3/4 = 5/4
Rubén	1	3/4	1 – 3/4 = 1/4
Miguelito	–	3/4	–
Luci	–	3/4	–

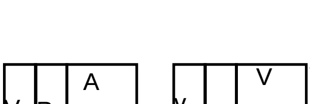
Así pues, Paula da cinco veces más cantidad (5 cuartos) que Rubén (1 cuarto), por lo que deberá recibir cinco veces más canicas que Rubén.
Paula se quedará con 20 canicas y Rubén con 4.

9. (A) Resulta que todas son falsas. Aquí te ponemos un ejemplo apropiado a cada una de ellas para que veas que no son verdaderas. A estos ejemplos se les llama contraejemplos.

I. Si multiplico por tres el divisor de una división entera, el cociente quedará dividido entre tres. (21:5 y 21:15)
II. Si divido entre cuatro el dividendo y el divisor, el cociente quedará multiplicado por cuatro. (36:20 y 9:5)
III. Si sumo cinco al dividendo y al divisor, el cociente no varía. (7:2 y 12:7)
IV. Si resto seis al divisor, el cociente aumentará en tres unidades. (15:8 y 15:2)

10.(A) Si representamos con B la nota media de las ballenas, la suma de todas las notas obtenidas por los 25 animales podemos calcularla de dos maneras diferentes: $25 \cdot 16 = 15 \cdot 18 + 10 \cdot B$, es decir, $400 = 270 + 10B$.
Por tanto, la nota media de las ballenas fue $B = 13$.

11.(C) Si colocamos primero las franjas verticales, vemos que para cada comienzo podemos formar dos diseños, por ejemplo, si elegimos VR para empezar tenemos esas dos banderas.



Como tenemos seis maneras de colorear las verticales (VR, RV, VA, AV, RA, AR), en total podemos diseñar doce banderas diferentes con esas condiciones.

12.(B) Las operaciones correctamente hechas y sin saltarse pasos son:

$3-(3-4)^3 = 3-(-1)^3 = 3-(-1) = 3+1 = 4$

$3-(3-4)(3-4)-4 = 3-(-1)(-1)-4 = 3-1-4 = 3-5 = -2$

$3-(3-4)^2 = 3-(-1)^2 = 3-1 = 2$

$3-4-3 = 3-7 = -4$

Centésima solo hizo bien la segunda operación. Sacó un punto. Ay, las prisas.

13.(B) No hay que asustarse con este problema. Lo importante es elegir una buena notación:
La edad del hijo es el número de dos dígitos <u>*ab*</u>, por tanto, su edad es $10a + b$.
La edad de su padre es el número de dos dígitos <u>*cd*</u>, y su edad es $10c + d$.
Si traducimos la información del enunciado, obtenemos estas ecuaciones:

$10c + d = 3\cdot(10a + b)$

$c + d + a + b = 10a + b$

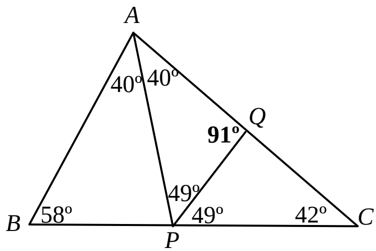
$c + d = a + b$

Reescribo la segunda ecuación sustituyendo $c + d$ por $a + b$:

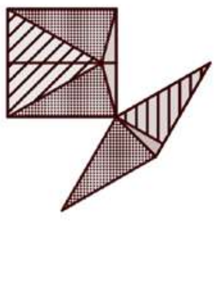
$$a + b + a + b = 10a + b \rightarrow b = 8a$$

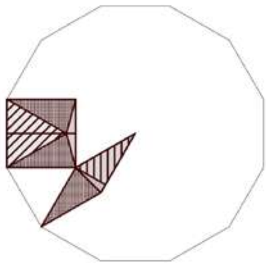
Y ya hemos terminado. Como a y b son cifras, la única posibilidad que hay es que $a = 1$ y $b = 8$.
El hijo tiene 18 años, su padre, el triple, 54, y la suma de sus edades es 72

14.(C) En el triángulo *ABC*, el ángulo *A* mide 80º (180º – 58º – 42º).
En el triángulo *APC*, el ángulo *P* es 98º (40º + 58º).
En el triángulo *APQ*, el ángulo *A* es 40º; el ángulo *P*, 49º (98º:2) y por ello,
el ángulo *Q* es 91º (180º – 40º – 49º).



15.(D) Cada cuadrado tiene el doble de área que cada rombo. Observa bien estos dibujos y te convencerás.





16.(A) Como la hora la divide entre dos, tiene que ser múltiplo de 2.
Como (24 – hora) lo divide entre 3 y 24 es múltiplo de 3, hora es múltiplo de 3.
Entonces, hora es múltiplo de 6.

Si son las 6 horas, $\frac{6}{2}+\frac{24-6}{3}+7\neq 6$.

Si son las 12 horas, $\frac{12}{2}+\frac{24-12}{3}+7\neq 12$.

Si son las 18 horas, $\frac{18}{2}+\frac{24-18}{3}+7=18$. Son las 18 horas.

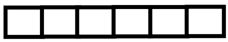
17.(C) Pitágoras tiene P piedras, Tales T piedras y Arquímedes A piedras.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{4}P=\frac{1}{6}T\Rightarrow P=\frac{2}{3}T\\ \frac{1}{3}T=\frac{2}{5}A\Rightarrow A=\frac{5}{6}T\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{2}{3}T+T+\frac{5}{6}T=180\Rightarrow \frac{4T+6T+5T}{6}=180\Rightarrow T=72$$

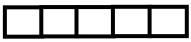
Como Tales tiene 72 piedras, Pitágoras tiene $\frac{72\cdot 2}{3}=48$.

También se puede resolver usando únicamente las fracciones.
Como un cuarto de las piedras de P son un sexto de las T podemos representar sus piedras así:

Pitágoras: 

Tales: 

Como un tercio de las piedras de T son dos quintos de las de A, podemos representar las piedras de A así:

Arquímedes: 

Es decir, entre los tres suman 15 rectangulitos que hacen un total de 180 piedras. Por tanto, cada rectangulito representa 180:15 = 12 piedras, por lo que Pitágoras tiene 4·12 = 48 piedras.

18.(A) Como 3·5·7 es 105, el número que nos piden tiene que ser múltiplo de 105. El menor múltiplo de 105 formado por las cifras 3, 5 y 7 es 105·7 = 735.
Como 105 = 3·5·7, 735 es 3·5·7·7, por lo que 735 es múltiplo de 49.

19.(A) Observamos que la C número 1 tiene 3 palitos; la número 2, 7 palitos; la número 3, 11 palitos; de modo que para pasar de una C a la siguiente, Centésima necesita añadir 4 palitos.
Comenzando a contar desde la primera C:
Para construir la C número 10 necesitará pasar 9 veces de una C a otra, por lo que el número de palitos será 3 + 9·4 = 39.
Para construir la C número 100 necesitará pasar 99 veces de una C a otra, por lo que el número de palitos será 3 + 99·4 = 399.
Así que, necesitará en total 39 + 399 = 438 palitos.

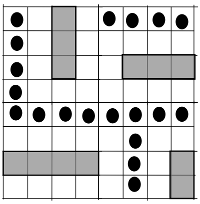
20.(C) La carta imposible de conseguir es la C, pues todas las demás se consiguen girando un múltiplo de 90º respecto del centro del cuadrado.
Observa que la carta C es la imagen en un espejo del as de espadas.

21.(D) Si x representa el tiempo empleado por Don Retorcido en completar la competición:
El número de sumas que resuelve Don Retorcido es $7x$.
El número de sumas que resuelve Comenúmeros es $5 \cdot (x+14)$.
La ecuación que se corresponde con dicha situación es $7x = 5 \cdot (x+14)$, obteniendo al resolverla que el tiempo empleado es 35 horas. Por ello, el número de sumas es 7·35 = 245.

22.(E) Si α representa el ángulo que tenemos que calcular:
El complementario se expresa como $(90º-\alpha)$.
El suplementario se expresa como $(180º-\alpha)$.
La ecuación que se corresponde con dicha situación es $(90º-\alpha)+(180º-\alpha)=208º$, obteniendo, al resolverla, que el ángulo buscado mide 31º.

23.(E) *A* es 16 (es el único cuadrado perfecto entre 11 y 19)
D es 12 (los múltiplos de 4 entre 11 y 19 son 12 y 16, pero *A* = 16)
B es 18 (los múltiplos de 6 entre 11 y 19 son 12 y 18, pero *D* = 12)
A + *B* + *D* = 46. El único número válido que sumado con 46 da un múltiplo de cinco es 19 (46 + 19 = 65), así que *C* es el número 19.

24.(B) El barquito sólo puede colocarse en la 1ª vertical, en 4 posiciones distintas; en la 6ª vertical, en 3 posiciones distintas; en la 1ª horizontal, en 3 posiciones distintas; en la 5ª horizontal, en 7 posiciones distintas.
En total, 4 + 3 + 3 + 7 = 17 posiciones distintas.



25.(E) 3V: la única potencia de 6 con 3 cifras es 216.
3H1V: 2 porque en 1H y 1V va el mismo número.
3H: el único múltiplo de 11 que empieza con 2 y acaba en 6 es el 286.
2H2V: puede ser un 4 o un 6, pues tras descartar el 121 (la casilla 1H2V tendría que ser 10) los únicos cuadrados perfectos de tres cifras tienen un 4 o un 6 como cifra de las decenas. Si es un 6, la casilla 1H2V sería un 6, por lo que la 2H1V sería un 6 y el número 661 no es un cuadrado perfecto. Así que 2V es 848.
1H: el múltiplo de 11 de tres cifras que termina en 82 es el 682.
La cifra que hay en la casilla de Comenúmeros es un 6.

	1V	2V	3V
1H	 **6**	**8**	**2**
2H	**8**	**4**	**1**
3H	**2**	**8**	**6**

XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel III

1. (C) $2{,}018 \cdot 2017 - 10{,}17 \cdot 201{,}8 = \dfrac{2018 \cdot 2017}{1000} - \dfrac{1017 \cdot 2018}{1000} = \dfrac{2018\,(2017-1017)}{1000} = 2018$

2. (C) El triángulo es rectángulo:

$\hat{C} = 3\hat{A};\ \hat{B} = 4\hat{A} \Rightarrow \hat{A} + 3\hat{A} + 4\hat{A} = 8\hat{A} = 180^{\circ} \Rightarrow \hat{A} = 22^{\circ}\ 30'$

Entonces $\hat{C} = 3 \cdot 22^{\circ} 30' = 67^{\circ}\ 30'$ y $\hat{B} = 4 \cdot 22^{\circ} 30' = 90^{\circ}$

3. (E) $2019n$, $n^2 + 2019$, n^3 y $n + 2018$ tienen distinta paridad según el valor de n. Sin embargo, $2n^3$ es par para todo valor de n, y, en consecuencia, $2n^3 + 2019$ es impar para todo valor de n.

4. (B) Si a es la anchura de las cintas, la base de la cinta B es a, mientras que las bases de las cintas A y C son mayores que a. Como las tres cintas tienen la misma altura, la cinta de menor área es la que tiene menor base, B.

5. (C) Si los catetos del triángulo rectángulo isósceles miden l, la hipotenusa del triángulo mide $\sqrt{2} \cdot l$, y la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados es

$l^2 + l^2 + 2l^2 = 4l^2 = 72 \Rightarrow l^2 = 18 \Rightarrow A = \dfrac{l^2}{2} = 9\ \text{cm}^2$.

6. (D) Si el lado del triángulo es l y el del cuadrado es l_c $3l = 2018 + 4l_c$.
Como nos dicen que $l = l_c + d$, se cumple que

$3(l_c + d) = 2018 + 4l_c \Rightarrow d = \dfrac{2018 + l_c}{3}$

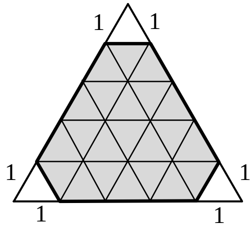
El valor entero positivo mínimo para l_c es 1, por lo que el valor entero positivo mínimo para d es $\dfrac{2019}{3} = 673$. Esto implica que d no puede tomar los 672 valores enteros positivos inferiores a 673.

7. (D) De la suma de las decenas sabemos que $x + y + z$ es un número de dos cifras, pero x, y, z representan cifras distintas, por lo que z debe valer 1. No puede ser 2, porque para que fuera así $x + y$ debería ser 18 y eso no es posible.
Al ser $z = 1$ en la suma de las unidades tenemos que $x + y + 1 = x + 10$.
Por tanto $y = 9$ y nos llevamos 1 de la suma de las unidades.
En la suma de las decenas tenemos que: $x + y + 1 + 1 = x + 11 = 19 \Rightarrow x = 8$

8. (E) Si el área del cuadrado es a y el área del círculo es b, el área de la figura encerrada por la línea gruesa es $3a - (a - b) = 2a + b$.

9. (B) La diferencia entre estar lleno al 30% a faltarle un 30% para estar lleno es un 40% del volumen total del barril. Como nos dicen que esa diferencia son 30 litros, el volumen total del barril es $V = \dfrac{30}{0,4} = 75\ L$

10.(E) El triángulo equilátero de lado 5 se puede dividir en 25 triángulos equiláteros iguales de lado 1, de los cuales 22 forman el hexágono. El área del hexágono es entonces $\dfrac{22}{25} = 0,88$ del área del triángulo, es decir, un 88%.



11.(A) Supongamos que los datos son, ordenados de menor a mayor, *a, b, c, d* y *e*. Si la mediana es una unidad mayor que la moda, $a = b =$ moda y $c = a + 1$. Nos piden el valor máximo de $e - a$. Como la mediana, *c*, es una unidad menor que la media, podemos escribir:

$$\frac{a+a+c+a+e}{5} = c+1 \Rightarrow 2a+c+d+e+ = 5c+5 \Rightarrow 2a+a+1+d+e = 5a+10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d-a+e-a = 9$$

Como $d - a \geq 2$, debe ser $e - a \leq 7$.

12.(E) El área de la corona es $A = \pi\left(14^2 - 2^2\right) = 192\pi$. La mitad de dicha área es 96π, que es el área de cualquiera de las dos coronas en las que queda dividida la original por la circunferencia intermedia. Si a la corona interior le añadimos el círculo pequeño inicial, de área 4π, obtenemos el área del círculo intermedio: $96\pi + 4\pi = 100\pi$.
El radio de dicho círculo, entonces, es 10.

13.(C) Cogiendo 6 calcetines, en el peor de los casos, hay tres de cada color sin agujero y los tres con agujero. Si cogemos 7 calcetines, con seguridad habrá dos del mismo color sin agujero.

14.(A) Si llamamos v_m a la velocidad media en *km/h* y *t* al tiempo en horas, la velocidad media prevista es $v_m - 5$ y el tiempo previsto es $t + 1$. Por tanto:

$$210 = v_m \cdot t = (v_m - 5)(t+1) \Rightarrow v_m - 5t - 5 = 0 \Rightarrow v_m = 5(t+1)$$

$$5(t+1)t = 210 \Rightarrow t^2 + t - 42 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 6 \Rightarrow v_m = 35\ km/h \\ t_2 = -7\ \textit{no tiene sentido} \end{cases}$$

15.(D) El 3 sí. 6 + (– 3) = 3. El 4 sí. 2 + 2 = 4. El 5 sí. 6 + (– 1) = 5. El 8 sí. 2 + 6 = 4 + 4 = 8. El único que no es posible es el 7.

16.(A) La menor distancia entre dos puntos, uno de cada circunferencia, es la correspondiente al segmento de diagonal entre las dos circunferencias. Dicho segmento mide dos veces la diagonal de un cuadrado de lado 1 menos dos veces el radio de las circunferencias, es decir $2\sqrt{2}-1$.

17.(E) El área sombreada se puede calcular sumando las áreas de los triángulos, todos ellos de altura 6 y bases *p*, *q*, *r* y *s*. Por tanto, el área es $A = 3p + 3q + 3r + 3s = 27$. Dividiendo por 3 los dos miembros de la igualdad, tenemos: $p + q + r + s = 9$.

18.(C) Los posibles productos de dos números enteros distintos que dan 16 son 1×16 y 2×8, y los que dan 225 son 1×225, 3×75, 5×45 y 9×25. Como los números han de estar ordenados de menor a mayor, siendo los dos menores aquellos cuyo producto es 16, la única posibilidad es 2, 8, 9, 25, y su suma es 44.

19.(B) Los números de las tarjetas son 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 y 128. Si la suma de Bea es 31 unidades mayor que la de Carlos, $S_B = 31 + S_C$.

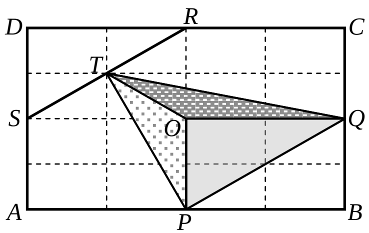
Como $S_B + S_C = 255 \Rightarrow 2 \cdot S_C = 224$ y $S_C = 112$ y $S_B = 143$. La suma de Bea solo es posible con las tarjetas 128, 8, 4, 2 y 1. Además sabemos que esta forma es única, porque el número 143 tiene una única representación en sistema binario, que es 10 001 111, mientras que 112 se representa en binario mediante 01 110 000. Así pues, Bea tiene 5 tarjetas (las correspondientes a los cinco unos de su suma en binario), mientras que Carlos tiene 3 tarjetas.

20.(C) Si llamamos "*a*" a la puntuación menor, "*b*" a la intermedia y "*c*" a la mayor, de la primera diana tenemos $a + 2b = 29$, de la segunda $a + 2c = 43$ y de la tercera $b + 2c = 47$. La cuarta diana, la que nos piden, corresponde a $a + b + c$.
De la segunda diana despejamos $a = 43 - 2c$. De la tercera despejamos $b = 47 - 2c$. Sustituyendo estos valores en la ecuación de la primera diana:

$$43 - 2c + 2(47 - 2c) = 29 \Rightarrow c = 18 \Rightarrow \begin{cases} a = 43 - 36 = 7 \\ b = 47 - 36 = 11 \end{cases}$$

Y la suma $a + b + c = 7 + 11 + 18 = 36$.

21.(B) El triángulo *PQT* se puede descomponer como suma de los triángulos *PQO*, *POT* y *QOT*. El triángulo *PQO* tiene área igual a $\frac{1}{8}$ del área del rectángulo y cada uno de los dos triángulos *POT* y *QOT* tiene área igual a $\frac{3}{32} - \frac{1}{32} = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$ del área del rectángulo. Por tanto, el triángulo *PQT* tiene área igual a $\frac{1}{8} + \frac{2}{16} = \frac{1}{4}$ del área del rectángulo.



22.(D). Si las dimensiones del ortoedro son *a, b* y *c*, el área total es 2*ab* + 2*ac* + 2*bc* = 22 y la suma de las longitudes de todas sus aristas es 4(*a* + *b* + *c*) = 24.
De esta última igualdad obtenemos *a* + *b* + *c* = 6, y elevando al cuadrado,

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc = 36$$

$$a^2+b^2+c^2 = 36-22 = 14$$

La máxima distancia entre dos vértices del ortoedro corresponde a la diagonal del mismo, cuyo valor es $\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{14}$.

23.(A) Si llamamos *x* al lado del cuadrado, se debe cumplir que

$$x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = r^2 = 1 \Rightarrow \frac{5x^2}{4} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{5}.$$

24.(B) El triángulo *BDE* se puede descomponer como suma de los triángulos *BDM* y *DME*, de modo que

$$A_{BDE} = A_{BDM} + A_{DME} = \frac{BD\cdot DM}{2} + \frac{DM\cdot DC}{2} = \frac{(BD+DC)\cdot DM}{2} = \frac{BC\cdot DM}{2}$$

Como *DM* es la mitad de la altura del triángulo *ABC* y *BC* es la base del triángulo *ABC*, el área del triángulo *BCE* es la mitad del área del triángulo *ABC*, es decir, $\frac{24}{2} = 12$.

25.(A) Si *a* es el número de puntos azules, el número de puntos verdes es 2018 – *a*.

La fracción que corresponde a cada punto verde es $\frac{a}{2018-a}$, mientras que la que corresponde a cada punto azul es $\frac{2018-a}{a}$. La suma de todas las fracciones es:

$$(2018-a)\cdot\frac{a}{2018-a} + a\cdot\frac{2018-a}{a} = a + 2018 - a = 2018 .$$

XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Soluciones 2ª Fase Nivel IV

1. (B) Como el área del rectángulo *ABCD* es el doble del área sombreada, tenemos que $60 = 2 \cdot 6 \cdot (6 - PX)$, por tanto $PX = 1$.

2. (D) Si en todas las tarjetas estuviera escrito el 4, la suma de las 18 tarjetas sería 72 $(4 \cdot 17 + 4)$, para encontrar el siguiente múltiplo de 17 nos faltarían 13. Como cada tarjeta de 5 aporta una unidad más que la tarjeta de 4, entonces nos harán falta 13 tarjetas de 5. Por tanto, 13 tarjetas con 5 y 5 tarjetas con 4.

3. (D) Completando los cuadraditos tenemos

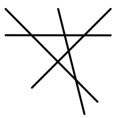
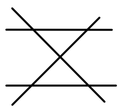
x	26	$52 - x$	$\frac{60 - x}{2}$	8

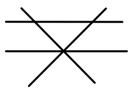
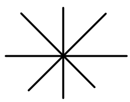
La tercera casilla es $52 - x$ porque $26 = \frac{x + 52 - x}{2}$

La cuarta casilla es $\frac{60 - x}{2}$ porque $\frac{52 - x + 8}{2} = \frac{60 - x}{2}$

Y como la tercera casilla es la media de la segunda y la cuarta, entonces $52 - x = \frac{26 + \frac{60 - x}{2}}{2}$, cuya solución es $x = 32$.

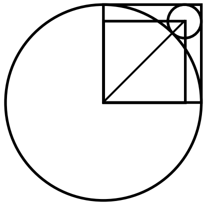
4. (A) Son cuadrados perfectos todos los pares, es decir, 50, y de los impares también son cuadrados perfectos 1^1, 9^9, 25^{25}, 49^{49}, 81^{81}, ya que aunque el exponente sea impar la base es un cuadrado perfecto. En total 55.

5. (D) Pueden ser: 6 puntos  o 5 puntos 

o 3 puntos  o 1 punto . 

Por tanto, no puede ser 2.

6. (C) Nos ayudamos del cuadrado interior cuyos vértices opuestos son los centros de las dos circunferencias. El lado de este cuadrado mide $10-r$ y la diagonal mide $10+r$. Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que $(10+r)^2=(10-r)^2+(10-r)^2$, resolviendo esta ecuación de segundo grado obtenemos las soluciones $r_1=30+20\sqrt{2}$ (esta no puede ser ya que el radio de la circunferencia pequeña sería mayor que el de la grande) y $r_2=30-20\sqrt{2}$.

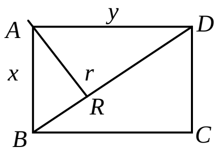


Comparando con el enunciado $\left(a-b\sqrt{2}\right)$, tenemos que $a=30$ y $b=20$.

Por lo tanto $a+b=50$.

7. (B) Como *r* y *s* dividen en tres trozos iguales de 1 cm a la diagonal *BD*, significa que *BD* mide 3 cm, *BR* 1 cm y *RD* 2 cm.

Nos fijamos en el triángulo *ABD* que es rectángulo y tiene dibujada la altura sobre la hipotenusa. Así que aplicando el teorema del cateto $x^2=1\cdot 3 \Rightarrow x=\sqrt{3}$.



Del mismo modo $y^2=2\cdot 3 \Rightarrow y=\sqrt{6}$. Por tanto, el área del rectángulo será $\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}=3\sqrt{2}\approx 4{,}2$ cm^2.

8. (B) Observando la expresión vemos que para números muy grandes no se cumple ya que $n^4>n^3$. Por tanto, hay que ver dónde se produce ese cambio. Las expresiones n^4+6n y $6n^3+n^2$ serán iguales si $n=1$ y $n=6$. Comprobamos que $n=2$ cumple la condición ya que $2^4+6\cdot 2<6\cdot 2^3+2^2$, así que serán todos los valores entre 1 y 6; es decir, 2, 3, 4 y 5. Por tanto, cuatro valores.

Otro método. Resolvemos la inecuación

$$n^4+6n<6n^3+n^2 \Leftrightarrow n^4-6n^3<n^2-6n \Leftrightarrow n^3(n-6)<n(n-6)$$

Si $n=1$ o $n=-1$ o $n=6$ se verifica la igualdad.

Si $n>6$, simplificando se obtiene $n^3<n$ que no se verifica para ningún valor de *n*.

Si $n<6$, simplificando resulta $n^3>n$ que solo se verifica para los enteros 2, 3, 4 y 5.

9. (D) Aplicamos las propiedades de los logaritmos

$$\log 2^a+\log 3^b+\log 5^c+\log 7^d=2018 \Rightarrow \log\left(2^a\cdot 3^b\cdot 5^c\cdot 7^d\right)=2018$$

$\Rightarrow 2^a\cdot 3^b\cdot 5^c\cdot 7^d=10^{2018}=2^{2018}\cdot 5^{2018}$. Comparando las potencias tenemos $a=2018$, $b=0$, $c=2018$ y $d=0$. Por tanto, la suma pedida es 4036.

10.(B) Como el arco es un 25% de su longitud, el sector circular correspondiente a ese ángulo será un cuarto del círculo y el ángulo central será de 90º. El área de dicho sector circular (de radio 2) será $A=\frac{\pi\cdot 2^2}{4}=\pi$. Ahora consideramos el triángulo que conseguimos de restar al sector circular el segmento circular. Ese triángulo es rectángulo con catetos iguales al radio del círculo, por tanto el área del triángulo es 2. La diferencia entre el área del sector circular y el área del triángulo será el área del segmento circular (que es la mitad del área pedida), $A=\pi-2$, por tanto, el área pedida será $2\pi-4$.

11.(E) Llamemos a a las decenas y b a las unidades del número en cuestión. La condición del enunciado asegura que $a\cdot b+a+b=10a+b$. Operando llegamos a que $a\cdot b=9a$, por tanto, $b=9$. El número en cuestión podría ser, 19, 29, 39,…, 99.

12.(E) Se verifica que $\cos\alpha=tg\alpha$, por tanto $\cos\alpha=\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow\cos^2\alpha=sen\alpha$. El valor de la expresión pedida $\frac{1}{sen\alpha}+\cos^4\alpha=\frac{1}{sen\alpha}+\left(\cos^2\alpha\right)^2=\frac{1}{sen\alpha}+sen^2\alpha$. Utilizando la relación fundamental tenemos $\frac{1}{sen\alpha}+1-\cos^2\alpha$, pero como $\cos^2\alpha=sen\alpha$, entonces, $\frac{1}{sen\alpha}+1-sen\alpha=\frac{1+sen\alpha-sen^2\alpha}{sern\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+sen\alpha}{sen\alpha}$, por tanto, $\frac{sen\alpha+sen\alpha}{sen\alpha}=2$.

13.(C) $\left|x-|2x+1|\right|=3\Rightarrow\begin{cases}|x-2x-1|=3 & \text{si} \quad x>-\frac{1}{2}\\ |x+2x+1|=3 & \text{si} \quad x\le-\frac{1}{2}\end{cases}$.

De la primera ecuación $|-x-1|=3$ sacamos:

i) $-x-1=3$ de donde $x=-4$. Esta no vale.

ii) $x+1=3$ de donde $x=2$. Esta sí vale.

De la segunda ecuación $|3x+1|=3$ sacamos:

i) $3x+1=3$ de donde $x=\frac{2}{3}$. Esta no vale.

ii) $-3x-1=3$ de donde $x=-\frac{4}{3}$. Esta sí vale.

Por tanto, tiene 2 soluciones.

14.(C) La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo es $S = 180·(n – 2)$ donde n es el número de lados del polígono.

Como el polígono convexo tiene exactamente tres ángulos obtusos, la suma de dichos ángulos tendrá un máximo no alcanzable de 180º·3 = 540º. Por tanto, podemos suponer que la suma es, como mucho, 540º – ε y, como poco, 270º + ε. Analicemos los polígonos en función de sus lados:

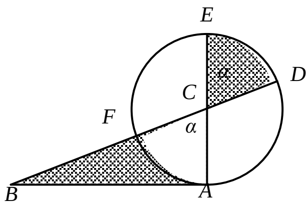
Polígono de 4 lados:
La suma de los ángulos interiores mide 180º·2 = 360º, por lo que el cuarto ángulo será siempre agudo al medir, como mucho, 360º – (270º + ε) = 90º – ε . Por tanto, es posible un polígono convexo de 4 lados con exactamente 3 ángulos obtusos.

Polígono de 5 lados:
La suma de los ángulos interiores mide 180º·3 = 540º, por lo que la suma de los dos ángulos restantes medirá, como poco, 540º – (540º – ε) = ε . Por tanto, es posible un polígono convexo de 5 lados con exactamente 3 ángulos obtusos.

Polígono de 6 lados:
La suma de los ángulos interiores mide 180º·4 = 720º, por lo que la suma de los tres ángulos restantes medirá, como poco, 720º – (540º – ε) = 180º + ε. Por tanto, es posible un polígono convexo de 6 lados con exactamente 3 ángulos obtusos.

Polígono de 7 lados:
La suma de los ángulos interiores mide 180º·5 = 900º, por lo que la suma de los cuatro ángulos restantes medirá, como poco, 900º – (540º – ε) = 360º + ε. Por tanto, es necesario que uno de los cuatro ángulos restantes mida más de 90º; por lo que no es posible un polígono convexo de 7 lados con exactamente 3 ángulos obtusos.
En conclusión, el máximo número de lados que puede tener un polígono convexo con exactamente 3 ángulos obtusos es 6.

15.(B) El ángulo $D\hat{C}E = A\hat{C}B = \alpha$, al ser opuestos por el vértice.



$$A_{\text{Sector } ECD} = \frac{\pi r^2\alpha}{2\pi} = \frac{r^2\alpha}{2} \quad \text{y}$$

$$A_{\text{Recinto } ABF} = \frac{AB\cdot r}{2} - \frac{r^2\alpha}{2}$$

Como $A_{\text{Sector } ECD} = A_{\text{Recinto } ABF} \Rightarrow \dfrac{r^2\alpha}{2} = \dfrac{AB\cdot r}{2} - \dfrac{r^2\alpha}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow r^2\alpha = \frac{AB\cdot r}{2} \Rightarrow r\alpha = \frac{AB}{2} \Rightarrow \frac{AB}{r} = 2\alpha \Rightarrow \tan\alpha = 2\alpha$$

16.(C) Como se tiene que $a \cdot b = a^b$ y $\dfrac{a}{b} = a^{3b}$ $\Rightarrow$ (multiplicando ambas igualdades)

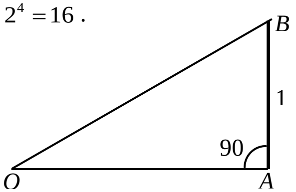
$a^2 = a^{4b} \Rightarrow 2 = 4b \Rightarrow b = \dfrac{1}{2}$.

Sustituyendo el valor de b en la primera ecuación se tiene que $a \cdot \dfrac{1}{2} = \sqrt{a} \Rightarrow$

$\dfrac{a^2}{4} = a \Rightarrow a^2 = 4a \Rightarrow a^2 - 4a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 4 \end{cases}$

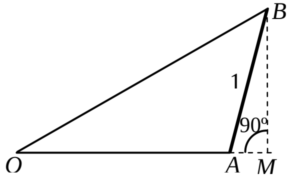
Como $a > 1 \Rightarrow a = 4$. Por tanto, $b^{-a} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4} = 2^4 = 16$.

17.(D) Analicemos los posibles casos:



Caso 1: $O\hat{A}B = 90^o$

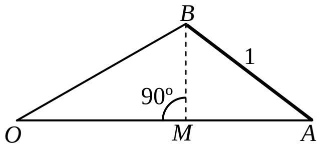
$sen\left(30^o\right) = \dfrac{1}{OB} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{OB} \Rightarrow OB = 2$



Caso 2: $O\hat{A}B > 90º$

$sen 30º = \dfrac{BM}{OB} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{BM}{OB} \Rightarrow OB = 2 \cdot BM$

Pero $BM < 1 \Rightarrow OB < 2$



Caso 3: $O\hat{A}B < 90º$

$sen 30º = \dfrac{BM}{OB} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{BM}{OB} \Rightarrow OB = 2 \cdot BM$

Pero $BM < 1 \Rightarrow OB < 2$

Por tanto, la longitud máxima posible del segmento OB es 2.

18.(B) Como $a = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots}}} \Rightarrow a^2 = 6 + a$ con $a > 0, \Rightarrow a^2 - a - 6 = 0 \Rightarrow a = 3$

Como $b = \sqrt{9 - \sqrt{9 - \sqrt{9 - \ldots}}} \Rightarrow b^2 = 9 - b$ con $b > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2 + b - 9 = 0 \Rightarrow b = \dfrac{-1 + \sqrt{37}}{2}$

Por tanto, $ab = 3 \cdot \left(\dfrac{-1 + \sqrt{37}}{2}\right) = \dfrac{3}{2}\left(\sqrt{37} - 1\right)$

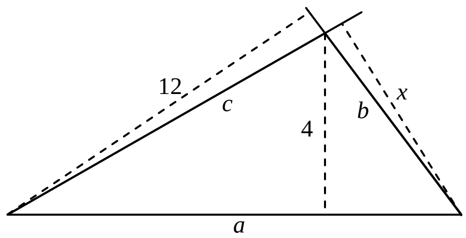
19.(B) Si llamamos a , b y c a los lados y x a la altura desconocida, se tiene que el área del triángulo se puede calcular de tres maneras distintas: $A=\frac{4a}{2}=\frac{12b}{2}=\frac{x\cdot c}{2}$.

$\frac{4a}{2}=\frac{12b}{2}\Rightarrow a=3$ $\qquad \frac{12b}{2}=\frac{x\cdot c}{2}\Rightarrow c=\frac{12b}{x}$

Por otro lado, sabemos que en cualquier triángulo, la suma de dos lados cualesquiera tiene que ser mayor que el tercero, por lo que se tiene que $c + b > a$.

$c+b>a\Rightarrow c+b>3b\Rightarrow c>2b\Rightarrow \frac{12b}{x}>2b\Rightarrow 12b>2b\cdot x\Rightarrow x<6$

Por lo tanto, el valor máximo que puede tomar la tercera altura es 5 cm.



20.(E) Comparamos los elementos dos a dos:

- Comparamos $A=(\cos\alpha)^{\cos\alpha}$ con $C=(\cos\alpha)^{sen\,\alpha}$ (igual base):

  Como $\cos\alpha\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1\right)$ será menor aquel que tenga mayor exponente.

  Sabemos que $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}\Rightarrow \cos\alpha<sen\alpha\Rightarrow C<A.$

- Comparamos $A=(\cos\alpha)^{\cos\alpha}$ con $B=(sen\,\alpha)^{\cos\alpha}$ (igual exponente):

  Sabemos que $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}\Rightarrow \cos\alpha<sen\alpha\Rightarrow A<B.$

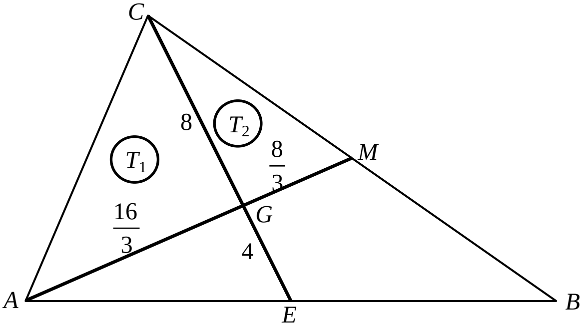
  Por tanto, $C < A < B$.

21.(D) Las medianas de un triángulo se cortan en el baricentro. El baricentro dista del vértice el doble que del punto medio del lado opuesto. Por tanto, la mediana que mide 8 cm queda dividida en dos segmentos que miden $\frac{16}{3}$ y $\frac{8}{3}$ respectivamente y la mediana que mide 12 cm queda dividida en dos segmentos que miden 8 y 4 respectivamente, tal y como se indica en el dibujo.
Como las medianas forman un ángulo recto, los triángulos T_1 y T_2 son rectángulos. Calculemos sus áreas:

$$Area_{T_1} = \frac{\frac{16}{3}\cdot 8}{2} = \frac{64}{3}\text{ cm}^2 \quad \text{y} \quad Area_{T_2} = \frac{\frac{816}{3}\cdot 8}{2} = \frac{32}{3}\text{ cm}^2$$

Por tanto, $Area_{AMC} = Area_{T_1} + Area_{T_2} = \frac{64}{3} + \frac{32}{3} = 32\text{ cm}^2$

Como la mediana *AM* divide al triángulo *ABC* en dos triángulos de igual área (*AMC* y *ABM*), se tiene que $Área_{ABC}$ = 64 cm^2.



22.(C) Como $a < b < c \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$.

Es claro que $a \neq 1$ ya que si $a = 1 \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ y eso no es posible ya que b y c son enteros positivos.

Si $a = 2 \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{c+b}{bc} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2c + 2b = bc \Rightarrow 2c - bc = -2b \Rightarrow$

$\Rightarrow c(2-b) = -2b \Rightarrow c = \frac{-2b}{b-2} \Rightarrow c = \frac{2b}{b-2}$

. Por tanto, si $a = 3 \Rightarrow c = \frac{6}{1} = 6$.

En conclusión, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ y 2 + 3 + 6 = 11 $\Rightarrow a + b + c = 11$.

23.(A) P(Acertar ninguna pregunta) $P(x=0)=\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{64}{125}$

P(Acertar 1 pregunta) $P(x=1)=3\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{48}{125}$

P(Acertar 2 preguntas) $P(x=2)=3\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{12}{125}$

P(Acertar 3 preguntas) $P(x=3)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{125}$

Por tanto, lo más probable es que el número de aciertos sea 0.

24.(A) Del 1 al 100 hay 10 números (10, 20, …, 90, 100).
Del 101 al 200 hay 19 números (101, 110, 102, 120, …, 109, 190,200).
Del 201 al 1000 hay $19\cdot 9=171$ números.
Del 1001 al 1100 hay $10\cdot 10=100$ números.
Del 1101 al 2000 hay $19\cdot 9=171$ números.
Del 2001 al 2018 hay 18 números.
Total 10 + 171 + 100 + 171 + 18 = 470.

25.(A) Si $sen x+\cos x=a \Rightarrow (sen x+\cos x)^2=a^2 \Rightarrow sen^2 x+2 sen x\cos x+\cos^2 x=a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 sen x\cos x+1=a^2 \Rightarrow sen x\cos x=\frac{a^2-1}{2}.$

$1=(sen^2 x+\cos^2 x)^2=sen^4 x+2 sen^2 x\cos^2 x+\cos^4 x \Rightarrow$

$\Rightarrow sen^4 x+\cos^4 x=1-2 sen^2 x\cos^2 x \Rightarrow sen^4 x+\cos^4 x=1-2\cdot\left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow sen^4 x+\cos^4 x=1-\frac{(1-a^2)^2}{2}.$

Participantes y relación de ganadores del XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Una vez más en la primera fase celebrada en los propios centros se superó la cifra de 45 000 estudiantes de 489 centros participantes.

Aunque se inscribieron 3715 concursantes a la segunda fase, el número de participantes fue de 3335. La estadística de participación por niveles y puntuaciones obtenidas puede consultarse en la página (https://www.concursoprimavera.es) de la Sociedad Puig Adam así como la relación de todos los ganadores del concurso y la relación de los centros con mayor puntuación en cada uno de los niveles.

La distribución por niveles de los participantes en la segunda fase, que como siempre tuvo lugar en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, fue la siguiente:

	NIVEL 1		NIVEL 2		NIVEL 3		NIVEL 4	
	5º P y 6º P		1º ESO, 2º ESO		3º ESO, 4º ESO		1º B, 2º B	
nº de participantes	216	536	428	644	450	484	382	195
Totales por nivel	752		1072		934		577	

Los tres, y en algún caso cuatro, ganadores en cada uno de los niveles fueron:

NIVEL I

1. Diego Martínez Casillas (6º Primaria) CPR Alkor
2. Juan Ignácio de Dios Coba (5º Primaria) CPR San Agustín
3. Iñigo Fernández Cubián (6º Primaria) CPR Sagrado Corazón
3 Diego López Aragón (6º Primaria) CP La Navata

NIVEL II

1. Diego Recio Calvo (2º ESO) IES Clara Campoamor
2. Álvaro Gamboa Rodríguez (1º ESO) IES Ciudad de los Poetas
3. Juan Barquero Draper (2º ESO) CPR San Agustín
3. Raquel Izquierdo Pato (2º ESO) IES JoséLuis Sampedro
3. Enrique Matorras Muñoz (2º ESO) CPR Laude Fontenebro Schol

NIVEL III

1. Jorge Maceín Sanz (4º ESO) IES San Juan Bautista
1. Nicolás Rey Rodríguez (4º ESO) CPR Fray Luis de León
1. Gabriel Valery Salov (4º ESO) IES Juan de Herrera
2. Jimena Lozano Simón (3º ESO) Colegio Alemán de Madrid

NIVEL IV

1 Alejandro Epelde Blanco (2º Bchto) Montessori School Los Fresnos
2. Pablo Soto Martín (1º Bchto) IES San Mateo
3. Martín Gómez Abejón (2º Bchto) IES Ramiro de Maeztu

RELACIÓN DE LOS 10 CENTROS CON MEJOR PUNTUACIÓN POR NIVEL

(Elaborada con las **tres mejores puntuaciones** de cada centro en cada nivel)

XXII CONCURSO DE PRIMAVERA Mayo 2018

NIVEL I		
NOMBREDEL CENTRO	MUNICIPIO	SUMA DE PUNTOS
COLEGIO ALEMÁN DE MADRID	Madrid	308
CPR SAN JOSÉ DEL PARQUE	Madrid	301
CPR SAN AGUSTÍN	Madrid	289
CP CIUDAD DE ROMA	Madrid	275
CPR COLEGIO ESTUDIANTES LAS TABLAS	Madrid	274
CP LA NAVATA	Galapagar	274
CPR COLEGIO ALBORADA	Alcalá de Henares	268
CP BLAS DE OTERO	Coslada	261
CPR MENESIANO	Madrid	260
CPR AMANECER	Alcorcón	255

NIVEL II		
NOMBREDEL CENTRO	MUNICIPIO	SUMA DE PUNTOS
CPR SAN AGUSTÍN MADRID	Madrid	298
CPR LUYFE RIVAS	Rivas-Vaciamadrid	275
IES SAN JUAN BAUTISTA	Madrid	268
CPR AGUSTINIANO	Madrid	261
IES AVENIDA DE LOS TOREROS	Madrid	258
CPR NUESTRA SRA DEL BUEN CONSEJO	Madrid	257
COLEGIO ALEMÁN DE MADRID	Madrid	254
CPR ALARCÓN	Pozuelo de Alarcón	251
IES MIRASIERRA	Madrid	243
CPR SAN JOSÉ DEL PARQUE	Madrid	235

NIVEL III		
NOMBREDEL CENTRO	MUNICIPIO	SUMA DE PUNTOS
COLEGIO ALEMÁN DE MADRID	Madrid	315
IES SAN JUAN BAUTISTA	Madrid	305
CPR JOYFE	Madrid	285
CPR SAN AGUSTÍN	Tres Cantos	274
IES CAMILO JOSÉ CELA	Pozuelo de Alarcón	268
IES SAPERE AUDE	Villanueva del Pardillo	259
CPR SAN JOSÉ DEL PARQUE	Madrid	252
IES MARGARITA SALAS	Majadahonda	248
CPR EL VALLE	Madrid	248
CPR DIVINA PASTORA	Madrid	243

NIVEL IV		
NOMBREDEL CENTRO	MUNICIPIO	SUMA DE PUNTOS
IES RAMIRO DE MAEZTU	Madrid	286
IES SAN MATEO	Madrid	286
CPR SAN JOSÉ DEL PARQUE	Madrid	235
CPR CORAZÓN DE MARÍA	Madrid	231
IES CERVANTES	Madrid	223
IES EL BURGO LAS ROZAS	Las Rozas de Madrid	221
CPR LICEO EUROPEO	Alcobendas	202
IES LUIS DE GÓNGORA	Torrejón de Ardoz	199
KING´S COLLEGE	Tres Cantos	188
IES MARGARITA SALAS	Majadahonda	183

XXXVI CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 19 de mayo de 2018

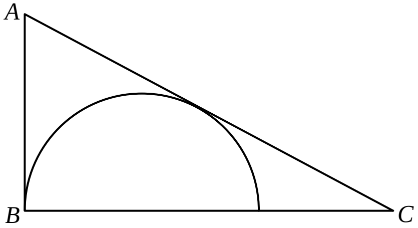
NIVEL I (3º de E.S.O.) Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1. (7 puntos)

Encuentra el mayor número de cuatro cifras, [***abcd***], tal que la suma de ellas sea igual al producto de las dos últimas e igual también al número formado por las dos primeras, es decir, $a + b + c + d = c \cdot d = [ab]$.

Problema 2. (7 puntos)

En el triángulo *ABC*, de lados $AB = 85$, $BC = 75$ y $CA = 40$, una semicircunferencia tangente a los lados *AB* y *AC* tiene su diámetro sobre el lado *BC*. Calcula el radio de esta semicircunferencia.



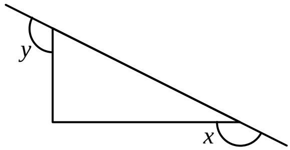
Segunda parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1A. (1 punto) La suma de dos números es 7 y la diferencia entre ellos es 2. ¿Cuál es el valor de su producto?

Problema 2A. (1,5 puntos**)** Sea T la respuesta del problema anterior y $k = 4T$.
En una clase de la Universidad hay k estudiantes. Hay algunas parejas (chico-chica) que se sientan juntos. En concreto, un tercio de los chicos están sentados con una chica y la mitad de las chicas están sentadas con un chico. ¿Cuántos chicos hay en esa clase?

Problema 3A. (2 puntos) Sea T la respuesta del problema anterior.
En el triángulo *ABC*, *D* es el punto medio del lado *AB*, *E* es el punto medio de *DB* y *F* es el punto medio del lado *BC*. Si el área del triángulo *AEF* es T, ¿cuál es el área del triángulo *ABC*?

Problema 1B. (1 punto) El triángulo de la figura es rectángulo. ¿Cuál es la suma de los ángulos x e y?

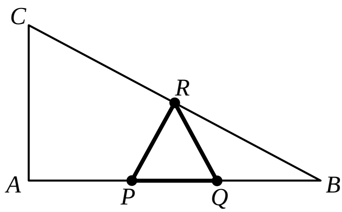


Problema 2B. (1,5 puntos) Sea T la respuesta del problema anterior y $k = \frac{T}{10}$.

¿Cuál es la cifra de las unidades del número $k^1 + k^2 + k^3 + \ldots + k^k$?

Problema 3B. (2 puntos) Sea T la respuesta del problema anterior y $k = T - 1$.
Un número tiene k divisores y su mitad y su tercera parte tienen cuatro divisores cada una. Si la suma de todos los divisores del número es 216, ¿cuál es dicho número?

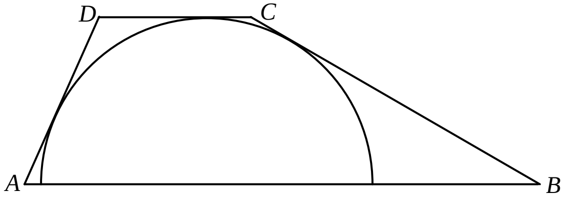
Problema 4. (5 puntos) Sea a la respuesta del problema 3A y b la respuesta del problema 3B. El triángulo ABC de la figura es rectángulo en A y R es el punto medio de la hipotenusa BC. Sobre el cateto mayor, AB, se marca el punto P tal que $CP = BP$ y sobre el segmento BP se marca el punto Q de manera que el triángulo PQR es equilátero. Si el área del triángulo ABC es $b - a$, ¿cuál es el área del triángulo PQR?



NIVEL II (4º de E.S.O.) Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1. (7 puntos)
Todas las cifras del número entero positivo n son treses, (n = 333…3), además n es divisible entre 383. Cuando dividimos el entero $\frac{n}{383}$ entre 1000, ¿qué resto obtenemos?

Problema 2. (7 puntos)
En el trapecio $ABCD$ de bases AB y CD trazamos un semicircunferencia cuyo centro está en el lado AB y es tangente a los otros tres lados del trapecio.
Si $AB = 289$ y $BC = 196$, calcula la longitud de AD.



Segunda parte (1 hora 30 minutos)

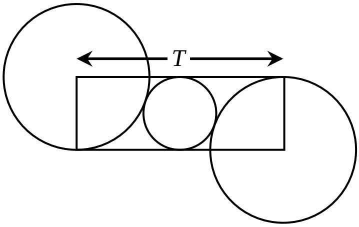
Problema 1A. (1 punto) Patricia tiene el mismo número de hermanas que de hermanos. Cada uno de sus hermanos tiene el 50 % más de hermanas que de hermanos (es decir, que si tuviera por ejemplo 8 hermanos tendría 12 hermanas). ¿Cuánto suman en total el número de hermanos y de hermanas de la familia?

Problema 2A. (1,5 puntos) Sea T la respuesta del problema anterior.
Calcula la cifra de las decenas del número T^T.

Problema 3A. (2 puntos) Sea T la respuesta del problema anterior.
En el rectángulo $ABCD$ de lados $AB = 15T$ y $BC = 10T$, marcamos un punto P en su interior tal que $CP = 9T$ y $DP = 12T$. Determina la longitud de AP.

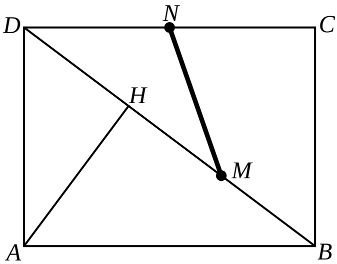
Problema 1B. (1 punto) En una bolsa hay 49 bolas azules y 1 roja. ¿Cuántas bolas azules debemos sacar de la bolsa para que el 90 % de las que queden sean azules?

Problema 2B. (1,5 puntos) Sea T la respuesta del problema anterior. En la figura puedes ver un rectángulo de longitud T y anchura igual al radio de las dos circunferencias grandes que son tangentes a la pequeña, siendo ésta tangente a su vez a dos lados del rectángulo. Calcula la anchura del rectángulo.



Problema 3B. (2 puntos) Sea T la respuesta del problema anterior y $n = T^2$.
Calcula el valor de m para que el área de la región formada por los puntos (x, y) tales que $y \geq \frac{|x|}{2}$ e $y \leq m|x| + n$ sea $80n$.

Problema 4. (5 puntos) Sea a la respuesta del problema 3A y b la respuesta del problema 3B. En el rectángulo $ABCD$ de lados $AB = a + b$ y $BC = 3|b|$, la perpendicular a la diagonal BD, trazada desde A, corta a BD en el punto H. Si M es el punto medio de BH y N el punto medio de CD, calcula la longitud del segmento MN.



<u>NIVEL III</u> (1º de Bachillerato) Primera parte (1 hora 30 minutos)

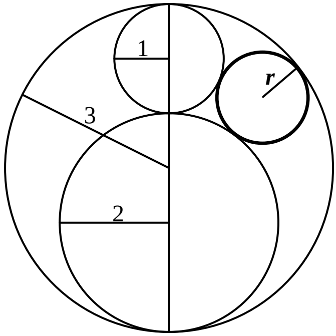
Problema 1. (7 puntos)

Separamos los números 1, 2, 3,…, 101 en dos conjuntos A y B. El conjunto A contiene *m* de ellos y el resto en el conjunto B. Si pasamos el número 40 del conjunto en el que está al otro la media aritmética de cada uno de los nuevos conjuntos aumenta en 0,5 respecto de la que tenía antes. Encuentra los dos posibles valores de *m*.

.

Problema 2. (7 puntos)

En la figura puedes observar cuatro circunferencias tangentes entre sí, tres de ellas de radios 1, 2 y 3. Calcula el radio *r* de la otra circunferencia, la más pequeña.



Segunda parte (1 hora 30 minutos)

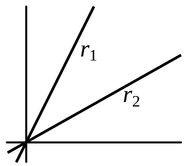
Problema 1A. (1 punto)
En un triángulo en el que la medida de cada uno de sus ángulos, en grados, viene dada por un número entero, se verifica que uno de sus ángulos es 30º mayor que la media de los otros dos. ¿Cuál es el mayor valor posible que puede tomar un ángulo de dicho triángulo?

Problema 2A. (1,5 puntos)

Sea T la respuesta del problema anterior y $k = \frac{T}{33}$.

La función $f(x) = \frac{cx}{2x+k}$ verifica que $f\left(f(x)\right) = x$ siempre que $x \neq \frac{-k}{2}$. ¿Cuál es el valor de c ?

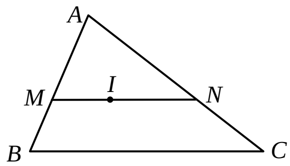
Problema 3A. (2 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior y $k = T + 7$.
En la figura se observan dos rectas r_1 y r_2 de ecuaciones $y = mx$ e $y = nx$ respectivamente.
Si el ángulo que forma la recta r_1 con el eje de abscisas es doble del que forma r_2 y la pendiente de r_1 es k veces la pendiente de r_2, ¿cuál es el valor de $m \cdot n$?



Problema 1B. (1 punto)
Si escribes el número 888 888 como producto de dos números de tres cifras cada uno, encuentra la diferencia entre estos dos números.

Problema 2B. (1,5 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior y $k = T - 36$.
Un círculo de área A_1 está contenido en otro de área $A_1 + A_2$. Si el radio de este segundo círculo es k y los números A_1, A_2 y $A_1 + A_2$ están en progresión aritmética, calcula el radio del círculo de área A_1.

Problema 3B. (2 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior y $k = 3T^2$.
En el triángulo ABC de la figura, I es el punto de corte de las bisectrices (incentro) y el segmento MN, que pasa por I es paralelo al lado BC. Si $AB = 3k$, $BC = 6k$ y $AC = 5k$, calcula el perímetro del triángulo AMN.



Problema 4. (5 puntos)
Sean a y b las respuestas de los problemas 3A y 3B, respectivamente.
La longitud de uno de los lados de un triángulo es $\frac{b}{a}$. De los otros dos, la longitud de uno de ellos es doble de la del otro. ¿Cuál es el mayor valor posible para el área de este triángulo?

XVIII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

17 de noviembre de 2018

PRUEBA POR EQUIPOS 1º y 2º de E.S.O. (45 minutos)

1. En la isla Colorín hay 15 casas numeradas del 1 al 15 y hay exactamente 15 caminos de **un solo sentido**. De cada casa sale un camino, y cada camino une dos casas. El primer día, en cada casa hay un duende que lleva escrito en su camiseta el número de la casa. El segundo día todos los duendes salen de la casa en la que están y, recorriendo el único camino posible, llegan hasta la casa que está al final del camino.
Después de este cambio la distribución quedó así:

Duende	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Casa	10	4	12	8	15	9	14	1	11	5	6	2	7	13	3

El tercer día los duendes vuelven a salir de la casa en la que están y recorren el camino hasta la casa siguiente, y el cuarto día vuelven a hacer lo mismo.
¿Hay algún duende que vuelve a su casa el cuarto día? Si es que sí, indica cuáles y si es que no, justifica la respuesta.

2. En una caja hay 45 euros en monedas de 2, 5, 10, 20 y 50 céntimos. Si metiéramos en la caja una moneda de 5 céntimos, dos de 10 céntimos, tres de 20 céntimos y cuatro de 50 céntimos, entonces la caja tendría la misma cantidad de monedas de cada tipo. ¿Cuántas monedas de cada tipo hay en la caja?

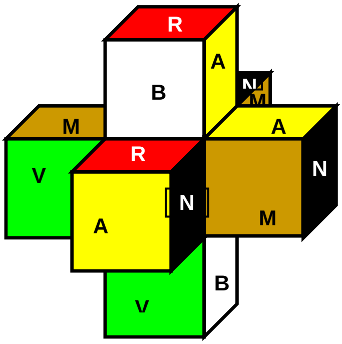
3. En el triángulo acutángulo *ABC*, sea *D* el punto del lado *AC* tal que *BD* es perpendicular a *AC* y sea *E* el punto del lado *AB* tal que *CE* es perpendicular a *AB*. Sabiendo las siguientes igualdades entre ángulos: $C\hat{B}D = 2A\hat{B}D$ y $A\hat{C}E = 3B\hat{C}E$, calcula las medidas de los tres ángulos del triángulo *ABC*.

Nota: Llamamos ángulo $P\hat{Q}R$ al ángulo agudo de vértice *Q* que forman los segmentos *PQ* y *QR*.

PRUEBA POR EQUIPOS 3º y 4º de E.S.O. (45 minutos)

1. Con **siete cubos idénticos** he formado una bonita estrella como ves en el dibujo. La única regla que he respetado es que dos caras que se tocan no pueden estar pintadas del mismo color.

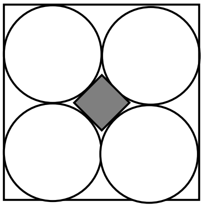
Amarillo
Blanco
Marrón
Naranja
Rojo
Verde



Del cubo que está colocado más a la izquierda vemos dos caras, la de arriba de color marrón y la frontal de color verde. ¿Qué colores tienen las restantes caras: la de abajo; la del fondo; la de la izquierda; la de la derecha?

2. Cuatro amigos se encuentran en el interior de en una habitación cerrada con un candado que solo puede abrirse con una clave secreta. Ninguno sabe cómo ha llegado hasta ahí y el pánico empieza a invadirles.
De repente una voz les susurra: "Ahhh, la clave que abre el candado **es un número de siete cifras, ninguna de ellas repetida; cada cifra divide al número de la clave; y la clave es el mayor número que tiene esas cuatro propiedades**. Ahhh, solo contáis con quince minutos, si no,...". El pánico se apoderó de los amigos.
a) Averigua qué tres cifras no pueden formar parte del número misterioso.
b) Encuentra el número misterioso.
(La historia es triste, nunca nadie volvió a ver a los cuatro amigos)

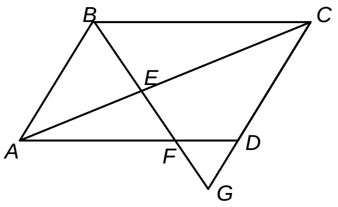
3. ¡Qué bonito dibujo! Un cuadrado grande de 4 cm de lado, cuatro círculos iguales tangentes entre ellos y otro cuadrado pequeñito tangente a los cuatro círculos. ¿Qué área tiene este cuadrado más pequeño?



PRUEBA POR EQUIPOS Bachillerato. (45 minutos)

1. Tenemos cuatro dados con caras del 1 al 6. Dos de ellos están equilibrados, pero los otros dos están trucados.
Uno de los dados trucados tiene la siguiente propiedad: la probabilidad del doble de un número es el doble de la probabilidad del número y la probabilidad del triple de un número es el triple de la del número.
En el otro dado la probabilidad del doble de un número es la mitad de la del número y la probabilidad del triple de un número es la tercera parte de la probabilidad del número.
En ambos dados ocurre que la probabilidad de sacar un 4 es igual a la probabilidad de sacar un 5.
Metemos nuestros cuatro dados en un cubilete y los lanzamos. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 22?

2. En la figura ves un paralelogramo *ABCD*. El punto *G* está en la prolongación del lado *CD* y el segmento *BG* corta a la diagonal *AC* en el punto *E* y al lado *AD* en el punto *F*. Sabiendo que *BE* = 16 cm y *EF* = 12 cm, ¿cuántos centímetros mide el segmento *FG*?



3. La matrícula de un coche tiene solo cinco cifras, sin letras. Al instalarla, el propietario se equivocó y la puso al revés, lo de abajo para arriba y, ¡cosas de la simetría!, aún así, el número boca abajo tenía sentido y se podía leer. Debido a esto, el propietario no se dio cuenta de su error. Si la diferencia del número que ahora tenía y el original es 78 633, ¿cuál es la matrícula correcta?
Observación: el número 1 en las matrículas de los coches se escribe l.

PRUEBA INDIVIDUAL 1º y 2º de E.S.O. (90 minutos)

1. En la isla Colorín todos los camaleones eran rojos. Cada uno de ellos tiene exactamente un amigo o tiene exactamente 5 amigos. Un día, cada camaleón con exactamente un amigo se volvió amarillo y cada camaleón con exactamente 5 amigos se volvió verde. Resultó así que los que son amigos son de colores diferentes. Más tarde, 30 camaleones amarillos se volvieron verdes y 40 verdes se volvieron amarillos. De este modo resultó que los que son amigos son del mismo color. ¿Cuántos camaleones hay en la isla Colorín?

2. Del pentágono *ABCDE*, sabemos que *E*= 150º, que *AB* = 17 cm y *DE* = 8 cm, que los triángulos *ABC* y *CDE* son equiláteros. Calcula el perímetro del pentágono *ABCDE*.

3. Un juego consiste en escribir un número entero positivo en cada una de las seis caras de un cubo (puedes repetir números). Después hay que escribir en cada vértice del cubo el resultado de multiplicar los tres números que hay en las caras que coinciden en él y por último hay que sumar los ochos números que hay escritos en los vértices. El objetivo es que esta suma sea 105.
Da todas las posibles combinaciones ganadoras.

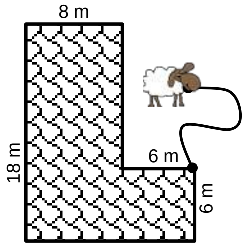
4. En cada casilla de una cuadrícula de 3×3 hemos escrito nueve números de tal manera que cada número es el doble del que tiene justo debajo y es la tercera parte del que tiene justo a su derecha. Si la suma de todos ellos es 728, escribe la cuadrícula con sus nueve números.

<u>PRUEBA INDIVIDUAL</u> 3º y 4º de E.S.O. (90 minutos)

1. Todavía queda mucho para que llegue el verano. Mientras tanto…
En la suma que ves, letras diferentes representan números diferentes. Sabiendo que **G = J – 1**, ¿qué número se esconde detrás de **AGOSTO**?

$$\begin{array}{r} J\,U\,N\,I\,O \\ +\ J\,U\,L\,I\,O \\ \hline A\,G\,O\,S\,T\,O \end{array}$$

2. Francisquita ha atado a su ovejita Beeé en el vértice de su casa en forma de **L**. Si la cuerda mide 12 metros, ¿en qué superficie, en m^2, de su jardín puede pastar la ovejita Beeé?

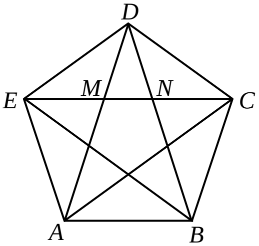


3. Una señora reparte las manzanas de su huerta a las personas que le van pidiendo de la siguiente forma:
Al primero que llega le da la mitad de las manzanas más media manzana.
Al segundo, la mitad de las que quedan más media manzana.
Al tercero, la mitad de las que quedan más media manzana y así sucesivamente con los siguientes.
Cuando llega el décimo y recoge las manzanas que le corresponden, éstas se acaban.
¿Cuántas manzanas tenía la señora?

4. En un examen de matemáticas, la niña Centésima contestó bien a 100 preguntas y por ello obtuvo una puntuación de 20 000 puntos. Por cada pregunta bien contestada le otorgaban puntos en función del tipo: si era de geometría le daban 4000 puntos; si era de álgebra, 800 puntos; y si era de aritmética, 10 puntos. ¿Cuántas preguntas de cada clase contestó bien la niña Centésima?

<u>PRUEBA INDIVIDUAL</u> Bachillerato (90 minutos)

1. En el pentágono regular de la figura, $MN = 1$.
Determina las longitudes de los segmentos: EM, EC y ED.



2. Determina los vértices y el área del rectángulo de mayor área inscrito entre las parábolas $y = 12 - x^2$, $y = x^2 - 12$.

3. Las bases de la Asociación *Mathandyou* dicen que para tratar los diferentes asuntos de su interés se formarán pequeñas comisiones de 10 socios cada una con la condición de que no haya dos comisiones que tengan más de un socio en común. Este año se han formado 40 comisiones. Demuestra que la asociación tiene más de 60 socios. ¿Cuántos socios tiene como mínimo la asociación?

4. Elena es muy hábil multiplicando por 2, y a Nicolás le gusta más dividir entre 3. Un día toman el número $\frac{729}{64}$ y comienza Elena multiplicándolo por 2, después Nicolás divide el resultado entre 3 y siguen así alternativamente formando una sucesión.

a) ¿Cuál de los dos obtendrá el número 1?

b) Si continuaran indefinidamente, ¿se podría calcular la suma de los infinitos términos? En caso afirmativo, calcúlala y si no fuera posible, justifícalo.

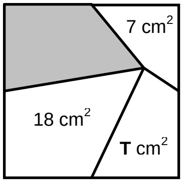
<u>PRUEBA POR RELEVOS</u> (60 minutos)

1º y 2º de ESO.-

1A.- En la isla Colorín viven 90 tortugas y la media de sus edades es de 790 años. La media de las edades de las tortugas hembra es de 810 años y la de las tortugas macho es de 720 años. ¿Cuántas tortugas macho hay en la isla?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1B.- Sea **T** la respuesta del problema 2B.
En un cuadrado hemos señalado un punto interior y lo hemos unido con los puntos medios de los lados del cuadrado.
¿Qué área tiene la región sombreada?



(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1C.- Sea **T** la respuesta del problema 2C.
La carretera de las Matemáticas es una larguísima recta que pasa por ocho bonitas ciudades, situadas de Sur a Norte en este orden: Apotema; Baricentro; Cálculo; Divisor; Ecuación; Factor; Grado; Hipotenusa. Completa la tabla de distancias, en km, entre esas ciudades:

Apotem							
	Baricentro						
		Cálculo					
28			**Divisor**				
	27			**Ecuación**			
43		**25**			**Factor**		
			22			**Grado**	
		38		**T** + 4			**Hipotenusa**

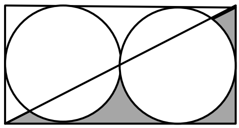
¿Qué distancia hay de Apotema a Ecuación?

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

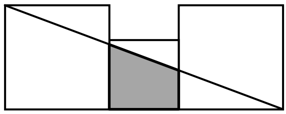
3º y 4º de ESO.-

2A.- Sea **T** la respuesta del problema 3A.
Esteban ha hecho una serie de exámenes y tras cada uno de ellos ha sacado la nota media de todos los realizados hasta el momento. En el penúltimo sacó un 82,5 y su media aumentó medio punto. En el último sacó (**T** + 40) puntos y su media disminuyó 1 punto.
¿Cuál fue la **media final** de Esteban en sus exámenes?
(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

2B.- ¿Cuál es el área de la zona sombreada si la base del rectángulo mide 12 cm y su altura 6 cm?
Importante: haz todos tus cálculos tomando la aproximación $\pi \approx 3$.
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)



2C.- Sea **T** la respuesta del problema 3C.
En la figura ves dos cuadrados de lado 8 cm y un cuadrado de lado $\frac{T}{50}$ cm.
¿Qué área ocupa la zona sombreada?



(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

Bachillerato.-

3A.- Sea **T** la respuesta del problema 1A.

Si $f(x)=\dfrac{6}{x+1}$ y $(g\circ f)(x)=\dfrac{24-12x}{(x+1)^2}$, calcula $(f\circ g)\left(\dfrac{10}{T}\right)$.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

3B.- Sea **T** la respuesta del problema 1B.

¿Cuántos puntos tienen en común las gráficas de las funciones $y=\cos x$, $y=\dfrac{1}{\mathrm{T}\cdot\pi^2}x^2$?

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

3C.- María sale de casa y va a recoger a su hija al aeropuerto. Para ello conduce a 50 km/h durante la primera hora, pero se da cuenta de que si continúa a esa velocidad llegará una hora tarde, así que aumenta la velocidad en 30 km/h el resto del viaje y llega 30 minutos antes. ¿Qué distancia hay entre la casa de María y el aeropuerto?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

LV OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Comunidad de Madrid

FASE CERO: viernes 23 de noviembre de 2018

- En la hoja de respuestas, escribe la letra de la opción que creas correcta
- Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos; cada respuesta en blanco 1 punto, y cada respuesta errónea, 0 puntos.
- No está permitido el uso de calculadoras, instrumentos de medida o de cualquier aparato electrónico.
- TIEMPO: 3 horas.

1. La suma de dieciocho enteros consecutivos podría ser…

A) 1818 B) 1821 C) 1823 D) 1825 E) 1827

2. ¿Qué área, en m^2, tiene el triángulo de lados 7 m, 24 m y 25 m?

A) 300 B) 84 C) 87,5 D) 56 E) 168

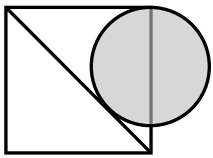
3. ¿Para cuántos enteros n se cumple que $64 < 8^n < 32^{10}$?

A) 47 B) 1 C) 15 D) 14 E) 4

4. En un segmento hemos marcado los puntos $LVOME$ en ese orden. Sabiendo que: $ME = VM$, $LE - LO = 35$ cm, $LV = 2VO$, $LO = OM$, ¿qué distancia, en cm, hay de V a M ?

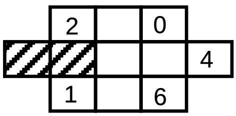
A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

5. En la figura se ve un cuadrado de lado 1 y una circunferencia cuyo diámetro está sobre uno de los lados del cuadrado y además es tangente a una diagonal del cuadrado. ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia?



A) $\sqrt{2}-1$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ D) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

6. En este entramado queremos colocar los números desde el 0 hasta el 10 de tal manera que las casillas de dos números consecutivos no se toquen (ni siquiera en un vértice) ¿Cuánto suman los números que han de colocarse en de las casillas rayadas?



A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

7. Al multiplicar un número de cinco cifras por 101 obtengo un número que acaba en …8965. ¿Cuánto suman las cuatro últimas cifras del número de partida?

A) 28 B) 12 C) 16 D) 17 E) 21

8. ¿Cuántos números de tres cifras cumplen que son múltiplos de 12 y sus cifras suman 12?

A) 20 B) 19 C) 18 D) 17 E) 16

9. Las soluciones de la inecuación $\left|\frac{|x|+1}{|x-1|}\right| \leq \frac{3x}{|x|}$ son los valores del conjunto…

A) $S=(0,+\infty)$ B) $S=\left(0,\frac{1}{2}\right]\cup[2,+\infty)$ C) $S=\left(0,\frac{1}{2}\right]\cup(1,2]$

D) $S=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ E) $S=\left[\frac{1}{2},1\right)\cup[2,+\infty)$

10. En un triángulo de lados *a*, *b* y *c* se cumple que $(a+b+c)(a+b-c)=3ab$. La medida del ángulo opuesto al lado *c* es:

A) 15º B) 30º C) 45º D) 60º E) 150º

11. El valor de $\frac{\log 80}{\log 5}$ es:

A) $\frac{1+3\log 2}{1-\log 2}$ B) $4\log 2$ C) $\log 75$ D) –3 E) $\log 80-\log 5$

12. ¿De cuántas maneras podemos sentar a tres chicos y a tres chicas de forma alterna (no puede haber dos personas de igual sexo juntas) y sin dejar huecos en una fila de diez asientos?

A) 180 B) 360 C) 1800 D) 5! · 5! E) 240

13. Elegimos al azar un número *a* del conjunto {11, 13, 15, 17, 19} y otro número *b* del conjunto {2016, 2017, 2018, 2019}. ¿Cuál es la probabilidad de que el número a^b termine en 1?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{10}$ D) $\frac{7}{20}$ E) $\frac{2}{5}$

14. En una empresa radical, los sueldos semanales son proporcionales a la raíz cuadrada del número de horas trabajadas. Una empleada ha calculado que si hubiera trabajado *a* horas más, habría ganado *p* euros más; y si hubiese trabajado *b* horas más, habría ganado *q* euros más (*a* y *b* diferentes). ¿Cuál es el sueldo semanal de la trabajadora en términos de *a*, *b*, *p*, *q*?

A) $\frac{p^2-q^2}{2(a-b)}$ B) $\frac{(p-q)^2}{2\sqrt{ab}}$ C) $\frac{ap^2-bq^2}{2(ap-bq)}$ D) $\frac{aq^2-bp^2}{2(bp-aq)}$ E) $\sqrt{(a-b)(b-q)}$

15. Dos circunferencias, una interior y otra exterior, comparten el mismo centro. La longitud de una cuerda de la mayor que es tangente a la circunferencia interior mide 16 cm. ¿Cuál es el área, en cm^2, de la corona circular limitada por dichas circunferencias?

A) 36π B) 46π C) 49π D) 64π E) 25π

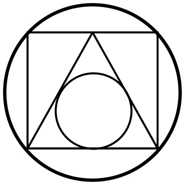
16. Al resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} |x| + x + |y| + y = 10 \\ |x| - x + |y| - y = 4 \end{cases}$ se obtienen dos soluciones diferentes, $(x, y) = (a, b)$ y $(x, y) = (c, d)$. ¿Cuál es el valor de $a + b + c + d$?

A) 3 B) 2 C) 0 D) 6 E) 10

17. Si a, b y c son números positivos, el área del triángulo situado en el primer cuadrante y limitado por los ejes y la recta de ecuación $ax + by = c$, es:

A) $\frac{ab}{2}$ B) $\frac{ab}{2c}$ C) $\frac{c^2}{2ab}$ D) $\frac{abc}{2}$ E) $\frac{c^2}{a^2 + b^2}$

18. Una circunferencia de radio 1 está inscrita en un triángulo equilátero que a su vez está inscrito en un rectángulo que está inscrito en una circunferencia. ¿Cuál es el diámetro de la circunferencia mayor?



A) $\sqrt{21}$ B) 2 C) $2\sqrt{3}$ D) 3

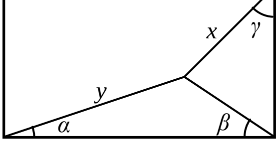
E) $3\sqrt{12}$

19. El número N tiene 99 cifras y todas ellas son el 9, $N = \overbrace{99\ldots9}^{\text{99 cifras}}$. ¿Cuánto suman las cifras del número $N \times N$?

A) 9×99 B) $1 + 9 \times 99$ C) 99 D) 990 E) 900

20. En el rectángulo de la figura hemos marcado dos segmentos y tres ángulos.

¿Cuál es el valor de $A = \frac{y \cdot \operatorname{sen}\alpha}{x \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma}$?



A) $A = \operatorname{sen}\alpha$ B) $A = y$ C) $A = \frac{y}{x}$

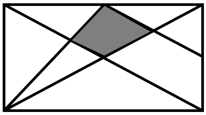
D) $A = \frac{1}{x}$ E) $A = 1$

21. La función f cumple que $[f(x)]^2 + 2f(x) = x + 1$ para todos los valores x de su dominio. Si sabemos que $f(x)$ es siempre positivo, ¿cuál es el dominio de la función f?

A) $D(f) = \Re$ B) $D(f) = (-1, +\infty)$ C) $D(f) = (-1, 1)$

D) $D(f) = [0, +\infty)$ E) $D(f) = [-1, +\infty)$

22. En el rectángulo de la figura, de dimensiones 3 × 4, hemos trazado algunos segmentos aprovechando vértices y puntos medios de lados. ¿Cuál es el área del cuadrilátero sombreado?



A) 1,2 B) 1,75 C) 1 D) 1,25 E) 1,5

23. Solo uno de los siguientes números es un cuadrado perfecto. ¿Cuál?

A) $\frac{27!\,28!}{2}$ B) $\frac{28!\,29!}{2}$ C) $\frac{29!\,30!}{2}$ D) $\frac{30!\,31!}{2}$ E) $\frac{31!\,32!}{2}$

24. Si en un triángulo isósceles los ángulos iguales aumentaran un 10%, el ángulo desigual disminuiría un 8%. ¿Cuál es la diferencia entre el ángulo mayor y cualquiera de los menores?

A) 50º B) 48º C) 56º D) 60º E) 45º

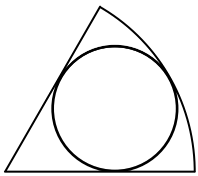
25. Don Retorcido no se olvida de vosotros. Él es muy prudente y circula siempre a 40 km/h. ¿Cuántas horas tardará en realizar un recorrido de *k* km si necesita hacer *p* paradas de *m* minutos cada una para escribir problemas?

A) $\frac{3k+2pm}{120}$ B) $3k+2pm$ C) $\frac{3k+2pm}{12}$ D) $\frac{k+pm}{40}$ E) $\frac{k+40pm}{40}$

26. Para valores permitidos de *x* e *y*, la igualdad $\log x - \log y = \log(x-y)$ es cierta si…

A) Siempre B) $x=\frac{y^2}{y-1}$ C) $x\cdot y=1$ D) $x=\frac{y}{y+1}$ E) $x=\frac{y+1}{y-1}$

27. ¿Qué radio tiene la circunferencia inscrita en un sector de radio *r* y 60º grados de amplitud?



A) $\frac{r}{2}$ B) $\frac{r}{4}$ C) $\frac{\sqrt{3}r}{2}$ D) $\frac{r}{3}$ E) $\frac{r}{6}$

28. En un triángulo rectángulo de hipotenusa *x*, un cateto es triple que el otro. ¿Cuál es el área de dicho triángulo en función de su hipotenusa?

A) $\frac{3x^2}{20}$ B) $\frac{3x^2}{10}$ C) $\frac{x^2}{9}$ D) $\frac{x^2}{4}$ E) $\frac{x^2}{20}$

29. Si $A > B > 0$, completa esta frase: "si *A* es un *M* % mayor que *B*, entonces, *B* es un….. % menor que *A*"

A) $\frac{A}{BM}$ B) $\frac{AB}{M}$ C) $\frac{BM}{A}$ D) $\frac{M}{AB}$ E) $\frac{1}{M}$

30. Si formamos todas las palabras (con sentido o no) posibles bailando las letras A-D-D-I-M-R y las ordenamos alfabéticamente, empezaríamos por ADDIMR y terminaríamos por RMIDDA. ¿Qué lugar ocuparía la palabra MADRID en esta lista?

A) 260 B) 246 C) 366 D) 250 E) 226

REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

LV OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Comunidad de Madrid

FASE LOCAL: segunda prueba. 20 de diciembre de 2018
Tiempo: 3h 30 min

1. ¿Cuál es el menor entero N de cuatro dígitos, tal que los números N y $N + 2018$ se escriben con 8 cifras, todas ellas diferentes?

2. Determinar el número de pares ordenados de enteros positivos (a, b) que verifican

$$a^2 b^3 = 20^{18}$$

3. En el cuadrilátero $PQRS$, $PS = 5$, $SR = 6$, $RQ = 4$ y $\hat{P} = \hat{Q} = 60^o$. Si la medida del lado PQ puede expresarse como $PQ = \dfrac{a+\sqrt{b}}{2}$, con a, b enteros positivos únicos, determinar a + b.

4. Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una función que verifica $f(x) = f(x+1) + f(x-1)$ para todo entero x. Si $f(20) = 18$ y $f(18) = 20$, determinar $f(20\,182\,018)$.

5. Determinar el menor entero positivo n que tiene exactamente tres divisores diferentes a, b y c, con $1 < a < b < c < n$, cuya suma es $a + b + c = 1001$.

6. Dos monedas están trucadas de modo que, al lanzarlas al aire, resulta que la probabilidad de obtener dos caras es la misma que la probabilidad de obtener dos cruces, pero la probabilidad de obtener una cara y una cruz es 5/8. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara en cada una de las monedas?

7. En el triángulo ABC, $AB = AC = 10$ y $BC = 12$. El punto D está en el lado AB y el punto E está en el lado AC; ambos son distintos de los vértices del triángulo. Sabemos que se verifica $AD = DE = EC$, y resulta que podemos expresar AD en la forma $\dfrac{p}{q}$, con p y q primos entre sí. Determinar el valor de la suma $p + q$.

8. ¿Para cuántos enteros positivos $n \le 2018$ es el número $N = 1 + n + \dfrac{n^2}{2!} + \dfrac{n^3}{3!} + ... + \dfrac{n^6}{6!}$ un entero?

9. Un saltamontes está colocado en el origen de coordenadas. Desde el punto de coordenadas (x, y), el saltamontes puede saltar a cualquiera de los puntos de coordenadas ($x + 1$, y), ($x + 2$, y), (x, $y + 1$) o (x, $y + 2$). ¿Cuántas sucesiones diferentes de saltos llevarán al saltamontes desde (0, 0) hasta (4, 4)?

10. El triángulo ABC es rectángulo. Sea D un punto en la hipotenusa BC, y sean E y F puntos en los catetos AB y AC, respectivamente, tales que $DE \perp AB$ y $DF \perp AC$.
Si $BC = 4$ y $DE = DF = 1$, determinar el área del triángulo ABC.

LV OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Prueba de selección
Comunidad de Madrid

Primera sesión, viernes tarde 18 de enero de 2019

No está permitido el uso de calculadoras. Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.

1. Sea $p \geq 3$ un número primo y consideramos el triángulo rectángulo de cateto mayor $p^2 - 1$ y cateto menor $2p$. Inscribimos en el triángulo un semicírculo cuyo diámetro se apoya en el cateto mayor del triángulo y que es tangente a la hipotenusa y al cateto menor del triángulo. Encuentra los valores de p para los cuales el radio del semicírculo es un número entero.

2. ¿Existen m, n números naturales de forma que $n^2 + 2018\,m\,n + 2019\,m + n - 2019m^2$ es un número primo?

3. Fijamos un número natural $k \geq 1$. Encuentra todos los polinomios $P(x)$ que cumplen
$P\left(x^k\right) - P(x) = x^k P(x)$ para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

Segunda sesión, Sábado 19 de enero de 2019

Tiempo: 3 horas y media

4. Considera el conjunto de números enteros positivos n cumpliendo $1 \leq n \leq 1\,000\,000$. En ese conjunto, indica si es mayor la cantidad de números que pueden expresarse de la forma $a^3 + mb^2$, con $a, b \in \mathbb{N}$ y $m \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ o la cantidad de números que no pueden expresarse de esa manera.

5. Prueba que para todo $a, b, c > 0$ se cumple que
$$\frac{a^2}{b^3c} - \frac{a}{b^2} \geq \frac{c}{b} - \frac{c^2}{a}$$
¿En qué caso se cumple la igualdad?
.

6. Consideramos un triángulo ABC y un punto D en el lado AC.
Si $AB = DC = 1$, $\angle DBC = 30º$ y $\angle ABD = 90º$, calcula el valor de AD.

XXIVª OLIMPIADA de MAYO
Mayo de 2018

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
<u>Justifica cada una de tus respuestas.</u>
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 27 de mayo

Primer Nivel

PROBLEMA 1

Juan hace una lista de 2018 números. El primero es el 1. Luego, cada número se obtiene de sumarle al anterior alguno de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 o 9.
Sabiendo que ninguno de los números de la lista termina en 0, ¿cuál es el mayor valor que puede tener el último número de la lista?

PROBLEMA 2

Se efectúan mil divisiones enteras: se divide 2018 entre cada uno de los números enteros del 1 al 1000. Se obtienen así mil cocientes enteros con sus respectivos restos. ¿Cuál de estos mil restos es el mayor?

PROBLEMA 3

Sea $ABCDEFGHIJ$ un polígono regular de 10 lados que tiene todos sus vértices en una circunferencia de centro O y radio 5. Las diagonales AD y BE se cortan en P y las diagonales AH y BI se cortan en Q. Calcular la medida del segmento PQ.

PROBLEMA 4

Ana debe escribir 7 enteros positivos, no necesariamente distintos, alrededor de una circunferencia de manera que se cumplan las siguientes condiciones:

- La suma de los siete números es igual a 36.
- Si dos números son vecinos la diferencia entre el mayor y el menor es igual a 2 o 3.

Hallar el máximo valor del mayor de los números que puede escribir Ana.

PROBLEMA 5

En cada casilla de un tablero de 5×5 se escribe uno de los números 2, 3, 4 o 5 de manera que la suma de todos los números en cada fila, en cada columna y en cada diagonal siempre sea par. ¿De cuántas formas podemos llenar el tablero?
Aclaración. Un tablero de 5×5 tiene exactamente 18 diagonales de diferentes tamaños. En particular, las esquinas son diagonales de tamaño 1.

Segundo Nivel

PROBLEMA 1

Se tiene un número entero de 4 dígitos que es un cuadrado perfecto. Se construye otro número sumándole 1 al dígito de las unidades, restándole 1 al dígito de las decenas, sumándole 1 al dígito de las centenas y restándole 1 al dígito de las unidades de mil. Si el número que se obtiene es también un cuadrado perfecto, hallar el número original. ¿Es único?

PROBLEMA 2

En un tablero de 4×4 están escritos los números del 1 al 16, uno en cada casilla. Andrés y Pablo eligen cuatro números cada uno. Andrés elige el mayor de cada fila y Pablo, el mayor de cada columna. Un mismo número puede ser elegido por ambos. Luego, se eliminan del tablero todos los números elegidos. ¿Cuál es el mayor valor que puede tener la suma de los números que quedan en el tablero?

PROBLEMA 3

Los 2018 residentes de un pueblo están estrictamente divididos en dos clases: caballeros, que siempre dicen la verdad, y mentirosos, que siempre mienten. Cierto día todos los residentes se acomodaron alrededor de una circunferencia y cada uno de ellos anunció en voz alta "*Mis dos vecinos, el de la izquierda y el de la derecha, son mentirosos*". A continuación uno de los residentes abandonó el pueblo. Los 2017 que quedaron se acomodaron nuevamente en una circunferencia (no necesariamente en el mismo orden que antes) y cada uno de ellos anunció en voz alta "*Ninguno de mis vecinos, el de la izquierda y el de la derecha, es de mi misma clase*". Determinar, si es posible, de qué clase es el residente que abandonó el pueblo, caballero o mentiroso.

PROBLEMA 4

En un paralelogramo $ABCD$, sea M el punto del lado BC tal que $MC = 2BM$ y sea N el punto del lado CD tal que $NC = 2DN$. Si la distancia del punto B a la recta AM es 3, calcular la distancia del punto N a la recta AM.

PROBLEMA 5

Cada punto de una circunferencia está coloreado con uno de 10 colores. ¿Es cierto que para cualquier coloración hay 4 puntos del mismo color que son vértices de un cuadrilátero con dos lados paralelos (un trapecio isósceles o un rectángulo)?

XXIVª OLIMPIADA de MAYO de 2018.
RESULTADOS DE ESPAÑA

PRIMER NIVEL

	Apellidos y nombre	Premio
1	Álvaro Gamboa Rodríguez	ORO
2	Diego López Aragón	PLATA
3	Durán Fernández, Alberto	PLATA
4	María Cid Crespo	BRONCE
5	Juan Burgos Pino	BRONCE
6	Enrique Ortiz Gilarranz	BRONCE
7	Adrián Álvarez Yance	BRONCE
8	Yago Irache Fernández	MENCIÓN
9	Alonso Muñoz Lorente	MENCIÓN
10	Sara Sandu	MENCIÓN

SEGUNDO NIVEL

1	Miguel Navarro Muñoz	ORO
2	Félix García Taboada	PLATA
3	Felipe Lorenzo Martínez	PLATA
4	Miguel Valdivieso Valles	BRONCE
5	Gabriela María García Pérez	BRONCE
6	Raquel Izquierdo Pato	BRONCE
7	Alejandro Krum de Vicente	BRONCE
8	Jorge Merino Esteban	MENCIÓN
9	Jimena Lozano Simón	MENCIÓN
10	Miguel de Perosanz Barroso	MENCIÓN

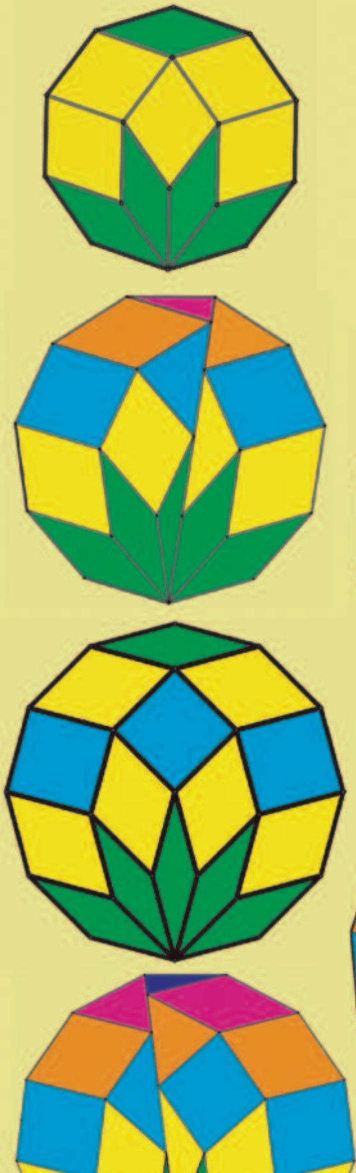
Comunidad de Madrid

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Consejo Social de la UCM

sm

ANAYA

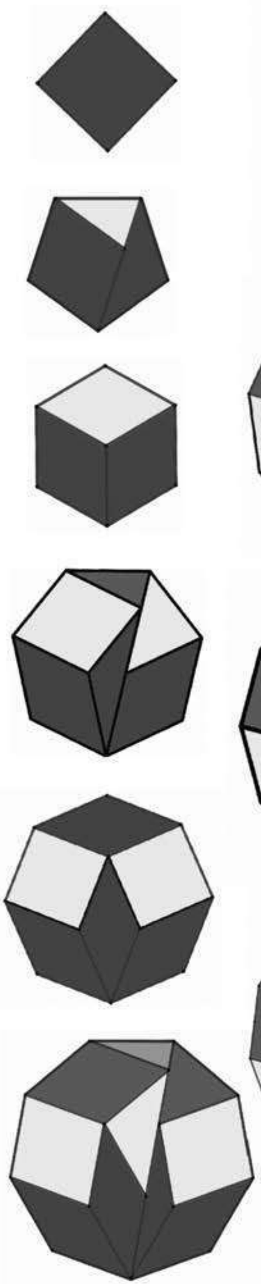
Smartick

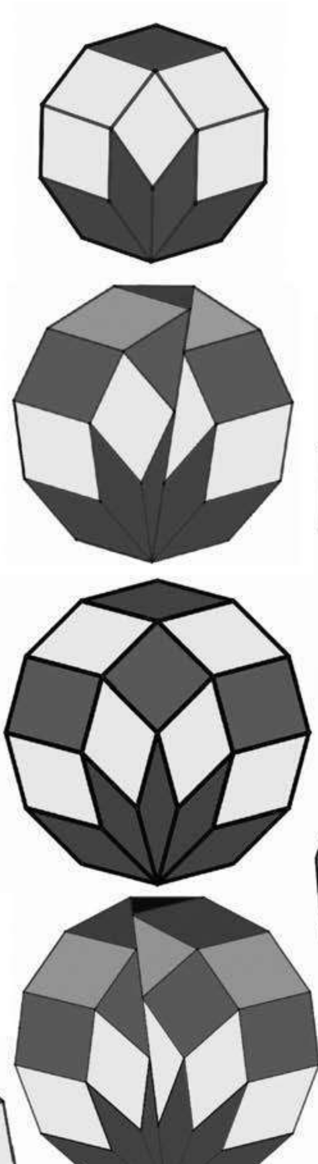


XXIV Concurso de Primavera

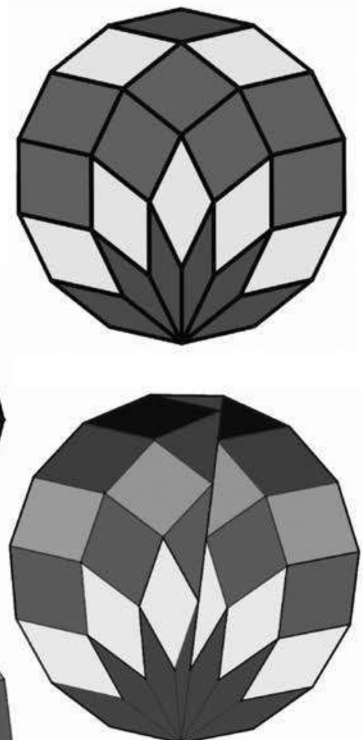
Matemáticas
2020

Comunidad
de Madrid





XXIV
Concurso de Primavera



Matemáticas
2020

Comunidad de Madrid

Comité organizador del Concurso de Primavera

Alzola Bujarrabal, Belén
Baeza Alba, Miguel Ángel
Benito Miguel, Isabel
Castrillón López, Marco
Donaire Moreno, Juan Jesús
Esteban García, María
Ferrero de Pablo, Luis
García Gual, Jesús
Gaspar Alonso-Vega, María
González Ortega, Jorge
Martínez Dalmau, Pablo
Martínez Sanz, Alfredo
Montero Estravís, Xiomara
Moreno Warleta, María
Ramírez Carrillo, Carlos
Sánchez Benito, Merche
Sánchez González, Víctor Manuel
Serrano Marugán, Esteban
Soler Areta, Javier
Sordo Juanena, José María
Tomé Grasa, Roberto

Edita: Asociación Matemática Concurso de Primavera

ISBN: 978-84-608-5881-2

Deposito Legal: M-8301-2017

In memoriam

A Francisco,
nuestro buen corregidor:
¡Un punto y aparte!

El árbol de Farey

(Una curiosa ordenación de los racionales entre 0 y 1)

$\frac{1}{2}$															
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$														
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$												
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{4}{5}$								
$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{4}{9}$	$\mathbf{\frac{5}{9}}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{8}{13}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{5}{6}$

Para hallar el que ocupa el lugar vigésimo tercero, escribimos 23 en sistema binario, 10111_2. Contamos de izquierda a derecha los grupos de unos y ceros seguidos que hay en el número binario obtenido: (1,1,3). Añadimos un 1 al último número de esa lista, (**1**, **1**, **4**) y leemos esta serie final como desarrollo en fracción continua de un racional entre 0 y 1:

$$[0; \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{4}] = \cfrac{1}{\mathbf{1} + \cfrac{1}{\mathbf{1} + \cfrac{1}{\mathbf{4}}}} = \mathbf{\frac{5}{9}}$$

(El orden va de arriba a abajo por filas y de derecha a izquierda en cada fila)

https://www.sacred-geometry.es › fracciones-continuas

AGRADECIMIENTOS:

A los participantes en el Concurso, a sus padres y profesores.

A los voluntarios que nos ayudan en la 2ª fase.

A la Facultad de Matemáticas de la UCM.

Al Vicerrectorado de alumnos de la UCM.

A la Subdirección General de Formación del Profesorado de la Dirección General de Innovación, Becas y Ayudas a la Educación de la Consejería de Educación, Juventud y Deporte Comunidad de Madrid

A las editoriales Grupo **ANAYA** y Ediciones **S.M.**

A Smartick.

ÍNDICE

ENUNCIADOS DE LA 1ª FASE:

ENUNCIADOS DE LA 2ª FASE:

SOLUCIONES:

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel I)

XXIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 13 de febrero de 2019

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** X LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

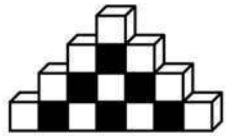
COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel I)

1 Un cuarto de mandarina son dos gajos y medio. ¿Cuántas mandarinas son 65 gajos?

A) Trece **B)** Tres y un cuarto **C)** Seis y media
D) Doce y media **E)** Veintiséis

2 Combinando cubos blancos y negros Miguel hace construcciones como la de la figura, que tiene cuatro pisos. Si en su colección de cubos hay 70 cubos blancos y 50 cubos negros, ¿cuántos pisos tiene la construcción más alta que puede construir siguiendo ese patrón de colores?



A) 5 **B)** 10 **C)** 15 **D)** 20 **E)** 25

3 Julián y Lucía juegan a ver quién llega más lejos en el lanzamiento de aviones de papel. El avión de Julián planea un rato y se posa a dos metros y medio del punto de lanzamiento. El de Lucía sale con ímpetu y se estrella a 370 centímetros del punto de lanzamiento. ¿Cuántos decímetros de diferencia hay entre el ganador y el perdedor?

A) 12 **B)** 21,3 **C)** 62 **D)** 34,5 **E)** 16,5

4 Los habitantes del planeta Trescatorce tienen tres manos y catorce pies. En cada mano tienen tres dedos y en cada pie tienen catorce. A mi cumple invité a tres colegas de Trescatorce y a cinco de la Tierra. Contándome a mí, que soy de la Tierra, ¿cuántos dedos tenemos entre todos los que estuvimos en la fiesta?

A) 735 **B)** 725 **C)** 222 **D)** 630 **E)** 645

5 Al concierto de *Los Irracionales* que se celebró en el planeta Trescartorce asistieron 19 987 trescatorcianos. ¿Qué número aproxima mejor la cantidad de dedos que había en el concierto?

A) 4 000 000 **B)** 300 000 **C)** 800 000 **D)** 3 000 000 **E)** 400 000

6 La bruja Piruja lee la receta de su poción contra el dolor de muelas: "Ingredientes: 2 colas de lagartija, 51 patas de araña peluda, 4 lenguas de escorpión, 15 huevos podridos, 39 dientes de ajo y una pizca de polvos de talco". Cuando va a la despensa se da cuenta de que solo tiene 26 dientes de ajo y decide hacer menos cantidad. ¿Cuántas patas de araña peluda tendrá que poner si utiliza los 26 dientes de ajo?

A) 38 **B)** 17 **C)** 34 **D)** 25 y media **E)** 32 y media

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel I)

7 Mi reloj de pulsera marca ahora las 11 de la mañana, ¿qué hora marcará dentro de 100 horas?

A) Las 3 de la tarde **B)** Las 4 de la mañana **C)** Las 5 de la tarde
D) Las 6 de la tarde **E)** Las 7 de la mañana

8 El octógono que rodea la figura tiene 48 cm^2 de área. ¿Cuál es el área, en cm^2, del octógono interior dibujado con trazo grueso?

A) 40 **B)** 36 **C)** 32
D) 28 **E)** 24

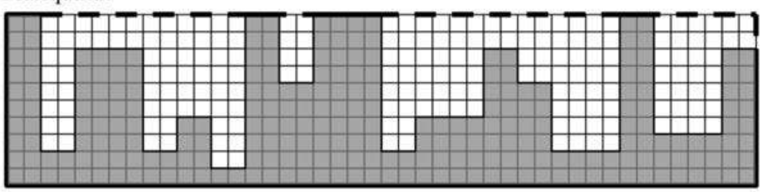
9 Hoy en casa hemos comido mi menú favorito: de primero brócoli, de segundo caballa y de postre natillas! Mis padres se organizan con las comidas de forma muy sistemática y vengo observando que ponen brócoli cada 6 días, caballa cada 10 días y natillas cada 15 días. ¿Dentro de cuántos días volveré a comer por primera vez mi menú favorito?

A) 90 **B)** 60 **C)** 40 **D)** 30 **E)** 20

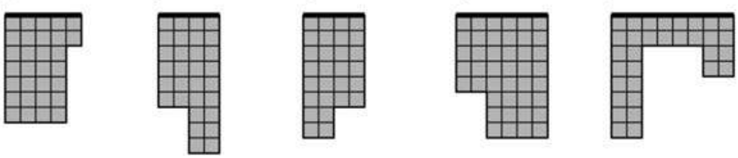
10 En la multiplicación ♥♣ × 7 = 4♣♣, ♣ y ♥ representan cifras distintas. ¿Cuánto vale ♣ + ♥?

A) 8 **B)** 11 **C)** 6 **D)** 12 **E)** 14

11 Mariquilla encontró una cartulina gris con borde negro y recortó trozos hasta dejar esta bonita silueta de una ciudad. ¿Qué trozo no puede ser uno de los recortados por Mariquilla?

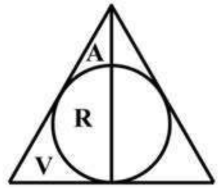


A) **B)** **C)** **D)** **E)**



XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel I)

12 Con tres lápices: rojo (R), azul (A) y verde (V), Harry Potter se entretiene coloreando el símbolo de las *Reliquias de la Muerte*. Ya coloreó la mitad izquierda como ves en la figura, ¿de cuántas formas distintas puede colorear la mitad derecha de manera que dos regiones que comparten frontera no tengan el mismo color?



A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

13 Mulán es más rauda que un río bravo. Para comprobarlo posa su barco en el río y comienza a correr río abajo. Corre 4,5 kilómetros en media hora y se sienta a esperar que llegue el barco. Si el barco aún tarda 15 minutos en llegar, ¿cuántos kilómetros recorre el barco en una hora?

A) 2,5 **B)** 4,75 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 9

14 Amaia canta en la ducha a voz en grito esta monótona canción : "La felicidad a-a-a-a, la felicidad a-a-a-a, la felicidad a-a-a-a,…". Siempre acaba su ducha completando una frase. Si hoy al terminar su ducha ha pronunciado la letra **i** 348 veces, ¿cuál es la suma de las cifras del número de veces que ha pronunciado la letra **a**?

A) 16 **B)** 15 **C)** 20 **D)** 11 **E)** 9

15 Jesús *recorre* 4 km en su bicicleta estática en 10 minutos. ¿Cuántos metros *recorrerá* en 4 minutos si mantiene esa velocidad media?

A) 1600 **B)** 1500 **C)** 1800 **D)** 1450 **E)** 1480

16 La ballena jorobada es el mamífero que realiza la migración más larga. Cada año abandona el Polo Sur, se dirige hasta las playas del norte de Costa Rica y después regresa a su lugar de origen. La longitud total del viaje es de unos 17 000 km. Una ballena jorobada vive entre 45 y 50 años. ¿Qué número aproxima mejor los metros que recorre una ballena jorobada en su vida?

A) 800 000 **B)** 8 millones **C)** 80 millones **D)** 800 millones **E)** 8000 millones

17 La niña Centésima tiene 61 euros entre billetes de 5 euros y monedas de 2 euros y piensa: "Si los billetes fueran monedas y las monedas fueran billetes, tendría 79 euros". ¿Cuántas monedas tiene la niña Centésima?

A) 15 **B)** 10 **C)** 6 **D)** 13 **E)** 7

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel I)

18 En San Valentín, por una manzana me dan dos flores y un abrazo. Por una manzana y una flor me dan un abrazo y un bombón. Por un abrazo me dan una flor y un bombón. ¿Cuántas flores equivalen a una manzana?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

19 Ana, Berta y Celia son deportistas. Una es tenista, otra gimnasta y otra nadadora. La gimnasta es la más baja de las tres. Ana es más alta que la tenista. ¿Qué afirmación es cierta?

A) Ana es gimnasta **B)** Berta es nadadora **C)** Ana es nadadora
D) Ana es tenista **E)** Celia es nadadora

20 En el costurero de la abuela hay más de 40 botones y menos de 80. Si organizo los botones en montoncitos de 5, me sobran 2 botones. Si los organizo en montoncitos de 7, me faltan 3. Si los organizo de 6 en 6, ¿cuántos sobran?

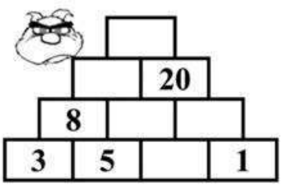
A) 5 **B)** 4 **C)** 3
D) 2 **E)** 1

21 Con fichas del *Scrabble* dos amigos escriben sus nombres CUCA y LINO y cada uno comienza a desordenar las letras de su nombre a lo loco formando palabras de 4 letras con o sin sentido: CACU, OLNI, … ¿Cuántas palabras distintas pueden formar entre los dos?

A) 36 **B)** 24 **C)** 48 **D)** 12 **E)** 16

22 En esta pirámide, el número de cada ladrillo es la suma de los dos ladrillos sobre los que se apoya. ¿Cuál es la suma de los cinco números que se ha comido Comenúmeros?

A) 78 **B)** 92 **C)** 72 **D)** 87 **E)** 76



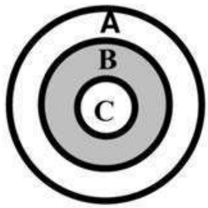
XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel I)

23 Cuando Luca llega a la meta en una carrera de 60 m, a Inés le faltan 10 m para llegar y a Guillermo 20 m. Si Inés y Guillermo siguen corriendo a la misma velocidad que antes, ¿cuántos metros le faltarán a Guillermo para llegar a la meta cuando llegue Inés?

A) 6 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 15

24 Lanzando tres dardos a la diana Marta clavó dos en A y uno en B y obtuvo 36 puntos. Con dos dardos en B y uno en C, Rafa obtuvo 56 puntos y Olivia obtuvo 58 puntos con dos dardos en C y uno en A. ¿Cuántos puntos obtuvo Irene con un dardo en A, otro en B y otro en C?

A) 42 **B)** 46 **C)** 48 **D)** 50 **E)** 54



25 Ya sabes que por cada respuesta correcta obtienes cinco puntos, por cada respuesta en blanco un punto y por cada respuesta incorrecta cero puntos. De los 25 problemas, Javier contestó bien a 18 y mal a 3, ¿cuántos puntos obtuvo?

A) 90 **B)** 91 **C)** 92 **D)** 93 **E)** 94

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel II)

concurso de primavera MATEMÁTICAS

XXIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 13 de febrero de 2019

NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel II)

1 ¡Examen sorpresa para empezar! ¡¡De números!! ¡¡¡Bien!!!
¿Cuántas de las siguientes afirmaciones son verdaderas?
I. El triple de un número impar más el doble de otro número impar es siempre impar.
II. El producto de tres números consecutivos siempre es múltiplo de seis.
III. Todos los números capicúas de cuatro cifras son múltiplos de once.
IV. Todos los números de diez cifras diferentes son múltiplos de nueve.

A) Ninguna **B)** Solo una **C)** Solo dos **D)** Solo tres **E)** Todas

2 Las cinco cifras del número *abcde* son 1, 2, 3, 4, 5 pero no sabes en qué orden. Sabiendo que *abc* es múltiplo de 4, *bcd* es múltiplo de 5 y *cde* es múltiplo de 3, ¿de quién es múltiplo el número *abcde*?

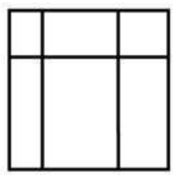
A) 7 **B)** 2 **C)** 11 **D)** 5 **E)** 13

3 Los números negativos ya han llegado.
Si $R = -(2-3)-4$, $S = 6:(7-8)$ y $T = -3-(5-4)$, ¿cuál de estas igualdades es cierta?

A) $R+S=T+5$ **B)** $R-S=T+7$ **C)** $R\cdot T=2\cdot S$

D) $R+1=T$ **E)** $R-S+T=1$

4 Juntando seis rectángulos hemos construido un cuadrado. Si la suma de los perímetros de los seis rectángulos es 420 cm, ¿cuántos centímetros mide el lado del cuadrado formado?



A) 60 **B)** 40 **C)** 20 **D)** 15
E) 42

5 Solo una de estas cinco igualdades entre fracciones es cierta. ¿Cuál es? Y la pista ya te la hemos dado: es seguro que solo hay una igualdad verdadera.

A) $\dfrac{896\,678}{338\,444}=\dfrac{122\,426}{363\,334}$ **B)** $\dfrac{59\,976}{139\,944}=\dfrac{5\,428}{15\,339}$ **C)** $\dfrac{179\,972}{417\,946}=\dfrac{2\,856}{6\,664}$

D) $\dfrac{69\,796}{192\,994}=\dfrac{1\,966}{3\,862}$ **E)** $\dfrac{59\,976}{139\,944}=\dfrac{1\,428}{3\,332}$

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel II)

6 La niña Centésima está entrenándose y se ha marcado este ambicioso plan: empieza haciendo divisiones y por cada cinco divisiones hará seis multiplicaciones y por cada cuatro multiplicaciones hará tres restas. Si al terminar su entrenamiento ha hecho 124 operaciones, ¿cuántas multiplicaciones realizó la niña Centésima?

A) 48 **B)** 40 **C)** 52 **D)** 36 **E)** 80

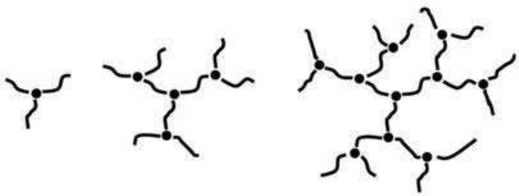
7 Si $20^{20} \cdot 30^{30} = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, entonces, $a + b + c$ es igual a…

A) 132 **B)** 150 **C)** 500 **D)** 50 **E)** 200

8 Si multiplicamos todos los múltiplos de 5 comprendidos entre 1 y 101, ¿en cuántos ceros termina ese producto?

A) 22 **B)** 17 **C)** 11 **D)** 18 **E)** 20

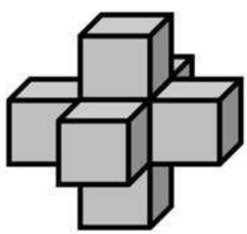
9 Fíjate bien cómo va creciendo este organismo. En la etapa 1 nació siendo un puntito y tres líneas y, a partir de ahí, en cada etapa le crece un nuevo puntito al final de cada línea y de cada nuevo puntito le nacen dos líneas. Mejor es que mires en el dibujo las tres primeras etapas de su vida. En la etapa 6, ¿cuál será la suma de sus puntitos más sus líneas?



A) 283 **B)** 305 **C)** 403 **D)** 188 **E)** 189

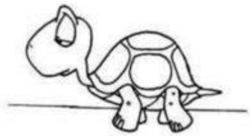
10 He pegado algunos cubos idénticos para formar esta figura sin huecos que tiene un volumen de 448 dm^3. Si ahora quiero forrar con papel plateado el exterior de la figura, ¿cuántos dm^2 de papel necesitaré?

A) 448 **B)** 320 **C)** 480 **D)** 384 **E)** 300



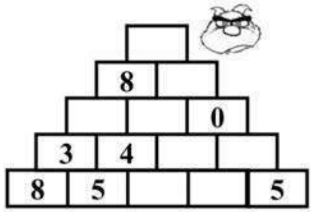
XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel II)

11 Doña Tortu ha calculado que saliendo de su casa y caminando a 4 km/h llegará a la fiesta de las tortugas 15 minutos antes de que empiece el baile inaugural. Como está muy cansada decide ir a 3 km/h aunque así llegue 15 minutos más tarde de la hora del baile. ¿A qué distancia, en kilómetros, está la fiesta de la casa de Doña Tortu?



A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

12 Esta pirámide de cifras es algo especial. En cada ladrillo se coloca la cifra de las unidades de la suma de los dos ladrillos sobre los que se apoya. ¿Cuál es la suma de los ocho números que se ha comido Comenúmeros?



A) 41 **B)** 48 **C)** 39 **D)** 53 **E)** 45

13 El número $1+\dfrac{2}{1+\dfrac{3}{1+4}}$ es igual a…

A) $\dfrac{9}{8}$ **B)** $\dfrac{9}{5}$ **C)** $\dfrac{8}{5}$ **D)** $\dfrac{9}{4}$ **E)** $\dfrac{5}{8}$

14 Con las cifras 2, 4, 6 y 8 formamos números de cuatro cifras distintas que sean múltiplos de 4. ¿Cuántos números podemos encontrar?

A) 24 **B)** 20 **C)** 16 **D)** 12 **E)** 8

15 Tres aficionadas a la música repasan su discografía. El 15% de los discos de Ana son de Mozart; el 32 % de los de Berta son de Mozart; y el 40% de los de Carlota son de Mozart.
Lo sorprendente es que las tres amigas tienen la misma cantidad de discos de Mozart. Si sabemos que entre las tres niñas tienen menos de 300 discos, ¿cuántos tienen en total?

A) 295 **B)** 296 **C)** 280 **D)** 282 **E)** 240

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel II)

16 En este problema hemos asignado cifras distintas a letras distintas sin utilizar el cero.

$$\begin{array}{r} \mathbf{N\ O\ T\ A\ R} \\ \times\ \mathbf{E} \\ \hline \mathbf{R\ A\ T\ O\ N} \end{array}$$

Sabiendo que la **E** vale 4, ¿cuánto vale la suma de unos traviesos

R + A + T + O + N + C + I + T + O + S?

A) 42 **B)** 44 **C)** 50 **D)** 51 **E)** 43

17 Don Retorcido ha diseñado esta bonita rosa formada por rombos de 1 dm de lado. La niña Centésima la construyó usando palitos de 1 dm. Si ponemos todos sus palitos en línea recta, uno detrás de otro, ¿cuántos metros medirá?

A) 7,2 **B)** 5,6 **C)** 8,4 **D)** 6,8 **E)** 6

18 Adriana dibuja un cuadrado y su hijo Diego un triángulo equilátero. Y, ¿será telepatía?, las dos figuras tienen el mismo perímetro. Si dividimos el lado del cuadrado entre el lado del triángulo, obtenemos…

A) $\frac{1}{2}$ **B)** 2 **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{4}{3}$ **E)** $\frac{2}{3}$

19 Los números a y b con $a > b$ son enteros positivos que no son múltiplos de 10 y su producto es 20 000. ¿Cuál es el valor de $a - b$?

A) 593 **B)** 621 **C)** 437 **D)** 529 **E)** 980

20 El valor de $10^{100} + 100^{10}$ es igual a…

A) 10^{120} **B)** $10^{20}\cdot\left(1+10^{80}\right)$ **C)** 110^{110}

D) $100\cdot\left(10^{10}+1\right)$ **E)** $2\cdot 10^{100}$

21 ¿Para cuántos valores enteros positivos, a, menores que 100, se consigue que $N = \sqrt{10+a}$ sea un número entero?

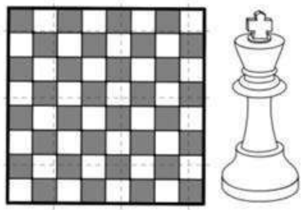
A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

22 Los cromos de don Retorcido son rarísimos. Por 36 bats te dan 9 bets; por 45 bets te dan 6 bits; por 18 bits te dan 15 bots; y por 9 bots te dan 3 buts. ¿Cuántos bats te darán por 4 buts?

A) 324 **B)** 520 **C)** 450 **D)** 360 **E)** 432

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel II)

23 En un tablero de ajedrez (8×8), ¿cuál es el menor número de reyes que colocados en el tablero amenazan todas las casillas restantes (es decir, no hay casillas que no tengan contacto con las de los reyes)?



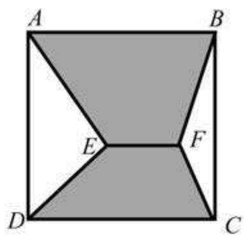
A) 9 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 16

24 Don Retorcido tiene cinco tarjetas numeradas del 1 al 5 y elige tres sin mirar. ¿Cuál es la probabilidad de que la mayor tarjeta elegida sea la del número 4?

A) $\frac{4}{5}$ **B)** $\frac{3}{10}$ **C)** $\frac{2}{15}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{1}{6}$

25 El lado del cuadrado *ABCD* mide 3 cm. ¿Qué área, en cm^2, ocupa la región sombreada sabiendo que *EF* mide 1 cm y es paralelo al lado *AB*?

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 5,5 **E)** 6,5



XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel III)

XXIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 13 de febrero de 2019

NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel III)

1 El punto P está en el exterior de una circunferencia C en el plano. ¿Cuál es el número máximo de puntos de C que se encuentran a 3 cm de P?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 8

2 Los asistentes al último gran estreno entran en el teatro por cinco puertas distintas. Por la primera entra una persona, dos entran por la segunda, luego tres por la tercera, cuatro por la cuarta y cinco por la quinta. Después vuelve a entrar una sola persona por la primera puerta, y continúa el patrón anterior. Si Jorge es el espectador número 2019, ¿por qué puerta entró?

A) Por la primera **B)** Por la segunda **C)** Por la tercera
D) Por la cuarta **E)** Por la quinta

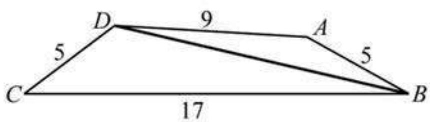
3 Dos números a y b verifican que $a + b < 0$ y $a \cdot b > 0$. De las siguientes afirmaciones, ¿cuál es necesariamente cierta?

A) $a > 0$ y $b > 0$ **B)** $a < 0$ y $b < 0$ **C)** $a > 0$ y $b < 0$
D) $a > -b$ **E)** $b > -a$

4 ¿Cuál de los siguientes números es un cuadrado perfecto? (Ten en cuenta que $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$)

A) $\dfrac{14! \cdot 15!}{2}$ **B)** $\dfrac{15! \cdot 16!}{2}$ **C)** $\dfrac{16! \cdot 17!}{2}$ **D)** $\dfrac{17! \cdot 18!}{2}$ **E)** $\dfrac{18! \cdot 19!}{2}$

5 En el cuadrilátero $ABCD$ de la figura, ¿cuánto mide BD si sabemos que es un entero?



A) 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 15

6 El número $\boldsymbol{n} = 1812\boldsymbol{b}42\boldsymbol{a}$ es múltiplo de 99. El valor del producto $\boldsymbol{a \cdot b}$ es…

A) 4 **B)** 18 **C)** 12 **D)** 20 **E)** 24

7 Si a es un número tal que $a^2 = a + 1$, entonces a^6 es…

A) $5a + 3$ **B)** $5a + 6$ **C)** $6a + 5$ **D)** $5a + 8$ **E)** $8a + 5$

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel III)

8 ¿Cuántos enteros positivos menores que 1000 son seis veces la suma de sus dígitos?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 5

9 Para cada entero positivo n, llamamos $s(n)$ a la suma de los dígitos de n. Por ejemplo, $s(2019) = 12$. El valor de la suma $s(1) + s(2) + s(3) + \ldots + s(99)$ es…

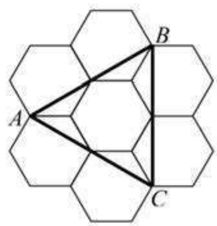
A) 746 **B)** 862 **C)** 900 **D)** 924 **E)** 1005

10 El dígito de las unidades del número $3^{2017} \cdot 7^{2018} \cdot 13^{2019}$ es:

A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

11 Seis hexágonos regulares están alrededor de otro hexágono regular de lado 1 cm, como muestra la figura. ¿Cuál es, en cm^2, el área del triángulo ABC?

A) $\sqrt{3}$ **B)** 3 **C)** $3\sqrt{3}$ **D)** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **E)** 1



12 Si la función $f(x) = 4^x$, entonces $f(x+1) - f(x)$ valdrá:

A) $f(x)$ **B)** $2\cdot f(x)$ **C)** $3\cdot f(x)$ **D)** 4 **E)** 1

13 La suma de las soluciones enteras de $1 < (x-2)^2 < 25$ es:

A) 10 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 19 **E)** 25

14 En un rectángulo $ABCD$, $AB = 6$, $AD = 30$ y G es el punto medio de AD. El punto E está en la prolongación de AB y es tal que $BE = 2$. Si el punto F es la intersección ED y BC, el área del cuadrilátero $BFDG$ es…

A) $\dfrac{133}{2}$ **B)** 67 **C)** $\dfrac{135}{2}$ **D)** 68 **E)** $\dfrac{137}{2}$

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel III)

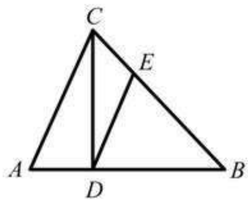
15 La policía matemática investiga a cinco sospechosos de haber robado las pruebas del Concurso de Primavera. Esto es lo que dicen al ser interrogados:

- El señor Acutángulo: ¡todos somos inocentes!
- Don Retorcido: exactamente uno de nosotros es inocente.
- La niña Centésima: no, exactamente uno de nosotros es culpable.
- El Comenúmeros: al menos dos de nosotros somos inocentes.
- La rana Gustavo: entre nosotros hay por lo menos dos culpables.

Si los inocentes siempre dicen la verdad y los culpables siempre mienten, ¿cuántos de los cinco sospechosos son culpables?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

16 En el triángulo *ABC* de la figura, *AD* es la mitad de *BD* y *CE* es un cuarto de *CB*. Sabiendo que *CD* es una de las alturas del triángulo *ABC* y que el área del triángulo *CDE* es 9 cm^2, ¿cuál es el área, en cm^2, del triángulo *ABC*?



A) 45 **B)** 54 **C)** 60

D) 63 **E)** 72

17 Esteban se está preparando para hacer un triatlón (500 m nadando, 20 km en bicicleta y 6 km corriendo). En esas distancias consigue hacer una velocidad media de 4 km/h nadando y 12 km/h corriendo. Se ha puesto como objetivo conseguir acabar el triatlón en 2 horas. ¿Cuál tiene que ser, en km/h, su velocidad media con la bicicleta?

A) $\frac{160}{11}$ **B)** 15 **C)** $\frac{76}{5}$ **D)** $\frac{61}{4}$ **E)** 16

18 Consideramos números de tres cifras con dos iguales y una distinta. ¿Cuántos hay que sean múltiplos de 3?

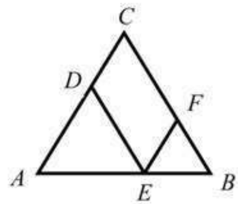
A) 63 **B)** 66 **C)** 69 **D)** 72 **E)** 75

19 Sean *a* y *b* números enteros positivos, ¿cuál de los siguientes números no puede escribirse de la forma $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$?

A) $\frac{25}{12}$ **B)** $\frac{10}{3}$ **C)** $\frac{7}{3}$ **D)** $\frac{17}{4}$ **E)** $\frac{29}{10}$

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel III)

20 Sabiendo que el perímetro del paralelogramo *CDEF* es 4, ¿cuál es el área del triángulo equilátero *ABC*?



A) 8 **B)** $\sqrt{3}$ **C)** 4 **D)** 6 **E)** $2\sqrt{3}$

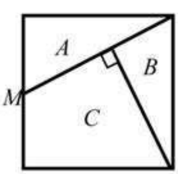
21 Luis tiene un reloj digital (que marca desde 00:00 a 23:59) que se le ha estropeado. En vez de marcar el 1 marca el 9. Por ejemplo, cuando son las 19:16 marca 99:96. ¿Qué fracción del día el reloj marca la hora incorrecta?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{5}{8}$ **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{5}{6}$ **E)** $\frac{9}{10}$

22 Para obtener series de números, Samu coge un número y una moneda. Si sale cara, duplica el número y le resta 1; si sale cruz, divide el número entre 2 y le resta 1. Si Samu ha empezado con el número 6 y luego ha tirado la moneda tres veces, ¿cuál es la probabilidad de que el número final sea entero?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{3}{8}$ **E)** $\frac{5}{8}$

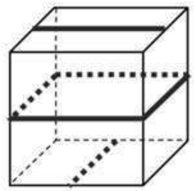
23 Hugo es un gran cocinero con mucha imaginación. Ha hecho un bizcocho cúbico de 2 dm de lado y ha cubierto sus cinco caras visibles con una capa de chocolate. Lo corta verticalmente en tres partes, como se muestra en esta vista superior, donde *M* es el punto medio del borde superior. La pieza que hemos llamado *B* tiene *y* dm^2 de chocolate. ¿Cuánto vale *y*?



A) 3 **B)** $\frac{24}{5}$ **C)** $\frac{32}{5}$ **D)** $8+\sqrt{5}$ **E)** $10+\sqrt{5}$

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel III)

24 En cada cara de un cubo dibujamos un segmento que une el punto medio de un lado con el punto medio del lado opuesto de forma aleatoria. ¿Cuál es la probabilidad de que cuatro de esas líneas rodeen el cubo?



A) $\frac{1}{8}$ **B)** $\frac{3}{16}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{3}{8}$ **E)** $\frac{1}{2}$

25 Cuatro chicos y tres chicas van al cine y se sientan juntos en la misma fila. ¿De cuántas maneras pueden hacerlo si ni dos chicas ni dos chicos pueden estar juntos, pero Pilar tiene que estar necesariamente al lado de Luis?

A) 144 **B)** 36 **C)** 24 **D)** 48 **E)** 72

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel IV)

concurso de primavera MATEMÁTICAS

XXIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 13 de febrero de 2019

NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

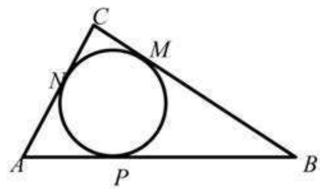
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel IV)

1 En el triángulo ABC de la figura hemos dibujado su circunferencia inscrita e indicado los puntos de tangencia M, N y P. Si $AB = 10$, $BC = 9$ y $AC = 6$, ¿cuál es el valor de AP?



A) 3 **B)** 4 **C)** 2,5
D) 3,5 **E)** 4,5

2 Si el producto de tres enteros consecutivos es múltiplo de 7, ¿cuál de los siguientes números no es necesariamente un divisor de su producto?

A) 6 **B)** 14 **C)** 21 **D)** 28 **E)** 42

3 La ecuación $x^2 - n^2 x + 2n = 0$ tiene dos soluciones diferentes. Si una de ellas es $x = 2$, calcula la otra.

A) –1 **B)** 3 **C)** –2 **D)** 1 **E)** Esta situación no puede darse

4 Esteban no quiere sentarse junto a Carlos ni junto a Belén. Javier no quiere sentarse junto a María. ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse los cinco en fila cumpliendo estas condiciones?

A) 12 **B)** 16 **C)** 28 **D)** 32 **E)** 40

5 La suma de las raíces con parte real positiva de la ecuación $z^{12} - 64 = 0$ es:

A) 2 **B)** 4 **C)** $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ **D)** $\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ **E)** $2\sqrt{2} + \sqrt{6}$

6 Se introducen tres bolas en una urna, una tiene el número 1, otra el 2 y la tercera el 3. Se extrae una bola, se anota su número, y luego se devuelve a la urna. Se repite este procedimiento dos veces más. Si la suma de los tres números anotados es 6, ¿cuál es la probabilidad de que se haya extraído la bola marcada con el número 2 en las tres ocasiones?

A) $\frac{1}{27}$ **B)** $\frac{1}{8}$ **C)** $\frac{1}{7}$ **D)** $\frac{1}{6}$ **E)** $\frac{1}{3}$

7 ¿Cuál de los siguientes números es el positivo más pequeño?

A) $10 - 3\sqrt{11}$ **B)** $3\sqrt{11} - 10$ **C)** $18 - 5\sqrt{13}$

D) $51 - 10\sqrt{26}$ **E)** $10\sqrt{26} - 51$

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel IV)

8 ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $\text{sen}^2x + 3\text{sen}x \cos x + 2\cos^2 x = 0$ en el intervalo $[0, \pi)$?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

9 En el triángulo rectángulo PQR de catetos $PR = 6$ cm y $RQ = 8$ cm tienes que marcar un punto S en la hipotenusa de tal manera que los triángulos PRS y RQS tengan igual perímetro. Y ahora viene la pregunta: ¿Qué área, en cm^2, tiene el triángulo RQS?

A) 9,6 **B)** 12 **C)** 10 **D)** 9,2 **E)** 16

10 ¿Cuál es la mayor potencia de 2 que divide a $13^4 - 11^4$?

A) 8 **B)** 16 **C)** 32 **D)** 64 **E)** 128

11 Si en estas desigualdades de fracciones $0 < \dfrac{7}{X} < \dfrac{Y}{12} < \dfrac{13}{15}$, con X e Y enteros, buscas el menor valor posible de X y el mayor de Y, ¿cuánto vale $X + Y$?

A) 22 **B)** 21 **C)** 20 **D)** 19 **E)** 18

12 Sea N el número de 79 cifras que se obtiene al escribir los enteros desde 1 hasta 44, en orden uno tras otro. Al dividir N entre 45, el resto que obtenemos es:

A) 1 **B)** 44 **C)** 9 **D)** 18 **E)** 27

13 El 20% del 30% del 40% de 50 es lo mismo que el 60% de…

A) 2 **B)** 70 **C)** 12 **D)** 7 **E)** 15

14 ¿Cuántos valores reales de x, con $0 \le x \le 100$, satisfacen la ecuación $|\text{sen}\, x| = 1$?

A) 15 **B)** 16 **C)** 25 **D)** 30 **E)** 32

15 La función f, definida sobre los naturales, verifica $f(1) = 1$, $f(2n) = 2 \cdot f(n)$ y $f(2n+1) = 4 \cdot f(n)$. El número de soluciones de la ecuación $f(n) = 16$ es…

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel IV)

16 Conociendo la fórmula de la suma de los cubos, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{(n \cdot (n+1))^2}{4}$,

te será muy sencillo calcular el valor de la suma $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + 19^3$.

A) 19900 **B)** 20400 **C)** 21200 **D)** 23600 **E)** 24400

17 En el pentágono $ABCDE$, los ángulos A, C y E son rectos. Además, $AB = 15$, $BC = 12$, $CD = 5$ y $DE = 20$. El área del pentágono es:

A) 270 **B)** 236 **C)** 240 **D)** 244 **E)** 252

18 El área de la corona circular comprendida entre dos circunferencias concéntricas es $\dfrac{9\pi}{2}$. ¿Cuál es la longitud de una cuerda de la circunferencia mayor que sea tangente a la menor?

A) $2\sqrt{3}$ **B)** $2\sqrt{2}$ **C)** $3\sqrt{2}$ **D)** $3\sqrt{3}$ **E)** $4\sqrt{2}$

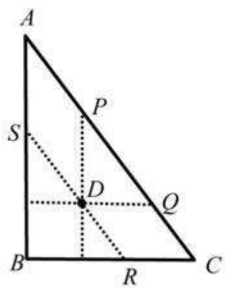
19 En cada vértice de un pentágono escribimos un número entero, de modo que la suma de los números de dos vértices contiguos no sea un múltiplo de tres, y tampoco lo sea la suma de los números de tres vértices consecutivos. De los cinco números escritos, ¿cuántos son, necesariamente, múltiplos de 3?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** Ninguno

20 En un torneo de Grand Slam gana el partido el primer jugador que gana 3 sets. Si dos jugadores tienen la misma probabilidad de ganar un set, ¿cuál es la probabilidad de que el partido acabe en el cuarto set?

A) $\dfrac{3}{8}$ **B)** $\dfrac{1}{2}$ **C)** $\dfrac{3}{5}$ **D)** $\dfrac{1}{4}$ **E)** $\dfrac{5}{16}$

21 En el interior del triángulo rectángulo ABC de catetos 3 y 4 se elige un punto D que dista 1 de cada uno de los catetos. Por D se trazan paralelas a los tres lados que cortan a los lados en los puntos señalados en la figura. Entonces la suma de los segmentos $PQ + RS$ es…

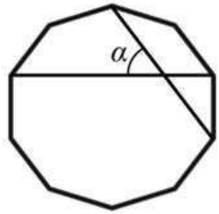


A) 5 **B)** 5,2 **C)** 5,4

D) $\sqrt{30}$ **E)** 6

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel IV)

22 En el decágono regular de la figura, ¿cuánto mide el ángulo α?



A) 45º **B)** 48º **C)** 54º
D) 60º **E)** 72º

23 En cierto triángulo, una bisectriz de longitud 7 es perpendicular a una mediana de longitud 8. ¿Cuál es el área del triángulo?

A) 35 **B)** 36 **C)** 42 **D)** 48 **E)** 28

24 El número complejo $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ es una de las soluciones de la ecuación $x^4 + x^2 + 1 = 0$. ¿Cuánto vale la suma

$z^{12} + z^{11} + z^{10} + z^9 + z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$?

A) 0 **B)** 1 **C)** -1 **D)** i **E)** $-i$

25 Al sumar los valores de los ángulos interiores de un polígono, Don Retorcido ha obtenido el valor 2019. Pero anda algo despistado, y ha sumado dos veces uno de los ángulos. ¿Cuál es la medida del ángulo duplicado?

A) 30º **B)** 39º **C)** 63º **D)** 115º **E)** 140º

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel I)

concurso de primavera MATEMATICAS

XXIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 27 de abril de 2019

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu número de identificación, tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 punto***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

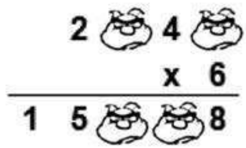
EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM
ORGANIZA
Asociación Matemática *Concurso de Primavera*
COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
McGraw-Hill Eduation
Smartick

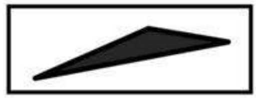
XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel I)

1 ¡Aquí está Comenúmeros fiel a su cita con nosotros! ¿Cuál es la suma de los cuatro números que se ha comido de esta multiplicación? ¡Ah!, me olvidaba, a Comenúmeros le sientan fatal los ochos y nunca se los come.



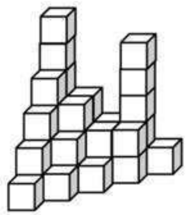
A) 27 **B)** 22 **C)** 30 **D)** 15 **E)** 23

2 Estas cinco piezas pueden colocarse para formar cuatro de las cinco figuras que ves abajo. ¿Cuál de ellas es la que no se puede formar?



A) Se pueden todas **B)** Solo se puede la 1ª **C)** No se pueden la 3ª y la 5ª
D) Se pueden todas menos la 5ª **E)** No se pueden la 2ª y la 5ª

3 Miguel ha formado esta construcción apilando cubos iguales uno encima de otro. ¿Cuántos cubos ha utilizado?



A) 35 **B)** 36 **C)** 37

D)38 **E)** 39

4 ¿Cuántos números de tres cifras tienen dos iguales y una distinta?

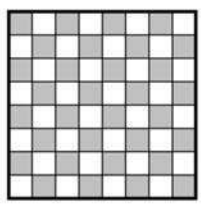
A) 201 **B)** 124 **C)** 273 **D)** 243 **E)** 219

5 En una bolsa hay 100 bolas numeradas del 1 al 100. Saco una al azar y miro el número. ¿Cuál de estos sucesos es más probable?

A) Que sea el 5 **B)** Que la suma de sus cifras sea 5 **C)** Que sea menor que 5

D) Que sea múltiplo de 5 **E)** Que alguna de sus cifras sea un 5

6 En un tablero de ajedrez, ¿cuál es el mayor número de reyes que podemos colocar sin que se amenacen, es decir, que estén situados en casillas que no se toquen ni siquiera por las esquinas?



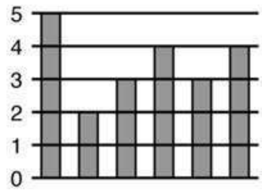
A) 12 **B)** 14 **C)** 16 **D)** 18 **E)** 20

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel I)

7 Julián está haciendo un bizcocho que tiene que estar una hora y tres cuartos en el horno. Si lo mete en el horno a las 11:55, ¿a qué hora debe sacarlo?

A) A las 13:00 **B)** A las 13:40 **C)** A las 13:20
D) A las 13:10 **E)** A las 13:30

8 En este gráfico Julia anotó los puntos de sus últimos seis partidos de baloncesto. ¿Qué media alcanzó?



A) 4 **B)** 2,75 **C)** 3,5 **D)** 4,2 **E)** 3

9 Juan hace colgantes. Los que hace con dos cuentas blancas y una negra los vende a 5 euros. Los que hace con dos negras y una blanca, los vende a 6 euros. Si solo le quedan 6 cuentas negras y 8 blancas y quiere ganar la mayor cantidad de dinero posible, ¿cuántos euros, como máximo, puede obtener vendiendo sus colgantes?

A) 18 **B)** 20 **C)** 21 **D)** 22 **E)** 23

10 La niña Centésima no para de calcular ni en la cama:
1 x **2** = 2; 2 x **3** = 6; 6 x **4** = 24; 24 x **5** = 120; 120 x **6** = 720;
720 x **7** = 5040; 5040 x **8** = 40 320 …

Por fin se quedó dormida cuando multiplicó por 38. ¿En cuántos ceros termina el resultado de esa multiplicación?

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

11
– Don Retorcido, ¿cuántos años tiene doña Tortu?
– Cuando se conocieron, hace veinte años, doña Tortu tenía el triple de la edad de Comenúmeros y dentro de 30, cuando cumplan 50 años de amistad, solo tendrá el doble.

¡Dime tú, niña Centésima, cuántos años tiene hoy doña Tortu!

A) 170 **B)** 190 **C)** 180 **D)** 140 **E)** 160

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel I)

12 El Lobo Feroz va a 12 km/h mientras que Caperucita va a 4 km/h. Saliendo a la vez desde la entrada del bosque, el Lobo llegó media hora antes a la casa de la abuela y se zampó todo lo que se le puso por delante. ¿Cuántos kilómetros hay desde la entrada del bosque a la casa de la abuela?

A) 4 **B)** 8 **C)** 6 **D)** 10 **E)** 3

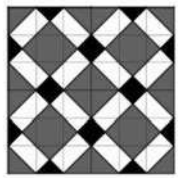
13 Si vas a hacer paella recuerda esta máxima de las abuelas: "dos puñados de arroz por persona y uno de regalo para la cazuela". He calculado que en medio puñado de arroz hay 7 montoncitos de unos 100 granos cada uno. Según mis cálculos y siguiendo la receta de la abuela, ¿qué número aproxima mejor los granos que tendrá una paella para 8 personas?

A) 15 000 **B)** 10 000 **C)** 30 000 **D)** 25 000 **E)** 20 000

14 Mariquilla ha diseñado este bonito azulejo en blanco, gris y negro. ¿Qué fracción del mosaico es gris?

A) $\frac{5}{12}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{3}{4}$

D) $\frac{9}{16}$ **E)** $\frac{4}{9}$



15 En las fiestas de San Isidro 4 viajes en tiovivo cuestan lo mismo que 15 barquillos, y 48 castañas asadas cuestan lo mismo que 10 barquillos. ¿Cuántas castañas asadas puedes comprar por el precio de un viaje en tiovivo?

A) 32 **B)** 15 **C)** 21 **D)** 16 **E)** 18

16 Voy a cambiar 164 euros por monedas de 20 céntimos y de 2 céntimos. Si me dan 725 monedas de 20 céntimos, ¿cuántas me deben dar de 2 céntimos?

A) 1025 **B)** 855 **C)** 1900 **D)** 1258 **E)** 950

17 Este conocido logo está hecho con tres paralelogramos iguales. Si el perímetro del hexágono exterior es 75 cm y el del triángulo interior es 21 cm, ¿cuántos centímetros mide el lado largo del paralelogramo?

A) 16 **B)** 14 **C)** 20 **D)** 9

E) 12,5

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel I)

18 La cuarta parte de la tercera parte del doble de la quinta parte del producto de 120 por 6 es…

A) 384 **B)** 24 **C)** 216 **D)** 12 **E)** 72

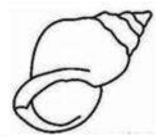
19 Este año en Torrejón van a utilizar motivos geométricos para iluminar las calles en Navidad. El diseñador ha comenzado formando un triángulo con tres luces led en los vértices. De cada vértice del triángulo sale un cuadrado con luces en los vértices y de cada vértice libre de los cuadrados un pentágono. El diseñador quiere ahora continuar poniendo hexágonos en los vértices libres de los pentágonos. ¿Cuántas luces necesita en total para culminar su obra?

A) 114 **B)** 325 **C)** 276 **D)** 360 **E)** 257

20 Mi teléfono está loco. Cuando pulso una tecla con un número par marca uno más. Así, si pulso el 4 marca el 5. Cuando pulso un número impar, lo multiplica por 4 y marca la cifra de las unidades del resultado. Por ejemplo, si pulso el 3 marca el 2. ¿Qué números debo pulsar si quiero que marque el 016?

A) 127 **B)** 045 **C)** 509 **D)** 547 **E)** 925

21 Tengo 45 caracolas, 27 piedras preciosas y 36 monedas de oro y quiero repartir todo en cofres con el mismo contenido. Si hago la mayor cantidad de cofres posibles, ¿cuántos objetos habrá en cada uno?

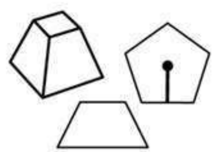


A) 10 **B)** 15 **C)** 9 **D)** 12 **E)** 3

22 ¿Sabes por qué a Comenúmeros le sientan mal los ochos? Un día se comió todas las cifras 8 que hay del 1 al 288 como si fueran rosquillas. ¿Cuántos ochos se comió el goloso?

A) 58 **B)** 57 **C)** 48 **D)** 60 **E)** 55

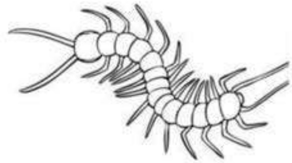
23 La mitad de los niños de mi clase sabe qué es una pirámide truncada, tres cuartas partes saben qué es un trapecio isósceles y uno de cada tres sabe qué es la apotema de un polígono regular. Si en clase somos 24 y todos sabemos alguna de estas tres cosas, ¿cuántos como máximo saben las tres?



A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel I)

24 En el terrario de bichos peligrosos hay escolopendras, arañas y avispas. En total hay 18 bichos que tienen entre todos 196 patas. Si hay el doble de arañas que de escolopendras, ¿cuántas avispas hay? Por si no eres muy de bichos, te diré que una escolopendra tiene 46 patas, las arañas tienen 8 y las avispas 6.



A) 6 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 15

25 Y para terminar Don Retorcido pregunta: ¿cuál de estos cinco números es múltiplo de 6, pero no lo es de 9, es divisible entre 7 pero no lo es entre 4?

A) 696 **B)** 666 **C)** 996 **D)** 966 **E)** 999

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel II)

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

XXIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 27 de abril de 2019

NIVEL II (1° y 2° de E.S.O.)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu número de identificación, tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. **Presta mucha atención al formato de los números.**

IMPORTANTE: Comprueba que el número Mod. En tu hoja de respuestas es 2.

No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

LEE ATENTAMENTE CÓMO DEBES MARCAR LAS OPCIONES EN LA HOJA DE RESPUESTAS Y QUÉ HACER SI TE EQUIVOCAS.

Te sugerimos que vayas marcando tus soluciones en la hoja de la prueba y cuando tengas cuatro o cinco las pases todas juntas a la hoja de respuestas.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

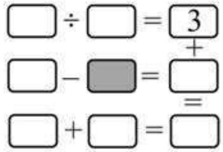
Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
MCGraw-Hill Education
Smartick

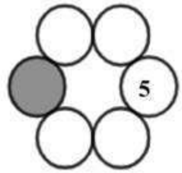
XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel II)

1 Hemos colocado los números del 1 al 9 en los recuadros para que se cumplan las cuatro igualdades que hay. ¿Qué número ocupa la casilla central sombreada?



A) 4 **B)** 5 **C)** 1 **D)** 7 **E)** 8

2 Colocamos los números 5, 6, 7, 8, 9 y 10 en los círculos de forma que la suma de los números de dos círculos que se tocan sea siempre primo. Si colocamos el 5 a la derecha, ¿qué número irá en el círculo gris?



A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

3 ¿Cuántos números de cuatro cifras tienen exactamente tres cincos?

A) 40 **B)** 36 **C)** 35 **D)** 34 **E)** 32

4 Don Retorcido y la niña Centésima se han encontrado estos números {2, 3, 4, 15, 28, 35, 50} y los han ido cogiendo alternativamente de uno en uno hasta que ya no han quedado más números. La sorpresa ha sido que al multiplicar los números que han elegido cada uno les ha dado el mismo resultado. Si la niña Centésima fue la primera que eligió número, ¿cuánto suman sus números?

A) 72 **B)** 56 **C)** 65 **D)** 81 **E)** 55

5 Tres amigos van a comprar sus entradas de igual precio para el musical *Don Retorcido y sus problemas*. A Antía, por ser la primera de la cola le rebajan un 15 %, a Roger, el segundo, un 10 % y al tercero, Fernando, un 5 %. Si entre los tres han pagado 351 euros, ¿cuál era el precio original de cada entrada?

A) 130 € **B)** 100 € **C)** 120 € **D)** 167 € **E)** 117 €

6 Si los números a, b, c son enteros positivos y $\frac{33}{29} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}$, ¿cuánto vale la suma $a + b + c$?

A) 12 **B)** 4 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 9

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel II)

7 ¿Cuál de los siguientes números es mayor?

A) $2^{3^{\left(2^3\right)}}$ **B)** $\left(2^3\right)^{\left(2^3\right)}$ **C)** $\left(2^{\left(3^2\right)}\right)^3$ **D)** $2^{\left(3^2\right)^3}$ **E)** Los cuatro son iguales

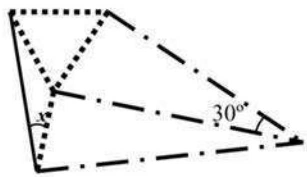
8 ¡Prepárate para un buen lío! Berta tiene cinco hijas y ningún hijo. Algunas de sus hijas tienen cinco hijas y otras no tienen ninguna. Entre hijas y nietas, Berta tiene un total de veinte y no tiene bisnietas. ¿Cuántas hijas y nietas de Berta no tienen hijas?

A) 16 **B)** 17 **C)** 18 **D)** 19 **E)** 20

9 En un torneo de fútbol participaron seis equipos, jugando todos contra todos un solo partido. Si la puntuación era de 3 puntos por victoria, 1 por empate y 0 por derrota, y entre todos los equipos sumaron 40 puntos, ¿cuántos empates hubo?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

10 En la figura, los cuatro segmentos dibujados con PUNTOS miden lo mismo y los tres segmentos PUNTO-RAYA también miden lo mismo entre sí. ¿Cuánto mide el ángulo x?

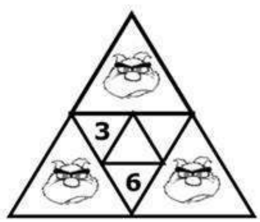


A) 18º **B)** 26º **C)** 15º
D) 24º **E)** 20º

11 El alfabeto del lenguaje SISE tiene una sola consonante (la S) y dos vocales (la E y la I). Cualquier sucesión de una o más letras es una palabra, excepto las que tienen dos o más vocales consecutivas. Por ejemplo S, SSSES, ESI y SISESI son palabras, pero SEIS no lo es. ¿Cuántas palabras de cuatro letras tiene este lenguaje?

A) 17 **B)** 16 **C)** 21 **D)** 22 **E)** 20

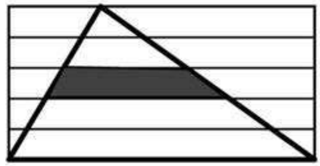
12 En la figura ves siete regiones triangulares que tenían números enteros según esta regla: cada número de cada región es la suma de los números de sus regiones vecinas. Ten en cuenta que llamamos regiones vecinas a las que comparten más de un punto. Después de todas las explicaciones, llega la pregunta: ¿cuánto suman los números de las tres regiones de Comenúmeros?



A) 15 **B)** 0 **C)** –9 **D)** 12 **E)** 6

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel II)

13 El rectángulo que ves está dividido en cinco partes iguales mediante segmentos paralelos a la base. ¿Qué fracción del triángulo ocupa el trapecio sombreado?



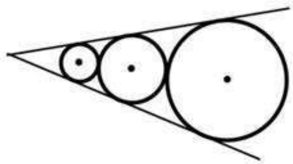
A) $\frac{1}{10}$ **B)** $\frac{1}{9}$ **C)** $\frac{3}{10}$

D) $\frac{1}{5}$ **E)** $\frac{1}{8}$

14 Si x son los números que cumplen $-5 \leq 2x-1 \leq 7$, ¿cuál es la diferencia entre el mayor valor posible de x y el menor?

A) 7 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 12 **E)** 6

15 En el dibujo ves, desde arriba, a tres amigos con gorros mexicanos atascados en una esquina. Si el radio del sombrero pequeño es de 1 dm y el del mediano es de 4 dm, ¿qué radio tiene el sombrero mexicano mayor?



A) 10 **B)** 6 **C)** 15

D) 20 **E)** 16

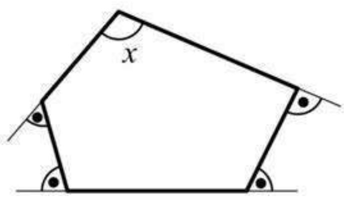
16 Si parto un rectángulo mediante un segmento paralelo a los lados menores obtengo dos rectángulos cuyos perímetros suman 84 cm. Pero si lo divido mediante un segmento paralelo a los lados mayores, los perímetros de los rectángulos obtenidos suman 96 cm. ¿Cuál es el perímetro, en cm, del rectángulo de partida?

A) 60 **B)** 72 **C)** 90 **D)** 82 **E)** 57,5

17 Si eliges tres vértices de un heptágono regular puedes formar muchos triángulos, pero, ¿cuántos de esos triángulos son isósceles?

A) 28 **B)** 12 **C)** 35 **D)** 21 **E)** 14

18 Si la suma de los cuatro ángulos marcados con un punto es de 336º, ¿cuánto mide el ángulo x?



A) 96º **B)** 201º **C)** 156º

D) 191º **E)** 168º

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel II)

19 Esta tabla nos muestra el resto de dividir cada número de la primera columna (desde el 11 hasta el 60) entre cada número de la primera fila (desde el 1 hasta el 6). ¿Cuánto suman todos los números del rectángulo sombreado?

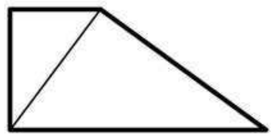
	1	2	3	4	5	6
11	**0**	**1**	**2**	**3**	**1**	**5**
12	**0**	**0**	**0**	**0**	**2**	**0**
13	**0**	**1**	**1**	**1**	**3**	**1**
14	**0**	**0**	**2**	**2**	**4**	**2**
15	**0**	**1**	**0**	**3**	**0**	**3**
...	...	...	...	...	...	...
60	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

A) 400 **B)** 375 **C)** 360
D) 520 **E)** 380

20 En el último partido de baloncesto, Irene lanzó solo dobles (que valen dos puntos) y triples (que valen tres). Solo tuvo éxito en el 20% de los triples y en el 30% de los dobles. Si en total tiró 30 veces, ¿cuántos puntos marcó?

A) 12 **B)** 18 **C)** 24 **D)** 30 **E)** 36

21 El trapecio rectángulo de la figura está formado por dos triángulos rectángulos semejantes. Los catetos del pequeño miden 3 cm y 4 cm. ¿Cuál es, en cm, el perímetro del trapecio?



A) 22 **B)** 21 **C)** 20
D) 23 **E)** 24

22 La señora Rosalía tiene una colección de 480 rosas. Acaba de comprar 60 rosas blancas y su sobrina Rosalinda le dice "¿Te has fijado?, con estas 60 rosas nuevas el porcentaje de rosas blancas se ha duplicado." ¿Cuántas rosas blancas tiene…? No, cambiamos la pregunta que si no es muy fácil, ¿cuánto suman las cifras del número que indica la cantidad de rosas blancas que tiene ahora Rosalía?

A) 12 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 13 **E)** 14

23 El menor número múltiplo de 19 que acaba en 17 comienza por…

A) 4 **B)** 3 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 1

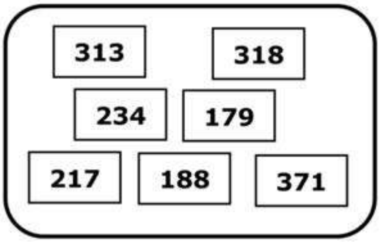
24 Al sumar el mismo número al numerador y denominador de la fracción $\frac{3}{7}$ obtenemos la fracción $\frac{3}{5}$. ¿Qué número hemos sumado?

A) 2 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 10 **E)** 15

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel II)

25 Don Retorcido tiene una caja con sus siete números favoritos y les dice a sus amigos que se los repartan. Joaquín, sin mirar, coge tres, María coge dos, Merche uno y el que sobra se lo queda don Retorcido. Cuando Joaquín mira sus números le dice a María "estoy seguro de que la suma de tus dos números es par". ¿Cuánto suman los tres números de Joaquín?

A) 822 **B)** 685 **C)** 740 **D)** 776 **E)** 764



XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel III)

XXIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 27 de abril de 2019

NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu número de identificación, tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. **Presta mucha atención al formato de los números.**

IMPORTANTE: Comprueba que el número Mod. En tu hoja de respuestas es 3.

No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

LEE ATENTAMENTE CÓMO DEBES MARCAR LAS OPCIONES EN LA HOJA DE RESPUESTAS Y QUÉ HACER SI TE EQUIVOCAS.

Te sugerimos que vayas marcando tus soluciones en la hoja de la prueba y cuando tengas cuatro o cinco las pases todas juntas a la hoja de respuestas.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
MCGraw-Hill Education
Smartick

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel III)

1 Si $a = 1 + b$, ¿cuánto vale $\dfrac{1+2b}{a+b}$?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** $\dfrac{2}{3}$ **E)** $\dfrac{1}{2}$

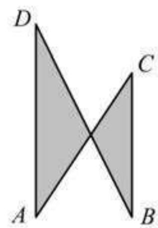
2 Tres amigas comparan la capacidad de sus piscinas. La de Sara tiene un 15% más que la de Cati y la de Julia tiene un 25% más que la de Cati. ¿Cuál de estas afirmaciones es correcta?

A) La de Julia tiene un 60% más que la de Sara
B) La de Sara tiene un 60% menos que la de Julia
C) La de Sara tiene un 8% menos que la de Julia
D) La de Julia tiene un 10% más que la de Sara
E) La de Sara tiene un 12% menos que la de Julia

3 Sean $-4 \le a \le -2$, $2 \le b \le 4$, ¿cuál es el máximo valor que puede tomar la expresión $\dfrac{a+b}{a}$?

A) -1 **B)** $-\dfrac{1}{2}$ **C)** 0 **D)** $\dfrac{1}{2}$ **E)** 1

4 Para mi disfraz de este año, he querido diseñar una pajarita asimétrica. Teniendo en cuenta que los ángulos DAB y ABC son rectos, y que $AB = 4$, $AD = 8$, $BC = 6$, ¿cuál es la diferencia entre las áreas de las dos partes de la pajarita?



A) 2 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 8

5 Tres amigos, África, Blanca y Carlos hacen el mismo recorrido en bicicleta. África va todo el rato a 20 km/h, Blanca recorre la primera mitad a 10 km/h y la segunda mitad a 30 km/h. Carlos hace tres cuartos del recorrido a 30 km/h, pero le da un tirón y el cuarto que le queda lo hace a 5 km/h. ¿Cuál de ellos tarda menos tiempo en hacer el recorrido?

A) África **B)** Blanca **C)** Carlos
D) Los tres tardan lo mismo **E)** Falta saber la distancia recorrida

6 Si $(x+2)\cdot(y+2) = 60$ y $(x+3)\cdot(y+3) = 40$, ¿cuál es el valor de $(x+5)\cdot(y+5)$?

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel III)

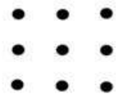
7 En la papelería se venden ocho gomas de borrar por un euro, un rotulador cuesta un euro y una agenda 10 euros. He comprado en total 100 artículos entre gomas, rotuladores y agendas y he pagado 100 euros. ¿Cuántos rotuladores he comprado?

A) 14 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 21 **E)** 24

8 En el cajón de mi abuela he encontrado una receta para hacer un bizcocho para 8 personas. Los ingredientes necesarios son: 1 yogur, 3 huevos, 3 tazas de harina, 2 tazas de azúcar, 1/2 taza de aceite y 2 cucharaditas de levadura. Si en casa tengo 4 yogures, 5 huevos, 6 tazas de harina, 3 tazas de azúcar, 3/4 tazas de aceite y 5 cucharaditas de levadura. ¿Cuál es el máximo número de amigos que podemos merendar bizcocho comiendo todos una ración?

A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

9 Elegimos tres puntos al azar de esta cuadrícula. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres puntos elegidos estén alineados?

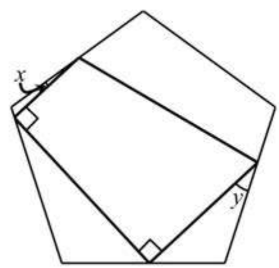


A) $\frac{1}{21}$ **B)** $\frac{2}{21}$ **C)** $\frac{1}{7}$ **D)** $\frac{2}{7}$ **E)** $\frac{1}{14}$

10 Un trapecio rectángulo tiene sus vértices en cuatro lados de un pentágono regular como ves en la figura, en la que hemos marcado los ángulos x e y.
¿Cuánto vale $x + y$?

A) 30º **B)** 54º **C)** 36º

D) 45º **E)** 27º

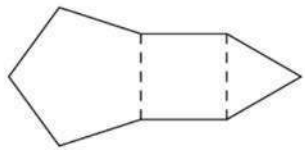


11 ¿Cuál es el producto de todas las soluciones reales de la ecuación $(x^2-2)^{(3x^2+7x-6)}-1=0$?

A) – 3 **B)** 2 **C)** –2 **D)** – 6 **E)** $-\frac{27}{2}$

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel III)

12 Vamos a realizar una construcción con polígonos regulares. Empezamos colocando un cuadrado sobre un lado de un triángulo, luego colocamos un pentágono sobre un lado del cuadrado sin que las figuras se superpongan, así sucesivamente hasta colocar un decágono. ¿Cuántos lados tendrá el polígono resultante?



A) 39 **B)** 38 **C)** 41 **D)** 42 **E)** 43

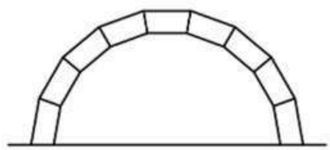
13 En una liga de fútbol participan 20 equipos. Todos juegan contra todos dos veces (una en casa y otra fuera). Si la suma de las puntuaciones de todos los equipos fue de 1005, ¿cuántos empates hubo? Recuerda: Una victoria son 3 puntos y un empate es 1 punto.

A) 113 **B)** 121 **C)** 135 **D)** 141 **E)** 150

14 Ana dice: "Lo hizo Berto". Berto dice: "Ana miente". Cris dice: "Lo hizo Dani". Dani dice: "Lo hizo Ana". Eva dice: "Cris miente". Sabemos que exactamente dos de las afirmaciones son falsas y que solo una de esas cinco personas lo hizo. ¿Quién lo hizo?

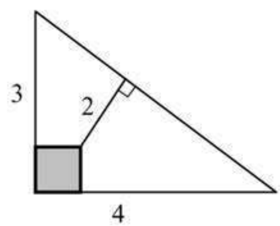
A) Ana **B)** Berto **C)** Cris **D)** Dani **E)** Eva

15 A Lucía le gustan mucho las manualidades y se propone construir un arco con trapecios isósceles iguales como muestra la figura. Si quiere construir el arco con nueve de estos trapecios, ¿cuántos grados ha de medir el ángulo interior más grande del trapecio?



A) 100º **B)** 102º **C)** 104º **D)** 108º **E)** 110º

16 En la esquina de un triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 hemos colocado un pequeño cuadrado coloreado de gris. Con los datos que aporta el dibujo, ¿qué área ocupa el cuadradito gris?



A) $\frac{1}{16}$ **B)** $\frac{9}{16}$ **C)** $\frac{1}{9}$

D) 1 **E)** $\frac{4}{49}$

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel III)

17 Julián lanza al aire una moneda dos veces y Lucía la lanza tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de que obtengan el mismo número de caras?

A) $\frac{7}{32}$ **B)** $\frac{5}{16}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{3}{16}$ **E)** $\frac{5}{32}$

18 En una convención de mellizos y trillizos hay 9 parejas de mellizos y 6 tríos de trillizos. Cada mellizo le da la mano a todos los mellizos menos a su mellizo y a la mitad de los trillizos. Cada trillizo le da la mano a todos los trillizos menos a sus trillizos y a la mitad de los mellizos. ¿Cuántos apretones de manos se dieron en total?

A) 324 **B)** 441 **C)** 630 **D)** 648 **E)** 882

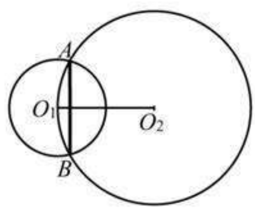
19 Si a y b son números enteros positivos, ¿cuál es la suma de todos los valores posibles de a que son solución de la ecuación $5a - 9b^2 = ab$?

A) 12 **B)** 16 **C)** 20 **D)** 144 **E)** 156

20 Tenemos dos circunferencias de radios 2 y 1, de modo que la circunferencia de radio 2 pasa por el centro de la circunferencia de radio 1. ¿Cuál es la distancia entre los dos puntos en los cuales se cortan las dos circunferencias?

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B)** $\sqrt{3}$ **C)** $\frac{\sqrt{15}}{2}$

D) $2\sqrt{3}$ **E)** 2



21 ¿Cuánto vale la suma de todos los enteros n para los que $n^2 + 6n + 24$ es un cuadrado perfecto?

A) -12 **B)** -6 **C)** 6 **D)** -8 **E)** 8

22 ¿Cuál es el menor número factorial que es divisible por 2^{100}?

Recuerda: el factorial de n es $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$.

A) 99! **B)** 100! **C)** 101! **D)** 102! **E)** 104!

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel III)

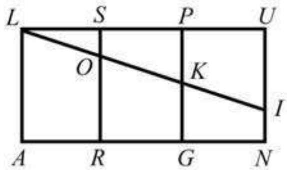
23 El frutero de mi barrio apila las naranjas de la siguiente forma: Sobre una base rectangular de 5 x 8 naranjas va colocando naranjas de manera que las naranjas del piso superior se apoyan en el hueco que queda entre las cuatro naranjas de abajo hasta coronar con un piso que tiene una única fila de naranjas. ¿Cuántas naranjas tienen las pirámides del frutero?

A) 100 **B)**134 **C)** 98 **D)**101 **E)** 96

24 Un número de seis cifras contiene los dígitos 0, 1, 2, 3, 4 y 5. ¿Cuál es la probabilidad de que el número sea múltiplo de 5?

A) $\frac{9}{50}$ **B)** $\frac{2}{5}$ **C)** $\frac{12}{25}$ **D)** $\frac{3}{5}$ **E)** $\frac{9}{25}$

25 Dividimos el rectángulo *LUNA* en tres rectángulos idénticos. Sabiendo que el área de *PUIK* es el doble del área de *KING*, ¿cuál es el cociente entre el área de *SOL* y el área de *LUNA*?



A) $\frac{2}{45}$ **B)** $\frac{1}{18}$ **C)** $\frac{1}{27}$ **D)** $\frac{1}{30}$ **E)** $\frac{4}{81}$

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel IV)

XXIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 27 de abril de 2019

NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu número de identificación, tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. **Presta mucha atención al formato de los números.**

IMPORTANTE: Comprueba que el número Mod. En tu hoja de respuestas es 4.

No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

LEE ATENTAMENTE CÓMO DEBES MARCAR LAS OPCIONES EN LA HOJA DE RESPUESTAS Y QUÉ HACER SI TE EQUIVOCAS.

Te sugerimos que vayas marcando tus soluciones en la hoja de la prueba y cuando tengas cuatro o cinco las pases todas juntas a la hoja de respuestas.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
MCGraw-Hill Education
Smartick

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel IV)

1 Si $3^a = 81^{b+2}$ y $125^b = 5^{a-3}$, ¿cuánto vale $a \cdot b$?

A) 60 **B)** 15 **C)** -30 **D)** 24 **E)** 48

2 El área que encierra la circunferencia que pasa por los puntos $A(1, 1)$, $B(1, 7)$ y $C(9, 1)$ mide:

A) 10π **B)** 25π **C)** 16π **D)** 27π **E)** 9π

3 En una circunferencia repartimos n puntos de forma que siempre haya la misma distancia entre dos consecutivos. Dibujamos un polígono regular con vértices en algunos de estos puntos y comprobamos que tenemos tres vértices consecutivos en las posiciones 26, 2 y 8. La suma de n y el número de lados de nuestro polígono dibujado es:

A) 32 **B)** 34 **C)** 35 **D)** 36 **E)** 38

4 Agustina, Bea y César eligen cada uno un número entero, a, b y c. Agustina calcula $a + \frac{b}{c}$ y obtiene 197. Bea calcula $\frac{a}{c} + b$ y obtiene 92. César calcula $\frac{a+b}{c}$ y obtiene x.
¿Cuánto vale x?

A) 16 **B)** 17 **C)** 256 **D)** 270 **E)** 289

5 Si $f(x)$ es una función polinómica que cumple que $f(x^2+1) = x^4 + 5x^2 + 3$ para todo número real x, entonces, para todo número real x, se cumple que $f(x^2-1)$ es igual a:

A) $x^4 + 5x^2 + 1$ **B)** $x^4 + x^2 - 3$ **C)** $x^4 - 5x^2 + 1$
D) $x^4 + x^2 + 3$ **E)** $x^4 + 3x^2$

6 ¿Cuál es el valor más pequeño de x ($x > 1$) si tiene que cumplir que $\frac{1}{(\ln x)^{\ln x}} \leq \frac{1}{x^2}$?

A) $e^{\sqrt{e}}$ **B)** $e^{(e^2)}$ **C)** e^{2e} **D)** $(1+e)^e$ **E)** e^{-2e}

7 Sean a y b dos números enteros que cumplen $a + \sqrt{b} = \sqrt{14 + \sqrt{180}}$.
Calcula $a^2 + b^2$.

A) 40 **B)** 17 **C)** 29 **D)** 37 **E)** 34

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel IV)

8 En la sucesión a_1, a_2, a_3 ... se cumple que $a_1 = a$, $a_3 = b$ y que cada término después del primero es la suma del anterior y del posterior menos uno, es decir, $a_{n+1} = a_n + a_{n+2} - 1$ si $n > 1$. Calcula la suma de los 2019 primeros términos.

A) $2a+2b+2015$ **B)** $2a+2b+2016$ **C)** $2a+b+2015$

D) $a+2b+2016$ **E)** $2a+b+2016$

9 Con 300 cubos de 1 centímetro de lado construimos un prisma rectangular sólido y lo apoyamos sobre una mesa. Si sabemos que el perímetro de la base es de 14 centímetros, ¿cuál es la suma de todas las diferentes alturas posibles del prisma?

A) 80 **B)** 55 **C)** 210 **D)** 105 **E)** 75

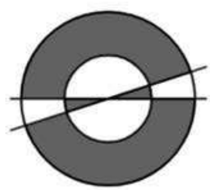
10 ¿Cuál es el resto de dividir la suma $3^0 + 3^1 + 3^2 + ... + 3^{2019}$ entre 8?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 4 **E)** 6

11 Tres amigos juegan con sus piedras. Jorge empieza con 15, Miguel con 14 y Santiago con 13. El juego consiste en que el que tiene más piedras da una piedra a cada uno de los otros amigos y deja otra piedra en un bote. El juego termina cuando uno de los tres se queda sin piedras. En ese momento, ¿cuántas piedras hay en el bote?

A) 36 **B)** 37 **C)** 38 **D)** 39 **E)** 40

12 Dos rectas pasan por el centro de dos círculos concéntricos de radios 1 y 2. Si el cociente entre el área sombreada y el área no sombreada es 7/3, ¿cuánto mide el ángulo agudo que forman las rectas?



A) 7º **B)** 14º **C)** 15º

D) 18º **E)** 21º

13 ¿Cuántos números naturales n menores que 100 hacen que $\sqrt{1+2+3+...+n}$ sea un número natural?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

14 Los cuatro vértices de un cuadrado son los puntos $A(p, q)$, $B(r, s)$, $C(t, 0)$, $D(0, u)$, siendo p, q, r, s, t, u todos positivos. Sabiendo que $p + q + r + s = 36$, ¿cuál es el valor de la suma $t + u$?

A) 9 **B)** 12 **C)** 18 **D)** 6 **E)** 24

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel IV)

15 ¿Cuál es el menor número factorial que es divisible por 2^{1000}?
[$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$]

A) 1000! **B)** 1001! **C)** 1004! **D)** 1008! **E)** 1010!

16 Si a y b son números positivos distintos de 1, ¿cuánto es

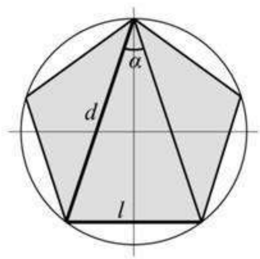
$$\frac{\log_a\left(\sqrt[3]{b^5}\right)^2 - 4\log_a\left(\frac{1}{b}\right)}{\log_a\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{b}}}\right)}\ ?$$

A) 173 **B)** 174 **C)** 175 **D)** 176 **E)** 177

17 La relación entre la diagonal del pentágono regular de la figura y su lado es $\frac{d}{l} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Por eso sabemos que el $\cos\alpha$ es igual a:

A) $\phi - 1$ **B)** $\frac{1}{\phi}$ **C)** $\frac{\phi}{2}$

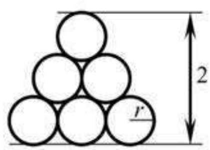
D) $\frac{\phi}{4}$ **E)** $\frac{\sqrt{5}}{4}$



18 Tres rectas paralelas cortan al eje de ordenadas en los puntos $A(0,-1)$, $B(0, 2)$, $C(0, 4)$ y al eje de abscisas en los puntos $D(d, 0)$, $E(e, 0)$, $F(f, 0)$.
Si sabemos que $d + e + f = 40$, ¿cuál es la pendiente de las rectas?

A) -8 **B)** $-\frac{1}{8}$ **C)** -4 **D)** $-\frac{1}{4}$ **E)** -1

19 Don Retorcido ha situado seis circunferencias iguales tangentes de manera triangular, tal y como se indica en la figura. Una vez hecho esto, la altura de la figura resultante mide 2. ¿Cuánto mide el radio de las circunferencias?



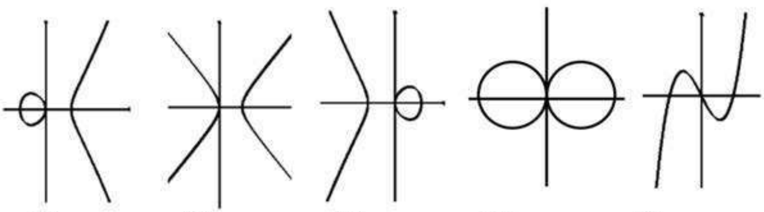
A) $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ **B)** $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ **C)** $\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel IV)

20 Marta está en un punto intermedio entre su casa y el gimnasio. Puede ir andando al gimnasio o volver a casa y coger su bici para ir al gimnasio. Sabiendo que en bici va 7 veces más rápido que andando y que haga lo que haga tardará lo mismo, ¿cuál es el cociente entre la distancia a la que está de casa y la distancia a la que está del gimnasio?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{2}{3}$ **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{4}{5}$ **E)** $\frac{5}{6}$

21 ¿Qué dibujo representa mejor la gráfica de la ecuación $y^2 = x(x^2 - 1)$?



A) **B)** **C)** **D)** **E)**

22 ¿Cuántos números de cuatro cifras tienen exactamente tres cifras iguales?

A) 400 **B)** 360 **C)** 351 **D)** 324 **E)** 320

23 Si z es un número complejo y $z^2 = 2z - 2$, entonces z^4 es…

A) -4 **B)** 4 **C)** 8 **D)** -8 **E)** 16

24 En la urna A tenemos una bola blanca y otra negra, en la urna B tenemos una bola blanca y dos negras y en la urna C tenemos una bola blanca y tres negras. Extraemos al azar una bola de la urna A y la introducimos en la B; a continuación, extraemos al azar una bola de la urna B y la introducimos en la urna C. Y por último, extraemos al azar una bola de la urna C. ¿Qué probabilidad hay de que esta última bola sea negra?

A) $\frac{13}{20}$ **B)** $\frac{27}{40}$ **C)** $\frac{7}{10}$ **D)** $\frac{29}{40}$ **E)** $\frac{3}{4}$

25 Sean a, b, c, f, g y h los números complejos cuyos afijos son los vértices de un triángulo ABC, su circuncentro F, su baricentro G y su ortocentro H, respectivamente. Entonces:

A) $a + b + c = 3h$ **B)** $2(a + b + c) = 3(f + h)$ **C)** $a + b + c = 2f + h$

D) $2(a + b + c) = 3$ **E)** $f + h = 2g$

XXIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (1ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	C	1	E	1	B	1	D
2	B	2	A	2	D	2	D
3	A	3	B	3	B	3	A
4	A	4	E	4	D	4	C
5	A	5	E	5	C	5	E
6	C	6	A	6	D	6	C
7	A	7	B	7	E	7	D
8	E	8	D	8	B	8	C
9	D	9	A	9	C	9	A
10	B	10	C	10	E	10	C
11	D	11	D	11	C	11	D
12	D	12	E	12	C	12	C
13	D	13	D	13	B	13	A
14	E	14	D	14	C	14	E
15	A	15	A	15	C	15	D
16	D	16	D	16	B	16	A
17	D	17	B	17	A	17	C
18	D	18	C	18	A	18	C
19	C	19	A	19	C	19	B
20	E	20	B	20	B	20	A
21	A	21	B	21	B	21	A
22	D	22	E	22	E	22	C
23	D	23	A	23	B	23	C
24	D	24	B	24	B	24	B
25	E	25	B	25	E	25	B

XXIII Concurso 2ª Fase

XXIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (2ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	D	1	A	1	A	1	A
2	C	2	E	2	C	2	B
3	D	3	C	3	D	3	C
4	D	4	B	4	B	4	B
5	D	5	A	5	A	5	B
6	C	6	A	6	A	6	B
7	B	7	A	7	D	7	E
8	C	8	B	8	C	8	A
9	D	9	D	9	B	9	D
10	C	10	C	10	C	10	A
11	A	11	C	11	D	11	B
12	E	12	B	12	B	12	D
13	D	13	D	13	C	13	C
14	E	14	E	14	A	14	B
15	E	15	E	15	A	15	D
16	E	16	A	16	E	16	D
17	A	17	D	17	B	17	C
18	B	18	C	18	B	18	B
19	C	19	B	19	E	19	A
20	C	20	B	20	C	20	C
21	D	21	A	21	A	21	A
22	A	22	C	22	E	22	D
23	D	23	D	23	A	23	A
24	D	24	B	24	E	24	D
25	D	25	C	25	A	25	C

XXIII Concurso de Primavera de Matemáticas

Soluciones 1ª Fase Nivel I

1. (C) Si un cuarto de mandarina tiene 2,5 gajos, una mandarina tendrá $2{,}5 \times 4 = 10$ gajos. De modo que 65 gajos serán $65 : 10 = 6{,}5$ mandarinas.

2. (B) Construiremos los pisos empezando por el de arriba. Es evidente que cuando terminemos nos sobrarán muchos cubos blancos, así que solo es necesario considerar los cubos negros. En el primer piso hay 0 cubos negros, en el segundo 1, en el tercero 2, en el cuarto 3 y así sucesivamente. Tenemos pues que sumar la sucesión de números naturales, de modo que la suma sea 50 o lo más próximo posible a 50 sin sobrepasarlo.
Tanteando un poco vemos que: $1 + 2 + 3 + \ldots + 8 + 9 = 45$.
Por tanto, al completar 10 pisos solo quedan 5 cubos negros y no se puede terminar el piso decimoprimero. La construcción más alta es de 10 pisos.

3. (A) El de Julián alcanza 2,50 m = 25 dm y el de Lucía 370 cm = 37 dm.
En consecuencia, la diferencia de distancias es $37 - 25 = 12$ dm.

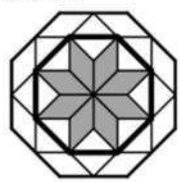
4. (A) Cada habitante de Trescatorce tiene $3 \times 3 = 9$ dedos en las manos y $14 \times 14 = 196$ dedos en los pies, luego un habitante de Trescatorce tiene $9 + 196 = 205$ dedos. Tres habitantes de Trescatorce tendrán pues $3 \times 205 = 615$ dedos. Por su parte, los 6 terrícolas tenemos $6 \times 20 = 120$ dedos.
Luego, en la fiesta hay $615 + 120 = 735$ dedos.

5. (A) En el concierto hay $19\,987 \times 205 = 4\,097\,335$ dedos. Claramente, el número que mejor los aproxima es 4 000 000.

6. (C) Puesto que las cantidades deben ser proporcionales empleamos la regla de tres. Si a 39 dientes de ajo le corresponden 51 patas de araña a 26 dientes de ajo le corresponderán x patas de araña de donde $x = \dfrac{26\times 51}{39} = 34$.

7. (A) Dado que $100 = 24 \times 4 + 4$, tenemos que 100 h son igual a 4 días más cuatro horas. Luego el reloj tiene que darnos las $11 + 4 = 15$ h, esto es, las 3 de la tarde.

8. (E) El octógono interior se compone de 8 triángulos y 8 rombos. El área que falta para completar el octógono exterior se compone también de 8 triángulos y 8 rombos. Por tanto, el área del octógono interior es de $48 : 2 = 24$ cm^2.



XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel I)

9. (D) El mínimo común múltiplo de 6, 10 y 15 es 30. Por lo tanto dentro de 30 días volveré a comer mi menú favorito.

10.(B)

$$\begin{array}{rrr} & \heartsuit & \clubsuit \\ & \times & 7 \\ \hline 4 & \clubsuit & \clubsuit \end{array}$$

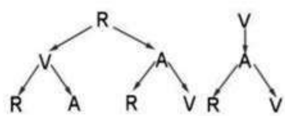
Como la cifra de las unidades del producto $\clubsuit \times 7$ es $\clubsuit$, Necesariamente $\clubsuit$ es 0 o 5. Descartamos cero pues implica que $\heartsuit$ sea igual a cero. Tenemos pues:

$$\begin{array}{rrr} & \heartsuit & 5 \\ & \times & 7 \\ \hline 4 & 5 & 5 \end{array}$$

De donde $\heartsuit = 6$ ´ya que $7 \times 6 + 3 = 45$. Por tanto, $\clubsuit + \heartsuit = 5 + 6 = 11$.

11.(D) Se puede ver que A), B), C) y E) caben en alguno de los huecos recortados. Por lo tanto, admitiendo que uno de los trozos no cabe en ningún hueco, D) es la solución. No obstante, podemos comprobar que no se puede encajar D) en ninguno de los huecos.

12.(D) Una forma segura de contar todas las formas de colorear, es hacerlo, por ejemplo, de arriba abajo y representar las posibilidades en forma de árbol. Sí comenzamos por los dos colores posibles en el vértice superior y continuamos de esa manera hasta llegar a la base del triángulo, tendremos representadas todas las posibilidades de colorear. En la figura quedan claras las 6 posibles formas.



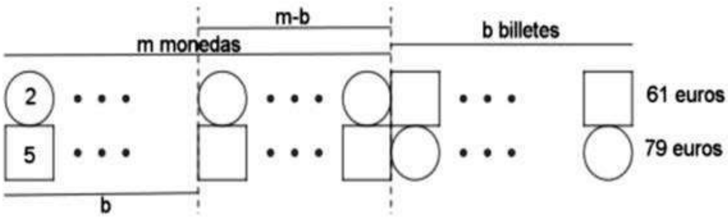
13.(D) El barco recorre los 4,5 km en media hora más 15 minutos, es decir en tres cuartos de hora. En un cuarto de hora recorre $4{,}5 : 3 = 1{,}5$ km y en una hora, que son cuatro cuartos, recorrerá $1{,}5 \times 4 = 6$ km.

14.(E) Como en la estrofa se repite 2 veces la letra i, ha cantado dicha estrofa $348 : 2 = 174$ veces. Dado que en la estrofa se repite 6 veces la letra a, ha pronunciado $174 \times 6 = 1044$ veces la letra a. La suma de sus cifras es 9.

15.(A) Jesús va a una velocidad de $\frac{4000}{10} = 400$m/minuto. Por lo que en 4 minutos recorrerá $400 \times 4 = 1600$ m.

16.(D) La ballena jorobada, en 50 años recorre aproximadamente 50 × 17000 = 850000 km que son 850 000 000 m. Esto descarta inmediatamente todas las soluciones a excepción de la "D) 800 millones".

17.(D) El hecho de que haya más euros después del intercambio indica que hay más monedas que billetes. Esto nos permite hacer un esquema como el de la figura.



La figura habla por sí misma y nos dice que el número de monedas, m , más el número de billetes, b , multiplicado por (5 + 2) es igual a (61 + 79), lo que lleva a: $m+b=\frac{140}{7}=20.$ Igualmente es fácil de comprender que la diferencia del número de monedas menos el número de billetes multiplicada por (5 – 2) es igual a (79 – 61), lo que implica: $m-b=\frac{18}{3}=6.$ Conocida la suma y la diferencia de m y b, es inmediato que $2 \times m = 20 + 6 = 26$ y de aquí: $m = 13$.

18.(D) Representando Manzana, Flor, Abrazo y Bombón por sus iniciales respectivas, el enunciado dice:

M = A + 2F (1)
M + F = A + B (2)
A = F + B (3)

Restando de la igualdad (2) la igualdad (3) se obtiene M + F – A = A – F que equivale a M + 2F = 2A que indica que una manzana más dos flores equivalen a dos abrazos. Pero de la igualdad (1) se deduce que 2M = 2A + 4F que quiere decir que dos manzanas equivalen a dos abrazos y y cuatro flores.

Pero como 2A = M + 2F resulta que 2M = M + 2F + 4F, es decir M = 6F. Por tanto, una Manzana equivale a 6 Flores.

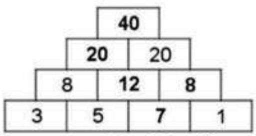
19.(C) La frase determinante es "Ana es más alta que la tenista".Que Ana sea más alta que la tenista implica que Ana no es tenista y como tampoco es la más baja, no puede ser la gimnasta. En consecuencia, Ana es nadadora.

XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel I)

20.(E) El mínimo número de montones de 5 botones es 8, lo que supone $5 \times 8 + 2 = 42$ botones. Aumentando de uno en uno el número de montones tendríamos sucesivamente: 42, 47, 52, 57, 62, 67, 72 y 77 botones.
Haciendo lo mismo con montones de 7 botones tendremos sucesivamente:
46 ($7 \times 7 - 3$), 53, 60, 67, y 74 botones. Por tanto, en el costurero hay 67 botones y si los organizo en 11 montones de 6 botones cada uno, sobrará un botón.

21.(A) En CUCA, la U se puede poner de 4 formas distintas. Una vez hecho esto, para cada posición de la U, quedan 3 posibles formas de colocar la A, y una vez colocada la A, solo queda una posibilidad para las dos letras C. Por lo tanto CUCA origina $6 \times 2 \times 1 = 12$ palabras. Por otra parte, con LINO, como las cuatro letras son distintas, se pueden formar $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ palabras. Entre las dos tendremos $12 + 24 = 36$ palabras distintas.

22.(D) La suma de los dos números a la derecha del8 tiene que ser 20, por lo que llamando x al número situado entre el 5 y el 1 tendremos: $20 = (5 + x) + (x + 1)$ de donde $14 = 2 \times x$, es decir, $x = 7$. Sabiendo esto rellenamos hacia arriba "en cascada" todos los número que faltan.



La suma de los cinco números es: $40 + 20 + 12 + 8 + 7 = 87$.

23.(D) Mientras Inés corre 50 m Guillermo corre 40. Cuando Inés corra 60 m Guillermo habrá corrido x m, por lo tanto $x = \frac{60 \times 40}{50} = 48$ m. De donde, a Guillermo, le faltarán $60 - 48 = 12$ m para llegar a la meta.

24.(D) Si nos fijamos bien, entre los 3 han clavado 3 dardos en cada zona y han sumado $36 + 56 + 58 = 150$ puntos. Dado que Inés ha clavado uno en cada zona, sumará $150 : 3 = 50$ puntos.

25.(E) Como contestó bien a 18 y mal a 3, dejó $25 - (18 + 3) = 4$ respuestas en blanco, de modo que obtuvo $18 \times 5 + 3 \times 0 + 4 \times 1 = 94$ puntos.

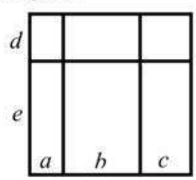
XXIII Concurso de Primavera de Matemáticas
Soluciones 1ª Fase Nivel II

1. (E) I. es verdadera. La suma de un número par con un número impar es impar. El triple de un número impar es impar y el doble de cualquier número es siempre par, así que esa suma la suma es impar. Para verlo se más rigor se pueden escribir los números impares como $2m + 1$ y $2n + 1$ y sumar el triple del primero más el doble del segundo: $3(2m + 1) + 2(2n + 1) = 6m + 3 + 4n + 2 = 2\ (3m + 1 + 2n + 1) + 1$.
II. es verdadera. Entre tres números consecutivos siempre hay un múltiplo de 3 y al menos un múltiplo de 2 y por lo que el producto será múltiplo de 6.
III. es verdadera. Basta aplicar el criterio de divisibilidad del 11: la diferencia entre la suma de los digitos que ocupan posiciones pares y los que ocupan posiciones impares es siempre 0.
IV. es verdadera. Basta aplicar el criterio de divisibilidad de 0: la suma de las cifras de todos esos números es 45 que es múltiplo de 9.

2. (A) Como bcd es múltiplo de 5, $d = 5$.
Para que cde sea múltiplo de 3 debe serlo $c + d + e = c + e + 5$. Así que $c + e$ puede valer 4 o 7 y como c solo puede ser 2 o 4, ya que abc es múltiplo de 4 la única posibilidad es que c sea 4 y e sea 3. El número $ab4$ debe ser múltiplo de 4 con a y b que solo pueden tomar los valores 1 o 2. De las dos posibilidades 124 y 214 sólo es múltiplo de 4 el 124. El número en cuestión es 12453, que es múltiplo de 7 pero no de 3, ni de 5 ni de 11 ni de 13.

3. **(B)** Calculemos cada número con cuidado:
$R = -(2 - 3) - 4 = -(-1) - 4 = 1 - 4 = -3$.
$S = 6 : (7 - 8) = 6 : (-1) = -6$.
$\mathrm{T} = -3 - (5 - 4) = -3 - 1 = -4$.
Vamos probando:
A) es falta: $R + S = -3 + (-6) = -9$ y $T + 5 = -4 + 5 = 1$
B) es verdadera: $R - S = -3 - (-6) = -3 + 6 = 3$ y $T + 7 = -4 + 7 = 3$
Aunque no es necesario seguir, vemos rápidamente que las demás son falsas porque **C**) $R \cdot T = 12$ y $2S = -12$, **D**) $R + 1 = -2$ y **E**) $R - S + T = -1$

4. (E) Ponemos nombres a los lados de los rectángulos como ves en la figura.
Tenemos que calcular $(a + b + c)$ que es igual a $(d + e)$.
Sabemos que $2(a + d) + 2(b + d) + 2(c + d) + 2(a + e) +$
$+ 2(b + e) + 2(c + e) = 420$.
Operando tenemos que
$4(a + b + c) + 6(d + e) = 4(d + e) + 6(d + e) = 10(d + e) = 420$.
Así pues, $d + e = 42$.



XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel II)

5. (E) Para saberlo debemos hacer el producto en cruz y ver si son iguales. Miremos solo las cifras de las unidades de esos productos: en **A**) un producto acaba en 2 y el otro en 4, en **B**) uno en 4 y el otro en 2, en **C**) las terminaciones son 8 y 6 mientras que en **D**) son 2 y 4. Por último, en **E**) la cifra de las unidades de ambos productos es 2 y guiándonos de la pista, ya no tenemos que hacer nada más.

6. (A) Por cada 10 divisiones hacer 12 multiplicaciones y 9 restas, es decir $10 + 12 + 9 = 31$ operaciones. Como ha hecho $124 = 31 \cdot 4$ hizo cuatro bloques de 31 operaciones, de las cuales 12 son multiplicaciones. Así pues, la niña Centésima hizo $4 \cdot 12 = 48$ multiplicaciones.

7. (B) Toca repasar las propiedades de potencias:
$20^{20} \cdot 30^{30} = (2^2 \cdot 5)^{20} \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5)^{30} = 2^{40} \cdot 5^{20} \cdot 2^{30} \cdot 3^{30} \cdot 5^{30} = 2^{70} \cdot 3^{30} \cdot 5^{50}$.
Entonces $a + b + c = 70 + 30 + 50 = 150$.

8. (D) Contemos cuántos doses y cuántos cincos habrá en ese producto:
Todos los múltiplos de 5 aportan un 5, salvo los que también son múltiplos de 25, que aportan 2. Como $100 = 5 \cdot 20$, hay 20 múltiplos de 5 y tres de ellos lo son también de 25, así que el producto tendrá en total $20 + 3 = 23$ cincos.
Los doses viene de $2 \cdot 5$, $4 \cdot 5$, $6 \cdot 5$, … hasta $20 \cdot 5$. En total hay 10 múltiplos de 2, de los cuáles 5 son múltiplos de 4, dos lo son 8 y uno de 16: $10 + 5 + 2 + 1 = 18$ doses habrá en el producto. Así pues, el número acabará en 18 ceros.

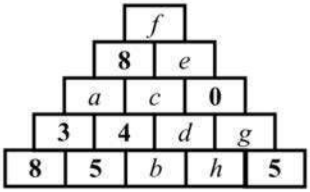
9. (A) En la etapa 1 hay un puntito y 3 líneas.
En la etapa 2 hay $1 + 3 = 4$ puntitos y $3 + 2 \cdot 3 = 9$ líneas.
En la etapa 3 hay $4 + 2 \cdot 3 = 10$ puntitos y $9 + 2^2 \cdot 3 = 21$ líneas.
En la etapa 4 habrá $10 + 2^2 \cdot 3 = 22$ puntitos y $21 + 2^3 \cdot 3 = 45$ líneas.
En la etapa 5 añadiremos $2^3 \cdot 3$ puntitos y $2^4 \cdot 3$ líneas más, así que tendremos $22 + 24 = 46$ puntitos y $45 + 48 = 93$ líneas.
Para saber cuántos habrá en la etapa 6 debemos sumar $2^4 \cdot 3$ puntitos y $2^5 \cdot 3$ líneas lo que da $46 + 48 = 94$ puntitos y $93 + 96 = 189$ líneas. En número total de puntitos y líneas es $94 + 189 = 283$.

10.(C) El volumen de cada cubo es $448 : 7 = 64$ dm^3, así el lado de cada cubo mide 4. Cada cubo de fuera tiene 5 caras visibles, así que hay que forrar $6 \cdot 5 = 30$ caras, así que necesito $30 \cdot 4^2 = 480$ dm^2 de papel.

11.(D) Si yendo a 4 km/h tarda t horas, yendo a 3 km/h tarda $t + 1/2$ horas. Como la distancia recorrida en ambos casos es la misma, debe ser $4t = 3(t + 1/2)$.
Luego $t = 3/2$. Es decir, a 4 km/h tarda una hora y media, luego recorre 6 km.

XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel II)

12.(E) De entrada vemos que $a = 7$ y $b = 9$. Ahora es fácil ver que $c = 1$. Y si $c = 1$, debe ser $d = 7$ y $e = 1$. Ahora es fácil ver que $f = 9$ y $g = 3$. Por último, $h = 8$.
La suma es $7 + 9 + 1 + 7 + 1 + 9 + 3 + 8 = 45$.



13.(D) Vamos poco a poco de abajo arriba:

$$1+\frac{2}{1+\frac{3}{1+4}}=1+\frac{2}{1+\frac{3}{5}}=1+\frac{2}{\frac{8}{5}}=1+\frac{10}{8}=\frac{18}{8}=\frac{9}{4}$$

14.(D) Un número es múltiplo de 4 si el número formado por sus dos últimas cifras lo es. Los números de dos cifras múltiplos de cuatro que podemos formar son: 24, 28, 48, 64 y 84. Por cada uno de ellos podemos formar dos números de cuatro cifras múltiplo de 4: 68**24** y 86**24**, 46**28** y 64**28**, etc. En total podemos formar $2 \cdot 6 = 12$ múltiplos de 4.

15.(A) Buscamos tres números A, B y C que cumplan que los siguientes porcentajes sean números enteros e iguales: 15% de A, 32% de B, 40% de C y $A + B + C$ menor que 300. Como calcular el 15% es lo mismo que calcular 3/20, A tiene que ser divisible entre 20 y el resultado será múltiplo de 3. Calcular el 32% es como calcular 8/25 así que B debe ser múltiplo de 25 y el resultado será múltiplo de 8 y de 3, por lo dicho sobre A. Probemos con $B = 25 \cdot 3 = 75$, que es el valor menor para B. 32% de B = 32% 75 = 24. A tendría que ser $24 \cdot 20/3 = 160$ y C será $24 \cdot 5/2 = 60$. En total tienen $160 + 75 + 60 = 295$ discos.

16.(D) N debe ser par y al multiplicarlo por 4 debe ser menor que 10, así que N = 2.
R podría ser 3 o 8, pero como N · E = R, debe ser 8. O es impar, y al multiplicarlo por 4 da un número menor que 10, así que solo puede ser 1 y A será 7. La cifra de las decenas al multiplicar T por 4 es 3 y la de las unidades es T – 3, así que T es 9. Las cifras 3, 5 y 6 serán las letras C, I y S, que suman 14, por lo que la suma buscada es: 8 + 7 + 9 + 1 + 2 + C + I + 9 + 1 + S = 37 + 14 = 51

17.(B) En el exterior hay 8 rombos blancos y para cada uno de ellos hacen falta 4 palillos, que suman 32 palillos. En el interior hay 8 rombos, pero como comparten lados, para cada uno de ellos hacen falta 3 palillos que suman 24 palillos. En total hay 32 + 24 = 56 palillos que colocados uno detrás de otro miden 5,6 metros.

XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel II)

18.(C) Si el lado del cuadrado mide C y el lado triángulo mide T, sabemos que $4C = 3T$ y por tanto $C/T = 3/4$.

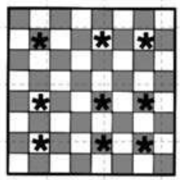
19.(A) Como $20\ 000 = 2^5 \cdot 5^4$, si los números no son múltiplos de 10, el menor debe ser $2^5 = 32$ y el mayor $5^4 = 625$. La diferencia es 593.

20. (B) $10^{100} + 100^{10} = 10^{100} + (10^2)^{10} = 10^{100} + 10^{20} = 10^{20} \cdot 10^{80} + 10^{20} = 10^{20}\,(10^{80} + 1)$.

21.(B) Tenemos que ver cuántos cuadrados perfectos hay entre 11 y 109: 4^2, 5^2, … hasta 10^2. En total a puede tomar 7 valores.

22.(E) Primero simplifiquemos:
4 bats = 1 bet; 15 bets = 2 bits, 6 bits = 5 bots, 3 bots = 1 but.
Ahora vamos hacia atrás: 4 buts = 12 bots = 14,4 bits =108 bets = 432 bats.

23.(A) En el ejemplo se ve que con 9 es suficiente.



24.(B) Todas las posibilidades son (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 5), (2, 3, 4), (2, 3, 5) (2, 4, 5) y (3, 4, 5) y las únicas en que 4 es la carta mayor son (1, 2, 4), (1, 3, 4) y (2, 3, 4). Como todas las combinaciones son igualmente probables, la probabilidad es casos favorables/casos posibles, es decir 3/ 10.

25.(B) La suma de las áreas de los triángulos blancos ADE y BFC es 3 pues, si llamamos h a la altura de uno de ellos, la altura del otro será $3 - 1 - h = 2 - h$ y la suma de sus áreas $3h/2 + 3(2 - h)/2 = 3$. El área de la zona sombreada es el área del cuadrado menos el área de los triángulos, es decir, $3^2 - 3 = 6$.

XXIII Concurso de Primavera de Matemáticas

Soluciones 1ª Fase Nivel III

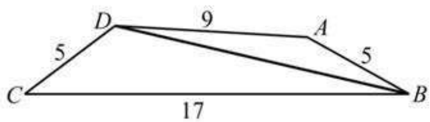
1. (B) Los puntos que distan 3 cm de P están en una circunferencia C', luego si además están en C deben ser puntos de intersección de dos circunferencias distintas y que por tanto a lo más se cortan en dos puntos.

2. (D) En cada ciclo de entradas por las cinco puertas entran 1+ 2+ 3+ 4+ 5 personas. Así que dividimos 2019 entre 15, y tenemos que después de 134 ciclos han entrado 2010 personas. La persona 2019 será la persona 9 del siguiente ciclo y entrará por la puerta cuarta.

3. (B) Si $a \cdot b > 0$, entonces a y b tienen igual signo y por tanto, como $a + b < 0$, ambos deben ser negativos.

4. (D) El producto $\dfrac{n! \cdot (n+1)!}{2}$ se puede escribir como $\dfrac{(n!)^2 \cdot (n+1)}{2}$, y así, para que la expresión sea un cuadrado perfecto lo debe ser $\dfrac{n+1}{2}$. Es decir, $n + 1$ debe ser el doble de un cuadrado. Eso ocurre con 18.

5. (C) Por ser lado de DBA, DB debe estar estrictamente entre $9 - 5$ y $9 + 5$. Por ser lado de CBD, DB debe estar (también estrictamente) entre $17 - 5$ y $17 + 5$, así que $DB = 13$.



6. (D) $1812b42a = 18 \cdot 999999 + 12 \cdot 9999 + b4 \cdot 99 + 18 + 12 + 2a$.

Así que n será múltiplo de 99 si lo es $18 + 12 + b4 + 2a = 30 + b4 + 2a$; es decir si esta última suma es 99 o 198.
Lo último por tamaño no es posible así que $b4 + 2a = 69$, y por ello $a = 5$ y $b = 4$.

7. (E) Como $a^2 = a + 1$, entonces $a^4 = (a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1 = a + 1\ 2a + 1 = 3a+ 2$, y

$$a^6 = a^4 \cdot a^2 = (3a+2)\cdot(a+1) = 3a^2 + 3a + 2a + 2 = 3(a+1) + 5a + 2 = 8a + 5 .$$

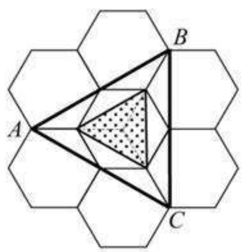
XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel III)

8. (B) La suma de sus dígitos es como mucho 27 y seis veces la suma de sus dígitos es como mucho 162. Luego habrá que buscar entre los números múltiplos de 6 menores que 162. Los candidatos son:
6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96, 102,… De aquí en adelante hasta el 162 no hay ningún número que verifique que seis veces la suma de sus cifras sea superior a 100.
De todos ellos el único que verifica la condición exigida es $54 = 6\cdot(5 + 4)$

9. (C) $z(1) + z(2) +\ldots+ z(9) = 45$; $\quad z(10) + z(11) +\ldots+ z(19) = 45 + 10$
$z(20) + z(21) +\ldots+ z(29) = 45 + 20 \quad z(30) + z(31) +\ldots+ z(39) = 45 + 30$
……………………. ………………..
$z(80) + z(81) +\ldots+ z(89) = 45 + 80 \quad z(90) + z(91) +\ldots+ z(99) = 45 + 90$
Luego $z(1) + z(2) +\ldots+ z(99) = 450 + 10 + 20 +\ldots+ 90 = 450 + 450 = 900$.

10. (E) Las sucesivas terminaciones de las potencias de 3 son 3, 9, 7, 1, 3, 9,…, es decir se repiten cada cuatro pasos, y así $3^{2017} = 3^{2016 + 1}$ acaba en 3, y $13^{2019} = 13^{2016 + 3}$ acaba en 7.
Las sucesivas terminaciones de las potencias de 7 son 7, 9, 3, 1, 7, 9, …, y por tanto $7^{2018} = 7^{2016 + 2}$ acaba en 9. De esta manera $3^{2017} \cdot 7^{2018} \cdot 13^{2019}$ termina igual que $3\cdot 9\cdot 7$, es decir en 9.

11.(C) Basta con dibujar un triángulo equilátero inscrito en el hexágono central paralelo al triángulo *ABC* para darse cuenta de que el área de *ABC* es dos veces el área del hexágono de lado 1. Así el área pedida es $2\cdot 6\cdot\frac{1^2\cdot\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$



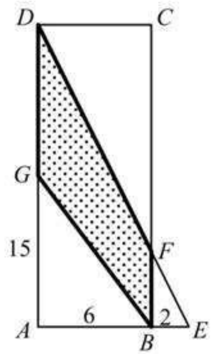
12.(C) $f(x+1) - f(x) = 4^{x+1} - 4^x = 4^x(4-1) = 3\cdot 4^x$.

13.(B) Como $1 < (x - 2)^2 < 25$ equivale a $1 < |x-2| < 5$ se tiene que x debe distar de 2 más de 1 y menos de 5. Las soluciones positivas son: 4, 5 y 6; y el resto son los números simétricos respecto a 2: 0, –1, –2. Luego la suma de las soluciones es 12.

XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel III)

14.(C) El dibujo (no a escala) es parecido al de la derecha. Denominemos por $S(Q)$ al área de un polígono Q. Entonces $S(GBFD) = (S(AED) - S(BEF)) - S(ABG)$. Pero AED y BEF son semejantes en razón de 8 a 2, y por tanto el área de BEF es 1/16 del área de AED, de donde:

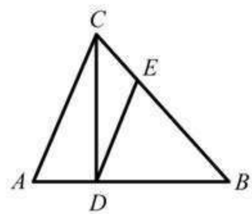
$$S(GBFD) = \frac{15}{16}S(AED) - S(ABG) = \frac{15}{16}\cdot\frac{8\cdot 30}{2} - \frac{6\cdot 15}{2} = \frac{135}{2}$$



15.(C) Como hay declaraciones contradictorias Acutángulo es culpable. De las declaraciones de Centésima y Don Retorcido se deduce que al menos uno de ellos es culpable, y ya llevaríamos al menos dos culpables, luego Centésima es culpable y Gustavo es inocente. De esta forma Don Retorcido es culpable. Queda solo en duda la calificación de Comenúmeros, pero su declaración sería cierta si él fuera inocente y en cambio si él fuera culpable haría que la declaración de Don Retorcido fuera cierta. Luego hay tres culpables y dos inocentes.

16.(B) El área de ADC es la mitad de la de DBC. El área de BDC es cuatro veces el área de DEC. Por tanto el área de ABC es:

$$4\cdot 9 + \frac{4\cdot 9}{2} = 36 + 18 = 54.$$



17.(A) Si en 500 m nadando ha hecho una media de 4 km/h ha tardado en hacerlo 0,5 : 4 h, es decir 7,5 minutos. Si ha hecho una media corriendo de 12 km/h en 6 km, ha tardado en hacerlo 30 minutos.

Le quedan 82,5 minutos para completar las 2 horas y en ese tiempo debe recorrer 20 km en bicicleta.

La velocidad media pedaleando debe ser

$$\frac{20km}{82{,}5\min} = \frac{20km}{\frac{82{,}5}{60}h} = \frac{20\cdot 60km}{82{,}5h} = \frac{1200}{82{,}5}km/h = \frac{2400}{165}km/h = \frac{160}{11}km/h$$

XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel III)

18.(A) Contaremos primero los números en los que no aparece el 0. Así, con dos unos, para que el número sea múltiplo de tres, tenemos dos cifras (4 y 7) a colocar como centenas, decenas o unidades ($2\cdot 3 = 6$), con dos doses podemos coger como tercera cifra 5 u 8 (otros seis números), y así (al no entrar el 0) lo mismo pasa con dos treses, dos cuatros, … Luego ya tenemos $9\cdot 6 = 54$ números. Ahora entra el 0. Con dos ceros hay tres números (300, 600 y 900). Con un cero (que no puede estar en primera posición) y otras dos cifras iguales tenemos 330, 660, 990, 303, 606, 909. En total tenemos $54 + 3 + 6 = 63$ números.

19.(C) Como $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}$ probamos esta descomposición con cada una de las fracciones.

$\frac{25}{12}=\frac{3^2+4^2}{3\cdot 4}=\frac{3}{4}+\frac{4}{3}$; $\frac{10}{3}=\frac{3^2+1^2}{3\cdot 1}=\frac{3}{1}+\frac{1}{3}$ $\frac{17}{4}=\frac{1^2+4^2}{1\cdot 4}=\frac{1}{4}+\frac{4}{1}$;

$\frac{29}{10}=\frac{5^2+2^2}{2\cdot 5}=\frac{5}{2}+\frac{2}{5}$

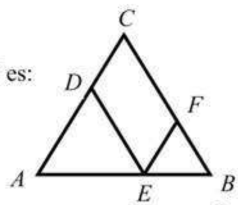
El único que parece resistirse es $\frac{7}{3}$ y ello le hace candidato a la respuesta. Justifiquemos sin embargo que es así:

Si $\frac{7}{3}=\frac{a^2+b^2}{ab}\Leftrightarrow 7ab=3a^2+3b^2\Leftrightarrow 3a^2-7ab+3b^2=0$.

Entonces $a=\frac{7b\pm\sqrt{49b^2-36b^2}}{6}$, pero si b es entero, $\frac{b\pm b\sqrt{13}}{6}=b\left(\frac{1\pm\sqrt{13}}{6}\right)$ no es racional.

20.(B) $CD+DE=CA=4/2=2$. Luego el área del triángulo ABC es:

$\frac{2^2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$



21.(B) El reloj marcará mal cualquier hora : minuto cuya escritura_ _ : _ _ contenga un 1. Contemos las lecturas horarias que no tienen 1.
En la primera posición hay 2 posibles cifras (0 y 2); para la segunda posición hay 9 cifras cuando en la primera está el 0 y 3 cifras si en la primera está el 2; para la tercera posición hay cinco cifras; y para la cuarta hay 9. En total $(9+3)\cdot 5\cdot 9=540$ lecturas horarias correctas sobre un total de $24\cdot 60=1440$ lecturas diarias. La proporción de lecturas incorrectas sobre el total de lecturas es: $1-\frac{540}{1440}=\frac{5}{8}$

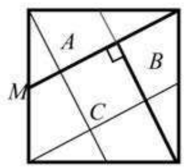
XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel III)

22.(E) Escribamos el árbol de resultados

<table>
<tr><td colspan="8">6</td></tr>
<tr><td colspan="4">11</td><td colspan="4">2</td></tr>
<tr><td colspan="2">21</td><td colspan="2">4,5</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td>41</td><td>9,5</td><td>8</td><td>1,25</td><td>5</td><td>0,5</td><td>-1</td><td>-1</td></tr>
</table>

En la fila cuarta hay cinco enteros (cinco sobre ocho).

23.(B) Nuestro trozo de tarta tiene forma de prisma triangular. Si en la cara superior de la tarta-cubo dibujamos algunas líneas auxiliares, podemos darnos cuenta que el triángulo B equivale a una quinta parte de la cara cuadrada, y por tanto su área es $\frac{1}{5}\cdot 2^2\ dm^2$. La superficie chocolateada de nuestro trozo es $\left(\frac{4}{5}+2^2\right)dm^2$.



24.(B) Fijada la posición del cubo colocado sobre una mesa y con una cara frontal a nosotros, veamos cuál es la probabilidad de que se forme un cuadrado paralelo a las bases. Para ello en cada una de las cuatro caras del cubo perpendiculares a la mesa se tiene que elegir el segmento que une puntos medios que es paralelo a la base, y eso se puede hacer de una entre 16 posibilidades. Lo mismo ocurre para formar un cuadrado paralelo a la frontal o un cuadrado paralelo a los laterales.

25.(A) Las formas de sentarse deben ser alternadas chico-chica (empezando por chico al haber uno más). Si suponemos que Luis está a la izquierda de Pilar, y sentamos a Luis en la primera butaca, después va Pilar y luego los demás chicos se pueden colocar de 3! formas y las otras chicas de 2!formas. Lo mismo ocurrirá si colocamos a Luis en la segunda butaca, en la tercera, …, en la sexta. Luego yahay $6 \cdot 3! \cdot 2!$ formas de sentarse los siete. Otras tantas se tendrán si Luis se sienta a la derecha de Pilar. Así el número de formas de sentarse es $2 \cdot 72 = 144$.

XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

XXIII Concurso de Primavera de Matemáticas

Soluciones 1ª Fase Nivel IV

1. (D) Llamando $AP = AN = x$; $BP = BM = y$; $CN = CM = z$, podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=10 \\ x+z=6 \\ y+z=9 \end{array}\right\} E_1+E_2+E_3 \Rightarrow 2x+2y+2z=25 \Rightarrow x+y+z=12{,}5$$

Como $\left.\begin{array}{r} y+z=9 \\ x+y+z=12{,}5 \end{array}\right\} \Rightarrow x=3{,}5$

2. (D) Entre tres números consecutivos hay, necesariamente un número par y un múltiplo de 3. Si además sabemos que el producto de los tres es múltiplo de 7, dicho producto debe ser necesariamente múltiplo de 6 ($2 \cdot 3$), de 14 ($2 \cdot 7$), de 21 ($3 \cdot 7$) y de 42 ($2 \cdot 3 \cdot 7$). El único de la lista del que no tiene que ser necesariamente múltiplo es 28.

3. (A) Si la ecuación $x^2 - n^2x + 2n = 0$ tiene como solución $x = 2$, se cumple que

$$4 - 2n^2 + 2n = 0 \Leftrightarrow n^2 - n - 2 = 0 \Rightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ n = -1 \end{cases}$$

Si $n = 2$, la ecuación tiene dos soluciones iguales, en contra de lo que dice el enunciado. Por tanto, $n = -1$.

4. (C) Hay dos posibilidades para Esteban. Que se coloque en un extremo o que lo haga en una posición intermedia.

Si se coloca en un extremo, a su lado pueden colocarse sólo Javier o María, y en cada caso hay 4 posibles colocaciones de los otros 3, ya que Javier y María no pueden ir juntos. Así pues, 4 posibilidades con Esteban en un extremo por 4 posibilidades de los otros 3 en cada caso, en total hacen 16 posibilidades.

Si se coloca en una posición intermedia, a sus lados deben ir Javier y María, lo que da dos posibilidades en cada caso. Los otros dos personajes se pueden colocar de dos formas distintas en cada caso, de modo que hay 4 posibilidades con Esteban en cada uno de los lugares intermedios. Como hay tres lugares intermedios, en este caso hay 12 posibilidades.

Sumando las posibilidades de los dos casos, hay un total de 28 posibles colocaciones con las condiciones de incompatibilidad entre los personajes.

XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

5. (E) $z^{12} - 64 = 0 \Rightarrow z_k = \sqrt[12]{64} = \sqrt[12]{64_0} = \left(\sqrt{2}\right)_{\frac{0+360k}{12}} = \left(\sqrt{12}\right)_{30k} \quad k = 0,1,2,3,...,11$

z_k tiene su parte real positiva para los argumentos del primer y cuarto cuadrantes. Es decir, para $k = 0,\ 1,\ 2,\ 10$ y 11. Por tanto tenemos que calcular la suma:

$S = z_0 + z_1 + z_2 + z_{10} + z_{11} = \left(\sqrt{2}\right)_0 + \left(\sqrt{2}\right)_{30} + \left(\sqrt{2}\right)_{60} + \left(\sqrt{2}\right)_{300} + \left(\sqrt{2}\right)_{330}$

El primer sumando tiene parte imaginaria 0, y de los otros cuatro las partes imaginarias se anulan dos a dos, de modo que la suma resulta:

$$S = \sqrt{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + \sqrt{6}$$

6. (C) El número de posibilidades de obtener suma de puntos igual a 6 es 7. Seis de ellas con las bolitas numeradas 1, 2 y 3 y una de ellas con las bolitas numeradas 2, 2 y 2.

La probabilidad de haber obtenido 6 con las tres bolitas iguales, por tanto, es $\frac{1}{7}$

7. (D) Los números de la lista se pueden escribir:

$10-3\sqrt{11}$	$3\sqrt{11}-10$	$18-5\sqrt{13}$	$51-10\sqrt{26}$	$10\sqrt{26}-51$
$\sqrt{100}-\sqrt{99}$	$\sqrt{99}-\sqrt{100}$	$\sqrt{324}-\sqrt{325}$	$\sqrt{2601}-\sqrt{2600}$	$\sqrt{2600}-\sqrt{2601}$

De esta lista, los dos únicos números positivos son $10-3\sqrt{11} = \sqrt{100}-\sqrt{99}$ y $51-10\sqrt{26} = \sqrt{2601}-\sqrt{2600}$.

La función $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$ es decreciente puesto que

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} < 0 \quad \forall x \in D_f$ puesto que $\sqrt{x} > \sqrt{x-1}$ y por lo tanto

$\frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$. En consecuencia $f(100) > f(2601)$ es decir,

$\sqrt{100} - \sqrt{99} = 10 - 3\sqrt{11} > \sqrt{2601} - \sqrt{2600} = 51 - 10\sqrt{26}$ t.

8. (C) Manipulamos un poco la ecuación:

$\text{sen}^2 x + 3\,\text{sen}x\cos x + 2\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow (\text{sen}x + \cos x)^2 + (\text{sen}x + \cos x)\cos x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\text{sen}x + \cos x)\,(\text{sen}x + 2\cos x) = 0 \Rightarrow$ $(\text{sen}x + \cos x) = 0$ o que $(\text{sen}x + 2\cos x) = 0$

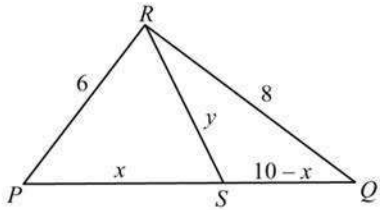
De la primera opción $\text{sen}x = -\cos x$ se deduce que $\text{tg}x = -1$.

De la segunda opción $\text{sen}x = -2\cos x$ se deduce que $\text{tg}x = -2$.

En el intervalo $[0,\ \pi)$ cada una de las ecuaciones anteriores tiene solución única, ambas en el segundo cuadrante. Por tanto, la ecuación original tiene dos soluciones en dicho intervalo.

XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

9. (A) La hipotenusa del triángulo es $PQ = \sqrt{36+64} = 10$. Como *PRS* y *RQS* tienen el mismo perímetro, se cumple que, $6 + x + y = 8 + y + 10 - x \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6$.
El triángulo *RQS* tiene base $SQ = 10 - 6 = 4$. Y como tiene la misma altura que el triángulo *PQR*, su área es $A_{SQR} = \frac{4}{10} A_{PQR} = \frac{2}{5}\left(\frac{6 \cdot 8}{2}\right) = 9{,}6$.



10.(C) Factorizamos la resta aplicando el binomio de Newton:

$13^4 - 11^4 = (12 + 1)^4 - (12 - 1)^4 =$
$= (12^4 + 4 \cdot 12^3 + 6 \cdot 12^2 + 4 \cdot 12 + 1) - (12^4 - 4 \cdot 12^3 + 6 \cdot 12^2 - 4 \cdot 12 + 1) =$
$= 8 \cdot 12^3 + 8 \cdot 12 = 8 \cdot 12 \cdot (144 + 1) = 8 \cdot 12 \cdot 145 = 2^3 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29$.
La máxima potencia de 2 que divide a $13^4 - 11^4$ es $2^5 = 32$.

11.(D) Para que $\frac{y}{12} < \frac{13}{15}$ el máximo valor posible para *y* es 10.

Para que $\frac{7}{x} < \frac{y}{12}$, con el máximo valor posible para *y*, el mínimo valor entero posible para *x* es 9. Así pues, el valor de $x + y$ con el mínimo posible de *x* y el máximo posible de *y* es 19.

12.(C) El número N = 12345….4344, está formado por 15 unos, 15 doses, 15 treses, 10 cuatros, 4 cincos, 4 seises, 4 sietes, 4 ochos, 4 nueves y 4 ceros. En total, 79 cifras.
La suma de todas ellas es $S = 15 \cdot (1 + 2 + 3) + 10 \cdot 4 + 4 \cdot (5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 270$.
Entonces N es múltiplo de 9, pero es obvio que no lo es de 5. Descontemos del número cantidades de 9 en 9 hasta encontrar un múltiplo de 5, que será también múltiplo de 45. Como N – 9 ya termina en 5, y es múltiplo de 9, también lo es de 45, y el resto al dividir N entre 45 es 9.

13.(A) Para hallar el *t* % de un número hay que multiplicar el número por $\frac{t}{100}$. Por tanto,

$$0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 50 = 0{,}6x \Rightarrow x = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 50}{0{,}6} = 0{,}04 \cdot 50 = 2$$

XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

14.(E) La ecuación $|sen\, x| = 1$ tiene las soluciones $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Nos piden las positivas que son menores que 100.

Como $\frac{100}{\pi} = 31{,}8...$ y $\frac{\pi}{2} < 0{,}8\pi$, valen todos los valores de k desde 0 hasta 31, que hacen un total de 32 soluciones

15.(D) Construimos una tabla con los valores de $f(n)$ para los primeros valores de n:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$f(n)$	1	2	4	4	8	8	16	8	16	16	32	16	32	32	64	16	32

A partir de $n = 16$, los valores de $f(n)$ aumentan, de modo que no hay más naturales cuya imagen mediante f sea 16. En total hay 5 valores.

16.(A) Con el dato $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{(n \cdot (n+1))^2}{4}$, podemos calcular

$$1^3 + 2^3 + ... + 19^3 = \frac{(19 \cdot 20)^2}{4} = 36\,100$$

Pero de esta suma tenemos que descontar

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + ... + 18^3 = 2^3\left(1^3 + 2^3 + ... + 9^3\right) = 8 \cdot \frac{(9 \cdot 10)^2}{4} = 2 \cdot 8100 = 16\,200$$

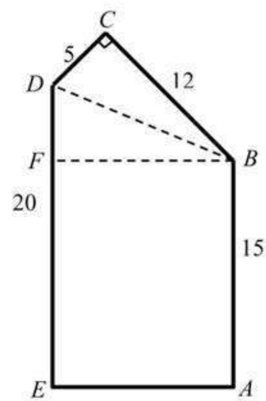
De modo que la suma pedida es: $1^3 + 3^3 + 5^3 + … + 19^3 = 36100 - 16200 = 19900$

17.(C) Aplicando el teorema de Pitágoras, obtenemos que la diagonal

$$DB = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13.$$

Trazamos la perpendicular a DE desde B y obtenemos un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 13, y uno de los catetos $20 - 15 = 5$. Por tanto, el otro cateto, que coincide con la base AE, mide $FB = AE = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.

El área del pentágono es:



$$A_{ABCDE} = A_{BCD} + A_{BDF} + A_{ABFE}$$

$$A_{ABCDE} = \frac{5 \cdot 12}{2} + \frac{5 \cdot 12}{2} + 15 \cdot 12 = 240$$

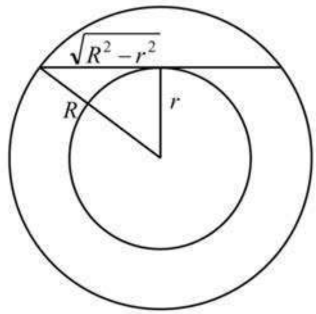
XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

18.(C) El área de la corona circular es

$$\pi\left(R^2-r^2\right)=\frac{9}{2}\pi \Rightarrow R^2-r^2=\frac{9}{2}$$

En la figura se puede apreciar que aplicando el teorema de Pitágoras, la longitud de la cuerda del círculo mayor que es tangente al círculo menor vale

$$l=2\sqrt{R^2-r^2}=2\sqrt{\frac{9}{2}}=3\sqrt{2}.$$



19.(B) Considerando las clases módulo 3 de los números que colocamos en cada vértice, estos solo pueden ser 0, 1 o 2. Las condiciones son que no sea múltiplo de 3 la suma de dos contiguos ni la suma de tres consecutivos. Por tanto, no pueden ir contiguos ni 1 y 2 ni dos 0. Además, tampoco pueden ir consecutivos tres 1, tres 2 ni 0, 1 y 2. Según esto, entonces:

❖ Si en un vértice cualquiera colocamos un 0, a sus lados pueden ir:
  - Dos 1, y entonces los otro dos deben ser un 1 y un 0.
  - Un 1 y un 2, y entonces los otros dos deben ser un 1 y un 0 respectivamente o un 0 y un 2.
  - Dos 2, y entonces los otros dos deben ser un 2 y un 0.

En todos los casos es necesario colocar exactamente dos 0

❖ Si en un vértice cualquiera colocamos un 1, a sus lados deben ir un 1y un 0, y al lado del segundo 1 necesariamente un 0. El quinto debe ser un 1 o un 2. De modo que necesitamos colocar exactamente dos 0.

❖ Si colocamos un 2, a sus lados pueden ir:
  - Un 2 y un 0, y entonces, al lado del segundo 2 necesariamente debemos colocar un 0, y el 5º puede ser un 1 o un 2, pero no un 0.
  - O también podemos colocar dos 0, pero entonces los otros dos vértices deben contener sendos 2.

En cualquier caso, hay que colocar exactamente dos múltiplos de 3.

20.(A) Los resultados posibles para cuatro sets son $2^4=16$. Pero hay 4 de ellos que no corresponden a haber llegado al cuarto set, porque se habría terminado el partido en el tercero (AAA_) y (BBB_). De los 12 resultados posibles restantes hay 6 en los que no se ha terminado el partido todavía (AABB, ABAB, ABBA, BAAB, BABA, BBAA) y otros 6 en los que se ha terminado el partido, justo en el cuarto set. Por tanto, la probabilidad es $\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$.

XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

21.(A) El triángulo *PXC* es semejante al triángulo *ABC*.

Por tanto, $\frac{PX}{4}=\frac{XC}{3}\Rightarrow\frac{PX}{4}=\frac{2}{3}\Rightarrow PX=\frac{8}{3}$ y $PD=\frac{8}{3}-1=\frac{5}{3}$

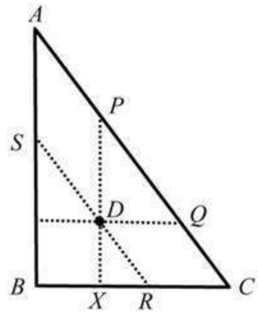
El triángulo *PDQ* es también semejante al *ABC*.

Por tanto, $\frac{PD}{4}=\frac{PQ}{5}\Rightarrow\frac{\frac{5}{3}}{4}=\frac{PQ}{5}\Rightarrow PQ=\frac{25}{12}$

El triángulo *BSR* es semejante al *ABC*, y $BS=AB-PD=4-\frac{5}{3}=\frac{7}{3}$.

Por tanto, $\frac{BS}{4}=\frac{SR}{5}\Rightarrow\frac{\frac{7}{3}}{4}=\frac{SR}{5}\Rightarrow SR=\frac{35}{12}$.

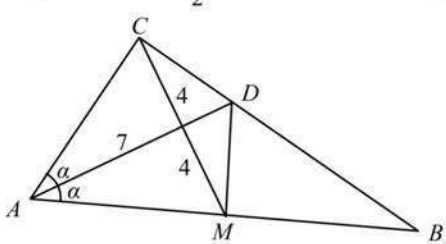
Y la suma es $PQ+SR=\frac{25}{12}+\frac{35}{12}=5$



22.(C) El ángulo que nos piden es un ángulo interior de una circunferencia, que vale la semisuma de los arcos que abarca. Cada arco comprendido por un lado del decágono mide 36°. Por tanto, $\alpha=\frac{36^\circ+72^\circ}{2}=54^\circ$

23.(C) Llamamos *D* al punto de intersección de la bisectriz con el lado *BC* y *M* al punto medio del lado *AC*. Trazando el segmento *DM* se forman tres triángulos con la misma área, *ACD*, *ADM* y *MBD*. *ACD* y *ADM* son iguales, pues tienen sus tres ángulos iguales y sus tres lados iguales, al ser la bisectriz *ADM* perpendicular a la mediana. El tercer triángulo, *MBD*, tiene la misma base que, puesto que *AM* = *MB* al ser *M* el punto medio, y la misma altura.

Como el área del triángulo *ACD* es $\frac{7\cdot 4}{2}=14$, el área del triángulo *ABC* es 42.



XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

24.(B) Usando el dato de que $z^4 + z^2 + 1 = 0$, podemos escribir:
$z^{12} + z^{11} + z^{10} + z^9 + z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z^1 + 1 =$
$= z^{12} + z^{10} + z^8 + z^{11} + z^9 + z^7 + z^6 + z^4 + z^2 + z^5 + z^3 + z^1 + 1 =$
$= z^8(z^4 + z^2 + 1) + z^7(z^4 + z^2 + 1) + z^2(z^4 + z^2 + 1) + z(z^4 + z^2 + 1) + 1 =$
$= z^8 \cdot 0 + z^7 \cdot 0 + z^2 \cdot 0 + z \cdot 0 + 1 = 1$

25.(B) Sabemos que la suma de los ángulos de un polígono de n lados es

$$\sum \alpha_i = (n-2)180^\circ .$$

Al dividir 2019° entre 180° no obtenemos un resultado exacto, siendo el resto 39°, ya que 2019° = 11 · 180° + 39°. Por consiguiente, el ángulo que se ha duplicado medía 39°.

XXIII Concurso de Primavera de Matemáticas

Soluciones 2ª Fase Nivel I

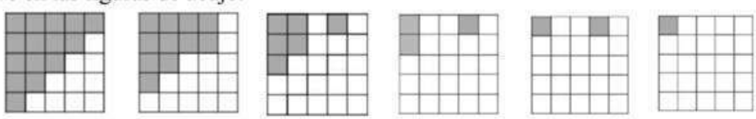
1. (D) Mediante tanteos obtenemos las cifras que faltan en la multiplicación; así: Para obtener un 8 en la cifra de las unidades del producto, la cifra que falta en el multiplicando es 3, (producto de 6 por 3 es el único que tiene la cifra 8 en las unidades). La cifra de las decenas del producto es 5 (6 por 4, 24; más 1, 25). Ahora tenemos que la cifra de las centenas del multiplicando puede ser 5 o 6, pero desechamos el 6 porque conduce a un 8 en el producto. Tenemos pues que nuestro producto es:

$$\begin{array}{ccccc} & 2 & \mathbf{5} & 4 & \mathbf{3} \\ & & & \times & 6 \\ \hline 1 & 5 & \mathbf{2} & \mathbf{5} & 8 \end{array}$$

Calculamos la suma de las cifras comidas: $5 + 3 + 2 + 5 = 15$.

2.(C) Salta a la vista que el triángulo de cartulina no se puede desplazar en las figuras 3ª y la 5ª.

3. (D) El conteo se facilita dibujando las distintas plantas de la construcción tal y como se ve en las figuras de abajo.



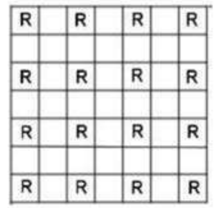
Tenemos entonces: $15 + 11 + 6 + 3 + 2 + 1 = 38$ cubos.

4. (D) Existen tres posibilidades disjuntas: a)La cifra distinta es la primera, b) la cifra distinta es la segunda y c) la cifra distinta es la tercera.
En el caso a) la primera cifra puede elegirse de 9 formas distintas (el cero no sirve). Una vez hecho esto las otras dos cifras (iguales) pueden elegirse de 9 formas, lo que da $9 \times 9 = 81$ números. En el caso b) la primera y tercera cifra puede elegirse también de 9 formas (el cero no sirve) y, una vez hecho esto, para la cifra central quedan otras 9 posibilidades, por lo que para este caso tendremos también $9 \times 9 = 81$ números. Finalmente para el caso c), la primera cifra y, por tanto, la segunda puede elegirse puede elegirse de 9 formas y, para la tercera quedan otras 9, con lo que tenemos otros 81 números.
En consecuencia, habrá $3 \times 81 = 243$ números.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel I)

5. (D) Es inmediato ver que las opciones D) y E) son más probables que las demás, y muy fácil contar los casos favorables de E): 19 casos y de D): 20 casos. Por lo tanto, el suceso más probable es que sea múltiplo de 5, la respuesta D.

6. (C) Si el tablero fuese de 7×7 casillas es evidente que el máximo número de reyes que podrá colocar es $4 \times 4 = 16$, tal como se muestra en la figura.En ella se exhibe también una de las cuatro posibles formas de completar el tablero (manteniendo siempre la máxima densidad de reyes) y tener uno de ajedrez. Vemos así que de ninguna forma podemos añadir un Rey que no amenace a ningún otro. Por tanto el mayor número de reyes que podemos colocar es 16.



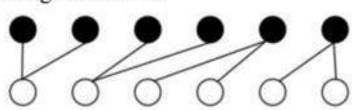
En general, en un tablero de $n \times n$ se pueden colocar $2n$ fichas que no estén alineadas. En un tablero de 8×8 se pueden colocar 16 reyes.

7. (B) La hora de sacar el bizcocho se calcula sumando a las 11:45 h, una hora y tres cuartos (1:45)
11 h 55 min + 1 h 45 min = 12 h 100 min = 13 h 40 min = 13:40

8. (C) Basta leer en la gráfica la puntuación de cada partido y hacer la media aritmética de los seis partidos:

$$\frac{5+2+3+4+3+4}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5\,.$$

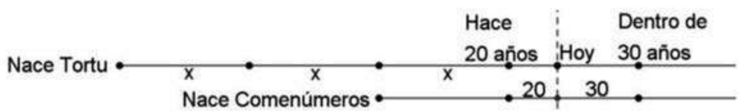
9. (D) Como dos cuentas negras más una blanca valen más que dos blancas más una negra, sabemos que una cuenta negra vale más que una blanca.
Por otra parte tenemos $6 + 8 = 14$ cuentas, con las que como máximo podemos hacer 4 collares ($14 = 3 \times 4 + 2$) y sobrarán 2 cuentas, que deben ser blancas si queremos obtener el máximo beneficio. Tenemos, pues, que intentar formar collares con 6 negras y 6 blancas sin que sobre ninguna cuenta.
La figura muestra cómo hacerlo.
Tendremos entonces 2 collares de 6 euros y 2 collares de 5 euros que, en total, valen:
$2 \times 6 + 2 \times 5 = 22$ €.



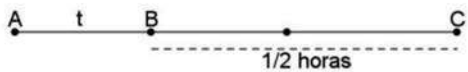
XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel I)

10.(C) Centésima calculó la multiplicación siguiente: $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 37 \times 38$. Este producto terminará en un número de ceros igual al número de veces que aparezca el producto 2×5 en su descomposición en factores primos.
Dado que, evidentemente, el factor 2 aparece en nuestro producto más veces que el factor 5, bastará contar el número de veces que aparece el 5.
El factor 5 aparecerá en:
$5 = 1 \times 5$; $10 = 2 \times 5$; $15 = 3 \times 5$; $20 = 4 \times 5$; $25 = 5 \times 5$; $30 = 6 \times 5$ y $35 = 7 \times 5$.
El 5 aparece 8 veces en la multiplicación.
Por tanto, el resultado de la multiplicación terminará en 8 ceros.

11.(A) El problema es sencillo si representamos el enunciado en un esquema temporal como el de la figura. Dado que dentro de 30 años *la mitad izquierda* es igual a *la mitad derecha,* deducimos que x es igual a 50 años. Por consiguiente, hoy, la edad de doña Tortu es el triple de 50 más 20, es decir, 170 años.



12.(E) Cómo el Lobo Feroz va tres veces más rápido que Caperucita, esta tardará en llegar a la casa el triple del tiempo, **t**, que invierte el Lobo.



Entonces, si el segmento AC representa el tiempo de Caperucita en llegar a la casa, el segmento AB representará el tiempo que tarda el lobo en hacer el mismo recorrido y, el BC el tiempo (1/2 h) que le falta a Caperucita para llegar a la casa en el instante en el que llega el Lobo. De lo que se deduce:

$\frac{1}{2} = 2 \times t$ de donde $t = \frac{1}{4}$ de hora, y dado que el Lobo va a12 km/h, la distancia a la casa es igual a $\frac{12\ km}{h} \times \frac{1}{4} h = 3\ km.$.

13.(D) En un puñado de arroz habrá $2 \times 7 \times 100 = 1400$ granos de arroz. Puesto que para 8 personas se necesitan $2 \times 8 + 1 = 17$ puñados de arroz y, para la paella se necesitarán $17 \times 1400 = 23\,800$ granos. El número que mejor aproxima los granos de la paella es 25 000.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel I)

14.(E) Las cuatro esquinas equivalen a un cuadrado gris. Los cuatro triángulos laterales tienen la misma área que 2 cuadrados grises.
En el azulejo tendremos en total 5 + 2 + 1 = 8 cuadrados grises. Dado que el azulejo está teselado en 36 cuadraditos y cada cuadrado gris equivale a 2 cuadraditos de la tesela, los 8 cuadrados grises equivalen $8 \times 2 = 16$ cuadraditos. Entonces la fracción gris del mosaico es $\frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.

15.(E) Si 48 castañas cuestan lo mismo que 10 barquillos, 24 castañas costarán lo mismo que 5 barquillos y 48 + 24 = 72 castañas costarán igual que 10 + 5 = 15 barquillos. Por otra parte, como 4 viajes de tiovivo cuestan también 15 barquillos, tenemos que 4 viajes valen lo mismo que 72 castañas.
Por lo tanto un viaje de tiovivo cuesta $72 \div 4 = 18$castañas.

16.(E) Cómo 5 monedas de 20 céntimos valen 1€, 725 monedas de 20 céntimos valdrán $725 \div 5 = 145$ €. Por lo que me tendrán que dar 164 – 145 = 19 € en monedas de 2 céntimos. Dado que 1€ es igual 100 céntimos, 1€ vale lo mismo que 50 monedas de 2 céntimos y, por tanto, me darán $19 \times 50 = 950$ monedas de 2 céntimos.

17.(A) Al obtener el perímetro del hexágono exterior hemos sumado 3 veces el lado largo y 3 veces el corto. Por otra parte, para obtener el perímetro del triángulo sumamos 3 veces el lado largo y restamos 3 veces el lado corto. En consecuencia, la suma de los dos perímetros es igual a 6 veces el lado largo.Tendremos entonces: 75 + 21 = 6 veces el lado largo, lo que implica que el lado largo mide $\frac{75+21}{6} = \frac{96}{6} = 16$ cm.

18.(B) Basta expresar matemáticamente el enunciado del problema:
$\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{1}{5} \times (120 \times 6) = \frac{2 \times 120 \times 6}{4 \times 3 \times 5} = 24$.
O empezando por el final: $\{[(120 \times 6 \div 5) \times 2] \div 3\} \div 4 = 24$.

19.(C) En la figura contamos 13 polígonos de los que 9 son pentágonos. Dado que a cada pentágono deberemos unir cuatro hexágonos, habrá que añadir $4 \times 9 = 36$ hexágonos, lo que permite construir la tabla siguiente:

	Nº de polígonos	Nº de vértices
Triángulos	1	3
Cuadrados	3	12
Pentágonos	9	45
Hexágonos	36	216

Lo que nos lleva a 3 + 12 + 45 + 216 = 276 luces.

20.(C) Si construimos una tabla con las pulsaciones y las marcaciones, la solución es inmediata:

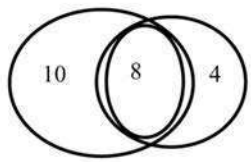
Pulso	**0**	1	2	3	4	**5**	6	7	8	**9**
Marca	**1**	4	3	2	5	**0**	7	8	9	**6**

Por lo tanto, si quiero marcar el 016 debo pulsar el 509.

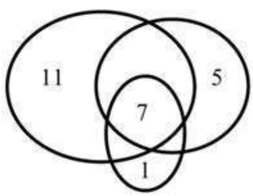
21.(D) Cómo mcd(45, 27,36) = 9, la cantidad mayor posible de cofres con el mismo contenido es 9, teniendo en cada uno de ellos:
$45 \div 9 = 5$ caracolas, $27 \div 9 = 3$ perlas y $36 \div 9$ 4 monedas de oro.
Por lo que en cada cofre habrá $5 + 3 + 4 = 12$ objetos.

22.(A) Entre los primeros 100 números encontramos un 8 en cada decena excepto en la de los 80, en la que hay 11ochos, es decir, del 1 al 100 se comió $9 + 11 = 20$ ochos. El esquema se repite para los números que van del 101 al 200 y se come otros 20 ochos. Del 201 al 300 se comería otros 20, pero como solo llegamos al 288, deja de comerse los ochos del 289 y del 298. Concluimos que Comenúmeros se comió $20 + 20 + 8 = 48$ ochos.

23.(D) $24 \div 2 = 12$ alumnos saben qué es una pirámide truncada, $\frac{3}{4}\times 24 = 18$ saben qué es un trapecio isósceles y $24 \div 3 = 8$ conocen la apotema. Parece ser que 8 es el máximo número posible de los que saben las tres cosas.
Pero como $(18 - 8) + 8 + (12 - 8) = 10 + 8 + 4 = 22$ y en la clase hay 24 alumnos eso no es posible.



En cambio 7 sí es posible ya que $(18 - 7) + (7 + 1) + (12 - 7) = 11 + 8 + 5 = 24$



XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel I)

24.(D) Teniendo en cuenta que al menos hay una araña y una avispa, deducimos que el máximo número posible de patas de escolopendra es $196 - (8 + 6) = 182$.
Luego el máximo número posible de escolopendras es 3, ya que $182 \div 46 \cong 3{,}95$.
Además, como hay el doble de arañas que escolopendras y tenemos en total 18 bichos, las posibilidades se limitan a las tres mostradas en la siguiente tabla:

Escolopendras	1	2	3
Arañas	2	4	6
Avispas	15	**12**	9
Total de bichos	18	18	18
Total de patas	152	**196**	240

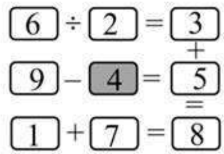
Sumando ahora el número de patas, vemos enseguida que:
$2 \times 46 + 4 \times 8 + 12 \times 6 = 196$. Por tanto hay 12 avispas.

25.(D) Descartamos 696 y 996 por ser ambos divisibles por 4 ($96 \div 4 = 24$).
El 666 se descarta por ser múltiplo de 9 ($6 + 6 + 6 = 18 = 9 \times 2$).
Rechazamos el 999 por ser múltiplo de 9 ($111 \times 9 = 999$).
Por lo tanto 996 es el número buscado.
No obstante, para quedarnos tranquilos podemos comprobar que cumple las condiciones de Don retorcido:
Es múltiplo de 6 (es par y $9 + 6 + 6 = 21$ múltiplo de 3 pero no de 9) y es divisible entre 7 ($966 \div 7 = 138$) pero no lo es entre 4 ($66 \div 4 = 16{,}5$).

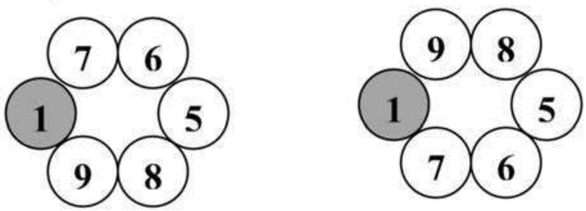
XXIII Concurso de Primavera de Matemáticas

Soluciones 2ª Fase Nivel II

1. (A) La fila superior no tiene otra manera de rellenarse que con un 6 y un 2: $6 \div 2 = 3$.
De esta manera nos quedan por colocar el 1, 4, 5, 7, 8 y 9. Al observar la última columna y la última fila, como ambas operaciones son sumas, debemos buscar, entre los números que quedan por colocar, cuatro números tal que uno de ellos más 3 nos dé lo mismo que la suma de los otros dos: $3 + 5 = 1 + 7 = 8$.
Así que bajo el 3 va un 5 y la fila de en medio es: $9 - 4 = 5$.
El número que ocupa la casulla sombreada es el 4.



2. (E) Alrededor de 5 solo podemos colocar el 6 y el 8. ($5 + 6 = 11$ y $5 + 8 = 13$)
Al lado de 6 solo podemos colocar el 7 y al lado de 7 el 10.
Al lado del 8 solo podemos colocar el 9 y al lado del 9 el 10.
En el círculo gris va el 10.



3. (C) 555? NUEVE posibles cifras en las unidades: 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9.
55?5 NUEVE posibles cifras en las decenas: 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9.
5?55 NUEVE posibles cifras en las centenas: 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9.
?555 OCHO posibles cifras (el 0 no está permitido) en las unidades de mil: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9.
Tenemos $9 + 9 + 9 + 8 = 35$ números.

4. (B) Descomponemos en factores primos cada número:
2, **3**, $4 = \mathbf{2 \cdot 2}$, $15 = \mathbf{3 \cdot 5}$, $28 = \mathbf{2 \cdot 2 \cdot 7}$, $35 = \mathbf{5 \cdot 7}$, $50 = \mathbf{2 \cdot 5 \cdot 5}$.
Observamos que hay 6 doses, 2 treses, 4 cincos y 2 sietes. Así que cada uno tiene 3 doses, 1 tres, 2 cincos y 1 siete y el reparto de números tiene que ser [2, 4, 15, 35] y [3, 28, 50].
Como se han encontrado 7 números, el que elige primero se lleva 4, así que la niña Centésima se llevo el 2, el 4, el 15 y el 35.
Sus números suman $2 + 4 + 15 + 35 = 56$.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel II)

5. (A) Si llamamos E al precio original de cada entrada podemos asegurar que lo que paga cada amigo por una entrada es:
Antía paga $0{,}85 \cdot E$ (al descontarle el 15%, paga el 85% de una entrada).
Roger paga $0{,}90 \cdot E$ (al descontarle el 10%, paga el 90% de una entrada).
Fernando paga $0{,}95 \cdot E$ (al descontarle el 5%, paga el 95% de una entrada).
Gracias a los descuentos, en lugar de pagar $3 \cdot E$, entre los tres, pagan
$0{,}85 \cdot E + 0{,}90 \cdot E + 0{,}95 \cdot E = 2{,}70 \cdot E$.
Como han pagado 351€, vemos que $2{,}70 \cdot E = 351$, y ya podemos calcular el precio de la entrada original, $E = 351 : 2{,}70 = 130$ euros.

6. (A) Como $\dfrac{33}{29} = 33:29$ cabe a 1, entonces $a = 1$. $\dfrac{33}{29} - 1 = \dfrac{4}{29} \Rightarrow \dfrac{1}{b + \dfrac{1}{c}} \Rightarrow \dfrac{29}{4} = b + \dfrac{1}{c}$

Análogamente, como 29 entre 4 cabe a 7, entonces $b = 7$. $\dfrac{29}{4} - 1 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow c = 4$

Así que $a + b + c = 12$.
Otra forma de hacerlo.

$$\frac{33}{29} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = a + \frac{c}{bc+1} = \frac{a(bc+1)+c}{bc+1} \Rightarrow \begin{cases} bc+1 = 29 \\ 29a + c = 33 \end{cases}$$

Como los números a, b, c, son enteros positivos, entonces de $29a + c = 33$ se deduce que $a = 1$ y $c = 4$. Y de $bc + 1 = 29$, es decir, de $4b + 1 = 29$ se deduce que $b = 7$.

7. (A) Escribimos cada apartado en base 2:

A) $2^{3^8} = 2^{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3} = 2^{9\cdot9\cdot9\cdot9}$

B) $\left(2^3\right)^8 = 2^{3\cdot8}$

C) $\left(2^9\right)^3 = 2^{9\cdot3}$

D) $2^{9^3} = 2^{9\cdot9\cdot9}$ $2^{9^3} = 2^{9\cdot9\cdot9}$

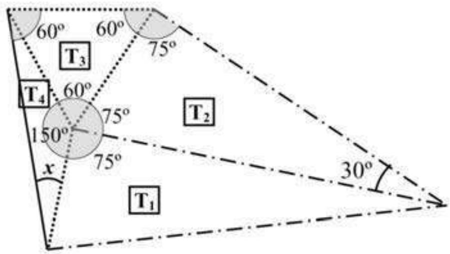
Observamos que el mayor exponente es el del apartado A), por lo que el mayor número es $2^{3^{\left(2^3\right)}}$.

8. (B) $20 - 5 = 15$, por lo que Berta tiene 5 hijas y 15 nietas.
$15 \div 5 = 3$, por lo que 3 hijas tienen hijas y 2 hijas no tienen hijas.
Como no tiene bisnietas, ninguna nieta tiene hijas, por lo que el número de hijas y nietas sin hijas es $2 + 15 = 17$.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel II)

9. (D) Cada equipo se enfrenta a 5 equipos, $6 \cdot 5 = 30$, pero como solo juegan un partido entre equipos iguales, el número de partidos disputados es $30 \div 2 = 15$.
Si todos los partidos hubieran acabado con victoria (3 puntos) se habrían conseguido 45 puntos. Fíjate que por cada partido empatado se reparten 2 puntos (1 punto para cada equipo), es decir, se pierde 1 punto (2 puntos frente a 3).
Como en total se consiguieron 40 puntos de los 45 máximos posible, se perdieron 5 puntos, es decir hubo 5 empates y 40 victorias.

10.(C) El triángulo T1 es isósceles, sus ángulos iguales miden $(180^\circ - 30^\circ) \div 2 = 75^\circ$.
Los triángulos T1 y T2 son iguales.
El triángulo T3 es equilátero, por lo que sus ángulos miden 60º cada uno.
El triángulo T4 es isósceles y el ángulo desigual mide $360^\circ - (60^\circ + 75^\circ + 75^\circ) = 150^\circ$.
Por ello, el ángulo x mide $(180^\circ - 150^\circ) \div 2 = 15^\circ$.



11.(C) Las 21 combinaciones posibles son (¡no pierdas ninguna!, ¡lleva un orden!):

Empezando con S:			Empezando con E:	Empezando con I:
SSSS	SESS	SISS	ESSS	ISSS
SSSE	SESE	SISE	ESSE	ISSE
SSSI	SESI	SISI	ESSI	ISSI
SSES			ESES	ISES
SSIS			ESIS	ISIS

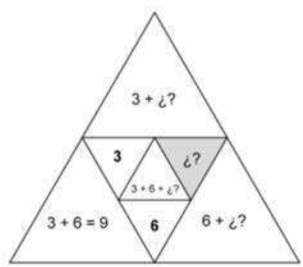
12.(B) Como el triángulo coloreado (¿?) es suma de sus triángulos vecinos, tenemos que:

¿? = (3 + 6 + ¿?) + (6 + ¿?) + (3 + ¿?)

¿? = 18 + ¿? + ¿? + ¿?

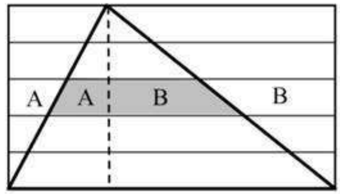
¿? = –9

Las regiones de Comenúmeros, las tres más grandes, son, por tanto, –6, 9 y –3.
Su suma es 0.



XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel II)

13.(D) Dividimos el trapecio sombreado en dos partes y . Observamos que las partes A y B aparecen dos veces en su franja, por lo que el área del trapecio sombreado es $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{5}$ del área del rectángulo, es decir, $\frac{1}{10}$ del área del rectángulo.



Como el área del rectángulo es el doble de la del triángulo: $S_R = 2 \cdot S_T$. Así que:

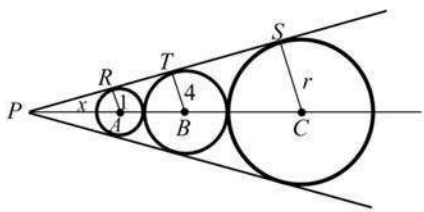
Trapecio Sombreado = $\frac{1}{10}$ del Rectángulo = $\frac{1}{10} \cdot 2 \cdot$Triángulo = $\frac{1}{5}$ del Triángulo.

14.(E) Los números x cumplen que $-5 \le 2x - 1 \le 7$.
Si sumamos 1 a cada término, las desigualdades se mantienen y vemos que:

$$-5 + 1 \le 2x - 1 + 1 \le 7 + 1 \Leftrightarrow -4 \le 2x \le 8$$

Si dividimos los términos entre 2 (¡¡positivo!!), las desigualdades siguen conservándose y obtenemos: $-2 \le x \le 4$.
El mayor valor posible de x es 4, el menor es –2, y su diferencia es $4 - (-2) = 6$.

15.(E) Como en tantísimos problemas de geometría, añadiendo algunas líneas vemos la estructura escondida que nos ayuda a resolverlo. Sabemos que las tangentes a las circunferencias son perpendiculares a los radios que llegan a los puntos de tangencia, por tanto, los triángulos PAR, PBT y PCS son semejantes. Jugando con esta propiedad, calcularemos primero la longitud x de PA y luego el radio r del sombrero mayor.

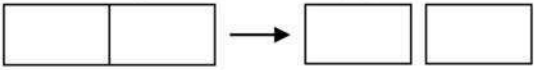


PAR y PBT semejantes: $\frac{AR}{BT} = \frac{PA}{PB} \rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1+x}{6+x} \rightarrow x = \frac{2}{3}$

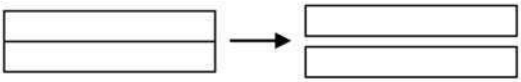
PAR y PCS semejantes: $\frac{AR}{CS} = \frac{PA}{PC} \rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1+\frac{2}{3}}{r+10+\frac{2}{3}} \rightarrow r = 16$

El radio del sombrero grande mide 16 cm.

16.(A) Si llamamos L a la longitud, en cm, del lado largo y C a la del corto del rectángulo de partida, nos encontramos con estas dos situaciones del dibujo. Hay que tener mucho cuidado al calcular los perímetros de los dos rectángulos que se forman en cada caso porque el lado común hay que sumarlo dos veces.



Perímetro = $2L + 4C$



Perímetro = $4L + 2C$

Si no tocamos la primera igualdad y dividimos entre dos la segunda igualdad tenemos:

$2L + 4C = 96$

$2L + \ \ C = 42$

Si las restamos vemos que $3C = 54$, es decir $C = 18$ cm.

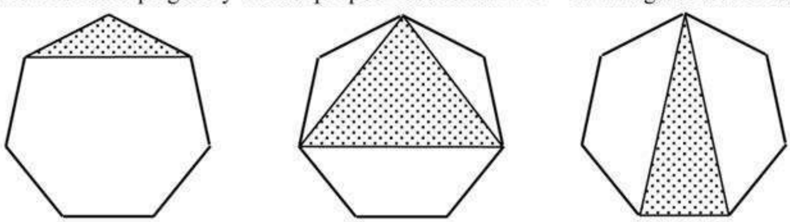
Y el otro lado cumpliría que $2L + 18 = 42$, es decir, $L = 12$ cm.

El perímetro del rectángulo de partida es $2 \cdot (18 + 12) = 60$ cm.

NOTA: como muy bien observaron algunos estudiantes, hay algo equivocado en el enunciado porque la longitud del lado corto no puede ser mayor que la del lado largo. **En el enunciado hay que intercambiar el 84 por el 96**. Aunque el perímetro sigue siendo 60 cm hay un evidente error en el enunciado.

Desde aquí, ofrecemos disculpas por el lapsus y agradecimientos por el aviso.

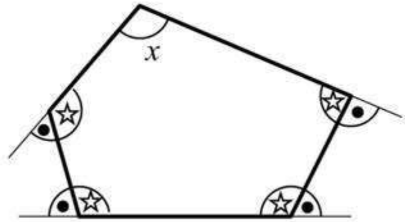
17.(D) Si fijamos el vértice superior, por ejemplo, vemos que podemos formar tres triángulos isósceles. Esta misma operación la hacemos en cada uno de los 7 vértices del heptágono y vemos que podemos formar $7 \cdot 3 = 21$ triángulos isósceles.



En este tipo de problemas es importante no caer en el error de contar dos veces la misma configuración, en este caso, no contar dos veces el mismo triángulo.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel II)

18.(C) Como los ángulos marcados con un puntito suman 336º, entonces, los ángulos de la estrellita (los suplementarios de los puntitos) suman $4 \cdot 180º - 336º = 384º$.
Los ángulos de un pentágono suman 540º, por lo que nuestro ángulo buscado mide $x = 540º - 384º = 156º$.



19.(B) Los restos se repiten por ciclos en las columnas: en la columna del 1 son todo 0–0–0 etc; en la columna del 2 el ciclo es 10–10–etc; en la del 3 es 201–201–etc; en la del 4 es 3012–3012–etc; en la del 5 es 12340 y en la del 6 es 501234. El problema se reduce a saber cuántos ciclos completos hay en cada columna y luego sumar.

	1	2	3	4	5	6
11	**0**	**1**	**2**	**3**	**1**	**5**
12	**0**	**0**	**0**	**0**	**2**	**0**
13	**0**	**1**	**1**	**1**	**3**	**1**
14	**0**	**0**	**2**	**2**	**4**	**2**
15	**0**	**1**	**0**	**3**	**0**	**3**
…	…	…	…	…	…	…
60	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Observa que la tabla tiene 50 filas.

Columna del 2 ($50 = 25 \cdot 2$): 25 ciclos completos de 01. La suma es 25.

Columna del 3 ($50 = 16 \cdot 3+2$): 16 ciclos completos de 201, más un 2 y un 0. La suma es $16 \cdot (2+0+1)+2+0 = 50$.

Columna del 4 ($50 = 12 \cdot 4+2$): 12 ciclos completos de 3012, más un 3 y un 0. La suma es $12 \cdot (3+0+1+2)+3+0 = 75$.

Columna del 5 ($50 = 10 \cdot 5$): 10 ciclos completos de 12340. La suma es $10 \cdot (1+2+3+4+0) = 100$.

Columna del 6 ($50 = 8 \cdot 6+2$): 8 ciclos completos de 501234, más un 5 y un 0. La suma es $8 \cdot (5+0+1+2+3+4)+5+0 = 125$.

La suma total es $25+50+75+100+125 = 375$.

20.(B) Vamos a llamar x a los triples que intentó Irene y entonces $30–x$ son los dobles que lanzó. Según los datos del problema, los puntos conseguidos por Irene fueron el $3 \cdot$[20% de x] más $2 \cdot$[30% de $(30–x)$], es decir:

$$3 \cdot \frac{20}{100} \cdot x + 2 \cdot \frac{30}{100} \cdot (30 - x) = \frac{60x + 1800 - 60x}{100} = 18$$

Irene consiguió 18 puntos en ese partido.

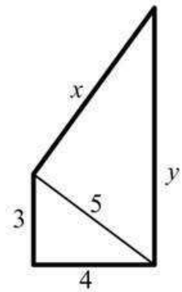
XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel II)

21.(A) La hipotenusa del triángulo pequeño mide… ¡5cm! (que es también el cateto pequeño del triángulo grande)

La razón de semejanza del triángulo grande y el pequeño es la razón entre dos lados homólogos, por ejemplo, la razón entre sus catetos pequeños: $\frac{5}{3}$.

Por tanto, el perímetro del triángulo grande será la del pequeño multiplicada por la razón de semejanza, $PG = \frac{5}{3}(3+4+5) = 20$, por lo que $x + y = 20 - 5 = 15$

El perímetro del trapecio mide 3 + 4 + 15 = 22 cm.



22.(C) Al principio Rosalía tenía B rosas blancas lo que supone un porcentaje de $\frac{100 \cdot B}{480}$.

Si añadimos 60 nuevas rosas blancas, el porcentaje es ahora $\frac{100 \cdot (B+60)}{540}$ y como este nuevo porcentaje es doble que el inicial podemos escribir que:

$$\frac{100 \cdot (B+60)}{540} = \frac{2 \cdot 100 \cdot B}{480} \rightarrow \frac{B+60}{540} = \frac{2 \cdot B}{480} \rightarrow 480 \cdot (B+60) = 2 \cdot 540 \cdot B$$

Podemos calcular B muy fácilmente, dividiendo la última igualdad entre 120: $4 \cdot (B+60) = 9 \cdot B \rightarrow 4B + 240 = 9B \rightarrow B = 48$.

Rosalía tiene ahora 48 + 60 = 108 rosas blancas (sus cifras suman 9).

23.(D) Para que un múltiplo de 19, $19 \cdot n$, acabe en 7, n tiene que terminar en 3. Así que vamos a multiplicar 19 por 3, por 13, por 23,… hasta que el resultado acabe en 17:

$19 \cdot 3 = 57$ no vale $\quad$ $19 \cdot 13 = 247$ no vale $\quad$ $19 \cdot 23 = 437$ no vale

$19 \cdot 33 = 627$ no vale $\quad$ $19 \cdot 43 = 817$ sí vale

El menor múltiplo de 19 que acaba en 17 empieza por 8.

24.(B) Debemos encontrar un número n que cumpla que $\frac{3+n}{7+n} = \frac{3}{5}$, es decir, que $5 \cdot (3+n) = 3 \cdot (7+n) \rightarrow 15 + 5n = 21 + 3n \rightarrow 2n = 6 \rightarrow n = 3$.

Nunca está de más comprobar si lo hemos hecho bien: $\frac{3+3}{7+3} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

25.(C) La única manera de que Joaquín esté seguro de que los números de María suman par es que Joaquín haya cogido los tres números pares que hay. De esta manera, en la caja solo quedan números impares y Joaquín sabe muy bien que si sumas dos números impares, a la fuerza, el resultado te dará par.

Por esto, Joaquín ha cogido el 188, el 234 y el 318, cuya suma es 740.

XXIII Concurso de Primavera de Matemáticas

Soluciones 2ª Fase Nivel III

1. (A) Si $a = 1 + b$, entonces $a + b = 1 + b + b = 1 + 2b$. Por tanto, el cociente vale 1.

2. (C) Si llamamos x a la capacidad de la piscina de Cati, la capacidad de la piscina de Sara se puede expresar como $1{,}15x$, y la capacidad de la piscina de Julia es $1{,}25x$. Por tanto, el cociente entre las capacidades de las piscinas de Sara y de Julia es $\frac{1{,}15x}{1{,}25x} = 0{,}92$, lo cual indica que la de Sara tiene un 8% menos que la de Julia.

3. (D) Podemos simplificar la expresión para la cual buscamos el valor máximo: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{a} + \frac{b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$; dado que $a < 0$ y $b > 0$, el cociente $\frac{b}{a} < 0$, y el valor máximo de la expresión dada se obtendrá cuando el cociente esté más cerca del 0. Para ello tendremos que coger $b = 2$, y $a = -4$ y obtendremos $\frac{a+b}{a} = 1 + \frac{2}{-4} = \frac{1}{2}$.

4. (B) La diferencia que nos piden entre las áreas de las dos partes de la pajarita coincide con la diferencia entre las áreas de los triángulos ABC y ABD, que podremos calcular con los datos que nos piden. El área del triángulo ABC es $\frac{4 \cdot 8}{2} = 16$, y el área del triángulo ABD es $\frac{4 \cdot 6}{2} = 12$. Por tanto, la diferencia buscada es igual a 4.

5. (A) Llamamos x a la longitud, en kilómetros, del recorrido total. África tarda $\frac{x}{20}$ horas en recorrerlo completo. Blanca tarda $\frac{\frac{x}{2}}{10} = \frac{x}{20}$ horas en recorrer la primera mitad, y $\frac{\frac{x}{2}}{30} = \frac{x}{60}$ horas en recorrer la segunda mitad, con lo que en total tarda $\frac{x}{20} + \frac{x}{60} = \frac{4x}{60} = \frac{x}{15}$ horas, que es más de lo que tarda África. Carlos, por su parte, tarda $\frac{\frac{3x}{4}}{30} = \frac{x}{40}$ horas en hacer tres cuartas partes del recorrido, y $\frac{\frac{x}{4}}{5} = \frac{x}{20}$ en hacer el resto, es decir, en total tarda $\frac{x}{40}+\frac{x}{20}=\frac{3x}{40}$ horas, que es más de lo que tardan Blanca y África. Por tanto, África es quien menos tiempo tarda en hacer el recorrido.

6. (A) Operando en las dos igualdades se obtiene:
$xy + 2x + 2y + 4 = 60$ y $xy + 3x + 3y + 9 = 40$.
Restando la segunda ecuación menos la primera, llegamos a que $x + y + 5 = -20$, es decir $x + y = -25$.
Por último, manipulando la expresión que nos piden, obtenemos:
$(x + 5) \cdot (y + 5) = xy + 5x + 5y + 25 = xy + 2x + 2y + 4 + 3(x + y) + 21 =$

$= 60 + 3(-2\ 5) + 21 = 6.$

7. (D) Si llamamos x al número de rotuladores que he comprado, y al número de agendas, y z al número de gomas, tendremos que $\begin{cases} x+y+z=100 \\ x+10y+\frac{1}{8}z=100 \end{cases}$

Vemos que tenemos 3 incógnitas pero solo dos ecuaciones. Si las manipulamos hábilmente podremos quedarnos con una sola ecuación con dos incógnitas. Lo que tenemos que hacer es, por ejemplo, multiplicar por 8 la segunda ecuación, y al resultado restarle la primera ecuación. Así obtenemos $7x + 79y = 700$. Y ahora, despejando x, que es la incógnita que me interesa sacar, obtenemos $x=100-\frac{79}{7}y$.

Tenemos que darnos cuenta de que, como cada agenda cuesta 10 euros, sabemos que he comprado un número entero y de agendas menor que 10, por tanto, la única solución para que x sea un número entero es tener $y = 7$, en cuyo caso me queda $x = 100 - 79 = 21$..

8. (C) Examinando ingrediente a ingrediente, dividiendo la cantidad que tengo entre la que necesito, vemos que 4 yogures me darían para 4 bizcochos, 5 huevos me darían para $\frac{5}{3}$ de bizcocho, 6 tazas de harina me daría para 2 bizcochos, 3 tazas de azúcar me daría para $\frac{3}{2}$ de bizcocho, $\frac{3}{4}$ de tazas de aceite me daría para $\frac{3}{2}$ de bizcocho y 5 cucharaditas de levadura me daría para $\frac{5}{2}$ de bizcocho. La menor de estas cantidades es $\frac{3}{2}$ de bizcocho, y con eso podré invitar a 12 amigos, ya que cada bizcocho se lo comen 8 personas.

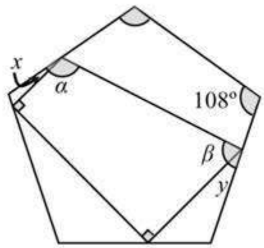
XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel III)

9. (B) Contemos primero los casos posibles. Como no importa el orden en el que elija los puntos, tengo que contar los grupos de 3 elementos que puedo hacer con un total de 9 elementos.

Esto me lo da el número combinatorio $\binom{9}{2} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(3\cdot 2\cdot 1)\cdot(6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)} = 84.$

De entre todos los casos posibles, hay 3 rectas horizontales que contienen 3 puntos cada una, 3 rectas verticales y 2 diagonales, es decir, tenemos 8 casos favorables. Por tanto, la probabilidad de que los tres puntos elegidos estén alineados es $\frac{8}{84} = \frac{2}{21}$.

10.(C) Recordemos primero que el ángulo central de un pentágono regular es 360º : 5 = 72º, por tanto, el ángulo interno es 180º – 72º = 108º. Recordemos también que todos los ángulos interiores de un cuadrilátero suman 360º. Llamemos α al ángulo interno del trapecio adyacente a x, y sea β el ángulo interno del trapecio adyacente a y. Como el trapecio es rectángulo, sabemos que $\alpha + \beta = 180º$.



Fijémonos ahora en el cuadrilátero de la esquina superior derecha. Dos de sus ángulos miden 108º, y los otros dos son los suplementarios de $x + \alpha$ y de $y + \beta$ respectivamente, así pues, como sus ángulos suman 360º, tenemos:

$180º - \alpha - x + 180º - \beta - y + 2\cdot 180º = 360º$, de donde podemos despejar $x + y$.

$x + y = 2\cdot 180º - (\alpha + \beta) = 36º$.

11.(D) Tenemos que darnos cuenta de que la potencia será igual a 1 cuando ocurra alguna de las tres posibilidades siguientes:

a) Cuando el exponente sea igual a 0. En este caso buscamos las soluciones de la ecuación $3x^2 + 7x - 6 = 0$ y obtenemos que y las soluciones son $\frac{2}{3}$ y (-3) .

b) Cuando la base sea igual a 1. En este caso buscamos las soluciones de la ecuación $x^2 - 2 = 1$ y obtenemos que $\sqrt{3}$ y $(-\sqrt{3})$ también son soluciones.

c) Cuando la base sea igual a (-1) y el exponente sea un múltiplo de 2. Por un lado, resolvemos la ecuación $x^2 - 2 = -1$, cuyas soluciones son 1 y (-1).

Cuando $x = 1$, el polinomio $3x^2 + 7x - 6$ vale 4 y cuando $x = -1$, el polinomio $3x^2 + 7x - 6$ vale -10. En los dos casos obtenemos soluciones.

Así pues, el producto de todas las soluciones es $\frac{2}{3}\cdot(-3)\cdot\sqrt{3}\cdot\left(-\sqrt{3}\right)\cdot 1\cdot(-1) = -6$

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel III)

12.(B) Al colocar un cuadrado sobre uno de los lados de un triángulo, obtenemos un polígono con 5 lados. Al añadir un pentágono, conseguimos un polígono de 8 lados. Así, vemos que cuando añadimos un polígono de n lados al anterior con k lados, el resultado es un polígono de $n + k - 2$ lados. La sucesión que tenemos es:
$3 + 4 - 2 = 5$, $5 + 5 - 2 = 8$, $8 + 6 - 2 = 12$, $12 + 7 - 2 = 17$
$17 + 8 - 2 = 23$ $23 + 9 - 2 = 30$ $30 + 10 - 2 = 38$

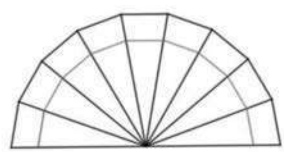
O de otra forma, lo que tenemos que calcular es:

$$3+\sum_{4}^{10}(n-2)=3+2+3+4+5+6+7+8=38$$

13.(C) Lo primero que necesitamos hacer es contar cuántos partidos hubo. Hay 20 posibles equipos que juegan en casa, y para cada uno de ellos habrá 19 posibles contrincantes a los que les tocará jugar fuera. Esto hace un total de $20 \cdot 19 = 380$ partidos. Si ninguno de estos partidos hubiese acabado en empate, habrían sumado $380 \cdot 3 = 1140$ puntos, ya que por cada victoria, un equipo suma 3 puntos. Pero como han sumado 1005 puntos, esto quiere decir que $1140 - 1005 = 135$ puntos son los que han dejado de sumar por las victorias, y ya que por cada empate, se suman 2 puntos en total (uno para cada equipo), esto implica que ha habido 135 empates (y 245 victorias).

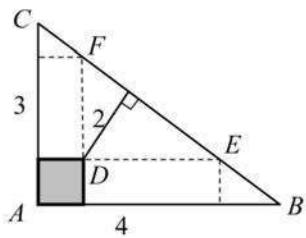
14.(A) Solo hay dos afirmaciones falsas y un único culpable. Puesto que hay tres acusaciones directas, una de ellas ha de ser verdadera y las otras dos falsas. Además, el resto de afirmaciones también serán verdaderas, por tanto sabemos que Ana y Cris mienten. Esto implica que no lo hicieron ni Berto ni Dani, por tanto la culpable es Ana.

15.(A) Si prolongamos los lados no paralelos de los trapecios hacia dentro del arco, tendremos 9 triángulos isósceles iguales y todos ellos comparten un vértice que está en el centro del arco. Habremos dividido así media circunferencia en 9 partes iguales, por tanto, el ángulo desigual de estos triángulos vale $180^\circ : 9 = 20^\circ$. A partir de aquí llegamos a que los ángulos iguales de dichos triángulos, que coinciden con los ángulos interiores más pequeños de cada trapecio, valen $\dfrac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ$. Y por consiguiente, los ángulos interiores más grandes del trapecio, que son sus suplementarios, valen $180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.



XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel III)

16.(E) Si prolongamos los lados del cuadrado según se muestra en la figura, y trazamos una perpendicular al lado AB que pase por E, obtenemos dos triángulos semejantes al original, el triángulo DEF y el triángulo GBE.
En el triángulo original ABC, usando el teorema de Pitágoras y el teorema de la altura, como conocemos los catetos, que miden 3 y 4, podemos obtener que la hipotenusa mide 5 y que la altura mide $\frac{12}{5}$.
En el triángulo DEF, sabemos que la altura mide 2, y por semejanza con ABC, podemos obtener que el cateto mayor, DE, mide $\frac{10}{3}$.
Si llamamos x al lado del cuadrado, éste coincide con EG, el cateto menor del triángulo GBE. Usando nuevamente la semejanza podemos obtener que el cateto mayor de este triángulo es $\frac{4}{3}x$. Así obtenemos que la base AB, que mide 4, tiene que ser igual a $x+\frac{10}{3}+\frac{4}{3}x$, y despejando x en esta ecuación obtenemos que el lado del cuadrado mide $\frac{2}{7}$, por tanto el área total que ocupa el cuadrado es $\frac{4}{49}$.



17.(B) La probabilidad que nos piden se calculará sumando la probabilidad de que ambos obtengan 0 caras, más la probabilidad de que ambos obtengan 1 cara, más la probabilidad de que ambos obtengan 2 caras. Como el lanzamiento de Julián es independiente del lanzamiento de Lucía, cada una de estas probabilidades se calcula multiplicando. Si L es el número de caras de Lucía y J el número de caras de Julián, $p(L=0)\cdot p(J=0)=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$; $p(L=1)\cdot p(J=1)=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{4}=\frac{6}{32}$

$p(L=2)\cdot p(J=2)=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$

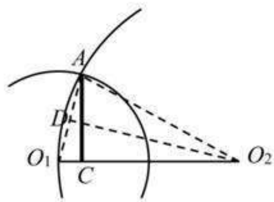
Así pues, la probabilidad que nos piden es $\frac{1}{32}+\frac{6}{32}+\frac{3}{32}=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel III)

18.(B) El número de apretones de manos que se dieron los mellizos entre sí fue $\frac{18\cdot 16}{2}=144$. El número de apretones de manos que se dieron los trillizos entre sí fue $\frac{18\cdot 15}{2}=135$. Y finalmente, el número de apretones de manos que se dieron los mellizos con los trillizos fue $\frac{18\cdot 18}{2}=162$. Si sumamos obtenemos un total de $144 + 135 + 162 = 441$ apretones de manos.

19.(E) En la ecuación que nos dan, despejando a obtenemos que $a=\frac{9b^2}{5-b}$ y de aquí podemos extraer dos conclusiones.
Por una parte, ya que a es un número entero positivo, y el numerador es siempre positivo, también ha de serlo el denominador $0 < 5 - b$, por tanto $b < 5$. Y como b también es un entero positivo solo puede tomar los valores 1, 2, 3, o 4.
Por otra parte, $(5 - b)$ tiene que ser un divisor de $9b^2$. Como hemos reducido a cuatro los posibles valores de b, podemos probar y vemos que los únicos que cumplen esta última propiedad son $b = 2$ y $b = 4$, que me dan, respectivamente, $a = 12$ y $a = 144$. En conclusión, la suma de todos los valores posibles de a es 156.

20.(C) Si llamamos C al punto donde el segmento AB corta a la recta que une los centros de la circunferencia, vemos que lo que necesito es saber cuánto mide AC, que es la altura del triángulo O_1O_2A. Si supiésemos el área de este triángulo, podríamos calcular fácilmente dicha altura, ya que la distancia entre los centros sabemos que es 2.



Para calcular el área del triángulo O_1O_2A, tomaremos el lado AO_1 como base y buscaremos la longitud de la altura DO_2. Puesto que el triángulo es isósceles, la altura DO_2 corta en el punto medio al lado AO_1, por tanto tenemos un triángulo rectángulo ADO_2 del cual conocemos la hipotenusa, que mide 2, y el cateto menor que mide $\frac{1}{2}$, y por tanto el otro cateto $DO_2=\sqrt{2^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$. Llegamos así a que el área del triángulo O_1O_2A es $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{15}}{2}=\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot AC$, y de ahí obtenemos que $AC=\frac{\sqrt{15}}{4}$ y por tanto la distancia que se pedía es el doble.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel III)

21.(A) Buscamos las soluciones enteras de la ecuación $n^2+6n+24-q^2=0$, donde q es un número entero. El discriminante es $\Delta=36-4(24-q^2)=4q^2-60=4(q^2-15)$, y para que las soluciones sean enteras, Δ tiene que ser un cuadrado perfecto, de donde llegamos a que $q^2-15=r^2$, con r un número entero. Es decir, tenemos $q^2-r^2=(q+r)\cdot(q-r)=15$.

Pero el número 15 solo podemos descomponerlo de dos formas distintas, $15\cdot 1$ y $5\cdot 3$, y de aquí llegamos a los posibles valores de q y r. O bien $q=4$ y $r=\pm 1$, o bien $q=8$ y $r=\pm 7$.. De aquí obtenemos que los valores de n posibles son –2, –4, 4 y 10, y su suma vale –12.

22.(E) Teniendo en cuenta que las respuestas posibles están entre el 99! y el 104! vamos a contar, por ejemplo, cuántas veces aparece el factor 2 en el número factorial 100! Por una parte tenemos 50 múltiplos de 2 menores o iguales que 100. De ellos, 25 son además múltiplos de 4, y por tanto, aportan dos veces el factor 2 al factorial. Necesitamos contar también cuántos múltiplos hay de cada potencia de 2 menor que100. Tenemos 12 múltiplos de 8, 6 múltiplos de 16, 3 múltiplos de 32 y 1 múltiplo de 64.

En total el factor 2 en el factorial 100! aparece $50+25+12+6+3+1=97$ veces. Si consideramos el 102! tendremos que añadir los doses que aporta $102=2\cdot 51$, y llegamos a que el factor 2 aparece 98 veces en 102!. No es suficiente. La respuesta es 104! ya que aquí habremos añadido el factor $104=2^2\cdot 13$, y por tanto será divisible entre 2^{100}.

23.(A) Según el enunciado del problema, cada piso tendrá una naranja menos tanto a lo largo como a lo ancho. Es decir, si el primer piso es 5×8, el siguiente piso es 4×7, así el tercer piso es 3×6, el cuarto piso es 2×5 y llegamos al último piso que es 1×4, una única fila.

Por tanto, cada pirámide del frutero tiene: $40+28+18+10+4=100$ naranjas.

24.(E) Contemos primero cuántos números de seis cifras hay que contienen los dígitos dados. Como el dígito más a la izquierda no puede ser 0, tenemos para dicho dígito cinco posibilidades. Una vez fijado dicho dígito, no tenemos restricciones sobre los demás, así que tendremos que contar las permutaciones de cinco elementos. Al final obtenemos $5\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=600$ posibilidades.

Contemos ahora cuántos de esos números acaban en 0. Si la última posición la tenemos ocupada por el 0, en los demás dígitos no tenemos restricciones, así que tendremos que contar solo las permutaciones de cinco elementos, que son $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$.

Contemos para terminar cuántos de esos números acaban en 5. Si la última posición la tenemos ocupada por el 5, para la cifra de la izquierda del todo, que no puede ser 0, tenemos cuatro posibilidades. Una vez fijada, no tenemos restricciones sobre las cifras restantes, así que nos basta con contar las permutaciones de cuatro elementos, y al final obtenemos $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$. Así pues, la probabilidad pedida queda, $\frac{120+96}{600} = \frac{216}{600} = \frac{9}{25}$

25.(A) Llamemos x al área de *SOL*. Los triángulos *SOL* y *LPK* son semejantes, y los lados del segundo miden el doble que los del primero, así pues, la razón entre sus áreas será 4, es decir, el área de *LPK* es $4x$. Tenemos también semejanza entre los triángulos *SOL* y *LUI*, pero en este caso la razón de semejanza entre sus lados es 3, por lo que la razón entre sus áreas será 9. Así llegamos a que el área del triángulo *LUI* es $9x$ y entonces el cuadrilátero *PUIK* tiene de área $5x$.

Llamemos z al área de *LUNA*. Ya que el área de *LUNA* es 3 veces el de *PUNG*, el área de *PUNG* es $\frac{1}{3}z$. Además, sabemos por el enunciado que el área de *PUIK* es el doble que el área de *KING*, y como entre los dos tienen de área $\frac{1}{3}z$, llegamos a que el área de *PUIK* es $\frac{2}{9}z$.

En conclusión, el área de *PUIK* es $5x = \frac{2}{9}z$, así pues, el cociente entre x, el área de *SOL*, y z, el área de *LUNA*, es $\frac{x}{z} = \frac{2}{9 \cdot 5} = \frac{2}{45}$.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

XXIII Concurso de Primavera de Matemáticas

Soluciones 2ª Fase Nivel IV

1. (A) Escribimos cada igualdad en potencias de la misma base, obteniendo $3^a = 3^{4b+8}$ y $5^{3b} = 5^{a-3}$. De esta forma los exponentes tienen que ser iguales y solo nos queda resolver el sistema $\begin{cases} a = 4b+8 \\ 3b = a-3 \end{cases}$ obteniendo los valores $a = 12$ y $b = 5$. Por lo tanto, $a \cdot b = 60$.

2. (B) El centro de la circunferencia se encuentra en el corte de las mediatrices. La mediatriz del segmento AB es la recta $y = 4$ y la del segmento AC es la recta $x = 5$. Por tanto, el centro de la circunferencia será O (5, 4) y el radio es la distancia $AO = \sqrt{(5-1)^2 + (4-1)^2} = 5$. Así que el área del círculo es 25π.

3. (C) Como los vértices consecutivos son 26, 2 y 8, solo tenemos que ver que hay 6 puntos entre el 2 y el 8 y como el polígono es regular también tiene que haber 6 puntos entre el 26 y el 2. Por tanto, la circunferencia está dividida en 30 puntos. Los vértices del polígono estarán en las posiciones 2, 8, 14, 20 y 26, por tanto será un pentágono y la suma pedida será 35.

4. (B) Como a, b y c son enteros y $a + \frac{b}{c} = 197$ y $b + \frac{a}{c} = 92$, entonces, tanto a como b han de ser múltiplos de c y podemos escribir $a = mc$ y $b = nc$.
Los datos del problema son, por tanto:
$\begin{cases} mc + n = 197 \\ nc + m = 92 \end{cases}$ y tenemos que calcular el valor de $\frac{a+b}{c} = \frac{mc+nc}{c} = m + n$
Sumando nuestras dos ecuaciones tenemos que:
$c(m+n) + m + n = 289 \rightarrow (c+1)(m+n) = 289$
Y ahora viene lo bueno, resulta que $289 = 17^2$ y tenemos solo tres casos posibles:
$\begin{cases} c+1 = 1 \\ m+n = 289 \end{cases}$ es imposible porque c no puede ser cero.
$\begin{cases} c+1 = 289 \\ m+n = 1 \end{cases}$ es imposible porque $c = 288$ no da soluciones enteras (¿te animas a comprobarlo?)
$\begin{cases} c+1 = 17 \\ m+n = 17 \end{cases}$ ésta es la única solución posible, $\frac{a+b}{c} = m + n = 17$
La solución es $a = 192$, $b = 80$, $c = 16$.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

5. (B) Vamos a intentar conseguir al función $f(a)$. Si al sustituir a por x^2+1 obtengo un polinomio de grado 4 es porque $f(a)$ es de grado 2 y así $\left(x^2+1\right)^2$ dará x^4+2x^2+1 pero tenía que conseguir un $5x^2$, así que ajusto $f(a)=a^2+3a$, de esta forma $f\left(x^2+1\right)=x^4+5x^2+4$. Aún no lo hemos conseguido porque tenía que dar +3. Solo nos queda un pequeño ajuste. La función será $f(a)=a^2+3a-1$. En este caso ya es fácil averiguar que $f\left(x^2-1\right)=x^4-2x^2+1+3x^2-3-1=x^4+x^2-3$

OTRA FORMA

$f\left(x^2+1\right)=x^4+5x^2+3=x^4+2x^2+1+3x^2+3-1=\left(x^2+1\right)^2+3\left(x^2+1\right)-1$.

Luego la función f es, $f(a)=a^2+3a-1$ y por lo tanto $f(x^2-1)=\left(x^2-1\right)^2+3\left(x^2-1\right)-1=x^4-2x^2+1+3x^2-3-1=x^4+x^2-3$

6. (B) Si $x>1$ cumple que $\frac{1}{(\ln x)^{\ln x}}\le\frac{1}{x^2}$, entonces:

$$x^2\le(\ln x)^{\ln x}\to\ln x^2\le\ln(\ln x)^{\ln x}\to 2\ln x\le\ln x\cdot\ln(\ln x)\to 2\le\ln(\ln x)\to$$
$$\to e^2\le e^{\ln(\ln x)}\to e^2\le\ln x\to e^{(e^2)}\le e^{\ln x}\to e^{(e^2)}\le x$$

7. (E) Elevando al cuadrado los dos miembros de la igualdad, obtenemos $a^2+b+2a\sqrt{b}=14+6\sqrt{5}$, comparando vemos que $a=3$ y $b=5$. Por tanto, a^2+b^2 es 34.

8. (A) Con las instrucciones del enunciado, la sucesión quedará así: $a, a+b-1, b, -a+2, -a-b+3, -b+2, a, a+b-1, b, \ldots$ Como podemos observar, cada 6 términos se repite la sucesión, así que sumamos esos 6 términos de la sucesión y obtenemos un 6. Como 2019 = 6·336+3, la suma de los 2019 términos será $6\cdot 336+a+a+b-1+b=2015+2a+2b$

9. (D) Para que la base tenga un perímetro de 14 solo hay tres posibilidades 1 × 6, 2 × 5 y 3 × 4. En cada uno de estos casos, y usando los 300 cubos indicados, la altura del prisma será 50, 30 y 25 respectivamente. Por tanto, la suma será 105.

10.(A) Si observamos la suma $1+3+9+27$ es múltiplo de 8, la suma de los siguientes cuatro términos $3^4+3^5+3^6+3^7$ también es múltiplo de 8 y así sucesivamente. Así que solo tenemos que ver cuántos de los 2020 términos no están agrupados, para ello vemos que 2020 = 4·505, no hay ninguno desagrupado, por tanto la suma es múltiplo de 8 y por tanto el resto de la división es 0.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

11.(B) Representamos los primeros pasos del juego para entenderlo.

Jorge	<u>15</u>	12	13	<u>14</u>	11	12	<u>13</u>	…	<u>12</u>	…	<u>3</u>	0
Miguel	14	<u>15</u>	12	13	<u>14</u>	11	12	…	11	…	2	
Santiago	13	14	<u>15</u>	12	13	<u>14</u>	11	…	10	…	1	
Bote	0	1	2	3	4	5	6	…	9	…	36	37 (fin)

Vemos que cuando el bote tiene un múltiplo de 3 de piedras es cuando Jorge va perdiendo una piedra: 15, 14, 13… Cuando Jorge tenga 3 piedras, ha perdido 12, así que el bote en ese momento tiene 12·3=36 piedras y en el siguiente paso es cuando acaba el juego, con 37 piedras.

12.(D) Planteamos el área sombreada como la suma de 4 trozos, dos sectores de corona circular y dos sectores circulares. $A_S = 2\cdot\frac{\pi(2^2-1^2)\cdot(180^o-\alpha)}{360^o}+2\cdot\frac{\pi\cdot 1^2\cdot\alpha}{360^o}$

$\Rightarrow A_S = \frac{3\pi\cdot(180^o-\alpha)}{180^o}+\frac{\pi\cdot\alpha}{180^o}=3\pi-\frac{2\pi\alpha}{180^o}$.

Planteamos el área de la zona blanca como la suma de dos sectores de corona circular y dos sectores circulares $A_b = 2\cdot\frac{\pi(2^2-1^2)\cdot\alpha}{360^o}+2\cdot\frac{\pi\cdot 1^2\cdot(180^o-\alpha)}{360^o}$

$\Rightarrow A_b = \frac{3\pi\alpha}{180^o}+\frac{180^o\pi-\pi\alpha}{180^o}=\pi+\frac{2\pi\alpha}{180^o}$.

Utilizamos la condición del enunciado $\frac{A_s}{A_b}=\frac{7}{3}=\frac{3\pi-\frac{\pi\alpha}{90^o}}{\pi+\frac{\pi\alpha}{90^o}}$, operando conseguimos

α $9\pi-\frac{3\pi\alpha}{90^o}=7\pi+\frac{7\pi\alpha}{90^o}\Rightarrow 2\pi=\frac{10\pi\alpha}{90}\Rightarrow\alpha=18^o$

13.(C) Escribimos la suma de los n naturales como la suma de una sucesión aritmética, quedaría así: $\sqrt{1+2+3+...+n}=\sqrt{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}$. Solo tenemos que ver cuando $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ es un cuadrado perfecto. Eso solo ocurre si n es un cuadrado perfecto o uno menos, así que vamos probando con 1, 3, 4, 8, 9, 15, 16, 24, 25, 35, 36, 48, 49, 63, 64, 80, 81 y 99. Vemos que solo lo cumple $n = 1$, $n = 8$ y $n = 49$. Por tanto la solución es 3.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

14.(B) Los puntos *ABCD* forman un cuadrado, *A* y *B* están en el primer cuadrante. Por eso podemos definir $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DA}$ donde $\overrightarrow{DA}$ es perpendicular a $\overrightarrow{CD}=(-t,\,u)$ y tienen el mismo módulo, así que podemos asegurar que $\overrightarrow{DA}=(u,\,t)$, por tanto, $(p,\,q)=(0,\,u)+(u,\,t)$. Del mismo modo $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DA}$, $(r,\,s)=(t,\,0)+(u,\,t)$. Con esta información tenemos que $p=u$, $q=u+t$, $r=u+t$, $s=t$. Utilizamos la información del enunciado que $p+q+r+s=36$, y sustituimos p, q, r, s por los valores obtenidos y tenemos $u+u+t+u+t+t=36$, por tanto $3u+3t=36$, así que $u+t=12$.

15.(D) 2^{1000} tiene 1000 doses. Vamos a ver cuántos doses hay en $1000!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 999\cdot 1000$. Todos los pares aportan un dos, los múltiplos de 4 aportan otro dos extra, los múltiplos de 8 otro más y así los vamos contando. Quedaría así:

- Múltiplos de 2 → 500
- Múltiplos de 4 → 250
- Múltiplos de 8 → 125
- Múltiplos de 16 → 62
- Múltiplos de 32 → 31
- Múltiplos de 64 → 15
- Múltiplos de 128 → 7
- Múltiplos de 256 → 3
- Múltiplos de 512 → 1

Hay 994 doses en 1000! Aún nos faltan seis. 1002 aporta un dos más, 1004 aporta otros dos, 1006 aporta otro más. Llevamos 998, aún nos faltan dos. 1008 aporta cuatro, así que ya hemos llegado a los 1000 doses. Por tanto, la solución es 1008!

16.(D) Aplicamos las propiedades de los logaritmos para operar la expresión dada

$$\frac{\log_a\left(\sqrt[3]{b^5}\right)^2-4\log_a\left(\dfrac{1}{b}\right)}{\log_a\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{b}}}\right)}=\frac{\log_a b^{\frac{10}{3}}-4\log_a b^{-1}}{\log_a b^{\frac{1}{24}}}=$$

$$=\frac{\dfrac{10}{3}\log_a b+4\log_a b}{\dfrac{1}{24}\log_a b}=\frac{\dfrac{10}{3}+4}{\dfrac{1}{24}}=176$$

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

17.(C) Utilizamos la figura para definir $sen\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{l}{2}}{d}=\frac{1}{2\phi}$, por tanto $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\frac{1}{4\phi^2}}$.

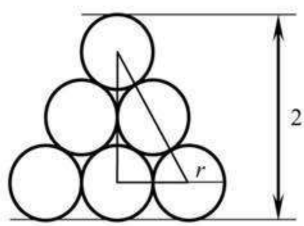
$\cos\alpha=\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)=\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=1-\frac{1}{4\phi^2}-\frac{1}{4\phi^2}=1-\frac{1}{2\phi^2}$, donde

$\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ \Rightarrow\cos\alpha=1-\frac{4}{2\left(1+\sqrt{5}\right)^2}=1-\frac{2}{1+5+2\sqrt{5}}=\frac{4+2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}=\frac{2+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$,

racionalizamos y obtenemos la solución $\cos\alpha=\frac{6+\sqrt{5}-5}{9-5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}=\frac{\phi}{2}$

18.(B) Las pendientes de las rectas son: $m_{AD}=-\frac{-1}{d}$, $m_{BE}=-\frac{2}{e}$, $m_{CF}=-\frac{4}{f}$. Como las rectas son paralelas todas las pendientes tienen que ser iguales, por tanto $f=2e$ y $-f=4d$, utilizando el dato del enunciado $d+e+f=40$, tenemos que $-\frac{f}{4}+\frac{f}{2}+f=40\Rightarrow\frac{5f}{4}=40\Rightarrow f=\frac{160}{5}$, por tanto la pendiente será $-\frac{4}{\frac{160}{5}}=-\frac{1}{8}$

19. (A) Nos apoyamos en el triángulo rectángulo dibujado en la figura, donde la hipotenusa mide $4r$, el cateto horizontal $2r$ y el cateto vertical lo llamamos x. Aplicando Pitágoras tenemos que $x=\sqrt{16r^2-4r^2}=2\sqrt{3}r$. Por otro lado, nos dicen que la altura de la figura resultante es 2, así que $2=2r+x=2r+2\sqrt{3}r$ $\Rightarrow r=\frac{2}{2+2\sqrt{3}}$ que racionalizando y simplificando queda $r=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$



XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

20.(C) Primero vamos a definir todas las variables que vamos a utilizar: la distancia de Marta al gimnasio, d_{MG}, la distancia de Marta a casa, d_{MC}, la velocidad que lleva andando, v_a, la velocidad que lleva en bici, v_b, el tiempo que tarda Marta en llegar al gimnasio, t,el tiempo que tarda Marta en llegar a casa, t'.

Aplicando que en un movimiento uniforme la distancia es igual a la velocidad por el tiempo, tenemos $d_{MG} = v_a \cdot t$, $d_{MC} = v_a \cdot t'$. Utilizamos el movimiento de Marta cuando vuelve a casa a por la bici para ir al gimnasio, esto quedaría $d_{MC} + d_{MC} + d_{MG} = v_a \cdot t' + v_b \cdot (t - t')$, sustituyendo d_{MC} y d_{MG} y teniendo en cuenta que $v_b = 7v_a$, obtenemos $v_a \cdot t' + v_a \cdot t' + v_a \cdot t = v_a \cdot t' + 7v_a \cdot (t - t')$, operando $8v_a \cdot t' = 6v_a \cdot t \Rightarrow \frac{t'}{t} = \frac{3}{4}$.

Por otro lado la relación que piden en el enunciado es $\frac{d_{MC}}{d_{MG}} = \frac{v_a \cdot t'}{v_a \cdot t} = \frac{t'}{t} = \frac{3}{4}$

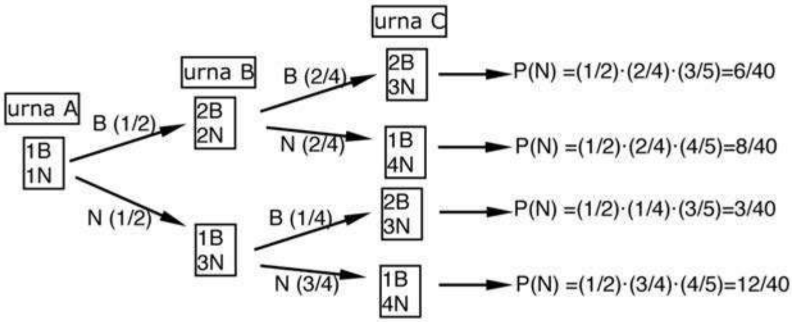
21.(A) Observamos que si $x < -1$, entonces, $x(x^2 - 1)$ es a la fuerza negtaivo y, por tanto, como $y^2 = x(x^2 - 1)$, deducimos que y no existe. Así que ya podemos descartar las respuestas B, C y E. ¿Cómo nos decidimos entre la A y la D? Podemos ver que si x toma valores muy grandes, y también los toma muy grandes (en valor absoluto). La respuesta es A.

22.(D) Empezamos contando cuántos números hay con tres cifras 1 iguales:
$111a$ hay 9 (a puede ser 0, 2, 3, 4, 5 ,6 ,7, 8, 9)
$11a1$ hay 9
$1a11$ hay 9
$a111$ hay 8 (a puede ser 2, 3, 4, 5 ,6 ,7, 8, 9)
En total hay 35 números con tres unos. Igual razonamiento vale si las tres cifras iguales son 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Así pues, llevamos contabilizados ya $9 \cdot 35 = 315$.
Números con tres cifras 0 iguales hay solo 9, del tipo:
$a000$ (a puede ser 1, 2, 3, 4, 5 ,6 ,7, 8, 9)
En total hay $315 + 9 = 324$ números con, exactamente, tres cifras iguales

23.(A) Como $z^2 = 2z - 2$, entonces $z^4 = (2z - 2)^2$. Desarrollamos:
$z^4 = 4z^2 - 8z + 4 = 4z^2 - 8z + 8 - 4 = 4z^2 - 4(2z - 2) - 4 = 4z^2 - 4z^2 - 4 = -4$.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

24.(D) Hagamos un diagrama de árbol:



La probabilidad de obtener bola negra en la última extracción es:

$$P(N)=\frac{6}{40}+\frac{8}{40}+\frac{3}{40}+\frac{12}{40}=\frac{29}{40}.$$

25.(C) PRIMER MÉTODO

Si desconocemos la recta de Euler o simplemente queremos contestar cuál es la opción correcta, elegimos unos números complejos cuyos afijos determinan un triángulo fácil de manejar.

$a = 0 + 2i$, $b = 0 + 0i$ y $c = 2 + 0i$ cuyos afijos son $A(0, 2)$, $B(0, 0)$ y $C(2, 0)$.

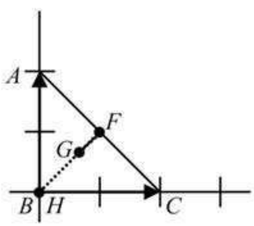
Su circuncentro, por tratarse de un triángulo rectángulo isósceles, es el punto medio de su hipotenusa, $F(1,1)$, su baricentro $G\left(\frac{0+0+2}{3}, \frac{2+0+0}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ y su ortocentro $H(0, 0)$, como muestra la figura.

Calculamos la suma $a + b + c$ que aparece en todas las respuestas.

$a+b+c=(0+2i)+(0+0i)+(2+0i)=2+2i$

$f=1+i \Rightarrow 2f=2+2i$ y como $h = 0 + 0i$, entonces $2f + h = 2 + 2i = a + b + c$.

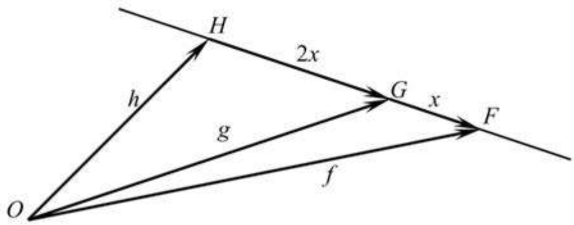
Ninguna de las otras opciones se verifica.



SEGUNDO MÉTODO

Si se conoce la recta de Euler que es la que pasa por: circuncentro, baricentro y ortocentro, con la particularidad de que $HG = 2GF$, entonces, se verifica como muestra la figura, que $\vec{g} = \vec{h} + 2\vec{x}$ y $\vec{f} = \vec{g} + \vec{x}$. Eliminando el vector $\vec{x}$ entre las dos igualdades se concluye que $3\vec{g} = 2\vec{f} + \vec{h}$, es decir, que $3g = 2f + h$.

Y como el baricentro es el afijo de $\frac{a+b+c}{3}$ tenemos que $3\frac{a+b+c}{3} = 2f + h$ y por lo tanto $a + b + c = 2f + h$.



Participantes y relación de ganadores del XXIII Concurso de Primavera de Matemáticas

El número de participantes en la primera fase celebrada en los propios centros sigue aumentando. En este año se superó la cifra de 50 000 estudiantes de 520 centros participantes.

Aunque se inscribieron 3898 concursantes a la segunda fase, el número de participantes fue de 3454. La estadística de participación por niveles y puntuaciones obtenidas puede consultarse en la página (https://www.concursoprimavera.es) de la Sociedad Puig Adam así como la relación de todos los ganadores del concurso y la relación de los centros con mayor puntuación en cada uno de los niveles.

La distribución por niveles de los participantes en la segunda fase, que como siempre tuvo lugar en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, fue la siguiente:

	NIVEL 1				NIVEL 2			
	5º P		6º P		1º ESO		2º ESO	
nº de participantes (inscritos)	145 (150)	76 (85)	386 (406)	196 (208)	301 (327)	157 (173)	400 (440)	266 (290)
Totales por curso	221 (235)		582 (614)		458 (500)		666 (730)	
Totales por nivel	803 (849)				1124 (1230)			

	NIVEL 3				NIVEL 4			
	3º ESO		4º ESO		1º Bach.		2º Bach.	
nº de participantes (inscritos)	316 (372)	150 (181)	347 (401)	173 (199)	248 (294)	119 (152)	130 (163)	44 (57)
Totales por curso	466 (553)		520 (600)		367 (446)		174 (220)	
Totales por nivel	986 (1153)				541 (666)			

Llama la atención la participación según las edades, siendo los niveles 3 y el 2, sobre todo, los que más participan y los mayores, de nivel 4, los que menos.

También queda palpable que las chicas participan en menor número, solo el 34 % de los participantes en esta última fase son chicas y que en los niveles de mayor edad este porcentaje es aún menor, en 2º de bachillerato solo el 25 %.

Los tres, y en un caso cinco, ganadores en cada uno de los niveles fueron:

NIVEL I

1.	Alessandro Mateos Avallone	(6º Primaria) CPR El Valle
2.	Nuria Martín Jiménez	(5º Primaria) CPR Edith Stein
3.	Fernando Coloma Regadera	(6º Primaria) CPR San Agustín
3	Carlos Jiménez Bañón	(6º Primaria) CP Lorenzo Luzuriaga
3	Pablo Laguna Escobar	(6º Primaria) Colegio Alemán de Madrid

NIVEL II

1.	Diego López Aragón	(1º ESO) IES María Guerrero
2.	Miguel Barquero Draper	(2º ESO) CPR San Agustín
3.	David Morilla Iglesias	(2º ESO) IES La Estrella

NIVEL III

1.	Jimena Lozano Simón	(4º ESO) Colegio Alemán de Madrid
2.	Álvaro Gamboa Rodríguez	(3º ESO) IES Ciudad de los Poetas
3.	Santiago Arce Carpio	(4º ESO) Aquinas American School (Pozuelo…

NIVEL IV

1	Gabriel Valery Salov	(1º Bchto) IES Juan de Herrera
2.	Alejandro Meléndez Reyes	(1º Bchto) CPR La Salle
3.	Jorge Maceín Sanz	(1º Bchto) IES San Juan Bautista

Participantes y relación de ganadores

RELACIÓN DE LOS 10 CENTROS CON MEJOR PUNTUACIÓN POR NIVEL

(Elaborada con las tres mejores puntuaciones de cada centro en cada nivel)

XXIII CONCURSO DE PRIMAVERA Mayo 2019

NIVEL I		
NOMBREDEL CENTRO	MUNICIPIO	SUMA DE PUNTOS
CPR SAN AGUSTÍN	Madrid	300
CPR ALKOR	Madrid	280
CP LORENZO LUZURIAGA	Madrid	279
CP CIUDAD NEJAPA	Tres Cantos (Madrid)	274
CP FRAY PEDRO DE AGUADO	Valdemoro (Madrid)	274
CPR FUNDACIÓN CALDEIRO	Madrid	270
CPR SAGRADOS CORAZONES	Madrid	266
CEX COGNITA HASTING HOLDINGS	Madrid	265
CEX RUNNYMEDE COLLEGE	Alcobendas (Madrid)	265
CPR NTRA. SRA. SANTA MARÍA	Madrid	262

NIVEL II		
NOMBREDEL CENTRO	MUNICIPIO	SUMA DE PUNTOS
CPR SAN AGUSTÍN	Madrid	293
IES LA ESTRELLA	Madrid	242
COLEGIO ALEMÁN	Madrid	233
CPR AGUSTINIANO	Madrid	229
IES AVENIDA DE LOS TOREROS	Madrid	229
CPR NTRA SRA DEL BUEN CONSEJO	Madrid	221
IES LÁZARO CARDENAS	Collado Villalba(Madrid)	207
IES DOCTOR MARAÑÓN	Alcalá de Henares(Madrid)	207
CPR ÁBACO	Madrid	205
CPR INTERNACIONAL NUEVO CENTRO	Madrid	202
CPR OBISPO PERELLÓ	Madrid	202

NIVEL III		
NOMBREDEL CENTRO	MUNICIPIO	SUMA DE PUNTOS
CPR JOYFE	Madrid	243
CPR LAUDE FONTENEBRO SCHOOL	Moralzarzal (Madrid)	206
IES SAN JUAN BAUTISTA	Madrid	200
CPR MONTE TABOR	Pozuelo Alarcón (Madrid)	189
CEX KINGS COLLEGE	Tres Cantos (Madrid)	188
CPR AMOR DE DIOS	Madrid	188
IES CIUDAD DE LOS POETAS	Madrid	184
CPR ASUNCIÓN CUESTABLANCA	Madrid	183
IES EL BURGO DE LAS ROZAS	Las Rozas (Madrid)	183
CPR MIRABAL	Boadilla del Monte(Madrid)	179
IES BEATRIZ GALINDO	Madrid	179

NIVEL IV		
NOMBREDEL CENTRO	MUNICIPIO	SUMA DE PUNTOS
IES SAN MATEO	Madrid	228
IES RAMIRO DE MAEZTU	Madrid	224
COLEGIO ALEMÁN	Madrid	213
KING´S COLLEGE	Tres Cantos (Madrid)	207
IES SAN JUAN BAUTISTA	Madrid	199
IES JUANA DE CASTILLA	Madrid	176
CPR COLEGIO JOYFE	Madrid	168
IES ÁNGEL CORELLA	Colmenar Viejo(Madrid)	163
CPR INTERNACIONAL NUEVO CENTRO	Madrid	161
CPR LA SALLE	Madrid	159

XXXVII CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 18 de mayo de 2019

NIVEL I (3º de E.S.O.) Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1. (7 puntos)

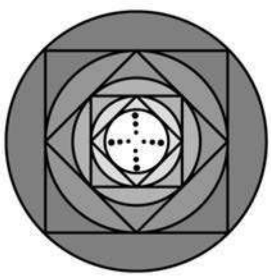
Determina todos los valores reales de $x \neq 0$ para los cuales resulta que la y no es real en la ecuación $y = \dfrac{x}{x + \dfrac{x}{x+y+1}}$

Problema 2. (7 puntos)

En una circunferencia de radio $r = 1$ inscribimos un cuadrado. En este cuadrado inscribimos otra circunferencia y así sucesivamente vamos inscribiendo, de forma alternativa, cuadrados y circunferencias como muestra la figura.

Determina:

a) La suma de las áreas de los infinitos círculos que determinan las circunferencias.
b) La suma de las áreas de los infinitos cuadrados.
c) El cociente entre las áreas de los infinitos círculos y las áreas de los infinitos cuadrados.
d) Comprueba que ese cociente es igual al cociente del área del primer círculo y el primer cuadrado.



XXXVII Concurso Puig Adam

NIVEL I (3º de E.S.O.) Segunda parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1A. (1 punto) Justifica por qué no existe un polígono regular en el que dos lados consecutivos formen un ángulo de 130º y calcula el número de lados del polígono regular en el que dos lados consecutivos forman un ángulo de 175º.

Problema 2A. (1,5 puntos) Sea T la respuesta del problema anterior.

Si x e y son enteros positivos que verifican la igualdad $Tx^2 = y^3$, ¿cuál es el menor valor posible para la suma $x + y$?

Problema 3A. (2 puntos) Sea T la respuesta del problema anterior.
Aplicamos al punto A, de coordenadas $(T, 5)$, un giro de centro el punto $O(16, -6)$ y 90º de amplitud (en sentido antihorario) para obtener otro punto B. A continuación aplicamos a este punto una traslación con vector de traslación $\vec{u} = (7, 4)$ (7 unidades a la derecha y 4 hacia arriba) para obtener otro punto C.
Calcula el área del triángulo ABC.

Problema 1B. (1 punto) Tenemos tres números enteros consecutivos a, b, c tales que verifican que al sumar 10 al del medio y un número primo k al mayor se obtiene una progresión geométrica a, $b + 10$, $c + k$. ¿Qué número tiene que ser el primo k?

Problema 2B. (1,5 puntos) Sea T la respuesta del problema anterior.

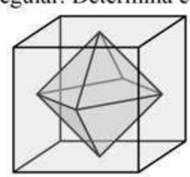
Dadas las funciones $g(x) = 7x + 3$ y $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(7x+3) = x^2 - 5x + 8$ calcula el valor de $f(T)$.

Problema 3B. (2 puntos) Sea T la respuesta del problema anterior.
Completa el "cuadrado mágico" de la figura. ¿Cuál es el mayor número que aparece?
Nota. En un cuadrado mágico la suma de los números de cada fila, cada columna y cada diagonal es la misma

		14
10		***T***

Problema 4. (5 puntos) Sea a la respuesta del problema 3A y b la respuesta del problema 3B.

La arista del cubo de la figura es $\frac{a}{b}$. Los centros de las caras del cubo son los vértices de un octaedro regular. Determina el volumen del octaedro.



XXXVII Concurso Puig Adam

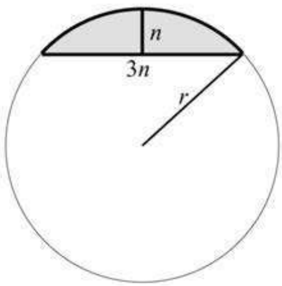
NIVEL II (4º de E.S.O.) Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1. (7 puntos)

Encuentra todos los números n, comprendidos entre 2000 y 3000, tales que los restos que se obtienen al dividirlos entre 4, 5 y 7 son, respectivamente, 3, 1 y 6.
Es decir: $n = 4a + 3 = 5b + 1 = 7c + 6$.

Problema 2. (7 puntos)

Sea n un entero positivo. En el segmento circular de la figura la longitud de la cuerda es $3n$ y la de la flecha n. Determina el menor valor de n para el cual la longitud del radio de la circunferencia es un número entero. Calcula también la longitud del radio.

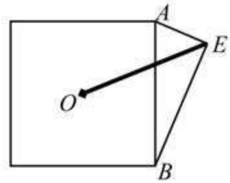


XXXVII Concurso Puig Adam

NIVEL II (4º de E.S.O.) Segunda parte (1 hora 30 minutos)

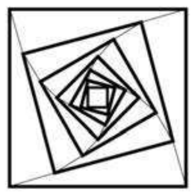
Problema 1A. (1 punto)
¿Cuántos números de 6 cifras de la forma 2019AB son múltiplos de 21?

Problema 2A. (1,5 puntos) Sea T la respuesta del problema anterior.
La hipotenusa de un triángulo rectángulo coincide con el lado de un cuadrado de centro O, como muestra la figura.
Si la longitud del cateto AE es T y la del segmento OE es $\frac{17}{\sqrt{2}}$,
¿cuál es la longitud del lado AB del cuadrado?



Problema 3A. (2 puntos) Sea T la respuesta del problema anterior.
La suma de las longitudes de las 12 aristas de una caja, con tapa, con forma de ortoedro (caras rectangulares) es 56 cm y la distancia entre uno de los vértices de la caja y el más lejano es T cm. ¿Cuál es, en cm^2, el área total de la caja?

Problema 1B. (1 punto) En la portada del Boletín de la Sociedad Puig Adam de Matemáticas aparece esta figura, formada por cuadrados y triángulos rectángulos, todos semejantes entre sí. Los lados del cuadrado más pequeño son paralelos a los del cuadrado mayor.
¿Cuántos grados mide el ángulo menor de los triángulos rectángulos?



Problema 2B. (1,5 puntos) Sea T la respuesta del problema anterior.
La suma de los T primeros términos de una progresión aritmética, de diferencia 5, es 570. ¿Cuál es el primer término de la progresión?

Problema 3B. (2 puntos) Sea T la respuesta del problema anterior..
En un dado defectuoso se sabe que, al lanzarlo, la probabilidad de obtener un 6 es doble de la probabilidad de obtener un 1 y que las demás caras tienen la misma probabilidad de obtenerse que las de un dado perfecto. Se ha lanzado el dado T veces y en ninguno de los lanzamientos se ha obtenido el 1. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de puntos obtenidos sea 10?

Problema 4. (5 puntos) Sea a la respuesta del problema 3A y b la respuesta del problema 3B.
Un cubo de arista $a \cdot b$ está inscrito en una superficie esférica. Determina el área de dicha superficie esférica.

XXXVII Concurso Puig Adam

NIVEL III (1º de Bachillerato) Primera parte (1 hora 30 minutos)

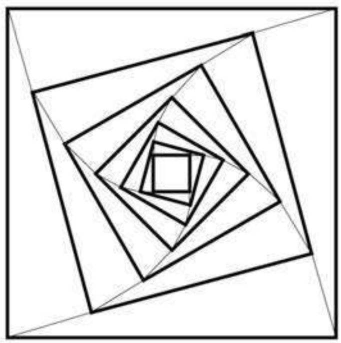
Problema 1. (7 puntos)

Determina todos los enteros positivos m y n para los que $m^2 + 8 = 3^n$.

.

Problema 2. (7 puntos)

En la portada del Boletín de la Sociedad Puig Adam de Matemáticas aparece esta figura formada por cuadrados y triángulos rectángulos, todos semejantes entre sí y los lados del cuadrado más pequeño son paralelos a los del cuadrado mayor.
Si el lado del cuadrado mayor es de 8 cm, ¿cuál es el área del cuadrado menor?



XXXVII Concurso Puig Adam

NIVEL III (1º de Bachillerato) Segunda parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1A. (1 punto)

Encontrar el valor de x que verifica la ecuación $\sqrt{x}+\sqrt{x+80}=10\sqrt{2}$.

Problema 2A. (1,5 puntos) Sea T la respuesta del problema anterior y.

Se consideran los enteros positivos a, b, c, tales que $a + 2bc = T + 2$ y $a + b = T + 1$.
¿Cuál es el valor de $a + b + c$?

Problema 3A. (2 puntos) Sea T la respuesta del problema anterior.

Calcula el valor de la suma $\log_4 2+\log_4 2^2+\log_4 2^3+\log_4 2^4+...+\log_4 2^T$.

Problema 1B. (1 punto)

Sea k un número dado, a y b las soluciones de la ecuación $x^2+2x-k=0$ y c y d las soluciones de la ecuación $x^2-4x+k-4=0$. Calcula $a^2+b^2+c^2+d^2$.

Problema 2B. (1,5 puntos) Sea T la respuesta del problema anterior y $b=\dfrac{T}{7}$.

Calcula el valor máximo de la función $f(x)=-x^2+bx+c$ sabiendo que $f(20)=19$.

Problema 3B. (2 puntos) Sea T la respuesta del problema anterior..

Se considera la progresión aritmética $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$ de diferencia $d = 4$, $a_1 = T$ y $a_n = 2019$. Determina el valor de n.

Problema 4. (5 puntos)

Sean a y b las respuestas de los problemas 3A y 3B, respectivamente.
Una pista circular tiene un perímetro de a metros. Alex y Bea empiezan a correr en esa pista, desde el mismo punto y simultáneamente. Alex corre a velocidad constante y tarda 15 segundos en recorrer toda la pista. Bea, que también corre a velocidad constante, tarda 160 segundos en recorrer b metros. Cuando vuelven a coincidir, por primera vez, en el punto de salida, Alex ha dado m vueltas y Bea ha dado n vueltas. Calcula $20m + 19n$.

XIX Concurso Intercentros de Matemáticas *"Joaquín Hernández"* Comunidad de Madrid

30 de noviembre de 2019

PRUEBA POR EQUIPOS 1º y 2º de E.S.O. (45 minutos)

1. Como seguro que ya sabéis, la media aritmética de dos números positivos x e y es la mitad de su suma: $\frac{x+y}{2}$. Lo que tal vez no sepáis es que la media geométrica de dos números es la raíz cuadrada de su producto: $\sqrt{x \cdot y}$.
Encontrad un par de números tales que su media aritmética sea 13 y su media geométrica sea 12. Explicad cómo los habéis encontrado.

2. Cuando en B son las 14:00 en A son las 18:00. Un avión partió un viernes de A hacia B haciendo una escala intermedia en C. Durante la escala en C estuvieron detenidos 2 horas y 10 minutos. El vuelo llegó a B el sábado a las 12:15 (hora de B). El avión estuvo volando en total 14 horas y 10 minutos. ¿Qué hora era en A cuando despegó el avión?

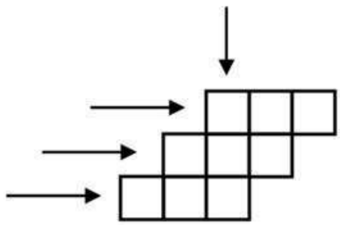
3. El cuadrado $ABCD$ tienen 36 cm de lado. El punto E está sobre el lado AB a 12 cm de B, F es el punto medio del lado BC y el punto G está sobre CD a 12 cm de C.
¿Cuál es el área de la región que está dentro del triángulo EFG y fuera del triángulo AFD?

XIX Concurso Intercentros

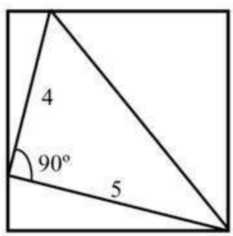
<u>PRUEBA POR EQUIPOS</u> 3º y 4º de E.S.O. (45 minutos)

1. Un juego consiste en elegir varios enteros positivos diferentes que sumen 17 y hallar su producto. ¿Cuál es el producto máximo que puede conseguirse?

2. Tenéis que rellenar esta cuadrícula con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 de tal manera que los números de tres cifras que señalan las flechas sean cuadrados perfectos.



3. Hemos encajado un triángulo rectángulo de catetos 4 y 5 en un cuadrado como puedes ver en el dibujo. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?

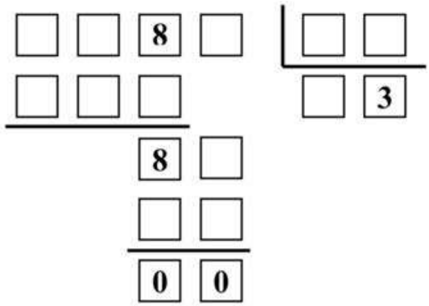


XIX Concurso Intercentros

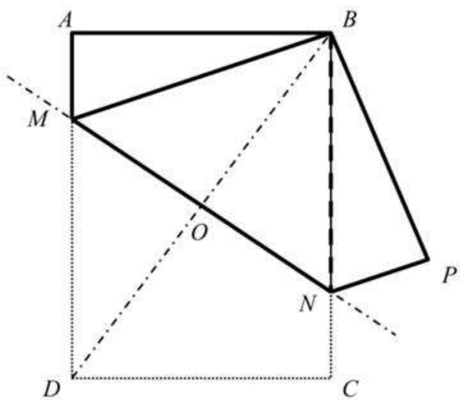
PRUEBA POR EQUIPOS Bachillerato. (45 minutos)

1. Tenemos dos números naturales tales que la suma de: su producto, su suma, el cociente del mayor entre el menor y la diferencia del mayor menos el menor es igual a 3125. ¿Cuáles son esos dos números?

2. Completa la división



3. Disponemos de una hoja de papel rectangular, $ABCD$, de lados $AB = 8$ cm y $AD = 16$ cm. La plegamos de manera que el vértice D coincida con el B, como muestra la figura. Calcula la longitud del segmento MN.



XIX Concurso Intercentros

1. En un tablero de ajedrez de 8×8 colocamos números siguiendo las siguientes reglas:

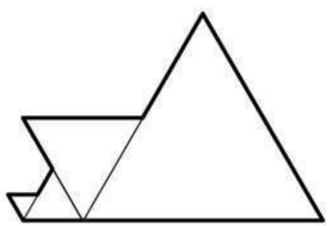
- En las casillas blancas se escribe un 0 o un 1, de modo que haya la misma cantidad de casillas blancas con ceros que con unos.
- En cada casilla negra se escribe la suma de los números que hay en las casillas blancas vecinas.

Una vez relleno hacemos la suma de todos los números que hay escritos en el tablero. ¿Cuál es la diferencia entre el menor y el mayor valor que podemos obtener para esa suma?

2. A un concierto benéfico acudieron 2 000 personas. Cada una pagó por su entrada una cantidad entera entre 1 y 500 euros (ambos inclusive).
Al hacer caja se observó que se habían vendido entradas de todos los precios posibles, que ningún precio se repitió más de 10 veces y que, con esas condiciones, la recaudación fue la mínima posible.
¿Cuántas entradas de cada precio se vendieron?

3. Si $20^{2019} = 10^{2010} \cdot 40^{9} \cdot 2^{n}$, ¿cuánto vale n?

4. Partiendo de un triangulito equilátero de 1 cm de lado, y añadiendo otros cuatro triángulos equiláteros tales que los lados de uno miden el doble que los del anterior hemos formado esta figura. Si continuamos hasta poner 10 triángulos, ¿cuál será el perímetro de la figura resultante? Encuentra una fórmula que te permita calcular el perímetro para n triángulos.

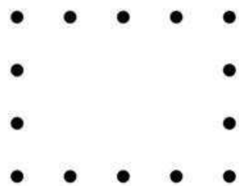


XIX Concurso Intercentros

PRUEBA INDIVIDUAL 3º y 4º de E.S.O. (90 minutos)

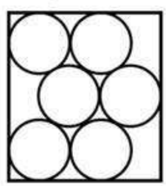
1. Dentro de un año la edad de Alberto será el doble que la edad de Bea. Dentro de unos años, cuando yo tenga 66 años, la suma de las edades de Alberto y Bea también será 66. Dentro de 6 años mi edad será un múltiplo de la suma de las edades de Alberto y Bea. ¿Cuántos años tengo hoy?

2. Estás viendo algunos puntos formando un rectángulo. Usando esos puntos como vértices, ¿cuántos triángulos podemos formar?



3. Hemos metido en una caja 100 tarjetas numeradas desde el 1 hasta el 100. ¿Cuál es el máximo número de tarjetas que puedo elegir para asegurarme de que entre las que elijo no hay ninguna que sea el doble de otra?

4. Los seis círculos de la figura tienen un radio de 5 cm y, como ves, son tangentes entre sí y también a los lados de un rectángulo.
¿Cuánto miden los lados del rectángulo?



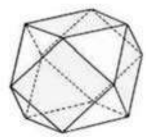
XIX Concurso Intercentros

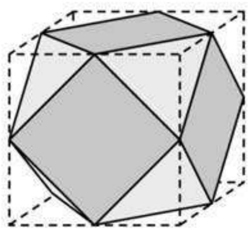
PRUEBA INDIVIDUAL Bachillerato (90 minutos)

1. Tres amigos tienen que sembrar un huerto y atacan juntos esta tarea. Primero empiezan Don Retorcido y la niña Centésima y entre los dos plantan la mitad del huerto. Después Don Retorcido se pone a descansar y continúan con la tarea la niña Centésima y Comenúmeros. Al terminar Don Retorcido apunta "es curioso, de esta manera hemos tardado el doble de tiempo que si hubiéramos trabajado los tres juntos desde el principio". Si en plantar una semilla Don Retorcido emplea 2 segundos y Comenúmeros emplea 5 segundos, ¿cuántos segundos emplea la niña Centésima en plantar una semilla?

2. Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$ y $g(x) = 2x - 3$ calcula el valor de $\left(f \circ g \circ f^{-1}\right)(2)$.

3. El *cuboctaedro* es un poliedro arquimediano o poliedro semirregular cuyas caras son triángulos equiláteros y cuadrados. Se obtiene truncando un cubo por los vértices.
Calcula la superficie del cuboctaedro que se obtiene truncando un cubo de volumen de 64 cm^3.





4. En una bolsa hay bolas blancas y negras. Si quitamos 15 bolas blancas el porcentaje de bolas blancas disminuye un 3 % y si aumentamos 10 bolas negras el porcentaje de bolas blancas disminuye un 5 %. ¿Cuántas bolas de cada clase hay en la bolsa?

XIX Concurso Intercentros

PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

1º y 2º de ESO.-

Empieza aquí

1A.- En un curso de inglés se inscribieron 30 personas.
La media de edad de todos los inscritos es 21. La media de edad de los chicos es 25 y la de las chicas es 20.
¿Cuántos de los inscritos son hombres?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

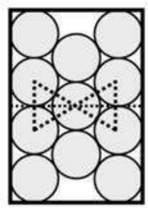
1B.- Sea "T" la respuesta del problema 2B

A la fiesta de la geometría acudieron $2 \cdot T$ invitados entre puntos y rectas. El primer punto bailó con 8 rectas; el siguiente punto bailó con 10 rectas; el siguiente con 12; y así sucesivamente hasta que el último punto bailó con todas las rectas.
¿Cuántas rectas fueron a la fiesta de la geometría?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1C.- Sea "T" la respuesta del problema 2C.

Disponemos de 11 balones de minibasket de $\frac{T}{2}$ cm de diámetro que queremos guardar en una caja de $\frac{T}{2}$ cm de alta y $2T$ cm de larga.
Calcula el ancho de la caja más pequeña en la que caben los 11 balones.



(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

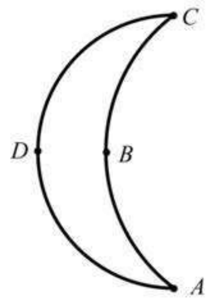
XIX Concurso Intercentros

3º y 4º de ESO.-

.

2A.- Sea "T" la respuesta del problema 3A.

En la luna de la figura ADC es una semicircunferencia de radio T y ABC es un cuarto de circunferencia. ¿Cuál es el área de la luna?



(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

➲2B.- **Empieza aquí** ¿Cuánto suman las cifras del número A?

$A = 7665667^2 - 7665662^2$

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

2C.- Sea "T" la respuesta del problema 3C.

Calcula el área del cuadrilátero limitado por las gráficas de estas cuatro funciones

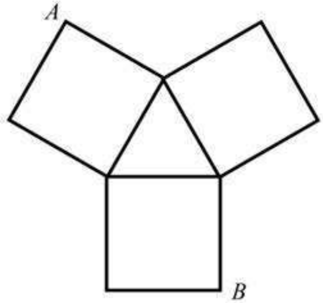
$$y = x - 7\,,\quad y = -x - 1,\quad y = T + 2(6 - x),\quad y = 2x - 4$$

Nota. Es aconsejable representar gráficamente las funciones.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

XIX Concurso Intercentros

Bachillerato.-



3A.- Sea "T" la respuesta del problema 1A.

En la figura ves un triángulo equilátero de lado T con un cuadrado sobre cada uno de sus lados. Expresa la longitud del segmento AB en la forma $a+b\sqrt{c}$ con a, b, c enteros y c el menor posible.

¿Cuánto vale $\dfrac{a+b+c}{3}$?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

3B.- Sea "T" la respuesta del problema 1B

Cuando todos partieron por la mañana al gran picnic anual, cada minibús llevaba exactamente el mismo número de personas. A mitad de camino se rompieron $T-52$ minibuses, de modo que cada minibús debió llevar una persona más. Cuando volvían a casa se estropearon $T-47$ minibuses más, así que en el camino de regreso había en cada minibús 3 personas más que al salir por la mañana.
¿Cuántas personas asistieron al gran picnic anual?

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

Empieza aquí **3C.-** Un cuadrado y un octógono regular tienen la misma apotema. Si el perímetro del cuadrado es $4+4\sqrt{2}$, ¿cuál es el perímetro del octógono?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

LVI OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Comunidad de Madrid

FASE CERO: viernes 26 de octubre de 2019

- En la hoja de respuestas, escribe la letra de la opción que creas correcta
- Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos; cada respuesta en blanco 1 punto, y cada respuesta errónea, 0 puntos.
- No está permitido el uso de calculadoras, instrumentos de medida o de cualquier aparato electrónico.
- TIEMPO: 3 horas.

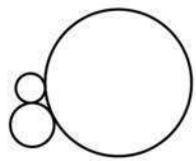
1. Un grupo de 25 estudiantes se presenta a una prueba en la que pueden obtener una nota entera desde 0 hasta 100. ¿Cuál puede ser la máxima diferencia entre la nota media y la mediana de este grupo de estudiantes?

   A) 48 B) 50 C) 40 D) 52 E) 60

2. Los números enteros positivos 30, 72, y N tienen la propiedad de que el producto de dos cualesquiera de ellos es divisible entre el tercero. ¿Cuál es el menor valor posible de N?

   A) 120 B) 180 C) 30 D) 60 E) 10

3. He dibujado tres circunferencias (de radios 2, 3 y 10 cm) tangentes entre sí como ves en el dibujo. ¿Cuál es el área, en cm^2, del triángulo cuyos vértices son los centros de las circunferencias?



   A) 28 B) 20,5 C) 10 D) 15 E) 30

4. Un número n de cuatro cifras es capicúa. También es capicúa el número $n + 312$, que tiene cinco cifras. ¿Cuál es la suma de las cifras de n?

   A) 18 B) 14 C) 32 D) 33 E) 34

5. En la sucesión a_1, 6, a_3, …, la suma de cuatro términos consecutivos es constante, y también es constante la diferencia –el mayor menos el menor– de dos términos consecutivos cualesquiera. Sabiendo además que $a_1 < a_2 = 6 < a_3$, ¿cuánto vale la suma de los 2019 primeros términos de la sucesión?

   A) 2019 B) 2020 C) 4038 D) 12 114 E) 12 120

6. ¿Para qué valores del número real k la ecuación $x^2 + kx + k = 0$ tiene dos soluciones reales de distinto signo?

   A) $0 < k < 1$ B) $k > 4$ C) $k > 0$ D) $k < 0$ E) $k > 1$

LVI Olimpiada Matemática

7. En un pentágono regular *ABCDE* de lado 1, las diagonales *AC* y *BE* se cortan en *P*. ¿Cuánto mide el segmento *PC*?

A) 1 B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C) $\sqrt{5}-1$ D) $4\left(\sqrt{5}-2\right)$ E) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

8. ¿Cuántos subconjuntos *A* del conjunto $B = \{1, 2, 3, \ldots, 19, 20\}$ cumplen que:

[número de elementos de *A*] × [máximo elemento de *A*] = 18?

A) 380 B) 20 C) 3 D) 190 E) 19

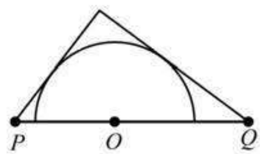
9. Los dos lados opuestos de un cuadrado aumentan su longitud en un 25%. ¿En qué porcentaje deben disminuir los otros dos lados para que el área del rectángulo resultante sea la misma que la del cuadrado inicial?

A) 20% B) 22,5% C) 25% D) 40% E) 42%

10. Un polinomio $P(x)$ cumple que $P(x^2+1) = x^4 - 2x^2 + 1$. ¿Cuál de las siguientes expresiones es igual a $P(x^2+2)$?

A) $x^4 - 4x^2 + 2$ B) $x^4 - 2x^2$ C) $x^4 - 4x^2 + 1$ D) x^4
E) $x^4 - 2x^2 + 2$

11. En el dibujo mostramos un triángulo rectángulo de hipotenusa *PQ* en el que hay inscrita una semicircunferencia de radio 12 cm y centro *O*. Si *PO* mide 15 cm, ¿cuántos cm mide *OQ*?



A) 24 B) 20 C) 25 D) 22,5 E) 18

12. Si el número $N = 99\ldots99$ está formado exclusivamente por 99 nueves, ¿cuánto suman las cifras del número N^2?

A) 1782 B) 900 C) 891 D) 899 E) 990

13. La suma de un número más su inverso es 7. ¿Cuánto vale la suma del cubo de dicho número más el inverso de su cubo?

A) 322 B) 700 C) 343 D) 294 E) 336

14. De cierta función *f* sabemos que $f(1) = 4$ y que $f(x) \cdot f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ para todos los reales *x*, *y*. ¿Cuál es el valor de $f(3)$?

A) 194 B) 160 C) 52 D) 48 E) 62

15. En el cuadrilátero *ABCD*, *AB* = 24, *BC* = 20, *CD* = 15, *DA* = 7 y la diagonal *BD* mide 25. ¿Cuánto mide la diagonal *AC*?

A) 18 B) $14\sqrt{2}$ C) 20 D) 21 E) 24

16. Si $n=\sqrt{120-\sqrt{x}}$ es entero, ¿cuántos valores puede tomar x?

A) 3 B) 6 C) 9 D) 10 E) 11

17. Si los términos 5º y 8º de una progresión geométrica son 7! y 8!, ¿cuál es el primer término de esa progresión?

A) 60 B) 75 C) 120 D) 225 E) 315

18. El lado del cuadrado *LUCA* es 20. En el interior de *LUCA* tomamos un punto *P* de modo que el triángulo *PUC* sea equilátero. Si $LP^2 = a - b\sqrt{3}$ con a y b enteros, ¿Cuál es el valor de b?

A) 350 B) 400 C) 450 D) 500 E) 625

19. Los números *retorcidos* son enteros positivos múltiplos de 4, y tales que al sumarles 1, el nuevo número es múltiplo de 5, y al sumarles 2 lo es de 6. ¿Cuántos números *retorcidos* son menores que 2019?

A) 16 B) 17 C) 18 D) 33 E) 34

20. En la celda central de un tablero 5 × 5 colocamos una ficha. Un movimiento de la ficha consiste en desplazarla a una celda con la que comparta un vértice. Tras realizar al azar 12 movimientos, ¿cuál es la probabilidad de llegar a una de las esquinas del tablero?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{4}{25}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{13}$ E) $\frac{1}{4}$

21. Para cuántos enteros n positivos se consigue que $n^2 + 18n$ sea un cuadrado perfecto?

A) Uno B) Dos C) Tres D) Cuatro E) Ninguno

22. Pensemos ahora en números naturales con la siguiente propiedad: la suma de sus cuatro divisores es 42. ¿Cuántos números cumplen esta propiedad?

A) Ninguno B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

23. Tengo una bolsa llena de canicas idénticas. La suma de los pesos de todas las parejas posibles es 630 gramos. La suma de los pesos de todas las ternas posibles es 4095 gramos. ¿Cuántos gramos pesa cada canica?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

24. El triángulo *ABC* es isósceles, con *AB* = *AC*. La bisectriz interior del ángulo *ABC* corta al lado *AC* en el punto *P*. Si la circunferencia circunscrita al triángulo *BPC* pasa por el punto medio de *AB*, el ángulo *BAC* mide…

A) 30º B) 45º C) 60º D) 90º E) 105º

LVI Olimpiada Matemática

25. En una urna hay tres bolas numeradas con los números 1, 2 y 3. Sacamos una al azar, anotamos el número y la devolvemos a la urna. Volvemos a realizar este proceso dos veces más y al finalizar sumamos los tres números obtenidos, que resulta ser 6. ¿Cuál es la probabilidad de que haya salido la bola del número 2 en las tres ocasiones?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{7}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{27}$

26. Si $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ y $x^2 \neq 1$, entonces $f(-x)$ es igual a:

A) $\dfrac{1}{f(x)}$ B) $-f(x)$ C) $f(x)$ D) $-\dfrac{1}{f(x)}$ E) $1-\dfrac{1}{f(x)}$

27. Dos rectas con pendientes $\frac{1}{2}$ y 2 se cortan se cortan en el punto $P(2,2)$. El área del triángulo determinado por estas dos rectas y la que tiene de ecuación $x+y=10$ es:

A) 4 B) $4\sqrt{2}$ C) 6 D) 8 E) $6\sqrt{2}$

28. Si n es un entero positivo tal que $(n+1)!+(n+2)!=n!\cdot 440$, la suma de las cifras de n es:

A) 3 B) 5 C) 6 D) 10 E) 11

29. Del triángulo ABC sabemos que $AB = AC$ y que el ángulo desigual mide 40º. Si la altura trazada desde C corta a su base AB en el punto D con $BD\cdot BA = 32$ cm, ¿qué longitud, en cm, tiene el lado BC?

A) 8 B) $4\sqrt{2}$ C) 4 D) 6 E) 10

30. Don Retorcido ha dibujado veinte puntos en una circunferencia, todos ellos igualmente espaciados. Y se despide con esta pregunta: ¿cuántos puntos como mínimo tienes que elegir al azar para asegurarte de que cuatro de ellos serán vértices de un rectángulo?

A) 4 B) 8 C) 12 D) 11 E) 16

REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

LVI OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Comunidad de Madrid

FASE LOCAL: segunda prueba. 14 de diciembre de 2019
Tiempo: 3h 30 min

1. El paralelogramo $ABCD$ tiene área 192. Llamamos M y N a los puntos medios de los lados AD y BC, respectivamente. La recta DN corta a la prolongación de AB en el punto P. La reccta DN corta a la prolongación de AB en el punto Q. Si CP y DQ se cortan en O, calcula el área del triángulo OPQ.

2. Consideramos la sucesión $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y para $n \geq 1$, $a_{n+2} = a_n^2 + a_{n+1}^2$.

¿Cuál es la cifra de las unidades de a_{2019}?

3. Si $\frac{2}{35} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ con $x \neq y$ enteros positivos, encuentra el menor valor posible de $x + y$.

4. Tenemos 20 tarjetas, numeradas desde el 1 hasta el 20. Jimena elige al azar una de ellas, con el número j. A continuación, Álvaro *el.ige* al azar otra tarjeta, que tiene el número a. ¿Cuál es la probabilidad de que la diferencia $a - j$ sea al menos 2?
(Expresa el resultado en forma de fracción irreducible).

5. Si a y b son números reales diferentes, con $a \geq 0$, $b \geq 0$ y verificando $a + \sqrt{b} = b + \sqrt{a}$, ¿Cuál es el valor mayor que puede tomar la suma $a + b$?

6. ¿Cuál es el menor entero $n > 1$ tal que el producto de todos sus divisores positivos es n^4?

7. Las medidas de los lados del triángulo escaleno ABC son números enteros y su perímetro es 2019. La bisectriz de $\angle C$ corta a AB en D, con $AD = 229$. Si las medidas de AC y AD son enteros primos entre sí, calcula BC.

8. Gabriel ha olvidado el código de seguridad de su teléfono, aunque recuerda que sus cuatro cifras sumaban por lo menos 8, que la primera estaba entre 0 y 6, la segunda entre 0 y 3, la tercera entre 0 y 4 y la cuarta entre 0 y 2, siempre con los extremos incluidos. ¿Cuántos son los posibles códigos del teléfono de Gabriel?

9. Diremos que un entero positivo n es *genial* si cumple simultáneamente las condiciones siguientes: ninguna de sus cifras es 0; n es múltiplo de 11; n es múltiplo de 12 y cualquiera de los números que obtenemos al permutar las cifras de n sigue siendo múltiplo de 12. ¿Cuántos números *geniales* de diez cifras hay?

10. El área del triángulo ABC es 300. Sea Q el punto medio de BC, P un punto de AC con $CP = 3PA$, y R un punto en AB tal que el área de ΔPQR es el doble del área de ΔRBQ. Determina el área de ΔPQR.

LVI Olimpiada Matemática

LVI OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Prueba de selección
Comunidad de Madrid

Primera sesión, viernes tarde 17 de enero de 2020

No está permitido el uso de calculadoras. Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas.

1. Consideramos el polinomio $p(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$. Demostrar que $p(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ si y solamente .si $a = b = c$.

2. El triángulo ABC es acutángulo. La altura correspondiente al vértice C corta al lado opuesto AB en el punto D. Sea Γ la circunferencia circunscrita a ΔABC, y sean t_A y t_B las tangentes a Γ en los puntos A y B respectivamente. Los puntos E y F están en las rectas t_A y t_B, respectivamente, y son tales que CE es perpendicular a t_A y CF es perpendicular a t_B. Demostrar que $\dfrac{CD}{CE} = \dfrac{CF}{CD}$.

3. En cierta olimpiada de matemáticas, consistente en la resolución de cinco problemas, participaron varios estudiantes. Ninguno de ellos resolvió los cinco problemas, pero cada estudiante resolvió al menos dos. Se sabe además que cada par de problemas propuestos fue resuelto por dos estudiantes exactamente. Determinar el mínimo número de estudiantes que participaron en esa olimpiada.

Segunda sesión, Sábado 18 de enero de 2020
Tiempo: 3 horas

4. Ana y Bernardo juegan al siguiente juego. Se empieza con una bolsa que contiene $n \geq 1$ piedras. En turnos sucesivos y empezando por Ana, cada jugador puede hacer los siguientes movimientos: si el número de piedras en la bolsa es par, el jugador puede coger una sola piedra o la mitad de las piedras. Si el número de piedras en la bolsa es impar, tiene que coger una sola piedra. El objetivo del juego es coger la última piedra. Determinar para qué valores de n Ana tiene una estrategia ganadora.

5. Determinar para qué valores de n existe un polígono convexo de n lados cuyos ángulos internos, expresados en grados, son todos enteros, están en progresión aritmética y no son todos iguales

.

6. Sea O un punto interior del triángulo ABC y sean M, N y P las intersecciones de AO con BC, BO con CA y CO con AB, respectivamente. Demostrar que entre los seis triángulos que se forman, hay al menos dos cuya área es menor o igual que $[ABC] = 6$.
Observación: $[ABC]$ denota el área del triángulo ABC.

XXVª OLIMPIADA de MAYO
Mayo de 2019

Olimpíada de Mayo
Competencia Juvenil Iberoamericana de Matemática

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

Primer Nivel

PROBLEMA 1

Hallar todos los números de dos dígitos $\overline{ab}$ que elevados al cuadrado dan un resultado donde los dos últimos dígitos son $\overline{ab}$

PROBLEMA 2

En un torneo de ajedrez participaron más de cinco competidores. Cada competidor jugó exactamente una vez contra cada uno de los otros competidores. Cinco de los competidores perdieron cada uno exactamente dos juegos. Todos los demás competidores ganaron, cada uno, exactamente tres juegos. No hubo empates en el torneo. Determinar cuantos competidores hubo y mostrar un torneo que verifique todas las condiciones.

PROBLEMA 3

Gus tiene que hacer una lista de 250 números enteros positivos, no necesariamente distintos, tal que cada número sea igual a la cantidad de números de la lista que son distintos de él. Por ejemplo, si 15 es un número de la lista entonces la lista contiene 15números distintos de 15.
Determinar la máxima cantidad de números distintos que puede contener la lista de Gus.

PROBLEMA 4

Hay que dividir un papel cuadrado en tres partes mediante dos cortes rectos, de modo que al ubicar estas partes de forma adecuada, sin huecos ni superposiciones, se forme un triángulo obtusángulo. Indicar cómo cortar el cuadrado y cómo armar el triángulo con las tres partes.
Nota. Un triángulo es obtusángulo si uno de sus ángulos mide más de 90º.

PROBLEMA 5

Se tiene un tablero de tres filas y 2019 columnas. En la primera fila están escritos los números enteros de 1 a 2019 inclusive, ordenados de menor a mayor. En la segunda fila, Ana escribe esos mismos números pero ordenados a su elección. En cada casilla de la tercera fila se escribe la diferencia entre los dos números ya escritos en su misma columna

XXV Olimpiada Mayo

(el mayor menos el menor). Beto tiene que pintar algunos números de la tercera fila de manera que la suma de los números pintados sea igual a la suma de los números de esa fila que quedaron sin pintar. ¿Puede Ana completar la segunda fila de manera que Beto no logre su objetivo?

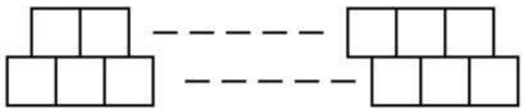
Segundo Nivel

PROBLEMA 1

Un entero positivo es *piola* si los 9 restos que se obtienen al dividirlo entre 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 son todos diferentes y distintos de cero.
¿Cuántos enteros piolas hay entre 1 y 100 000?

PROBLEMA 2

Se tiene un tablero con 2020 casillas en la fila inferior y 2019 en la superior, ubicadas como se muestra en la figura.



En la fila inferior se colocan los números enteros del 1 al 2020 en algún orden. Luego en cada casilla de la fila superior se anota la multiplicación de los dos números que tiene debajo. ¿Cómo se pueden colocar los números en la fila inferior para que la suma de los números de la fila superior sea la menor posible?

PROBLEMA 3

En los lados AB, BC y CA de un triángulo ABC se ubican los puntos P, Q y R respectivamente, tales que $BQ = 2QC$, $CR = 2RA$ y $P\hat{R}Q = 90^{\circ}$. Demostrar que $A\hat{P}R = R\hat{P}Q$

PROBLEMA 4

Encontrar el menor número entero positivo N de dos o más dígitos que tiene la siguiente propiedad: Si insertamos cualquier dígito no nulo d entre cualesquiera dos dígitos adyacentes de N obtenemos un número que es múltiplo de d.

PROBLEMA 5

Consideramos los n vértices de un polígono regular de n lados. Se tiene un conjunto de triángulos con vértices en estos n puntos con la propiedad que para cada triángulo del conjunto, al menos uno de sus lados no es lado de ningún otro triángulo del conjunto. ¿Cuál es la mayor cantidad de triángulos que puede tener el conjunto?

XXVª OLIMPIADA DE MAYO 2019
RESULTADOS DE ESPAÑA

PRIMER NIVEL

	Apellidos y nombre	Premio
1	Diego López Aragón	ORO
2	Jesús Gil Arce	PLATA
3	Carlos Leather Galera	PLATA
4	Isis Lurueña Barbero	BRONCE
5	Carla Balonga Villate	BRONCE
6	Enrique Ortiz Gilarranz	BRONCE
7	Gonzalo Pajares Sánchez	BRONCE
8	Luis Blázquez Nuño	MENCIÓN
9	David Tarí Ferreiro	MENCIÓN
10	Juan Burgos Pino	MENCIÓN

SEGUNDO NIVEL

1	Niko González Vilaró	PLATA
2	Clemente Contreras	PLATA
3	Nicolás Merenciano Esteve	PLATA
4	Luis Noguera Caro	BRONCE
5	Nicolás Iserte Tarazón	BRONCE
6	Félix García Taboada	BRONCE
7	Miguel Díez Navarro	BRONCE
8	Héctor Cintado Peiró	MENCIÓN
9	Pedro Alejandro López Octavio	MENCIÓN
10	Álvaro Gamboa Rodríguez	MENCIÓN

XXIV Concurso de Primavera de Matemáticas 2020

Comunidad
de Madrid

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Consejo Social de la UCM

sm

ANAYA

Smartick

Mc
Graw
Hill
Education

Comunidad de Madrid

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Consejo Social de la UCM

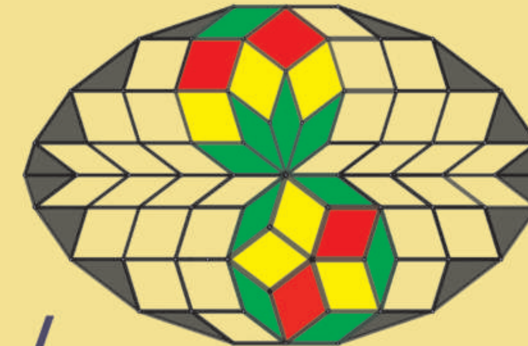
sm

ANAYA

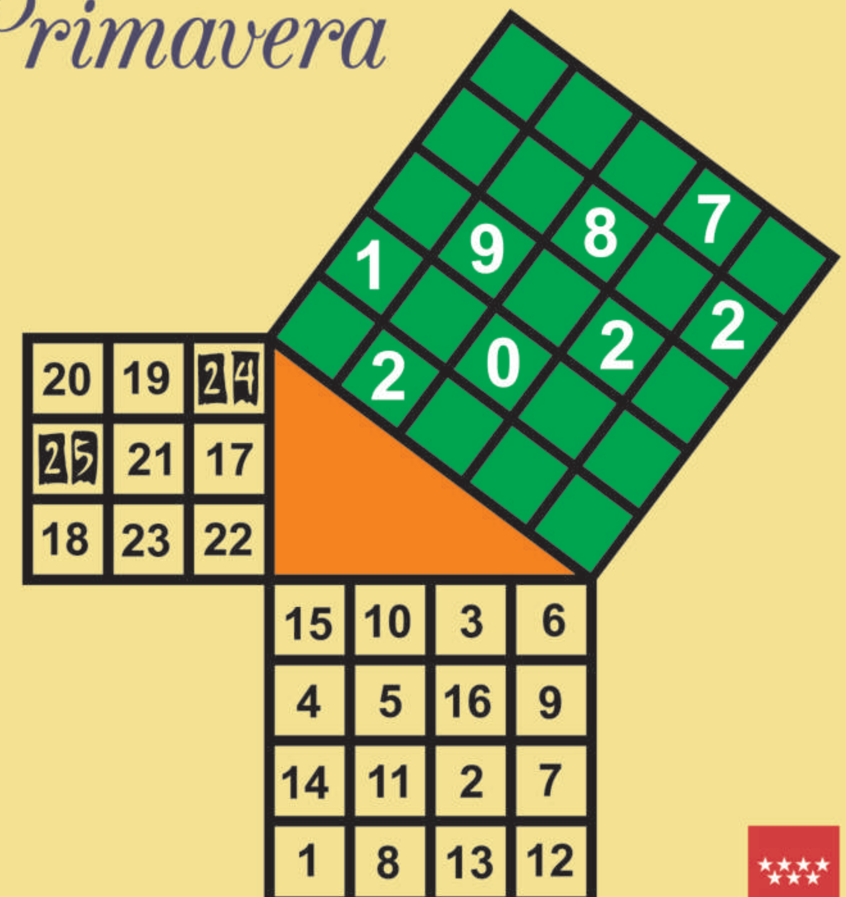
Smartick

Mc Graw Hill Education

25 años Concurso de Primavera

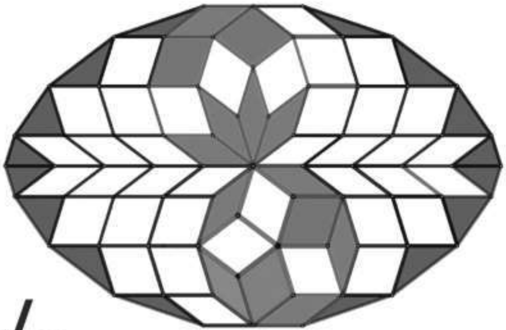


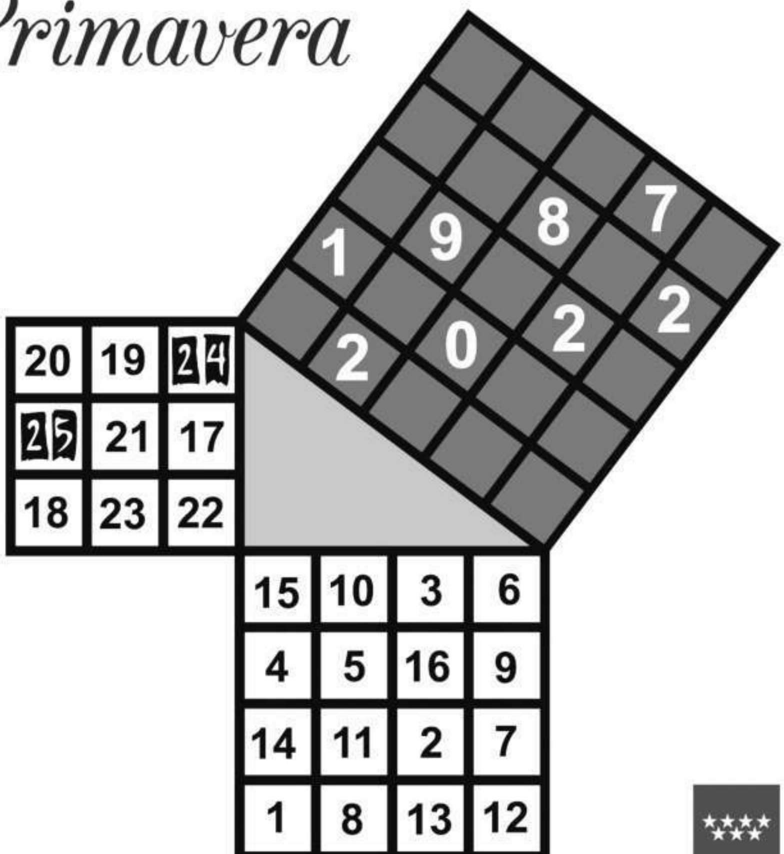
25 años Concurso de Primavera



Comunidad de Madrid

25 años Concurso de Primavera





Comunidad de Madrid

Edita:
Asociación Matemática Concurso de Primavera

ISBN:
978-84-606-5943-3

Deposito Legal:
M-9975-2022

[espejismo matemático]

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$$

Así que han pasado veinticinco años ...

En 2021 se cumplieron 25 años desde el inicio en 1987 del I Concurso de Primavera. La pandemia hizo que la edición de 2020 se quedara a medias y nos ha dejado sin la del 2021 (si bien es cierto que en ese tiempo hemos celebrado pruebas online, que se han ofrecido a los centros escolares para su uso y disfrute).

Hemos recobrado el pulso en este año 2022, que debería nominarse XXVI Concurso de Primavera y que acabará siendo el XXV (lo mismo pasó con Luis XVII de Francia, que se terminó llamando XVIII). Así son los números, a veces caprichosos, pero siempre eficaces.

Era nuestra intención, ya hace tiempo, sacar un libro recopilando los mejores problemas (según nuestro juicio) de cada edición y nivel. Hemos puesto más cuidado en la redacción de enunciados, soluciones y también en sus ilustraciones.

Esperamos que el libro sea lanza de escuderos y espejo de caminantes para todos aquellos que un día salieron en busca de la aventura matemática.

El Comité Organizador

AGRADECMIENTOS a

Los participantes en el Concurso, a sus padres y profesores

Los voluntarios que nos ayudan en la 2ª fase

La Facultad de Matemáticas de la UCM

El vicerrectorado de alumnos de la UCM

La Subdirección General de Formación del Profesorado de la Dirección General de Innovación, Becas y Ayudas a la Educación de la Consejería de Educación, Juventud y Deporte Comunidad de Madrid

Grupo **ANAYA**
Ediciones **SM**
Mc GRAW- HILL Education
Smartick

ÍNDICE

Enunciados - Nivel I

1 Nivel I **CP I**

Dos gatos *Mu* y *Mi* cazaron entre los dos sesenta ratones. Si *Mu* caza tres ratones por cada dos ratones que caza *Mi*, ¿cuántos ratones cazó *Mi*?

A) 2 **B)** 30 **C)** 24 **D)** 40 **E)** 36

2 Nivel I **CP I**

Antonio, Beatriz, Carlos y Diana están sentados en una fila de cuatro sillas numeradas del 1 al 4. Emilio los ve y dice:

– Beatriz está al lado de Carlos.
– Antonio está entre Beatriz y Carlos.

Si las dos afirmaciones son falsas y Beatriz está sentada en la silla nº 3, ¿quién ocupa la silla nº 2?

A) Antonio **B)** Beatriz **C)** Carlos **D)** Diana

E) No hay información suficiente

3 Nivel I **CP II**

Si el número de primos menores de 50 es exactamente 15, ¿cuántos hay menores que 60?

A) 19 **B)** 18 **C)** 17 **D)** 16 **E)** 15

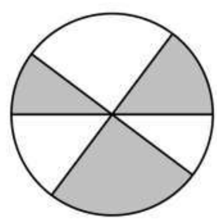
4 Nivel I **CP II**

En un cajón hay tres calcetines blancos, dos negros y cinco rojos. Sin mirar dentro del cajón, ¿cuál es el mínimo número de calcetines que hay que sacar para estar seguro de que podemos ponernos dos calcetines del mismo color?

A) 2 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 7

5 Nivel I **CP III**

Si el radio del círculo es 6, el área de la región sombreada es:



A) 6π **B)** 12π **C)** 18π

D) 24π **E)** 36π

6 Nivel I CP IV

Para fabricar un kilo de miel, las abejas hacen 500 000 viajes entre la colmena y las flores. En cada viaje una abeja transporta por término medio 8 mg de néctar. ¿Cuántos kilos de néctar son necesarios para obtener un kilo de miel?

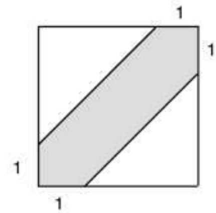
A) 4 **B)** 20 **C)** 40 **D)** 10 **E)** 8

7 Nivel I CP IV

¿Cuál es el área de la franja sombreada dentro del cuadrado de lado 4 m?

A) 6 m^2 **B)** 7 m^2 **C)** 7,5 m^2

D) 8 m^2 **E)** 8,5 m^2

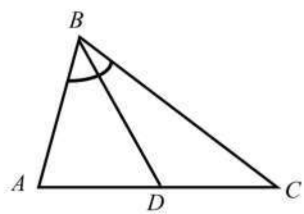


8 Nivel I CP V

En el triángulo de la figura, los segmentos AD, BD y DC son iguales. ¿Cuánto mide el ángulo $A\hat{B}C$? (Con vértice en B).

A) 75º **B)** 86º **C)** 90º

D) 92º **E)** Falta información



9 Nivel I CP V

Si veinte gatos comen veinte ratones en veinte días, ¿cuántos ratones comen diez gatos en diez días?

A) 5 **B)** 10 **C)** 20 **D)** 4 **E)** Nada de lo anterior

10 Nivel I CP VI

Un arquitecto tiene dos planos de un mismo edificio: Uno a escala 1:20 y otro a escala 1:50. ¿Cuál es la longitud de la fachada de un edificio en el plano de escala 1:50 si en el de escala 1:20 es de 20 cm?

A) 16 **B)** 8 **C)** 50 **D)** 4 **E)** 12

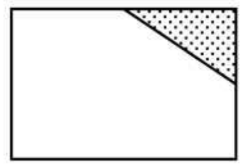
11 Nivel I CP VI

Mi reloj se atrasa veinte segundos cada hora. Ahora mismo lo he puesto en hora. ¿Dentro de cuánto tiempo llevará media hora de retraso?

A) 2 días **B)** 3 días y 18 horas **C)** 60 horas **D)** 75 horas **E)** 4800 minutos

12 Nivel I CP VII

El área de un rectángulo es 1. Quitamos una esquina del rectángulo uniendo los puntos medios de dos lados consecutivos. ¿Cuál es el área del triángulo que le quitamos?



A) $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{2}{5}$

D) $\frac{3}{8}$ **E)** $\frac{1}{8}$

13 Nivel I CP VII

Alba, Benito, Carolina y Diana tienen cada uno un animal; uno de ellos tiene un gato, otro un perro, otro un pez y otro un canario. Benito tiene un animal con pelo, Diana uno de cuatro patas, Carolina tiene un pájaro y a Alba y a Benito no les gustan los gatos. ¿Cuál es la frase falsa?

A) Alba tiene un pez **B)** Benito tiene un perro **C)** Carolina tiene un canario

D) Diana tiene un gato **E)** Diana tiene un perro

14 Nivel I CP VIII

La suma de los veinte primeros números enteros positivos consecutivos es 210. Entonces la suma de los primeros cuarenta números enteros positivos es:

A) 420 **B)** 610 **C)** 820 **D)** 840 **E)** 4200

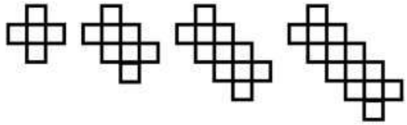
15 Nivel I CP VIII

Pedro tiene veinte bolas de distintos colores: amarillas, verdes, azules y rojas. Diecisiete no son verdes, cinco son rojas y doce no son amarillas. ¿Cuántas bolas azules tiene Pedro?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 8 **E)** 15

16 Nivel I — CP IX

En esta serie de tableros, ¿cuántos cuadraditos tiene el tablero que ocupa el décimo lugar?



A) 50 **B)** 38 **C)** 32
D) 30 **E)** 29

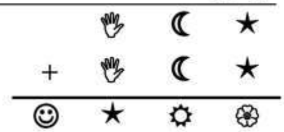
17 Nivel I — CP X

El 1 de septiembre de 2005 fue jueves. ¿Qué día de la semana será el 1 de septiembre de 2025?

A) domingo **B)** lunes **C)** martes **D)** miércoles **E)** jueves

18 Nivel I — CP X

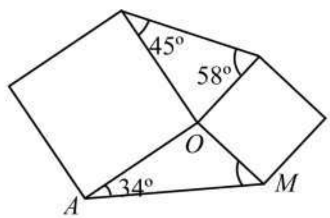
En la siguiente suma cada símbolo representa un dígito diferente.
Si ✋ = 7 y ★ un número par, ¿cuál es el único valor posible para ☾?



A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

19 Nivel I — CP XI

La figura está formada por dos cuadrados y dos triángulos. El ángulo $A\hat{M}O$ mide:



A) 43º **B)** 39º **C)** 38º
D) 36º **E)** 35º

20 Nivel I — CP XI

Inicialmente hay un "1" en la pantalla. Al apretar la tecla A se multiplica por 3 el número de la pantalla. Al apretar la tecla B, se resta 1 al número de la pantalla. Utilizando solo las teclas A y B hay que llegar a tener en la pantalla el 53. ¿Cuántas veces, como mínimo, debes pulsar las teclas?

A) 4 **B)** 6 **C)** 10 **D)** 15 **E)** 53

21 Nivel I CP XII

María y Juan hacen la misma colección de cromos que consta de 240 cromos. María tiene 192 diferentes y Juan 160. Juntando sus cromos les faltarían aún 10 cromos para acabarla. ¿Cuántos cromos tiene María que no tiene Juan?

A) 32 **B)** 36 **C)** 38 **D)** 48 **E)** 70

22 Nivel I CP XII

Sobre una línea recta hemos marcado cuatro puntos *A, B, C, D*, como indica el dibujo:

La distancia entre *A* y *C* son 12 m; y entre *B* y *D*, 18 m. ¿Qué distancia, en metros, separa los puntos medios de los segmentos *AB* y *CD*?

A) 15 **B)** 12 **C)** 18 **D)** 6 **E)** 9

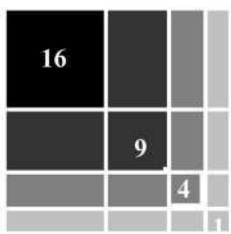
23 Nivel I CP XII

Con sesenta y cuatro cubitos blancos formamos un gran cubo y coloreamos sus caras de rojo. Después volvemos a deshacer el cubo en cubitos. ¿Cuántos cubitos pequeños seguirán teniendo todas sus caras blancas?

A) 16 **B)** 12 **C)** 8 **D)** 4 **E)** Ninguno

24 Nivel I CP XIII

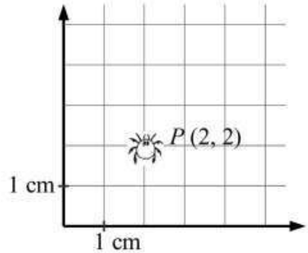
El logo del Concurso de Primavera es un cuadrado formado por cuadrados y rectángulos. Si las áreas de los cuadrados son 16, 9, 4 y 1 cm^2, ¿cuál es, en cm^2, el área del cuadrado total?



A) 100 **B)** 75 **C)** 64 **D)** 36 **E)** 25

25 Nivel I CPXIII

Un bichito está en el punto $P(2, 2)$ de unos ejes de coordenadas y comienza a dar saltitos horizontales y verticales de medio centímetro de longitud. Primero da 7 saltos hacia arriba, después 25 hacia la derecha, 5 hacia abajo y 3 hacia la izquierda. ¿En qué punto acaba su recorrido?



A) $A(13, 3)$ **B)** $B(3, 13)$ **C)** $C(4, 24)$ **D)** $D(24, 4)$ **E)** $E(3, 12)$

26 Nivel I CP XIV

Merche quiere que la probabilidad de sacar una bola blanca de este saco sea 2/5 y para ello añade bolitas grises y blancas. ¿Cuántas bolitas grises como mínimo tiene que añadir?

A) Una **B)** Dos **C)** Tres **D)** Cuatro **E)** Cinco

27 Nivel I CP XIV

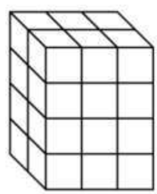
En cada una de las casillas del cuadrado hay un número entero. Si la suma de las tres horizontales, las tres verticales y las dos diagonales es la misma, ¿qué número hay en la casilla marcada con la letra x?

x		
	15	3
12		24

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

28 Nivel I CP XV

Con veinticuatro cubos de un centímetro de lado, Sofía ha construido un bloque como el de la figura, cuya base tiene un perímetro de 10 cm y su altura mide 4 cm. Santiago ha formado otro bloque usando cuarenta y dos cubos. Si el perímetro de la base es 18 cm, ¿cuántos centímetros mide la altura del bloque de Santiago?



A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 7

29 Nivel I CP XV

Seis ejecutivos de una corporación europea se reúnen en Madrid para una conferencia.

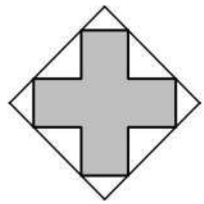
– El Sr. A habla solo español e italiano. – La Sra. B habla solo español e inglés.
– El Sr. C habla solo inglés e italiano. – La Sra. D habla solo francés y español.
– El Sr. E habla solo italiano y francés. – La Sra. F habla solo inglés y francés.

¿De cuántas formas se pueden separar en tres grupos de dos, de manera que en todas las parejas las dos personas que las forman puedan hablar entre sí?

A) 4 **B)** 8 **C)** 12 **D)** 16 **E)** 24

30 Nivel I CP XVI

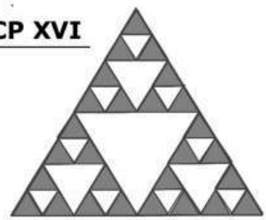
Una cruz compuesta por cinco cuadrados iguales está inscrita (como se ve en la figura) en un cuadrado. Si el perímetro de la cruz es de 24 cm, ¿cuál es, en cm^2, el área del cuadrado?



A) 24 **B)** 32 **C)** 36
D) 40 **E)** 48

31 Nivel I CP XVI

¿Qué fracción del triángulo está pintada de blanco?



A) $\frac{10}{37}$ **B)** $\frac{37}{64}$ **C)** $\frac{1}{2}$
D) $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{23}{32}$

32 Nivel I CP XVII

Juanito ha colocado seis tarjetas con números de dos cifras, pero una se ha quedado boca abajo. Solo recuerda que el número que había en ella no es ni el mayor ni el menor de los seis; que sus cifras coinciden con las cifras de otro de los números, pero en distinto orden y que es múltiplo de 3. ¿Cuál es la suma de las cifras del número de la tarjeta que está boca abajo?

A) 7 **B)** 12 **C)** 4 **D)** 9 **E)** 6

33 Nivel I CP XVII

Don Retorcido está triste porque no os verá hasta el próximo año. Os deja este último reto: ¿Quién de vosotros será capaz de adivinar en qué año nací? Nací en el siglo XVII; si al año de mi nacimiento le suprimís la cifra de las unidades queda un número cuya raíz cuadrada no tiene decimales; ¡ah!, y la cifra de las unidades es una unidad menor que la de las decenas. Pero para chinchar aún más, cambio la pregunta: ¿cuánto suman las cifras de mi año de nacimiento?

A) 21 **B)** 22 **C)** 23 **D)** 24 **E)** 25

34 Nivel I CP XVIII

Por allí vienen cuatro amigos, cada uno con un oficio diferente:

- Adrián y el profesor van discutiendo.
- Javier vive muy cerca del actor.
- Álvaro es el primo del pintor, que a su vez es vecino de Juan.
- El tenista es más alto que Juan y que el actor.
- Adrián y Álvaro jamás han jugado al tenis.

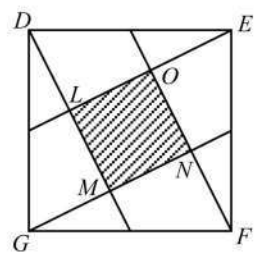
¿Cuál de los amigos es el actor?

A) Adrián **B)** Álvaro **C)** Javier **D)** Juan

E) No se sabe con certeza

35 Nivel I CP XVIII

En el cuadrado *DEFG* de lado 10 cm hemos dibujado algunos segmentos uniendo vértices con puntos medios de los lados, y así hemos obtenido el cuadrado rayado *LMNO*. ¿Cuál es su área en cm^2?



A) 20 **B)** 25 **C)** 35

D) 40 **E)** 50

36 Nivel I CP XVIII

Escribimos los números seguidos del 1 al 100: 12345678910111213…¿Qué cifra nos encontraremos en la posición cien?

A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 9

37 Nivel I CP XIX

En una bolsa hay sesenta bolas, unas son rojas, otras verdes y otras azules. Si saco una bola sin mirar, la probabilidad de que sea roja es $\frac{1}{2}$ y la probabilidad de que sea azul es $\frac{3}{10}$. ¿Cuántas bolas verdes hay en la bolsa?

A) 6 **B)** 12 **C)** 18 **D)** 24 **E)** 30

38 Nivel I CP XIX

Don Retorcido está que trina porque alguien ha desordenado sus números. Ha conseguido encontrar a cinco sospechosos, pero estos son muy astutos y deciden que solo uno de ellos contestará la verdad. ¡¿Quién ha sido el culpable?!, gritó don Retorcido.

☺ Arquímedes dijo: "ha sido Bernoulli."
☺ Bernoulli dijo: "ha sido Cantor."
☺ Cantor dijo: "Bernoulli miente."
☺ Diofanto dijo: "yo no he sido."
☺ Euclides dijo: "yo solo digo que dos más dos son nueve."

A) Arquímedes **B)** Bernoulli **C)** Cantor **D)** Diofanto **E)** Euclides

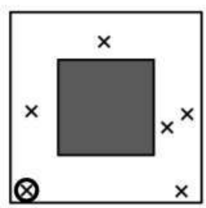
39 Nivel I CP XX

Ana hace abdominales cada cuatro días, baila cada cinco días y juega al tenis cada seis, excepto los días que le coinciden dos o las tres actividades, que las sustituye por salir a correr. Hoy le han coincidido las tres, así que ha salido a correr. ¿Cuántas veces hará abdominales en los próximos cien días?

A) 25 **B)** 20 **C)** 15 **D)** 13 **E)** 12

40 Nivel I CP XX

Seis amigos juegan al escondite en una habitación con una gran columna central. Ana no puede ver a nadie. Dani ve a Emilio y a Bea. Bea puede ver a tres personas. Emilio solo ve a Dani. Carla y Fani son gemelas. ¿Cuál de ellos es el que está en el redondelito?



A) Bea **B)** Carla **C)** Dani

D) Emilio **E)** Fani

41 Nivel I CP XX

Hansel y Gretel salieron de casa y fueron tirando una miguita de pan cada medio metro, pero los pajarillos se comieron tres cuartos de las migas y solo quedaron 1200. ¿Cuántos kilómetros recorrieron?

A) 2,4 **B)** 1,5 **C)** 9,6 **D)** 4,8 **E)** 4,5

42 Nivel I CP XXI

Este es Osodrilo. La parte Oso duerme de 18:00 a 6:00 y la parte Drilo duerme de 9:00 a 23:00. Mientras uno duerme y el otro no, ocurre lo siguiente: si Drilo duerme, Oso camina hacia el norte a 10 km/h, y si Oso duerme, Drilo camina hacia el sur a 2 km/h. Cuando ambos están despiertos comen y charlan. Ahora son las 8:00 y están desayunando en un claro del bosque.
¿A qué distancia del claro estarán dentro de 24 horas?

A) 120 km **B)** 72 km **C)** 76 km **D)** 192 km **E)** 114 km

43 Nivel I CP XXII

En mi fiesta de cumpleaños Juan mezcló en un vaso *Trinafantus* con *Loca-Cola* al 50%. Olivia se bebió la mitad de la mezcla y, para disimular, rellenó el vaso con *Loca-Cola*. Después vino Rafa, se bebió la mitad y volvió a disimular rellenando el vaso con *Trinafantus*. ¿Qué fracción del líquido es ahora *Loca-Cola*?

A) $\frac{3}{8}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** $\frac{2}{5}$ **E)** $\frac{1}{4}$

44 Nivel I CP XXII

Belén y Harry juegan al quién es quién con números. Belén ha elegido uno de estos dieciséis números. Harry hizo tres preguntas, Belén contestó afirmativamente a todas y con eso Harry supo con certeza absoluta cuál era el número. Si las dos primeras preguntas fueron ¿es un número par? y ¿la suma de sus cifras es menor que 16? ¿Cuál pudo ser la tercera pregunta?

777	495	1000	888
301	238	658	735
357	26	764	336
154	343	922	989

A) ¿Es múltiplo de 4? **B)** ¿Una de sus cifras es 6?
C) ¿Es múltiplo de 7? **D)** ¿La suma de sus cifras es mayor que 18?
E) ¿La cifra de las unidades es 8?

45 Nivel I CP XXII

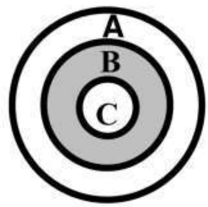
Hada y Adán son dos tortolitos muy enamorados y el día de San Valentín se regalaron estas sumas. Si letras distintas representan cifras distintas, ¿cuánto vale la suma **N** + **I** + **D** + **O**?

$$\begin{array}{cccc} & \mathbf{A} & \mathbf{M} & \mathbf{O} \\ & \mathbf{+} & & \mathbf{A} \\ \mathbf{A} & \mathbf{D} & \mathbf{A} & \mathbf{N} \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{N} & \mathbf{D} & \mathbf{A} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & \mathbf{A} & \mathbf{M} & \mathbf{O} \\ & \mathbf{+} & & \mathbf{A} \\ \mathbf{H} & \mathbf{A} & \mathbf{D} & \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{M} & \mathbf{I} & \mathbf{M} & \mathbf{O} \end{array}$$

A) 13 **B)** 15 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 20

46 Nivel I CP XXIII

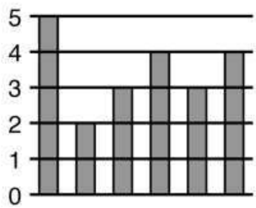
Lanzando tres dardos a la diana Marta clavó dos en A y uno en B y obtuvo 36 puntos. Con dos dardos en B y uno en C, Rafa obtuvo 56 puntos y Olivia obtuvo 58 puntos con dos dardos en C y uno en A. ¿Cuántos puntos obtuvo Irene con un dardo en A, otro en B y otro en C?



A) 42 **B)** 46 **C)** 48 **D)** 50 **E)** 54

47 Nivel I CP XXIII

En este gráfico Julia anotó los puntos de sus últimos seis partidos de baloncesto. ¿Qué media alcanzó?



A) 4 **B)** 2,75 **C)** 3,5 **D)** 4,2 **E)** 3

48 Nivel I CP XXIV

Tengo seis monedas. Escogiendo cinco de ellas puedo sumar como máximo 1,50 euros y como mínimo 1,10 euros. ¿Cuánto dinero tengo en total?

A) 2,60 € **B)** 1,70 € **C)** 2,20 € **D)** 1,60 € **E)** 1,90 €

49 Nivel I CP XXIV

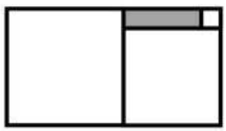
Estás viendo una tabla de multiplicaciones de números de una cifra {**C**, **A**, **T**, **D**, **O**, **G**}. Si el número 28 está entre las multiplicaciones resultantes, ¿cuánto suman los tres productos que hay en la columna de la **T**?

	C	***A***	***T***
D	3		
O	18		
G		14	

A) 38 **B)** 52 **C)** 40 **D)** 56 **E)** 36

50 Nivel I CP XXIV

Con tres cuadrados y un rectángulo gris hemos formado un rectángulo grande que mide 22 cm de base y 12 cm de altura, como en la figura. ¿Qué área, en cm^2, tiene el rectángulo gris?

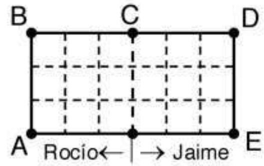


A) 16 **B)** 18 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 20

Enunciados - Nivel II

1 Nivel II — CP I

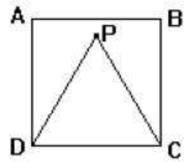
Rocío siempre camina el doble de rápido que Jaime. Si parten del punto señalado en sentido contrario, y van dando vueltas a la parcela rectangular de la figura, de 18 cuadrados de área, cuando se encuentren por primera vez, el punto más próximo de los indicados será:



A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

2 Nivel II — CP II

ABCD es un cuadrado y *P* un punto dentro del cuadrado tal que *CDP* es un triángulo equilátero. ¿Cuánto mide el ángulo $P\hat{B}C$?



A) 75º **B)** 70º **C)** 60º **D)** 45º

E) No hay suficiente información

3 Nivel II — CP III

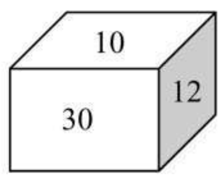
Las catorce cifras de una tarjeta de crédito están escritas en los cuadrados de abajo. Si la suma de tres cifras consecutivas cualesquiera es 20, ¿cuál es el valor de x?

			9				x				7		

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

4 Nivel II — CP III

Las áreas de tres de las caras de esta caja en forma de paralelepípedo son 10, 12 y 30 cm^2. ¿Cuál es, en cm^3, el volumen de la caja?

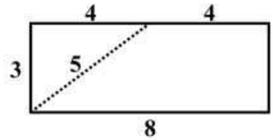


A) 60 **B)** 52 **C)** 3600

D) 300 **E)** 120

5 Nivel II CP IV

Cortamos un rectángulo de 3×8 en dos piezas, como se indica en la figura, y las recolocamos para formar un triángulo rectángulo con los dos trozos. Uno de los lados de este triángulo resultante mide:



A) 9 **B)** 6 **C)** 4 **D)** 7 **E)** 5

6 Nivel II CP IV

¿En cuántos ceros acaba el producto $25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$?

A) 3 **B)** 6 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 12

7 Nivel II CP V

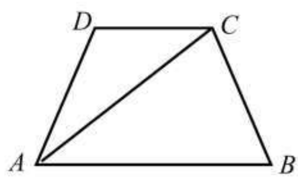
¿Para cuántos enteros positivos n es verdadero que $\dfrac{n+17}{n-7}$ es un número entero positivo?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

8 Nivel II CP V

En el trapecio de la figura nos dicen que $AD = DC = CB$ y que $AB = AC$. ¿Cuánto mide el ángulo $\hat{D}$?

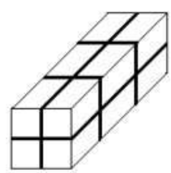
A) 108º **B)** 120º **C)** 130º
D) 150º **E)** Faltan datos



9 Nivel II CP VI

Una caja está cerrada con una cinta adhesiva como indica la figura. Si las dimensiones de la caja son $10 \times 10 \times 30$ cm, ¿cuántos cm de cinta adhesiva hemos gastado?

A) 200 **B)** 240 **C)** 250
D) 260 **E)** 300



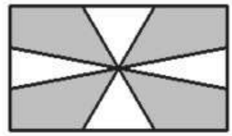
10 Nivel II CP VI

Tenemos tres cajas, una blanca, una amarilla y una verde y tres objetos: una moneda, una canica y una peonza. Cada caja contiene un objeto. La caja verde está a la izquierda de la blanca y la amarilla a la derecha de la canica. Si la peonza está en la caja que está a la derecha de la amarilla, ¿en qué caja está la moneda?

A) En la amarilla **B)** En la verde **C)** En la blanca
D) Faltan datos **E)** Los datos son contradictorios

11 Nivel II CP VI

La bandera de la figura se usa en los barcos. Los lados del rectángulo están divididos en tres partes iguales. ¿Cuál es el cociente entre la parte blanca y la parte sombreada?



A) 1 **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{2}{3}$

12 Nivel II CP VII

Escribiendo un 1 al principio y otro 1 al final de un número, éste aumenta en14789. ¿Cuál es la suma de las cifras del número original?

A) 11 **B)** 10 **C)** 9 **D)** 8 **E)** 7

13 Nivel II CP VII

Lanzamos dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea múltiplo de 5?

A) $\frac{1}{36}$ **B)** $\frac{1}{18}$ **C)** $\frac{1}{6}$ **D)** $\frac{11}{36}$ **E)** $\frac{1}{3}$

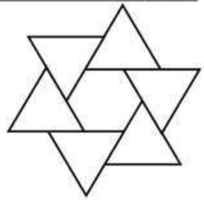
14 Nivel II CP VIII

En una tienda nos venden discos y comics a precio fijo cada producto y exacto en euros. Si 5 comics y 2 discos cuestan menos de 15 euros, y 3 comics y 4 discos más de 12 euros, ¿cuál de las siguientes afirmaciones tiene que ser cierta?

A) Cuestan más los discos **B)** Cuestan más los comics
C) Un disco cuesta menos de 3 euros **D)** Un comic y un disco cuestan 4 euros
E) Si no cuestan lo mismo, al menos hay dos euros de diferencia.

15 Nivel II CP VIII

El lado de cada uno de los triángulos equiláteros de la figura es el doble del lado del hexágono regular del centro. ¿Qué fracción del área total de los seis triángulos, representa el área del hexágono?



A) $\frac{1}{6}$ **B)** $\frac{1}{12}$ **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{2}{3}$

16 Nivel II CP IX

En una encuesta, cuatro de cada cinco personas responden que les gusta el cine, una de cada cuatro que les gusta el teatro, y sólo al 10% les gusta el cine y el teatro. ¿A qué proporción no les gusta ninguno de los dos espectáculos?

A) $\frac{1}{15}$ **B)** $\frac{4}{75}$ **C)** 1 % **D)** 5 % **E)** $\frac{1}{12}$

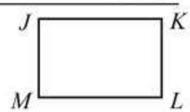
17 Nivel II CP IX

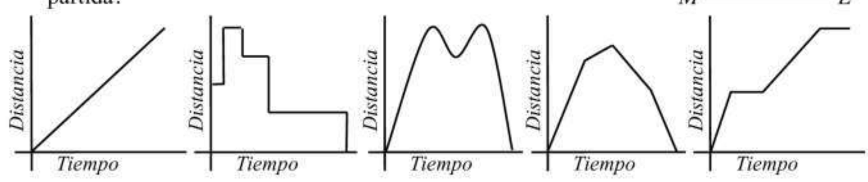
El camino desde la casa de Alicia a la de su amiga Sara tiene 57 árboles. Un día que Alicia va a ver a Sara, marca con un lazo rojo (empezando por el primero) un árbol sí y uno no. A la vuelta, marca (empezando también por el primero) uno sí y dos no. Como es lógico, en algún árbol quedarán dos lazos, pero, ¿cuántos no tendrán ninguno?

A) 15 **B)** 16 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 19

18 Nivel II CP X

María sale a correr desde la esquina *J* del campo rectangular *JKLM* yendo en este sentido: *J - K - L - M - J -...* ¿Qué gráfica de las siguientes representa la distancia en cada instante al punto de partida?





A) **B)** **C)** **D)** **E)**

19 Nivel II — CP XI

Zipi sólo miente los lunes, martes y miércoles, y Zape sólo miente los jueves, viernes y sábados. Un día los dos hermanos tuvieron esta charla: "Ayer me tocó mentir" dijo Zipi. "Pues a mí también me tocó mentir" dijo Zape. ¿En qué día de la semana estaban?

A) Lunes **B)** Martes **C)** Jueves **D)** Sábado **E)** Domingo

20 Nivel II — CP XII

El número *m* verifica que cada pareja de los números 24, 42 y *m* tiene el mismo máximo común divisor y cada pareja de los números 6, 15 y *m* tiene el mismo mínimo común múltiplo. ¿Qué número es *m*?

A) 10 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 36 **E)** 30

21 Nivel II — CP XII

En esta multiplicación PQRS es un número de cuatro cifras diferentes. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones no es verdadera?

$$\begin{array}{r} \mathrm{P\;Q\;R\;S} \\ \times\;9 \\ \hline \mathrm{S\;R\;Q\;P} \end{array}$$

A) P = 1 **B)** Q = 0 **C)** R = 7

D) S = 9 **E)** PQRS es divisible por 9

22 Nivel II — CP XIII

A la fiesta de los amigos del tres han acudido los primeros catorce múltiplos de tres: 3, 6, 9,… Juegan a formar parejas que sumen un cuadrado perfecto y consiguen emparejarse todos los asistentes menos dos. ¿Cuánto suman esos dos números que no pudieron emparejarse?

A) 75 **B)** 54 **C)** 33 **D)** 30 **E)** 27

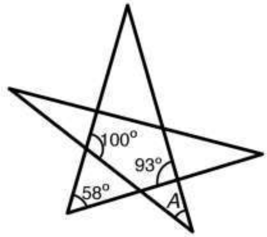
23 Nivel II — CP XIII

Don Retorcido nos ha pedido que averigüemos en qué cifra termina el producto de estas potencias: $2^{?} \cdot 6^{?} \cdot 9^{?} \cdot 11^{?}$. Nos ha dicho que el exponente del 2 es 2009; el exponente del 6 es el número de pie que calza; el exponente del 9 es un número grandísimo que acaba en 5; y el exponente del 11 es igual al año de su nacimiento. ¿En qué cifra acaba dicho producto?

A) 1 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

24 Nivel II CP XIV

Observa el pentágono estrellado que te mostramos. ¿Cuánto mide el ángulo A?



A) 35° **B)** 42° **C)** 51°
D) 65° **E)** 109°

25 Nivel II CP XIV

Don Retorcido dice que 2010 es un número *dobledé* porque el número formado por sus dos primeras cifras es el doble del número formado por sus dos últimas cifras. ¿Cuántos números *dobledés* hay de cuatro cifras?

A) 30 **B)** 35 **C)** 40 **D)** 50 **E)** 45

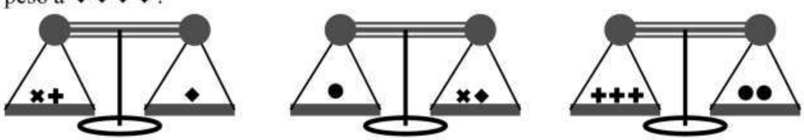
26 Nivel II CP XIV

En unas elecciones a representante del Consejo Escolar de un centro, Alicia recibió 5/6 de los votos que obtuvo Beatriz, que a su vez, recibió el 80 % de los votos de Carlos. Si Alicia obtuvo 300 votos, ¿cuántos obtuvo Carlos?

A) 450 **B)** 490 **C)** 500 **D)** 540 **E)** 6000

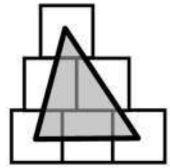
27 Nivel II CP XV

Las tres balanzas están equilibradas. ¿Cuántas ✚ son necesarias para igualar en peso a ◆◆◆◆?



A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

28 Nivel II CP XV



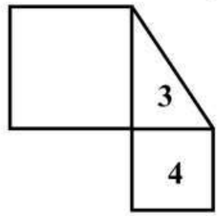
Don Retorcido elige su ropa de cada día de esta extraña manera. Cada mañana lanza un dado: solo se pondrá corbata si sale impar y únicamente no llevará vaqueros si sale par. ¿Cuáles de estas cuatro combinaciones no podrá vestir nunca don Retorcido?

UNA: Vaqueros y corbata
DOS: Vaqueros sin corbata
TRES: Sin vaqueros y con corbata
CUATRO: Sin vaqueros y sin corbata

A) La UNA y la DOS **B)** Solo la DOS **C)** Solo la TRES
D) La TRES y la CUATRO **E)** La DOS y la TRES

29 Nivel II CP XVI

En la figura ves dos cuadrados y un triángulo rectángulo. Los números indican el área de la figura correspondiente. ¿Cuál es el área del cuadrado grande?



A) 9 **B)** 8 **C)** 7 **D)** 6
E) 5

30 Nivel II CP XVI

María, Joaquín, Esteban y Carmen están comiendo en una mesa cuadrada festejando que Esteban tiene novia. ¿Cuál es la probabilidad de que Carmen esté sentada enfrente de Esteban?

A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{3}{4}$

31 Nivel II CP XVII

Está comprobado que con 750 m de hilo de oro pueden vestirse 90 hadas o 150 ninfas. Si en el almacén del reino cuentan con 2250 m de hilo de oro y se presentan 225 hadas pidiendo hilo para sus vestidos mágicos, ¿cuántas ninfas podrán vestirse con el hilo sobrante?

A) 45 **B)** 60 **C)** 75 **D)** 95 **E)** 135

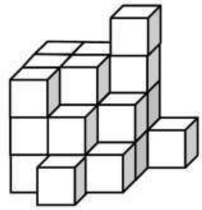
32 Nivel II CP XVII

Ayudándome de seis cuadrados iguales, he dibujado un triángulo cuyos vértices son los centros de tres de esos cuadrados. Si el área del triángulo mide 24 cm^2, ¿cuántos cm^2 mide el área de un cuadrado?

A) 12 **B)** 8 **C)** 16 **D)** 10 **E)** 4

33 Nivel II CP XVII

Sara había construido un gran cubo de 4 × 4 × 4 con unos dados que tenía pero ha llegado su hermano Adrián y ha destruido su obra. ¿Cuántos dados necesita Sara para arreglar el desastre que ha provocado Adrián?



A) 28 **B)** 38 **C)** 26
D) 40 **E)** 37

34 Nivel II CP XVIII

En mi jardín con forma de hexágono regular he plantado margaritas en las zonas sombreadas. Si en el trapecio he plantado 420, ¿cuántas he plantado en el triángulo?

A) 84 **B)** 60 **C)** 70 **D)** 76 **E)** 65

35 Nivel II CP XVIII

El profesor ha escrito 100 números en la pizarra y nos ha pedido calcular su media. ¡86!, gritó Adrián al poco tiempo. Muy bien, dijo el profesor y borró 20 números. ¿Cuál es la media de los que quedan? ¡84!, gritó Anabel. Perfecto. ¿Cuál es la media de los 20 números que borró el profesor?

A) 94 **B)** 90 **C)** 86 **D)** 85 **E)** 20

36 Nivel II CP XIX

¿Qué me pongo?, ¿qué me pongo? Inés siempre tan indecisa. Tiene en su armario cuatro pantalones, siete camisetas y tres pares de zapatillas. Ya se ha probado veinticinco combinaciones de todas las posibles. ¿Cuántas combinaciones nuevas podrá probarse como máximo antes de decidirse?

A) 25 **B)** 37 **C)** 43 **D)** 59 **E)** 84

37 Nivel II CP XIX

Con cubitos idénticos he construido un gran bloque en forma de ladrillo. Luego decido quitar los 65 cubitos exteriores de una de las caras del bloque y luego quito los 30 cubitos exteriores de otra de las caras. ¿Cuántos cubitos quedan ahora en mi bloque?

A) 360 **B)** 230 **C)** 295 **D)** 724 **E)** 425

38 Nivel II CP XIX

Por allá viene Don Retorcido hablando solo y parece emocionado, shhh, a ver si podemos escucharle: "¡biennn!, acabo de inventarme otro problema para el Concurso de Primavera, je je, creo que van a picar como sardinillas...: sumando UNO y después DOS, voy formando esta serie: 3 4 6 7 9 10 12..., ¿cuál de los siguientes números no aparecerá en ella? Je je je."

A) 2013 **B)** 2014 **C)** 2015 **D)** 2016 **E)** 2017

39 Nivel II CP XX

Comenúmeros lo ha vuelto a hacer. Se encontró una tabla de sumar formada por quince enteros positivos, todos ellos diferentes, y zas, empezó a devorarlos. Yo sólo recuerdo que el mayor número era 21. Cuando ya iba a reventar, se quedó en la casilla que ves a echarse la siesta.

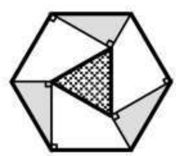
+			
	8	12	
	10		
	13		

¿Cuál fue el último número que se zampó Comenúmeros?

A) 15 **B)** 21 **C)** 19 **D)** 18 **E)** 20

40 Nivel II CP XX

Ayudándonos de algunas perpendiculares hemos dibujado un triángulo en el interior de un hexágono regular. Si el área del hexágono es 120 cm^2, ¿cuál es el área, en cm^2, del triángulo central?



A) 20 **B)** 12 **C)** 10 **D)** 15 **E)** 24

41 Nivel II CP XXI

Comenúmeros me ha quitado la calculadora y ha bailado todas las teclas numéricas salvo la del cero. Ningún número se corresponde con el correcto. Estos son algunos resultados que me salen ahora: $12 \cdot 12 = 1156$, $3 \cdot 3 = 81$, $45 \cdot 45 = 144$, $67 \cdot 67 = 5625$. ¿Qué número aparece en pantalla cuando pulso la tecla 9?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

42 Nivel II CP XXI

Perico recita todos los números desde el 1 hasta el 40 y la rana Gustavita, cada vez que oye un número primo avanza tantos metros como indica dicho número. Al final ha recorrido 230 metros y Perico le advierte que ha tomado por primo un número que no lo era. ¿En qué número se equivocó Gustavita?

A) 27 **B)** 33 **C)** 9 **D)** 15 **E)** 21

43 Nivel II CP XXII

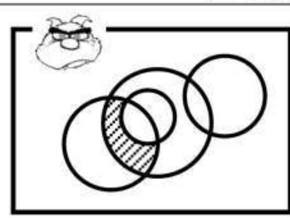
¿No conocéis a la niña Centésima? Es una niña que disfruta con las matemáticas y siempre está inventándose problemas. Este es el primero que pone en nuestro concurso:

Mi número favorito es el 5 y por eso he pensado en el número A *que está formado por 55 cincos. Si multiplico el número* A *por* 1001 *me sale un número grandísimo al que llamo* B. *¿Cuánto suman las cifras del número* B? (¡Jolines con la niña Centésima!)

A) 82 **B)** 81 **C)** 290 **D)** 30 **E)** 289

44 Nivel II CP XXII

Dentro del rectángulo grande, Comenúmeros ha colocado los veinte números naturales que hay desde el 1 hasta el 20. Ha distribuido dentro de cuatro círculos los que son múltiplos de 2, de 3, de 4 o de 7. ¿Cuántos números hay dentro de la región rayada?



A) 5 **B)** 4 **C)** 3

D) 2 **E)** 1

45 Nivel II CP XXIII

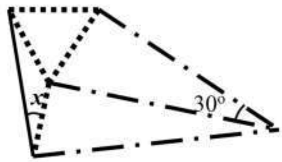
Solo una de estas cinco igualdades entre fracciones es cierta. ¿Cuál es? Y la pista ya te la hemos dado: es seguro que solo hay una igualdad verdadera.

A) $\frac{896\,678}{338\,444} = \frac{122\,426}{363\,334}$ **B)** $\frac{59\,976}{139\,944} = \frac{5\,428}{15\,339}$ **C)** $\frac{179\,972}{417\,946} = \frac{2\,856}{6\,664}$

D) $\frac{69\,796}{192\,994} = \frac{1\,966}{3\,862}$ **E)** $\frac{59\,976}{139\,944} = \frac{1\,428}{3\,332}$

46 Nivel II CP XXIII

En la figura, los cuatro segmentos dibujados con PUNTOS miden lo mismo y los tres segmentos PUNTO–RAYA también miden lo mismo entre sí. ¿Cuánto mide el ángulo x?

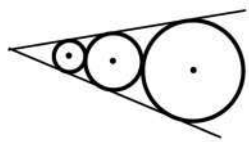


A) 18º **B)** 26º **C)** 15º

D) 24º **E)** 20º

47 Nivel II CP XXIII

En el dibujo ves, desde arriba, a tres amigos con gorros mexicanos atascados en una esquina. Si el radio del sombrero pequeño es de 1 dm y el del mediano es de 4 dm, ¿qué radio tiene el sombrero mexicano mayor?

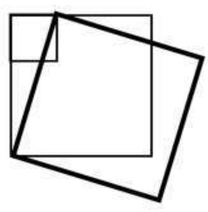


A) 10 **B)** 6 **C)** 15

D) 20 **E)** 16

48 Nivel II CP XXIV

Si el cuadrado menor tiene área A y el cuadrado mediano tiene área B, ¿qué área tiene el cuadrado mayor, dibujado con línea gruesa?



A) $(A+B)^2$ **B)** A^2+B^2 **C)** $(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2$

D) $A+2B$ **E)** $A+B$

49 Nivel II CP XXIV

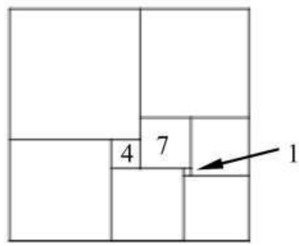
Si a, b, c, d, e, son enteros positivos y $2^a \cdot 3^b \cdot 4^c \cdot 6^d = 6^e$ entonces, tiene que cumplirse, a la fuerza que:

A) $a + 2c = b$ **B)** $a + b + c + d = e$ **C)** $a + c = b + d$

D) $a \cdot c = b \cdot d$ **E)** $b = d - e$

50 Nivel II CP XXV

Hemos colocado con mucho cuidado nueve alfombras cuadradas para cubrir una gran sala rectangular. Si los lados de las alfombras más pequeñas miden 1 m, 4 m y 7 m, ¿qué superficie, en m^2, tiene la sala?



A) 1024 **B)** 1122 **C)** 1023

D) 1088 **E)** 1056

Enunciados - Nivel III

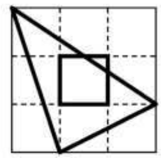
1 **Nivel III** **CP I**

Escritos en fila todos los números del 1 al 500, ¿qué dígito ocupará el lugar 1000?

A) 0 **B)** 1 **C)** 3 **D)** 6 **E)**7

2 **Nivel III** **CP I**

Los lados de la cuadrícula miden 1 cm. ¿Cuál es, en cm^2, el área de la región común al triángulo y al cuadrado?



A) $\frac{4}{5}$ **B)** $\frac{6}{7}$ **C)** $\frac{11}{12}$

D) $\frac{9}{10}$ **E)** $\frac{10}{11}$

3 **Nivel III** **CP III**

El número de gatos que viven en Gatolandia es un número de 6 cifras, cuadrado perfecto y cubo perfecto. Cuando se mueran 6 de esos gatos, el número de gatos que queden será primo. ¿Cuántos gatos hay en Gatolandia?

A) 279 643 **B)** 117 649 **C)** 262 147 **D)** 531 469 **E)** 998 001

4 **Nivel III** **CP III**

Los vértices de un cubo los numeramos del 1 al 8, de manera que los conjuntos de números correspondientes a los vértices de cada cara son: {1, 2, 6, 7}, {1, 4, 6, 8}, {1, 2, 5, 8}, {2, 3, 5, 7}, {3, 4, 6, 7} y {3, 4, 5, 8}. ¿Cuál es el número asignado al vértice más lejano al 6?

A) 1 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 7

5 **Nivel III** **CP IV**

Añadiendo un 1 al principio y al final de un número, este aumenta en 14 789. ¿Cuál era la suma de las cifras del número original?

A) 11 **B)** 10 **C)** 9 **D)** 8 **E)** 7

6 Nivel III CP IV

Si $n = 1+3+5+...+999$ y $m = 2+4+6+...+1000$, $m-n$ es igual a:

A) 500 **B)** 1000 **C)** –499 **D)** 499 **E)** 501

7 Nivel III CP V

Llenamos una cuadrícula de p filas y q columnas con todos los enteros desde 1 a pq. Los escribimos en orden creciente, llenando en primer lugar la fila 1, luego la fila 2, etc. Si el 20 está en la tercera fila, el 41 en la 5ª y el 103 en la última, halla $p+q$.

A) 21 **B)** 22 **C)** 23 **D)** 24 **E)** 25

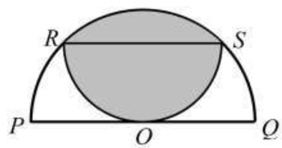
8 Nivel III CP V

El resultado de $2001^2 - 2000^2 + 1999^2 - 1998^2 + ... + 3^2 - 2^2 + 1^2 - 0^2$ es:

A) 1001^2 **B)** 2002^2 **C)** $2002 \cdot 1001$ **D)** $1001 \cdot 2001$ **E)** Nada de lo anterior

9 Nivel III CP V

En la figura adjunta, las curvas $PRSQ$ y ROS son semicircunferencias y RS es paralela a PQ. Si el radio de la semicircunferencia grande es 1 metro, ¿cuál es el área, en m^2, de la región sombreada?

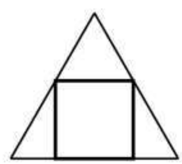


A) $\dfrac{\pi - 1}{2}$ **B)** $\dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{1}{2}$ **C)** $\dfrac{\pi}{4}$

D) 1 **E)** $\dfrac{\pi}{2} - 1$

10 Nivel III CP V

Si un cuadrado de lado 1 está inscrito en un triángulo equilátero como se muestra en la figura, la longitud del lado del triángulo es:



A) 2 **B)** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ **C)** $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

D) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{3}$ **E)** $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$

11 Nivel III CP VI

En cada una de las cinco jarras de la figura hay café, chocolate o leche (en ninguna hay mezcla) en las cantidades que se indican. No sabemos qué contiene cada jarra pero sí sabemos que hay en total el doble de café que de chocolate, que el chocolate está en una única jarra y que no hay tres jarras con el mismo líquido. ¿En qué jarra está el chocolate?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

12 Nivel III CP VI

En el cuadrado mágico de la figura, la suma de los números de cada fila, columna o diagonal es la misma. ¿Cuánto vale $y + z$?

v	24	w
18	x	y
25	z	21

A) 43 **B)** 44 **C)** 45
D) 46 **E)** 47

13 Nivel III CP VII

Lanzamos tres dados al aire, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los números aparecidos en dos de ellos, coincida con el del otro dado?

A) $\frac{5}{36}$ **B)** $\frac{1}{6}$ **C)** $\frac{7}{36}$ **D)** $\frac{2}{9}$ **E)** $\frac{5}{24}$

14 Nivel III CP VII

Si el producto de tres números enteros consecutivos, ninguno nulo, es 8 veces su suma, ¿cuál es la suma de sus cuadrados?

A) 50 **B)** 77 **C)** 110 **D)** 149 **E)** 194

15 Nivel III CP VIII

¿De cuántas formas puedo repartir doce caramelos entre Alicia, Beatriz y Carlos si a cada uno de ellos le tengo que dar por lo menos tres?

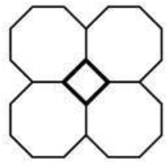
A) 9 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 12

16 Nivel III CP VIII

El número de dos cifras $[ab]$ es divisible por 7. Representamos por $[ba]$ el número obtenido al permutar las cifras.
De los siguientes números, I: $5b + a$ II: $3a + b$ III: $[ba] + a$, ¿cuáles son también divisibles por 7?

A) Solamente I y II **B)** Solamente II **C)** Solamente III
D) Los tres **E)** Solamente I y III

17 Nivel III CP IX



Rodeamos un polígono regular de m lados por m polígonos regulares de n lados cada uno, sin que haya huecos ni superposiciones. (En la figura que te mostramos, $m = 4$ y $n = 8$). ¿Cuánto vale n si $m = 10$?

A) 5 **B)** 6 **C)** 14 **D)** 20 **E)** 26

18 Nivel III CP IX

¿Cuántos capicúas de tres cifras son cuadrados perfectos?

A) Ninguno **B)** Uno **C)** Dos **D)** Tres **E)** Cuatro

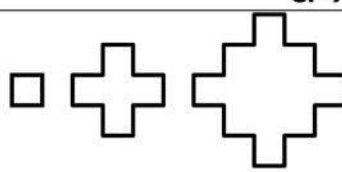
19 Nivel III CP X

En una reunión, la tercera parte de los asistentes tiene ojos verdes, el 80% cabello oscuro y el 20% ojos verdes y cabello oscuro. ¿Cuál es la proporción de los que no tienen ojos verdes ni cabello oscuro?

A) $\frac{1}{15}$ **B)** 10 % **C)** 15 % **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{3}{10}$

20 Nivel III CP X

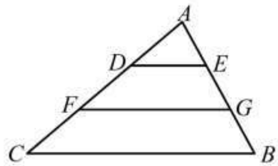
En esta serie de polígonos *crucigrama* de lado 1 cm, ¿cuál es el perímetro del que tiene 61 cm^2 de área?



A) 30 cm **B)** 32 cm **C)** 34 cm
D) 40 cm **E)** 44 cm

21 Nivel III CP X

En el triángulo ABC de la figura, de área 90 cm^2, los puntos E y G dividen al lado AB en tres partes iguales y las rectas DE y FG son paralelas a BC. ¿Cuál es, en cm^2, el área del trapecio $DEGF$?

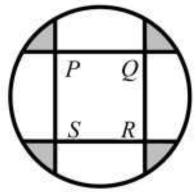


A) 20 **B)** 25 **C)** 30

D) 36 **E)** 45

22 Nivel III CP XI

El cuadrado $PQRS$ de lado 1 m y el círculo de radio 1 m de la figura, tienen el mismo centro. ¿Cuál es, en m^2, el área de la región sombreada?

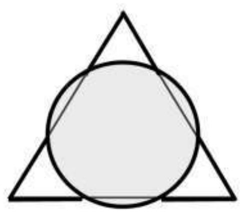


A) $\frac{\pi}{3}$ **B)** $\frac{\pi-\sqrt{3}}{3}$ **C)** $\sqrt{3}-1$

D) $\frac{\pi-1}{3}$ **E)** $\frac{\pi}{3}+1-\sqrt{3}$

23 Nivel III CP XI

Encima de un triángulo equilátero de lado 3 cm, colocamos un círculo de 1 cm de radio, haciendo coincidir los centros de ambas figuras. ¿Cuánto mide, en cm, el perímetro o borde de la figura resultante?



A) 2π **B)** $6+\pi$ **C)** 9

D) 3π **E)** $9+2\pi$

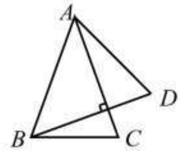
24 Nivel III CP XII

Con 10! (diez factorial) representamos al producto $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$ (multiplicar diez por todos los enteros anteriores hasta el uno) ¿Cuál es el número más pequeño que multiplicado por 10! nos da un cubo perfecto?

A) 490 **B)** 630 **C)** 1470 **D)** 4410 **E)** 8820

25 Nivel III CP XII

Los triángulos ABC y ABD son isósceles con $AB = AC = BD$. Si BD es perpendicular a AC, la suma de los ángulos $\hat{C}+\hat{D}$ es igual a:

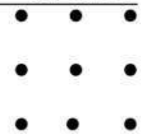


A) 115º **B)** 120º **C)** 130º **D)** 135º

E) No tenemos datos suficientes para determinarla

26 Nivel III CP XIII

Elegimos al azar tres puntos de los nueve del siguiente diagrama. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres elegidos estén alineados?



A) $\frac{8}{27}$ **B)** $\frac{2}{21}$ **C)** $\frac{8}{81}$ **D)** $\frac{4}{21}$ **E)** $\frac{8}{9}$

27 Nivel III CP XIII

Ayer por la tarde, Alicia condujo una hora más que Pedro y a una velocidad media superior a la de Pedro en 5 km/hora. Luisa condujo dos horas más que Pedro y a una velocidad media superior a la de Pedro en 10 km/hora. Si Alicia condujo 70 km más que Pedro, ¿cuántos km condujo Luisa más que Pedro?

A) 120 **B)** 130 **C)** 140 **D)** 150 **E)** 160

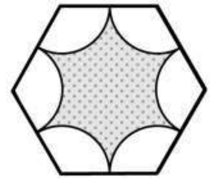
28 Nivel III CP XIV

En el cuadrado que observas resulta que cada fila, cada columna y cada diagonal forman una progresión aritmética. ¿Qué número es x?
[Recuerda: en una progresión aritmética, la diferencia entre dos términos consecutivos es constante.]

				21
	16			
		27		
				x

A) 49 **B)** 42 **C)** 33 **D)** 28 **E)** 4

29 Nivel III CP XIV



Si el hexágono de la figura tiene 2 dm de lado, ¿cuál es, en dm^2, el área de la estrella central?

A) $3\sqrt{3}-\pi$ **B)** $6\sqrt{3}-2\pi$ **C)** $2\sqrt{6}-\pi$
D) $3(\sqrt{18}-\pi)$ **E)** $6(2\sqrt{3}-\pi)$

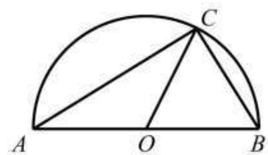
30 Nivel III CP XV

Si n es un cuadrado perfecto, ¿cuál es el primer cuadrado perfecto mayor que n?

A) $n+\sqrt{n}$ **B)** $n+2\sqrt{n}+1$ **C)** n^2+1 **D)** n^2+n **E)** n^2+2n+1

31 Nivel III CP XV

El dibujo muestra una semicircunferencia de centro O y radio 1 cm. Si C es un punto arbitrario de la semicircunferencia, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?



A) El ángulo $A\hat{C}B$ es recto.
B) El triángulo AOC es isósceles.
C) El área del triángulo ABC es menor o igual que 1 cm^2.
D) El área del triángulo AOC es igual a la del triángulo OBC.
E) $AO^2+OB^2=AC^2+BC^2$.

32 Nivel III CP XVI

Cuatro amigas, Ana, Bárbara, Clara y Daniela, forman un cuarteto musical y sabemos que:

(a) La que toca el clarinete tiene pecas.
(b) Ni Ana ni Clara tocan la guitarra.
(c) Solo la flautista, la violinista y Ana practican natación.
(d) Ni Clara ni Daniela tocan instrumentos de viento.

¿Cuál de estas afirmaciones es cierta?

A) Ana no tiene pecas **B)** Bárbara toca la flauta **C)** Clara toca la flauta
D) Daniela hace natación **E)** Bárbara toca el clarinete

33 Nivel III CP XVI

El resto de dividir 7^{25} entre 9 es:

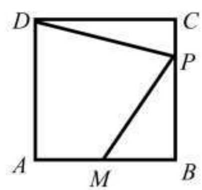
A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 8

34 Nivel III CP XVII

Entre los diez empleados de Mercafour se va a hacer un sorteo para elegir a los cuatro que trabajan este domingo. A Puri le viene fatal y Rubén le ha dicho que no se preocupe, que si le toca a ella, él irá en su lugar salvo, claro está, si los dos salen elegidos en cuyo caso Puri se tendrá que aguantar. ¿Qué probabilidad tiene Rubén de trabajar el domingo?

A) $\frac{2}{3}$ **B)** $\frac{1}{5}$ **C)** $\frac{3}{10}$ **D)** $\frac{8}{15}$ **E)** $\frac{13}{90}$

35 Nivel III CP XVII

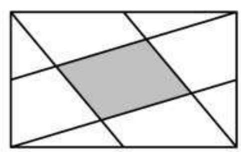


En el cuadrado $ABCD$ de lado 2 cm, M es el punto medio del lado AB y P es un punto variable del lado BC. ¿Cuál es el mínimo valor, en cm, de $DP + PM$?

A) $\sqrt{13}$ **B)** $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ **C)** $2\sqrt{3}$

D) $1+2\sqrt{2}$ **E)** $\sqrt{15}$

36 Nivel III CP XVIII



En el rectángulo de la figura, uniendo vértices con puntos medios de los lados hemos formado un romboide en el centro. Si el área del rectángulo es de 60 cm^2, la del romboide, en cm^2, es:

A) 25 **B)** 20 **C)** 15

D) 12 **E)** 10

37 Nivel III CP XVIII

¿Cuántos enteros n, con $1 \le n \le 100$, verifican que n^n es un cuadrado perfecto?

A) 5 **B)** 15 **C)** 50 **D)** 51 **E)** 55

38 Nivel III CP XVIII

En una sucesión, el primer término es $a_1 = 1$, el segundo $a_2 = -1$ y, a partir del tercero, cada término es el producto de los dos anteriores. ¿Cuál es la suma de los 2014 primeros términos de la sucesión?

A) –1007 **B)** –1005 **C)** –670 **D)** 0 **E)** 1008

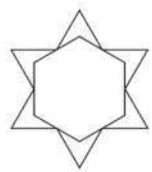
39 Nivel III CP XIX

Tres amigas están en un parque. Ali y Bea están juntas y Carolina está a 10 metros. Bea comienza a andar en una cierta dirección hasta que está a 10 m de Ali. ¿Cuál es la probabilidad de que Bea termine más cerca de Carolina que de Ali?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{\pi}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{1}{6}$

40 Nivel III CP XIX

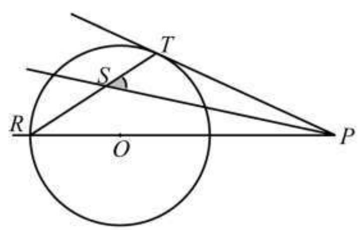
El hexágono regular inscrito en la estrella tiene un área de 12 cm^2. El área, en cm^2, de la estrella es:



A) 15 **B)** 18 **C)** 20
D) 21 **E)** 24

41 Nivel III CP XX

Desde un punto P exterior a una circunferencia se trazan dos rectas, una que pasa por el centro O y otra tangente en T, como muestra la figura. La bisectriz del ángulo $O\hat{P}T$ corta al segmento RT en S. ¿Cuál es la medida del ángulo $T\hat{S}P$?



A) 22,5º **B)** 30º **C)** 37,5º
D) 45º **E)** 52,5º

42 Nivel III CP XX

Si los cuatro enteros C, D, $C + D$ y $C - D$ son números primos, su suma tiene que ser:

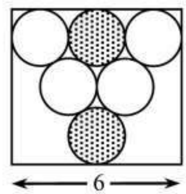
A) Múltiplo de 2 **B)** Múltiplo de 3 **C)** Múltiplo de 5
D) Múltiplo de 7 **E)** Un número primo

43 Nivel III CP XXI

Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, escritos en algún orden, formamos el número de cinco cifras *PQRST*. Si el número de tres cifras *PQR* es divisible por 4, el *QRS* es divisible por 5 y el *RST* es divisible por 3, ¿qué cifra representa la letra *P*?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

44 Nivel III CP XXI



En el interior del rectángulo de la figura, uno de cuyos lados mide 6 cm, hay seis circunferencias iguales, tangentes entre sí y tangentes a los lados del rectángulo. ¿Cuál es, en cm, la distancia entre los puntos más cercanos de los círculos sombreados?

A) $\frac{3}{2}$ **B)** $\sqrt{2}$ **C)** $2(\sqrt{3}-1)$ **D)** $\frac{\pi}{2}$ **E)** 2

45 Nivel III CP XXII

María tiene tres nietos que la llaman por teléfono regularmente. Uno cada 3 días, otro cada 4 y el otro cada 5. El 31 de diciembre de 2017 la llamaron los tres. ¿Cuántos días del año 2018 no recibirá ninguna llamada?

A) 78 **B)** 80 **C)** 144 **D)** 146 **E)** 152

46 Nivel III CP XXII

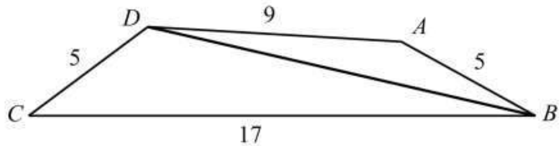
Consideramos 2018 puntos de los cuales unos son azules y los otros verdes. Asignamos a cada punto una fracción cuyo numerador es el número de puntos del otro color y el denominador es el número de puntos de su color (incluido él). ¿Cuál es la suma de las 2018 fracciones así construidas?

A) 2018 **B)** 1346 **C)** 1009 **D)** 505 **E)** Falta información

47 Nivel III CP XXIII

En el cuadrilátero $ABCD$ de la figura, ¿cuánto mide BD si sabemos que es un entero?

A) 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 15



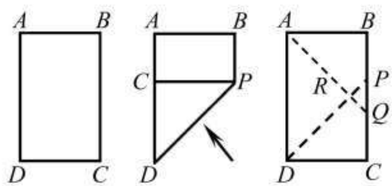
48 Nivel III CP XXIII

Si $(x+2)\cdot(y+2)=60$ y $(x+3)\cdot(y+3)=40$, ¿cuál es el valor de $(x+5)\cdot(y+5)$?

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

49 Nivel III CP XXIV

Una hoja rectangular $ABCD$ con AB = 5 cm y AD = 8 cm, se dobla para que el borde CD caiga sobre el borde AD, formándose así el doblez PD. Se desdobla y a continuación vuelve a doblarse de tal manera que AB caiga sobre AD, formándose ahora el doblez AQ. Si la intersección de estos dos dobleces es el punto R, calcula el área, en cm^2, del cuadrilátero $DRQC$.



A) 10 **B)** 10,5 **C)** 11 **D)** 11,5 **E)** 12

50 Nivel III CP XXV

¿Cuántos números enteros positivos son iguales a cuatro veces la suma de sus cifras?

A) Uno **B)** Dos **C)** Tres **D)** Cuatro **E)** Cinco

Enunciados - Nivel IV

1 **Nivel IV** **CP I**

En una mesa hay cinco cartas como se muestra en la figura.

$\boxed{P}$ $\boxed{Q}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{6}$

Cada carta tiene una letra por una cara y un número positivo por la otra. Pedro dice: "Cualquier carta que tenga una vocal por un lado, tiene un número par por el otro". Alicia descubre que esta afirmación es falsa dando la vuelta a una de las cinco cartas. ¿A cuál?

A) 3 **B)** 4 **C)** 6 **D)** P **E)** Q

2 **Nivel IV** **CP I**

En una caja metemos una tarjeta etiquetada con un 1, dos con un 2 cada una, tres con un 3 cada una, y así hasta 50 tarjetas con un 50.
En total hemos, pues, metido 1 + 2 + 3 +......+ 50 = 1275 tarjetas. Cogemos un montón de ellas. El mínimo número de tarjetas que debemos coger para garantizar que al menos haya diez tarjetas en las que está escrita la misma etiqueta es:

A) 10 **B)** 51 **C)** 415 **D)** 451 **E)** 521

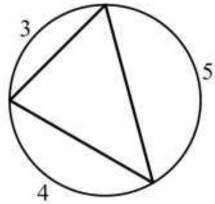
3 **Nivel IV** **CP II**

Antonio y Beatriz empiezan a trabajar el mismo día. El horario de Antonio consiste en tres días de trabajo y uno de descanso mientras que Beatriz trabaja siete días seguidos y luego descansa tres días seguidos. En los 1000 primeros días de trabajo, ¿cuántos días coinciden en el descanso?

A) 48 **B)** 50 **C)** 72 **D)** 75 **E)** 100

4 **Nivel IV** **CP II**

Los arcos que determinan los vértices del triángulo de la figura tienen longitudes 3, 4 y 5. ¿Cuál es el área del triángulo?



A) 6 **B)** $\frac{18}{\pi^2}$ **C)** $\frac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}-1)$

D) $\frac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}+3)$ **E)** Falta información.

5 Nivel IV CP III

Dos velas son de diferente longitud y grosor. La más larga dura 7 horas ardiendo y la más corta 10 horas. Si después de 4 horas ardiendo, las dos velas tienen igual longitud, ¿cuál es el cociente entre las longitudes de ambas?

A) $\frac{7}{10}$ **B)** $\frac{3}{5}$ **C)** $\frac{4}{7}$ **D)** $\frac{5}{7}$ **E)** $\frac{2}{3}$

6 Nivel IV CP III

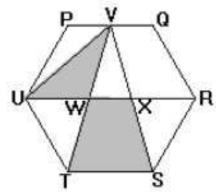
Algunos de los animales que hay en Madrid están realmente locos. El 10 % de los gatos se creen que son perros y el 10 % de los perros se creen que son gatos. Todos los demás, perros y gatos, son perfectamente normales. Un día hicimos un test a todos los perros y gatos de Madrid y resultó que el 20% del total se creían que eran gatos. ¿Qué porcentaje del total de gatos y perros de Madrid son realmente gatos?

A) 12,5 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 22 **E)** 22,5

7 Nivel IV CP IV

En el hexágono regular $PQRSTU$ de la figura, V es el punto medio de PQ, y W y X son los puntos que se señalan.

¿Cuánto vale $\dfrac{\text{Área } WXST}{\text{Área } UVW}$?



A) 2 **B)** 3 **C)** $\frac{2}{\sqrt{3}}$

D) $\sqrt{3}$ **E)** $\sqrt{2}$

8 Nivel IV CP IV

La sucesión $a_1, a_2, a_3,...$ verifica que $a_1 = 19$, $a_{2000} = 99$ y para $n \geq 3$, a_n es la media aritmética de los $n-1$ primeros términos. ¿Cuál es el valor de a_2?

A) 29 **B)** 59 **C)** 79 **D)** 99 **E)** 179

9 Nivel IV CP V

¿Cuántos enteros positivos de dos cifras son menores que el producto de sus cifras?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 45

10 Nivel IV CP V

Si $\operatorname{tg} x = \dfrac{2ab}{a^2 - b^2}$ con $a > b > 0$ y $0^\circ < x < 90^\circ$, sen x es igual a:

A) $\dfrac{a}{b}$ **B)** $\dfrac{b}{a}$ **C)** $\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2a}$ **D)** $\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2ab}$ **E)** $\dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$

11 Nivel IV CP VI

Dos paredes de una habitación y el techo se juntan en ángulo recto en un punto *P*. Una mosca está en el aire a 1 m de una pared, 8 m de la otra y a 9 m del punto *P*. ¿A qué distancia, en metros, está del techo?

A) $\sqrt{13}$ **B)** $\sqrt{14}$ **C)** $\sqrt{15}$ **D)** 4 **E)** $\sqrt{17}$

12 Nivel IV CP VI

En una caja hay 1001 bolas blancas y 1001 bolas negras. Si P_1 es la probabilidad de que al coger dos bolas al azar sean del mismo color y P_2 la probabilidad de que sean de diferente color, entonces $P_2 - P_1$ es igual a:

A) 0 **B)** $\dfrac{1}{2002}$ **C)** $\dfrac{1}{2001}$ **D)** $\dfrac{2}{2001}$ **E)** $\dfrac{1}{1000}$

13 Nivel IV CP VII

Cada una de las afirmaciones siguientes puede ser verdadera o falsa.

1. Las afirmaciones 3 y 4 son ambas verdaderas.
2. Las afirmaciones 4 y 5 no son ambas falsas.
3. La afirmación 1 es verdadera.
4. La afirmación 3 es falsa.
5. Las afirmaciones 1 y 3 son ambas falsas.

¿Cuántas afirmaciones de estas cinco son verdaderas?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

14 Nivel IV CP VII

Después de las cinco de la mañana, ¿cuánto tiempo, expresado en horas, debe pasar para que la aguja de los minutos y la de las horas de un reloj formen entre sí, por primera vez, un ángulo recto?

A) $\frac{1}{5}$ **B)** $\frac{2}{11}$ **C)** $\frac{5}{22}$ **D)** $\frac{4}{23}$ **E)** $\frac{7}{30}$

15 Nivel IV CP VIII

El menor entero positivo n para el que $10^n - 1$ es múltiplo de 63 es:

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

16 Nivel IV CP VIII

Elegimos al azar un punto (x, y) del rectángulo de vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 1)$ y $(0, 1)$. ¿Cuál es la probabilidad de que x sea menor que y?

A) $\frac{1}{8}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{3}{8}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{3}{4}$.

17 Nivel IV CP IX

Si x e y son los números complejos dados por $x = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $y = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ¿cuál de las siguientes afirmaciones no es verdadera?

A) $x^5 + y^5 = -1$ **B)** $x^7 + y^7 = -1$ **C)** $x^9 + y^9 = -1$ **D)** $x^{11} + y^{11} = -1$ **E)** $x^{13} + y^{13} = -1$

18 Nivel IV CP IX

Sea $f(x) = x^2 + 6x + 1$ y T el conjunto de los puntos (x, y) tales que $f(x) + f(y) \leq 0$ y $f(x) - f(y) \leq 0$. El entero más próximo al valor del área del recinto determinado por el conjunto T, es:

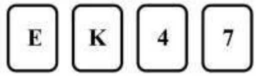
A) 21 **B)** 22 **C)** 23 **D)** 24 **E)** 25

19 Nivel IV CP X

La suma de 49 números enteros consecutivos es 7^5. ¿Cuál es su mediana?

A) 7 **B)** 7^2 **C)** 7^3 **D)** 7^4 **E)** 7^5

20 Nivel IV CP X



Cada una de estas cartas tiene una letra en una cara y un número en la otra cara. Pedro dice: *"En cualquiera de estas cartas se verifica que como tenga una vocal por una cara, tiene un número par por la otra"*. ¿A cuántas cartas como mínimo tiene que darles la vuelta Alicia para comprobar que Pedro dice la verdad?

A) Ninguna **B)** Una **C)** Dos **D)** Tres **E)** Cuatro

21 Nivel IV CP XI

¿Cuántos "martes y 13" puede haber como mucho en un año?

A) Uno **B)** Dos **C)** Tres **D)** Cuatro **E)** Cinco

22 Nivel IV CP XI

Nadal y Federer juegan en tierra batida un partido a 3 sets, es decir, vence quien gana 2 sets. Si la probabilidad que tiene Nadal de ganar cada set es un 60 %, ¿qué probabilidad tiene Nadal de salir victorioso en el partido?

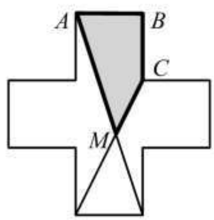
A) 0,6 **B)** 0,648 **C)** 0,504 **D)** 0,36 **E)** 0,75

23 Nivel IV CP XII

¿Cuáles son las dos últimas cifras de 51^{48}?

A) 81 **B)** 61 **C)** 41 **D)** 21 **E)** 01

24 Nivel IV CP XII



Los doce lados del polígono de la figura son de igual longitud, 4, y cualesquiera dos consecutivos se cortan en ángulo recto. ¿Cuál es el área del cuadrilátero *ABCM*?

A) $\frac{44}{3}$ **B)** 16 **C)** $\frac{88}{5}$

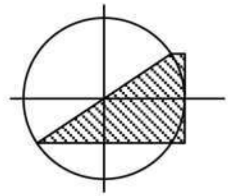
D) 20 **E)** $\frac{62}{3}$

25 Nivel IV CP XIII

¿Cuál es el valor del ángulo agudo de un rombo de lado c, si c es media geométrica de las diagonales?

A) 15º **B)** 30º **C)** 45º **D)** 60º **E)** 75º

26 Nivel IV CP XIII



La figura muestra una circunferencia de radio 1 y un trapecio rectángulo cuyas bases son paralelas al eje horizontal, un lado es tangente a la circunferencia y el otro es un diámetro de la misma. Si el ángulo que forma este lado con la base mayor es α, el área de dicho trapecio es:

A) $2 \text{ sen } \alpha$ **B)** $2 \text{ sen}^2 \alpha$ **C)** $2 \text{ tg } \alpha$

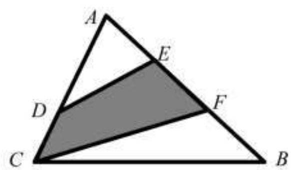
D) $2\text{sen}\alpha(2+\cos\alpha)$ **E)** $\text{sen } 2\alpha$

27 Nivel IV CP XIV

Uno de los números complejos z que verifican el sistema $\begin{cases} z \cdot t = 6_{60^\circ} \\ \dfrac{z}{t} = 3_{30^\circ} \end{cases}$ es:

A) $2+2\sqrt{3}\,i$ **B)** $2\sqrt{3}-2i$ **C)** $3 + 3\,i$ **D)** $2 + 2\,i$ **E)** $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i$

28 Nivel IV CP XIV



En la figura que te mostramos, el área del triángulo ABC es 9, DC es un tercio de AC y los puntos E y F dividen a AB en tres partes iguales. ¿Cuál es el área del cuadrilátero sombreado?

A) 3 **B)** 4 **C)** 4,5

D) 5 **E)** 6

29 Nivel IV CP XV

¿En cuántos ceros termina el producto de los 2011 primeros números primos?

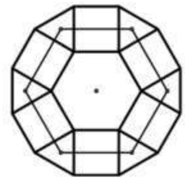
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

30 Nivel IV CP XV

Si $f(11)=11$ y $f(n+3)=\dfrac{f(n)-1}{f(n)+1}$, $f(2012)$ es:

A) 11 **B)** $\frac{5}{6}$ **C)** $-\frac{6}{5}$ **D)** $-\frac{1}{11}$ **E)** 2011

31 Nivel IV CP XVI

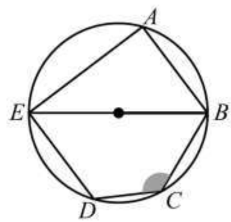


Hemos rodeado el hexágono regular central de la figura con cuadrados y triángulos equiláteros. Si el lado de ese hexágono mide 2 cm, ¿cuál es el área, en cm^2, del hexágono regular cuyos vértices son los centros de los triángulos equiláteros?

A) $18+6\sqrt{3}$ **B)** $24+3\sqrt{3}$ **C)** $12+8\sqrt{3}$

D) 24 **E)** $6+12\sqrt{3}$

32 Nivel IV CP XVI



En la circunferencia de diámetro EB las cuerdas AB y ED son paralelas. Si el cociente entre la medida de los ángulos $A\hat{E}B$ y $A\hat{B}E$ es $\frac{4}{5}$, ¿cuál es la medida del ángulo $B\hat{C}D$?

A) 120º **B)** 125º **C)** 130º

D) 135º **E)** 140º

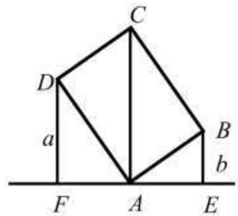
33 Nivel IV CP XVII

¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $x=10\cdot\cos x$?

A) 3 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 10

34 Nivel IV CP XVII

En la figura que observas, $ABCD$ es un rectángulo y los segmentos DF, BE y CA son perpendiculares a la recta FE. Si $DF = a$ y $BE = b$, la longitud FE es:



A) $a + b$ **B)** $2\sqrt{ab}$ **C)** $\sqrt{2a^2 + 2b^2}$

D) $\frac{2a+4b}{3}$ **E)** Nada de lo anterior

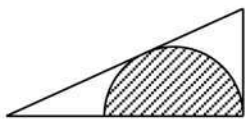
35 Nivel IV CP XVIII

La suma $1 + 2 + 3 + \ldots + n$, de los n primeros enteros positivos, es un número de tres cifras, todas iguales. ¿Cuál es la suma de las tres cifras?

A) 6 **B)** 9 **C)** 12 **D)** 15 **E)** 18

36 Nivel IV CP XVIII

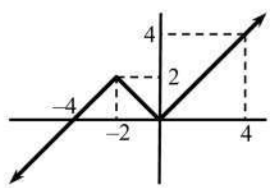
Los lados de un triángulo rectángulo miden 5, 12 y 13. Un semicírculo con centro en el cateto de longitud 12, es tangente al otro cateto y a la hipotenusa. ¿Cuánto mide su radio?



A) $\frac{7}{3}$ **B)** $\frac{10}{3}$ **C)** 4 **D)** $\frac{13}{3}$ **E)** $\frac{17}{3}$

37 Nivel IV CP XIX

Si $y = f(x)$ es la función representada en la figura, ¿cuántas soluciones tiene la ecuación $f[f(f(x))] = 0$?

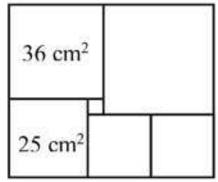


A) 4 **B)** 3 **C)** 2

D) 1 **E)** 0

38 Nivel IV CP XIX

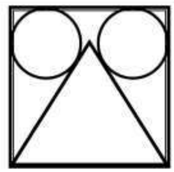
Dividimos un rectángulo en seis cuadrados como se muestra en la figura. En ella se muestran las áreas de dos de ellos. ¿Cuál es, en cm, el perímetro de dicho rectángulo?



A) 50 **B)** 44 **C)** 46
D) 52 **E)** 48

39 Nivel IV CP XX

La primera imagen de don Retorcido es una caricatura que le hicieron hace 20 años (cuando comenzaron los Concursos de Primavera). Está enmarcada en un cuadrado de 6 dm de lado, la nariz es un triángulo equilátero y cada lente, circular, es tangente a dos lados del marco y a un lado de la nariz. ¿Cuánto mide el radio, en dm, del círculo que representa cada lente?



A) 2 **B)** $\sqrt{2}$ **C)** $\sqrt{3}-\frac{1}{2}$ **D)** $3-\sqrt{3}$ **E)** $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

40 Nivel IV CP XX

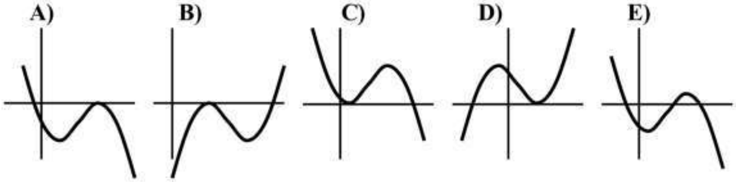
Marta tiene ocho sobres numerados del 1 al 8 y ocho tarjetas, numeradas también del 1 al 8. ¿De cuántas formas puede distribuir las tarjetas, una en cada sobre, de forma que ninguna de las tarjetas 1, 2 y 3 esté en el sobre con su misma numeración?

A) 27 240 **B)** 29 160 **C)** 27 360 **D)** 27 600 **E)** 25 200

41 Nivel IV CP XXI

Si $a < b$, ¿cuál de las siguientes gráficas podría ser la de la función $f(x)=(a-x)(b-x)^2$?

A) **B)** **C)** **D)** **E)**



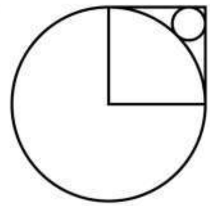
42 Nivel IV CP XXI

¿Cuál de los siguientes números es el más próximo a $\sqrt{101}-10$?

A) $\frac{1}{16}$ **B)** $\frac{1}{18}$ **C)** $\frac{1}{20}$ **D)** $\frac{1}{22}$ **E)** $\frac{1}{24}$

43 Nivel IV CP XXII

La figura adjunta muestra dos circunferencias tangentes entre sí y un cuadrado de lado 10 cm, con un vértice en el centro de la circunferencia mayor y dos lados tangentes a ambas circunferencias. Si escribimos el radio de la circunferencia menor como $a-b\sqrt{2}$ cm, el valor de $a+b$ es:



A) 30 **B)** 40 **C)** 50
D) 60 **E)** 70

44 Nivel IV CP XXII

Dos semirrectas que parten de un punto O forman un ángulo de 30º. Los puntos A y B están uno en cada una y $AB = 1$. ¿Cuál es la máxima longitud posible del segmento OB?

A) 1 **B)** $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ **C)** $\sqrt{3}$ **D)** 2 **E)** $\frac{4}{\sqrt{3}}$

45 Nivel IV CP XXIII

En cada vértice de un pentágono escribimos un número entero, de modo que la suma de los números de dos vértices contiguos no sea un múltiplo de tres, y tampoco lo sea la suma de los números de tres vértices consecutivos. De los cinco números escritos, ¿cuántos son, necesariamente, múltiplos de 3?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** Ninguno

46 Nivel IV CP XXIII

Sean a, b, c, f, g y h los números complejos cuyos afijos son los vértices de un triángulo ABC, su circuncentro F, su baricentro G y su ortocentro H, respectivamente. Entonces:

A) $a + b + c = 3h$ **B)** $2(a + b + c) = 3(f + h)$ **C)** $a + b + c = 2f + h$

D) $2(a + b + c) = 3$ **E)** $f + h = 2g$

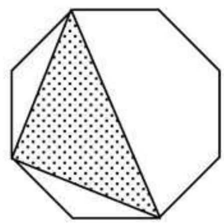
47 Nivel IV CP XXIV

Sea una función f tal que $f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$, para cualesquiera enteros a y b. Si $f(1) = 3$, entonces el valor de $f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$ es:

A) 40 **B)** 81 **C)** 0 **D)** –81 **E)** –40

48 Nivel IV CP XXIV

En un octógono regular he formado un triángulo uniendo tres vértices al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un lado del triángulo sea también un lado del octógono?



A) $\frac{1}{7}$ **B)** $\frac{3}{8}$ **C)** $\frac{1}{2}$

D) $\frac{5}{7}$ **E)** $\frac{11}{14}$

49 Nivel IV CP XXV

Venga, ¡¡¡a sumar todos los números enteros positivos y en orden, empezando por el uno!!! Cuando al profesor se le pasó el enfado dijo a sus cinco estudiantes que podían parar y les pidió sus resultados. ¿Qué estudiante realizó bien su suma?

A) 2016 **B)** 2018 **C)** 2020 **D)** 2022 **E)** 2024

50 Nivel IV CP XXV

En una liguilla de fútbol con cuatro equipos a doble partido (3 puntos por partido ganado y 1 punto por empate), conocemos las puntuaciones 16, 8 y 2 de tres de ellos. Si sabemos que en total hubo cinco partidos que terminaron con empate, los puntos del cuarto equipo fueron:

A) 7 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 3

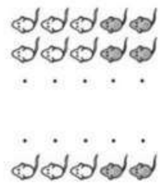
Soluciones - Nivel I

1 Nivel I CP I

Dos gatos *Mu* y *Mi* cazaron entre los dos sesenta ratones. Si *Mu* caza tres ratones por cada dos ratones que caza *Mi*, ¿cuántos ratones cazó *Mi*?

A) 2 **B)** 30 **C)** 24 **D)** 40 **E)** 36

(C) Por cada 5 ratones, *Mu* caza 3 y *Mi* 2. Si organizamos los ratones en un esquema como el de la figura, donde los ratones blancos son los cazados por *Mu* y los grises los cazados por *Mi*, vemos claramente que tendremos $\frac{60}{5}=12$ grupos de 5 ratones.



Así pues, *Mi* cazó $12\times 2=24$ ratones.

2 Nivel I CP I

Antonio, Beatriz, Carlos y Diana están sentados en una fila de cuatro sillas numeradas del 1 al 4. Emilio los ve y dice:

– Beatriz está al lado de Carlos.
– Antonio está entre Beatriz y Carlos.

Si las dos afirmaciones son falsas y Beatriz está sentada en la silla nº 3, ¿quién ocupa la silla nº 2?

A) Antonio **B)** Beatriz **C)** Carlos **D)** Diana

E) No hay información suficiente

(D) Si comenzamos con una tabla como la de abajo es muy sencillo resolver el problema.

Silla 1	Silla 2	Silla 3	Silla 4
		Beatriz	

Sabemos que Beatriz está sentada en la silla 3, por lo que Carlos no está ni en la 2 ni en la 4 ya que Beatriz **no** está al lado de Carlos, así que estará en la 1.

Silla 1	Silla 2	Silla 3	Silla 4
Carlos		Beatriz	

Por otra parte, Antonio **no** está entre Beatriz y Carlos y, en consecuencia estará en la 4, quedando la 2 para Diana.

Silla 1	Silla 2	Silla 3	Silla 4
Carlos	Diana	Beatriz	Antonio

3 Nivel I CP II

Si el número de primos menores de 50 es exactamente 15, ¿cuántos hay menores que 60?

A) 19 **B)** 18 **C)** 17 **D)** 16 **E)** 15

(C) Como nos dicen que hasta 50 hay 15 primos, solo nos falta estudiar los números del 51 al 59.
Los pares: 52, 54, 56 y 58 son múltiplos de 2.
Los múltiplos de 3 son el 51 ($5 + 1 = 6$) y el 57 ($5 + 7 = 12$).
El 55 es múltiplo de 5, porque termina en 5.
Solo quedan el 53 y el 59. Solo tenemos que estudiar si son divisibles entre los primos menores o iguales que 7 (2, 3, 5, 7). ¡Piensa por qué!
53 es primo porque no es divisible ni entre 2, ni entre 3, ni entre 5, ni entre 7.
59 es primo porque no es divisible ni entre 2, ni entre 3, ni entre 5, ni entre 7.
Por lo tanto, entre 50 y 60 hay dos primos. Así pues, hay 17 primos menores que 60.

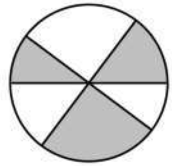
4 Nivel I CP II

En un cajón hay tres calcetines blancos, dos negros y cinco rojos. Sin mirar dentro del cajón, ¿cuál es el mínimo número de calcetines que hay que sacar para estar seguro de que podemos ponernos dos calcetines del mismo color?

A) 2 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 7

(D) Si saco tres calcetines es posible que haya uno de cada color, pero si saco cuatro, aunque los tres primeros sean de distinto color, el cuarto, dado que solo hay tres colores, es seguro que será de uno de esos colores. Por lo tanto, la respuesta es cuatro calcetines.
Notemos que el punto esencial es que tenemos tres y solo tres colores, importando poco el número de calcetines con tal de tener cuatro o más.

5 Nivel I CP III



Si el radio del círculo es 6, el área de la región sombreada es:

A) 6π **B)** 12π **C)** 18π

D) 24π **E)** 36π

(C) Cada sector circular sombreado se corresponde con su sector blanco simétrico con respecto al centro del círculo. Así, el área de la región sombreada es la mitad del área del círculo, $\pi \cdot 6^2 = 36\pi$. Luego el área pedida es 18π .

6 Nivel I CP IV

Para fabricar un kilo de miel, las abejas hacen 500 000 viajes entre la colmena y las flores. En cada viaje una abeja transporta por término medio 8 mg de néctar. ¿Cuántos kilos de néctar son necesarios para obtener un kilo de miel?

A) 4 **B)** 20 **C)** 40 **D)** 10 **E)** 8

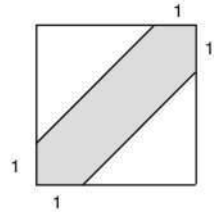
(A) Si en cada viaje se transportan 8 mg de néctar, en 500 000 viajes se transportarán 500 000 × 8 = 4 000 000 mg de néctar y, con ellos, las abejas, fabricarán un kilo de miel. Ahora solo falta saber cuántos kilos son 4 000 000 mg. Dado que 1000 mg son un gramo, 4 000 000 mg = 4 000 000 : 1000 = 4000 g y como 1000 g son un kilo, 4000 g = 4 kg.
Así que, para obtener un kilo de miel, son necesarios 4 kilos de néctar.

7 Nivel I CP IV

¿Cuál es el área de la franja sombreada dentro del cuadrado de lado 4 m?

A) 6 m^2 **B)** 7 m^2 **C)** 7,5 m^2

D) 8 m^2 **E)** 8,5 m^2



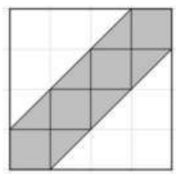
PRIMERA SOLUCIÓN

(C) Observa que los dos triángulos blancos forman un cuadrado de lado 3, por lo que lo más cómodo es obtener el área del cuadrado, 16 m^2, y restarle el área del cuadrado blanco, 9 m^2.

El área de la zona sombreada es $16 - 9 = 7$ m^2.

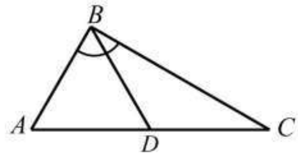
SEGUNDA SOLUCIÓN

(C) Muchos problemas de este tipo se resuelven fácilmente dividiendo la figura en partes de igual área. En nuestro caso dividiremos el cuadrado en 16 cuadraditos de 1 m^2. Observamos que la franja sombreada se secciona en 4 cuadraditos más 6 medios cuadraditos. Por lo que su área es igual a la de $4 + 3 = 7$ cuadraditos, esto es, 7 m^2.



8 Nivel I CP V

En el triángulo de la figura, los segmentos AD, BD y DC son iguales. ¿Cuánto mide el ángulo $A\hat{B}C$? (Con vértice en B).

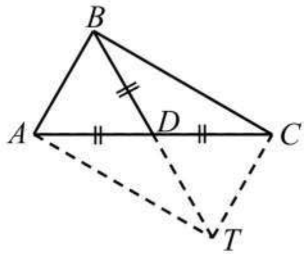


A) 75º **B)** 86º **C)** 90º

D) 92º **E)** Falta información

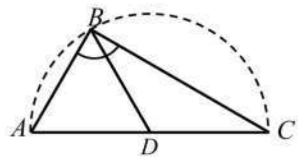
PRIMERA SOLUCIÓN

(C) Si dibujamos el triángulo ACT, igual al dado, resulta un paralelogramo $ABCD$ en el que sus diagonales $AC = 2AD$, ya que $AD = DC$, y $BT = 2BD$ ya que $BD = DT$ son iguales pues $AD = BD$. Así pues, dicho paralelogramo es un rectángulo y el ángulo pedido es de 90º.



SEGUNDA SOLUCIÓN

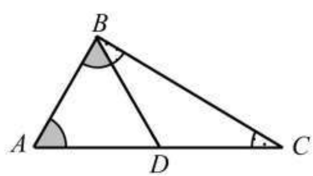
(C) Si nos fijamos bien, vemos que los segmentos iguales AD, BD y DC, pueden ser radios de una circunferencia de centro D, como se muestra en la figura. Queda claro que el ángulo $A\hat{B}C$ es un ángulo inscrito en la circunferencia, con ángulo central de 180º. En consecuencia, el ángulo $A\hat{B}C$ mide $\dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.



TERCERA SOLUCIÓN

(C) Si nos fijamos en el triángulo ADB, como $AD = BD$, deducimos que los ángulos marcados en gris son iguales.

De la misma forma, mirando el triángulo BDC, como $BD = DC$, los ángulos punteados son iguales. La suma de los ángulos del triángulo ACB está formada por dos ángulos grises y dos punteados, luego un ángulo gris y uno punteado suman 180º : 2 = 90º.



9 Nivel I CP V

Si veinte gatos comen veinte ratones en veinte días, ¿cuántos ratones comen diez gatos en diez días?

A) 5 **B)** 10 **C)** 20 **D)** 4 **E)** Nada de lo anterior

(A) 10 gatos en 20 días comerán la mitad de ratones que 20 gatos, o sea, comerán 10, por lo que en 10 días comerán la mitad de 10, es decir, 5 ratones.

10 Nivel I CP VI

Un arquitecto tiene dos planos de un mismo edificio: Uno a escala 1:20 y otro a escala 1:50. ¿Cuál es la longitud de la fachada de un edificio en el plano de escala 1:50 si en el de escala 1:20 es de 20 cm?

A) 16 **B)** 8 **C)** 50 **D)** 4 **E)** 12

(B) Una escala es la razón entre la medida del plano y la medida en el mundo real. Para el plano a escala 1:20 significa que un centímetro del plano representa 20 centímetros en la realidad, de donde se deduce que para una medida en el plano de 20 cm son $20 \times 20 = 400$ cm de la realidad.
Ahora veamos cómo representar 400 cm de la realidad en un plano 1:50. Como la escala 1:50 significa que 50 cm de la realidad los vamos a representar con 1 cm, 400 cm de la realidad los representaremos con $400 : 50 = 8$ cm.

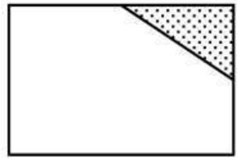
11 Nivel I CP VI

Mi reloj se atrasa veinte segundos cada hora. Ahora mismo lo he puesto en hora. ¿Dentro de cuánto tiempo llevará media hora de retraso?

A) 2 días **B)** 3 días y 18 horas **C)** 60 horas **D)** 75 horas **E)** 4800 minutos

(B) Si cada hora atrasa 20 segundos, en 3 horas atrasará un minuto y para acumular 30 minutos necesitará $3 \times 30 = 90$ horas, es decir, 3 días y 18 horas.

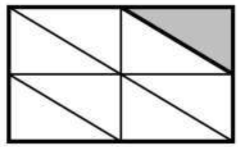
12 Nivel I CP VII



El área de un rectángulo es 1. Quitamos una esquina del rectángulo uniendo los puntos medios de dos lados consecutivos. ¿Cuál es el área del triángulo que le quitamos?

A) $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{2}{5}$

D) $\frac{3}{8}$ **E)** $\frac{1}{8}$



(E) Una división de la figura, en partes más pequeñas de igual área, facilita enormemente la solución de problemas de este tipo.

Aunque no se sabe la medida de los lados del triángulo, puede determinarse su área teniendo en cuenta la partición de la figura, en la que se observa que el triángulo es la octava parte del rectángulo.

13 Nivel I CP VII

Alba, Benito, Carolina y Diana tienen cada uno un animal; uno de ellos tiene un gato, otro un perro, otro un pez y otro un canario. Benito tiene un animal con pelo, Diana uno de cuatro patas, Carolina tiene un pájaro y a Alba y a Benito no les gustan los gatos. ¿Cuál es la frase falsa?

A) Alba tiene un pez **B)** Benito tiene un perro **C)** Carolina tiene un canario
D) Diana tiene un gato **E)** Diana tiene un perro

PRIMERA SOLUCIÓN

(E) Dado que cada uno tiene un animal y solo uno, es sencillo ir directamente a por la solución, que seguro que será D o E pues ambas no pueden ser ciertas.

Como Benito tiene un animal con pelo y no le gustan los gatos, Benito tiene un perro y, por tanto, Diana no puede tener un perro. En consecuencia, la frase falsa es "Diana tiene un perro".

SEGUNDA SOLUCIÓN

(E) También podemos deducir qué animal tiene cada uno y así buscar la frase falsa.

Benito tiene un animal con pelo (perro o gato) y no le gustan los gatos, así que tiene un perro. Diana tiene un animal con cuatro patas (perro o gato), pero como Benito tiene un perro, Diana tiene un gato. Carolina tiene un canario y, por tanto, Alba tiene un pez.

14 Nivel I CP VIII

La suma de los veinte primeros números enteros positivos consecutivos es 210. Entonces la suma de los primeros cuarenta números enteros positivos es:

A) 420 **B)** 610 **C)** 820 **D)** 840 **E)** 4200

(C) Sabemos que $1 + 2 + \ldots + 19 + 20 = 210$. En consecuencia, para sumar los primeros cuarenta enteros positivos debemos sumar a 210 los restantes enteros hasta 40.

Para ellos vamos a escribir esos 20 números que nos faltan por sumar de una manera ingeniosa y volveremos a usar que la suma de los 20 primeros es 210:

$21 = 20 + 1$

$22 = 20 + 2$

$23 = 20 + 3$

$\ldots$

$39 = 20 + 19$

$40 = 20 + 20$

Ahora sumamos así:

$21 + 22 + 23 + \ldots + 39 + 40 = 20 \times 20 + (1 + 2 + 3 + \ldots + 19 + 20) = 400 + 210 = 610$.

A este resultado le sumamos la suma de los 20 primeros números y obtenemos: $210 + 610 = 820$.

15 Nivel I CP VIII

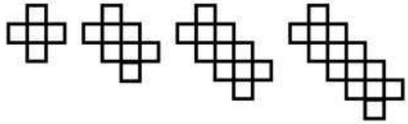
Pedro tiene veinte bolas de distintos colores: amarillas, verdes, azules y rojas. Diecisiete no son verdes, cinco son rojas y doce no son amarillas. ¿Cuántas bolas azules tiene Pedro?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 8 **E)** 15

(B) El punto clave es tener presente algo tan básico como esto: *toda bola es de cierto color o no es de ese color*. En nuestro problema esto nos lleva a que si 17 no son verdes, las otras 3 son necesariamente verdes y a que si 12 no son amarillas, las otras 8 son amarillas. Como además hay 5 rojas, tenemos: 3 (verdes) + 8 (amarillas) + 5 (rojas) = 16 bolas (no azules). Por tanto, el resto de las bolas son azules: $20 - 16 = 4$ bolas azules.

16 Nivel I CP IX

En esta serie de tableros, ¿cuántos cuadraditos tiene el tablero que ocupa el décimo lugar?



A) 50 **B)** 38 **C)** 32

D) 30 **E)** 29

PRIMERA SOLUCIÓN

(C) Basta continuar con la sucesión que se obtiene con el número de cuadraditos de cada tablero. Es fácil observar que este número de cuadraditos va aumentando de 3 en 3 y, como el tablero que ocupa el primer lugar tiene 5 cuadraditos, es inmediato formar la siguiente tabla:

Lugar	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
Nº de cuadraditos	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32

El décimo tablero tendría 32 cuadraditos.

SEGUNDA SOLUCIÓN

(C) Si no queremos formar toda la sucesión de números hasta llegar al deseado, podemos razonar así:
Para llegar al término 10º de la sucesión, tenemos que sumar a 5, 9 veces 3 cuadraditos, por lo tanto, el décimo sería: $5 + 9 \times 3 = 5 + 27 = 32$.
Y además hemos resuelto el problema general.
El tablero que ocupa el lugar n tiene $C_n = 5 + (n - 1) \times 3$ cuadraditos.

17 Nivel I CP X

El 1 de septiembre de 2005 fue jueves. ¿Qué día de la semana será el 1 de septiembre de 2025?

A) domingo **B)** lunes **C)** martes **D)** miércoles **E)** jueves

(B) Los años no bisiestos tienen 365 días, es decir, 52 semanas y un día $(365 = 52 \times 7 + 1)$. Por tanto si estamos en un año no bisiesto y hoy fuera lunes, el próximo año, tal día como hoy sería martes. En los años bisiestos $(366 = 52 \times 7 + 2)$ habría que avanzar dos días.
Entre 2005 y 2025 hay 20 años, de los cuales son bisiestos: 2008, 2012, 2016, 2020 y 2024. Es decir, hay 15 años no bisiestos y 5 bisiestos. Por tanto, el 1 de septiembre (jueves) se desplazará $15 + 5 \times 2 = 25$ días de la semana, o sea, 3 semanas y 4 días, esto es, pasará de ser jueves a ser lunes.

18 Nivel I CP X

En la siguiente suma cada símbolo representa un dígito diferente.
Si ✋ = 7 y ★ un número par, ¿cuál es el único valor posible para ☾?

	✋	☾	★
+	✋	☾	★
☺	★	☼	❀

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

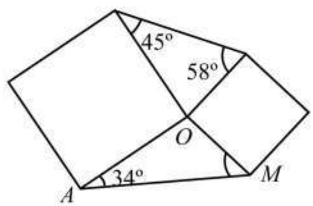
(D) Como ✋ = 7 y 7 + 7 = 14, entonces ★ puede ser 4 o 5 (si me llevara una), pero como nos dicen que es par, tenemos que ★ = 4, ☺ = 1 y ❀ = 8.
La luna ☾ tiene que ser menor que 5 porque si no, al hacer ☾ + ☾, me llevaría una y ★ sería impar. Probemos con cada caso. Si ☾ = 0 entonces ☼ también sería 0, pero cada letra debe ser un dígito diferente. ☾ = 1 no puede ser pues ☺ = 1. ☾ = 2 tampoco, pues sería ☼ = 4, pero ★= 4, por esa misma razón no puede ser ☾ = 4. Así que sólo nos queda ☾ = 3. Si ☾ = 3 entonces ☼ = 6 que sí es posible. Conclusión: ☾ = 3.

	7	**3**	**4**
+	**7**	**3**	**4**
1	**4**	**6**	**8**

19 Nivel I CP XI

La figura está formada por dos cuadrados y dos triángulos. El ángulo $A\hat{M}O$ mide:

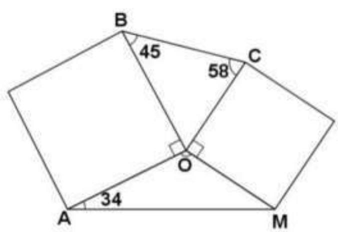
A) 43º **B)** 39º **C)** 38º
D) 36º **E)** 35º



(A) Si supiéramos la medida del ángulo $A\hat{O}M$ el problema estaría resuelto. Para ello calculamos primero el ángulo $B\hat{O}C = 180 - (45 + 58) = 77^{o}$.
Con este resultado es inmediato calcular el ángulo $A\hat{O}M$:

$A\hat{O}M = 360 - (90 + 90 + 77) = 103^{o}$.

Y finalmente: $A\hat{M}O = 180 - (34 + 103) = 43^{o}$.



20 Nivel I CP XI

Inicialmente hay un "1" en la pantalla. Al apretar la tecla A se multiplica por 3 el número de la pantalla. Al apretar la tecla B, se resta 1 al número de la pantalla. Utilizando solo las teclas A y B hay que llegar a tener en la pantalla el 53. ¿Cuántas veces, como mínimo, debes pulsar las teclas?

A) 4 **B)** 6 **C)** 10 **D)** 15 **E)** 53

(B) Al pulsar la tecla A, el valor del número aumenta multiplicándose por 3 y al pulsar B disminuye en una unidad. Está claro que pulsando A sólo conseguimos múltiplos de 3. Pero como 53 no es múltiplo de 3, necesariamente tendremos que pasar por el 54 antes de alcanzar nuestro objetivo. Como $54 = 2 \times 3^3$, es posible obtener este número, a partir del 2, pulsando AAA, que es el mínimo número de pulsaciones para ir del 2 al 54. Solo falta obtener el 2 y el 53. El 2 se obtiene, a partir del 1 inicial, pulsando AB y el 53 se logra restando 1 al 54 mediante una pulsación de la tecla B. En ambos casos es obvio que hemos obtenido los números con las mínimas pulsaciones posibles. Conclusión: ABAAAB es la secuencia que lleva del 1 al 53 con el mínimo número de pulsaciones. No obstante, podría pensarse que es posible alcanzar el 54 por algún otro camino, sin pasar por el 2. Pero es inmediato comprobar que cualquier alteración en ese sentido conlleva un aumento del número de pulsaciones.

También podemos ver que ninguna de las $2^4 = 16$ opciones que se obtiene pulsando 4 teclas (AAAA, AAAB, AABA, ...) nos llevará al 53. Por tanto, la solución es 6.

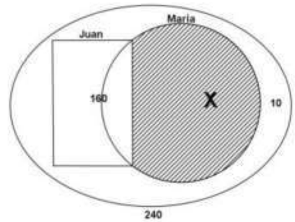
21 Nivel I — CP XII

María y Juan hacen la misma colección de cromos que consta de 240 cromos. María tiene 192 diferentes y Juan 160. Juntando sus cromos les faltarían aún 10 cromos para acabarla. ¿Cuántos cromos tiene María que no tiene Juan?

A) 32 **B)** 36 **C)** 38 **D)** 48 **E)** 70

PRIMERA SOLUCIÓN

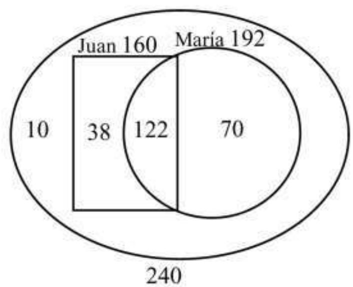
(E) Para resolver este tipo de problemas suele ser muy útil ayudarse de diagramas como el de la figura, donde cada región plana representa un conjunto determinado de objetos.



En nuestro caso:
La elipse representa la colección de 240 cromos.
El rectángulo representa los 160 cromos de Juan.
El círculo, los cromos de María.
La superficie de la elipse no ocupada por el rectángulo y el círculo, los 10 cromos que les faltan a Juan y María para completar la colección.
Y, finalmente, la zona rayada representa los X cromos de María que no tiene Juan.
De la figura se deduce inmediatamente que: $X = 240 - (160 + 10) = 70$ cromos.
Conviene resaltar que no hemos necesitado conocer el número de cromos que tiene María.

SEGUNDA SOLUCIÓN

(E) Entre María y Juan tienen 352 cromos.
La colección consta de 240 cromos, pero a María y a Juan les faltan 10 cromos para terminarla, lo que quiere decir que cada uno tiene 122 cromos repetidos:
$(192 + 160) - (240 - 10) = 352 - 230 = 122$.
Conociendo el número de cromos repetidos se rellena fácilmente el diagrama y podemos contestar: María tiene 70 cromos que no tiene Juan.



22 Nivel I CP XII

Sobre una línea recta hemos marcado cuatro puntos *A, B, C, D*, como indica el dibujo:

La distancia entre *A* y *C* son 12 m; y entre *B* y *D*, 18 m. ¿Qué distancia, en metros, separa los puntos medios de los segmentos *AB* y *CD*?

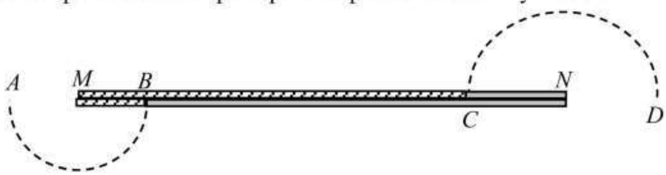
A) 15 **B)** 12 **C)** 18 **D)** 6 **E)**

PRIMERA SOLUCIÓN

(A) A veces, para resolver un problema matemático, puede ser interesante pensar en algún artilugio mecánico que se adapte a él. Imaginemos los segmentos *AB* y *CD* como dos regletas articuladas en los puntos medios, *M* y *N*, de los segmentos *AB* y *CD*, según se muestra en la figura.

Hagamos ahora girar 180º las secciones de regleta *AM* y *ND* alrededor de los puntos *M* y *N*, como se muestra en la figura de abajo.

Dado que la longitud total de las regletas es 18 + 12 = 30 m, y esta no ha variado, es obvio que la distancia que separa los puntos medios *M* y *N* es 30 : 2 = 15 m.

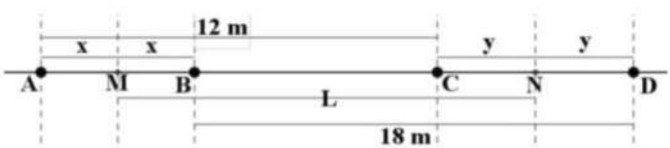


SEGUNDA SOLUCIÓN

(A) Y, por supuesto, podemos resolver el problema de forma algebraica.
Basta observar atentamente la figura para plantear las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} L = 12 - x + y \\ L = 18 - y + x \end{cases}$$

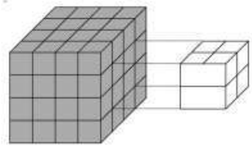
Sumando miembro a miembro tenemos que $2L = 12 + 18$ y, por tanto, $L = 15$ m.



23 Nivel I — CP XII

Con sesenta y cuatro cubitos blancos formamos un gran cubo y coloreamos sus caras de rojo. Después volvemos a deshacer el cubo en cubitos. ¿Cuántos cubitos pequeños seguirán teniendo todas sus caras blancas?

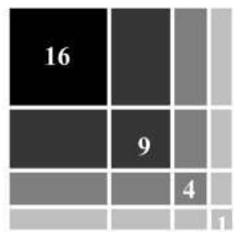
A) 16 **B)** 12 **C)** 8 **D)** 4 **E)** Ninguno



(C) Con 64 cubitos se forma un cubo de cuatro cubitos de lado. Si quitamos la *cáscara* pintada de rojo queda un cubo central de dos cubitos de lado, como muestra la figura.
Conclusión: solo quedan ocho cubitos completamente blancos.

24 Nivel I — CP XIII

El logo del Concurso de Primavera es un cuadrado formado por cuadrados y rectángulos. Si las áreas de los cuadrados son 16, 9, 4 y 1 cm^2, ¿cuál es, en cm^2, el área del cuadrado total?

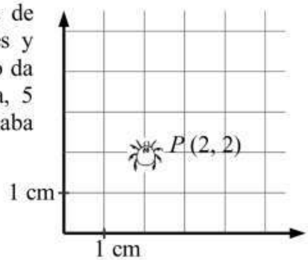


A) 100 **B)** 75 **C)** 64
D) 36 **E)** 25

(A) Nuestro logo no ofrece dificultad. Los lados de cada uno de los cuadrados miden respectivamente: $\sqrt{16} = 4\,\text{cm}$, $\sqrt{9} = 3\,\text{cm}$, $\sqrt{4} = 2\,\text{cm}$, $\sqrt{1} = 1\,\text{cm}$.
Por lo tanto, el lado del cuadrado total mide $4+3+2+1=10$ cm y su área será $10^2 = 100\,\text{cm}^2$.

25 Nivel I CP XIII

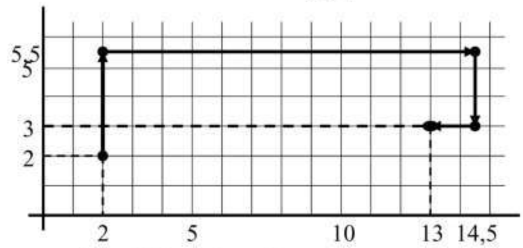
Un bichito está en el punto $P(2, 2)$ de unos ejes de coordenadas y comienza a dar saltitos horizontales y verticales de medio centímetro de longitud. Primero da 7 saltos hacia arriba, después 25 hacia la derecha, 5 hacia abajo y 3 hacia la izquierda. ¿En qué punto acaba su recorrido?



A) $A(13, 3)$ **B)** $B(3, 13)$ **C)** $C(4, 24)$ **D)** $D(24, 4)$ **E)** $E(3, 12)$

PRIMERA SOLUCIÓN

(A) Si no manejamos bien las coordenadas cartesianas podemos abordar el problema siguiendo uno a uno los pasos descritos en el enunciado.



[1º] 7 saltos hacia arriba: como cada salto es de 0,5 cm, recorrerá $7 \times 0,5 = 3,5$ cm. Lo representaremos por la primera flecha (vector) vertical y hacia arriba, de 3,5 cm de longitud.

[2º] 25 saltos hacia la derecha: lo representamos por el segundo vector (hacia la derecha) de longitud $25 \times 0,5 = 12,5$ cm.

[3º] 5 saltos hacia abajo: lo representamos por el siguiente vector (hacia abajo) de longitud $5 \times 0,5 = 2,5$ cm.

[4º] 3 saltos hacia la izquierda: lo representamos por el siguiente vector (hacia la izquierda) de $3 \times 0,5 = 1,5$ cm de longitud.

Finalmente queda a una distancia del eje vertical, de 13 cm y, a una distancia del eje horizontal de 3 cm. Decimos entonces que está en el punto $A(13, 3)$.

SEGUNDA SOLUCIÓN

(A) Si sabemos trabajar con las coordenadas el problema se resuelve más rápido.

En la dirección horizontal, el bichito, da 25 saltos hacia la derecha y 3 hacia la izquierda, de modo que se ha movido $25 - 3 = 22$ saltos hacia la derecha. De la misma forma, en sentido vertical se ha movido $7 - 5 = 2$ saltos hacia arriba.

Como cada salto es de 0,5 cm la posición final será:

Eje horizontal: $2 + 22 \times 0,5 = 13$. Eje vertical: $2 + 2 \times 0,5 = 3$.

Por lo tanto acaba en el punto $A(13, 3)$.

26 Nivel I CP XIV

Merche quiere que la probabilidad de sacar una bola blanca de este saco sea 2/5 y para ello añade bolitas grises y blancas. ¿Cuántas bolitas grises como mínimo tiene que añadir?

A) Una **B)** Dos **C)** Tres
D) Cuatro **E)** Cinco

(B) En este caso es conveniente empezar por considerar fracciones numéricas, olvidando de momento, las bolas que representan. Debemos centrarnos en obtener 2/5 a partir de números mayores que 2 y 5. Es inmediato ver que la fracción, con números más pequeños, que se simplifica a 2/5 es 4/10, lo que significa que para que la probabilidad de sacar una bola blanca sea 2/5, el saco debe contener cuatro bolas blancas y seis grises como mínimo.
Dado que inicialmente había cuatro bolas grises, Merche tiene que añadir dos bolas grises como mínimo.

27 Nivel I CP XIV

En cada una de las casillas del cuadrado hay un número entero. Si la suma de las tres horizontales, las tres verticales y las dos diagonales es la misma, ¿qué número hay en la casilla marcada con la letra x?

x		15
	15	3
12		24

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

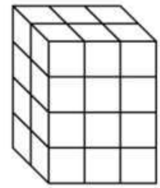
(D) Como x pertenece a la vez a una columna y una diagonal, la suma de los dos elementos restantes, tanto de la columna como de la diagonal, deberá sumar lo mismo. En nuestro caso tendremos $z + 12 = 15 + 24$, es decir, $z = 27$, y ya con la segunda fila completa podemos calcular la suma común (que llamaremos M):
$M = 27 + 15 + 3 = 45$, de donde $x = 45 - 15 - 24 = 6$.

x		15
z	15	3
12		24

Observa que en todo cuadrado mágico la constante mágica M, es decir, el valor de la suma de los números de cada fila, columna y diagonal es siempre igual al triple del valor de la casilla central. Esto es así porque si sumamos las dos diagonales más la fila y la columna centrales tendremos $4M$, pero como hemos sumado todos los números del cuadrado una vez, excepto el número de la casilla central (en nuestro caso, 15) que lo hemos sumado 4 veces y la suma de los 9 números es $3M$, tenemos que $4M - 3\cdot 15 = 3M$, luego $M = 45$. Sabiendo esto, era fácil resolver el problema y, en realidad, nos hubieran sobrado datos.

28 Nivel I CP XV

Con veinticuatro cubos de un centímetro de lado, Sofía ha construido un bloque como el de la figura, cuya base tiene un perímetro de 10 cm y su altura mide 4 cm. Santiago ha formado otro bloque usando cuarenta y dos cubos. Si el perímetro de la base es 18 cm, ¿cuántos centímetros mide la altura del bloque de Santiago?



A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 7

(B) Si el perímetro de la base mide 18 cm, la suma de los dos lados de la base (largo + ancho) será $18 \times 2 = 9$ cm.
Por otra parte, sabemos que $42 = \text{largo} \times \text{ancho} \times \text{alto}$. Y, además, descomponiendo 42 en factores primos tenemos que $42 = 7 \times 2 \times 3$. Lo que obliga a que los lados de la base sean 7 y 2, debido a que su suma es 9.
Por tanto, la altura necesariamente mide 3 cm.

29 Nivel I CP XV

Seis ejecutivos de una corporación europea se reúnen en Madrid para una conferencia.

– El Sr. A habla solo español e italiano. – La Sra. B habla solo español e inglés.
– El Sr. C habla solo inglés e italiano. – La Sra. D habla solo francés y español.
– El Sr. E habla solo italiano y francés. – La Sra. F habla solo inglés y francés.

¿De cuántas formas se pueden separar en tres grupos de dos, de manera que en todas las parejas las dos personas que las forman puedan hablar entre sí?

A) 4 **B)** 8 **C)** 12 **D)** 16 **E)** 24

(B) Para empezar construimos una tabla con los datos del enunciado; ponemos SÍ cuando ambos hablan un idioma común y NO en caso contrario.

	A	B	C	D	E	F
A		SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	NO
B	SÍ		SÍ	SÍ	NO	SÍ
C	SÍ	SÍ		NO	SÍ	SÍ
D	SÍ	SÍ	NO		SÍ	SÍ
E	SÍ	NO	SÍ	SÍ		SÍ
F	NO	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	

Si elegimos uno cualquiera de los ejecutivos vemos que solo puede estar con otros cuatro posibles. Tomemos, por ejemplo, el A. En este caso puede estar con B, C, D y E. Supongamos que está con B. Entonces quedan por agrupar los cuatro restantes: C, D, E y F que en principio se pueden agrupar, por parejas, de tres formas distintas.

	A	B	C	D	E	F
A		SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	NO
B	SÍ		SÍ	SÍ	NO	SÍ
C	SÍ	SÍ		NO	SÍ	SÍ
D	SÍ	SÍ	NO		SÍ	SÍ
E	SÍ	NO	SÍ	SÍ		SÍ
F	NO	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	

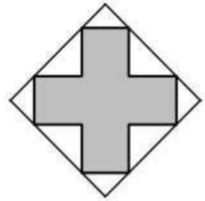
La segunda tabla muestra claramente que una y solo una de las parejas no puede agruparse, lo que invalida una de esas tres formas. Con lo que para la agrupación (A, B) tenemos dos formas de agrupar los cuatro restantes, y lo mismo puede decirse de las otras tres posibles agrupaciones de A: (A, C), (A, D) y (A, E). En consecuencia, para cada una de las cuatro formas de agrupar A tendremos dos formas de agrupar los cuatro restantes. En total $4 \times 2 = 8$ formas.

Con ayuda de las tablas es bastante fácil determinar las ocho maneras de emparejarse:

[(A, B), (C, E), (D, F)] [(A, B), (C, F), (D, E)]
[(A, C), (B, D), (E, F)] [(A, C), (B, F), (D, E)]
[(A, D), (B, C), (E, F)] [(A, D), (B, F), (C, E)]
[(A, E), (B, C), (D, F)] [(A, E), (B, D), (C, F)]

30 Nivel I CP XVI

Una cruz compuesta por cinco cuadrados iguales está inscrita (como se ve en la figura) en un cuadrado. Si el perímetro de la cruz es de 24 cm, ¿cuál es, en cm^2, el área del cuadrado?

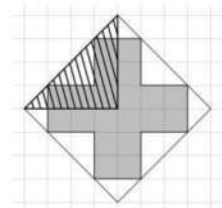


A) 24 **B)** 32 **C)** 36

D) 40 **E)** 48

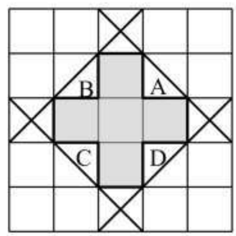
PRIMERA SOLUCIÓN

(B) Dado que el perímetro de la cruz mide 24 cm y que tiene 12 lados iguales, la longitud del lado es 24 : 12 = 2 cm, con lo que el lado de cada cuadradito del teselado mide 1 cm.
Si nos fijamos ahora en el triángulo rectángulo equilátero (rayado) de la figura, vemos que sus dos catetos miden cada uno 4 cm y, además, su hipotenusa al cuadrado es justamente el área del cuadrado, pedida. Por consiguiente, el área del cuadrado es igual a: $4^2 + 4^2 = 32$ cm^2.



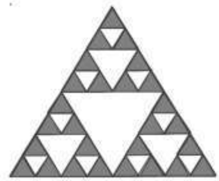
SEGUNDA SOLUCIÓN

(B) Para este tipo de problemas suele ser buena estrategia comenzar por sumergir la figura en un teselado sobre el que dibujar la figura original.
Si dibujamos la cruz sobre un teselado de cuadraditos de 2 cm de lado, como se muestra en la figura, es obvio que los triángulos A, B, C y D equivalen, en área, a 2 cuadraditos, y los 4 pequeños triángulos de los vértices a 1 cuadradito de la tesela. Por lo tanto, el área del cuadrado es: $(5 + 2 + 1) \times 4 = 32$ cm^2.



31 Nivel I CP XVI

¿Qué fracción del triángulo está pintada de blanco?

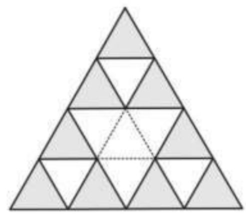


A) $\frac{10}{37}$ **B)** $\frac{37}{64}$ **C)** $\frac{1}{2}$

D) $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{23}{32}$

PRIMERA SOLUCIÓN

(B) El triángulo original está dividido en cuatro triángulos de igual área y, cada uno de ellos puede ser dividido en 16 pequeños triangulitos iguales. Así mismo vemos que el central tiene sus 16 triangulitos pintados de blanco, mientras que los otros tres, que son como el de esta figura, solo tienen 7 blancos cada uno. Tenemos pues $4 \times 16 = 64$ triangulitos, de los que $16 + 7 \times 3 = 37$ son blancos.



En consecuencia, la fracción pintada de blanco es $\frac{37}{64}$.

SEGUNDA SOLUCIÓN

(B) Podemos enfocar el problema desde un punto de vista aritmético.

En el triángulo original tenemos triángulos blancos de tres tamaños distintos y, como ya hemos visto, el grande es la cuarta parte, en área, del original; cada uno de los tres triángulos intermedios es la cuarta parte del grande y, los nueve pequeños tienen la cuarta parte de superficie que los intermedios. En consecuencia, la fracción del triángulo que está pintada de blanco es:

$$\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+9\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{37}{64}.$$

32 Nivel I CP XVII

Juanito ha colocado seis tarjetas con números de dos cifras, pero una se ha quedado boca abajo. Solo recuerda que el número que había en ella no es ni el mayor ni el menor de los seis; que sus cifras coinciden con las cifras de otro de los números, pero en distinto orden y que es múltiplo de 3. ¿Cuál es la suma de las cifras del número de la tarjeta que está boca abajo?

A) 7 **B)** 12 **C)** 4 **D)** 9 **E)** 6

(D) Si bailamos las cifras de los números visibles y eliminamos los que son de una cifra (04 y 06) y los que no son múltiplos de 3 (43), nos quedan el 75 y el 54. Pero como no puede ser ni el mayor ni el menor de la lista original, descartamos el 75 y nos queda necesariamente el 54. Sus cifras suman 9.
Puede observarse que, aun considerando válidas las tarjetas 04 y 06, también habría que desecharlas ya que 04 no es múltiplo de 3 y 06 sería la menor.

33 Nivel I CP XVII

Don Retorcido está triste porque no os verá hasta el próximo año. Os deja este último reto: ¿Quién de vosotros será capaz de adivinar en qué año nací? Nací en el siglo XVII; si al año de mi nacimiento le suprimís la cifra de las unidades queda un número cuya raíz cuadrada no tiene decimales; ¡ah!, y la cifra de las unidades es una unidad menor que la de las decenas. Pero para chinchar aún más, cambio la pregunta: ¿cuánto suman las cifras de mi año de nacimiento?

A) 21 **B)** 22 **C)** 23 **D)** 24 **E)** 25

(D) Don Retorcido nació entre los años 1600 y el 1699.
Para que quede un número cuadrado perfecto al eliminar la cifra de las unidades, la cifra de las decenas tiene que ser un 9, ya que 169 es el único cuadrado perfecto comprendido entre 160 y 169.
Por tanto, Don Retorcido habrá nacido entre los años 1690 y 1699.
Como la cifra de las unidades es una unidad menor que la de las decenas entonces su año de nacimiento es 1698. La suma de las cifras de 1698 es: $1 + 6 + 9 + 8 = 24$.

34 Nivel I CP XVIII

Por allí vienen cuatro amigos, cada uno con un oficio diferente:

- Adrián y el profesor van discutiendo.
- Javier vive muy cerca del actor.
- Álvaro es el primo del pintor, que a su vez es vecino de Juan.
- El tenista es más alto que Juan y que el actor.
- Adrián y Álvaro jamás han jugado al tenis.

¿Cuál de los amigos es el actor?

A) Adrián **B)** Álvaro **C)** Javier **D)** Juan

E) No se sabe con certeza

(B) Veamos en primer lugar qué dice cada proposición sobre los oficios de los amigos: La 1ª dice que Adrián NO es profesor. La 2ª dice que Javier NO es actor. La 3ª dice que Álvaro y Juan NO son pintores. La 4ª dice que Juan NO es tenista NI actor. La 5ª dice que Adrián y Álvaro NO son tenistas.

Una forma de abordar el problema es construir una tabla de doble entrada. Pondremos SÍ o NO en cada casilla según corresponda.

	Profesor	Actor	Pintor	Tenista
Adrián	**NO**			**NO**
Javier		**NO**		
Álvaro			**NO**	**NO**
Juan		**NO**	**NO**	**NO**

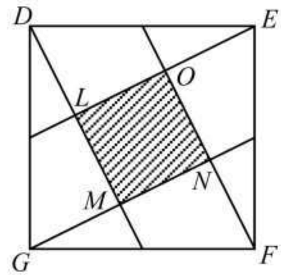
Teniendo en cuenta que cada amigo tiene uno y solo uno de los cuatro oficios, deducimos que en cada fila y en cada columna habrá un solo SÍ y tres NO. Rellenamos con este criterio y terminamos:

	Profesor	Actor	Pintor	Tenista
Adrián	**NO**	**NO**	**SÍ**	**NO**
Javier	**NO**	**NO**	**NO**	**SÍ**
Álvaro	**NO**	**SÍ**	**NO**	**NO**
Juan	**SÍ**	**NO**	**NO**	**NO**

Concluimos que Álvaro es el actor.

35 Nivel I CP XVIII

En el cuadrado *DEFG* de lado 10 cm hemos dibujado algunos segmentos uniendo vértices con puntos medios de los lados, y así hemos obtenido el cuadrado rayado *LMNO*. ¿Cuál es su área en cm^2?

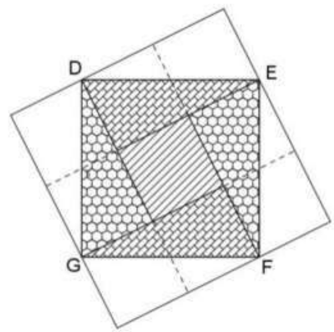


A) 20 **B)** 25 **C)** 35

D) 40 **E)** 50

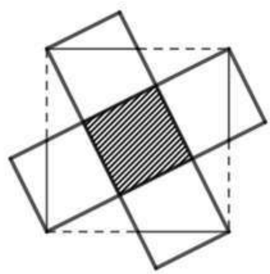
PRIMERA SOLUCIÓN

(A) En este tipo de problemas suele ser muy útil completar la figura de forma que quede dividida en partes iguales más pequeñas.
Completando el cuadrado, mediante el trazado de paralelas equidistantes como se muestra en la figura, se hace evidente que nuestro cuadrado original puede seccionarse en cinco polígonos de igual área que el cuadrado rayado: cuatro triángulos rectángulos y el cuadrado original *LMNO*.
Por tanto, el área del cuadrado mide la quinta parte de 10^2, es decir, 20 cm^2.



SEGUNDA SOLUCIÓN

(A) Otra forma de resolverlo es girando los triangulitos blancos y recolocarlos para formar una cruz de cinco cuadrados iguales.
Como el área total mide $10^2 = 100$ cm^2, el área de cada cuadradito mide $100 : 5 = 20$ cm^2.



36 Nivel I CP XVIII

Escribimos los números seguidos del 1 al 100: 12345678910111213…¿Qué cifra nos encontraremos en la posición cien?

A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 9

PRIMERA SOLUCIÓN

(C) Para números de dos cifras, a partir del 10, encontramos que la primera de sus cifras está en posición par, así que, en la posición cien, se hallará la primera cifra de cierto número n de dos cifras. No es difícil ver que, al escribir desde el 1 hasta el 49, ocupamos $9 + 20 \times 4 = 89$ posiciones y como la decena de los *cincuenta* ocupa 20 posiciones, concluimos que en la posición 100 encontraremos la cifra 5.

SEGUNDA SOLUCIÓN

(C) Vamos a separar el número en bloques:
El primer bloque lo forman 123456789 y son en total 9 cifras.
El segundo bloque lo forman **10 11 12 13 14 15 16 17 18 19** y son 20 cifras (10 números de dos cifras, 10×2)
El tercer bloque lo forman los **20 21** 22....**29**.
El cuarto bloque lo forman los **30 31** 32....**39**.
El quinto bloque lo forman los **40 4142**....**49**.
De esta manera, como $100 = 9 + 20 + 20 + 20 + 20 + 11$, la cifra que ocupa la posición 100 se encuentra en los CINCUENTA: **50 51 52 53 54 5,** entonces la cifra es 5.

37 Nivel I CP XIX

En una bolsa hay sesenta bolas, unas son rojas, otras verdes y otras azules. Si saco una bola sin mirar, la probabilidad de que sea roja es $\frac{1}{2}$ y la probabilidad de que sea azul es $\frac{3}{10}$. ¿Cuántas bolas verdes hay en la bolsa?

A) 6 **B)** 12 **C)** 18 **D)** 24 **E)** 30

(B) Las probabilidades que se dan en el enunciado permiten calcular de inmediato el número de bolas rojas y el número de bolas azules.
Como la probabilidad de sacar una bola roja es 1/2, la mitad de las bolas de la bolsa serán rojas y como en total hay 60 bolas, 30 son rojas.
Como la probabilidad de sacar una azul es 3/10, por cada 10 bolas debe haber 3 azules y como en total hay 60 (6 veces 10) bolas, 6 x 3 = 18 son azules.
El resto de las bolas son verdes, es decir $60 - (30 + 18) = 12$ bolas.

38 Nivel I CP XIX

Don Retorcido está que trina porque alguien ha desordenado sus números. Ha conseguido encontrar a cinco sospechosos, pero estos son muy astutos y deciden que solo uno de ellos contestará la verdad. ¡¿Quién ha sido el culpable?!, gritó don Retorcido.

☺ Arquímedes dijo: "ha sido Bernoulli." ☺ Bernoulli dijo: "ha sido Cantor."
☺ Cantor dijo: "Bernoulli miente." ☺ Diofanto dijo: "yo no he sido."
☺ Euclides dijo: "yo solo digo que dos más dos son nueve."

A) Arquímedes **B)** Bernoulli **C)** Cantor **D)** Diofanto **E)** Euclides

(D) Está claro que Euclides miente.
Comencemos pensando que Arquímedes es el único que dice la verdad. Entonces Bernoulli miente y Cantor también estaría diciendo la verdad, lo cual no puede ser.
Pensemos ahora que es Bernoulli el único que dice la verdad. En ese caso Diofanto también diría la verdad, pues el culpable sería Cantor y no él, y esto no puede ser.
Si Cantor es el único que dice la verdad, entonces Diofanto miente y, por tanto, ha sido Diofanto y el resto también miente. Parece que hemos hallado nuestra solución y ha sido Diofanto quien ha desordenado los números de Don Retorcido.
¿Podría ser que Diofanto fuera el único que dice la verdad? No, esto no es posible pues o bien Bernoulli o bien Cantor también dirían la verdad.

39 Nivel I CP XX

Ana hace abdominales cada cuatro días, baila cada cinco días y juega al tenis cada seis, excepto los días que le coinciden dos o las tres actividades, que las sustituye por salir a correr. Hoy le han coincidido las tres, así que ha salido a correr. ¿Cuántas veces hará abdominales en los próximos cien días?

A) 25 **B)** 20 **C)** 15 **D)** 13 **E)** 12

(D) Es obvio que tenemos que restar a los días en que le toca hacer abdominales, los días en los que además le toca bailar más aquellos en los que, además de abdominales, le toca jugar al tenis. Pero haciendo esto habremos restado dos veces los días en los que haya tres coincidencias, por lo que tendremos que sumar esos días.

En los próximos 100 días le toca hacer abdominales 25 días porque $100 : 4 = 25$.

Dado que el mcm de 4 y 5 es 20, en esos mismos días tendrá $100 : 20 = 5$ coincidencias de abdominales con baile.

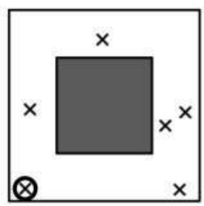
Como el mcm de 4 y 6 es 12 y, al dividir 100 entre 12 obtenemos: $100 = 12 \times 8 + 4$, existirán 8 coincidencias de abdominales y tenis.

Y como el mcm de 4, 5 y 6 es 60, en los próximos 100 días, hay 1 día de triple coincidencia que lo hemos contado dos veces.

Por tanto, el número de días que hará abdominales es: $25 - 5 - 8 + 1 = 13$.

40 Nivel I CP XX

Seis amigos juegan al escondite en una habitación con una gran columna central. Ana no puede ver a nadie. Dani ve a Emilio y a Bea. Bea puede ver a tres personas. Emilio solo ve a Dani. Carla y Fani son gemelas. ¿Cuál de ellos es el que está en el redondelito?



A) Bea **B)** Carla **C)** Dani

D) Emilio **E)** Fani

(C) Realmente hubiese bastado que nos dijesen "Emilio solo ve a Dani", ya que el único que ve solamente a otro es el situado verticalmente encima del redondelito. Luego en el redondelito está Dani.

41 Nivel I CP XX

Hansel y Gretel salieron de casa y fueron tirando una miguita de pan cada medio metro, pero los pajarillos se comieron tres cuartos de las migas y solo quedaron 1200. ¿Cuántos kilómetros recorrieron?

A) 2,4 **B)** 1,5 **C)** 9,6 **D)** 4,8 **E)** 4,5

(A) Como los pájaros se comieron tres cuartos de las migas, dejaron un cuarto sin comer, esto es, las 1200 que quedaron suponen la cuarta parte de las migas que tiraron Hansel y Gretel, así que el total de migas tiradas es $4 \times 1200 = 4800$. Dado que han arrojado una miguita cada medio metro, el total de los metros recorridos ha sido: $48000 \times \frac{1}{2} = 2400$ m = 2,4 km.

42 Nivel I CP XXI

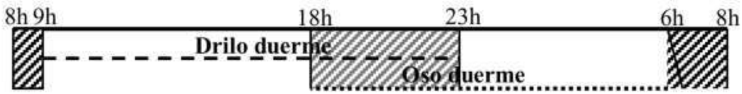
Este es Osodrilo. La parte Oso duerme de 18:00 a 6:00 y la parte Drilo duerme de 9:00 a 23:00. Mientras uno duerme y el otro no, ocurre lo siguiente: si Drilo duerme, Oso camina hacia el norte a 10 km/h, y si Oso duerme, Drilo camina hacia el sur a 2 km/h. Cuando ambos están despiertos comen y charlan. Ahora son las 8:00 y están desayunando en un claro del bosque.

¿A qué distancia del claro estarán dentro de 24 horas?

A) 120 km **B)** 72 km **C)** 76 km **D)** 192 km **E)** 114 km

(C) Queremos saber la distancia recorrida en 24 horas, por lo que debemos estudiar lo que sucede desde las 8 de la mañana de un día hasta las 8 del día siguiente.

Es importante tener en cuenta las horas en las que se producen los cambios de dormir a no dormir y viceversa de Oso y de Drilo. Estas horas, ordenadas desde las 8 de la mañana son: las 9, las 18, las 23 y las 6, como se muestra en el esquema temporal siguiente:



Hemos rayado las horas en las que ambos están dormidos o ambos despiertos para indicar que en esos tramos recorren 0 km.

Solo resta calcular lo que recorren hacia el norte y hacia el sur:

De 9 a 18, Drilo duerme y Oso está despierto, por lo que recorre 10 km cada hora hacia el norte. Como en ese periodo de tiempo transcurren 9 horas, recorre $10 \times 9 = 90$ km hacia el norte.

De 23 a 6, Oso duerme y Drilo está despierto, por lo que recorre 2 km cada hora hacia el sur. Como en ese periodo de tiempo transcurren 7 horas, recorre $2 \times 7 = 14$ km hacia el sur.

Resumiendo lo que ocurre en 24 horas: Osodrilo recorre 90 km hacia el norte y 14 km hacia el sur. Por tanto, transcurrido ese tiempo se encontrarán a 76 km del claro, puesto que $90 - 14 = 76$ km.

43 Nivel I CP XXII

En mi fiesta de cumpleaños Juan mezcló en un vaso *Trinafantus* con *Loca-Cola* al 50%. Olivia se bebió la mitad de la mezcla y, para disimular, rellenó el vaso con *Loca-Cola*. Después vino Rafa, se bebió la mitad y volvió a disimular rellenando el vaso con *Trinafantus*. ¿Qué fracción del líquido es ahora *Loca-Cola*?

A) $\frac{3}{8}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** $\frac{2}{5}$ **E)** $\frac{1}{4}$

(A) Para facilitar la resolución del problema, nombramos *Trinafantus* con TF y *Loca-Cola* con LC.

Seguimos estos pasos:

En el vaso de Juan hay 1/2 (50%) de TF y 1/2 (50%) de LC.

Después de que Olivia bebiese la mitad del contenido quedan en el vaso un cuarto (1/4) de TF y un cuarto (1/4) de LC.

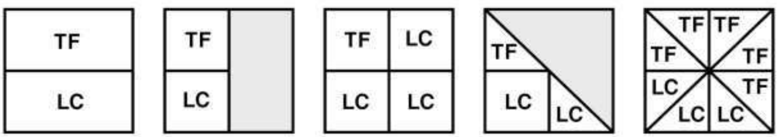
A continuación, rellena el vaso con 1/2 de LC. Ahora en el vaso hay un cuarto (1/4) de TF y tres cuartos (3/4) de LC.

Después de que Rafa bebiese la mitad del contenido de vaso, queda un octavo (1/8) de TF y tres octavos (3/8) de LC.

Finalmente rellena el vaso con 1/2 de TF. El vaso contiene 5/8 de TF y 3/8 de LC

Quedan en el vaso tres octavos (3/8) de Loca-Cola.

Puede resultar de ayuda tratar geométricamente el problema mediante un esquema como el de la figura.



44 Nivel I CP XXII

Belén y Harry juegan al quién es quién con números. Belén ha elegido uno de estos dieciséis números. Harry hizo tres preguntas, Belén contestó afirmativamente a todas y con eso Harry supo con certeza absoluta cuál era el número. Si las dos primeras preguntas fueron ¿es un número par? y ¿la suma de sus cifras es menor que 16? ¿Cuál pudo ser la tercera pregunta?

777	495	1000	888
301	238	658	735
357	26	764	336
154	343	922	989

A) ¿Es múltiplo de 4? **B)** ¿Una de sus cifras es 6?
C) ¿Es múltiplo de 7? **D)** ¿La suma de sus cifras es mayor que 18?
E) ¿La cifra de las unidades es 8?

(E) La respuesta afirmativa a las dos primeras preguntas selecciona los números 1000, 238, 26, 336, 154 y 922. En principio, la pregunta E resuelve el problema pues solo el número 238 se ajusta a ella.
No obstante, podemos comprobar que entre los números seleccionados hay dos múltiplos de 4 (1000 y 336) y que otros dos incluyen la cifra 6. Además, ninguno es tal que la suma de sus cifras es mayor que 18 y hay 3 múltiplos de 7 (238, 336 y 154).
Confirmamos pues que la tercera pregunta es la E.

45 Nivel I CP XXII

Hada y Adán son dos tortolitos muy enamorados y el día de San Valentín se regalaron estas sumas. Si letras distintas representan cifras distintas, ¿cuánto vale la suma **N** + **I** + **D** + **O**?

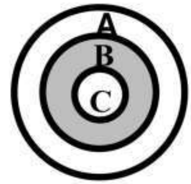
$$\begin{array}{cccc} & A & M & O \\ & + & & A \\ A & D & A & N \\ \hline O & N & D & A \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & A & M & O \\ & + & & A \\ H & A & D & A \\ \hline M & I & M & O \end{array}$$

A) 13 **B)** 15 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 20

(E) La columna de las unidades de la segunda suma implica A = 0 o A = 5.
Si A = 0, mirando la columna de las decenas de la segunda suma obtendríamos D = 0, pero como letras distintas representan números distintos, desechamos esa solución.
Si A = 5, la columna de los millares de la primera suma conduce a O = 6. A continuación la columna de las unidades de la primera suma lleva a N = 4; la columna de los millares de la primera suma hace D = 9; la columna de las decenas de la primera suma implica M = 3 y la columna de los millares de la segunda suma hace I = 1.
Por tanto, N + I + D + O = 4 + 1 + 9 + 6 = 20.

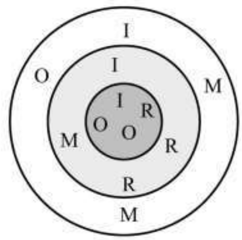
46 Nivel I CP XXIII

Lanzando tres dardos a la diana Marta clavó dos en A y uno en B y obtuvo 36 puntos. Con dos dardos en B y uno en C, Rafa obtuvo 56 puntos y Olivia obtuvo 58 puntos con dos dardos en C y uno en A. ¿Cuántos puntos obtuvo Irene con un dardo en A, otro en B y otro en C?



A) 42 **B)** 46 **C)** 48
D) 50 **E)** 54

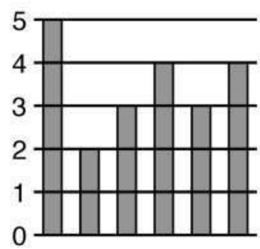
(D) Si nos fijamos bien, el problema es muy sencillo. Más aún si nos ayudamos de un esquema como el de la figura, donde la inicial de cada uno de los nombres representa el dardo que ha lanzado.



Vemos con claridad que entre los tres (Marta, Rafa y Olivia) han clavado 3 dardos en cada zona, y han sumado 36 + 56 + 58 = 150 puntos en total.
Esto implica que tres dardos, repartidos en las tres zonas, suman 150 : 3 = 50 puntos.
Dado que Inés ha clavado un dardo en cada zona, sumará 50 puntos.

47 Nivel I CP XXIII

En este gráfico Julia anotó los puntos de sus últimos seis partidos de baloncesto. ¿Qué media alcanzó?



A) 4 **B)** 2,75 **C)** 3,5
D) 4,2 **E)** 3

(C) Basta saber leer en la gráfica la puntuación de cada partido y hacer la media aritmética de los seis números leídos: $\frac{5+2+3+4+3+4}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$.

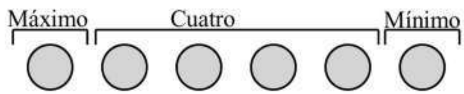
48 Nivel I CP XXIV

Tengo seis monedas. Escogiendo cinco de ellas puedo sumar como máximo 1,50 euros y como mínimo 1,10 euros. ¿Cuánto dinero tengo en total?

A) 2,60 € **B)** 1,70 € **C)** 2,20 € **D)** 1,60 € **E)** 1,90 €

PRIMERA SOLUCIÓN

(D) Escoger cinco monedas entre seis de forma que sumen lo máximo posible equivale a quitar una de mínimo valor. Y escoger cinco de modo que sumen lo mínimo posible equivale a retirar una moneda de máximo valor:



Quitar la moneda de mínimo valor conduce a "Máximo" + "Cuatro" = 1,50 €.
Quitar la moneda de máximo valor conduce a "Cuatro" + "Mínimo" = 1,10 €.
Por tanto, la diferencia entre la moneda mayor y la menor es 1,50 – 1,10 = 0,40 €.
Dado que las monedas posibles son de 2 €; 1 €; 0,50 €; 0,20 €; 0,10 € y 0,05 €, comprobamos que la única forma de conseguir que la diferencia de dos monedas sea 0,40 € es que una sea de 0,50 € y la otra de 0,10 €. Por consiguiente, la moneda de mayor valor es de 0,50 € y la de menor valor es de 0,10 €.
Si a la igualdad "Máximo" + "Cuatro" = 1,50 € le sumamos la moneda menor tenemos ya la cantidad total de dinero:
"Máximo" + "Cuatro" + "Mínimo" = 1,50 + 0,10 = 1,60 €.

SEGUNDA SOLUCIÓN

(D) La diferencia entre 1,50 y 1,10 es 0,40, por lo que la diferencia entre las monedas que no se cogen al sumar las cinco es de 0,40 €. De esta manera ya sabemos que la moneda o una de las monedas de mayor cuantía es de 0,50 € y la moneda o una de las monedas de menor cuantía es 0,10 €:
0,10 €, Moneda 2, Moneda 3, Moneda 4, Moneda 5, 0,50 €.
Como la menor suma es 1,10 €, entonces:
Moneda 2 + Moneda 3 + Moneda 4 + Moneda 5 = 1 €.
Todas de 0,10 € sería imposible porque suma 0,40 € y todas de 0,20 € también por sumar 0,80 €, por ello, una de ellas tiene que ser de 0,50 €, la Moneda 5 es de 0,50 €.
Y las tres restantes tiene que sumar 0,50 € y la única manera es 0,10 €, 0, 20 € y 0,20 €.
Recojamos lo que hemos obtenido hasta el momento:
0,10 €; Moneda 2 = 0,10 €; Moneda 3 = 0,20 €; Moneda 4 = 0,20 €; Moneda 5 = 0,50 €; 0,50 €.
Sumamos todas ellas 0,10 € + 0,10 € + 0,20 € + 0,20 € + 0,50 € + 0,50 € = 1,60 €.

49 Nivel I CP XXIV

Estás viendo una tabla de multiplicaciones de números de una cifra {**C**, **A**, **T**, **D**, **O**, **G**}. Si el número 28 está entre las multiplicaciones resultantes, ¿cuánto suman los tres productos que hay en la columna de la **T**?

	C	*A*	*T*
D	3		
O	18		
G		14	

A) 38 **B)** 52 **C)** 40

D) 56 **E)** 36

(D) Partamos en primer lugar de los números 3 y 18 obtenidos de las igualdades: $D \times C = 3$; $O \times C = 18$ y no olvidemos que todas las letras representan números de una cifra.

La primera igualdad nos dice que la pareja (D, C) es (1, 3) o (3, 1). Pero si $C = 1$ la segunda lleva a $O = 18$ y como esto es imposible, tenemos que $C = 3$ y, por tanto, $D = 1$ y $O = 6$.

Al objeto de facilitar los cálculos recogemos estos resultados en la tabla adjunta.

	3	*A*	*T*
1	3		
6	18		
G		**14**	**28**

Tomemos ahora el número 14. Este se descompone de forma única como $14 = 2 \times 7 = G \times A$, lo que nos dice que (G, A) es (2, 7) o (7, 2). Ahora utilizaremos el 28 para decidir el valor de la pareja (G, A), pero necesitamos conocer la casilla que ocupa.

El 28 no puede estar en la primera fila porque entonces A o T serían 28. Tampoco puede estar en la segunda por no ser múltiplo de 6, y no puede ocupar la primara casilla de la tercera fila por no ser múltiplo de 3. En consecuencia, 28 ocupa la tercera casilla de la tercera fila.

Tenemos al fin: $G \times A = 2 \times 7$ y $G \times T = 28$. Pero G no puede ser 2 porque entonces T sería 14.

Por lo tanto, $G = 7$; $A = 2$ y $T = 4$.

Disponemos ya de la tabla completa. Los tres productos de la tercera columna suman:

$(1 \times 4) + (6 \times 4) + (7 \times 4) = 4 + 24 + 28 = 56$.

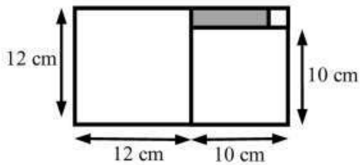
	3	**2**	**4**
1	3	2	4
6	18	12	24
7	21	14	28

50 Nivel I CP XXIV

Con tres cuadrados y un rectángulo gris hemos formado un rectángulo grande que mide 22 cm de base y 12 cm de altura, como en la figura. ¿Qué área, en cm^2, tiene el rectángulo gris?

A) 16 **B)** 18 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 20

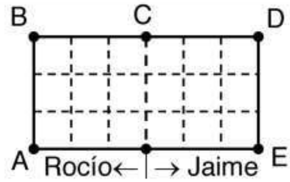
(A) El lado del cuadrado mayor mide 12 cm y, por tanto, el del cuadrado mediano mide 10 cm. Así podemos saber ya que el cuadrado menor tiene 2 cm de lado. Por tanto, el rectángulo gris tiene una base de 8 cm y una altura de 2 cm, por lo que su área mide 16 cm^2.



Soluciones - Nivel II

1 **Nivel II** **CP I**

Rocío siempre camina el doble de rápido que Jaime. Si parten del punto señalado en sentido contrario, y van dando vueltas a la parcela rectangular de la figura, de 18 cuadrados de área, cuando se encuentren por primera vez, el punto más próximo de los indicados será:



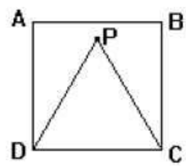
A) A **B)** B **C)** C

D) D **E)** E

(D) El perímetro de la figura es 18 y como Rocío recorre dos lados de cuadrado por cada uno que recorre Jaime, cuando Jaime haya recorrido x Rocío habrá recorrido $2x$, siendo $2x + x = 18$, es decir $x = 6$ y contando 6 lados desde el punto de partida en el sentido de Jaime, llegamos a que, de los puntos dados, el más cercano del punto de encuentro es el D.

2 **Nivel II** **CP II**

$ABCD$ es un cuadrado y P un punto dentro del cuadrado tal que CDP es un triángulo equilátero. ¿Cuánto mide el ángulo $P\hat{B}C$?



A) 75º **B)** 70º **C)** 60º **D)** 45º

E) No hay suficiente información

(A) El ángulo $P\hat{C}B$ mide 30º y el triángulo CPB es isósceles siendo $180 - 30 = 150º$ la suma de los dos ángulos iguales, así que el ángulo $P\hat{B}C$ mide $150 : 2 = 75º$.

3 Nivel II CP III

Las catorce cifras de una tarjeta de crédito están escritas en los cuadrados de abajo. Si la suma de tres cifras consecutivas cualesquiera es 20, ¿cuál es el valor de x?

			9				x				7		

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

(B) Llamemos a, b, c a las cifras de los cuadrados que hay entre 9 y x.

			9	a	b	c	x				7		

Entonces $9 + a + b = 20 = a + b + c$, de donde se sigue que $c = 9$. Llamemos ahora d, e, f a las cifras de los cuadrados que hay entre x y 7.

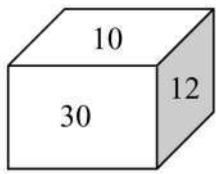
			9	a	b	c	x	d	e	f	7		

Razonando de la misma manera, $d + e + f = 20 = e + f + 7$, concluimos que $d = 7$.

Por último, como $c + x + d = 20$ y ya sabemos que $c = 9$ y $d = 7$, entonces, $x = 4$.

4 Nivel II CP III

Las áreas de tres de las caras de esta caja en forma de paralelepípedo son 10, 12 y 30 cm^2. ¿Cuál es, en cm^3, el volumen de la caja?



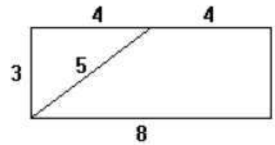
A) 60 **B)** 52 **C)** 3600

D) 300 **E)** 120

(A) Llamando a, b y c a las dimensiones en cm de la caja, sé que $ab = 30$, $bc = 12$, $ac = 10$, por lo que multiplicando esas tres igualdades, llegamos a que $(abc)^2 = 3600$.
Por tanto, el volumen de la caja, que es el producto de sus tres dimensiones, abc, será 60 cm^3.

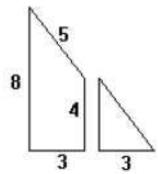
5 Nivel II CP IV

Cortamos un rectángulo de 3×8 en dos piezas, como se indica en la figura, y las recolocamos para formar un triángulo rectángulo con los dos trozos. Uno de los lados de este triángulo resultante mide:



A) 9 **B)** 6 **C)** 4
D) 7 **E)** 5

(B) Colocando las piezas como indica la figura, un lado del triángulo mide 6 y la respuesta es B.



6 Nivel II CP IV

¿En cuántos ceros acaba el producto $25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$?

A) 3 **B)** 6 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 12

(C) Cada cero del producto vendrá de la existencia de un factor 5 y un factor 2. Como en el número dado hay 3 ochos, habrá 9 doses y aunque haya 14 cincos (7 veinticincos), habrá sólo 9 parejas de doses y cincos, por lo que el número dado acabará en 9 ceros.

7 Nivel II CP V

¿Para cuántos enteros positivos n es verdadero que $\dfrac{n+17}{n-7}$ es un número entero positivo?

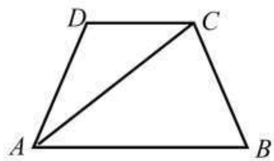
A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

(E) Al dividir $n + 17$ entre $n - 7$, descomponemos la fracción $\dfrac{n+17}{n-7}$ como $1+\dfrac{24}{n-7}$. Así pues, hay que encontrar los números enteros n tales que $n - 7$ sea un divisor de 24. Como 24 tiene por divisores (1, 24), (2, 12), (3, 8) y (4, 6), es decir, 8 divisores, existen 8 valores de $n - 7$ que son divisores de 24. Por tanto, hay 8 valores de n que cumplen la condición pedida.

Soluciones - Nivel II

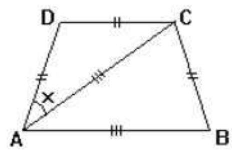
8 Nivel II CP V

En el trapecio de la figura nos dicen que $AD = DC = CB$ y que $AB = AC$. ¿Cuánto mide el ángulo $\hat{D}$?



A) 108º **B)** 120º **C)** 130º
D) 150º **E)** Faltan datos

(A) Si llamamos x al ángulo $C\hat{A}D$, tenemos que, como $AD = DC$, el triángulo ADC es isósceles y el ángulo $A\hat{C}D$ también es x. Al ser $A\hat{C}D$ y $B\hat{A}C$ alternos internos, $B\hat{A}C$ también es x.

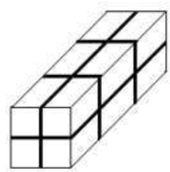


Por otra parte, $ABCD$ es un trapecio isósceles, por lo que el ángulo $A\hat{B}C$ es igual al ángulo $B\hat{A}D$, es decir, $2x$. Y por ser $AB = AC$, el ángulo $A\hat{C}B$ es también $2x$, de modo que $B\hat{C}D = C\hat{D}A = 3x$.

Así pues, $3x + 3x + 2x + 2x = 360 \Rightarrow x = 36º$ y el ángulo $\hat{D}$, que es $A\hat{D}C$ mide $3 \cdot 36 = 108º$.

9 Nivel II CP VI

Una caja está cerrada con una cinta adhesiva como indica la figura. Si las dimensiones de la caja son $10 \times 10 \times 30$ cm, ¿Cuántos cm de cinta adhesiva hemos gastado?



A) 200 **B)** 240 **C)** 250
D) 260 **E)** 300

(E) Fijándonos en el dibujo se aprecia que vemos justo la mitad de la caja, así que podemos contar la cinta adhesiva que vemos y multiplicar por dos. Vemos 120 cm de cinta, luego el total de cinta empleada es 240 cm.

10 Nivel II CP VI

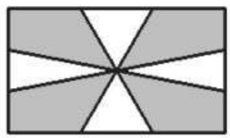
Tenemos tres cajas, una blanca, una amarilla y una verde y tres objetos: una moneda, una canica y una peonza. Cada caja contiene un objeto. La caja verde está a la izquierda de la blanca y la amarilla a la derecha de la canica. Si la peonza está en la caja que está a la derecha de la amarilla, ¿en qué caja está la moneda?

A) En la amarilla **B)** En la verde **C)** En la blanca

D) Faltan datos **E)** Los datos son contradictorios

(A) En estos problemas de lógica debemos ser muy meticulosos para no dejarnos ningún caso por analizar y así poder descartar los que no cumplan las condiciones del enunciado. Podemos empezar fijándonos en los colores de las cajas (B, A, V).
Los seis casos posibles son: ABV, AVB, BAV, BVA, VAB, VBA y descartamos todos aquellos en los que V no esté a la izquierda de B, por lo que solo nos quedan tres casos: AVB, VAB, VBA.
Como A debe estar a la derecha de un caja (la que tiene la canica), descartamos AVB y ya solo nos quedan VAB y VBA. Como la peonza está a la derecha de A debemos descartar VBA y ya solo nos queda VAB.
La situación es, por tanto: V (canica), A (moneda), B (peonza).
La moneda está en la caja amarilla.

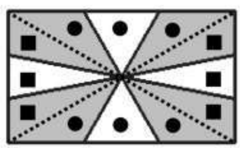
11 Nivel II CP VI



La bandera de la figura se usa en los barcos. Los lados del rectángulo están divididos en tres partes iguales. ¿Cuál es el cociente entre la parte blanca y la parte sombreada?

A) 1 **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{1}{3}$

D) $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{2}{3}$



(B) Si trazamos las diagonales del rectángulo se forman un buen número de triángulos.
Los que tienen un círculo tienen todos ellos la misma área. ¿Por qué? Porque tienen la misma base y la misma altura.
Y los que tienen un cuadradito también son todos ellos de igual área por la misma razón.
Y ya solo queda contar: los triángulos blancos tienen 2 cuadrados y 2 círculos; y los triángulos grises tienen 4 cuadrados y 4 círculos. Así pues, la parte blanca es la mitad de la parte gris.

12 Nivel II CP VII

Escribiendo un 1 al principio y otro 1 al final de un número, éste aumenta en14 789. ¿Cuál es la suma de las cifras del número original?

A) 11 **B)** 10 **C)** 9 **D)** 8 **E)** 7

(B) Por construcción, el nuevo número tiene dos cifras más que el primero y además al restarle éste sigue teniendo dos cifras más. Así si ha aumentado en 14789 nuestro número de partida era de tres cifras *abc*. Basta plantear la suma en la forma habitual para hallar que $c = 2$, $b = 3$, a = 5.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 7 & 8 & 9 \\ & + & a & b & c \\ \hline 1 & a & b & c & 1 \end{array}$$

El número original es 532 y sus cifras suman 10.

13 Nivel II CP VII

Lanzamos dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea múltiplo de 5?

A) $\frac{1}{36}$ **B)** $\frac{1}{18}$ **C)** $\frac{1}{6}$ **D)** $\frac{11}{36}$ **E)** $\frac{1}{3}$

(D) Para que el producto de los números sea múltiplo de 5, uno de ellos debe ser múltiplo de 5. De los 36 casos posibles (hay que tener en cuenta el orden para que sean equiprobables), once son favorables: 6 casos en que en el primer dado sale un 5, y 5 casos en que en el primer dado no sale un 5 pero el segundo sí sale un 5.

14 Nivel II CP VIII

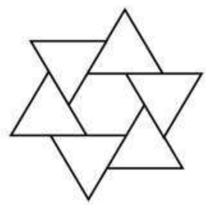
En una tienda nos venden discos y comics a precio fijo cada producto y exacto en euros. Si 5 comics y 2 discos cuestan menos de 15 euros, y 3 comics y 4 discos más de 12 euros, ¿cuál de las siguientes afirmaciones tiene que ser cierta?

A) Cuestan más los discos
B) Cuestan más los comics
C) Un disco cuesta menos de 3 euros
D) Un comic y un disco cuestan 4 euros
E) Si no cuestan lo mismo, al menos hay dos euros de diferencia.

(E) Podemos intentar resolver el problema por exclusión. Una ojeada nos dice que una posible solución sería que comics y discos costaran 2 € cada uno. Eso excluye las soluciones A) y B). ¿Podría un disco costar 3 €? En ese caso, por la primera condición, los comics valdrían 1 €, y eso es compatible con la segunda condición. Luego C) no tiene por qué ser cierto. Hasta ahora las dos soluciones encontradas verifican D) y E). ¿Y costar un disco 4 €? Podría ser, los discos 4 € y los comics 1 €. Sólo nos queda E) y ya no hay más soluciones (salvo que los comics nos los regalen, lo cual no parece que se contemple en el enunciado, pero incluso en ese caso se cumpliría E).

15 Nivel II CP VIII

El lado de cada uno de los triángulos equiláteros de la figura es el doble del lado del hexágono regular del centro. ¿Qué fracción del área total de los seis triángulos, representa el área del hexágono?



A) $\frac{1}{6}$ **B)** $\frac{1}{12}$ **C)** $\frac{3}{4}$

D) $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{2}{3}$

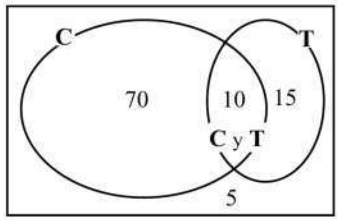
(D) La división del hexágono central y de los triángulos en triangulitos iguales nos da la relación de las áreas pedidas, $\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$.

16 Nivel II CP IX

En una encuesta, cuatro de cada cinco personas responden que les gusta el cine, una de cada cuatro que les gusta el teatro, y sólo al 10% les gusta el cine y el teatro. ¿A qué proporción no les gusta ninguno de los dos espectáculos?

A) $\frac{1}{15}$ **B)** $\frac{4}{75}$ **C)** 1 % **D)** 5% **E)** $\frac{1}{12}$

(D) Si tomamos un total de 100 personas y dibujamos el correspondiente diagrama de Venn:



Cine y Teatro: 10

Cine: $\frac{4}{5}\times 100 = 80 \quad (10+70)$.

Teatro: $\frac{1}{4}\times 100 = 25 \quad (10+15)$.

Ni Cine ni Teatro: 100 – (70+15+10) =100 – 95 =5 ⇒ 5 %.

17 Nivel II CP IX

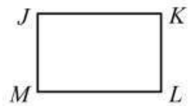
El camino desde la casa de Alicia a la de su amiga Sara tiene 57 árboles. Un día que Alicia va a ver a Sara, marca con un lazo rojo (empezando por el primero) un árbol sí y uno no. A la vuelta, marca (empezando también por el primero) uno sí y dos no. Como es lógico, en algún árbol quedarán dos lazos, pero, ¿cuántos no tendrán ninguno?

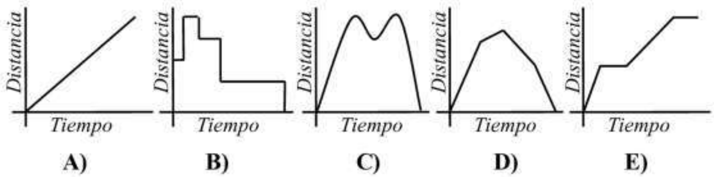
A) 15 **B)** 16 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 19

(E) Numerando los árboles desde la casa de Alicia a la ida ha puesto lazos en los impares, y a la vuelta lo ha hecho en los números 57, 54, 51, ... , es decir en los múltiplos de 3. Quedarán sin lazo los pares que no sean múltiplo de 3. Del 1 al 57 hay 28 pares. Los múltiplos de 3 son el 6, 12, ... , y el 54 (nueve en total). Por tanto se quedaron sin lazo 19 árboles.

18 Nivel II CP X

María sale a correr desde la esquina J del campo rectangular $JKLM$ yendo en este sentido: $J - K - L - M - J -$... ¿Qué gráfica de las siguientes representa la distancia en cada instante al punto de partida?





(D) Cuando María sale, la distancia al punto de partida es cero y eso vuelve a ocurrir cuando completa una vuelta. Sólo dos gráficas tienen dos veces distancia cero. Pero la distancia a J aumenta hasta llegar a L y luego disminuye hasta llegar a J. Ese comportamiento sólo lo refleja la gráfica D.

19 Nivel II CP XI

Zipi sólo miente los lunes, martes y miércoles, y Zape sólo miente los jueves, viernes y sábados. Un día los dos hermanos tuvieron esta charla: "Ayer me tocó mentir" dijo Zipi. "Pues a mí también me tocó mentir" dijo Zape. ¿En qué día de la semana estaban?

A) Lunes **B)** Martes **C)** Jueves **D)** Sábado **E)** Domingo

(C) Empezamos por descartar que sea domingo, porque no es posible que los dos digan la verdad, ya que entonces el día anterior habrían mentido ambos y eso no ocurre ningún día. Así uno miente y el otro dice la verdad. Es cierto entonces que a uno el día anterior le tocaba mentir, y por ello ha cambiado de mentir a decir la verdad. Eso sólo le puede ocurrir a Zipi que pasa de mentir a decir la verdad en días consecutivos, pero no a Zape. Luego el diálogo lo tuvieron en jueves.

20 Nivel II CP XII

El número m verifica que cada pareja de los números 24, 42 y m tiene el mismo máximo común divisor y cada pareja de los números 6, 15 y m tiene el mismo mínimo común múltiplo. ¿Qué número es m?

A) 10 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 36 **E)** 30

(E) Para resolver este ejercicio hemos de tener muy claras las reglas para calcular el máximo común divisor (mcd) y el mínimo común múltiplo (mcm).
En primer lugar se nos dice que mcd (24, 42) = mcd (24, m) = mcd (42, m).
Calculamos mcd (24, 42): $24 = 2^3 \cdot 3$, $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, luego mcd (24, 42) = $2 \cdot 3$.
Como mcd (24, m) = $2 \cdot 3$, y $24 = 2^3 \cdot 3$, se deduce que m ha de tener como factores el 2 y el 3.
Como mcd (42, m) = $2 \cdot 3$, y $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, se llega a la misma conclusión anterior.
Por otra parte se nos dice que mcm (6, 15) = mcm (6, m) = mcm (15, m).
Calculamos mcm (6, 15): $6 = 2 \cdot 3$, $15 = 3 \cdot 5$, luego mcm (6, 15) = $2 \cdot 3 \cdot 5$.
Como mcm (6, m) = $2 \cdot 3 \cdot 5$ y $6 = 2 \cdot 3$, se deduce que m ha de tener como factor el 5.
Como mcm (15, m) = $2 \cdot 3 \cdot 5$ y $15 = 3 \cdot 5$, se deduce que m ha de tener como factor el 2 (condición ya obtenida antes).
Luego el número m ha de ser igual a $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

21 Nivel II CP XII

En esta multiplicación PQRS es un número de cuatro cifras diferentes. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones no es verdadera?

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R} & \mathrm{S} \\ & & \times & 9 \\ \hline \mathbf{S} & \mathbf{R} & \mathbf{Q} & \mathbf{P} \end{array}$$

A) P = 1 **B)** Q = 0 **C)** R = 7

D) S = 9 **E)** PQRS es divisible por 9

(C) P es 1 ya que después de multiplicar por 9 y sumar lo que se lleve da lugar a una sola cifra S. Por ello S = 9 y como Q no es 1, tiene que ser Q = 0, pues si no al multiplicarla por 9 llevaría alguna unidad hacia delante. Entonces $9 \times 9 = 81$ y llevamos 8, que sumados al producto $9 \times \mathrm{R}$ acaba en 0, es decir R = 8.
Luego PQRS = 1089, que es múltiplo de 9. [$1089 \times 9 = 9801$]
La afirmación falsa es R = 7.

22 Nivel II CP XIII

A la fiesta de los amigos del tres han acudido los primeros catorce múltiplos de tres: 3, 6, 9,... Juegan a formar parejas que sumen un cuadrado perfecto y consiguen emparejarse todos los asistentes menos dos. ¿Cuánto suman esos dos números que no pudieron emparejarse?

A) 75 **B)** 54 **C)** 33 **D)** 30 **E)** 27

(B) Empezamos escribiendo en fila los catorce números:

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42

y busquemos aquellos números que solo pueden elegir una pareja.
El 9 solo puede juntarse con el 27 (9, 27). El 12 con el 24 (12, 24). El 15 con el 21 (15, 21). Y así seguimos con cuidado: (6, 30), (3, 33), (39, 42).
Quedan sin pareja 18 y 36, que suman 54. [Y si quieren pueden emparejarse en otro juego matemático]

23 Nivel II CP XIII

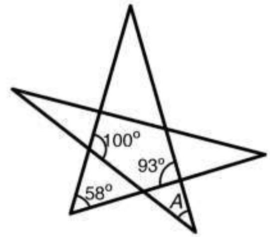
Don Retorcido nos ha pedido que averigüemos en qué cifra termina el producto de estas potencias: $2^? \cdot 6^? \cdot 9^? \cdot 11^?$. Nos ha dicho que el exponente del 2 es 2009; el exponente del 6 es el número de pie que calza; el exponente del 9 es un número grandísimo que acaba en 5; y el exponente del 11 es igual al año de su nacimiento. ¿En qué cifra acaba dicho producto?

A) 1 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

(E) Don Retorcido bien sabe que las potencias de 6 siempre acaban en 6, y las potencias de 11 lo hacen en 1. Para el nueve nos dice que el exponente acaba en 5, y por tanto es impar, que es el dato que nos falta para saber la terminación de la potencia del 9, ya que éstas se alternan en 9 ó 1, según el exponente sea impar o par. Nos queda la terminación de las potencias de 2, y éstas siguen el ciclo: 2, 4, 8 y 6 , de forma que si el exponente es múltiplo de 4, la terminación es 6, de forma que $2^{2009} = 2^{2008} \cdot 2$, acaba en lo mismo que $6 \cdot 2$, es decir en 2.
Es el momento de recoger las terminaciones obtenidas y multiplicarlas: $2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 1$ acaba en 8.

24 Nivel II CP XIV

Observa el pentágono estrellado que te mostramos. ¿Cuánto mide el ángulo *A*?



A) 35º **B)** 42º **C)** 51º

D) 65º **E)** 109º

(C) En la figura vamos calculando los ángulos:

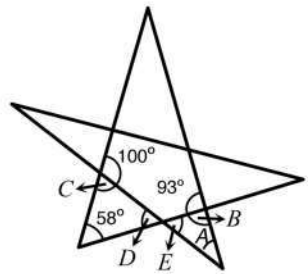
$B = 180^\circ - 93^\circ = 87^\circ$

$C = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

$D = 180^\circ - (58^\circ + 80^\circ) = 180^\circ - 138^\circ = 42^\circ$

$E = 42^\circ$ (por opuestos por el vértice)

$A = 180^\circ - (42^\circ + 87^\circ) = 180^\circ - 129^\circ = 51^\circ$



25 Nivel II CP XIV

Don Retorcido dice que 2010 es un número *dobledé* porque el número formado por sus dos primeras cifras es el doble del número formado por sus dos últimas cifras. ¿Cuántos números *dobledés* hay de cuatro cifras?

A) 30 **B)** 35 **C)** 40 **D)** 50 **E)** 45

(E) Los números formados por las dos últimas cifras que al multiplicarlos por 2 dan lugar a números de dos cifras son 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, ... 49, que originan, respectivamente, los 45 números *dobledés* siguientes: 1005, 1206, 1407, ... 9849.

26 Nivel II CP XIV

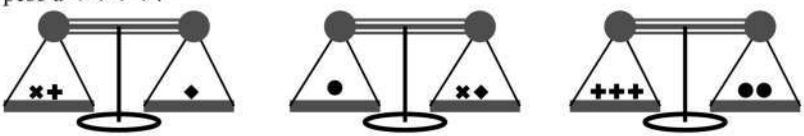
En unas elecciones a representante del Consejo Escolar de un centro, Alicia recibió 5/6 de los votos que obtuvo Beatriz, que a su vez, recibió el 80 % de los votos de Carlos. Si Alicia obtuvo 300 votos, ¿cuántos obtuvo Carlos?

A) 450 **B)** 490 **C)** 500 **D)** 540 **E)** 6000

(A) Si llamamos respectivamente, a, b y c, a los votos que obtuvieron Alicia, Beatriz y Carlos, tenemos que $a = \frac{5}{6} \cdot b = 300$, luego $b = \frac{6}{5} \cdot 300 = 360$, y como además, $b = \frac{80}{100} \cdot c = 0{,}8 \cdot c = 360 \Rightarrow c = 450$ votos.

27 Nivel II CP XV

Las tres balanzas están equilibradas. ¿Cuántas ✚ son necesarias para igualar en peso a ◆◆◆◆?



A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

(C) Tenemos que jugar con los platillos. Vamos a utilizar el signo = para indicar que pesan lo mismo.

Observando la primera balanza podemos asegurar que ◆◆ = ✖✖✚✚, por tanto ◆◆◆◆ = ◆◆✖✖✚✚

Según la segunda balanza, podemos añadir otra igualdad:

◆◆◆◆ = ◆◆✖✖✚✚ = ●●✚✚.

Y como la tercera balanza nos asegura que 2 círculos pesan lo mismo que 3 cruces, entonces:

◆◆◆◆ = ◆◆✖✖✚✚ = ●●✚✚ = ✚✚✚✚✚

Luego 4 rombos pesan lo mismo que 5 cruces.

28 Nivel II CP XV

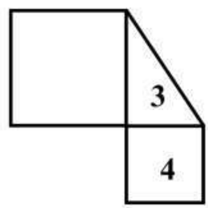
Don Retorcido elige su ropa de cada día de esta extraña manera. Cada mañana lanza un dado: solo se pondrá corbata si sale impar y únicamente no llevará vaqueros si sale par. ¿Cuáles de estas cuatro combinaciones no podrá vestir nunca don Retorcido?

UNA: Vaqueros y corbata **DOS:** Vaqueros sin corbata
TRES: Sin vaqueros y con corbata **CUATRO:** Sin vaqueros y sin corbata

A) La UNA y la DOS **B)** Solo la DOS **C)** Solo la TRES
D) La TRES y la CUATRO **E)** La DOS y la TRES

(E) Podemos parafrasear las decisiones de don Retorcido. Impar significa que lleva corbata y vaqueros, y par que no lleva corbata ni vaqueros. Es decir o las dos piezas a la vez o ninguna de las dos. Luego no son posibles las combinaciones DOS y TRES.

29 Nivel II CP XVI



En la figura ves dos cuadrados y un triángulo rectángulo. Los números indican el área de la figura correspondiente. ¿Cuál es el área del cuadrado grande?

A) 9 **B)** 8 **C)** 7
D) 6 **E)** 5

(A) Como el área del cuadrado chico es 4, su lado (que coincide con la base del triángulo) es 2. Por tanto, la altura del triángulo debe ser 3 para que su área $\frac{2 \cdot 3}{3}$ sea 3, como indica el problema.
Ya está, el área del cuadrado grande es 3^2, es decir, 9.

30 Nivel II CP XVI

María, Joaquín, Esteban y Carmen están comiendo en una mesa cuadrada festejando que Esteban tiene novia. ¿Cuál es la probabilidad de que Carmen esté sentada enfrente de Esteban?

A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{3}{4}$

(B) Carmen puede estar a la derecha de Esteban, a su izquierda o enfrente de él. Como para cada una de estas posiciones hay dos posiciones posibles para María y Joaquín, la probabilidad de que esté enfrente es 1/3.

31 Nivel II CP XVII

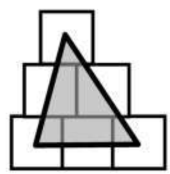
Está comprobado que con 750 m de hilo de oro pueden vestirse 90 hadas o 150 ninfas. Si en el almacén del reino cuentan con 2250 m de hilo de oro y se presentan 225 hadas pidiendo hilo para sus vestidos mágicos, ¿cuántas ninfas podrán vestirse con el hilo sobrante?

A) 45 **B)** 60 **C)** 75 **D)** 95 **E)** 135

(C) Si para vestir a 90 hadas hacen falta 750 m de hilo, para vestir a 225 necesitaremos $225 \cdot \frac{750}{90} = 1875$ m. Tras vestir a las hadas nos queda 2250 – 1875 = 375 m de hilo con los que podremos vestir a $375 : \frac{750}{150} = 75$ ninfas.

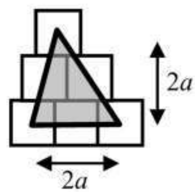
32 Nivel II CP XVII

Ayudándome de seis cuadrados iguales, he dibujado un triángulo cuyos vértices son los centros de tres de esos cuadrados. Si el área del triángulo mide 24 cm^2, ¿cuántos cm^2 mide el área de un cuadrado?



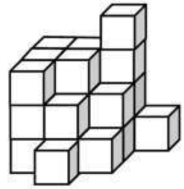
A) 12 **B)** 8 **C)** 16 **D)** 10 **E)** 4

(A) Si llamamos a al lado del cuadrado vemos que la base y la altura del triángulo miden ambos $2a$. Como su área son 24 cm^2, tenemos que $\frac{2a \cdot 2a}{2} = 24$, es decir, $a^2 = 12$ cm^2.



33 Nivel II CP XVII

Sara había construido un gran cubo de 4 × 4 × 4 con unos dados que tenía pero ha llegado su hermano Adrián y ha destruido su obra. ¿Cuántos dados necesita Sara para arreglar el desastre que ha provocado Adrián?



A) 28 **B)** 38 **C)** 26
D) 40 **E)** 37

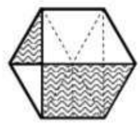
(B) En la cara superior hay 1 dado. En la que tiene debajo hay 6 dados. En la siguiente hay 2 más, es decir, 8 dados y en la inferior 3 más, es decir, 11 dados. En total hay 1 + 6 + 8 + 11 = 26 dados. Faltan 64 – 26 = 38 dados.

34 Nivel II CP XVIII

En mi jardín con forma de hexágono regular he plantado margaritas en las zonas sombreadas. Si en el trapecio he plantado 420, ¿cuántas he plantado en el triángulo?

A) 84 **B)** 60 **C)** 70 **D)** 76 **E)** 65

(A) Trazando algunos segmentos convenientes podemos dividir el jardín en triángulos iguales. El trapecio está compuesto de cinco triángulos y, por lo tanto, en cada triángulo he plantado 420: 5 = 84 margaritas.



35 Nivel II CP XVIII

El profesor ha escrito 100 números en la pizarra y nos ha pedido calcular su media. ¡86!, gritó Adrián al poco tiempo. Muy bien, dijo el profesor y borró 20 números. ¿Cuál es la media de los que quedan? ¡84!, gritó Anabel. Perfecto. ¿Cuál es la media de los 20 números que borró el profesor?

A) 94 **B)** 90 **C)** 86 **D)** 85 **E)** 20

(A) Como la media de 100 números se obtiene sumándolos todos y dividiendo entre 100, la suma de los números que había al principio en la pizarra es 86·100 = 8600 y la suma de los 80 que quedaron después es 84 · 80 = 6720. Así pues, la suma de los 20 que borró el profesor es 8600 – 6720 = 1880 y su media es 1880 : 20 = 94.

36 Nivel II — CP XIX

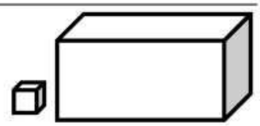
¿Qué me pongo?, ¿qué me pongo? Inés siempre tan indecisa. Tiene en su armario cuatro pantalones, siete camisetas y tres pares de zapatillas. Ya se ha probado veinticinco combinaciones de todas las posibles. ¿Cuántas combinaciones nuevas podrá probarse como máximo antes de decidirse?

A) 25 **B)** 37 **C)** 43 **D)** 59 **E)** 84

(D) Por cada pantalón podrá ponerse siete camisetas así que, entre pantalón y camiseta tiene $4 \cdot 7 = 28$ combinaciones. Además, cada una de esas combinaciones puede ponérsela con tres zapatillas distintas lo que hacen un total de $28 \cdot 3 = 84$ modelitos distintos. Como ya se ha probado 25, puede dudar aún entre $84 - 25 = 59$ posibilidades.

37 Nivel II — CP XIX

Con cubitos idénticos he construido un gran bloque en forma de ladrillo. Luego decido quitar los 65 cubitos exteriores de una de las caras del bloque y luego quito los 30 cubitos exteriores de otra de las caras. ¿Cuántos cubitos quedan ahora en mi bloque?



A) 360 **B)** 230 **C)** 295 **D)** 724 **E)** 425

(A) Vamos a tratar de calcular las dimensiones del bloque inicial.
Como 65 solo puede descomponerse de dos formas, $65 = 65 \cdot 1 = 13 \cdot 5$, deducimos ya que dos de las dimensiones han de ser 13 y 5 (observa que no puede ser 65 y 1 porque si no, nos quedaríamos sin bloque al quitar esa cara).
Las dimensiones iniciales son a, 13 y 5.
Al quitar la cara de los 65 cubitos me queda un bloque de dimensiones $a - 1$, 13 y 5.
Ahora hay que quitar otra cara de 30 cubitos, que solo podré hacerlo con la de dimensiones $a - 1$ y 5. Entonces $(a - 1) \cdot 5 = 30 \Rightarrow a = 7$.
El bloque inicial tiene dimensiones 13, 7 y 5, lo que nos asegura que estaba formado por $13 \cdot 7 \cdot 5 = 455$ cubitos.
Como hemos quitado 95 cubitos, ahora nos quedan $455 - 95 = 360$ cubitos.

38 Nivel II CP XIX

Por allá viene Don Retorcido hablando solo y parece emocionado, shhh, a ver si podemos escucharle: "¡biennn!, acabo de inventarme otro problema para el Concurso de Primavera, je je, creo que van a picar como sardinillas...: sumando UNO y después DOS, voy formando esta serie: 3 4 6 7 9 10 12..., ¿cuál de los siguientes números no aparecerá en ella? Je je je."

A) 2013 **B)** 2014 **C)** 2015 **D)** 2016 **E)** 2017

(C) Fijémonos en la serie de Don Retorcido a ver si descubrimos algo:

3 4 6 7 9 10 12 13 15 16 18 19 ...

¡Solo aparecen los múltiplos de tres y los múltiplos de tres más uno!

Así pues, en la serie estarán estos números:

2013 2014 2016 2017 2019 2020 ...

El número que no aparece es el 2015.

39 Nivel II CP XX

Comenúmeros lo ha vuelto a hacer. Se encontró una tabla de sumar formada por quince enteros positivos, todos ellos diferentes, y zas, empezó a devorarlos. Yo sólo recuerdo que el mayor número era 21. Cuando ya iba a reventar, se quedó en la casilla que ves a echarse la siesta.

+			
	8	12	
	10		
	13		

¿Cuál fue el último número que se zampó Comenúmeros?

A) 15 **B)** 21 **C)** 19 **D)** 18 **E)** 20

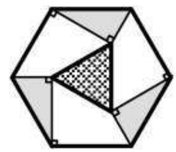
(D) Como es una tabla de sumar, si observamos las casillas del 8 y el 12, deducimos que la segunda columna es la primera columna más cuatro.

El número más alto, 21, estará en la esquina inferior derecha y, por tanto, fijándonos en el 17 y en el 21, deducimos de nuevo que la tercera columna será la segunda columna más cuatro. Comenúmeros se zampó pues un 18. Para terminar la tabla hay que tener en cuenta que no hay números repetidos.

+			
	8	12	
	10	14	
	13	17	

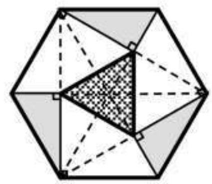
+	7	11	15
1	8	12	16
3	10	14	**18**
6	13	17	21

40 Nivel II CP XX



Ayudándonos de algunas perpendiculares hemos dibujado un triángulo en el interior de un hexágono regular. Si el área del hexágono es 120 cm^2, ¿cuál es el área, en cm^2, del triángulo central?

A) 20 **B)** 12 **C)** 10 **D)** 15 **E)** 24



(D) Si descomponemos el hexágono en figuras iguales es muy fácil resolver este problema. Trazamos algunos segmentos (trazo discontinuo) y…el área del triángulo equilátero grande (sus vértices son vértices alternos del hexágono) es la mitad que la del hexágono, es decir, 60 cm^2. El triángulo central es la cuarta parte del triángulo equilátero grande, por lo que su área mide 60 : 4 = 15 cm^2.

41 Nivel II CP XXI

Comenúmeros me ha quitado la calculadora y ha bailado todas las teclas numéricas salvo la del cero. Ningún número se corresponde con el correcto. Estos son algunos resultados que me salen ahora: $12 \cdot 12 = 1156$, $3 \cdot 3 = 81$, $45 \cdot 45 = 144$, $67 \cdot 67 = 5625$. ¿Qué número aparece en pantalla cuando pulso la tecla 9?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

(E) Este es un problema para recordar algunos cuadrados perfectos. Si escribimos entre paréntesis las teclas pulsadas y entre corchetes los números reales con los que se ha hecho la operación, tenemos:

$$(12)\cdot(12)=1156=[34]\cdot[34]\Rightarrow(1)\rightarrow[3] \quad (2)\rightarrow[4]$$

$$(3)\cdot(3)=81=[9]\cdot[9]\Rightarrow(3)\rightarrow[9]$$

$$(45)\cdot(45)=144=[12]\cdot[12]\Rightarrow(4)\rightarrow[1] \quad (5)\rightarrow[2]$$

$$(67)\cdot(67)=5625=[75]\cdot[75]\Rightarrow(6)\rightarrow[7] \quad (7)\rightarrow[5]$$

Las únicas teclas que quedan por pulsar son el (8) y el (9) y los únicos números por asignar son el [6] y el [8]. Por tanto, si pulso (8) es en realidad un [6] y si pulso (9) es en realidad un [8].

42 Nivel II CP XXI

Perico recita todos los números desde el 1 hasta el 40 y la rana Gustavita, cada vez que oye un número primo avanza tantos metros como indica dicho número. Al final ha recorrido 230 metros y Perico le advierte que ha tomado por primo un número que no lo era. ¿En qué número se equivocó Gustavita?

A) 27 **B)** 33 **C)** 9 **D)** 15 **E)** 21

(B) La suma de los primos menores que 40 es:
$2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 + 31 + 37 = 197$.
Gustavita se equivocó en el número $230 - 197 = 33$. ¡Ay!, 33 es múltiplo de 3.

43 Nivel II CP XXII

¿No conocéis a la niña Centésima? Es una niña que disfruta con las matemáticas y siempre está inventándose problemas. Este es el primero que pone en nuestro concurso:
Mi número favorito es el 5 y por eso he pensado en el número A *que está formado por* 55 *cincos. Si multiplico el número* A *por* 1001 *me sale un número grandísimo al que llamo* B. *¿Cuánto suman las cifras del número* B? (¡Jolines con la niña Centésima!)

A) 82 **B)** 81 **C)** 290 **D)** 30 **E)** 289

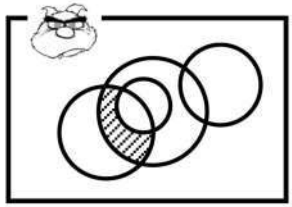
(A) Si multiplicamos un número por 1001 hacemos lo mismo que si lo multiplicamos por $(1000 + 1)$, es decir, primero por 1000 y luego le sumamos el número inicial.
Nuestra suma queda de la forma $555\ldots5000 + 555\ldots5555$, teniendo cada número 55 cincos.

$$\begin{array}{rr} & 5\,5\,5\,5\,5\ldots5\,5\,0\,0\,0 \\ + & 5\,5\ldots5\,5\,5\,5\,5 \\ \hline & 5\,5\,6\,1\,1\ldots1\,0\,5\,5\,5 \end{array}$$

Si sumamos las tres últimas cifras obtenemos 3 cincos, la cuarta cifra nos da un cero y nos llevamos una.
Así completamos todas las cifras hasta las tres primeras en las que obtenemos 556 (por la que nos llevamos).
Tenemos entonces: dos cincos al principio, un seis, 51 unos, un cero y y tres cincos al final (en total 58 cifras).
Sumándolos $51 + 5 \cdot 5 + 6 = 82$.

44 Nivel II CP XXII

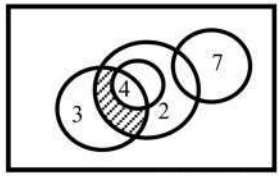
Dentro del rectángulo grande, Comenúmeros ha colocado los veinte números naturales que hay desde el 1 hasta el 20. Ha distribuido dentro de cuatro círculos los que son múltiplos de 2, de 3, de 4 o de 7. ¿Cuántos números hay dentro de la región rayada?



A) 5 **B)** 4 **C)** 3

D) 2 **E)** 1

(D) Tenemos que identificar qué hay en esos círculos. El círculo que está contenido en otro es el que corresponde a los múltiplos de 4 y el que lo contiene es el de los múltiplos de 2. Como no hay múltiplos de 4 y 7 en los números que hay hasta el 20, ya hemos identificado todos los círculos.



La parte rayada corresponde a los múltiplos de 3 y de 2 que no son múltiplos de 4. O sea, el 6 y el 18. Hay dos números.

45 Nivel II CP XXIII

Solo una de estas cinco igualdades entre fracciones es cierta. ¿Cuál es? Y la pista ya te la hemos dado: es seguro que solo hay una igualdad verdadera.

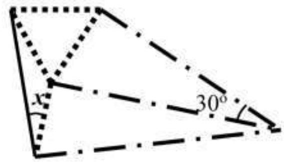
A) $\dfrac{896\,678}{338\,444}=\dfrac{122\,426}{363\,334}$ **B)** $\dfrac{59\,976}{139\,944}=\dfrac{5\,428}{15\,339}$ **C)** $\dfrac{179\,972}{417\,946}=\dfrac{2\,856}{6\,664}$

D) $\dfrac{69\,796}{192\,994}=\dfrac{1\,966}{3\,862}$ **E)** $\dfrac{59\,976}{139\,944}=\dfrac{1\,428}{3\,332}$

(E) Para saberlo debemos hacer los dos productos cruzados y ver si son iguales. Miremos solo las cifras de las unidades de esos productos: en A) un producto acaba en 2 y el otro en 4, en B) uno en 4 y el otro en 2, en C) las terminaciones son 8 y 6 mientras que en D) son 2 y 4. Por último, en E) la cifra de las unidades de ambos productos es 2 y guiándonos de la pista, ya no tenemos que hacer nada más.

46 Nivel II CP XXIII

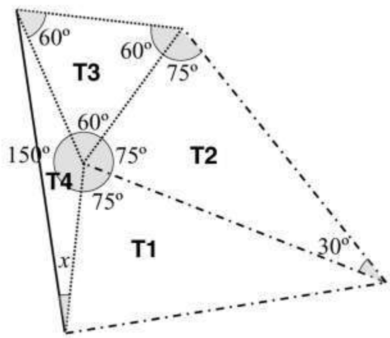
En la figura, los cuatro segmentos dibujados con PUNTOS miden lo mismo y los tres segmentos PUNTO–RAYA también miden lo mismo entre sí. ¿Cuánto mide el ángulo x?



A) 18º **B)** 26º **C)** 15º

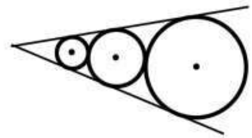
D) 24º **E)** 20º

(C) El triángulo T2 es isósceles, sus ángulos iguales miden:
(180º – 30º) : 2 = 75º.
Los triángulos T1 y T2 son iguales.
El triángulo T3 es equilátero, por lo que sus ángulos miden 60º cada uno.
El triángulo T4 es isósceles y el ángulo desigual mide:
360º – (60º + 75º + 75º) = 150º.
Por ello, el ángulo x mide: (180º – 150º) : 2 = 15º.



47 Nivel II CP XXIII

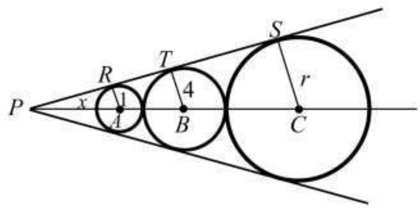
En el dibujo ves, desde arriba, a tres amigos con gorros mexicanos atascados en una esquina. Si el radio del sombrero pequeño es de 1 dm y el del mediano es de 4 dm, ¿qué radio tiene el sombrero mexicano mayor?



A) 10 **B)** 6 **C)** 15

D) 20 **E)** 16

(E) Como en tantísimos problemas de geometría, añadiendo algunas líneas vemos la estructura escondida que nos ayuda a resolverlo. Sabemos que las tangentes a las circunferencias son perpendiculares a los radios que llegan a los puntos de tangencia, por tanto, los triángulos *PAR*, *PBT* y *PCS* son semejantes.



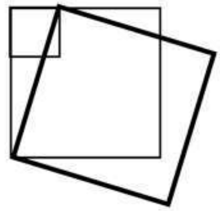
Jugando con esta propiedad, calcularemos primero la longitud x de *PA* y luego el radio r del sombrero mayor.

PAR y *PBT* semejantes: $\dfrac{AR}{BT} = \dfrac{PA}{PB} \rightarrow \dfrac{1}{4} = \dfrac{1+x}{6+x} \rightarrow x = \dfrac{2}{3}$

PAR y *PCS* semejantes: $\dfrac{AR}{CS} = \dfrac{PA}{PC} \rightarrow \dfrac{1}{r} = \dfrac{1+\dfrac{2}{3}}{r+10+\dfrac{2}{3}} \rightarrow r = 16$

El radio del sombrero grande mide 16 cm.

48 Nivel II CP XXIV



Si el cuadrado menor tiene área A y el cuadrado mediano tiene área B, ¿qué área tiene el cuadrado mayor, dibujado con línea gruesa?

A) $(A+B)^2$ **B)** A^2+B^2 **C)** $(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2$

D) $A+2B$ **E)** $A+B$

(E) El lado del cuadrado pequeño debe medir $\sqrt{A}$ y el del cuadrado mediano $\sqrt{B}$. Llamamos x al lado del cuadrado grande y aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo formado por los lados de los tres cuadrados obtenemos que: $x^2 = (\sqrt{A})^2 + (\sqrt{B})^2 = A + B$.

El área del cuadrado grande es $A + B$.

49 Nivel II CP XXIV

Si a, b, c, d, e, son enteros positivos y $2^a \cdot 3^b \cdot 4^c \cdot 6^d = 6^e$ entonces, tiene que cumplirse, a la fuerza que:

A) $a + 2c = b$ **B)** $a + b + c + d = e$ **C)** $a + c = b + d$

D) $a \cdot c = b \cdot d$ **E)** $b = d - e$

(A) Un problema muy interesante para manejar las propiedades de las potencias. Vamos a expresar ambos miembros usando únicamente potencias de base 2 y 3. Es sencillo porque $4 = 2^2$ y $6 = 2 \cdot 3$.

$2^a \cdot 3^b \cdot 4^c \cdot 6^d = 6^e$

$2^a \cdot 3^b \cdot 2^{2c} \cdot 2^d \cdot 3^d = 2^e \cdot 3^e$

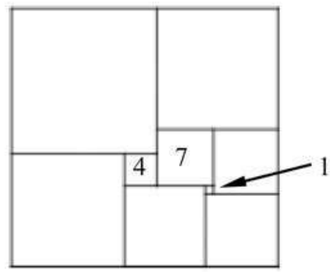
$2^{a+2c+d} \cdot 3^{b+d} = 2^e \cdot 3^e$

Por tanto, igualando los exponentes correspondientes a las bases 2 y 3: $\left.\begin{array}{r} a+2c+d=e \\ b+d=e \end{array}\right\}$ y si restamos la primera igualdad menos la segunda, ya podemos contestar: $a + 2c - b = 0$, es decir, $a + 2c = b$.

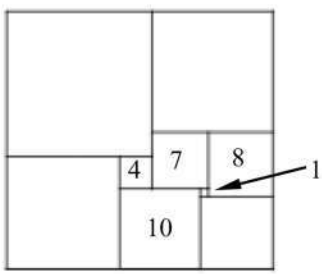
50 Nivel II **CP XXV**

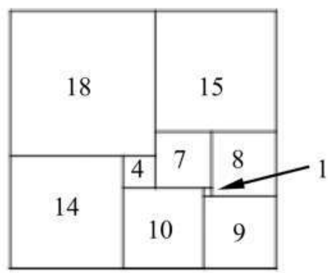
Hemos colocado con mucho cuidado nueve alfombras cuadradas para cubrir una gran sala rectangular. Si los lados de las alfombras más pequeñas miden 1 m, 4 m y 7 m, ¿qué superficie, en m^2, tiene la sala?

A) 1024 **B)** 1122 **C)** 1023
D) 1088 **E)** 1056



(E) Tratemos de averiguar los lados de las alfombras cuadradas. Solo tenemos que sumar y restar y avanzar sin prisas. Las dos primeras alfombras que podemos medir son las de lados 8 m y 10 m. Luego, poco a poco, hasta completar el problema.





El área de la sala rectangular es $32 \times 33 = 1056$ m^2.

Soluciones - Nivel III

1 Nivel III CP I

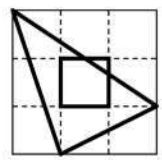
Escritos en fila todos los números del 1 al 500, ¿qué dígito ocupará el lugar 1000?

A) 0 **B)** 1 **C)** 3 **D)** 6 **E)**7

(C) Los 9 primeros números ocuparán 9 lugares; los 99 primeros números ocuparían $9 + 2 \cdot 90 = 189$ lugares.
Así pues, quedan $1000 - 189 = 811$ lugares que serán ocupadas por números de tres cifras, habiendo pues $811 : 3 = 270$ números completos y la primera cifra del número que ocupe el 271º lugar. Como el primer número de tres cifras es 100, el 270º es el 369 y la primera cifra del siguiente, 370, es 3.

2 Nivel III CP I

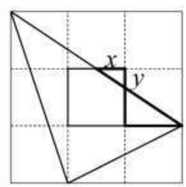
Los lados de la cuadrícula miden 1 cm. ¿Cuál es, en cm^2, el área de la región común al triángulo y al cuadrado?



A) $\frac{4}{5}$ **B)** $\frac{6}{7}$ **C)** $\frac{11}{12}$

D) $\frac{9}{10}$ **E)** $\frac{10}{11}$

(C) Llamando x e y a los catetos horizontal y vertical respectivamente del triángulo pequeño que queda fuera de la zona común, podemos escribir, por semejanza de triángulos, que $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$, $\frac{1-y}{1} = \frac{2}{3}$, de donde obtenemos $y = \frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{2}$ y el área del triángulo pequeño será $\frac{1}{12}$ con lo que el área de la zona común será $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$.



3 Nivel III CP III

El número de gatos que viven en Gatolandia es un número de 6 cifras, cuadrado perfecto y cubo perfecto. Cuando se mueran 6 de esos gatos, el número de gatos que queden será primo. ¿Cuántos gatos hay en Gatolandia?

A) 279 643 **B)** 117 649 **C)** 262 147 **D)** 531 469 **E)** 998 001

(B) Al ser el número de gatos un cuadrado perfecto y un cubo perfecto, debe ser una potencia sexta y las únicas potencias sextas con 6 cifras son 7^6, 8^6 y 9^6 pues 10^6 tiene 7 cifras y 6^6 solamente 5, mientras que 7^6 ya tiene 6.

Por otra parte, al restar 6 debemos obtener un número primo y $9^6 - 6$ no es primo por ser múltiplo de 3 y $8^6 - 6$ tampoco es primo por ser par, luego el número de gatos de Gatolandia es 7^6, es decir, 117649.

4 Nivel III CP III

Los vértices de un cubo los numeramos del 1 al 8, de manera que los conjuntos de números correspondientes a los vértices de cada cara son: $\{1, 2, 6, 7\}$, $\{1, 4, 6, 8\}$, $\{1, 2, 5, 8\}$, $\{2, 3, 5, 7\}$, $\{3, 4, 6, 7\}$ y $\{3, 4, 5, 8\}$. ¿Cuál es el número asignado al vértice más lejano al 6?

A) 1 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 7

(D) El vértice más alejado al 6 será el vértice común de las 3 caras que no contienen al 6, es decir de las $\{1, 2, 5, 8\}$, $\{2, 3, 5, 7\}$ y $\{3, 4, 5, 8\}$, es decir el 5.

5 Nivel III CP IV

Añadiendo un 1 al principio y al final de un número, este aumenta en 14 789. ¿Cuál era la suma de las cifras del número original?

A) 11 **B)** 10 **C)** 9 **D)** 8 **E)** 7

PRIMERA SOLUCIÓN

(B) Si el número es x tenemos que, al formar el número $1x1$, ha aumentado x en 14 789, es decir: $10x + 1 + 10^n - x = 14\,789$ siendo n el número de cifras de x. Así pues, $9x + 10^n = 14\,789$, de donde $10^n = 10000$ y $9x = 4788$ con lo que $x = 532$ y la suma de sus cifras es 10.

SEGUNDA SOLUCIÓN

(B) Si el número También podemos escribir la resta 1____1 – ____ = 14 789 y empezar a rellenar desde las unidades. La unidad del sustraendo tiene que ser un 2 para que la resta sea 9, por tanto, las decenas del minuendo también es 2 ya que es el mismo número sin añadir los unos (al principio y al final). Completando de esta forma la resta conseguimos el número 532.

6 Nivel III CP IV

Si $n=1+3+5+...+999$ y $m=2+4+6+...+1000$, $m-n$ es igual a:

A) 500 **B)** 1000 **C)** –499 **D)** 499 **E)** 501

(A) Escribimos $m - n = (2 + 4 + \ldots + 1000) - (1 + 3 + \ldots + 999)$, agrupándolo de otra forma tenemos,
$m - n = (2 - 1) + (4 - 3) + \ldots + (1000 - 999) = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1$ (quinientas veces), así que $m - n = 500$.

7 Nivel III CP V

Llenamos una cuadrícula de p filas y q columnas con todos los enteros desde 1 a pq. Los escribimos en orden creciente, llenando en primer lugar la fila 1, luego la fila 2, etc. Si el 20 está en la tercera fila, el 41 en la 5ª y el 103 en la última, halla $p+q$.

A) 21 **B)** 22 **C)** 23 **D)** 24 **E)** 25

(A) La primera fila la forman los enteros desde 1 hasta q; la segunda desde $q + 1$ hasta $2q$; la tercera desde $2q + 1$ a $3q$; la quinta desde $4q + 1$ a $5q$ y la última, la p-ésima, desde $(p-1)q$ a pq.
Así pues sabemos que:

$$\begin{cases} 2q+1 \le 20 \le 3q \\ 4q+1 \le 41 \le 5q \\ (p-1)q \le 103 \le pq \end{cases} \quad \text{y nos piden } p+q.$$

De la primera información, tenemos que $2q \le 19$ y $20 \le 3q$, así que $q \le 9$ y $q \ge 7$ por lo que q puede ser 7, 8 o 9. De la segunda, obtenemos $4q \le 40$ y $41 \le 5q$, por lo que $q \le 10$ y $q \ge 9$ (recordar que q es entero). Así pues, $q = 9$ o 10, que junto a la información anterior nos asegura que $q = 9$, con lo que la última información se reduce a $9(p-1) \le 103 \le 9p$, de donde $p \le 12$ y $p \ge 12$, es decir, $p = 12$ y $p + q = 21$.

8 Nivel III CP V

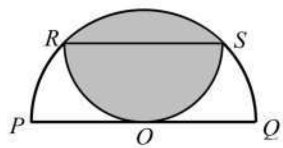
El resultado de $2001^2 - 2000^2 + 1999^2 - 1998^2 + ... + 3^2 - 2^2 + 1^2 - 0^2$ es:

A) 1001^2 **B)** 2002^2 **C)** $2002 \cdot 1001$ **D)** $1001 \cdot 2001$ **E)** Nada de lo anterior

(D) Agrupando cada diferencia de cuadrados en producto de suma por diferencia, tenemos que, al ser la diferencia 1, la expresión dada es igual a:
$(2001 + 2000)\cdot(2001 - 2000) + (1999 + 1998)\cdot(1999 - 19998) + ... +$
$+ (1 + 0)\cdot(1 - 0) = 2001 + 2000 + 1999 + \ldots + 3 + 2 + 1.$
Esta suma es la de todos los enteros que van desde el 1 hasta el 2001, es decir, $S = \frac{1+2001}{2} \cdot 2001 = 1001 \cdot 2001$.

9 Nivel III CP V

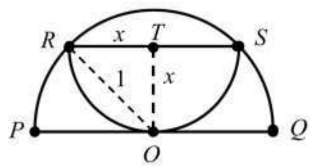
En la figura adjunta, las curvas *PRSQ* y *ROS* son semicircunferencias y *RS* es paralela a *PQ*. Si el radio de la semicircunferencia grande es 1 metro, ¿cuál es el área, en m², de la región sombreada?



A) $\frac{\pi - 1}{2}$ **B)** $\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}$ **C)** $\frac{\pi}{4}$

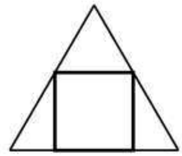
D) 1 **E)** $\frac{\pi}{2} - 1$

(A) Como *ROS* es una semicircunferencia, si $OT = x$, $RT = x$ por lo que $1 = 2x^2$, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y el ángulo bajo el que se ve el segmento de cuerda *RS* es 90º por lo que el área del segmento circular será la del sector circular menos el triángulo *ORS*, donde el sector circular es de 90º por tanto, un cuarto de círculo de radio 1 y el triángulo es rectángulo de catetos 1. Así que el segmento tiene un área de $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\pi - 2}{4}$. Como el área del semicírculo *RSO* es $\frac{1}{2}\pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$, el resultado pedido será $\frac{\pi - 2}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi - 2}{4} = \frac{\pi - 1}{2}$ m².



10 Nivel III CP V

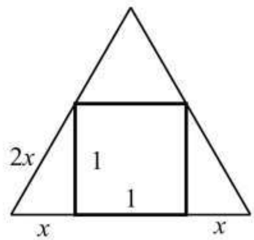
Si un cuadrado de lado 1 está inscrito en un triángulo equilátero como se muestra en la figura, la longitud del lado del triángulo es:



A) 2 **B)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **C)** $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$ **E)** $\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$

(E) En la figura observamos que $(2x)^2 = 1^2 + x^2$, por lo que $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y la longitud del lado del triángulo es $1 + 2x = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$.



11 Nivel III CP VI

En cada una de las cinco jarras de la figura hay café, chocolate o leche (en ninguna hay mezcla) en las cantidades que se indican. No sabemos qué contiene cada jarra pero sí sabemos que hay en total el doble de café que de chocolate, que el chocolate está en una única jarra y que no hay tres jarras con el mismo líquido. ¿En qué jarra está el chocolate?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

(B) Podemos estudiar jarra por jarra viendo en cuál puede estar el chocolate (el enunciado dice que el chocolate está en un único recipiente). Teniendo en cuenta que no hay tres jarras con el mismo líquido, deducimos que hay una de chocolate, dos de café y dos de leche. Las opciones son las siguientes:

A) Si hay 950 g de chocolate, la cantidad de café, el doble, será 1900 g y esta cantidad no se puede conseguir con las restantes tazas.

B) Si hay 750 g de chocolate, de café habría 1500 g que serían las tazas A + C. La leche estaría en las tazas D + E. Sigamos con el proceso para asegurarnos de que no hay más respuestas posibles.

C) Si hay 550 g de chocolate, el café sería 1100 g, y esta cantidad no se puede conseguir con las restantes tazas.

D) Si hay 475 g de chocolate, el café sería 950 g (taza A), pero esto obligaría a que en las tres tazas restantes tendría que haber leche y el enunciado no lo permite.

E) Si hay 325 g de chocolate, el café sería 650 g, y esta cantidad no se puede conseguir con las restantes tazas.

12 Nivel III CP VI

v	24	w
18	x	y
25	z	21

En el cuadrado mágico de la figura, la suma de los números de cada fila, columna o diagonal es la misma. ¿Cuánto vale $y + z$?

A) 43 **B)** 44 **C)** 45 **D)** 46 **E)** 47

(D) Escribamos los números que faltan en función de la z, por ejemplo.

C1 = F3: $v + 18 + 25 = 25 + z + 21 \Rightarrow v = z + 3$
C2 = F3: $24 + x + z = 25 + z + 21 \Rightarrow x = 22$
F2 = F3: $18 + 22 + y = 25 + z + 21 \rightarrow y = z + 6$
C2 = C3: $24 + 22 + z = w + z + 6 + 21 \rightarrow w = 19$

$z+3$	24	19
18	22	$z+6$
25	z	21

Y ya sabemos que la diagonal suma $25 + 22 + 19 = 66$ y podemos completar el cuadrado mágico.

23	24	19
18	22	26
25	20	21

13 Nivel III CP VII

Lanzamos tres dados al aire, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los números aparecidos en dos de ellos, coincida con el del otro dado?

A) $\frac{5}{36}$ **B)** $\frac{1}{6}$ **C)** $\frac{7}{36}$ **D)** $\frac{2}{9}$ **E)** $\frac{5}{24}$

(E) Estudiemos todos los casos favorables suponiendo que debe coincidir el primer dado con la suma de los otros dos:
Si en el primero sale 1 [probabilidad 1/6], no se puede cumplir lo pedido [este caso es desfavorable].
Si sale un 2 [probabilidad 1/6], en los otros debe salir (1, 1) que tiene probabilidad 1/36.
Si sale un 3 [probabilidad 1/6], en los otros debe salir (1, 2) o (2, 1) que tiene probabilidad 2/36.
Si sale un 4 [probabilidad 1/6], en los otros debe salir (1, 3), (2, 2) o (3, 1) que tiene probabilidad 3/36.
Y siguiendo con el resto llegaríamos a una probabilidad de

$$\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1+2+3+4+5}{36}\right)=\frac{15}{6\cdot 36}=\frac{5}{72}$$

y este resultado hay que multiplicarlo por 3 ya que el dado suma podría ser el primero, el segundo o el tercero, y la respuesta es entonces: $\frac{3\times 5}{72}=\frac{5}{24}$.

14 Nivel III — CP VII

Si el producto de tres números enteros consecutivos, ninguno nulo, es 8 veces su suma, ¿cuál es la suma de sus cuadrados?

A) 50 **B)** 77 **C)** 110 **D)** 149 **E)** 194

(B) Si los tres números consecutivos son, $x-1, x, x+1$, entonces el enunciado se traduce en esta ecuación: $(x-1)\cdot x\cdot(x+1) = 8\cdot(x-1+x+x+1)$ y al operar obtenemos:

$x^3 - x = 24x \Rightarrow x^3 = 25x$ y dividiendo los dos miembros por x (obsérvese que $x \neq 0$ porque si x fuese nulo, los números serían –1, 0, 1 que no cumplen lo pedido), tenemos que $x^2 = 25$ con dos posibles soluciones $x = +5$ y $x = -5$. En el primer caso hablaríamos de 4, 5, 6, y en el segundo de –6, –5, –4 que elevados al cuadrado y sumados dan el mismo resultado: $4^2 + 5^2 + 6^2 = (-6)^2 + (-5)^2 + (-4)^2 = 77$.

15 Nivel III — CP VIII

¿De cuántas formas puedo repartir doce caramelos entre Alicia, Beatriz y Carlos si a cada uno de ellos le tengo que dar por lo menos tres?

A) 9 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 12

(D) Si a cada uno le tengo que dar por lo menos tres caramelos, esto hace un total de nueve caramelos (tres para cada uno) y, por tanto, ya solo me quedan tres caramelos para repartir. Veamos de cuántas formas puedo repartir tres caramelos entre tres personas. Con cuidado y siguiendo un orden, encontramos las siguientes maneras de hacer el reparto:

A: (3 +)	0	0	0	0	1	1	1	2	2	3
B: (3 +)	0	1	2	3	0	1	2	0	1	0
C: (3 +)	3	2	1	0	2	1	0	1	0	0

Hay diez maneras.

16 Nivel III CP VIII

El número de dos cifras $[ab]$ es divisible por 7. Representamos por $[ba]$ el número obtenido al permutar las cifras.
De los siguientes números, I: $5b + a$ II: $3a + b$ III: $[ba] + a$, ¿cuáles son también divisibles por 7?

A) Solamente I y II **B)** Solamente II **C)** Solamente III

D) Los tres **E)** Solamente I y III

(D) Interesante problema que parece imposible de atacar pero… ya vas a ver. El primer paso para resolver un problema siempre es el mismo: ponerse a resolverlo. Recuerda que $[ab] = 10a + b$. El dato del problema es que el número $[ab]$ es divisible por 7 (o sea, es múltiplo de 7), es decir que $10a + b = 7p$, donde p es un número natural.
Fíjate que en $10a + b = 7p$ podemos despejar b; $b = 7p - 10a$. Escribamos los tres números en función de a y p:

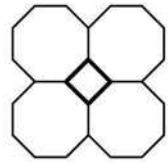
I: $5b + a = 5(7p - 10a) + a = 35p - 50a + a = 35p - 49a = 7(5p - 7a)$ ¡múltiplo de 7!

II: $3a + b = 3a + 7p - 10a = 7p - 7a = 7(p - a)$ ¡múltiplo de 7!

III: $(ba) + a = 10b + a + a = 10b + 2a = 10(7p - 10a) + 2a = 70p - 100a + 2a =$
$= 70p - 98a = 7(10p - 14a)$ ¡múltiplo de 7!

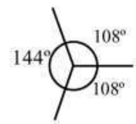
Hay que reconocerlo, bonito problema.
Los tres nuevos números son también divisibles por 7.

17 Nivel III CP IX

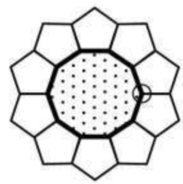


Rodeamos un polígono regular de m lados por m polígonos regulares de n lados cada uno, sin que haya huecos ni superposiciones. (En la figura que te mostramos, $m = 4$ y $n = 8$). ¿Cuánto vale n si $m = 10$?

A) 5 **B)** 6 **C)** 14
D) 20 **E)** 26



(A) En geometría, cuando parece que no tenemos ningún dato, hay que fijarse en los ángulos, que son los que determinan las formas. En cada vértice del polígono de m lados coinciden dos polígonos iguales de n lados. Los tres ángulos que se forman en el vértice deben sumar 360º. Sumémoslos: Los ángulos interiores del polígono regular de 10 lados valen 144º (pues los ángulos centrales miden 36º) Con esto obtenemos la medida de los ángulos del polígono de n lados: $\frac{360º-144º}{2} = 108º$



Por tanto, el ángulo central del polígono de n lados mide 72º, se trata de un pentágono.

18 Nivel III CP IX

¿Cuántos capicúas de tres cifras son cuadrados perfectos?

A) Ninguno **B)** Uno **C)** Dos **D)** Tres **E)** Cuatro

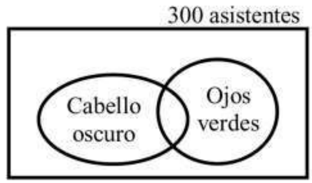
(D) Podríamos probar elevando al cuadrado todos los números entre 10 y 31 (32^2 ya tiene 4 cifras) pero no es necesario trabajar tanto.
Observa que los cuadrados perfectos sólo pueden acabar en 0, 1, 4, 5, 6 y 9 ya que:
$0^2 = \mathbf{0}$, $1^2 = \mathbf{1}$, $2^2 = \mathbf{4}$, $3^2 = \mathbf{9}$, $4^2 = 1\mathbf{6}$, $5^2 = 2\mathbf{5}$, $6^2 = 3\mathbf{6}$, $7^2 = 4\mathbf{9}$, $8^2 = 6\mathbf{4}$ y $9^2 = 8\mathbf{1}$.
De modo que sólo hay que buscar capicúas que sean cuadrados perfectos entre los siguientes números:
101 – 111 – 121 … 191 Probamos con 11 y 19 ; $\mathbf{11^2 = 121}$ y $19^2 = 361$.
404 – 414 – 424 … 494 Probamos con 22 y 28; $\mathbf{22^2 = 484}$ y 28^2 se pasa seguro.
505 – 515 – 525 … 595 Probamos con 25; $25^2 = 625$, nada.
606 – 616 – 626 … 696 Probamos con 24 y 26; $24^2 = 576$ y $\mathbf{26^2 = 676}$.
909 – 919 – 929 … 999 Probamos con 23 y 27; 23^2 es muy pequeño y $27^2 = 729$.
Así que hemos encontrado tres cuadrados perfectos entre los capicúas de tres cifras.

19 Nivel III CP X

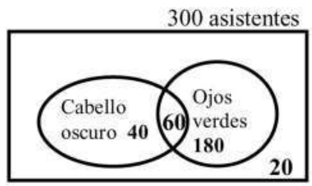
En una reunión, la tercera parte de los asistentes tiene ojos verdes, el 80% cabello oscuro y el 20% ojos verdes y cabello oscuro. ¿Cuál es la proporción de los que no tienen ojos verdes ni cabello oscuro?

A) $\frac{1}{15}$ **B)** 10 % **C)** 15 % **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{3}{10}$

(A) En este tipo de problemas en el que intervienen proporciones o porcentajes es muy útil trabajar con cantidades concretas y luego, al final, hallar la proporción o el porcentaje pedido. En este problema es acertado suponer que asisten 300 personas a la reunión ya que es múltiplo de 3 y de 100. Utilizaremos unos sencillos diagramas.
Ya solo falta ir rellenando las regiones con su cantidad correspondiente.



Es importante darse cuenta con qué dato debemos empezar: el 20% (20% de 300, es decir, 60 personas) tienen ojos verdes y cabello oscuro. Pondremos 60 en la intersección. Como el 80% (240) tienen cabello oscuro, debemos colocar 180 en la parte que queda, pues ya hay 60 con cabello oscuro. Así, poco a poco, hasta llegar a rellenar el diagrama.

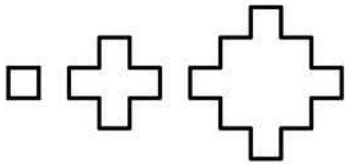


Al final quedan 20 asistentes (300 – 40 – 60 – 180) que ni tienen ojos verdes ni cabello oscuro, lo que hace una proporción de $\frac{20}{300} = \frac{1}{15}$.

20 Nivel III CP X

En esta serie de polígonos *crucigrama* de lado 1 cm, ¿cuál es el perímetro del que tiene 61 cm^2 de área?

A) 30 cm **B)** 32 cm **C)** 34 cm **D)** 40 cm **E)** 44 cm



(E) Estudiemos cómo van variando el área y el perímetro de los cuatro primeros *crucigramas* para intentar encontrar alguna relación en su formación:

Crucigrama	1º	2º	3º	4º
Área (cm^2)	1	5	13	25
Perímetro (cm)	4	12	20	28

Y ya se ve que el área va aumentando en múltiplos de 4, es decir, más 4, más 8, más 12, etc. Y el perímetro va aumentando en 8 a cada paso. Podemos pues continuar la serie sin necesidad de dibujar los *crucigramas*:

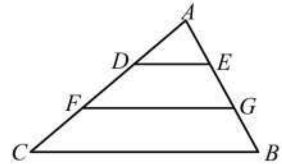
Crucigrama	1º	2º	3º	4º	5º	6º
Área (cm^2)	1	5	13	25	41	61
Perímetro (cm)	4	12	20	28	36	44

El perímetro del *crucigrama* de área 61 cm^2 es 44 cm.

Si nos hubieran pedido estudiar *crucigramas* mucho mayores, tendríamos que encontrar su ley de formación. El *crucigrama* que ocupa el lugar n tiene:
Área: $A_n = (n-1)^2 + n^2$ Perímetro: $P_n = 8n - 4$

21 Nivel III CP X

En el triángulo ABC de la figura, de área 90 cm^2, los puntos E y G dividen al lado AB en tres partes iguales y las rectas DE y FG son paralelas a BC. ¿Cuál es, en cm^2, el área del trapecio $DEGF$?



A) 20 **B)** 25 **C)** 30

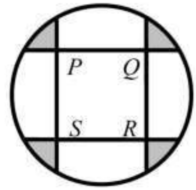
D) 36 **E)** 45

(C) Al ser los segmentos FG y DE paralelos a CB, los triángulos ABC, AGF, AED son semejantes. Además conocemos las razones de semejanza pues $AE = \frac{1}{3} AB$ y $AG = \frac{2}{3} AB$. Por tanto, podemos comparar sus áreas: $\mathrm{A}_{AGF} = \frac{4}{9} \mathrm{A}_{ABC} = 40 \text{ cm}^2$ y $\mathrm{A}_{AED} = \frac{1}{9} \mathrm{A}_{ABC} = 10 \text{ cm}^2$.

Y ya podemos contestar, el área del trapecio $DEGF$ mide $40 - 10 = 30$ cm^2.

22 Nivel III CP XI

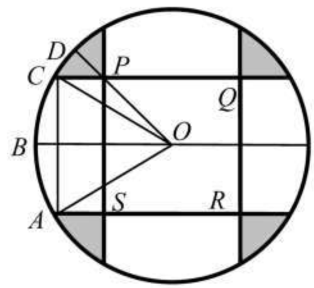
El cuadrado *PQRS* de lado 1 m y el círculo de radio 1 m de la figura, tienen el mismo centro. ¿Cuál es, en m^2, el área de la región sombreada?



A) $\frac{\pi}{3}$ **B)** $\frac{\pi-\sqrt{3}}{3}$ **C)** $\sqrt{3}-1$

D) $\frac{\pi-1}{3}$ **E)** $\frac{\pi}{3}+1-\sqrt{3}$

(E) Vamos a calcular el área de la figura sombreada que queda entre los puntos *C, D* y *P* y después multiplicaremos por 8 el resultado obtenido.



Observa que el área que intentamos calcular es el área del sector circular *COD* menos el área del triángulo *CPO*.

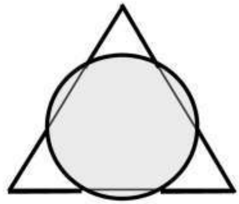
Para calcular el ángulo $C\hat{O}D$ observa que el triángulo *ACO* es equilátero y por tanto, el ángulo $C\hat{O}D$ = 45º – 30º = 15º y el área del sector circular $A_{COD}=\frac{15\cdot\pi}{360}=\frac{\pi}{24}$ m^2.

Para calcular el área del triángulo *CPO* tratemos de calcular la medida de *CP* ya que su altura correspondiente es $\frac{1}{2}$ m. Como $CP+\frac{1}{2}$ es la altura del triángulo equilátero *ACO* cuyo lado es 1 m, tenemos que $CP=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ m, y por tanto el área del triángulo *CPO* es $A_{CPO}\,\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{8}$ m^2.

Juntando todo lo anterior tenemos que el área buscada, en m^2, es $8\cdot\left(\frac{\pi}{24}-\frac{\sqrt{3}-1}{8}\right)=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}+1$ m^2.

23 Nivel III CP XI

Encima de un triángulo equilátero de lado 3 cm, colocamos un círculo de 1 cm de radio, haciendo coincidir los centros de ambas figuras. ¿Cuánto mide, en cm, el perímetro o borde de la figura resultante?



A) 2π **B)** $6 + \pi$ **C)** 9

D) 3π **E)** $9 + 2\pi$

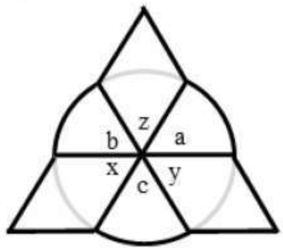
(B) Como el círculo está centrado en el triángulo equilátero, los ángulos a, b, c son iguales. Y como los otros ángulos x, y, z son opuestos por el vértice a los anteriores, concluimos que esos seis ángulos son iguales y por tanto miden 60º cada uno.

La parte de circunferencia que se ve equivale a 180º, es decir la mitad de la circunferencia completa: $\frac{2\pi\, r}{2} = \pi \cdot 1 = \pi$ cm.

La parte que se oculta del triángulo es 1 cm por cada lado ya que los triangulitos interiores son equiláteros al ser isósceles y tener un ángulo de 60º.

Por tanto, de cada lado se ven 2 cm.

Así pues el borde de la figura mide $6 + \pi$ cm.



24 Nivel III CP XII

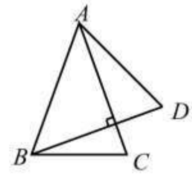
Con 10! (diez factorial) representamos al producto $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$ (multiplicar diez por todos los enteros anteriores hasta el uno) ¿Cuál es el número más pequeño que multiplicado por 10! nos da un cubo perfecto?

A) 490 **B)** 630 **C)** 1470 **D)** 4410 **E)** 8820

(D) $10! = 2\cdot 5\cdot 3^2\cdot 2^3\cdot 7\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 2^2\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 7\cdot 5^2\cdot 3^4\cdot 2^8$. Si descomponemos un cubo perfecto en producto de primos, todos los primos estarán elevados a un múltiplo de tres. Así pues, para obtener el menor cubo perfecto debemos multiplicar 10! por $7^2\cdot 5\cdot 3^2\cdot 2 = 4410$.

25 Nivel III CP XII

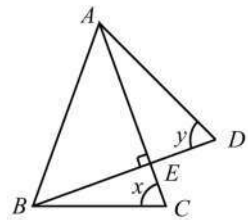
Los triángulos ABC y ABD son isósceles con $AB = AC = BD$.
Si BD es perpendicular a AC, la suma de los ángulos $\hat{C} + \hat{D}$ es igual a:



A) 115º **B)** 120º **C)** 130º **D)** 135º

E) No tenemos datos suficientes para determinarla

(D) En el triángulo ABD se cumple que $A\hat{B}D = 180º - 2y$.
Los ángulos del triángulo EBC miden: $E = 90º$, $C = x$, $B = x - (180º - 2y)$ y su suma es 180º:
$90º + x + x - (180º - 2y) = 180º \Rightarrow 2x + 2y = 270º$.
Por tanto, $x + y = 135º$.

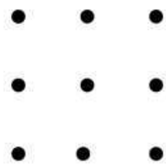


26 Nivel III CP XIII

Elegimos al azar tres puntos de los nueve del siguiente diagrama. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres elegidos estén alineados?

A) $\frac{8}{27}$ **B)** $\frac{2}{21}$ **C)** $\frac{8}{81}$

D) $\frac{4}{21}$ **E)** $\frac{8}{9}$



(B) Solamente hay 8 casos en los que los tres puntos están alineados (las tres filas, las tres columnas y las dos diagonales) y hay $\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 84$ formas de escoger tres puntos de nueve, luego la probabilidad buscada es $\frac{8}{84} = \frac{2}{21}$.

27 Nivel III CP XIII

Ayer por la tarde, Alicia condujo una hora más que Pedro y a una velocidad media superior a la de Pedro en 5 km/hora. Luisa condujo dos horas más que Pedro y a una velocidad media superior a la de Pedro en 10 km/hora. Si Alicia condujo 70 km más que Pedro, ¿cuántos km condujo Luisa más que Pedro?

A) 120 **B)** 130 **C)** 140 **D)** 150 **E)** 160

(D) Resumamos en una tabla los datos del problema:

	Tiempo (h)	Velocidad (km/h)	Espacio (km)
Pedro	t	v	$v \cdot t$
Alicia	$t+1$	$v+5$	$(v+5)\cdot(t+1)$
Luisa	$t+2$	$v+10$	$(v+10)\cdot(t+2)$

Como Alicia condujo 70 km más que Pedro, podemos escribir:

$$(v+5)(t+1) = vt + 70 \Rightarrow 5t + v = 65$$

Luisa recorrió:

$(v+10)(t+2) = vt + 10t + 2v + 20 = vt + 2(5t+v) + 20 = vt + 2\cdot 65 + 20 = vt + 150$

Es decir, 150 km más que los recorridos por Pedro.

28 Nivel III CP XIV

En el cuadrado que observas resulta que cada fila, cada columna y cada diagonal forman una progresión aritmética. ¿Qué número es x?
[Recuerda: en una progresión aritmética, la diferencia entre dos términos consecutivos es constante.]

				21
	16			
		27		
				x

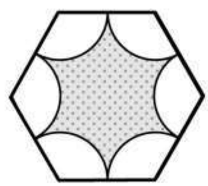
A) 49 **B)** 42 **C)** 33 **D)** 28 **E)** 4

(B) Comencemos por la diagonal: 16 y 27 son dos términos consecutivos de una progresión aritmética luego la razón es $27 - 16 = 11$ y eso nos permite rellenar toda la diagonal: $16 - 11 = 5$, $27 + 11 = 38$ y $38 + 11 = 49$.
A continuación nos fijamos en la última columna de la que tenemos el primer y el quinto término de la progresión: Como $49 = 21 + 4d$ obtenemos que la diferencia es 7 y por tanto $x = 49 - 7 = 42$.

5				21
	16			
		27		
			38	x
				49

29 Nivel III CP XIV

Si el hexágono de la figura tiene 2 dm de lado, ¿cuál es, en dm^2, el área de la estrella central?

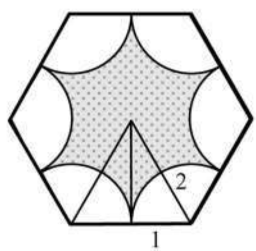


A) $3\sqrt{3} - \pi$ **B)** $6\sqrt{3} - 2\pi$ **C)** $2\sqrt{6} - \pi$

D) $3(\sqrt{18} - \pi)$ **E)** $6(2\sqrt{3} - \pi)$

(B) Como los ángulos de un hexágono suman 720º, los sectores circulares blancos forman dos círculos de radio 1 dm. Así pues, el área buscada es el área del hexágono regular de 2 dm de lado y $\sqrt{3}$ dm de apotema menos el área de dos círculos de radio 1 dm:

$$6 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot \pi \cdot 1^2 = 6\sqrt{3} - 2\pi \text{ dm}^2.$$



30 Nivel III CP XV

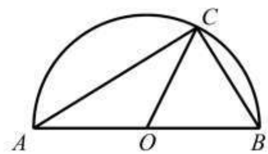
Si n es un cuadrado perfecto, ¿cuál es el primer cuadrado perfecto mayor que n?

A) $n+\sqrt{n}$ **B)** $n+2\sqrt{n}+1$ **C)** n^2+1 **D)** n^2+n **E)** n^2+2n+1

(B) El número n es el cuadrado de $\sqrt{n}$ que es un número entero. El siguiente cuadrado perfecto será el cuadrado de $\sqrt{n}+1$, esto es $(\sqrt{n}+1)^2=n+2\sqrt{n}+1$.

31 Nivel III CP XV

El dibujo muestra una semicircunferencia de centro O y radio 1 cm. Si C es un punto arbitrario de la semicircunferencia, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?



A) El ángulo $A\hat{C}B$ es recto.

B) El triángulo AOC es isósceles.

C) El área del triángulo ABC es menor o igual que 1 cm^2.

D) El área del triángulo AOC es igual a la del triángulo OBC.

E) $AO^2+OB^2=AC^2+BC^2$.

(E) A) Es verdadera pues el ángulo $A\hat{C}B$ abarca media circunferencia.
B) Es verdadera pues OA y OC son radios.
C) Es verdadera pues la base del triángulo es 2 cm y la altura es menor o igual que 1 cm.
D) Es verdadera pues las bases miden 1 cm y las alturas coinciden.
E) Por descarte, debe ser falsa, comprobémoslo:

Como el triángulo ABC es rectángulo en C, sabemos que $AB^2=AC^2+BC^2$ y, sustituyendo $AB=AO+OB$, vemos que:

$$AB^2=(AO+OB)^2=AO^2+2\cdot AO\cdot OB+OB^2=AC^2+BC^2.$$

Como $2\cdot AO\cdot OB=2$, obtenemos la igualdad $AO^2+OB^2+2=AC^2+BC^2$.

32 Nivel III CP XVI

Cuatro amigas, Ana, Bárbara, Clara y Daniela, forman un cuarteto musical y sabemos que:

(a) La que toca el clarinete tiene pecas.
(b) Ni Ana ni Clara tocan la guitarra.
(c) Solo la flautista, la violinista y Ana practican natación.
(d) Ni Clara ni Daniela tocan instrumentos de viento.

¿Cuál de estas afirmaciones es cierta?

A) Ana no tiene pecas **B)** Bárbara toca la flauta **C)** Clara toca la flauta
D) Daniela hace natación **E)** Bárbara toca el clarinete

(B) Vamos a encontrar los nombres de las instrumentistas. El quid de estos problemas es saber por dónde empezar.
Analizando (b) y (c) deducimos que Ana es la clarinetista y, por tanto (a), tiene pecas.
Observando ahora (b) y (d) deducimos que Clara es la violinista.
Observando ahora (d) deducimos que Daniela es la guitarrista y, por tanto (c), no practica natación.
Por tanto, Bárbara es la flautista.
La única afirmación cierta es que Bárbara toca la flauta.

33 Nivel III CP XVI

El resto de dividir 7^{25}entre 9 es:

A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 8

(D) Veamos los restos de las primeras potencias de 7 con respecto a 9:
$7^1 = 7 = 9 \cdot 0 + 7 \rightarrow 7$, $7^2 = 49 = 9 \cdot 5 + 4 \rightarrow 4$, $7^3 = 343 = 9 \cdot 38 + 1 \rightarrow 1$.
Al dividir 343 entre 9 da resto 1 y, así, $7^{24} = 343^8$ entre 9 también da resto 1. Luego, 7^{25} entre 9 da resto 7.

34 Nivel III CP XVII

Entre los diez empleados de Mercafour se va a hacer un sorteo para elegir a los cuatro que trabajan este domingo. A Puri le viene fatal y Rubén le ha dicho que no se preocupe, que si le toca a ella, él irá en su lugar salvo, claro está, si los dos salen elegidos en cuyo caso Puri se tendrá que aguantar. ¿Qué probabilidad tiene Rubén de trabajar el domingo?

A) $\frac{2}{3}$ **B)** $\frac{1}{5}$ **C)** $\frac{3}{10}$ **D)** $\frac{8}{15}$ **E)** $\frac{13}{90}$

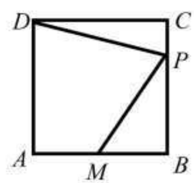
(A) Número de casos posibles: Debemos escoger cuatro de entre los diez empleados para trabajar el domingo, así que hay $\binom{10}{4}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=210$ posibilidades.

Número de casos favorables: Dentro de esas 210 posibilidades, Rubén aparecerá, con Puri o sin ella, $\binom{9}{3}=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1}=84$ veces, y Puri, sin Rubén, lo hará $\binom{8}{3}=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}=56$ veces.

Por lo tanto, la probabilidad que tiene Rubén de trabajar el domingo es $\frac{84+56}{210}=\frac{140}{210}=\frac{2}{3}$.

35 Nivel III CP XVII

En el cuadrado *ABCD* de lado 2 cm, *M* es el punto medio del lado *AB* y *P* es un punto variable del lado *BC*. ¿Cuál es el mínimo valor, en cm, de *DP* + *PM*?

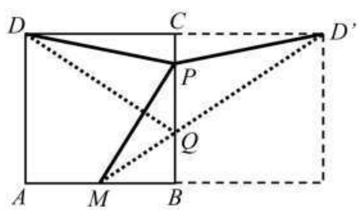


A) $\sqrt{13}$ **B)** $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ **C)** $2\sqrt{3}$

D) $1+2\sqrt{2}$ **E)** $\sqrt{15}$

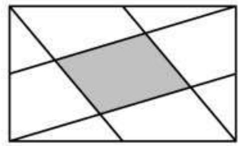
(A) Si consideramos el punto *D'*, simétrico de *D* respecto de la recta *BC*, tendremos que $DP + PM = D'P + PM \geq D'M$ para cualquier punto *P* del segmento *BC*.
Por lo tanto, la mínima suma de distancias se obtiene con el punto *Q* con el que

$$DQ+QM=D'M=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13} \text{ cm.}$$



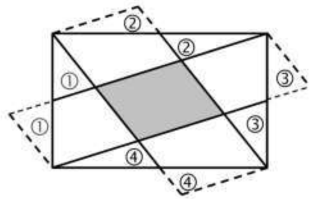
36 Nivel III CP XVIII

En el rectángulo de la figura, uniendo vértices con puntos medios de los lados hemos formado un romboide en el centro. Si el área del rectángulo es de 60 cm^2, la del romboide, en cm^2, es:



A) 25 **B)** 20 **C)** 15
D) 12 **E)** 10

(D) Añadiendo algunos segmentos a la figura se observa que los triángulos marcados con el mismo número son iguales por simetría, con lo que tenemos que el rectángulo dado tiene igual área que 5 romboides como el sombreado y, por lo tanto, su área mide 60 : 5 = 12 cm^2.



37 Nivel III CP XVIII

¿Cuántos enteros n, con $1 \le n \le 100$, verifican que n^n es un cuadrado perfecto?

A) 5 **B)** 15 **C)** 50 **D)** 51 **E)** 55

(E) Si n es par, n^n es cuadrado perfecto pues, al ser $n = 2k$, $n^n = n^{2k} = (n^k)^2$. Por lo tanto, ya tenemos 50 números enteros (los pares 2, 4, 6,..., 100) que verifican la condición. Por otra parte, si n es impar podemos escribir $n = 2k + 1$ y $n^n = n^{2k+1} = (n^k)^2 \cdot n$, lo que indica que n^n será cuadrado perfecto si y sólo si lo es n. Veamos, por lo tanto, qué cuadrados perfectos impares hay que cumplan $1 \le n \le 100$. Son 5: 1, 9, 25, 49, 81.

En definitiva, hay 50 + 5 = 55 números que verifican las condiciones exigidas.

38 Nivel III CP XVIII

En una sucesión, el primer término es $a_1 = 1$, el segundo $a_2 = -1$ y, a partir del tercero, cada término es el producto de los dos anteriores. ¿Cuál es la suma de los 2014 primeros términos de la sucesión?

A) –1007 **B)** –1005 **C)** – 670 **D)** 0 **E)** 1008

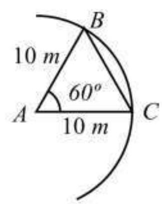
(C) La sucesión es: 1, –1, –1, 1, –1, –1,... Es decir, se repite la secuencia 1, –1, –1 continuamente. Así, los unos ocupan los lugares de la forma $3k+1$ (1º, 4º, 7º,…). Hasta $2013 = 3 \cdot 671$, tendremos 671 unos y el doble de unos negativos, con lo que la suma de todos los términos será – 671. Si le añadimos el 1 de la posición 2014, obtendremos – 670.

39 Nivel III CP XIX

Tres amigas están en un parque. Ali y Bea están juntas y Carolina está a 10 metros. Bea comienza a andar en una cierta dirección hasta que está a 10 m de Ali. ¿Cuál es la probabilidad de que Bea termine más cerca de Carolina que de Ali?

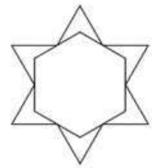
A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{\pi}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{1}{6}$

(B) Para que Bea esté a la misma distancia de Ali que de Carolina, el triángulo formado entre ellas tiene que ser equilátero y, por tanto, con todos sus ángulos 60º. En consecuencia, para que Bea esté más cerca de Carolina que de Ali, el ángulo $B\hat{A}C$ tiene que ser menor de 60º. Además, hay que tener en cuenta que Bea puede moverse a cada uno de los dos lados del segmento AC. Habiendo observado esto y aplicando la regla de Laplace, encontramos la probabilidad: $P = \frac{120}{360} = \frac{1}{3}$.



40 Nivel III CP XIX

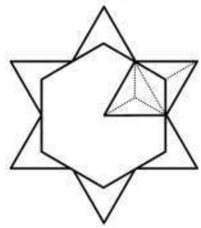
El hexágono regular inscrito en la estrella tiene un área de 12 cm^2. El área, en cm^2, de la estrella es:



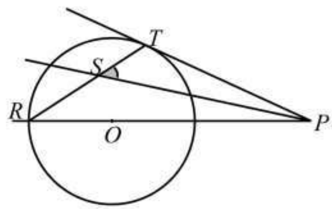
A) 15 **B)** 18 **C)** 20

D) 21 **E)** 24

(B) Dibujando dos apotemas, vemos en cada punta de la estrella un rombo que queda dividido en una cabeza de flecha y una cometa. Como se ve en la figura, el área de la cabeza de flecha es la mitad del área de la cometa, luego el área de la estrella es vez y media la del hexágono.



41 Nivel III CP XX



Desde un punto P exterior a una circunferencia se trazan dos rectas, una que pasa por el centro O y otra tangente en T, como muestra la figura.

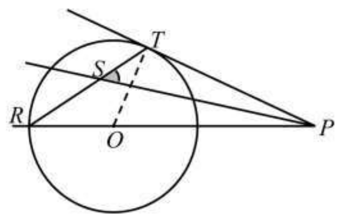
La bisectriz del ángulo $O\hat{P}T$ corta al segmento RT en S. ¿Cuál es la medida del ángulo $T\hat{S}P$?

A) 22,5º **B)** 30º **C)** 37,5º

D) 45º **E)** 52,5º

(D) La tangencia en T nos sugiere el trazado del radio OT. De este modo $P\hat{T}O = 90º$ y, si llamamos α al ángulo $O\hat{P}T$: $T\hat{O}P = 90º - \alpha$

$R\hat{O}T = 180º - (90º - \alpha) = 90º + \alpha$.



Como el triángulo OTR es isósceles, se tiene además que $O\hat{T}R = \dfrac{180º - R\hat{O}T}{2} = \dfrac{90º - \alpha}{2}$ y, por tanto: $P\hat{T}S = P\hat{T}O + O\hat{T}R = 135º - \dfrac{\alpha}{2}$.

Como resultado, $T\hat{S}P = 180º - P\hat{T}S - \dfrac{O\hat{P}T}{2} = 45º$.

42 Nivel III CP XX

Si los cuatro enteros C, D, $C + D$ y $C - D$ son números primos, su suma tiene que ser:

A) Múltiplo de 2 **B)** Múltiplo de 3 **C)** Múltiplo de 5
D) Múltiplo de 7 **E)** Un número primo

(E) Si C y D son primos, no pueden ser ambos impares ya que entonces $C + D$ no sería primo al ser par. Así que uno de los dos es el 2 y, como $C - D$ no es negativo al ser primo, deducimos que $D = 2$. Por tanto, los números primos de los que hablamos son, respectivamente: C, 2, $C+2$, $C - 2$. Dado que la única terna de primos impares consecutivos es la 3, 5, 7, resulta que $C = 5$ y los cuatro enteros dados son 5, 2, 7 y 3 que suman 17, siendo un número primo también.

43 Nivel III CP XXI

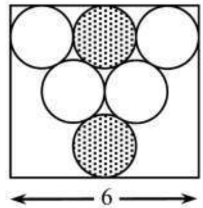
Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, escritos en algún orden, formamos el número de cinco cifras $PQRST$. Si el número de tres cifras PQR es divisible por 4, el QRS es divisible por 5 y el RST es divisible por 3, ¿qué cifra representa la letra P?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

(A) Como QRS es múltiplo de 5, S necesariamente es 5. Al ser PQR múltiplo de 4, QR debe ser múltiplo de 4. Las únicas posibilidades son 12, 24, 32 y 52. La última se descarta porque $S = 5$ y no puede ser $Q = 5$. Ahora, RST es múltiplo de 3. Como S es 5 y R únicamente puede ser 2 o 4, con $R = 2$ tenemos $25T$, que solo es múltiplo de 3 con $T = 2$ o $T = 5$, imposible, en cualquier caso. Con $R = 4$ tenemos $45T$, que solo puede ser múltiplo de 3 con $T = 3$. De modo que $QR = 24$ y $PQRST = 12453$. Y esto implica que $P = 1$.

44 Nivel III CP XXI

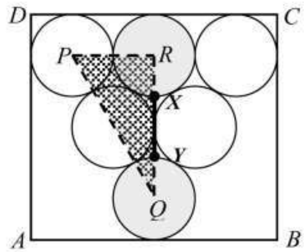
En el interior del rectángulo de la figura, uno de cuyos lados mide 6 cm, hay seis circunferencias iguales, tangentes entre sí y tangentes a los lados del rectángulo. ¿Cuál es, en cm, la distancia entre los puntos más cercanos de los círculos sombreados?



A) $\frac{3}{2}$ **B)** $\sqrt{2}$ **C)** $2(\sqrt{3}-1)$

D) $\frac{\pi}{2}$ **E)** 2

(C) Observa la primera fila de circunferencias. Como $AB = 6$ cm y dicha longitud es tres veces el diámetro de cada circunferencia, los radios miden todos $r = 1$ cm. En el triángulo rectángulo PRQ, el cateto PR mide $2r = 2$ cm y la hipotenusa PQ mide $4r = 4$ cm. Así, por el teorema de Pitágoras, se obtiene $RQ = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ cm.



La distancia que se pide es la del segmento $XY = RQ - 2r = 2\sqrt{3} - 2 = 2\cdot(\sqrt{3}-1)$ cm.

45 Nivel III CP XXII

María tiene tres nietos que la llaman por teléfono regularmente. Uno cada 3 días, otro cada 4 y el otro cada 5. El 31 de diciembre de 2017 la llamaron los tres. ¿Cuántos días del año 2018 no recibirá ninguna llamada?

A) 78 **B)** 80 **C)** 144 **D)** 146 **E)** 152

(D) Dado que 2018 no es bisiesto, la pregunta se puede cambiar por "¿Cuántos números del 1 al 365 no son múltiplos de 3, 4 o 5?" Para dar la respuesta calcularemos cuántos números del 1 al 365 sí son múltiplos de 3, 4 o 5. Tenemos 121 múltiplos de 3, 91 de 4 y 73 de 5. Pero cuidado, ¡algunos múltiplos son comunes! Debemos descontar los múltiplos que son comunes a pares y que hemos contado dos veces: de 3 y 4 son los de 12 que hay 30, de 3 y 5 los de 15 que hay 24, y de 4 y 5 los de 20 que hay 18. ¡Sin embargo queda un detalle! Hemos contado los múltiplos comunes a 3, 4 y 5 (los de 60 que son 6) por triplicado, pero también los hemos descontado tres veces, por lo que hay que volver a contarlos.

En definitiva, la cantidad de múltiplos de 3, 4 o 5 entre el 1 y 365 es:

$121 + 91 + 73 - 30 - 24 - 18 + 6 = 219.$

María no recibe llamadas de sus nietos $365 - 219 = 146$ días.

46 Nivel III CP XXII

Consideramos 2018 puntos de los cuales unos son azules y los otros verdes. Asignamos a cada punto una fracción cuyo numerador es el número de puntos del otro color y el denominador es el número de puntos de su color (incluido él). ¿Cuál es la suma de las 2018 fracciones así construidas?

A) 2018 **B)** 1346 **C)** 1009 **D)** 505 **E)** Falta información

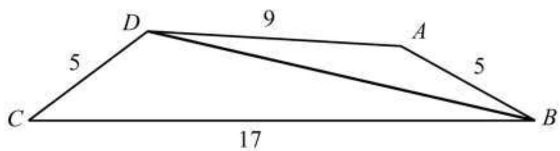
(A) Si a es el número de puntos azules, el número de puntos verdes es $2018 - a$. La fracción que corresponde a cada punto verde es $\dfrac{a}{2018-a}$, mientras que la que corresponde a cada punto azul es $\dfrac{2018-a}{a}$.

La suma de todas las fracciones es: $(2018-a)\cdot\dfrac{a}{2018-a}+a\cdot\dfrac{2018-a}{a}=2018$.

47 Nivel III CP XXIII

En el cuadrilátero $ABCD$ de la figura, ¿cuánto mide BD si sabemos que es un entero?

A) 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 15



(C) Por ser lado de DBA, DB debe estar estrictamente entre $9 - 5 = 4$ y $9 + 5 = 14$. Por ser lado de CBD, DB debe estar (también estrictamente) entre $17 - 5 = 12$ y $17 + 5 = 22$, así que $DB = 13$.

48 Nivel III CP XXIII

Si $(x+2)\cdot(y+2)=60$ y $(x+3)\cdot(y+3)=40$, ¿cuál es el valor de $(x+5)\cdot(y+5)$?

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

(A) Operando las dos igualdades se obtienen dos ecuaciones:

$xy + 2x + 2y + 4 = 60$ $\qquad$ $xy + 3x + 3y + 9 = 40$

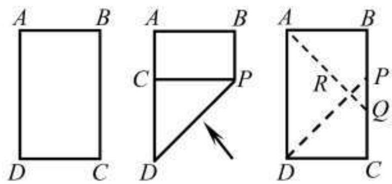
Restando la segunda ecuación menos la primera, llegamos a que $x + y + 5 = -20$, es decir $x + y = -25$.

Por último, manipulando la expresión que nos piden, deducimos:

$(x+5)\cdot(y+5) = xy + 5x + 5y + 25 = (xy + 2x + 2y + 4) + 3(x + y) + 21 = 60 + 3(-25) + 21 = 6.$

49 Nivel III CP XXIV

Una hoja rectangular $ABCD$ con $AB = 5$ cm y $AD = 8$ cm, se dobla para que el borde CD caiga sobre el borde AD, formándose así el doblez PD. Se desdobla y a continuación vuelve a doblarse de tal manera que AB caiga sobre AD, formándose ahora el doblez AQ. Si la intersección de estos dos dobleces es el punto R, calcula el área, en cm^2, del cuadrilátero $DRQC$.



A) 10 **B)** 10,5 **C)** 11 **D)** 11,5 **E)** 12

(D) Por cómo se realizan los dobleces podemos deducir que el segmento BQ mide 5 cm, ya que tiene que medir lo mismo que AB. Esto mismo sucede con el segmento PC, de manera que $PQ = PC + BQ = 5 + 5 - 8 = 2$ cm pues es el trozo que contamos dos veces si sumamos PC y BQ. Los triángulos ABQ y CDP son rectángulos e isósceles, por lo que el triángulo PQR que comparte ángulos con ellos también es rectángulo e isósceles. Con esto, ya sea utilizando el teorema de Pitágoras o sabiendo que la altura sobre la base PQ debe medir $\dfrac{PQ}{2}$, podemos obtener el área del triángulo PQR que es de 1 cm^2. Para obtener el área de $DRQC$ restamos al área de CDP la de PQR, por lo que el resultado final es: $\dfrac{5\cdot 5}{2} - 1 = 11{,}5\ \text{cm}^2$.

50 Nivel III CP XXV

¿Cuántos números enteros positivos son iguales a cuatro veces la suma de sus cifras?

A) Uno **B)** Dos **C)** Tres **D)** Cuatro **E)** Cinco

(D) Está claro que dichos números deben tener dos cifras. Sea [ab] un número que cumple dicha propiedad, entonces, $10a + b = 4(a + b)$, es decir, $6a = 3b$ y, por tanto, $2a = b$.
Como a y b son cifras, ya hemos encontrado todos los números: 12, 24, 36, 48.

Soluciones - Nivel IV

1 **Nivel IV** **CP I**

En una mesa hay cinco cartas como se muestra en la figura.

$\boxed{P}\ \boxed{Q}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{6}$

Cada carta tiene una letra por una cara y un número positivo por la otra. Pedro dice: "Cualquier carta que tenga una vocal por un lado, tiene un número par por el otro". Alicia descubre que esta afirmación es falsa dando la vuelta a una de las cinco cartas. ¿A cuál?

A) 3 **B)** 4 **C)** 6 **D)** P **E)** Q

(A) La afirmación será falsa si hay una carta con vocal por un lado y número impar por el otro. La única carta que puede cumplir eso es la que tiene un 3, por lo que Alicia le dio la vuelta e hizo notar que tenía una vocal.

2 Nivel IV CP I

En una caja metemos una tarjeta etiquetada con un 1, dos con un 2 cada una, tres con un 3 cada una, y así hasta 50 tarjetas con un 50.
En total hemos, pues, metido 1 + 2 + 3 +...+ 50 = 1275 tarjetas. Cogemos un montón de ellas. El mínimo número de tarjetas que debemos coger para garantizar que al menos haya diez tarjetas en las que está escrita la misma etiqueta es:

A) 10 **B)** 51 **C)** 415 **D)** 451 **E)** 521

(C) Una posibilidad de no asegurar que haya 10 tarjetas con la misma etiqueta es coger todas las numeradas del 1 al 9 y 9 de cada una de las numeradas del 10 al 50, es decir, $1 + 2 + 3 + ... + 9 + 9 \cdot 41 = 414$. Así pues, si cogemos 415 tarjetas hemos asegurado que al menos hay 10 escritas con la misma etiqueta.

3 Nivel IV CP II

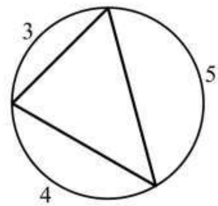
Antonio y Beatriz empiezan a trabajar el mismo día. El horario de Antonio consiste en tres días de trabajo y uno de descanso mientras que Beatriz trabaja siete días seguidos y luego descansa tres días seguidos. En los 1000 primeros días de trabajo, ¿cuántos días coinciden en el descanso?

A) 48 **B)** 50 **C)** 72 **D)** 75 **E)** 100

(E) Antonio descansa los días 4, 8, 12,..., es decir los días múltiplo de 4. Beatriz descansa los días 8, 9, 10, 18, 19, 20, 28, 29, 30, etc.
Así pues, entre otros, Beatriz descansa los múltiplos de 10 y como Antonio descansa los múltiplos de 4, coincidirán en los días múltiplos de 20, ya que mcm (4, 10) = 20. Por otra parte, Beatriz descansa los múltiplos de 10 menos 2 que son múltiplos de 4 alternativamente (es decir, uno de cada dos). Los días impares que descansa Beatriz nunca coincidirán con días de descanso de Antonio.
En total, hay 50 múltiplos de 20 y 100 múltiplos de 10 menos 2, por lo que el número total de días de coincidencia en el descanso será 50 + 50 = 100.

4 Nivel IV CP II

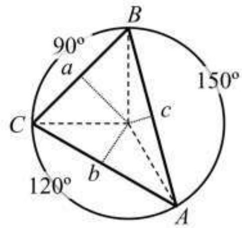
Los arcos que determinan los vértices del triángulo de la figura tienen longitudes 3, 4 y 5. ¿Cuál es el área del triángulo?



A) 6 **B)** $\frac{18}{\pi^2}$ **C)** $\frac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}-1)$

D) $\frac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}+3)$ **E)** Falta información.

(D) Una forma cómoda de resolver el problema pasa por determinar, en primer lugar, los ángulos centrales que subtienden estos arcos. Como el valor del ángulo central es proporcional al arco que determina, sigue que son:



$3\cdot\frac{360}{12}$, $4\cdot\frac{360}{12}$ y $5\cdot\frac{360}{12}$ con lo que los ángulos del triángulo serían en cada caso la mitad, es decir 45º, 60º y 75º. Así pues, el ángulo central desde el que se ve el arco de longitud 3 es de 90º, por lo que $\frac{2\pi r}{4}=3\Rightarrow r=\frac{6}{\pi}$ y el problema se reduce a hallar el área de un triángulo de ángulos 45º, 60º y 75º, inscrito en un círculo de radio $\frac{6}{\pi}$.

$$\operatorname{sen}60^\circ=\frac{\frac{b}{2}}{\frac{6}{\pi}}\Rightarrow b=2\cdot\frac{6}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{6\sqrt{3}}{\pi};\quad \operatorname{sen}45^\circ=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{6}{\pi}}\Rightarrow a=2\cdot\frac{6}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{6\sqrt{2}}{\pi}$$

El área es:

$$\mathrm{A}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\operatorname{sen}\hat{C}=\frac{1}{2}\cdot\frac{6\sqrt{3}}{\pi}\cdot\frac{6\sqrt{2}}{\pi}\cdot\operatorname{sen}75^\circ=\frac{18}{\pi^2}\sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{9}{\pi^2}(3+\sqrt{3})$$

5 Nivel IV CP III

Dos velas son de diferente longitud y grosor. La más larga dura 7 horas ardiendo y la más corta 10 horas. Si después de 4 horas ardiendo, las dos velas tienen igual longitud, ¿cuál es el cociente entre las longitudes de ambas?

A) $\frac{7}{10}$ **B)** $\frac{3}{5}$ **C)** $\frac{4}{7}$ **D)** $\frac{5}{7}$ **E)** $\frac{2}{3}$

(D) Llamando l_1 a la longitud de la vela larga y l_2 a la otra, al cabo de 4 horas se habrá consumido $\frac{4l_1}{7}$ en la primera **y** $\frac{4l_2}{10}$ en la segunda, por lo que las longitudes que quedaron son $\frac{3l_1}{7}$ y $\frac{3l_2}{5}$. Como nos dicen que $\frac{3l_1}{7}=\frac{3l_2}{5}$, sigue que $\frac{l_2}{l_1}=\frac{5}{7}$.

6 Nivel IV CP III

Algunos de los animales que hay en Madrid están realmente locos. El 10 % de los gatos se creen que son perros y el 10 % de los perros se creen que son gatos. Todos los demás, perros y gatos, son perfectamente normales. Un día hicimos un test a todos los perros y gatos de Madrid y resultó que el 20% del total se creían que eran gatos. ¿Qué porcentaje del total de gatos y perros de Madrid son realmente gatos?

A) 12,5 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 22 **E)** 22,5

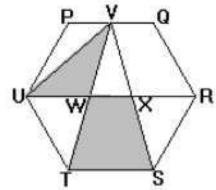
(A) Hay g gatos y p perros en Madrid y nos piden $\frac{g}{g+p}$.

Se creen que son gatos $\frac{90}{100}g+\frac{10}{100}p$ que supone $\frac{20}{100}(g+p)$.

Así pues, $9g+p=2g+2p$, es decir, $7g=p$, por lo que $\frac{g}{g+p}=\frac{g}{8g}=\frac{1}{8}=12{,}5$ %.

7 Nivel IV CP IV

En el hexágono regular $PQRSTU$ de la figura, V es el punto medio de PQ, y W y X son los puntos que se señalan.



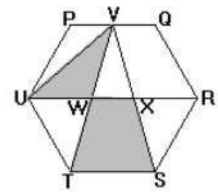
¿Cuánto vale $\dfrac{\text{Área } WXST}{\text{Área } UVW}$?

A) 2 **B)** 3 **C)** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

D) $\sqrt{3}$ **E)** $\sqrt{2}$

(A) Llamando 1 al lado del hexágono, $WX = \dfrac{1}{2}$ por lo que $UW = \dfrac{1}{2}\left(2 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$.

Como el segmento perpendicular bajado desde V a TS mide la altura sobre la base UW del triángulo más la altura del trapecio, ambas iguales, el cociente pedido será la suma de las bases del trapecio entre la base del triángulo, es decir, $\left(1 + \dfrac{1}{2}\right) \div \dfrac{3}{4} = 2$.



8 Nivel IV CP IV

La sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ verifica que $a_1 = 19$, $a_{2000} = 99$ y para $n \geq 3$, a_n es la media aritmética de los $n - 1$ primeros términos. ¿Cuál es el valor de a_2?

A) 29 **B)** 59 **C)** 79 **D)** 99 **E)** 179

(E) Si en una sucesión, a partir del tercer término cada uno es la media aritmética de los anteriores, la sucesión verifica que $a_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}$ y

$$a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n}{n} = \frac{(n-1)a_n + a_n}{n} = a_n,$$

por lo que la sucesión a partir del tercer término es constante.

Así pues, $a_3 = a_{2000} = 99$ y $99 = \dfrac{19 + a_2}{2}$, de donde $a_2 = 179$.

9 Nivel IV CP V

¿Cuántos enteros positivos de dos cifras son menores que el producto de sus cifras?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 45

(A) Si $10a + b$ ($a \neq 0$) es el número pedido y ab el producto de sus cifras, tenemos que $10a + b - ab = a(10 - b) + b$ que nunca será negativo, por lo que no habrá ningún número de dos cifras menor que el producto de sus cifras.

10 Nivel IV CP V

Si $\operatorname{tg} x = \dfrac{2ab}{a^2 - b^2}$ con $a > b > 0$ y $0^\circ < x < 90^\circ$, sen x es igual a:

A) $\dfrac{a}{b}$ **B)** $\dfrac{b}{a}$ **C)** $\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2a}$ **D)** $\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2ab}$ **E)** $\dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$

PRIMERA SOLUCIÓN

(E) Sabemos que $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \dfrac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2ab}{a^2 - b^2}$, igualdad que se da si $\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ y $\operatorname{sen}\dfrac{x}{2} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, (observar que a, $b > 0$) por lo que $\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$.

SEGUNDA SOLUCIÓN

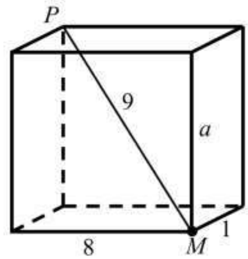
(E) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ y $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

Así pues, $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{\left(\dfrac{2ab}{a^2 - b^2}\right)^2}{1 + \left(\dfrac{2ab}{a^2 - b^2}\right)^2} = \dfrac{4a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2}$, con lo que al ser a y b positivos, es $\operatorname{sen} x = \dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$.

11 Nivel IV CP VI

Dos paredes de una habitación y el techo se juntan en ángulo recto en un punto P. Una mosca está en el aire a 1 m de una pared, 8 m de la otra y a 9 m del punto P. ¿A qué distancia, en metros, está del techo?

A) $\sqrt{13}$ **B)** $\sqrt{14}$ **C)** $\sqrt{15}$ **D)** 4 **E)** $\sqrt{17}$



(D) Con los datos conocidos podemos colocar la mosca en el vértice de un ortoedro del que conocemos la longitud de la diagonal, 9 m, y la de dos aristas, 1 m y 8 m.
Entonces, si llamamos a, a la longitud de la otra arista, se tiene que $9^2 = 1^2 + 8^2 + a^2 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$ m.

12 Nivel IV CP VI

En una caja hay 1001 bolas blancas y 1001 bolas negras. Si P_1 es la probabilidad de que al coger dos bolas al azar sean del mismo color y P_2 la probabilidad de que sean de diferente color, entonces $P_2 - P_1$ es igual a:

A) 0 **B)** $\frac{1}{2002}$ **C)** $\frac{1}{2001}$ **D)** $\frac{2}{2001}$ **E)** $\frac{1}{1000}$

(C) $P_1 = 2\cdot\frac{1001}{2002}\cdot\frac{1000}{2001} = \frac{1000}{2001}$ y $P_2 = 2\cdot\frac{1001}{2002}\cdot\frac{1001}{2001} = \frac{1001}{2001}$

Por lo tanto $P_2 - P_1 = \frac{1001}{2001} - \frac{1000}{2001} = \frac{1}{2001}$.

13 Nivel IV CP VII

Cada una de las afirmaciones siguientes puede ser verdadera o falsa.

1. Las afirmaciones 3 y 4 son ambas verdaderas.
2. Las afirmaciones 4 y 5 no son ambas falsas.
3. La afirmación 1 es verdadera.
4. La afirmación 3 es falsa.
5. Las afirmaciones 1 y 3 son ambas falsas.

¿Cuántas afirmaciones de estas cinco son verdaderas?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

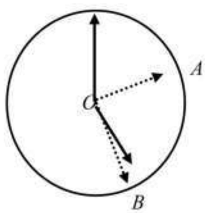
(D) Las afirmaciones 1, 3 y 4 se contradicen mutuamente. Si 1 fuese verdadera también deberían serlo 3 y 4, que es contradictorio. Luego 1 es falsa. Y entonces 3 también es falsa, lo que hace que 4 sea verdadera. Las afirmaciones 2 y 5 son verdaderas. Por tanto hay tres afirmaciones verdaderas, la 2, la 4 y la 5.

14 Nivel IV CP VII

Después de las cinco de la mañana, ¿cuánto tiempo, expresado en horas, debe pasar para que la aguja de los minutos y la de las horas de un reloj formen entre sí, por primera vez, un ángulo recto?

A) $\frac{1}{5}$ **B)** $\frac{2}{11}$ **C)** $\frac{5}{22}$ **D)** $\frac{4}{23}$ **E)** $\frac{7}{30}$

(B) A las 5 de la mañana, las agujas del reloj forman un ángulo de 150º. Como la aguja de las horas recorre 30º en 60 minutos y la de los minutos 360º en ese tiempo, al cabo de t minutos recorrerán $\frac{t^{\circ}}{2}$ y $6t^{\circ}$ respectivamente.



Nos piden calcular t para que el ángulo $A\hat{O}B$ sea de 90º. Así pues, $\frac{t}{2} + 150 - 6t = 90$, que nos conduce a $t = \frac{120}{11}$ minutos, es decir, $\frac{2}{11}$ horas.

15 Nivel IV CP VIII

El menor entero positivo n para el que $10^n - 1$ es múltiplo de 63 es:

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

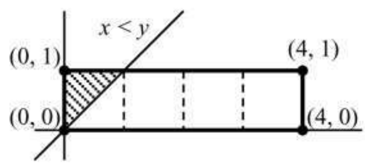
(C) Como $10^n - 1$ es múltiplo de 9 para cualquier entero positivo n, bastará hallar el menor entero positivo n para el que $10^n - 1$ sea múltiplo de 7 y lo más cómodo es ir dividiendo 99 … 9 entre 7 hasta obtener un resto 4 (pues en el paso siguiente obtendríamos resto cero, 49 : 7 = 7) y eso tiene lugar para 99999 por lo que habría un 9 más, es decir, la respuesta es $n = 6$.

16 Nivel IV CP VIII

Elegimos al azar un punto (x, y) del rectángulo de vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 1)$ y $(0, 1)$. ¿Cuál es la probabilidad de que x sea menor que y?

A) $\frac{1}{8}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{3}{8}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{3}{4}$.

(A) El punto (x, y) verificará $x < y$ sólo si está en la zona rayada, y como el área de esta es $\frac{1}{2}$ y el área del rectángulo es 4, la probabilidad pedida es $\frac{1}{8}$.



17 Nivel IV CP IX

Si x e y son los números complejos dados por $x = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ¿cuál de las siguientes afirmaciones no es verdadera?

A) $x^5 + y^5 = -1$ **B)** $x^7 + y^7 = -1$ **C)** $x^9 + y^9 = -1$ **D)** $x^{11} + y^{11} = -1$ **E)** $x^{13} + y^{13} = -1$

(C) Si escribimos los complejos en forma polar:

$$x = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = 1_{\frac{2\pi}{3}} \qquad y = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = 1_{\frac{4\pi}{3}}$$

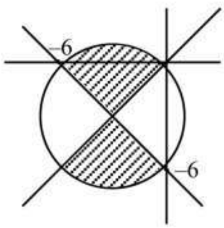
$$x^9 + y^9 = 1^9_{9\cdot\frac{2\pi}{3}} + 1^9_{9\cdot\frac{4\pi}{3}} = 1_{6\pi} + 1_{12\pi} = 1 + 1 = 2 \neq -1$$

18 Nivel IV CP IX

Sea $f(x)=x^2+6x+1$ y T el conjunto de los puntos (x, y) tales que $f(x)+f(y)\le 0$ y $f(x)-f(y)\le 0$. El entero más próximo al valor del área del recinto determinado por el conjunto T, es:

A) 21 **B)** 22 **C)** 23 **D)** 24 **E)** 25

(E) Por las condiciones dadas, tenemos que
$f(x)+f(y)=x^2+6x+1+y^2+6y+1=(x+3)^2+(y+3)^2-16\le 0.$
Además $f(x)-f(y)=x^2-y^2+6(x-y)=(x-y)(x+y+6)\le 0$. Así pues, al ser T el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen simultáneamente las dos desigualdades dadas, tenemos que T es la intersección de los conjuntos



$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ (x+3)^2+(y+3)^2\le 16\}$ y

$$B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ \begin{matrix} x-y\ge 0\\ \text{y}\\ x+y+6\le 0\end{matrix}\quad \text{o}\quad \begin{matrix} x-y\le 0\\ \text{y}\\ x+y+6\ge 0\end{matrix}\right\}$$

donde A es el interior de un círculo y B una región del plano determinado por rectas perpendiculares.

Al dibujar el conjunto T nos encontramos con que T está formado por dos cuartos de círculo de radio 4 por lo que su área será

$\frac{1}{2}\pi\cdot 4^2=8\pi\approx 25{,}13$ con lo que la respuesta será E.

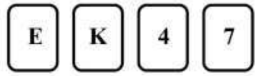
19 Nivel IV CP X

La suma de 49 números enteros consecutivos es 7^5. ¿Cuál es su mediana?

A) 7 **B)** 7^2 **C)** 7^3 **D)** 7^4 **E)** 7^5

(C) La suma de n números enteros consecutivos, siendo n impar, es $S_n=\text{Me}\cdot n$, donde Me es el valor central de la serie. Como $S_n=7^5$ y $n=49$, $\text{Me}=\dfrac{7^5}{49}=7^3$.

20 Nivel IV CP X



Cada una de estas cartas tiene una letra en una cara y un número en la otra cara. Pedro dice: *"En cualquiera de estas cartas se verifica que como tenga una vocal por una cara, tiene un número par por la otra"*. ¿A cuántas cartas como mínimo tiene que darles la vuelta Alicia para comprobar que Pedro dice la verdad?

A) Ninguna **B)** Una **C)** Dos **D)** Tres **E)** Cuatro

(C) Si Alicia da la vuelta a la carta E y observa que por detrás hay un número par y da la vuelta a la carta 7 y observa que por detrás no hay una vocal, ha comprobado que Pedro dice la verdad pues por detrás de las cartas K y 4 puede haber cualquier número y cualquier letra respectivamente, que no va a influir en la veracidad de lo dicho por Pedro. Por tanto, Alicia tiene que dar la vuelta, como mínimo, a dos cartas, la E y la 7.

21 Nivel IV CP XI

¿Cuántos "martes y 13" puede haber como mucho en un año?

A) Uno **B)** Dos **C)** Tres **D)** Cuatro **E)** Cinco

(C) En la tabla adjunta, llamamos diferencial semanal a la diferencia entre los días de la semana correspondientes a días del mes con el mismo número. Y este número es el número que sobrepasa a 28 (múltiplo de 7) el número de días del mes anterior. Por ejemplo, el diferencial semanal de febrero es tres porque el 12 de febrero cae tres días de la semana después que el correspondiente al 12 de enero. Y es así porque enero tiene 31 días (28 + 3). Los meses que tienen el mismo número-módulo 7 coinciden el número de día del mes con el día de la semana. Así en febrero, marzo y noviembre coinciden el número de día y de semana. Igual ocurre con enero y octubre, abril y julio y septiembre y diciembre. Los meses de mayo, junio y agosto no coinciden con ningún otro mes del año. Si el 13 de febrero fue martes, hay otros dos "treces" que caen en martes: marzo y noviembre, y éste es el número máximo de "martes y 13" que puede haber en un año.

Si el año es bisiesto, el máximo número de meses coincidentes también es tres, en este caso, enero, abril y julio.

Mes	Nº de días	Diferencial semanal		Diferencial semanal acumulado		Módulo 7	
		Normal	Bisiesto	Normal	Bisiesto	Normal	Bisiesto
Enero	31	–	–	–	–	0	**0**
Febrero	28/29	3	3	3	3	**3**	3
Marzo	31	0	1	3	4	**3**	4
Abril	30	3	3	6	7	6	**0**
Mayo	31	2	2	8	9	1	2
Junio	30	3	3	11	12	4	5
Julio	31	2	2	13	14	6	**0**
Agosto	31	3	3	16	17	2	3
Septiembre	30	3	3	19	20	5	6
Octubre	31	2	2	21	22	0	1
Noviembre	30	3	3	24	25	**3**	4
Diciembre	31	2	2	26	27	5	6

22 Nivel IV CP XI

Nadal y Federer juegan en tierra batida un partido a 3 sets, es decir, vence quien gana 2 sets. Si la probabilidad que tiene Nadal de ganar cada set es un 60 %, ¿qué probabilidad tiene Nadal de salir victorioso en el partido?

A) 0,6 **B)** 0,648 **C)** 0,504 **D)** 0,36 **E)** 0,75

(B) Nadal gana el partido en cualquiera de estas situaciones: NN, NFN o FNN representando por N o F que Nadal o Federer ganen un set.

Así pues, la probabilidad de que Nadal gane el partido es

$$p = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \frac{2}{5} \cdot 2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \frac{9}{5} = \frac{81}{125} = 0{,}648\ .$$

23 Nivel IV CP XII

¿Cuáles son las dos últimas cifras de 51^{48}?

A) 81 **B)** 61 **C)** 41 **D)** 21 **E)** 01

(E) $$51^{48} = (50+1)^{48} = \binom{48}{0}50^{48} + \binom{48}{1}50^{47} + \ldots + \binom{48}{46}50^2 + \binom{48}{47}50 + \binom{48}{48}.$$

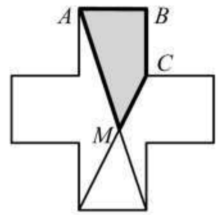
De todos los términos de este desarrollo, los únicos que pueden influir en las dos últimas cifras del resultado son los dos últimos, ya que los anteriores tienen un factor potencia de 10 con exponente mayor o igual que 2:

$$\binom{48}{47}50 + \binom{48}{48} = 48 \cdot 50 + 1 = 2400 + 1 = 2401$$

Así pues, lo que las dos últimas cifras de 51^{48} son 01.

24 Nivel IV CP XII

Los doce lados del polígono de la figura son de igual longitud, 4, y cualesquiera dos consecutivos se cortan en ángulo recto. ¿Cuál es el área del cuadrilátero $ABCM$?

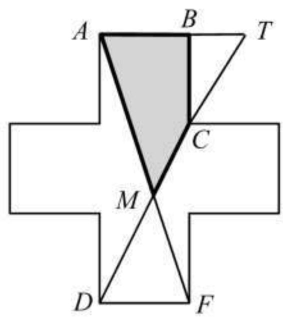


A) $\frac{44}{3}$ **B)** 16 **C)** $\frac{88}{5}$

D) 20 **E)** $\frac{62}{3}$

(C) Prolongando MC hasta cortar a la prolongación de AB en T, tenemos que el triángulo BCT es semejante al ADT con razón de semejanza $\frac{BC}{AD}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ por lo que, llamando $BT = x$, es $4 + x = 3x$, $x = 2$ y $AT = 6$.

Por otra parte, los triángulos ATM y MDF son semejantes con razón de semejanza $\frac{AT}{DF}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$, de donde, llamando h a la altura de MDF trazada desde M, es $h+\frac{3}{2}h=12$, $h=\frac{24}{5}$.



Área MDF = $\frac{48}{5}$; Área ATM = $\frac{48}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{108}{5}$;

Área sombreada = $\frac{108}{5}-4=\frac{88}{5}$.

25 Nivel IV CP XIII

¿Cuál es el valor del ángulo agudo de un rombo de lado c, si c es media geométrica de las diagonales?

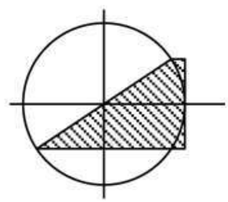
A) 15º **B)** 30º **C)** 45º **D)** 60º **E)** 75º

(B) Sean a y b las diagonales y c el lado del rombo. Como c es media geométrica de a y b, tenemos que $c^2 = a \cdot b$. Aplicando el teorema de Pitágoras,

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 4ab$ Dividiendo esta expresión entre $a \cdot b$, tenemos $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 4$. Pero $\frac{a}{b}$ es la tangente del ángulo mitad del ángulo agudo del rombo, por tanto, $\text{tg}\alpha + \frac{1}{\text{tg}\alpha} = 4$, y de aquí, $\text{tg}\alpha = 2 \pm \sqrt{3}$. Como α es menor que 45º, tg α es menor que 1, por tanto tg α = $2-\sqrt{3}$, y $\alpha = 15^\circ$. El ángulo agudo del rombo es el doble, es decir 30º.

26 Nivel IV CP XIII

La figura muestra una circunferencia de radio 1 y un trapecio rectángulo cuyas bases son paralelas al eje horizontal, un lado es tangente a la circunferencia y el otro es un diámetro de la misma. Si el ángulo que forma este lado con la base mayor es α, el área de dicho trapecio es:

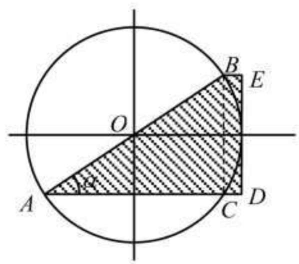


A) 2 sen α **B)** 2 sen² α **C)** 2 tg α

D) $2\text{sen}\alpha(2+\cos\alpha)$ **E)** sen 2α

(A) Dividiendo el trapecio como indica la figura, resulta que al ser AB un diámetro, el área del triángulo ABC será $\text{Área} = \frac{1}{2} 2\cos\alpha \cdot 2\text{sen}\alpha$, y el área del rectángulo $BCDE$ será $(1-\cos\alpha)\cdot 2\text{sen}\alpha$, con lo que el área del trapecio será:

$\cos\alpha \cdot 2\text{sen}\alpha + (1-\cos\alpha)\cdot 2\text{sen}\alpha = 2\text{sen}\alpha$.



27 Nivel IV CP XIV

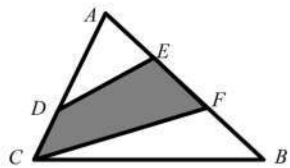
Uno de los números complejos z que verifican el sistema $\begin{cases} z \cdot t = 6_{60^\circ} \\ \dfrac{z}{t} = 3_{30^\circ} \end{cases}$ es:

A) $2+2\sqrt{3}\,i$ **B)** $2\sqrt{3}-2i$ **C)** $3+3\,i$ **D)** $2+2\,i$ **E)** $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$

(C) Como $\begin{cases} z \cdot t = 6_{60^\circ} \\ \dfrac{z}{t} = 3_{30^\circ} \end{cases} \Rightarrow z^2 = 6_{60^\circ} \cdot 3_{30^\circ} = 18_{90^\circ} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 3\sqrt{2}_{\,45^\circ} = 3+3i \\ z_2 = 3\sqrt{2}_{\,225^\circ} = -3-3i \end{cases}$

28 Nivel IV CP XIV

En la figura que te mostramos, el área del triángulo ABC es 9, DC es un tercio de AC y los puntos E y F dividen a AB en tres partes iguales. ¿Cuál es el área del cuadrilátero sombreado?



A) 3 **B)** 4 **C)** 4,5

D) 5 **E)** 6

(B) $A_{CBF} = \dfrac{1}{3} A_{ABC} = 3$ porque tiene la misma base que el triángulo ABC y un tercio de su altura. Por otro lado, $A_{ADE} = \dfrac{2}{9} A_{ABC} = 2$ porque su base es dos tercios de la base del triángulo ABC y su altura un tercio de la altura del triángulo ABC.
El área del cuadrilátero es $9-3-2=4$.

29 Nivel IV CP XV

¿En cuántos ceros termina el producto de los 2011 primeros números primos?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

(B) En el producto de los 2011 primeros primos sólo hay un 2 y un 5. Por tanto sólo hay un 0 en el final del producto.

30 Nivel IV CP XV

Si $f(11)=11$ y $f(n+3)=\dfrac{f(n)-1}{f(n)+1}$, $f(2012)$ es:

A) 11 **B)** $\dfrac{5}{6}$ **C)** $-\dfrac{6}{5}$ **D)** $-\dfrac{1}{11}$ **E)** 2011

(C) En primer lugar observamos que 2012 es el 668º término de una progresión aritmética que comienza en 11 y tiene diferencia 3: $2012 = 11 + 667 \cdot 3$.

Por otro lado, $f(11)=11$; $f(14)=\dfrac{5}{6}$; $f(17)=-\dfrac{1}{11}$; $f(20)=-\dfrac{6}{5}$; $f(23)=11; ...$

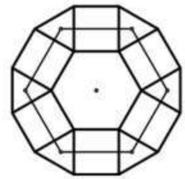
Esto implica que si a_n es un término de la progresión aritmética. 11, 14, 17, 20, …

$$f(a_n)=\begin{cases} \dfrac{11}{5} & \text{si } \ n=4k-3 \\ \dfrac{5}{6} & \text{si } \ n=4k-2 \\ -\dfrac{1}{11} & \text{si } \ n=4k-1 \\ -\dfrac{6}{5} & \text{si } \ n=4k \end{cases} \qquad (k\in N)$$

Como $2012 = a_{668}$ y $668 = 4\cdot 167$, entonces $f(2012)=-\dfrac{6}{5}$.

31 Nivel IV CP XVI

Hemos rodeado el hexágono regular central de la figura con cuadrados y triángulos equiláteros. Si el lado de ese hexágono mide 2 cm, ¿cuál es el área, en cm^2, del hexágono regular cuyos vértices son los centros de los triángulos equiláteros?



A) $18+6\sqrt{3}$ **B)** $24+3\sqrt{3}$ **C)** $12+8\sqrt{3}$

D) 24 **E)** $6+12\sqrt{3}$

(C) La relación entre la apotema y el lado de un hexágono regular es la misma que entre la altura y el lado de un triángulo equilátero, esto es, $\cos 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

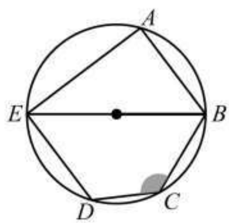
Obsérvese que en la figura, la apotema del hexágono grande es una unidad mayor que la del pequeño. Como sabemos el lado del hexágono pequeño, podemos calcular el lado y la apotema del grande.

$A_P = L_P \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ y por tanto $A_G = A_P + 1 = \sqrt{3}+1$, así que $L_G = \dfrac{2}{\sqrt{3}} A_G = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot (\sqrt{3}+1)$. Luego el área del hexágono es:

$$\frac{1}{2}\text{Perímetro} \cdot \text{Apotema} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot L_G \cdot A_G = 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (\sqrt{3}+1) \cdot (\sqrt{3}+1) =$$

$$= 2\sqrt{3} \cdot (3 + 2\sqrt{3} + 1) = 8\sqrt{3} + 12 \text{ cm}^2.$$

32 Nivel IV CP XVI



En la circunferencia de diámetro *EB* las cuerdas *AB* y *ED* son paralelas. Si el cociente entre la medida de los ángulos $A\hat{E}B$ y $A\hat{B}E$ es $\dfrac{4}{5}$, ¿cuál es la medida del ángulo $B\hat{C}D$?

A) 120º **B)** 125º **C)** 130º **D)** 135º **E)** 140º

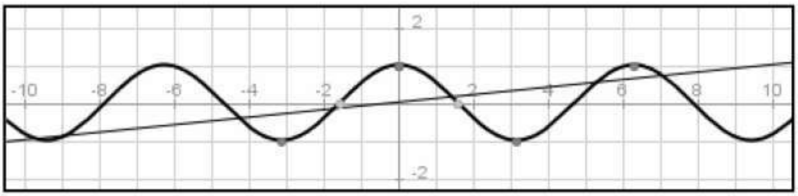
(C) Como el triángulo *ABE* es rectángulo en *A*, entonces los otros dos ángulos, *E* y *B* suman 90º y, como su cociente es 4/5, miden 40º y 50º respectivamente. Como las cuerdas *AB* y *ED* son paralelas, el ángulo $D\hat{E}B$ mide también 50º. Por tanto los arcos *DE, EA* y *AB* suman 80º + 100º + 80º = 260º. Y el ángulo $B\hat{C}D$ mide la mitad de esta suma, es decir, 130º.

33 Nivel IV CP XVII

¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $x = 10\cdot\cos x$?

A) 3 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 10

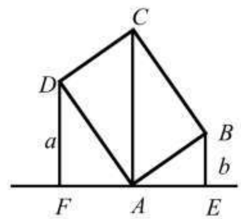
(D) Las soluciones de la ecuación $x = 10\cdot\cos x$ son tantas como puntos de corte tienen las funciones $f(x) = \dfrac{x}{10}$ y $g(x) = \cos x$. Puesto que la imagen de cos x es el intervalo $[-1, 1]$, los puntos de corte han de estar en el intervalo $[-10, 10]$.
Un esbozo de ambas funciones clarifica bastante la situación.



En el intervalo $[-10, 0]$ hay dos intervalos en los que la función cos x es negativa y además en cada uno tiene un mínimo igual a – 1. Estos intervalos son $\left[-10, -\dfrac{5\pi}{2}\right)$ y $\left(-\dfrac{3\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}\right)$ y los mínimos se alcanzan en $-\pi$ y en -3π, por lo que las funciones tendrán cuatro puntos de corte. En el intervalo $(0, 10]$ hay dos intervalos en los que la función cos x es positiva, pero sólo tiene un máximo relativo en 2π que es igual a 1, por lo que las funciones tienen tres puntos de corte.
En total, hay siete puntos de corte.

34 Nivel IV CP XVII

En la figura que observas, $ABCD$ es un rectángulo y los segmentos DF, BE y CA son perpendiculares a la recta FE. Si $DF = a$ y $BE = b$, la longitud FE es:

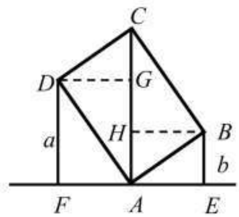


A) $a + b$ **B)** $2\sqrt{ab}$ **C)** $\sqrt{2a^2 + 2b^2}$

D) $\dfrac{2a + 4b}{3}$ **E)** Nada de lo anterior

(B) Trazando las paralelas a EF por los puntos D y B, cortan a AC en G y H, respectivamente. Como $ABCD$ es un rectángulo $FE = DG + HB = 2 \cdot DG$.
Y aplicando el teorema de la altura en el triángulo rectángulo ADC,

$$FE = 2DG = 2\sqrt{AG \cdot GC} = 2\sqrt{AG \cdot AH} = 2\sqrt{a \cdot b}\,.$$



35 Nivel IV CP XVIII

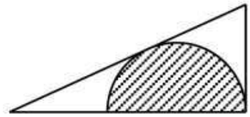
La suma $1 + 2 + 3 + \ldots + n$, de los n primeros enteros positivos, es un número de tres cifras, todas iguales. ¿Cuál es la suma de las tres cifras?

A) 6 **B)** 9 **C)** 12 **D)** 15 **E)** 18

(E) La suma de los n primeros es $S_n = \dfrac{(1+n)\cdot n}{2} = 111k$ siendo $1 \le k \le 9$, entonces $n\cdot(n+1) = 222k$. Factorizando 222 obtenemos que $n\cdot(n+1) = 2\cdot 3\cdot 37\cdot k$, así que tenemos que el producto de n y $n + 1$ (dos números consecutivos) ha de ser múltiplo de 6 y de 37. Solo pueden ser el 36 y 37 $\Rightarrow S_{36} = \dfrac{36\cdot 37}{2} = 666$. Por tanto, la suma de las cifras será 18.

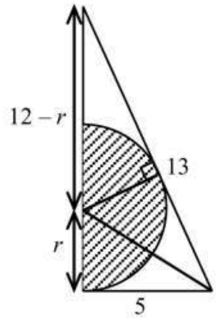
36 Nivel IV CP XVIII

Los lados de un triángulo rectángulo miden 5, 12 y 13. Un semicírculo con centro en el cateto de longitud 12, es tangente al otro cateto y a la hipotenusa. ¿Cuánto mide su radio?



A) $\frac{7}{3}$ **B)** $\frac{10}{3}$ **C)** 4 **D)** $\frac{13}{3}$ **E)** $\frac{17}{3}$

(B) Los triángulos inferiores son iguales, ya que los dos son rectángulos y tienen dos lados iguales, la hipotenusa que es común y el cateto que es el radio de la circunferencia. Así obtenemos que las medidas del triángulo superior son r, 8 y $12-r$. Aplicando Pitágoras concluimos $(12-r)^2 = 8^2 + r^2 \Rightarrow r = \frac{10}{3}$.

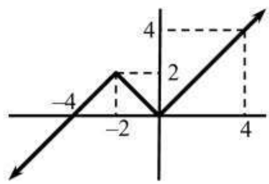


37 Nivel IV CP XIX

Si $y = f(x)$ es la función representada en la figura, ¿cuántas soluciones tiene la ecuación $f[f(f(x))]=0$?

A) 4 **B)** 3 **C)** 2

D) 1 **E)** 0

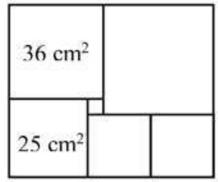


(A) La ecuación $f(x) = k$, con $k \in (0, 2)$ tiene tres soluciones, si $k = 0$ o $k = 2$ tiene dos soluciones y para cualquier otro valor de k, la ecuación tiene una única solución. Así $f[f(f(x))]=0$ tiene dos soluciones para $f(f(x))$, que son 0 y – 4. Ahora $f(f(x))=0$ tiene dos soluciones para $f(x)$, que son $f(x) = 0$ y $f(x) = -4$, mientras que $f(f(x))=-4$ tiene una única solución para $f(x)$, que es $f(x)=-8$. Por último, $f(x) = 0$ tiene dos soluciones para x mientras que $f(x)=-4$ y $f(x) = -8$ tienen una solución cada una. Por tanto, cuatro soluciones:

$$f[f(f(x))]=0 \Rightarrow \begin{cases} f(f(x))=0 \Rightarrow \begin{cases} f(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-4 \end{cases} \\ f(x)=-4 \Rightarrow x=-8 \end{cases} \\ f(f(x))=-4 \Rightarrow f(x)=-8 \Rightarrow x=-12 \end{cases}$$

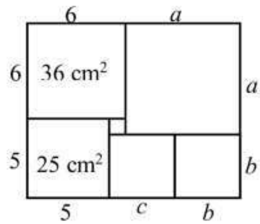
38 Nivel IV CP XIX

Dividimos un rectángulo en seis cuadrados como se muestra en la figura. En ella se muestran las áreas de dos de ellos. ¿Cuál es, en cm, el perímetro de dicho rectángulo?



A) 50 **B)** 44 **C)** 46
D) 52 **E)** 48

D) Nombramos con a, b, c los lados de los cuadrados:

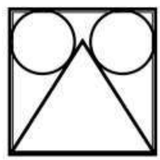


$$\begin{cases} a+b=11 \\ b+c+5=6+a \\ a-6=c-(a-b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \quad =11 \\ -a+b+c=1 \\ 2a-b-c=6 \end{cases}$$

De donde se obtiene $a = 7$, $b = 4$, $c = 4$ y el perímetro pedido mide $2\cdot(6 + 7) + 2\cdot(6 + 5) = 48$ cm.

39 Nivel IV CP XX

La primera imagen de don Retorcido es una caricatura que le hicieron hace 20 años (cuando comenzaron los Concursos de Primavera). Está enmarcada en un cuadrado de 6 dm de lado, la nariz es un triángulo equilátero y cada lente, circular, es tangente a dos lados del marco y a un lado de la nariz. ¿Cuánto mide el radio, en dm, del círculo que representa cada lente?



A) 2 **B)** $\sqrt{2}$ **C)** $\sqrt{3}-\frac{1}{2}$ **D)** $3-\sqrt{3}$ **E)** $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

(D) Prolongando uno de los lados del triángulo equilátero, que no sea el horizontal, hasta que dicha prolongación corte a un lado horizontal del cuadrado, resulta que la hipotenusa del triángulo rectángulo formado, a, viene dada por la igualdad $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{a} \Rightarrow a = 4\sqrt{3}$, así que una de las lentillas está inscrita en el triángulo rectángulo de cateto 6, hipotenusa $4\sqrt{3}$ y el otro cateto $2\sqrt{3}$. El área de dicho triángulo es $\frac{6\cdot 2\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$. Como en cualquier triángulo, el área es $A = \frac{p\cdot r}{2}$, siendo p el perímetro y r el radio del círculo inscrito. Por tanto, tenemos que: $6\sqrt{3} = \frac{6+6\sqrt{3}}{2}\cdot r \Rightarrow r = \frac{6\sqrt{3}}{3+3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2} = 3-\sqrt{3}$ dm.

40 Nivel IV CP XX

Marta tiene ocho sobres numerados del 1 al 8 y ocho tarjetas, numeradas también del 1 al 8. ¿De cuántas formas puede distribuir las tarjetas, una en cada sobre, de forma que ninguna de las tarjetas 1, 2 y 3 esté en el sobre con su misma numeración?

A) 27 240 **B)** 29 160 **C)** 27 360 **D)** 27 600 **E)** 25 200

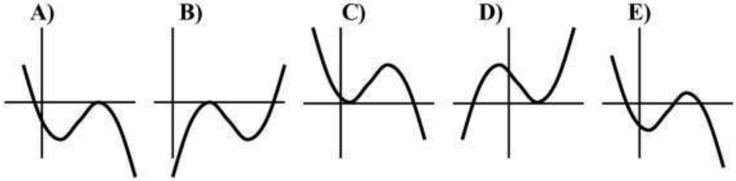
(A) Sin restricciones habría 8! formas de distribuir las tarjetas en los ocho sobres. Habrá que quitar aquellas donde esté bien la tarjeta 1 (7!), la tarjeta 2 (7!) y la tarjeta 3 (7!). Luego añadir aquellas donde están bien la 1 y la 2 (6!), ya que anteriormente las quitamos dos veces; y análogamente con la 1 y la 3 y luego con la 2 y la 3. Por último hay que descontar los ensobrados en los que estén bien las tarjetas 1, 2 y 3 (5!), ya que primero se restaron tres veces y luego se sumaron tres veces. Así que el número de distribuciones posibles es:

$$8!-3\cdot 7!+3\cdot 6!-5!=5!\left(8\cdot 7\cdot 6-3\cdot 7\cdot 6+3\cdot 6-1\right)=5!\cdot 217=27240\ .$$

41 Nivel IV CP XXI

Si $a < b$, ¿cuál de las siguientes gráficas podría ser la de la función $f(x)=(a-x)(b-x)^2$?

A) **B)** **C)** **D)** **E)**

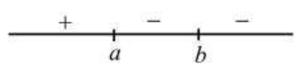


(A) Buscamos algunas de las características de la función $f(x)=(a-x)(b-x)^2$ y así vamos descartando.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$. Por tanto, solo pueden ser A, C o E.

Cortes con el eje X. $(a-x)(b-x)^2=0$, tiene por soluciones $x=a$ y $x=b$. Tendrá dos puntos de corte. Por tanto, solo pueden ser A o C

Estudiamos el signo de la función



Por tanto, es la gráfica A.

42 Nivel IV CP XXI

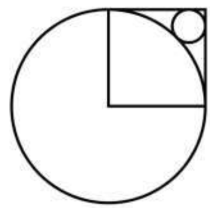
¿Cuál de los siguientes números es el más próximo a $\sqrt{101}-10$?

A) $\frac{1}{16}$ **B)** $\frac{1}{18}$ **C)** $\frac{1}{20}$ **D)** $\frac{1}{22}$ **E)** $\frac{1}{24}$

(C) Para analizar qué número está próximo a $\sqrt{101}-10$, multiplicamos y dividimos por el conjugado. $\frac{(\sqrt{101}-10)(\sqrt{101}+10)}{\sqrt{101}+10}=\frac{101-100}{\sqrt{101}+10}=\frac{1}{\sqrt{101}+10}\approx\frac{1}{20}$.

43 Nivel IV CP XXII

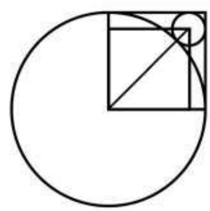
La figura adjunta muestra dos circunferencias tangentes entre sí y un cuadrado de lado 10 cm, con un vértice en el centro de la circunferencia mayor y dos lados tangentes a ambas circunferencias. Si escribimos el radio de la circunferencia menor como $a-b\sqrt{2}$ cm, el valor de $a+b$ es:



A) 30 **B)** 40 **C)** 50

D) 60 **E)** 70

(C) Nos ayudamos del cuadrado interior cuyos vértices opuestos son los centros de las dos circunferencias. El lado de este cuadrado mide $10-r$ y la diagonal mide $10+r$. Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que $(10+r)^2=(10-r)^2+(10-r)^2$, resolviendo esta ecuación de segundo grado obtenemos las soluciones $r_1=30+20\sqrt{2}$ (esta no puede ser ya que el radio de la circunferencia pequeña sería mayor que el de la grande) y $r_2=30-20\sqrt{2}$.



Comparando con el enunciado $a-b\sqrt{2}$, tenemos que $a=30$ y $b=20$.
Por lo tanto $a+b=50$.

44 Nivel IV CP XXII

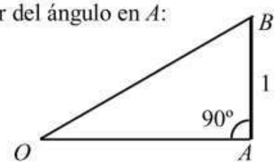
Dos semirrectas que parten de un punto O forman un ángulo de 30º. Los puntos A y B están uno en cada una y $AB = 1$. ¿Cuál es la máxima longitud posible del segmento OB?

A) 1 **B)** $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ **C)** $\sqrt{3}$ **D)** 2 **E)** $\frac{4}{\sqrt{3}}$

(D) Analicemos los posibles casos dependiendo del valor del ángulo en A:

[Caso 1] $O\hat{A}B = 90^o$

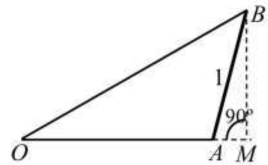
$$\text{sen}30^o = \frac{1}{OB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{OB} \Rightarrow OB = 2$$



[Caso 2] $O\hat{A}B > 90^o$

$$\text{sen}30^o = \frac{BM}{OB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BM}{OB} \Rightarrow OB = 2 \cdot BM$$

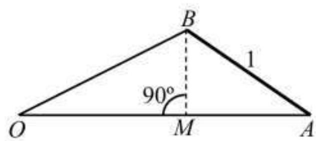
Pero $BM < 1 \Rightarrow OB < 2$



[Caso 3] $O\hat{A}B < 90^o$

$$\text{sen}30^o = \frac{BM}{OB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BM}{OB} \Rightarrow OB = 2 \cdot BM$$

Pero $BM < 1 \Rightarrow OB < 2$



Por tanto, la longitud máxima posible del segmento OB es 2.

45 Nivel IV CP XXIII

En cada vértice de un pentágono escribimos un número entero, de modo que la suma de los números de dos vértices contiguos no sea un múltiplo de tres, y tampoco lo sea la suma de los números de tres vértices consecutivos. De los cinco números escritos, ¿cuántos son, necesariamente, múltiplos de 3?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** Ninguno

(B) Considerando las clases módulo 3 de los números que colocamos en cada vértice, estos solo pueden ser 0, 1 o 2. Las condiciones son que no sea múltiplo de 3 la suma de dos contiguos ni la suma de tres consecutivos. Por tanto, no pueden ir contiguos ni 1 y 2 ni dos 0. Además, tampoco pueden ir consecutivos tres 1, tres 2 ni 0, 1 y 2. Según esto, entonces:

- ❖ Si en un vértice cualquiera colocamos un 0, a sus lados pueden ir:
  - Dos 1, y entonces los otros dos deben ser un 1 y un 0.
  - Un 1 y un 2, y entonces los otros dos deben ser un 1 y un 0 respectivamente o un 0 y un 2.
  - Dos 2, y entonces los otros dos deben ser un 2 y un 0.

En todos los casos es necesario colocar exactamente dos 0

- ❖ Si en un vértice cualquiera colocamos un 1, a sus lados deben ir un 1y un 0, y al lado del segundo 1 necesariamente un 0. El quinto debe ser un 1 o un 2. De modo que necesitamos colocar exactamente dos 0.
- ❖ Si colocamos un 2, a sus lados pueden ir:
  - Un 2 y un 0, y entonces, al lado del segundo 2 necesariamente debemos colocar un 0, y el 5º puede ser un 1 o un 2, pero no un 0.
  - O también podemos colocar dos 0, pero entonces los otros dos vértices deben contener sendos 2.

En cualquier caso, hay que colocar exactamente dos múltiplos de 3.

46 Nivel IV CP XXIII

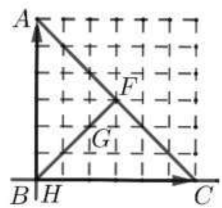
Sean a, b, c, f, g y h los números complejos cuyos afijos son los vértices de un triángulo ABC, su circuncentro F, su baricentro G y su ortocentro H, respectivamente. Entonces:

A) $a + b + c = 3h$ **B)** $2(a + b + c) = 3(f + h)$ **C)** $a + b + c = 2f + h$

D) $2(a + b + c) = 3$ **E)** $f + h = 2g$

PRIMERA SOLUCIÓN

(C) Si desconocemos la recta de Euler o simplemente queremos contestar cuál es la opción correcta, elegimos unos números complejos cuyos afijos determinan un triángulo fácil de manejar.



$a = 0 + 2i$, $b = 0 + 0i$ y $c = 2 + 0i$ cuyos afijos son $A(0, 2)$, $B(0, 0)$ y $C(2, 0)$.

Su circuncentro, por tratarse de un triángulo rectángulo isósceles, es el punto medio de su hipotenusa, $F(1,1)$, su baricentro $G\left(\dfrac{0+0+2}{3}, \dfrac{2+0+0}{3}\right) = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ y su ortocentro $H(0, 0)$.

Calculamos la suma $a + b + c$ que aparece en todas las respuestas.

$a + b + c = (0 + 2i) + (0 + 0i) + (2 + 0i) = 2 + 2i$

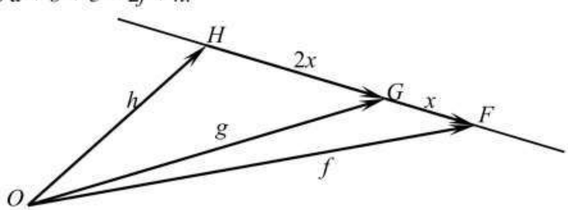
$f = 1 + i \Rightarrow 2f = 2 + 2i$ y como $h = 0 + 0i$, entonces $2f + h = 2 + 2i = a + b + c$.

Ninguna de las otras opciones se verifica.

SEGUNDA SOLUCIÓN

(C) Si se conoce la recta de Euler que es la que pasa por: circuncentro, baricentro y ortocentro, con la particularidad de que $HG = 2GF$, entonces, se verifica como muestra la figura, que $\vec{g} = \vec{h} + 2\vec{x}$ y $\vec{f} = \vec{g} + \vec{x}$. Eliminando el vector $\vec{x}$ entre las dos igualdades se concluye que $3\vec{g} = 2\vec{f} + \vec{h}$, es decir, que $3g = 2f + h$.

Y como el baricentro es el afijo de $\dfrac{a+b+c}{3}$ tenemos que $3\dfrac{a+b+c}{3} = 2f + h$ y por lo tanto $a + b + c = 2f + h$.



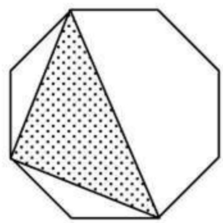
47 Nivel IV CP XXIV

Sea una función f tal que $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$, para cualesquiera enteros a y b.
Si $f(1) = 3$, entonces el valor de $f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$ es:

A) 40 **B)** 81 **C)** 0 **D)** –81 **E)** –40

(A) Empezamos deduciendo el valor de $f(2) = f(1+1) = f(1) \cdot f(1) = 3 \cdot 3 = 9$.
Deducimos ahora el valor de $f(3) = f(2+1) = f(2) \cdot f(1) = 9 \cdot 3 = 27$.
Para acabar obtenemos el valor de $f(0)$ y sumamos los resultados obtenidos.
Como $f(1) = f(0+1) = f(0) \cdot f(1)$ deducimos que $f(0) = 1$.
Por tanto, $f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 1 + 3 + 9 + 27 = 40$.

48 Nivel IV CP XXIV



En un octógono regular he formado un triángulo uniendo tres vértices al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un lado del triángulo sea también un lado del octógono?

A) $\frac{1}{7}$ **B)** $\frac{3}{8}$ **C)** $\frac{1}{2}$

D) $\frac{5}{7}$ **E)** $\frac{11}{14}$

(D) El número total de triángulos que se pueden formar es $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56$. El número de triángulos que se pueden formar compartiendo dos lados del octógono es 8; y el número de triángulos que se pueden formar compartiendo sólo un lado del octógono son $8 \cdot 4 = 32$; (si elegimos un lado, de un total de ocho, para el tercer vértice sólo hay cuatro posibilidades). No puede haber un triángulo que comparta los tres lados con los lados del octógono. Así que en total hay $8 + 32 = 40$ triángulos que comparten al menos un lado con los lados del octógono y por tanto la probabilidad pedida es $\frac{40}{56} = \frac{5}{7}$.

49 Nivel IV CP XXV

Venga, ¡¡¡a sumar todos los números enteros positivos y en orden, empezando por el uno!!! Cuando al profesor se le pasó el enfado dijo a sus cinco estudiantes que podían parar y les pidió sus resultados. ¿Qué estudiante realizó bien su suma?

A) 2016 **B)** 2018 **C)** 2020 **D)** 2022 **E)** 2024

(A) La de los n primeros enteros positivos es $S_n = \frac{1+n}{2} \cdot n$. Así pues, $n \cdot (n + 1)$ debe ser igual al doble de una de las cinco posibles respuestas (4032, 4036, 4040, 4044, 4048). La única que lo cumple es $63 \cdot 64 = 2 \cdot 2016$. Y las demás ya no valen porque $64 \cdot 65 = 4160$ supera a todas ellas. La respuesta es 2016.

50 Nivel IV CP XXV

En una liguilla de fútbol con cuatro equipos a doble partido (3 puntos por partido ganado y 1 punto por empate), conocemos las puntuaciones 16, 8 y 2 de tres de ellos. Si sabemos que en total hubo cinco partidos que terminaron con empate, los puntos del cuarto equipo fueron:

A) 7 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 3

(C) La clave está en ver que 16 puntos solo se pueden conseguir con 5 partidos ganados y 1 empatado; 8 puntos (2 ganados y 2 empatados); 2 puntos (2 empatados). Hay tres escenarios posibles:

	A	B	C	D		PTOS
A		A	A	A	A gana 5 y empata 1	16
B	A		B	BD	B gana 2 y empata 2	8
C	A	B		CD	C gana 0 y empata 2	2
D	AD	BD	CD		D gana 0 y empata 5	5

	A	B	C	D		PTOS
A		A	A	A	A gana 5 y empata 1	16
B	A		B	B	B gana 2 y empata 2	8
C	A	BC		C	C gana 2 y empata 1	7
D	AD	BD	C		D gana 0 y empata 2	2

	A	B	C	D		PTOS
A		A	A	A	A gana 5 y empata 1	16
B	A		B	B	B gana 2 y empata 2	8
C	A	BC		CD	C gana 0 y empata 2	2
D	AD	BD	D		D gana 1 y empata 3	6

Como nos aseguran que en total hubo 5 empates, solo es válida la primera opción. Así pues, las puntuaciones fueron 16, 8, 2 y 5.

Comunidad de Madrid

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Consejo Social de la UCM

sm

ANAYA

Smartick

XXVI Concurso de Primavera de Matemáticas

XXVI Concurso de Primavera

MATEMÁTICAS

2023

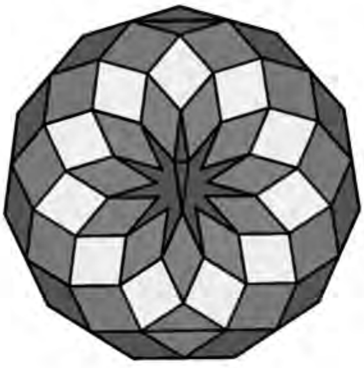
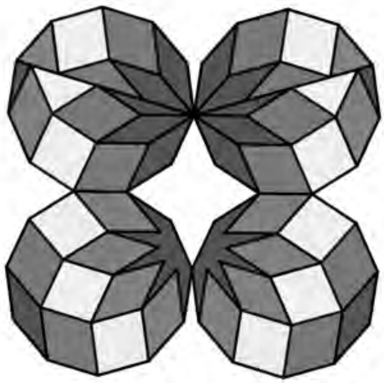
Comunidad de Madrid

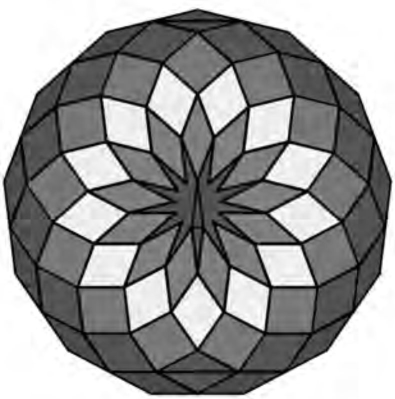
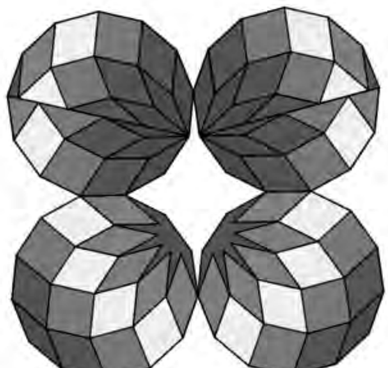



XXVI Concurso de Primavera

MATEMÁTICAS

2023

Comunidad de Madrid

Comité organizador del Concurso de Primavera

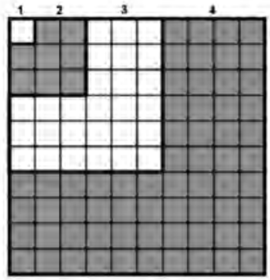
Alzola Bujarrabal, Belén
Baeza Alba, Miguel Ángel
Benito Miguel, Isabel
Castrillón López, Marco
Donaire Moreno, Juan Jesús
Esteban García, María
Ferrero de Pablo, Luis
García Fernández, Roberto
García Gual, Jesús
Gaspar Alonso-Vega, María
González Ortega, Jorge
Martínez Sanz, Alfredo
Miguel Joyanes, Ester de
Montero Estravís, Xiomara
Moreno Warleta, María
Ramírez Carrillo, Carlos
Sánchez Benito, Merche
Sánchez González, Víctor Manuel
Serrano Marugán, Esteban
Soler Areta, Javier
Sordo Juanena, José María

Edita: Asociación Matemática Concurso de Primavera

ISBN: 978-84-608-5881-2

Deposito Legal: M-8301-2017

Como decíamos ayer:



$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$
$$= \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2$$

Y ahora generalizamos:

Escribimos los $(\mathbf{3} + 1) \cdot (\mathbf{1} + 1)$ divisores de $2^{\mathbf{3}} \cdot 3^{\mathbf{1}}$: 1, 2,4, 8, 3, 6, 12, 24, y a continuación el número de divisores de esos divisores:1, 2, 3, 4, 2, 4, 6, 8. Estos ocho números pueden sustituira aquellos 1, 2, …, n de la primera parte de nuestra fórmula primigenia.

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 2 + 4 + 6 + 8)^2 = \left((1 + 2 + 3 + 4) \cdot (1 + 2)\right)^2 = (10 \cdot 3)^2$$
$$(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) + (2^3 + 4^3 + 6^3 + 8^3) = (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) \cdot (1^3 + 2^3)$$
$$= \left(\frac{(\mathbf{3} + 1) \cdot 5}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{(\mathbf{1} + 1) \cdot 3}{2}\right)^2 = 900$$

Hemos generalizado una relación entre la suma de cubos de una serie de números y el cuadrado de la suma de estos (válida para cualquier descomposición factorial de un natural). Y es una generalización porque si la aplicamos a la potencia $(n-1)$ de un primo cualquiera obtenemos la fórmula inicial. (Destaquemos que la generalización se come la cola, ya que en ella solo se emplea una ordenación de los números de divisores y la fórmula de los n primeros cubos).

Presentación

Una disculpa a tiempo puede convertir nuestro error en una errata, y el agradecimiento a los que nos ayudan a hacer del éxito un acierto.

P.D. En el libro de nuestros 25 años adelantamos diez años la aparición del Concurso de Primavera. Realmente nacimos en 1997. Somos así generación Z (imaginativos y complejos).

AGRADECIMIENTOS:

A los participantes en el Concurso, a sus padres y profesores.

A los voluntarios que nos ayudan en la 2ª fase.

A la Facultad de Matemáticas de la UCM.

Al Vicerrectorado de alumnos de la UCM.

A la Subdirección General de Formación del Profesorado de la Dirección General de Innovación, Becas y Ayudas a la Educación de la Consejería de Educación, Juventud y Deporte Comunidad de Madrid

A las editoriales Grupo **ANAYA** y Ediciones **S.M.**

A Smartick.

ÍNDICE

ENUNCIADOS DE LA 1ª FASE

ENUNCIADOS DE LA 2ª FASE

SOLUCIONES

OTROS CONCURSOS

XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel I)

XXV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 9 de febrero de 2022

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** X LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática

Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid

Grupo ANAYA

Grupo SM

McGraw-Hill Education

Smartick

XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel I)

1 La cifra de las décimas del resultado de esta operación $987{,}6 + 54{,}32 + 1{,}098 + 76{,}5$ es:

A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

2 Miguel reparte una bolsa de caramelos con su hermanito Diego. "Uno para ti, dos para mi; uno para ti, tres para mi; uno para ti, cuatro para mi;…" Así, hasta que dijo "uno para ti, ocho para mi" y se acabaron los caramelos de la bolsa. ¿Cuántos caramelos había en la bolsa?

A) 42 **B)** 48 **C)** 52 **D)** 58 **E)** 62

3 En la figura 101, ¿cuál es la diferencia entre el número de cuadrados blancos y cuadrados grises?

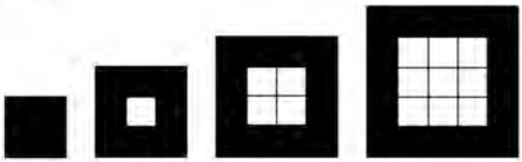


fig. 1 fig. 2 fig. 3 fig. 4

A) 9890 **B)** 9596 **C)** 9401 **D)** 9856 **E)** 8990

4 En la clase de Íñigo doce estudiantes practican tenis y ocho juegan al baloncesto. Tres practican los dos deportes y siete no practican ninguno de estos deportes. ¿Cuántos estudiantes hay en la clase?

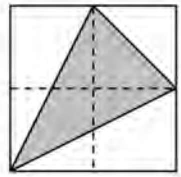
A) 12 **B)** 18 **C)** 24 **D)** 26 **E)** 14

5 "Estoy agotada", dice doña Hormiga. "Esta mañana salí del hormiguero tres veces. La primera caminé 916 cm hacia el norte, encontré comida y la traje al hormiguero. Volví a salir en dirección sur, caminé 63,3 m, encontré comida y la traje al hormiguero. La tercera vez caminé 1025 dm hasta el este, encontré comida y regresé al hormiguero." ¿Qué número aproxima mejor los metros que recorrió doña Hormiga en total?

A) 200 **B)** 350 **C)** 150 **D)** 500 **E)** 400

XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel I)

6 ¿Qué fracción del cuadrado grande representa el triángulo gris?



A) $\frac{4}{7}$ **B)** $\frac{3}{5}$ **C)** $\frac{5}{7}$ **D)** $\frac{4}{9}$ **E)** $\frac{3}{8}$

7 Te enseñamos una tabla de multiplicar y preguntamos.

¿Cuánto vale la suma $A + B + C + D$?

	C	D
A	21	35
B	33	55

A) 30 **B)** 17 **C)** 37 **D)** 26 **E)** 23

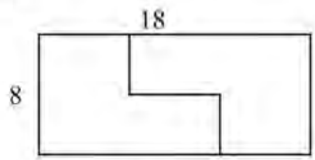
8 Ainhoa y Asier tienen una bolsa con fichas. Ainhoa coge una, Asier coge dos, Ainhoa coge tres, Asier coge cuatro… Cada uno coge una ficha más que el anterior, hasta que Asier coge las últimas. Si Asier acaba con diez fichas más que Ainhoa, ¿cuántas fichas había en la bolsa?

A) 70 **B)** 210 **C)** 72 **D)** 155 **E)** 170

9 Hoy mi tia Lucía y yo cumplimos años. Ella cumple el cuádruple de los años que cumplo yo y dentro de seis años cumplirá el triple de los que cumpliré yo. ¿Cuántos años cumplo hoy?

A) 15 **B)** 11 **C)** 9 **D)** 12 **E)** 6

10 Dividimos un rectángulo de medidas 18×8 cm en dos trozos iguales (como se ve en el dibujo) con los que podemos formar un cuadrado. ¿Cuál es, en cm, el perímetro de este cuadrado?



A) 60 **B)** 56 **C)** 48 **D)** 44 **E)** 40

XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel I)

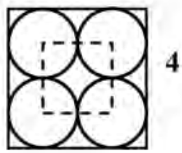
11 Comenúmeros tiene hambre: "Para merendar quiero todos los números de tres cifras formados por cifras impares, que las pares me sientan mal". Como eran muchísimos, decidí darle solo los que la suma de sus cifras es 9. ¿Cuántos números merendó Comenúmeros?

A) 12 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 15 **E)** 10

12 Ya sabéis que la distancia que hay que recorrer en un maratón son 42 km. Ana empezó con muchas ganas y completó un sexto de la carrera en 35 minutos; luego recorrió 8 km en 42 minutos; luego hizo un tercio de lo que le quedaba en 45 minutos; luego tardó una hora en completar los 10 km siguientes. Inmaculada desde la acera le gritó: *¡vamos, Ana, que te queda poco!* ¿Cuántos km le quedaban a Ana para terminar su maratón?

A) 4 **B)** 6 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 12

13 En un cuadrado grande, de 4 cm de lado, hemos dibujado cuatro circunferencias iguales, como ves en la figura. ¿Cuál es el perímetro, en cm, del cuadrado cuyos vértices son los centros de las circunferencias?



A) 8 **B)** 10 **C)** 6 **D)** 12 **E)** 4

14 Don Retorcido es muy retorcido y te pregunta: "¿Cuál es la suma de las cifras del número entre el que tengo que dividir 1350 para que, si al cociente de la división entera le resto 30 me dé lo mismo que si divido 1350 entre 30?".

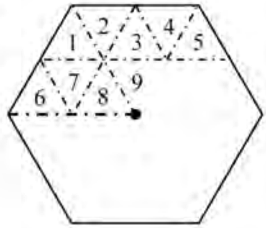
A) 5 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 11

15 Amaia ha colocado tres cartas boca abajo: una sota, un caballo y un rey. Los palos son: oros, copas y espadas, aunque no necesariamente en este orden. Se sabe que el caballo está a la izquierda del oro, y la espada se encuentra entre el rey y la copa. ¿Cuáles son esas tres cartas y en qué orden, de izquierda a derecha, se encuentran?

A) Sota oros – Caballo copas – Rey espadas **B)** Sota espadas – Caballo oros – Rey copas
C) Sota copas – Caballo espadas – Rey oros **D)** Sota oros – Caballo espadas – Rey copas
E) Sota espadas – Caballo copas – Rey oros

XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel I)

16 Dividimos el hexágono regular de área 12 cm^2 de la figura en triángulos equiláteros iguales y los numeramos empezando por el 1 (el dibujo está sin terminar). Si una vez terminado coloreamos todos los triángulos que tengan un número primo, ¿qué área, en cm^2, debemos colorear? ¡Cuidadín, el 1 no es primo!

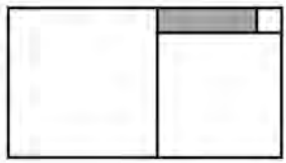


A) 3 **B)** 3,5 **C)** 4 **D)** 4,5 **E)** 5,5

17 Diego empezó a ver una película a las 16:40 y acabó a las 18:05. Si entremedias paró 15 minutos para merendar, ¿cuántos minutos dura la película?

A) 85 **B)** 90 **C)** 70 **D)** 75 **E)** 110

18 Con tres cuadrados y un rectángulo gris hemos formado un rectángulo grande que mide 22 cm de base y 12 cm de altura, como en la figura. ¿Qué área, en cm^2, tiene el rectángulo gris?



A) 16 **B)** 18 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 20

19 La niña Centésima ordena vocales, consonantes y números de la siguiente manera: asocia la primera vocal con la primera consonante y el número 1; luego la segunda vocal con la segunda consonante con el número 2 y así sucesivamente. Cuando agota las cinco vocales vuelve a empezar con la A y lo mismo ocurre cuando agota las veintidós consonantes empieza de nuevo con la B:

AB1, EC2, ID3, OF4, UG5, AH6, … ¿Qué combinación irá con el 2022?

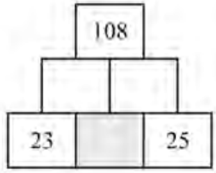
A) EX2022 **B)** EG2022 **C)** AY2022 **D)** EÑ2022 **E)** OK2022

20 Lydia y Sonia se han inventado una operación cada una.
La de Lydia es $aLb = (a + b) \times a$ y así $2L7 = (2 + 7) \times 2 = 18$.
La de Sonia es $aSb = (a - b) : b$ y así $15S3 = (15 - 3) : 3 = 4$.
¿Qué número obtenemos al realizar la operación $(6L24) + (24S6)$?

A) 725 **B)** 185 **C)** 150 **D)** 815 **E)** 183

XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel I)

21 María está numerando los bloques de la pirámide. El número que le corresponde a cada bloque es la suma de los dos que tiene debajo. El número del bloque sombreado es…

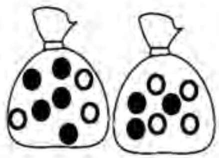


A) 30 **B)** 10 **C)** 4 **D)** 9 **E)** 6

22 Esteban tiene en cada uno de los dos bolsillos del pantalón más de una moneda y menos de diez. Si pasara una moneda del bolsillo izquierdo al bolsillo derecho tendría el mismo número de monedas en cada bolsillo, pero si pasara una moneda del bolsillo derecho al bolsillo izquierdo tendría dos veces más monedas en el bolsillo izquierdo que en el derecho. ¿Cuántas monedas tiene?

A) 10 **B)** 12 **C)** 8 **D)** 14 **E)** 6

23 En una bolsa tenemos cinco bolas negras y tres blancas, y en otra, tres negras y cuatro blancas. ¿Cuál es el número mínimo de bolas que tenemos que cambiar de bolsa para que la probabilidad de sacar una bola negra de la primera bolsa sea igual a la probabilidad de sacar una blanca de la segunda.



A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

24 Nuestros tres amigos han ido a buscar castañas y al terminar, la niña Centésima no encontró ninguna. Entonces, Comenúmeros le dio 22 de sus castañas a la niña y don Retorcido le dio 14 de sus castañas. Al final don Retorcido tiene las mismas castañas que la niña Centésima y el doble que Comenúmeros. ¿Cuántas castañas encontró Comenúmeros?

A) 72 **B)** 32 **C)** 40 **D)** 36 **E)** 22

25 Si dos cuervos pesan como tres urracas, dos urracas como ocho gorriones, y un cuervo pesa tanto como una paloma y una urraca juntas, ¿cuántos gorriones pesan como tres palomas?

A) 3 **B)** 5 **C)** 9 **D)** 4 **E)** 6

XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel II)

concurso de primavera MATEMÁTICAS

XXV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 9 de febrero de 2022

NIVEL II (1º y 2º de ESO)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

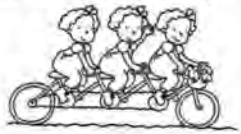
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
McGraw-Hill Education
Smartick

XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel II)

1 Hoy es el día del Concurso del Primavera y las trillizas se despiertan muy nerviosas. En el cajón de sus calcetines están todos sueltos y revueltos: doce azules, doce rojos y doce grises. Una de las hermanas abre corriendo el cajón y... ¿cuál es el número mínimo de calcetines que debe coger para estar segura de que las tres hermanas podrán ponerse un par de calcetines del mismo color? [No es necesario que las tres tengan el mismo color]



A) Seis **B)** Siete **C)** Ocho **D)** Nueve **E)** Diez

2 Cinco animales avanzan en fila india a través de un campo. Justo en este momento he recogido las distancias, en metros, que hay entre ellos:

	Ardilla	Cerdo	Hormiga	Pato	Rana
Ardilla	0				
Cerdo	3	0			
Hormiga	7	10	0		
Pato	2	5	5	0	
Rana	5	8	2	3	0

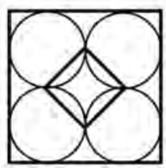
¿Qué animal está en medio de esa fila india?

A) Ardilla **B)** Cerdo **C)** Hormiga **D)** Pato **E)** Rana

3 Si dibujas en un papel tres circunferencias de igual radio y dos rectas, ¿cuál es el máximo número de puntos de intersección que pueden formarse?

A) 12 **B)** 16 **C)** 18 **D)** 19 **E)** 20

4 En el dibujo ves cuatro circunferencias iguales, tangentes dos a dos y tangentes a dos lados de un cuadrado de lado 4 cm. ¿Cuál es el área, en cm^2, del cuadrado cuyos vértices son los puntos en los que las circunferencias se tocan entre sí?



A) 8 **B)** 6 **C)** 4 **D)** 2

E) 1

XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel II)

5 He formado una lista de números de tal manera que a partir del tercero, cada número es la suma de los dos anteriores. Ha venido Comenúmeros y se ha comido todos los números menos el 9 de la primera casilla y el 2022 de la última.
¿Qué número había en la casilla donde descansa Comenúmeros?

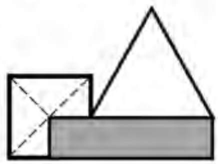
9					2022

A) 807 **B)** 1342 **C)** 900 **D)** 1995 **E)** 1002

6 La niña Centésima se entretiene asignando números a las letras según el número de letras que tenga cada letra. Tranquilidad, os lo explica con dos ejemplos, $J = 4$ porque JOTA tiene cuatro letras y $L = 3$ porque ELE tiene tres letras.
¿Cuál es el valor de $(P - R + I) \cdot (M - A + V) \cdot (E - R + A)$ ¿

A) – 3 **B)** 4 **C)** 0 **D)** 10 **E)** – 4

7 El cuadrado, el rectángulo y el triángulo que ves tienen, todos ellos, 36 m² de área. ¿Cuántos metros mide la altura del triángulo?



A) 12 **B)** 6,5 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 4,5

8 ¿Cuántos números de cuatro cifras distintas formados con las cifras 1, 2, 3, 4, son múltiplos de cuatro?

A) 16 **B)** 12 **C)** 8 **D)** 6 **E)** 4

9 En clase había mucho jaleo y la profesora se ha enfadado. ¡Pues ahora tenéis que hacer esta división! Y cuando lleguéis a los cien primeros decimales, calculad su suma. ¡Silencio ya!

$$\boxed{1234 : 9999}$$

A) 100 **B)** 900 **C)** 12340 **D)** 1000 **E)** 250

10 Voy a repartir todas las piedras de mi colección entre mis diez sobrinos, empezando por el más pequeño. Al décimo le daré $\frac{1}{10}$ del total; al noveno $\frac{1}{9}$ del resto; al octavo $\frac{1}{8}$ del resto; y así hasta que llegue al mayor y acabe el reparto. Si al quinto le corresponden cinco piedras, ¿cuántas piedras se llevará el mayor?

A) 10 **B)** 1 **C)** 5 **D)** 2 **E)** 4

XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel II)

11

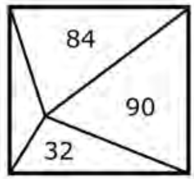
Tres conejos han recolectado zanahorias. Buni tiene diez zanahorias menos que Angi y dos menos que Crasti. Si entre Angi y Crasti tienen dieciocho zanahorias, ¿cuántas zanahorias han conseguido entre los tres?

A) 19 **B)** 21 **C)** 23 **D)** 25

E) 27

12

Hemos dividido un cuadrado en cuatro triángulos y hemos calculado el área, en cm^2, de tres de ellos. ¿Qué área, en cm^2, tiene el cuarto triángulo?



A) 26 **B)** 19 **C)** 30 **D)** 34

E) 28

13

¡Estamos celebrando la XXV edición de este concurso! Si solo puedes usar los símbolos romanos I, V y X, ¿cuántos números romanos de tres símbolos puedes formar?

A) 10 **B)** 9 **C)** 8 **D)** 7 **E)** 6

14

¡Don Retorcido!, ¿cuánto suman las edades de sus hijos e hijas?
Dedúzcalo usted con estas pistas. Sus edades son diferentes y su producto 594. Luisillo tiene el doble de edad que Pedrín y Alba tiene el triple de edad que Bea. Y ya no digo si tengo más hijos o hijas. ¿Cuánto suman las edades de toda su prole?

A) 40 **B)** 26 **C)** 41 **D)** 32 **E)** 47

15

En la cinta que ves hemos colocado en lista los números del 1 al 10 de forma que el número de una casilla sea tres unidades mayor que el anterior o bien, una o dos unidades menor. Vemos las posiciones del 1, del 8 y del 10. ¿Qué número debemos poner en la cuarta casilla?

1	≋	≋	¿?	≋	8	≋	≋	≋	≋	≋	10

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

16

¿Cuántas líneas rectas diferentes pasan por al menos dos puntos de la siguiente cuadrícula?

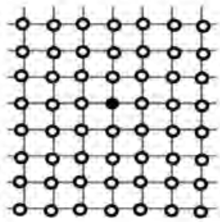
A) 9 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 20

XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel II)

17 ¿Cuántos números naturales de tres cifras cumplen que al multiplicar sus cifras sale 18?

A) 8 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 18 **E)** 22

18 En la cuadrícula cada cuadradito mide 1 cm de lado. ¿Cuántos puntos de la cuadrícula están a más de 1 cm de distancia del punto negro pero a menos de 3 cm?



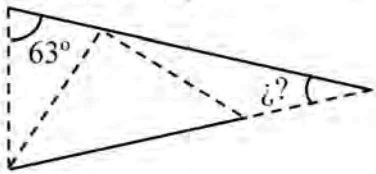
A) 29 **B)** 17 **C)** 16 **D)** 18 **E)** 20

19 Dos lados de un triángulo miden 12 y 15 centímetros. ¿Cuál de los siguientes valores, en cm, no puede ser el perímetro de dicho triángulo?

A) 35 **B)** 42 **C)** 45 **D)** 50 **E)** 55

20 En el dibujo, los segmentos dibujados con trazo discontinuo tienen la misma longitud. ¿Cuánto mide el ángulo marcado con las interrogaciones?

A) 25º **B)** 31,5º **C)** 54º **D)** 21º **E)** 20º



21 Ordena estos cuatro números de menor a mayor:

$S = 2021 \cdot 2022^{2021}$ $A = 2022^{2022}$ $C = 2022^{2021}$ $O = 2 \cdot 2022^{2021}$

A) $C < A < O < S$ **B)** $O < C < A < S$ **C)** $S < A < C < O$ **D)** $C < A < S < O$ **E)** $C < O < S < A$

22 ¿Qué fracción multiplicada por dos tercios y a la que luego se le suman tres cuartos da como resultado cuatro quintos?

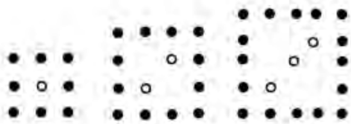
A) $\frac{3}{40}$ **B)** $\frac{5}{6}$ **C)** $\frac{9}{20}$ **D)** $\frac{93}{40}$ **E)** $\frac{3}{2}$

XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel II)

23 Tres amigas montañeras, Carmen, Sara y Clara, salieron a coger setas. Al terminar la jornada Sara pensó así: "Si Carmen me diera un tercio de sus setas, entonces yo tendría el doble que ella, pero si Clara me diera un cuarto de sus setas, yo tendría el triple que ella". Si Sara tiene 84 setas, ¿cuántas setas tienen entre Carmen y Clara?

A) 84 **B)** 105 **C)** 126 **D)** 168 **E)** 252

24 Estoy diseñando figuras con puntos negros y blancos. Puedes ver que la primera figura tiene 9 puntos, la segunda 14 puntos y la tercera 19 puntos. ¿Cuántos puntos tendrá la décima figura?



A) 56 **B)** 48 **C)** 62 **D)** 58 **E)** 54

25 Don Retorcido nos dice que el año 2022 es convertible en 27 porque ha sumado 1 a cada cifra [2 + 1 = 3, 0 + 1 = 1, 2 + 1 = 3, 2 + 1 = 3], luego ha multiplicado [3·1·3·3 = 27] y ha obtenido 27. ¿Cuántos números de cuatro cifras (las unidades de millar no pueden ser cero) son convertibles en 27?

A) 9 **B)** 3 **C)** 6 **D)** 12 **E)** 10

XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel III)

XXV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 9 de febrero de 2022

NIVEL III (3º y 4º de ESO)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** $\boxed{\text{X}}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

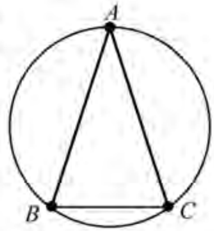
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
McGraw-Hill Education
Smartick

XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel III)

1 ¿Cuántos números de seis cifras distintas formados con las cifras del uno al seis son múltiplos de cuatro?

A) 200 **B)** 192 **C)** 180 **D)** 160 **E)** 144

2 El triángulo isósceles ABC cumple que el ángulo desigual $\hat{A}$ es la mitad de uno de los otros ángulos. Si en esa misma circunferencia inscribimos un polígono regular con un lado coincidente con BC, ¿cuántos lados tiene el polígono?



A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8

E) 9

3 Si a, b, c, d son números positivos distintos y $a + b < c + d$, entonces, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es siempre verdadera?

A) a y b son los números más pequeños.
B) Uno de los dos (a o b) es el menor de todos.
C) El mayor de todos no es ni a ni b.
D) $[a + c < b + d]$ o $[a + d < b + c]$
E) Si a es el mayor de todos, entonces b es el menor.

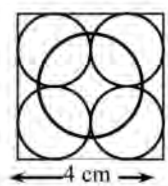
4 Si m es un número múltiplo de 3 y n es múltiplo de 5, de los siguientes cinco números $[m + n,\ 5m + 3n,\ m\cdot n,\ m^2\cdot n,\ m^n]$, ¿cuántos son seguro múltiplos de 15?

A) Uno **B)** Dos **C)** Tres **D)** Cuatro **E)** Los cinco

5 Si $\begin{cases} a+b=27 \\ b+c=29 \\ c+a=44 \end{cases}$, entonces $2c-a-b$ es igual a:

A) 19 **B)** 21 **C)** 23 **D)** 25 **E)** 27

6 Las cuatro circunferencias menores son iguales, tangentes dos a dos y tangentes a dos lados del cuadrado de lado 4 cm. ¿Cuál es el radio, en cm, de la circunferencia grande cuyo centro es el del cuadrado y pasa por los centros de las otras circunferencias?



A) $\sqrt{2}$ **B)** $\sqrt{6}$ **C)** $\sqrt{8}$ **D)** $\sqrt{10}$

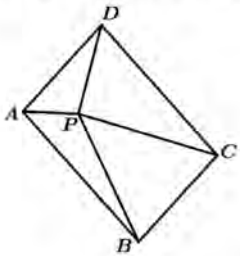
E) $2\sqrt{3}$

XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel III)

7 Sabiendo que $x \cdot y = 8$ y que $x^2y + xy^2 + x + y = 90$, ¿cuánto vale $x^2 + y^2$?

A) 80 **B)** 84 **C)** 92 **D)** 96 **E)** 100

8 El paralelogramo *ABCD* queda dividido por el punto interior *P* en cuatro triángulos. Conocemos tres de sus áreas, 5, 7 y 16. El área máxima del paralelogramo es:



A) 47 **B)** 45 **C)** 46 **D)** 43 **E)** 42

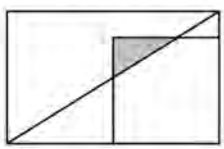
9 Si $n! = (3!) \cdot (5!) \cdot (7!)$, ¿cuál es el valor de n?
[Recuerda que el factorial de un número natural n es $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$]

A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 14

10 El número 2022 es producto de tres primos. ¿Cuántos tríos de números enteros positivos (no necesariamente diferentes) tienen un producto igual a 2022?
[Todos los tríos que contengan a los números (a, b, c) son el mismo]

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

11 Dentro de un rectángulo de lados 8 cm y 5 cm hemos colocado un cuadrado de lado 4 cm, como puedes ver en la figura. ¿Qué área, en cm², tiene el triángulo sombreado?



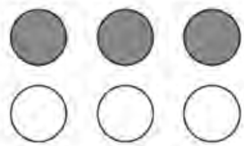
A) 2 **B)** $\frac{5}{2}$ **C)** $\frac{4}{3}$ **D)** $\frac{12}{7}$ **E)** $\frac{9}{5}$

XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel III)

12 ¿Cuántos números naturales de tres cifras cumplen que la suma de sus cifras es 18?

A) 20 **B)** 36 **C)** 54 **D)** 60 **E)** 72

13 Don Retorcido nos ha dado seis monedas que por una cara son de color blanco y están numeradas del 1 al 6 y por la otra cara son de color gris y están numeradas del 11 al 16 (la moneda del 1 tiene el 11 por la otra cara, la del 2 el 12, etc.). Las coloca en la mesa sin mirar los números, pero sabiendo que quedan tres monedas con la cara gris arriba y tres con la cara blanca arriba, tal y como indica la imagen.
A continuación, nos pide que demos la vuelta a las dos monedas que queramos. Después, que demos la vuelta a las tres monedas de la fila superior. Y, por último, que demos la vuelta a la moneda que queramos, pero que no hayamos tocado antes. Tras todo esto, y sin mirar, ¡ha adivinado el número que suman las caras visibles de las monedas! ¿Qué resultado ha dicho don Retorcido?



A) 41 **B)** 51 **C)** 61 **D)** 71 **E)** 81

14 ¿Cuántos números enteros positivos son iguales a cuatro veces la suma de sus cifras?

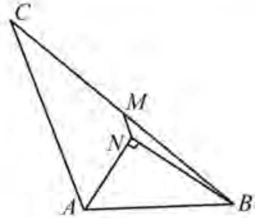
A) Uno **B)** Dos **C)** Tres **D)** Cuatro **E)** Cinco

15 Centésima, don Retorcido y Comenúmeros juegan a un juego. Por orden van tirando una moneda y ganará el primero que obtenga cara. Si empieza tirando Centésima, después don Retorcido, a continuación Comenúmeros y vuelve a empezar Centésima. ¿Cuál es la probabilidad de que gane Comenúmeros?

A) $\frac{1}{8}$ **B)** $\frac{2}{5}$ **C)** $\frac{3}{7}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{1}{7}$

XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel III)

16 En el triángulo ABC de la figura, M es el punto medio de BC, AN es la bisectriz del ángulo $\hat{A}$ y BN es perpendicular a AN. Si sabemos que los lados AB y AC miden 15 y 18 centímetros respectivamente, calcula la longitud de MN.



A) $\frac{3}{2}$ **B)** 2 **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** 3 **E)** $\frac{5}{2}$

17 ¿Cuál es la suma de las cifras del producto $2^{2022} \cdot 5^{2020}$?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 8

18 En una mesa circular con 30 sillas hay n personas sentadas. Si sabemos que si viene otra persona se tiene que sentar obligatoriamente al lado de alguien, ¿cuál es el menor valor posible de n?

A) 8 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 15 **E)** 16

19 En un cajón tengo seis calcetines azules y cuatro rojos. Como me voy de viaje este fin de semana meto cuatro calcetines al azar en una mochila. ¿Cuál es la probabilidad de que pueda formar dos parejas de dos calcetines del mismo color?

A) $\frac{107}{210}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{103}{210}$ **D)** $\frac{3}{5}$ **E)** $\frac{53}{105}$

20 La ecuación $x^2 + mx + 2m = 0$ con $m \neq 0$ tiene como soluciones m y n. ¿Cuánto suman m y n?

A) 2 **B)** 1 **C)** 0 **D)** –1 **E)** –2

21 Dibujamos un hexágono de modo que los valores de sus ángulos internos forman una progresión aritmética. Sabemos que el valor de la suma de dos de sus ángulos debe ser:

A) 160º **B)** 200º **C)** 240º **D)** 280º **E)** 300º

XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel III)

22 En una urna introducimos una bola con el número 1, dos bolas con el número 2, tres bolas con el número 3, y así hasta veinte bolas con el número 20. Las mezclamos y vamos sacando bolas al azar, una a una y sin reponerlas. ¿Cuántas deberemos extraer, como mínimo, para asegurarnos de tener cinco bolas con el mismo número?

A) 70 **B)** 75 **C)** 76 **D)** 78 **E)** 81

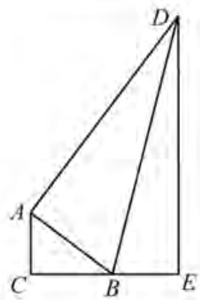
23 Una sucesión de números comienza en el 50 y construimos cada término de la sucesión sumando los cuadrados de las cifras del anterior. Por ejemplo, después del 28 vendría el 68 ya que $2^2 + 8^2 = 68$. ¿Qué número ocupa la posición 2022?

A) 4 **B)** 16 **C)** 145 **D)** 89 **E)** 42

24 El triángulo ABC es rectángulo en C y cumple que $AC = 3$ y $BC = 4$. El triángulo ABD es rectángulo en A y $AD = 12$. El punto E es la intersección de la prolongación de CB con una recta paralela a AC trazada desde D. Calcula el área del triángulo BED.

A) $\frac{342}{17}$ **B)** $\frac{61}{3}$ **C)** $\frac{102}{5}$

D) $\frac{504}{25}$ **E)** 20



25 Sea $A = 0,9 + 0,18 + 0,027 + 0,0036 + 0,00045 + \cdots$; entonces $9A$ es igual a:

A) 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** 15

XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel IV)

XXV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE: 9 de febrero de 2022

NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** $\boxed{\text{X}}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel IV)

1 Piensa en el número $\frac{4}{13}$. ¿Cuánto vale la cifra que ocupa el lugar 2022 en su desarrollo decimal?

A) 2 **B)** 3 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 9

2 En cada una de las cuatro caras de un dado con forma de tetraedro están escritos los números correspondientes a los vértices que forman esa cara. Hay una cara con los números 1, 2 y 3, otra con los números 1, 2 y 4, una tercera con los números 1, 3 y 4 y la última lleva los números 2, 3 y 4. Se lanzan dos dados idénticos de estos y una vez en reposo se suman todos los números que quedan a la vista. La suma que tiene mayor probabilidad de aparecer es:

A) 43 **B)** 44 **C)** 45 **D)** 46 **C)** 47

3 ¿Cuánto vale la suma de los tres divisores más pequeños de 70! que son mayores que 70?

A) 215 **B)** 216 **C)** 218 **D)** 221 **E)** 223

4 El número $R = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ puede escribirse de la forma $R = \sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c}$, con a, b y c enteros. ¿Cuánto vale la suma $a + b + c$?

A) 35 **B)** 33 **C)** 15 **D)** 27 **E)** 10

5 Venga, ¡¡¡a sumar todos los números enteros positivos y en orden, empezando por el uno!!! Cuando al profesor se le pasó el enfado dijo a sus cinco estudiantes que podían parar y les pidió sus resultados. ¿Qué estudiante realizó bien su suma?

A) 2016 **B)** 2018 **C)** 2020 **D)** 2022 **E)** 2024

6 Un octógono regular de lado 6 cm está dividido en dos cuadrados y cuatro rombos, todos de lado 6. ¿Cuál es el área, en cm², de uno de esos rombos?

A) $18\sqrt{3}$ **B)** 21 **C)** $18\sqrt{2}$ **D)** $12\sqrt{6}$

E) $16\sqrt{3}$

XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel IV)

7 En una liguilla de fútbol con cuatro equipos a doble partido (3 puntos por partido ganado y 1 punto por empate), conocemos las puntuaciones 16, 8 y 2 de tres de ellos. Si sabemos que en total hubo cinco partidos que terminaron con empate, los puntos del cuarto equipo fueron:

A) 7 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 3

8 Si $\frac{a}{b}=2$, $\frac{c}{b}=3$ y $a\cdot c=24$, entonces $a\cdot b+b\cdot c$ es igual a:

A) 30 **B)** 29 **C)** 26 **D)** 24 **E)** 20

9 $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{27}-\frac{1}{64}+\cdots=$

A) $\frac{1}{4^2}$ **B)** $\frac{1}{3\cdot 4}$ **C)** $\frac{1}{3^2}$ **D)** $\frac{1}{2\cdot 3}$ **E)** $\frac{1}{3+4}$

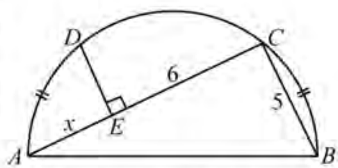
10 En la sucesión de Fibonacci, que comienza con 1, 1, 2, 3, 5, 8,… y cada término es la suma de los dos anteriores, ¿cuántos términos tienen 2022 cifras?

A) 2 ó 3 **B)** 4 ó 5 **C)** 6 ó 7 **D)** 8 ó 9 **E)** 10 o más

11 Se mezclan pintura blanca y pintura negra para obtener 12 kg de pintura gris. En la mezcla inicial el 80 % es pintura blanca, pero como es muy oscura se añade más pintura blanca hasta tener una mezcla con el 90 % de pintura blanca. ¿Cuántos kilos de pintura gris tenemos ahora?

A) 13 **B)** 15 **C)** 32 **D)** 24 **E)** 18

12 En la semicircunferencia de diámetro AB inscribimos un triángulo rectángulo ABC, como se muestra en la figura. Trazamos la perpendicular al cateto AC por el punto E de modo que corta a la semicircunferencia en D. Si el cateto BC mide 5, el segmento CE mide 6 y los arcos de circunferencia BC y DA son iguales, el segmento AE mide:



A) 2 **B)** 2,5 **C)** 3 **D)** 3,5 **E)** 4

XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel IV)

13 La lista de números enteros positivos a, 8, b, c, d, e, f, g, 2 cumple que la suma de cuatro números consecutivos es siempre 17. ¿Cuánto vale $c+f$?

A) 5 **B)** 7 **C)** 9 **D)** 4 **E)** 8

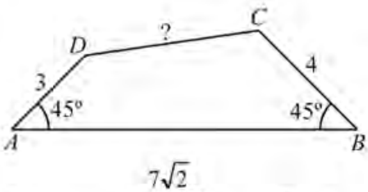
14 Cinco personas sentadas en círculo tiran cada una un dado equilibrado de 6 caras y aquellas que obtienen un 5 o un 6 se ponen en pie. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya dos personas contiguas de pie?

A) $\frac{91}{243}$ **B)** $\frac{121}{243}$ **C)** $\frac{130}{243}$ **D)** $\frac{152}{243}$ **E)** $\frac{201}{243}$

15 ¿Cuántos números naturales de tres cifras cumplen que la suma de sus cifras es 18?

A) 20 **B)** 36 **C)** 54 **D)** 60 **E)** 72

16 El lado DC del cuadrilátero de la figura mide:



A) $4\sqrt{2}$ **B)** 5 **C)** $2\sqrt{6}$ **D)** 6 **E)** $\frac{9}{2}$

17 ¿Cuál es el mayor de los siguientes números?

A) 99^{101} **B)** 101^{99} **C)** 10^{200} **D)** 200^{50} **E)** 3^{400}

18 El polinomio $P(x)$ de grado 6 y coeficiente del término de mayor grado igual a 1 tiene raíces $\pm 1, \pm 3, \pm 4$. El valor del polinomio para $x=2$ es:

A) 180 **B)** –240 **C)** 120 **D)** 144 **E)** –200

19 Una de estas longitudes NO corresponde a la distancia entre dos vértices de un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio 1.

A) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ **B)** $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ **C)** $\sqrt{2}$ **D)** $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ **E)** 2

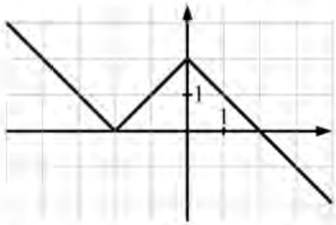
XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel IV)

20 La descomposición del polinomio x^4+x^2+1 como producto de polinomios irreducibles con coeficientes reales es:

A) $(x^2+x+1)^2$ **B)** $(x+1)(x-1)(x^2+1)$ **C)** $(x^2+1)^2$

D) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ **E)** $\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x^2+1)$

21 Dada la función de la gráfica, ¿cuánto vale $f(f(f(-2)))$?



A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

22 En una progresión aritmética sabemos que $a_{2022}=25$.

¿Cuánto vale $a_{2001}+3a_{2019}+3a_{2025}+a_{2043}$?

A) 150 **B)** 200 **C)** 250 **D)** 300 **E)** 100

23 La ecuación de la recta simétrica de $y=mx+b$ ($m\neq 0$), respecto de la recta $y=-x$ es:

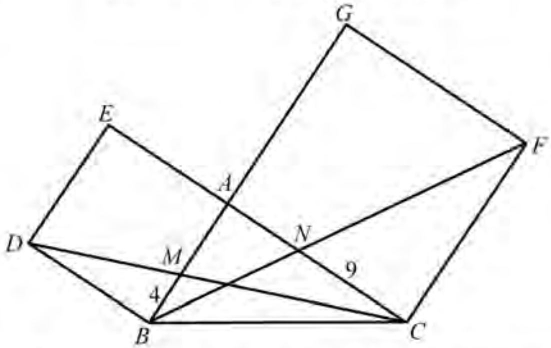
A) $y=-mx+b$ **B)** $y=\frac{1}{m}x-b$ **C)** $y=\frac{1}{m}x+\frac{b}{m}$

D) $y=-\frac{1}{m}x-\frac{b}{m}$ **E)** $y=-mx+\frac{b}{m}$

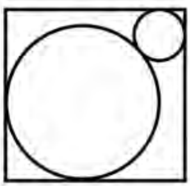
XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel IV)

24 El triángulo ABC es rectángulo, recto en A. Sobre los lados AB y AC se han construido sendos cuadrados, como se muestra en la figura. Si el segmento $BM = 4$ y el segmento $CN = 9$, el cuadrado de la hipotenusa, BC^2, vale:

A) 289 **B)** 315 **C)** 320 **D)** 324 **E)** 325



25 Dentro de un cuadrado hemos colocado dos circunferencias (de radios 1 cm y 3 cm) tangentes entre sí y a dos lados del cuadrado. ¿Qué área, en cm^2, tiene el cuadrado?



A) $32\sqrt{2}$ **B)** $8+24\sqrt{2}$ **C)** $24+16\sqrt{2}$ **D)** $32+8\sqrt{2}$ **E)** 32

XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel I)

XXV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 23 de abril de 2022

NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu número de identificación, tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 punto***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM
ORGANIZA
Asociación Matemática *Concurso de Primavera*
COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
McGraw-Hill Eduation
Smartick

XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel I)

1 ¡Empieza el concurso con mucho salero! ¿Cuántos saleros de veinticinco gramos podemos llenar con dos kilos y cuarto de sal?

A) 18 **B)** 60 **C)** 75 **D)** 90 **E)** 120

2 En esta frase hay --------- vocales

¿Por cuál de estas opciones debemos sustituir -------- para que la frase del recuadro sea cierta?

A) ocho **B)** diez **C)** once **D)** doce **E)** trece

3 "¿Dónde vas, niña Centésima?", pregunta Comenúmeros. "Voy a llevar esta cesta con los números del 1 al 200 a don Retorcido que está malito." Comenúmeros se relame y le dice: "Me darás alguno, ¿verdad?" "Está bien" respondió la niña con fastidio, "te daré todos los números que sean múltiplos de 13 y que la suma de sus cifras sea múltiplo de 9" ¿Cuántos números le dio la niña Centésima al glotón de Comenúmeros?

A) Ninguno **B)** Uno **C)** Dos **D)** Cuatro **E)** Cinco

4 Mi granja suele ser silenciosa pues normalmente la vaca no dice ni mu y el pato mantiene el pico cerrado. Eso sí, si por casualidad la vaca dice *Mu*, el pato lo celebra con dos *Cua*. Cada *Cua* del pato es celebrado por tres *Beee* de la oveja y el perro hace *Guau* cuatro veces por cada *Beee* de la oveja. ¿Cuántas letras *u* se oyen en mi granja cada vez que la vaca habla?

A) 9 **B)** 27 **C)** 45 **D)** 49 **E)** 51

5 Si ★ + ♥ + ♥ = □ + ○ y ♥ + ♥ = ★ + ○, ¿cuál de las siguientes igualdades es siempre cierta?

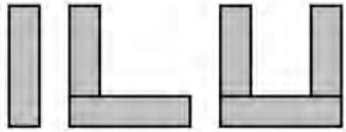
A) □ = ○ **B)** ★ = □ + □ **C)** □ = ★ + ★
D) ○ = ★ + □ **E)** □ + ★ = ○

6 El año pasado Juan pesaba entre 65 y 70 kg. Si ha perdido entre 3 y 4 kg, su peso actual, en kg, está comprendido entre…

A) 61 y 65 **B)** 61 y 67 **C)** 62 y 66 **D)** 62 y 67 **E)** 68 y 74

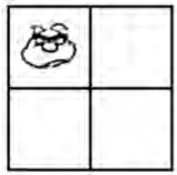
XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel I)

7 Tres amigas han escrito las iniciales de sus nombres superponiendo rectángulos transparentes idénticos. Irene usó uno, Luisa dos y Úrsula tres, como ves en el dibujo. Si el área de la **L** de Luisa es 32 cm^2 y el de la **U** de Úrsula es 46 cm^2, ¿cuál es el área de la **I** de Irene?



A) 18 cm^2 **B)** 20 cm^2 **C)** 16 cm^2 **D)** 14 cm^2 **E)** 24 cm^2

8 La niña Centésima escribió un número en cada casilla de esta cuadrícula, pero Comenúmeros se los comió todos. Sabemos que tres de ellos eran 2, 3 y 4, que la suma de los dos números de la segunda columna era 10 y que la suma de los dos números de la segunda fila era 6. ¿Qué número estaba en la casilla en la que ahora descansa Comenúmeros?



A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

9 D'Artagnan se encuentra una hoja de papel y con su espada la corta en nueve trozos. Llega Aramis, coge ocho de esos trozos y con su espada los corta en siete trozos cada uno. Por último aparece Porthos, elige seis trozos y los corta en cinco trozos cada uno. ¿Cuántos trozos de papel hay ahora?

A) 81 **B)** 82 **C)** 86 **D)** 87

E) 90

10 La operación *Tres en uno* de números naturales, cuyo símbolo es ✪, opera como ves en los siguientes ejemplos: 2✪3 = 615, 4✪9 = 36513 y 13✪2 = 261115. ¿Cuál es el resultado de operar 17✪6?

A) 1022311 **B)** 122311 **C)** 102102 **D)** 1021123 **E)** 1122311

11 Asier puede colocar todos sus pequeños coches en diez filas con el mismo número de coches en cada fila; pero si los coloca en seis filas, una de ellas tiene dos coches menos que las otras. ¿Cuál es el número de coches que tiene Asier si son más de cincuenta y menos de cien?

A) 70 **B)** 66 **C)** 90 **D)** 76 **E)** 60

XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel I)

12 Sol dibuja con trazo continuo un cuadrado de lado 2 cm. Mía dibuja un cuadrado con trazo punteado cuyo lado es la diagonal del cuadrado de Sol. Finalmente Ona dibuja un cuadrado con trazo rayado cuyo lado es la diagonal del de Mía. ¿Qué área, en cm^2, tiene la figura completa?

A) 28 **B)** 16 **C)** 18 **D)** 20 **E)** 22

13 Ander mete todas sus canicas en diez bolsas. Ninguna bolsa está vacía y cada bolsa tiene un número distinto de canicas. ¿Cuál es el mínimo número de canicas que tiene Ander?

A) 35 **B)** 55 **C)** 25 **D)** 45 **E)** 65

14 A Noé le encantan los animales. Tiene cuatro arañas llamadas Amable, Buena, Cariñosa y Divertida. Ha observado que Amable duerme el doble de tiempo que Divertida; que Buena juega exactamente el mismo tiempo que Divertida duerme; y que Cariñosa duerme la tercera parte de lo que duerme Amable. Si Buena ha jugado hoy 30 minutos, ¿cuánto tiempo ha estado durmiendo Cariñosa?

A) 1 hora **B)** 10 minutos **C)** 30 minutos
D) 1 hora y media **E)** 20 minutos

15 La nariz de Pinocho mide un decímetro. Su longitud se duplica cada vez que miente. ¿Cuántos centímetros medirá su nariz después de mentir cuatro veces?

A) 160 **B)** 40 **C)** 4 **D)** 18 **E)** 320

16 Estos son los puntos que han obtenido cinco escolares en las pruebas deportivas:

295	280	345	272	320

Se sabe que María obtuvo más puntos que Íñigo y menos que Begoña. Si Amaia obtuvo 40 puntos más que Manuel, ¿qué puntuación obtuvo Íñigo?

A) 295 **B)** 280 **C)** 345 **D)** 272 **E)** 320

XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel I)

17 Mi perra ha tenido doce cachorritos. Tres son negros, cinco castaños y los demás son blancos. De todos los colores hay más hembras que machos y en total hay cuatro machos. Si mi prima cierra los ojos y coge un perrillo, ¿cuál es la probabilidad de que escoja una hembra castaña?

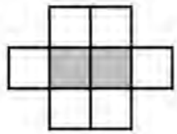
A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{3}{8}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{5}{12}$ **E)** $\frac{1}{3}$

18 Un estudio afirma que los jóvenes pasan una media de 9,4 minutos al día zapeando hasta que encuentran el programa que desean ver. ¿Qué opción se acerca más al tiempo que pasará un joven zapeando al año?

A) Un día **B)** Dos días y medio **C)** Cinco días

D) Quince horas **E)** Noventa horas

19 Si se escriben los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8, uno en cada casilla de esta figura, de forma que no haya dos números consecutivos ni en horizontal ni en vertical ni en diagonal, ¿cuál es la suma de los dos números que ocupan las casillas sombreadas?



A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

20 Miguel tenía el doble de dinero que Diego. Después de que Miguel comprara un libro de 18 euros y Diego una revista de 3 euros, ambos tenían la misma cantidad de dinero. ¿Cuántos euros le han quedado a cada uno?

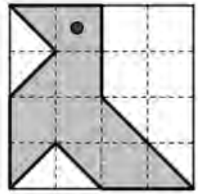
A) 10 **B)** 8 **C)** 15 **D)** 12 **E)** 21

21 Juan Pupas casi siempre está malito. Cada cuatro días tiene tos, cada seis días le duele la barriga y cada siete días le duele la cabeza. Hoy ha tenido las tres dolencias. Durante los próximos veinticinco días, ¿cuántos días estará sin ninguna dolencia?

A) 13 **B)** 14 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 17

XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel I)

22 La unidad de medida de la superficie es el cuadrado grande, ¿cuál es el área de la pajarita?



A) $\frac{2}{3}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{1}{3}$

E) $\frac{1}{4}$

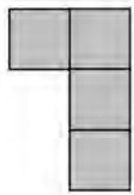
23 El producto de las edades de Roni y Leire es 351 y su suma es 40. ¿Cuál es la edad del menor?

A) 3 **B)** 5 **C)** 2 **D)** 13 **E)** 7

24 A Belén le encanta el 2022 porque solo tiene doses y ceros. Usando únicamente doses y ceros, ¿cuántos números de cuatro cifras puede formar Belén?

A) 16 **B)** 8 **C)** 4 **D)** 12 **E)** 10

25 ¿Cuántas figuras distintas puede formar Ane con cuatro cuadrados iguales pegados por al menos un lado? Dos figuras son distintas si no podemos cubrir completamente una con la otra las pongamos como las pongamos.



A) 6 **B)** 7 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 4

XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel II)

concurso de primavera MATEMÁTICAS

XXV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 23 de abril de 2022

NIVEL II (1º y 2º de ESO)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu número de identificación, tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. **Presta mucha atención al formato de los números.**

IMPORTANTE: Comprueba que el número Mod. En tu hoja de respuestas es 2.

No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

LEE ATENTAMENTE CÓMO DEBES MARCAR LAS OPCIONES EN LA HOJA DE RESPUESTAS Y QUÉ HACER SI TE EQUIVOCAS.

Te sugerimos que vayas marcando tus soluciones en la hoja de la prueba y cuando tengas cuatro o cinco las pases todas juntas a la hoja de respuestas.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

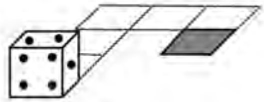
Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
MCGraw-Hill Education
Smartick

XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel II)

1 ¡Comienza el XXV Concurso de Primavera! ¡El dado empieza a rodar! ¿Cuántos puntos habrá en la cara superior del dado cuando llegue a la casilla gris? [Recuerda que en los dados la suma de dos caras opuestas siempre es 7]



A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

2 ¡Mirad!, ahi está la ardilla Pilla comiéndose una pipa, una avellana y una nuez, las tres a la vez. Pilla come una pipa cada tres horas, una avellana cada seis horas y una nuez cada ocho horas. La próxima vez que termine de zamparse los tres frutos secos simultáneamente, ¿cuántos habrá comido en total?

A) 14 **B)** 18 **C)** 11 **D)** 24 **E)** 16

3 ¿Cuántos números enteros positivos cumplen a la vez estas cuatro condiciones?

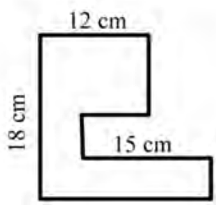
UNA: son múltiplos de 11. DOS: al dividirlos entre 5 dan de resto 2.
TRES: tienen menos de 4 cifras. CUATRO: son pares.

A) 9 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 6 **E)** 5

4 Justo ahora estoy recordando que anteayer pensé… "¡Anda!, hace tres días tuve este pensamiento: pasado mañana será martes." ¿Qué día será mañana?

A) Domingo **B)** Sábado **C)** Viernes **D)** Jueves **E)** Miércoles

5 ¿Cuántos centímetros mide el perímetro de esta figura?



A) 75 **B)** 78 **C)** 81 **D)** 90

E) Imposible saberlo porque faltan medidas

6 ¿Cuál es la novena parte de 27^5?

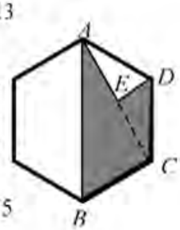
A) 9^5 **B)** 3^{12} **C)** 3^{13} **D)** 3^2 **E)** 3^5

XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel II)

7 ¿Cuál de los siguientes números está más cerca de $\frac{5}{12}$?

A) $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{5}{11}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{5}$ **E)** $\frac{5}{13}$

8 Todos sabéis que a don Retorcido le encantan los hexágonos y nos trae este problema. Si el hexágono regular tiene 180 cm^2 de área, el punto E es el punto medio de AC y el ángulo AED es recto, ¿cuál es el área, en cm^2, del pentágono gris $ABCDE$?

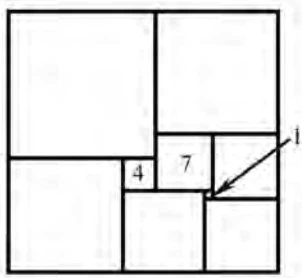


A) 72 **B)** 65 **C)** 80 **D)** 60 **E)** 75

9 Si una pirámide tiene 2022 vértices, ¿cuántas aristas tiene?

A) 4042 **B)** 4038 **C)** 2023 **D)** 4041 **E)** 2022

10 Hemos colocado con mucho cuidado nueve alfombras cuadradas para cubrir una gran sala rectangular. Si los lados de las alfombras más pequeñas miden 1 m, 4 m y 7 m, ¿qué superficie, en m^2, tiene la sala?



A) 1024 **B)** 1122 **C)** 1023

D) 1088 **E)** 1056

11 En esta suma cada letra diferente representa una cifra diferente. ¿Cuál es el valor de **E + S + A + S + E + T + A**?

	S	S	A
	E	E	A
+	T	T	A
S	E	T	A

A) 28 **B)** 30 **C)** 32 **D)** 38 **E)** 40

12 ¡Ya han llegado las potencias! Si $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c = 300$ y $a^2 \cdot b^3 \cdot c^5 = d^e$, ¿cuánto vale e^d? [a, b, c, d, e son enteros positivos con $e \neq 1$]

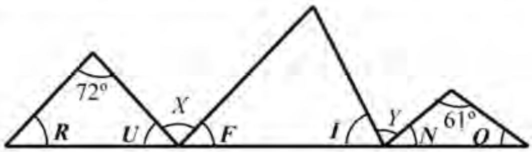
A) 27 **B)** 128 **C)** 49 **D)** 25 **E)** 3

XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel II)

13 Al multiplicar por 9 un número impar de tres cifras se obtiene lo mismo que al multiplicar por 11 otro número de dos cifras. $9 \times \square\square\square = 11 \times \square\square$. Cuánto suman las cinco cifras desconocidas?

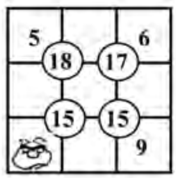
A) 10 **B)** 15 **C)** 20 **D)** 22 **E)** 35

14 Si $X + Y = 115°$, ¿cuál es el valor de la suma de ángulos: $U + N + R + U + F + I + N + O$?



A) 292° **B)** 472° **C)** 298° **D)** 425° **E)** 493°

15 Tienes que colocar los nueve números enteros que hay desde el 1 hasta el 9 de tal manera que la suma de los cuatro números que rodean cada circulito sea el valor que está dentro del círculo. ¿Qué número hay que colocar en la casilla de Comenúmeros? [Observa que ya hay tres números colocados]



A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 7 **E)** 8

16 En un torneo de quidditch participaron seis equipos, jugando todos contra todos un solo partido. Si la puntuación era de 3 puntos por victoria, 1 por empate y 0 por derrota, y entre todos los equipos sumaron 40 puntos, ¿cuántos empates hubo?

A) 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 6 **E)** 5

17 Al comprar un reloj cuyo precio estaba entre 300 € y 400 €, el vendedor se confundió y en la máquina tecleó el precio invirtiendo el orden de sus cifras (si hubiera costado, por ejemplo, 519 €, me hubiera cobrado 915 €). ¡Menos mal que me di cuenta a tiempo!, si no, habría pagado 198 € más. Recuerdo que el precio real era múltiplo de 9. Y ya viene la pregunta: si multiplicas las cifras del precio real, ¿qué resultado obtienes?

A) 14 **B)** 15 **C)** 24 **D)** 27 **E)** 0

XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel II)

18 En mi instituto somos 125 estudiantes en 1ESO y somos más chicas que chicos. Jugamos al baloncesto exactamente el 12 % de las alumnas y el 14 % de los alumnos. ¿Cuántos estudiantes de 1ESO jugamos al baloncesto en mi instituto?

A) 16 **B)** 13 **C)** 10 **D)** 26 **E)** 15

19 Examen de números negativos. Sé prudente, solo hay tres preguntas:

i) ¿Qué número hay que restar a –2 para obtener 7?

ii) ¿Qué número hay que sumar a –5 para obtener –2?

iii) ¿A qué número hay que restarle –1 para obtener –8?

¿Cuáles son las tres respuestas correctas?

A) $\boxed{-5}\,\boxed{7}\,\boxed{7}$ **B)** $\boxed{-9}\,\boxed{3}\,\boxed{7}$ **C)** $\boxed{-9}\,\boxed{3}\,\boxed{-9}$ **D)** $\boxed{-9}\,\boxed{7}\,\boxed{-7}$ **E)** $\boxed{-5}\,\boxed{3}\,\boxed{-9}$

20 Bart y Calamardo van con sus huchas a comprarse el mismo libro cada uno. Cuando vuelven a sus casas con sus libros ya comprados, Bart dice: “He gastado un tercio de lo que no he gastado.” Calamardo dice: “Pues yo he gastado dos quintos de lo que no he gastado.” Si entre los dos todavía tienen 132 euros sin gastar, ¿cuántos euros costaba el libro?

A) 52,80 **B)** 22 **C)** 26,40 **D)** 44 **E)** 24

21 En el mercado del trueque se cambian tres almendras por dos bellotas; y una castaña por una almendra y una bellota. ¿Cuántas castañas podré conseguir por cinco bellotas?

A) Una **B)** Dos **C)** Tres **D)** Cuatro **E)** Cinco

22 Cuando don Retorcido se aburre dibuja rectángulos de área 90 cm^2 cuyos lados son longitudes enteras medidas en centímetros. Después busca cuál de ellos tiene el perímetro mayor y cuál tiene el perímetro menor. Si resta estos dos perímetros, ¿qué longitud, en cm, obtiene?

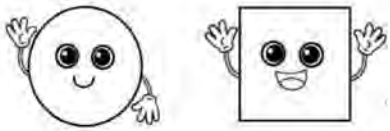
A) 140 **B)** 122 **C)** 56 **D)** 144 **E)** 136

XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel II)

23 En la expresión $E = a^b + c^d$, las letras a, b, c y d son números diferentes que puedes elegir entre 2, 3, 4 y 5. ¿Cuál es la suma del mayor y el menor valor posible que puede tomar E?

A) 1122 **B)** 1128 **C)** 723 **D)** 1145 **E)** 1666

24 Celia y Sol coleccionan círculos y cuadrados. Sabemos que $\frac{2}{5}$ de las figuras de Celia son cuadrados y $\frac{1}{4}$ de las de Sol son círculos. Si las dos tienen la misma cantidad de cuadrados y Celia tiene 36 círculos, ¿cuántas figuras tienen entre las dos amigas?



A) 108 **B)** 72 **C)** 92 **D)** 90 **E)** 96

25 La niña Centésima quiere construir números romanos jugando con cuatro palitos. Para ello utiliza los símbolos I (para el que necesita un palito) y V, X y L (para los que necesita dos palitos en cada uno de ellos). ¿Cuántos números podrá formar usando los cuatro palitos en cada número?

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel III)

concurso de primavera MATEMÁTICAS

XXV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 23 de abril de 2022

NIVEL III (3º y 4º de ESO)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu número de identificación, tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. **Presta mucha atención al formato de los números.**

IMPORTANTE: Comprueba que el número Mod. En tu hoja de respuestas es 3.

No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

LEE ATENTAMENTE CÓMO DEBES MARCAR LAS OPCIONES EN LA HOJA DE RESPUESTAS Y QUÉ HACER SI TE EQUIVOCAS.

Te sugerimos que vayas marcando tus soluciones en la hoja de la prueba y cuando tengas cuatro o cinco las pases todas juntas a la hoja de respuestas.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
MCGraw-Hill Education
Smartick

XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel III)

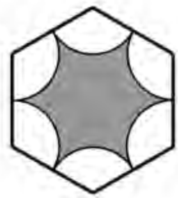
1 La niña Centésima ha sacado un 8 en la última evaluación de matemáticas. Recuerda que sacó en el primer examen un 7, en el tercero un 9 y en el cuarto y último, un 8. Si la media es ponderada y el primer examen cuenta un 10 %, el segundo un 20 %, el tercero un 30 % y el cuarto un 40 %, ¿qué nota obtuvo en el segundo examen?

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

2 Tenemos un triángulo equilátero de área 8 cm². Trazamos un segmento que va del punto medio de un lado al punto medio de otro lado. ¿Cuánto vale el área del trapecio isósceles obtenido?

A) 1 cm² **B)** 2 cm² **C)** 4 cm² **D)** 6 cm² **E)** 7 cm²

3 En un hexágono regular de lado 6 cm trazamos arcos de 120º con centro en cada vértice del hexágono y radio 3 cm, tal como se ve en la figura. ¿Cuál es el área, en cm², de la región sombreada?



A) $54\sqrt{3}-18\pi$ **B)** $108\sqrt{3}-36\pi$ **C)** $27\sqrt{3}-18\pi$

D) $54\sqrt{3}-9\pi$ **E)** $27\sqrt{3}-9\pi$

4 El rectángulo *ABCD* se divide en cuatro rectángulos trazando una línea recta paralela a *AB* y otra paralela a *BC*. Si tres de esos rectángulos tienen áreas 1, 2 y 3, ¿cuál es la mayor área posible del rectángulo *ABCD*?

A) 12 **B)** 15 **C)** $\frac{15}{2}$ **D)** $\frac{20}{3}$ **E)** 20

5 ¿Cuántos números de tres cifras cumplen que la cifra central es la media aritmética de las otras dos?

A) 42 **B)** 43 **C)** 44 **D)** 45 **E)** 46

6 Si un cuadrado aumenta de tamaño incrementando su perímetro un 10 %, el área aumenta un…

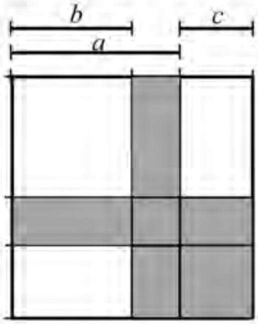
A) 10 % **B)** 21 % **C)** 20 % **D)** 100 % **E)** 40 %

XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel III)

7 Sabiendo que $2^{18} \cdot 3^{6} = a^{b}$, con a y b enteros positivos, ¿cuál es el menor valor posible de la suma $a + b$?

A) 32 **B)** 30 **C)** 27 **D)** 28 **E)** 24

8 Usando los segmentos a, b y c hemos dibujado la siguiente figura donde un cuadrado se divide en 3 cuadrados y 6 rectángulos, estando los cuadrados situados sobre la diagonal. ¿Cuál de las siguientes expresiones nos da el área de la zona sombreada?



A) $(a+c)^2-(b+c)^2$ **B)** $a^2-b^2+c^2$

C) a^2-b^2+2bc **D)** $(a+c)^2-(a-b)^2$

E) $(a+c)^2-(b+c)^2+c^2$

9 ¿Cuánto suman las soluciones reales positivas de la ecuación $x^8+64=20x^4$?

A) 2 **B)** 4 **C)** $3\sqrt{2}$ **D)** $2+\sqrt{2}$ **E)** $2\sqrt{2}$

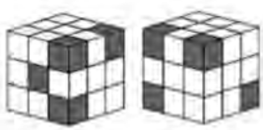
10 De las 25 preguntas del Concurso de Primavera, Patricia ha contestado a todas, mientras que Gabriel ha respondido bien a todas las que ha contestado, pero ha dejado algunas en blanco. Entre los dos han obtenido 225 puntos. ¿Cuántos puntos ha obtenido Gabriel?

A) 60 **B)** 77 **C)** 85 **D)** 105 **E)** 115

11 Dos números son primos entre sí cuando su único divisor común es el 1. Si sacamos dos números diferentes al azar del 2 al 10 (ambos incluidos), ¿qué probabilidad hay de que sean primos entre sí?

A) $\frac{11}{18}$ **B)** $\frac{3}{4}$ **C)** $\frac{19}{36}$ **D)** $\frac{17}{36}$ **E)** $\frac{2}{3}$

12 El siguiente dibujo muestra un cubo visto desde dos perspectivas diferentes. Sabiendo que está formado por 27 cubitos, algunos de ellos grises y otros blancos, ¿cuál es el número máximo de cubitos grises que puede haber?



A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel III)

13 Luis tiene instalado en su jardín un riego automático en el que el agua fluye por una tubería de 3 cm de diámetro interior. Ha tenido mala suerte este invierno y se le ha roto, pero ha decidido aprovechar para cambiar la instalación por otra con tuberías más estrechas de 1 cm de diámetro interior y minimizar así el impacto de futuras averías. ¿Cuántas tuberías estrechas necesitará si no quiere reducir el caudal de agua que llega a su jardín?

A) 3 **B)** 3π **C)** 6 **D)** 9 **E)** 9π

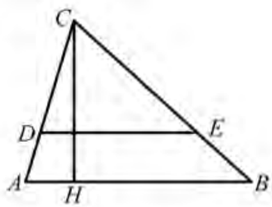
14 Con los veinticinco enteros consecutivos del -10 al 14 puede construirse un cuadrado mágico de 5×5; es decir, podemos repartir los veinticinco números en una cuadrícula de 5×5 de forma que la suma de los números de cada una de sus filas, cada una de sus columnas y sus dos diagonales sea la misma. ¿Cuál es el valor de esta suma común?

A) 2 **B)** 5 **C)** 10 **D)** 25 **E)** 50

15 Siete cubos de volúmenes 1, 8, 27, 64, 125, 216 y 343 cm^3 se apilan verticalmente por tamaño de mayor a menor para formar una torre. Excepto el cubo base, el mayor de todos, el resto descansa completamente en el cubo inferior. ¿Cuál es la superficie total, en cm^2, de la torre así construida, incluyendo en esta superficie la cara que se apoya en el suelo?

A) 644 **B)** 658 **C)** 664 **D)** 720 **E)** 749

16 El triángulo ABC de altura $CH = 2$ lo hemos dividido en un triángulo DEC y un trapecio $ABED$ de igual área. ¿Cuánto mide la altura del trapecio?



A) $\frac{2}{3}$ **B)** $2-\sqrt{2}$ **C)** $2\sqrt{2}-2$

D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **E)** $\sqrt{2}$

17 En una pista circular están entrenando dos ciclistas, Alba y Carlos, en rondas de tres minutos. Cada segundo que pasa, Alba recorre 30º de la circunferencia y Carlos 20º. Suponiendo que empiezan a la vez en puntos opuestos y que recorren la pista en sentido contrario, ¿cuántas veces se cruzarán en los tres minutos que dura cada ronda del entrenamiento?

A) 25 **B)** 24 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 30

XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel III)

18 Cuando don Retorcido se disponía a proponer la ecuación del margen, Comenúmeros aprovechó un descuido de su profesor y se zampó el segundo miembro de la ecuación. Pero don Retorcido, lejos de amilanarse, cambió sobre la marcha la pregunta a: ¿Cuántas soluciones enteras tenía mi ecuación si os digo que el segundo miembro era un número entero par?

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x+\left(\frac{1}{4}\right)^x=¿?}$$

A) Infinitas **B)** Ninguna **C)** Tres **D)** Doce **E)** No se puede saber

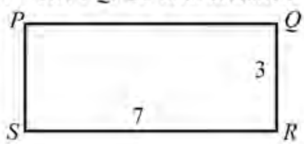
19 Si $\begin{cases} a+2b+3c=47 \\ 4a+5b+6c=71 \end{cases}$, entonces $8a+9b+10c$ es igual a...

A) 103 **B)** 114 **C)** 118 **D)** 95 **E)** 105

20 ¿Cuántos números de cinco cifras tienen exactamente cuatro cifras iguales?

A) 400 **B)** 450 **C)** 540 **D)** 405 **E)** 500

21 En una mesa rectangular con borde de siete metros de largo y tres metros de ancho lanzamos una bola desde P formando un ángulo de 45º con PQ. La bola continúa rebotando con ángulos de 45º cada vez que choca contra un borde. Si la bola se detiene al chocar contra un vértice, ¿en qué vértice acabará su movimiento?



A) P **B)** Q **C)** R

D) S **E)** No choca contra ningún vértice

22 ¿Cuántos cubos perfectos hay entre los números $A = 2^9 - 1$ y $B = 2^{18} + 1$, ambos inclusive?

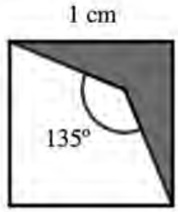
A) 9 **B)** 27 **C)** 28 **D)** 56 **E)** 57

23 Construimos todos los triángulos escalenos de perímetro 21 cm y lados enteros medidos en cm. ¿Cuántos triángulos diferentes tenemos?

A) 6 **B)** 7 **C)** 9 **D)** 12 **E)** 15

XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel III)

24 Hemos dividido un cuadrado de lado 1 cm en una cometa y una punta de flecha (cuadrilátero sombreado). Si los lados que forman el ángulo de 135º son iguales, ¿cuál es, en cm², el área de la punta de flecha?



A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ **E)** $\frac{3}{8}$

25 Una secuencia de Shonk es una serie finita, estrictamente creciente, de números enteros cuyo producto es un cuadrado perfecto. Por ejemplo, [2, 6, 27] es una secuencia de Shonk.
Si [28, x, y, 65] es una secuencia de Shonk, ¿cuánto vale la suma $x + y$?

A) 80 **B)** 87 **C)** 103 **D)** 77 **E)** 96

XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel IV)

concurso de primavera MATEMÁTICAS

XXV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 23 de abril de 2022

NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

Escribe tu número de identificación, tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. **Presta mucha atención al formato de los números.**

IMPORTANTE: Comprueba que el número Mod. En tu hoja de respuestas es 4.

No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 puntos***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

LEE ATENTAMENTE CÓMO DEBES MARCAR LAS OPCIONES EN LA HOJA DE RESPUESTAS Y QUÉ HACER SI TE EQUIVOCAS.

Te sugerimos que vayas marcando tus soluciones en la hoja de la prueba y cuando tengas cuatro o cinco las pases todas juntas a la hoja de respuestas.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

COLABORAN

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
MCGraw-Hill Education
Smartick

XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel IV)

1 El resultado de $\sqrt{49+20\sqrt{6}}-\sqrt{49-20\sqrt{6}}$ es:

A) $4\sqrt{6}$ **B)** 14 **C)** $20\sqrt{6}$ **D)** $40\sqrt{6}$ **E)** $98+40\sqrt{6}$

2 Si $\begin{cases} a+2b+3c=9 \\ a+4b+9c=27 \end{cases}$, entonces $a+3b+6c$ es igual a:

A) 15 **B)** 18 **C)** 21 **D)** 24 **E)** 36

3 ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $x+\sqrt{x-2}=4$?

A) Dos reales **B)** Dos imaginarias **C)** Ninguna
D) Una real **E)** Una real y una imaginaria

4 Inscribimos una esfera de radio 15 cm en un cono cuya generatriz es igual al diámetro de la base. ¿Cuántos cm mide la altura del cono?

A) 50 **B)** $45\sqrt{3}$ **C)** $45\sqrt{2}$ **D)** 45 **E)** $45(\sqrt{2}-1)$

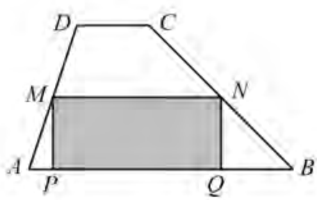
5 Los números de cuatro cifras cuyos digitos suman 4 se colocan en una lista en orden decreciente. ¿Qué lugar ocupa el número 2020?

A) 13 **B)** 12 **C)** 8 **D)** 7 **E)** 6

6 Hay un único entero positivo n tal que $\log_2(\log_{16} n)=\log_4(\log_4 n)$. ¿Cuánto suman las cifras del número n?

A) 4 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 11 **E)** 13

7 El rectángulo $PQNM$ tiene 13 m² de área y M y N son los puntos medios de los lados AD y BC del trapecio $ABCD$. ¿Cuál es el área, en m², del trapecio $ABCD$?



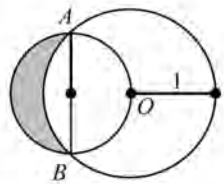
A) 28 **B)** 27 **C)** 26
D) 25 **E)** 24

XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel IV)

8 ¿Cuántas sumas de dos o más enteros positivos consecutivos dan 100 como resultado?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

9 Dada la circunferencia de centro O y radio 1, elegimos la cuerda AB de modo que la circunferencia cuyo diámetro es AB pasa por O. ¿Cuál es el área de la lúnula sombreada en la figura?



A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{\pi}{2}$ **D)** $\frac{\pi}{3}$

E) 1

10 Si z es un número complejo tal que $\frac{z-i}{z+i}$ es imaginario puro, el módulo de z es:

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B)** 1 **C)** $\sqrt{2}$ **D)** $1+\sqrt{2}$ **E)** $2\sqrt{2}$

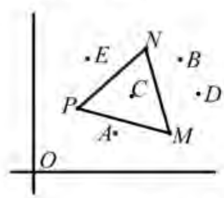
11 Si x es un número entero positivo, ¿para cuántos valores de x existe un triángulo de lados $\log_2 x$, $\log_4 x$, 3?

A) 57 **B)** 59 **C)** 61 **D)** 63 **E)** 65

12 Todas las rectas de ecuación $ax + by = c$, donde los coeficientes a, b y c (en este orden) están en progresión aritmética, pasan por:

A) $P(1, 2)$ **B)** $P(0, 1)$ **C)** $P(1, -2)$ **D)** $P(1, 0)$ **E)** $P(-1, 2)$

13 En la figura, O es el origen de coordenadas. ¿Cuál es el punto cuyas coordenadas son la semisuma (la mitad de la suma) de las coordenadas de M, N y P?



A) A **B)** B **C)** C **D)** D

E) E

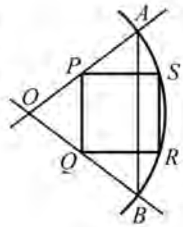
14 ¿Cuál es la suma de todos los números de dos cifras $[ab]$ que cumplen la igualdad $\frac{[ab]}{[ba]} = \frac{4}{7}$?

($[ab]$ representa un número de dos cifras, no un producto)

A) 120 **B)** 72 **C)** 162 **D)** 210 **E)** 100

XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel IV)

15 Sea AB una cuerda de longitud 6 cm en una circunferencia de centro O y radio 5 cm. Inscribimos en el sector circular OAB un cuadrado $SPQR$ con lado paralelo a AB, tal y como se ve en la figura. ¿Cuál es, en cm², su área?



A) $\frac{225}{109}$ **B)** $\frac{9}{4}$ **C)** $\frac{225}{91}$ **D)** $\frac{900}{109}$

E) 9

16 ¿Cuál de estos números es el mayor?

A) sen 20º **B)** cos 20º **C)** tg 20º **D)** $\frac{1}{\text{sen } 20^\circ}$ **E)** $\frac{1}{\text{tg } 20^\circ}$

17 Antes del partido de fútbol entre el Real Madrid y el Manchester City se hicieron cinco predicciones:

a) El partido no terminará en empate.
b) El Real Madrid marcará.
c) El Real Madrid ganará.
d) El Real Madrid no perderá.
e) Se marcarán exactamente tres goles.

¿Cuál fue el resultado final del partido Real Madrid – Manchester City si exactamente tres de estas cinco predicciones resultaron ciertas?

A) Madrid: 2, City: 1 **B)** Madrid: 0, City: 3 **C)** Madrid: 1, City: 2

D) Madrid: 3, City: 0 **E)** Madrid: 1, City: 0

18 Juan elige un número entero al azar entre el 1 y el 9. Lo mismo hace María independientemente de lo que hace Juan. Se suman los dos números, ¿cuál es la cifra de las unidades más probable de esta suma?

A) 0 **B)** 1 **C)** 5 **D)** 9

E) Todas las cifras tienen la misma probabilidad

19 El número de soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$ de la ecuación $\text{sen}^8 x + \cos^6 x = 1$ es:

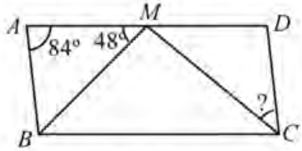
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

20 Si $a \geq 0$, el valor mínimo de la función $f(x) = 2|x-a| + 3|x+a|$ es:

A) 0 **B)** $2a$ **C)** $4a$ **D)** $5a$ **E)** $6a$

XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel IV)

21 En el paralelogramo $ABCD$, M es el punto medio del lado AD, el ángulo $B\hat{A}M = 84^o$ y $A\hat{M}B = 48^o$, entonces $D\hat{C}M$ mide:

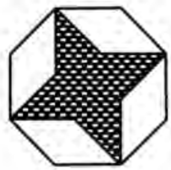


A) 36° **B)** 42° **C)** 44° **D)** 45° **E)** 48°

22 En el triángulo ABC se tiene que $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$ y $\operatorname{tg} B = \frac{21}{20}$. El cociente $\frac{AC}{BC}$ vale:

A) $\frac{7}{29}$ **B)** $\frac{3}{5}$ **C)** $\frac{5}{7}$ **D)** $\frac{21}{29}$ **E)** $\frac{35}{29}$

23 El octógono regular de la figura está descompuesto en cuatro rombos y una estrella de cuatro puntas. Si el lado del octógono mide 1 cm, el área de la estrella, en cm^2, es:



A) $\sqrt{2}$ **B)** 2 **C)** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ **D)** $\frac{9}{4}$

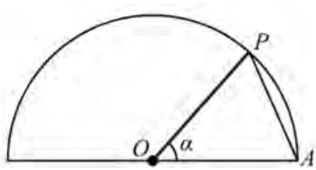
E) $2\sqrt{2}$

24 ¿Cuántas claves de cuatro cifras se pueden escribir de modo que aparezcan dos y solo dos de las diez cifras del sistema decimal? [El 0 puede estar al comienzo]

A) 270 **B)** 450 **C)** 540 **D)** 630 **E)** 720

25 En el semicirculo de la figura, donde $OA = 1$, la cuerda AP coincide con:

A) sen α **B)** tg α **C)** $\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ **D)** $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ **E)** $2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$



XXV Concurso 1ª Fase

XXV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (1ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	C	1	C	1	B	1	A
2	A	2	D	2	A	2	C
3	B	3	D	3	E	3	D
4	C	4	D	4	C	4	D
5	B	5	A	5	A	5	A
6	E	6	D	6	A	6	C
7	D	7	C	7	B	7	C
8	B	8	D	8	C	8	E
9	D	9	E	9	C	9	D
10	C	10	C	10	D	10	B
11	E	11	B	11	E	11	D
12	C	12	A	12	C	12	E
13	A	13	B	13	B	13	B
14	D	14	B	14	D	14	D
15	C	15	A	15	E	15	C
16	D	16	E	16	A	16	B
17	C	17	C	17	B	17	A
18	A	18	E	18	B	18	A
19	A	19	E	19	E	19	B
20	E	20	D	20	B	20	D
21	A	21	E	21	C	21	A
22	B	22	A	22	B	22	B
23	A	23	C	23	C	23	C
24	C	24	E	24	D	24	E
25	E	25	A	25	B	25	C

XXV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
TABLA DE SOLUCIONES (2ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	D	1	D	1	C	1	A
2	C	2	B	2	D	2	B
3	B	3	A	3	A	3	D
4	E	4	B	4	A	4	D
5	C	5	D	5	D	5	C
6	B	6	C	6	B	6	E
7	A	7	D	7	B	7	C
8	B	8	E	8	E	8	B
9	A	9	A	9	D	9	A
10	D	10	E	10	D	10	B
11	A	11	A	11	A	11	B
12	E	12	C	12	D	12	E
13	B	13	D	13	D	13	B
14	E	14	B	14	C	14	A
15	A	15	D	15	B	15	D
16	D	16	E	16	B	16	D
17	C	17	B	17	A	17	C
18	B	18	A	18	B	18	A
19	D	19	C	19	A	19	C
20	D	20	E	20	D	20	C
21	B	21	C	21	C	21	B
22	B	22	D	22	E	22	E
23	D	23	A	23	B	23	B
24	B	24	C	24	D	24	D
25	D	25	D	25	B	25	E

XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel I)

XXV Concurso de Primavera de Matemáticas

Soluciones 1ª Fase Nivel I

1. (C) Para conocer la cifra que corresponde a las décimas realizamos la suma de los términos de la operación en una tabla de valores.

M	C	D	U	**d**	c	m
	7	8	3,	**6**	0	0
		5	4,	**3**	2	0
			1,	**0**	9	8
		7	6,	**5**	0	0
1	1	1	9,	**5**	1	8

La cifra que corresponde al orden de las décimas es 5.

2. (A) El número de caramelos que recibe Miguel aumenta en uno en cada reparto de forma que en el primer reparto recibe 2, en el segundo 3, en el tercero 4 y asi sucesivamente hasta llegar a 8; en total recibe 35 caramelos que es la suma de los números: $2 + 3 + 4 +,\dots+ 7 + 8$.

Diego recibe un caramelo en cada reparto, en total 7 caramelos que es el número de repartos. En la bolsa había $35 + 7 = 42$ caramelos.

3. (B) Para obtener el resultado es conveniente realizar una tabla como la siguiente observando las figuras dadas:

	Fig. 1	Fig. 2	Fig. 3	Fig. 4	Fig. 5	Fig. 6	...	Fig. 101
cuadrados B	0	1	4	9	16	25	...	10000
cuadrados N	4	8	12	16	20	24	...	404

El número de cuadrados blancos es igual al cuadrado de la columna menos uno; Así
- En la columna cuarta es: $(4 - 1)^2 = 3^2 = 9$
- En la columna quinta es: $(5 - 1)^2 = 4^2 = 16$
- En la columna 101 es: $(101\text{-}1)^2 = 100^2 = 10\,000$

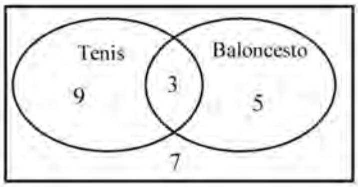
El número de cuadrados negros es igual al número de la columna multiplicado por 4; Así:
- En la columna tercera es: $3 \times 4 = 12$
- En la columna sexta es: $6 \times 4 = 24$
- En la columna 101 es: $101 \times 4 = 404$

La diferencia es: $10\,000 - 404 = 9596$.

XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel I)

4. (C) Representamos los datos en un diagrama de esta forma:

- Como de los 12 estudiantes que practican tenis hay 3 que también practican baloncesto, 9 practican solo tenis y 3 ambos deportes. Escribimos 3 en la intersección y 9 en la zona que corresponde a solo tenis.
- Como de los 8 estudiantes que practican baloncesto hay 3 que también practican tenis, 5 solo practican baloncesto. Escribimos 5 en la zona que corresponde solo a baloncesto.
- Fuera del diagrama escribimos 7 que corresponde a lo estudiantes que no practican ni tenis ni baloncesto.



El número de estudiantes de la clase de Íñigo es igual a la suma de los números representados en el diagrama: $9 + 3 + 5 + 7 = 24$.

5. (B) Primero, expresamos todas las distancias en la misma unidad de medida; en este caso, en metros:

916 cm = 9,16 m; 63,3 m; 1025 dm = 102,5 m

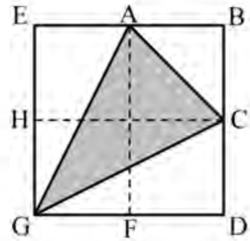
Después, como cada recorrido que hace doña Hormiga es doble, uno de ida y otro de vuelta, sumamos las distancias que recorre expresadas en metros, y multiplicamos por dos.

(9,16 m + 63,3 m + 102,5 m) × 2 = 349,92 m

El número que más se aproxima a la suma obtenida es 350.

XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel I)

6. (E) Observando la figura se puede apreciar que el cuadrado queda dividido en cuatro triángulos, uno gris, y tres blancos. Conociendo la fracción que representan en el cuadrado los tres triángulos blancos se deduce la fracción que representa el triángulo gris. Para la resolución es conveniente nombrar los puntos que se indican en la figura.



- El triángulo ABC representa $\frac{1}{2}$ de1 $\frac{1}{4}$ es decir, $\frac{1}{8}$

- El triángulo CDG representa $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$ es decir, $\frac{1}{4}$

- El triángulo AEG representa $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$ es decir, $\frac{1}{4}$ *3*

Los triángulos blancos representa: $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$

El cuadrado representa $\frac{8}{8}$

Para obtener la fracción que representa el triángulo gris restamos $\frac{5}{8}$ a $\frac{8}{8}$

$\frac{8}{8}-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$, luego el triángulo gris representa $\frac{3}{8}$ del cuadrado.

7. (D) Como 21 es igual a 3 por 7, los valores de A y de C tienen que ser 7 y 3 o 3 y 7. Como 33 es igual a 3 por 11, se deduce que el valor de la letra C es necesariamente 3, el valor de B es 11 y el valor de A es 7 y el valor de D es 5.
A + B + C + D = 7 + 11 + 3 + 5 = 26.

8. (B) El número de fichas que coge Ainhoa corresponde a los primeros números impares consecutivos; el número de fichas que coge Asier, a los primeros números pares consecutivos.
En la siguiente tabla se indica la diferencia entre la suma de los primeros números pares y la suma de los primeros números impares. La diferencia entre el primer número par y el primer número impar es 1; la diferencia entre los dos primeros números pares y los dos impares es 2; la diferencia entre los tres números pares y los tres impares es 3;…, la diferencia entre los diez primeros números pares y los diez primeros impares es 10.

XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel I)

Suma nº pares	2	6	12	20	30	42	56	72	90	110	…
Suma nº impares	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	…
DIFERENCIA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…

La diferencia entre la suma de los primeros números pares y la suma de los primeros números impares es igual a la cantidad de números sumados. Como Asier tiene 10 números (fichas) más que Ainhoa quiere decir que cada uno ha cogido los diez primeros números pares y los diez primeros números impares; es decir, los 20 primeros números naturales. La suma de los 20 primeros números naturales es igual a 210.

9. (D) Como en estas edades no están capacitados para resolver ecuaciones. Mediante tanteos buscamos la edad que cumpla con las dos condiciones del problema:

- Si yo cumplo 7 años, mi tía cumpliría 28 años; dentro de 6 años, yo cumpliría 13 y mi tía 34. 34 no es el triple de 13.
- Si yo cumplo 10 años, mi tía cumpliría 40 años; dentro de 6 años, yo cumpliría 16 y mi tía 46. 46 no es el triple de 10.
- Si yo cumplo 11 años, mi tía cumpliría 44 años; dentro de 6 años, yo cumpliría 17 y mi tía 41. 41 no es el triple de 17.
- Si yo cumplo 12 años, mi tía cumpliría 48 años; dentro de 6 años, yo cumpliría 18 y mi tía 54. 54 es el triple de 18.

10.(C) El área del rectángulo será el área del cuadrado que formamos. Conocido el área del cuadrado calculamos la longitud de su lado realizando la raíz cuadrado del área. El perímetro será igual a cuatro veces la longitud del lado.

- Área del rectángulo: $8 \times 18 = 144 \text{cm}^2$
- Longitud del lado del cuadrado: $\sqrt{144} = 12$ cm
- Perímetro: 12 cm $\times 4 = 48$ cm.

XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel I)

11.(E) Las únicas cifras que podemos utilizar para formar los números con las condiciones que plantea Comenúmeros para comerlos son: 1; 3; 5 y 7.
Los números que cumplen con las condiciones son los siguientes:
117; 135; 153; 171; 315; 333; 351; 513; 531 y 711.

12.(C) A la distancia que hay que recorrer en el maratón se resta las diferentes distancias recorridas por Ana.

Calculamos:
- Un sexto de 42 km son 7 km
- Le quedan por recorrer: 42 – (8 + 7) = 27 km
- Un tercio de 27 km son 9 km
- En total ha recorrido: 7 + 8 + 9 + 10 = 34 km
- Le faltan por recorrer 42 – 34 = 8 km

En este problema los datos sobre tiempos no son necesarios para su resolución.

13.(A) La longitud del lado del cuadrado que tiene sus vértices en los centros de las circunferencias es igual a la longitud de dos radios o un diámetro. Como dos diámetros miden 4 cm, la longitud de un diámetro es 2 cm; por tanto, el lado del cuadrado planteado mide 2 cm y el perímetro del cuadrado 8 cm (2 cm × 4).

14.(D) Problema típico que se resuelve empezando por el final.

Primero, buscamos el cociente de la división 1350 entre 30 que es 45; después, sumamos 30 al cociente anterior (45 + 30 = 75), obtenemos 75 que corresponde al cociente exacto de la división 1350 entre el divisor que buscamos; por último, dividimos 1350 entre 75 y obtenemos 18 que es el divisor que buscamos cuyas cifras suman 9.

15.(C) Las posiciones de las tres cartas son: izquierda, central y derecha.

- Como la carta de **espadas** se encuentra entre el rey y la copa, ocupa la posición central.
- La carta de **oros** que está a la derecha del caballo solo puede ocupar la posición derecha.
- La carta de **copas** tiene que estar en la posición izquierda.
- El **caballo** que está a la izquierda del oro ocupa la posición central. Es el **caballo de espadas**
- El **rey** ocupa la posición derecha. Es **el rey de oros**
- La **sota** ocupa la posición izquierda. Es la **sota de copas**

Solución: SOTA COPAS – CABALLO ESPADAS – REY OROS.

16.(D) Al dividir el hexágono regular en triángulos equiláteros iguales se obtienen 24 triángulos que numeramos del 1 al 24. El área que le corresponde a cada triángulo equilátero es igual a 0,5 cm^2 que se obtiene al dividir el área del hexágono entre 24 ($2\ cm^2 \div 24 = 0{,}5\ cm^2$).
A continuación, buscamos los números primos comprendidos entre 1 y 24, son los siguientes: 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17 y 19; en total nueve números primos. El área que tenemos que colorear es: $9 \times 0{,}5\ cm^2 = 4{,}5\ cm^2$.

17.(C) Primero, calculamos el tiempo transcurrido desde que Diego empezó a ver la pelicula y cuando acabó. Después, restamos los quince minutos que empleó para merendar, y por último expresamos el resultado obtenido en minutos.
18 h 5 min – 16 h 40 min = 1 h 25 min.
1 h 25 min – 15 min = 1 h 10 min
1 h 10 min = 60 min + 10 min = 70 min.

XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel I)

18.(A) Para calcular el área del rectángulo necesitamos conocer sus dimensiones (largo y ancho) y para ello, es preciso saber cuáles son las longitudes del lado de cada uno de los tres cuadrados.

- Como la altura del rectángulo es 12cm, la longitud del lado del cuadrado grande es 12 cm.
- Como la base del rectángulo mide 22 cm, la longitud del lado de cuadrado mediano es 10 cm que se obtienen al restar 12 cm a 22 cm.
- La longitud del lado del cuadrado pequeño es 2 cm que se obtiene al restar 10 cm a 12 cm.
- La longitud del lado del cuadrado pequeño coincide con la longitud de la altura del rectángulo gris y la longitud de la base del rectángulo gris es 8 cm que se obtiene de restar 2 cm a 10 cm.

El área del rectángulo gris es 8 cm × 2 cm = 16 cm^2.

19.(A) El alfabeto español contiene 5 vocales y 22 consonantes. En la siguiente tabla se indica el orden de cada letra en el alfabeto, separando vocales de consonantes

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Voc.	A	E	I	O	U																	
Con	B	C	D	F	G	H	J	K	L	M	N	Ñ	P	Q	R	S	T	V	W	X	Y	Z

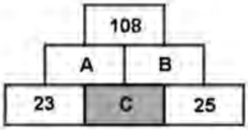
Para conocer las letras que tienen que combinar con 2022 hallamos el resto de la división 2022 entre cinco que nos indica el orden que corresponde a las vocales, y el resto de la división de 2022 entre 22, el de las consonantes.

2022 ÷ 5 = 400 y resto 2. El 2 corresponde a la letra E
2022 ÷ 22 = 91 y resto 20. El 20 corresponde a la letra X
La combinación es: EX2022

20.(E) Sustituimos las letras ***L*** y ***S*** por la operación inventada y operamos.
6***L***24 = (6 + 24) × 6 = 180
24***S***6 = (24 − 6) ÷ 6 = 3
180 + 3 = 183.

XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel I)

21.(A) Para facilitar la comprensión nombramos las casillas vacías con las letras A, B y C



Teniendo en cuenta que el número de cada casilla es igual a la suma de las dos casillas que están debajo podemos argumentar de esta forma:

- La casilla superior es igual a la suma de las dos casillas inferiores: $108 = A + B$
- La casilla A es igual a la suma de las dos casillas inferiores: $23 + C$
- La casilla B es igual a la suma de las dos casillas inferiores: $25 + C$
- Sustituyendo A y B en la primera igualdad tenemos:

$108 = 23 + C + 25 + C \Rightarrow 108 = 48 + 2C \Rightarrow 60 = 2C \Rightarrow C = 30.$

22.(B) Iniciamos la resolución partiendo del mínimo número de monedas que pueden haber en cada bolsillo, en el derecho 2 monedas, y en el izquierdo 4; añadiendo una moneda a cada uno de los bolsillos de forma sistemática, cuando en el bolsillo derecho tenga 5 monedas y en izquierdo 7 se cumple la condición del problema; es decir, si paso una moneda del bolsillo derecho al izquierdo habrá doble número de monedas en el bolsillo izquierdo que en el derecho; de esta forma, en el bolsillo derecho quedan 4 monedas y en el izquierdo 8. En la tabla queda gráficamente reflejado.

B izquierdo	4	5	6	7	
B derecho	2	3	4	5	

Esteban tiene $7 + 5 = 12$ monedas.

XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel I)

23.(A) Pasando una bola negra de la bolsa izquierda a la bolsa derecha se cumple la condición del problema. Las probabilidades quedarían así: La probabilidad de sacar una bola negra en la primera bolsa es $\frac{4}{7}$ y la probabilidad de sacar una bola blanca en la segunda bolsa también es $\frac{4}{7}$.

24.(C) Al final, la niña Centésima tiene 36 castañas (22 + 14) y don Retorcido también 36 castañas, que es el doble de las que le quedan a Comenúmeros. A Comenúmeros le quedan 18 castañas. El número de castañas que encontró Comenúmeros es igual al número de castañas que le quedan (18) más las que entregó a la niña Centésima (22) en total 40 castañas.

25.(E) Para facilitar la argumentación del problema y para las igualdades utilizaremos las letras iniciales del nombre de las aves que se mencionan en el enunciado.

Como un cuervo pesa lo mismo que una paloma y una urraca ($C = P + U$), una paloma pesa lo mismo que un cuervo menos el peso de una urraca ($P = C - U$).

Como dos cuervos pesan lo mismo que tres urracas (2C = 3U), un cuervo pesa lo mismo que una urraca y media urraca $\left(C = U + \frac{U}{2}\right)$.

Una paloma pesará lo mismo que dos urracas y media urraca, menos el peso de una urraca, lo que significa que una paloma pesa lo mismo que media urraca:
$\left(P = U + \frac{U}{2} - U\right) \Rightarrow P = \frac{U}{2}$.

Como dos urracas pesan lo mismo que 8 gorriones, una urraca pesa lo mismo que 4 gorriones, media urraca pesa lo mismo que dos gorriones, por tanto una paloma pesa lo mismo que 2 gorriones: ($P = 2G$) y en consecuencia, tres palomas pesan lo mismo que 6 gorriones: ($P = 6G$).

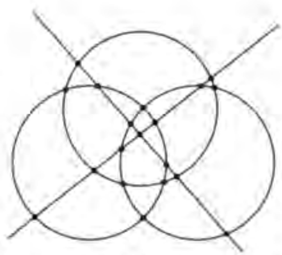
XXV Concurso de Primavera de Matemáticas

Soluciones 1ª Fase Nivel II

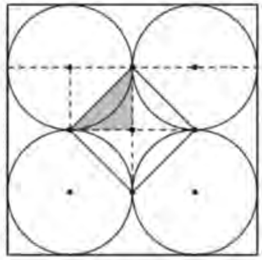
1. (C) Vamos a ponernos en lo peor. Sacan dos y no son del mismo color y tampoco lo es el tercero. Cuando saquen el cuarto seguro que tendrán una pareja del mismo color, que se la lleva la primera trilliza. Quedan dos calcetines. Sacan nuevamente (y van cinco) y resulta que es del tercer color, asi que tiene que sacar por sexta vez. Ahora hay 4 calcetines, así que seguro que hay dos del mismo color. Se los lleva la segunda trilliza. La tercera trilliza se queda con los otros dos, saca otro (el séptimo) y tiene mala suerte, así que saca el octavo. Como ahora tiene cuatro, seguro que dos son del mismo color y se va tan contenta.
¡Atención! Como solo sacan 8 calcetines y hay 12 de cada color, seguro que ningún color se gasta.

2. (D) La hormiga y el cerdo son los más separados entre sí a 10 metros, así que estarán en los extremos. La rana es la que más cerca está de la hormiga a 2 metros.
A 3 metros de la rana se encuentra el pato, que será el animal que se encuentra en medio.

3. (D) Al ser circunferencias del mismo radio, como máximo, dos circunferencias se intersecan en 2 puntos distintos. Por otro lado, dos rectas se intersecan en, a lo sumo, un punto; y una recta y una circunferencia en 2 puntos máximo.
Por lo tanto, para obtener el máximo número de puntos de intersección, habría que colocar las circunferencias de manera que todas se corten entre ellas en 2 puntos distintos, que ambas rectas corten a estas tres circunferencias y que las rectas no sean paralelas, de forma que entre ellas dos se corten. Asi, tenemos $2\cdot3+2\cdot3\cdot2+1=19$ puntos de intersección.



XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel II)



4. (D) El cuadrado interior lo podemos dividir en 4 triángulos rectángulos isósceles iguales. Los lados iguales de estos triángulos coinciden con el radio de las circunferencias, que valen 1 cm.

El área de cada triángulo es $\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$, así que el área del rectángulo es $4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \text{ m}^2$

5. (A) Llamemos *a*, *b*, *c* y *d* a los números que faltan.

9	*a*	*b*	*c*	d	2022

Entonces: $b = 9 + a$

$c = a + b = a + 9 + a = 2a + 9$

$d = b + c = 9 + a + 2a + 9 = 3a + 18$

$2022 = c + d = 2a + 9 + 3a + 18 = 5a + 27.$

Así pues, $5a = 2022 - 27 = 1995$ y, por tanto, $a = 1995/5 = 399$.

Calculamos $c = 2a + 9 = 2 \cdot 399 + 9 = 798 + 9 = 807$.

6. (D) En primer lugar vemos el valor de cada una de las letras:
La P vale 2, la R es 4, la I es 1, la M equivale a 3, la A es 1, la V vale 3, la E es 1.
Sustituimos las letras por los números correspondientes:
$(P - R + I) \cdot (M - A + V) \cdot (E - R + A) = (2 - 4 + 1) \cdot (3 - 1 + 3) \cdot (1 - 4 + 1) =$
$= (-1) \cdot 5 \cdot (-2) = 10.$

7. (C) Como el área del cuadrado es Lado^2 = 36 m^2, tenemos que el lado L del cuadrado mide $L = \sqrt{36} = 6$ m. Así, la altura del rectángulo es 3 m. Como el área del rectángulo es Área = Base × Altura, tenemos que la base del rectángulo mide $b = \frac{36}{3} = 12$ m. y, como la parte de la base del rectángulo que coincide con la base del cuadrado mide 3 m, la base del triángulo ha de medir $12 - 3 = 9$ m.

Así, despejando la altura, h, de la fórmula del área del triángulo $A = \frac{Base \cdot Altura}{2}$, nos queda que $h = \frac{36 \cdot 2}{9} = 8$ m.

XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel II)

8. (D) Para que un número sea divisible entre 4 tiene que ser par y el número formado por sus dos últimas cifras debe ser múltiplo de 4.
Si acaba en 2, como 12 y 32 son múltiplos de 4 y 42 no lo es, obtenemos cuatro números que son 3412, 4312, 1234, 2134
Si acaba en 4, la cifra de las decenas sólo puede ser 2, así que obtenemos dos posibles números, el 1324 y el 3124.
Luego tenemos 6 posibilidades en total.

9. (E) Realizando la división llegamos a que $1234:9999=0,\overparen{1234}$. Para obtener la suma de los 100 primeros números decimales, dividimos 100 entre 4, ya que nuestros números decimales van de 4 en 4. Dado que $100 = 25 \cdot 4$ tenemos 25 grupos de cuatro números. Como cada grupo de suma $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, tenemos que la suma de los 100 primeros decimales es $25 \cdot 10 = 250$.

10.(C) El décimo sobrino recibe la décima parte, así que todavía quedan 9/10 de las piedras.

Al noveno le corresponde $\frac{1}{9}$ de $\frac{1}{9}=\frac{1}{10}$ y todavía quedan 8/10 de las piedras.

Al octavo le corresponde $\frac{1}{8}$ de $\frac{8}{10}=\frac{1}{10}$, todavía quedan $\frac{7}{10}$ de las piedras.

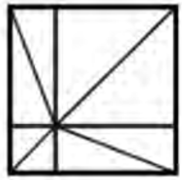
Siguiendo el mismo proceso, vemos que todos los sobrinos reciben la misma proporción de piedras, la décima parte. Como el quinto recibe 5 piedras, el primero también recibe 5 piedras.

11.(B) Si llamamos A al número de zanahorias que tiene Angi, B al número de zanahorias que tiene Buni y C al número de zanahorias que tiene Crasti, deducimos de las zanahorias que tiene Buni que $A - 10 = C - 2$, despejando A queda: $A = C + 8$. Es decir, A y C son números que distan 8 entre sí, como las parejas del 1 y el 9, el 2 y el 10, el 3 y el 11, … Además, $A + C = 18$, por lo que, necesariamente, Angi tiene que tener 13 zanahorias y Crasti 5 zanahorias. Entonces, Buni tiene 3 zanahorias, y entre los tres tienen $13 + 3 + 5 = 21$ zanahorias.

XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel II)

12.(A) Todos los triángulos tienen la misma base, que coincide con el lado del cuadrado Fíjate que las alturas de los triángulos opuestos suman lo mismo (el lado del cuadrado) y, por tanto, las áreas de los triángulos opuestos deben sumar lo mismo $\frac{L\cdot a_1}{2}+\frac{L\cdot a_2}{2}=\frac{L\cdot(a_1+a_2)}{2}=\frac{L\cdot L}{2}$, la mitad del área del cuadrado.

Si llamamos A al área buscada, debe ser $84 + 32 = 90 + A$, es decir, $A = 116 - 90 = 26$ cm^2.



También puedes trazar los segmentos de la figura y observar que el cuadrado se divide en cuatro rectángulos divididos por su diagonal y observar de este modo que la suma de las áreas de los triángulos opuestos debe ser la misma, la mitad del área del cuadrado.

13.(B) Las únicas posibles combinaciones de I, V, X que corresponden a números romanos son:

Empezando con X:	**Empezando con V:**	**Empezando con I:**
XXX	VII	III
XXI		
XIX		
XXV		
XII		
XVI		
XIV		

14.(B) Comencemos factorizando el número 594, y obtenemos que $594 = 2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot11\cdot1$. Ponemos el 1 ya que podría haber un hijo de un año.

En primer lugar, nos dice que Luisillo tiene el doble de años que Pedrín, observando los factores vemos que Luisillo tendrá 2 años y Pedrín 1.

Después nos dice que Alba tiene el triple de edad que Bea, luego Alba tendrá 9 años y Bea 3.

Nos damos cuenta que queda un 11, por lo tanto Don Retorcido tendrá un quinto hijo o hija que tiene 11 años.

Sumando las edades tenemos que $2 + 1 + 9 + 3 + 11= 26$

15.(A)

1	♒	♒	**¿?**	♒	**8**	♒	♒	♒	**10**

Comenzamos deduciendo el valor de la segunda posición: no puede ser una o dos unidades menor al anterior porque el anterior es 1, entonces nos quedaría 0 o -1, y los números que hemos escrito van del 1 al 10, por lo tanto, sólo puede ser 3 unidades mayor que el anterior, es decir, el 4.

Pasamos ahora a deducir el número de la novena posición: por un razonamiento parecido al anterior, en este caso el 10, que es el valor de la última posición, no puede ser una o dos unidades menor al anterior, porque entonces el número anterior sería 11 o 12, estos números no están entre 1 y 10. Así que la única posibilidad que queda es que el 10 sea un número 3 unidades mayor que el anterior, con lo que el número de la novena posición es 7.

Con lo que tendríamos nuestra cinta de esta manera:

1	**4**	♒	**¿?**	♒	**8**	♒	♒	**7**	**10**

Continuamos deduciendo el número de la octava posición. Según el criterio utilizado, este podría ser un 4, un 8 o un 9. Como el 4 y el 8 ya los tenemos colocados, únicamente puede ser el valor 9.

Analizando ahora el número de la séptima posición, si lo comparamos con el número anterior, que es el 8, nos sale que podría ser el número 11, 6 o 7. Dado que 11 no está entre 1 y 10 y 7 ya está colocado, únicamente puede ser el número 6 (también se puede deducir este número en función del 9 que es el valor de la posición siguiente).

Pasamos ahora a deducir el número de la quinta posición. Comparando con el 8 de la derecha, en esta posición sólo pueden ir el 5, 9 o 10. Como los demás ya los tenemos situados, solamente puede ser el número 5.

Ya tenemos la cinta de la siguiente forma:

1	**4**	♒	**¿?**	**5**	**8**	**6**	**9**	**7**	**10**

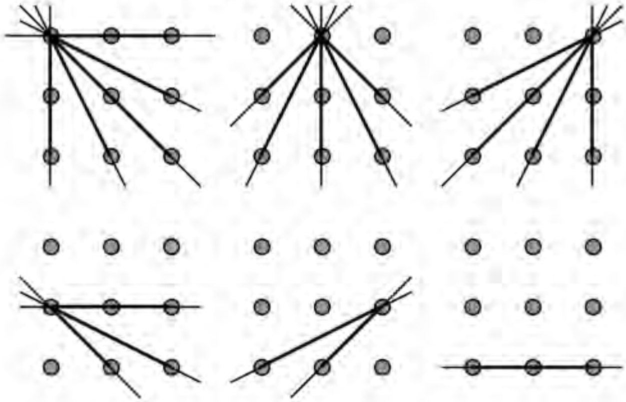
Ahora pasamos a calcular el valor que nos piden. Fijándonos en el 5 de la derecha este sólo puede ser los números 2, 6 o 7. Como el 6 y el 7 ya están colocados únicamente puede ser el número 2.

Asi, la colocación definitiva de los números en la cinta queda:

1	**4**	**3**	**2**	**5**	**8**	**6**	**9**	**7**	**10**

XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel II)

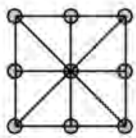
16.(E) Si trazamos todos los caminos, obtenemos 20.



También se puede calcular cuántas rectas hay hallando el número de parejas que se pueden hacer con nueve puntos y contando solo una de las tres parejas que están alineadas.

Hay ocho rectas que pasan por tres puntos, luego hay que quitar $8 \times 2 = 16$,

$$C_{9,2} - 16 = \frac{9 \times 8}{2} - 16 = 36 - 16 = 20$$



17.(C) Como la descomposición en factores primos de 18 es $18 = 2 \cdot 3^2$, las multiplicaciones de tres cifras que dan como resultado 18 son las posibles agrupaciones de tres de estos factores, es decir, $9 \cdot 2 \cdot 1$, $6 \cdot 3 \cdot 1$ y $3 \cdot 3 \cdot 2$.

Como buscamos un número de tres cifras donde su producto sea de la forma anterior, debemos descartar la multiplicación $18 \cdot 1 \cdot 1$, puesto que el número 18 consta de dos cifras.

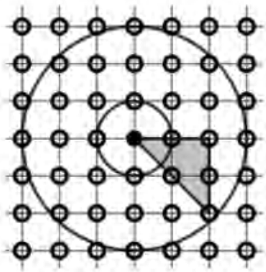
Así, los números de tres cifras que cumplen lo solicitado en el problema son:

921	912	192	129	291	219
631	613	361	316	136	163
332	323	233			

En total, son 15 números distintos.

XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel II)

18.(E) Los puntos deben estar fuera del círculo con centro el punto negro y radio 1 y dentro del circulo con mismo centro y radio 3. Si lo haces a mano alzada te puede quedar la duda de los que pasa con los puntos que quedan más cerca de la circunferencia de radio 3, pero aplicando el Teorema de Pitágoras puedes comprobar que esos puntos están a distancia $\sqrt{8}$ que es menor que 3. Así pues, en total hay 20 puntos que están a más de 1 cm y menos de 3 cm del punto negro.

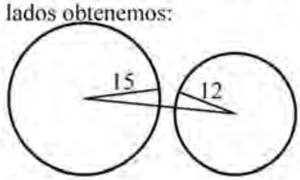


19.(E) Para poder formar un triángulo con tres segmentos, es necesario que la suma de las longitudes de dos de ellos sea mayor que la longitud del tercero.
La suma de los lados conocidos es 12 + 15 = 27. Si descomponemos los perimetros propuestos en las soluciones en suma de los lados obtenemos:

35 = 8 + 27; **42 = 15 + 27;**

45 = 18 + 27; **50 = 23 + 27;**

55 = 28 + 27.



Vemos que en el caso del 55 el lado desconocido tendría que medir más que la suma de los dos conocidos, lo cual no puede ser.

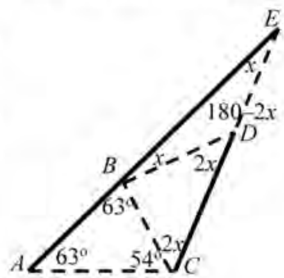
20.(D) Llamemos x al ángulo que buscamos. Fíjate que los triángulos ABC, BCD y BDE son isósceles.

En el triángulo ABC, el ángulo B mide 63 y el ángulo C mide 54º (180 – 63 – 63).

En el triángulo BDE el ángulo desigual mide 180 – $2x$, y, por tanto, en el triángulo BCD los ángulos D y C miden $2x$.

Ahora nos fijamos en el triángulo grande, y sabiendo que la suma de loa ángulos interiores mide 180º tenemos que:
63 + (54+ $2x$) +x = 180 y, por tanto, $3x$ = 63.

Así pues, x = 21º.



XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel II)

21.(E) Observa que podemos escribir todos los números dados como algo multiplicado por 2022^{2021}:

$S = 2021 \cdot 2022^{2021}$ $\quad$ $A = 2022 \cdot 2022^{2021}$

$C = 1 \cdot 2022^{2021}$ $\quad$ $O = 2 \cdot 2022^{2021}$

Así pues, al tener todos el factor 2022^{2021}, para ordenarlos sólo necesitamos fijarnos en el término que multiplica a 2022^{2021}.

Como $1 < 2 < 2021 < 2022$, entonces $C < O < S < A$.

22.(A) Planteamos la ecuación: $\frac{2}{3}x + \frac{3}{4} = \frac{4}{5}$ $\frac{2}{3}x = \frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{1}{20} \Rightarrow x = \frac{3}{40}$

También pues hacer la cuenta a la inversa:

$\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{16-15}{20} = \frac{1}{20}$ $\quad$ $\frac{1}{20} : \frac{2}{3} = \frac{3}{40}$

23.(C) Como Sara tiene 84 setas, vamos a llamar x al número de setas de Carmen e y al número de setas de Clara.

De la frase "Si Carmen me diera un tercio de sus setas,yo tendría el doble que ella" obtenemos la siguiente ecuación:

$$84 + \frac{1}{3}x = 2\left(x - \frac{1}{3}x\right) \Rightarrow 84 + \frac{1}{3}x = 2 \cdot \frac{2}{3}x \Rightarrow 84 = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}x = \frac{3}{3}x \Rightarrow x = 84$$

Si escribimos como ecuación la frase "Si Clara me diera un cuarto de sus setas, yo tendría el triple que ella" y si la resolvemos nos queda:

$$84 + \frac{1}{4}y = 3\left(y - \frac{1}{4}y\right) \Rightarrow 84 + \frac{1}{4}y = 3 \cdot \frac{3}{4}y \Rightarrow 84 = \frac{9}{4}y - \frac{1}{4}y = \frac{8}{4}y = 2y \Rightarrow y = 42$$

Así, las setas que tienen Carmen y Clara son $84 + 42 = 126$.

24.(E) Cada vez que hacemos una nueva figura, añadimos un punto blanco (en medio) y cuatro puntos negros (1 en cada borde), en total 5 puntos.

Como la primera figura tiene 9 puntos, en la décima figura habremos añadido 45 puntos (9 veces 5 puntos). Así pues, la décima figura tendrá 54 puntos.

XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel II)

25.(A) Nuestro objetivo es encontrar un número de cuatro cifras, *abcd*, de manera que
$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) = 27$
Para saber cuántas multiplicaciones de cuatro números dan como resultado 27, primero debemos descomponer 27 como producto de números primos. Tenemos que $27 = 3^3$. Así, las únicas multiplicaciones de cuatro números que dan 27 son:
$3^3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$, $3^2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$, $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1$.
Observemos que cambiando de orden los factores obtengo distintos números de cuatro cifras. (*abcd*)
Si tenemos en cuenta el orden de los factores para estas posibles multiplicaciones, que $a \neq 0 \Rightarrow a+1 \neq 1$, es decir, el primer factor no puede ser 1, y que ningún factor puede ser 3^3, pues $3^3 - 1 = 27 - 1 = 26$ tiene dos cifras y, por tanto, no puede ser una de las cifras. Las cifras pueden ser: 9, 3, 1, 1 ó 3, 3, 3, 1.
En el primer caso obtenemos 6 números: 9311, 9131, 9113, 3911, 3191 y 3119 y en el segundo cado obtenemos 3 números: 3331, 3313 y 3133.
Luego, vemos que hay 9 posibilidades en total.

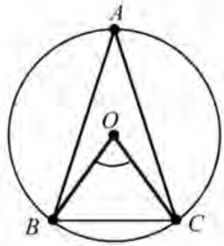
XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel III)

XXV Concurso de Primavera de Matemáticas

Soluciones 1ª Fase Nivel III

1. (B) Para que sean múltiplos de 4, las dos últimas cifras de esos números tienen que determinar un número de dos cifras que es múltiplo de 4. En concreto son estas las terminaciones: 12, 16, 24, 32, 36, 52, 56 y 64, en total 8 casos.
En cada uno de estos casos para la primera cifra hay 4 posibilidades, para la segunda cifra quedan 3 posibilidades, para la tercera 2 posibilidades y para la cuarta 1 posibilidad.
En total hay $8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 192$

2. (A) Los tres ángulos del triángulo suman 180º y como $\hat{B} = 2\hat{A}$, $\hat{C} = 2\hat{A}$ entonces $5\hat{A} = 180^{\circ} \Rightarrow \hat{A} = 36^{\circ}$ y el ángulo central correspondiente $\hat{O} = 2\hat{A} = 72^{\circ} = \dfrac{360^{\circ}}{5}$
Por lo tanto se trata de un pentágono que tiene 5 lados.



3. (E) La opción A no es siempre cierta. $2 + 8 < 6 + 7$
La opción B no es siempre cierta. $5 + 6 < 4 + 8$
La opción C no es siempre cierta. $7 + 1 < 5 + 6$
La opción D no es siempre cierta. Si $7 + 1 < 5 + 6$, $7 + 5 \not< 1 + 6$ y $7 + 6 \not< 1 + 5$
La opción E es cierta porque si b no es la menor de todos sería c o d mayores que a.

4. (C) Si $m = 3k$ y $n = 5q$ entonces $m + n$ no tiene por que ser múltiplo de 15. Por ejemplo $9 + 5 = 14$ no es múltiplo de 15.
$\left.\begin{matrix} 5m = 15k \\ 3n = 15q \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5m + 3n = 15(k + q)$ luego es múltiplo de 15.
$m \cdot n = 3k \cdot 5q = 15kq$ múltiplo de 15.
$m^2 n = 9k \cdot 5q = 45kq$ que es múltiplo de 15.
m^n no tiene por que ser múltiplo de 15, pues $3^5 = 243$ no es múltiplo de 15.
Hay tres casos seguros.

XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel III)

5. (A) $\begin{cases} E_1 : a+b=27 \\ E_2 : b+c=29 \\ E_3 : c+a=44 \end{cases}$ Si tomamos $2E_1$ y $E_2 + E_3$ se obtiene

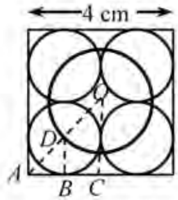
$$\begin{cases} 2E_1 : 2a+2b=54 \\ E_2+E_3 : a+b+2c=73 \end{cases} \Rightarrow \{E_2+E_3-2E_1 : 2c-a-b=73-54=19$$

6. (A) Nos quedamos con el triángulo *ACO* en el que tenemos

$AC=2=OC;\ AO=\sqrt{AC^2+OC^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

$AD=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\Rightarrow DO=\sqrt{2}$ que es el radio de la circunferencia grande.

$AD=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\Rightarrow DO=\sqrt{2}$



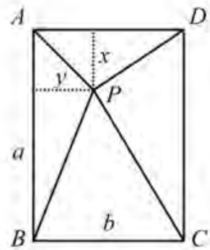
7. (B) $x^2y+xy^2+x+y=90\Rightarrow xy(x+y)+(x+y)=(x+y)(xy+1)=(x+y)9=90\Rightarrow x+y=10$

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=100\Rightarrow x^2+y^2=10^2-2\cdot 8=84$

8. (C) Hay varias posibilidades.

$S_{APD}=\frac{1}{2}bx;\ S_{APB}=\frac{1}{2}ay;\ S_{CPD}=\frac{1}{2}a(b-y)=\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}ay$

$S_{BPC}=\frac{1}{2}b(a-x)=\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}bx$



Pero la suma de las áreas de dos triángulos opuestos es la mitad del área del rectángulo.

$S_{APD}+S_{BPC}=\frac{1}{2}bx+\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}bx=\frac{1}{2}ab$

Luego el área del rectángulo será máxima cuando la suma de dos de los tres áreas del enunciado sea máxima, es decir, 7 + 16 = 23.

Por lo tanto el área máxima del rectángulo será 2 × 23 = 46.

9. (C) $n!=(3!)\cdot(5!)\cdot(7!)=3\cdot2\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2=2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot(2\cdot4)\cdot(3\cdot3)\cdot(5\cdot2)=10!$

XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel III)

10.(D) $2022 = 2\cdot 3\cdot 337$.

Los únicos números que podremos utilizar en los trios son: 1, 2, 3 y 337.

a) $1\cdot 1\cdot 2022 = 2022$ b) $1\cdot 2\cdot 1011 = 2022$ c) $1\cdot 3\cdot 674 = 2022$

d) $1\cdot 6\cdot 337 = 2022$ e) $2\cdot 3\cdot 337 = 2022$

Cinco casos.

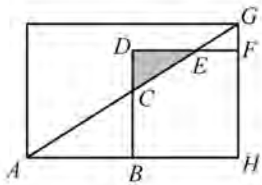
$$AC = \frac{1}{2}AG = \frac{\sqrt{89}}{2},\ BC = \frac{1}{2}HG = \frac{5}{2},\ CD = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$$

11.(E) $AH = 8,\ HG = 5 \Rightarrow\ AG = \sqrt{8^2 + 5^2} = \sqrt{89}$

Los triángulos ABC y CDE son semejantes, por lo tanto

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{DC} \Rightarrow \frac{4}{2{,}5} = \frac{DE}{1{,}5} \Rightarrow DE = 2{,}4$$

$$S_{CDE} = \frac{1}{2}CD\cdot DE = \frac{1}{2}\cdot 1{,}5\cdot 2{,}4 = 1{,}8 = \frac{9}{5}$$



12.(C) $189 \to 6$ casos $369 \to 6$ casos $567 \to 6$ casos

$288 \to 3$ casos $477 \to 3$ casos $558 \to 3$ casos

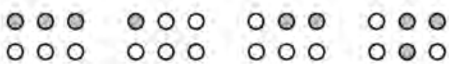
$279 \to 6$ casos $468 \to 6$ casos $666 \to 1$ caso

$378 \to 6$ casos $459 \to 6$ casos $909 \to 2$ casos

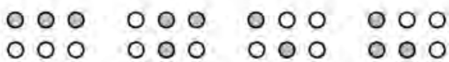
En total hay 54 casos

13.(B) Si analizamos todas las posibilidades veremos que en todos los casos quedan 3 grises y 3 blancos. Si por la cara blanca está el número x por la cara gris estará el número $x + 10$ y la suma de los seis será $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 3\cdot 10 = 51$

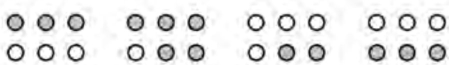
Primer paso 2 de la fila de arriba



Primer paso una de cada fila



Primer paso 2 de la fila de abajo



XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel III)

14.(D) Si cogemos un número de tres cifras, sus cifras sumarán como mucho 27 (9+9+9), y al multiplicar ese producto por cuatro no vamos a tener el número de tres cifras del principio. Lo mismo ocurrirá con números de más cifras, así que los números que estamos buscando son números de dos cifras.
Si a es la cifra de las decenas y b es la cifra de las unidades, el número es 10a + b, y el cuádruple de la suma de sus cifras es $4(a+b)$, así que la relación que tienen que cumplir a y b es:
$4(a+b) = 10a + b \Rightarrow 4a + 4b = 10a + b \Rightarrow 3b = 6a \Rightarrow b = 2a$
Buscamos, por tanto, cuántos enteros positivos podemos construir en los que la cifra de las unidades sea el doble que la de las decenas. Hay exactamente cuatro de estos números: 12, 24, 36 y 48.

15.(E) Si solo hubiera una ronda de tres tiradas, y no se volviera a empezar, la probabilidad de que ganara Comenúmeros sería $\frac{1}{8}$. Si permitimos que haya dos rondas de tres tiradas, la probabilidad sería en este caso $\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{8}\right)^2$. En el caso de n rondas de tres tiradas, la probabilidad de que ganara Comenúmeros sería $S_n = \frac{1}{8}+\left(\frac{1}{8}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{8}\right)^n$, que es la suma de una progresión geométrica, y vale

$$S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1-r}\ .\ S_n = \frac{\frac{1}{8}-\left(\frac{1}{8}\right)^n \cdot \frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{8^n}\right)}{\frac{7}{8}} = \frac{1-\frac{1}{8^n}}{7}$$

Si se permite que haya muchas rondas, eso quiere decir que n se va haciendo cada vez mayor, pero entonces $\frac{1}{8^n}$ se va haciendo cada vez más parecido a cero. Como el juego no acaba nunca, concluimos que la probabilidad de que gane Comenúmeros es $\frac{1}{7}$.

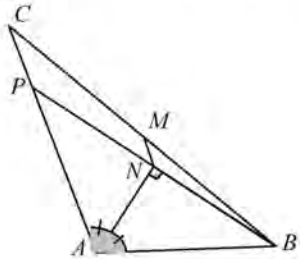
XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel III)

16.(A) Si llamamos P al punto en el que la prolongación del segmento BN corta con el lado AC, vemos que los triángulos ABN y ANP son dos triángulos iguales, porque comparten un lado y todos los ángulos.

Así pues $AP = AB = 15$, y por lo tanto $PC = AC - AP = 3$.

Por otra parte, los triángulos BCP y BMN son semejantes, ya que M es por construcción el punto medio de BC, y acabamos de ver que N también es el punto medio de BP. Así pues, aplicando la semejanza de triángulos, tenemos que:

$\frac{CP}{MN} = \frac{CB}{MB} = 2$ y por tanto $MN = \frac{CP}{2} = \frac{3}{2}$



17.(B) $2^{2022} \cdot 5^{2020} = 2^{2020+2} \cdot 5^{2020} = 2^2 \cdot 2^{2020} \cdot 5^{2020} = 4 \cdot 10^{2020}$

Este es el número que estamos buscando, que será un número que comienza por un "cuatro" seguido de dos mil veinte "ceros", así pues, sus cifras sumarán 4.

18.(B) El menor valor posible de n se obtendrá cuando no haya ninguna persona sentada al lado de otra, y cuando no haya más de dos sitios libres juntos. Esto ocurre cuando hay precisamente una de cada tres sillas ocupadas, por tanto, el menor valor posible de n es 10.

19.(E) En total tengo 10 calcetines. La probabilidad de que escoja los cuatro calcetines rojos es: $\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7} = \frac{1}{210}$

Por otra parte, la probabilidad de que escoja los cuatro calcetines azules es:

$\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7} = \frac{15}{210}$

La otra forma de obtener dos parejas de dos calcetines del mismo color es sacar dos rojos y dos azules. En este caso y teniendo en cuenta las combinaciones de cuatro elementos tomados de dos en dos, la probabilidad es:

$\binom{4}{2}\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{5}{7} = 6\cdot\frac{15}{210} = \frac{90}{210}$

Si sumamos, nos queda el total,

$\frac{1}{210} + \frac{15}{210} + \frac{90}{210} = \frac{106}{210} = \frac{53}{105}$

XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel III)

20.(B) Utilizando las fórmulas de Cardano, sabemos que la ecuación se puede escribir como $(x-n)(x-m)=x^2-(m+n)x+mn$, y si igualamos términos con la ecuación de partida obtenemos el siguiente sistema: $\begin{cases} m=-m-n \\ 2m=mn \end{cases}$

Puesto que el enunciado nos dice que $m \neq 0$, de la segunda ecuación obtenemos $n = 2$, y entonces de la primera llegamos a que $m = -1$, por tanto m y n suman 1.

21.(C) Los ángulos interiores de un polígono de n lados suman $180^\circ(n-2)$.
Concretamente, en un hexágono suman 720º. Si sus valores forman una progresión aritmética, tenemos que la suma se puede expresar como:
$a + (a + k) + (a + 2k) + (a + 3k) + (a + 4k) + (a + 5k) = (2a + 5k) \cdot 3$
Sabemos, por tanto que $(2a+5k)=\dfrac{720^\circ}{3}=240^\circ$. Pero $(2a + 5k)$ es precisamente la suma del segundo y el tercer ángulos $(a + 2k) + (a + 3k) = (2a + 5k)$.
Por tanto, la suma de dos de los ángulos deber ser 240º.

22.(B) Podríamos sacar cuatro bolas de todos los números entre el 5 y el 20, y todas las bolas de los números menores que el 5, y no tendríamos cinco bolas del mismo número. Es decir, podríamos sacar $4 \cdot 16 + 4 + 3 + 2 + 1 = 74$
Así solo nos quedaría bolas entre el 5 y el 20, y las siguientes que sacásemos, fuera la que fuese, haría que tuviéramos cinco bolas con el mismo número, así que para asegurarnos, debemos sacar 75.

23.(C) Veamos cómo se construyen los primeros términos:
$50 \Rightarrow (5^2 + 0^2) = 25 \Rightarrow (2^2 + 5^2) = 29 \Rightarrow (2^2 + 9^2) = 85 \Rightarrow (8^2 + 5^2) = 89$
De momento no hemos encontrado ningún patrón, pero podemos seguir avanzando un poco más. Se comprueba del mismo modo que la sucesión continua como sigue:
$89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4 \to 16 \to 37 \to 58 \to 89$
Y a partir de aquí se repetirá periódicamente. Es decir, después de los 4 primeros términos, tenemos que se repite un patrón cada 8 términos.
Si queremos saber qué número ocupa la posición 2022, quitando los 4 primeros términos, tenemos 2018, que si lo dividimos entre 8 no da exacto, el cociente es 252 y el resto 2. Por tanto, recorreremos 252 veces el patrón completo, y nos quedaremos en el segundo término del patrón, es decir, 145.

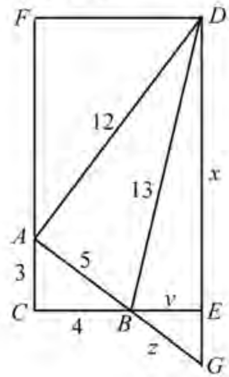
XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel III)

24.(D) A partir de los datos del enunciado y usando el teorema de Pitágoras, sacamos que $AB = 5$ y $BD = 13$.

Por otro lado, partiendo de la figura del enunciado, prolongamos los segmentos AC, AB y DE, y trazamos una paralela a CB que pase por D, tal como se muestra en la figura de la derecha.

Tenemos así que los triángulos ABC y ADG son semejantes, por tanto:

$$\frac{3}{4} = \frac{5+z}{12} \Rightarrow z = 4$$



También son semejantes los triángulos ABC y BEG, por tanto:

$$\frac{4}{5} = \frac{y}{z} = \frac{y}{4} \Rightarrow y = \frac{16}{5}$$

Para obtener x, nos fijarnos en el triángulo ADF: sus catetos miden $x - 3$ y $4 + y$, y la hipotenusa mide 12, así pues, a partir del teorema de Pitágoras, sacamos que

$$x = \sqrt{16^2 - \left(\frac{16}{5}\right)^2} = \frac{56}{5}$$

Y por lo tanto el área que nos piden es

$$S = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{5}\cdot\frac{56}{5} = \frac{504}{25}$$

25.(B) Fijándonos en los tres primeros sumandos de A vemos que podemos expresarlos como $0{,}9 + 0{,}18 + 0{,}027 = 0{,}9 + 0{,}1 + 0{,}08 + 0{,}02 + 0{,}007 = 1 + 0{,}1 + 0{,}007$

Si hacemos la suma de los seis primeros sumandos se obtiene:

$(1 + 0{,}1 + 0{,}007) + 0{,}0036 + 0{,}00045 + 0{,}000054 = 1{,}\ 111104$

Si continuamos con los siguientes sumandos y por las propiedades de los múltiplos, esto mismo seguirá ocurriendo.

Así que: $A = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001 + 0{,}00001 + \ldots = 1{,}11111\ldots = \dfrac{10}{9}$

Y por lo tanto $9A = 10$.

XXV Concurso de Primavera de Matemáticas

Soluciones 1ª Fase Nivel IV

1. (A) La expresión decimal de $\frac{4}{13} = 0,\widehat{307692}$. Se trata de un decimal periódico puro, en el que las cifras decimales se repiten cada seis lugares. Como 2022 es múltiplo de seis, la cifra que ocupa el lugar 2022º es la sexta del periodo, es decir, 2.

2. (C) Los números anotados en cada una de las caras del dado tetraédrico suman: $6 = 1 + 2 + 3$, $7 = 1 + 2 + 4$, $8 = 1 + 3 + 4$ o $9 = 2 + 3 + 4$. Si al lanzar un dado, la cara oculta es la (234), la suma de los números vistos es $6 + 7 + 8 = 21$.
Si la cara oculta es la (134), la suma es $6 + 7 + 9 = 22$, si es la cara (124), la suma es $6 + 8 + 9 = 23$, y si es la cara (123), la suma es $7 + 8 + 9 = 24$. Las cuatro posibilidades son equiprobables.

	21	22	23	24
21	42	43	44	45
22	43	44	45	46
23	44	45	46	47
24	45	46	47	48

La suma que tiene mayor probabilidad de aparecer es 45.

3. (D) Los tres divisores de 70! más pequeños que son mayores que 70 son: 72 (36·2), 74 (37·2), y 75 (25·3). La suma de estos tres números es $72 + 74 + 75 = 221$.

4. (D) Racionalizando las fracciones que forman el número

$$R = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)}{6-5} + \frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{3-2} =$$

$$= 3\sqrt{2} + \sqrt{15} + \sqrt{15} + \sqrt{10} = 1\cdot\sqrt{10} + 2\cdot\sqrt{15} + 3\cdot\sqrt{2}$$

Por tanto, $a = 10$, $b = 15$ y $c = 2$, de modo que $a + b + c = 27$.

XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

5. (A) Sabemos que la suma de los n primeros números naturales viene dada por la expresión $\frac{n(n+1)}{2}$ cuyo resultado es un número entero, que podemos llamar k.

Tenemos entonces que: $n^2 + n - 2k = 0 \Rightarrow n = \frac{-1+\sqrt{1+8k}}{2}$

Si alguno de los valores propuestos es correcto, debe cumplir que al sustituirlo en k en la expresión $8k + 1$ dé un cuadrado perfecto:

$$8 \cdot 2016 + 1 = 16\,128 + 1 = 16\,129 = 127^2.$$

Los demás valores propuestos no lo cumplen.

6. (C) El área de un octógono regular de lado l es $A = \left(2+2\sqrt{2}\right) \cdot l^2$

Esto se deduce fácilmente dividiendo el octógono en ocho triángulos isósceles iguales cuyo ángulo central mide 45° y cuyos lados son l, r y r, donde r es el radio de la circunferencia circunscrita al octógono. Aplicando el teorema del coseno, encontramos la relación entre r y l:

$$l^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos 45^{\circ} = r^2\left(2-\sqrt{2}\right) \Rightarrow r = \frac{l}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

El área de cada uno de los triángulos isósceles es:

$$A_{triángulo} = \frac{r \cdot r \cdot sen 45^{\circ}}{2} = \frac{l^2 \frac{\sqrt{2}}{2}}{2\left(2-\sqrt{2}\right)} = \frac{l^2 \frac{\sqrt{2}}{2}\left(2+\sqrt{2}\right)}{4} = \frac{l^2\left(2+2\sqrt{2}\right)}{8}$$

Y el área del octógono es $A_{octógono} = 8 \cdot \frac{l^2\left(2+2\sqrt{2}\right)}{8} = \left(2+2\sqrt{2}\right) l^2$

Para calcular el área de cada uno de los rombos, al área del octógono le restamos dos veces el área del cuadrado, que es l^2, y dividimos por 4:

$$A_{rombo} = \frac{\left(2+2\sqrt{2}\right) \cdot l^2 - 2 \cdot l^2}{4} = \frac{l^2\sqrt{2}}{2} = \frac{36\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{2}$$

XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

7. (C) Como es una liga de cuatro equipos a doble partido, cada equipo jugó 6 partidos, y en total se jugaron 12 partidos. El equipo, digamos A, para obtener 16 puntos tuvo que ganar 5 partidos y empatar 1. Para obtener 8 puntos el equipo B, tuvo que ganar dos partidos y empatar otros 2. No es posible que ganara 1 y empatara 5, porque, aunque también sumaría 8 puntos, tendría que haber empatado sus dos partidos con A, y eso no es posible, porque A solo empató 1. Por último, el equipo C, para obtener 2 puntos tuvo que perder cuatro partidos y empatar dos. Con esta distribución existen tres posibilidades:

- Primera

	A	B	C	D
A	X	A	A	A
B	A	X	B	BD
C	A	B	X	CD
D	AD	BD	CD	X

A: 5 victorias, 1 empate, 0 derrotas: 16 puntos
B: 2 victorias, 2 empates, 2 derrotas: 8 puntos
C: 0 victorias, 2 empates, 4 derrotas: 2 puntos
D: 0 victorias, 5 empates, 1 derrota: 5 puntos

En esta posibilidad habría 7 partidos con resultado de victoria/derrota y 5 partidos empatados.

- Segunda

	A	B	C	D
A	X	A	A	A
B	A	X	B	B
C	A	BC	X	CD
D	AD	BD	D	X

A: 5 victorias, 1 empate, 0 derrotas: 16 puntos
B: 2 victorias, 2 empates, 2 derrotas: 8 puntos
C: 0 victorias, 2 empates, 4 derrotas: 2 puntos
D: 1 victorias, 3 empates, 2 derrotas: 6 puntos

En esta posibilidad habría 8 partidos con resultado de victoria/derrota y 4 partidos empatados.

- Tercera

	A	B	C	D
A	X	A	A	A
B	A	X	B	B
C	AC	BC	X	C
D	A	BD	D	X

A: 5 victorias, 1 empate, 0 derrotas: 16 puntos
B: 2 victorias, 2 empates, 2 derrotas: 8 puntos
C: 0 victorias, 2 empates, 4 derrotas: 2 puntos
D: 2 victorias, 1 empate, 3 derrotas: 7 puntos

En esta posibilidad habría 9 partidos con resultado de victoria/derrota y 3 partidos empatados.

Como el enunciado dice que hubo 5 partidos empatados, los puntos del cuarto equipo fueron 5.

XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

8. (E)

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a}{b}=2\\[2mm] \dfrac{c}{b}=3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a=2b\\ c=3b\end{array}\right\}\Rightarrow a\cdot c=6b^2$$ Como $a\cdot c=24$, entonces $b=\pm 2$.

Si $b=2$ entonces $\left.\begin{array}{l}a=4\\ c=6\end{array}\right\}\Rightarrow a\cdot c=24$ y si $b=-2$ entonces $\left.\begin{array}{l}a=-4\\ c=-6\end{array}\right\}\Rightarrow a\cdot c=24$.

En cualquier caso $a\cdot b+b\cdot c=8+12=20$.

9. (D) Se trata de la suma de dos progresiones geométricas con razones positivas $\dfrac{1}{3}$ y $\dfrac{1}{4}$, menores que 1. Entonces

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{27}-\frac{1}{64}+\ldots=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots\right)=$$

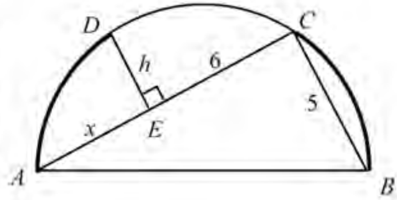
$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2\cdot 3}$$

10.(C) Si observamos los primeros términos de la sucesión, hay 5 que tienen 2 cifras (13, 21, 34, 55 y 89), otros 5 que tienen 3 cifras (144, 233, 377, 610 y 987), pero solo 4 que tienen 4 cifras (1597, 2584, 4181 y 6765).
La primera cifra de los términos que tienen un determinado número de cifras, suponiendo que haya la máxima cantidad de ellos es, por orden, 1, 2, 3, 5 y 8 o también, 1, 2, 3, 6 y 9. En cualquier caso, el número máximo de términos de la sucesión con un determinado número de cifras es 5. Y el número mínimo es 4

11.(D) Llamamos b al número de kilogramos de pintura blanca y n al número de kilogramos de pintura negra que hemos puesto inicialmente. Sabemos que $b+n=12$. También sabemos que el 80% del total es pintura blanca, de modo que $b=0{,}8\cdot 12=9{,}6$ kg.
Si añadimos pintura blanca hasta que el porcentaje sea del 90%, podemos escribir que $9{,}6+b=0{,}9\cdot(12+b)\Rightarrow 0{,}1b=10{,}8-9{,}6=1{,}2\Rightarrow b=12$
Si hemos añadido otros 12 kg de pintura blanca, el total de pintura gris que hay es 24 kg.

XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

12.(E) Si los arcos AD y BC son iguales, $ABCD$ es un trapecio isósceles, de modo que $AD = 5$. Ahora, los triángulos ABC y CDE son semejantes y sus lados son proporcionales. Si llamamos h al segmento DE, se cumple:



$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{6+x}{5}=\dfrac{6}{h}\\ x^2+h^2=25\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}x=\dfrac{30}{h}-6\\ x^2+h^2=25\end{array}\right)\Rightarrow\left(\frac{30}{h}-6\right)^2+h^2=25\Rightarrow\frac{900}{h^2}-\frac{360}{h}+36+h^2=25\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^4+11h^2-360h+900=0$$

Lo descomponemos aplicando Ruffini

	1	0	11	-360	900
3		3	9	60	-900
	1	3	20	-300	0

	1	3	20	-300
5		5	40	300
	1	8	60	0

El polinomio $h^2+8h+60$ no tiene raíces reales.

La solución $h = 5$ conduce a $x = 0$, que carece de sentido. La solución válida es $h = 3$, que conduce a $x = 4$.

13.(B) Dada la lista a, 8, b, c, d, e, f, g, 2, comparando las dos primeras sumas deducimos que a y d son iguales:

$$\left.\begin{array}{l}a+8+b+c=17\\ 8+b+c+d=17\end{array}\right\}\Rightarrow a=d$$

Ahora comparamos la segunda suma con la tercera.

$$\left.\begin{array}{l}8+b+c+d=17\\ b+c+d+e=17\end{array}\right\}\Rightarrow e=8$$

Si ahora nos fijamos en la última suma: $e + f + g + 2 = 17 \Rightarrow f + g = 7$

Como $d + e + f + g = 17 \Rightarrow d + 8 + 7 = 17 \Rightarrow d = 2$

Finalmente, como $c + d + e + f = 17 \Rightarrow c + 2 + 8 + f = 17 \Rightarrow c + f = 7$

XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

14.(D) Calculamos la probabilidad del suceso contrario. Sea A el suceso "no hay dos personas contiguas de pie". El suceso $\bar{A}$ es "Al menos hay dos personas contiguas de pie".

La probabilidad de que una persona esté de pie es que haya obtenido un 5 o un 6 en el dado, por tanto, es $p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. La probabilidad de que no esté de pie es $q=\frac{2}{3}$

Hay 5 formas de que haya dos personas contiguas de pie y las otras tres sentadas, 10 formas de que haya tres personas de pie (al estar en círculo siempre habrá dos contiguas de pie) y las otras dos sentadas, 5 formas de que haya cuatro personas de pie (solo pueden ser contiguas) y la quinta sentada y una sola forma de que las cinco personas estén de pie.

$$p(\overline{A})=5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3+10\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^5=$$

$$=\frac{40}{243}+\frac{40}{243}+\frac{10}{243}+\frac{1}{243}=\frac{91}{243}$$

La probabilidad de que no haya dos personas contiguas de pie es:

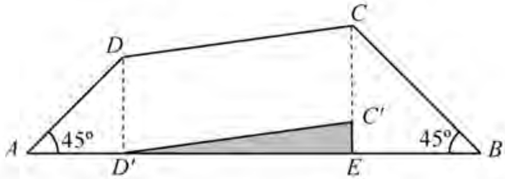
$$p(A)=1-p(\overline{A})=1-\frac{91}{243}=\frac{152}{243}$$

15.(C) Con las mismas tres cifras distintas hay 6 números, con dos iguales y la tercera distinta hay 3 (excepto en el caso en el que interviene el 0, que solo hay 2) y con las tres cifras iguales hay 1. Los resultados se recogen en la siguiente tabla:

099	189	279	288	369	378	459	468	477	558	567	666	Total
2	6	6	3	6	6	6	6	3	3	6	1	54

XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

16.(B) La proyección de AD sobre AB mide $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ y la proyección de BC sobre AB mide $2\sqrt{2}$.



$D'E$ es la proyección de DC sobre AB y mide $7\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{2}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

$D'C'$ y su proyección $D'E$ sobre AB, determinan el triángulo rectángulo $D'C'E$ en el que el otro cateto, $C'E$, mide $2\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ y como $D'C'$ es la hipotenusa, $DC=D'C'=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{49}{2}}=\sqrt{25}=5$

17.(A) Aunque en el problema no se pide ordenar los números, podemos escribirlos con exponente común para poder compararlos:

$99^{101}=99^{100}\cdot 99=\left(99\cdot\sqrt[100]{99}\right)^{100}$ $\qquad 101^{99}=\frac{101^{100}}{101}=\left(\frac{101}{\sqrt[100]{101}}\right)^{100}$

$10^{200}=\left(10^2\right)^{100}=100^{100}$ $\qquad 200^{50}=\left(\sqrt{200}\right)^{100}=\left(10\sqrt{2}\right)^{100}$

$3^{400}=\left(3^4\right)^{100}=81^{100}$

En consecuencia, $\left(10\sqrt{2}\right)^{100}<81^{100}<\left(\frac{101}{\sqrt[100]{101}}\right)^{100}<100^{100}<\left(99\cdot\sqrt[100]{99}\right)^{100}$, es decir,

$200^{50}<3^{400}<101^{99}<10^{200}<99^{101}$

18.(A) Conocemos las seis raíces del polinomio, así como su coeficiente principal.
Podemos escribir el polinomio factorizado:

$P(x)=1\cdot(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)(x-4)(x+4)$

$P(2)=1\cdot(2-1)(2+1)(2-3)(2+3)(2-4)(2+4)=1\cdot1\cdot3\cdot(-1)\cdot5\cdot(-2)\cdot6=180$

XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

19.(B) Las distancias entre dos vértices del octógono regular son el lado del octógono y las tres diagonales. Si el radio de la circunferencia circunscrita mide 1, esas distancias son:

El lado del octógono es: $l=\sqrt{r^2+r^2-2r^2\cos 45^\circ}=\sqrt{2-\sqrt{2}}$

La diagonal más pequeña vale

$$d_1=\sqrt{l^2+l^2-2l^2\cos 135^\circ}=\sqrt{2-\sqrt{2}+2-\sqrt{2}-2\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\sqrt{2}$$

La diagonal intermedia vale $d_2=\sqrt{D^2-l^2}=\sqrt{4-\left(2-\sqrt{2}\right)}=\sqrt{2+\sqrt{2}}$

La diagonal mayor coincide con el diámetro de la circunferencia y vale $D=2$.

La medida que no corresponde a distancia entre vértices del octógono es $\sqrt{1+\sqrt{2}}$

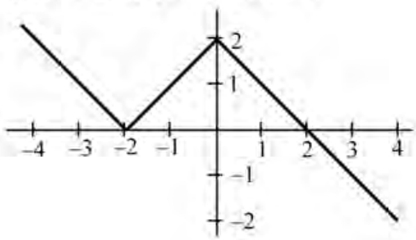
20.(D) El polinomio $P(x)=x^4+x^2+1$ se puede escribir como una diferencia de cuadrados, sumando y restando x^2:

$$P(x)=x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=\left(x^2+1\right)^2-x^2=\left(x^2+x+1\right)\cdot\left(x^2-x+1\right)$$

21.(A) Para calcular $f(f(f(-2)))$, en primer lugar calculamos en la gráfica (leemos en ella) el valor de $f(-2)=0$. Ahora debemos calcular (leer) $f(0)=2$.

Por último, leemos $f(2)=0$.

En conclusión $f(f(f(-2)))=f(f(0))=f(2)=0$.



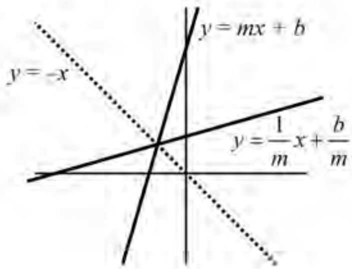
22.(B) El quid del problema está en que los términos que nos piden sumar son equidistantes del término que nos dan como dato. Conocemos el término $a_{2022}=25$ y nos piden calcular $a_{2001}+3a_{2019}+3a_{2025}+a_{2043}$ a_{2022} + a_{2022}. Pero desde el lugar 2001 hasta el lugar 2022 hay 21 huecos, los mismos que hay desde el lugar 2022 hasta el lugar 2043. Por tanto, $a_{2001}+a_{2043}=2\cdot a_{2022}$

Por otro lado, desde el lugar 2019 hasta el lugar 2022 hay 3 huecos, los mismos que hay desde el lugar 2022 hasta el lugar 2025. Por tanto, $a_{2019}+a_{2025}=2\cdot a_{2022}\Rightarrow 3\cdot a_{2019}+3\cdot a_{2025}=6\cdot a_{2022}$

Así, la suma es $a_{2001}+3a_{2019}+3a_{2025}+a_{2043}=8\cdot a_{2022}=8\cdot 25=200$

23.(C) La recta $y = m\cdot x + b$ corta al eje de ordenadas en el punto $(0,b)$ y tiene pendiente m. Su simétrica respecto de la bisectriz del segundo cuadrante corta al eje de abscisas en el punto $(-b,0)$ y tiene pendiente $\frac{1}{m}$. Su ecuación es:

$$y=\frac{1}{m}\cdot(x+b)\Rightarrow y=\frac{1}{m}\cdot x+\frac{b}{m}$$



XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel I)

XXV Concurso de Primavera de Matemáticas

Soluciones 2ª Fase Nivel I

1. (D) Como dos kilos y cuarto son 2250 gramos y cada salero contiene 25 gramos, podemos llenar $2250 \div 25 = 90$ saleros.

2. (C) En el recuadro contamos nueve vocales. Dado que todas las opciones que se ofrecen para sustituir los guiones constan de dos vocales, la frase será cierta si elegimos la opción "**C)** once".

3. (B) Si la suma de las cifras de un número es múltiplo de 9, ese número es múltiplo de 9, luego los números que la niña da a Comenúmeros son múltiplos de 13 y de 9. El menor de dichos números es $13 \times 9 = 117$ y el siguiente es mayor que 200. Por tanto Comenúmeros solo recibe un número: el 117.

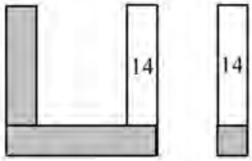
4. (E) La vaca hace un *Mu*: se oye una *u*.
El pato da dos *Cua*: se oyen dos *u*.
La oveja hace $2 \times 3 = 6$ *Beee*: se oyen cero *u*.
El perro da $6 \times 4 = 24$ *Guau*: se oyen $2 \times 24 = 48$ *u*.
En total se oyen $1 + 2 + 0 + 48 = 51$ *u*.

5. (C) La 2ª igualdad dice que dos *corazones* es igual a una *estrella* más un *anillo*. Esto permite sustituir, en la 1ª igualdad, los dos *corazones* por una estrella más un *anillo*, con lo que tenemos que dos *estrellas* más un anillo es igual a un *cuadrado* más un *anillo*, lo que implica que dos *estrellas* siempre es igual a un *cuadrado* (si iguales se restan de iguales, los restos son iguales).

6. (B) Lo menos que Juan podría pesar el año pasado es 65 kg y lo más que podría perder es 4 kg. En consecuencia, lo menos que puede pesar actualmente es $65 - 4 = 61$ kg.

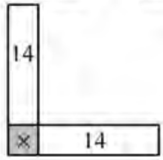
Por otra parte, lo más que podría pesar el año pasado es 70 kg y lo menos que puede perder es 3 kg, lo que implica que lo más que puede pesar en la actualidad es $70 - 3 = 67$ kg. Por tanto, actualmente su peso debe estar comprendido entre 61 y 67 kg.

XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel I)



7. (A) Si a la **U** de Úrsula le quitamos la **L** de Luisa, obtenemos la parte blanca de la **I** de Irene según el siguiente esquema:

$46 - 32 = 14$ cm^2



Observando ahora la **L** de Luisa tenemos que está formada por dos rectángulos de 14 cm^2 y por un cuadrado; como el área de la **L** es 32 cm^2, el área del cuadrado es:
$x = 32 - (14 + 14) = 4$ cm^2

Con lo que el área de la **I** de Irene es: $14 + 4 = 18$ cm^2.

8. (B) Con dos números elegidos entre 2, 3 y 4 no se puede sumar 10. Así que hay tres posibilidades para la segunda columna: $8 + 2$, $7 + 3$ y $6 + 4$. Además el número nuevo (8, 7 o 6) debe estar en la primera fila, pues de lo contrario no se podría sumar 6 con los números de la segunda fila. La única solución es que en esa fila estén el 2 y el 4. Por tanto, el 3 debe ocupar necesariamente la casilla de Comenúmeros.

9. (A) Después de los cortes de D'Artagnan hay 9 trozos de papel. Tras coger Aramis 8 de esos trozos y dividir cada uno en 7 partes, habrá $1 + 8 \times 7 = 57$ trozos. Cuando Porthos elige 6 trozos, tenemos agrupados los papeles en $51 + 6$ y al cortar Porthos cada uno de los 6 en 5 trozos, habrá $51 + 6 \times 5 = 81$ trozos de papel.

10.(D) Obviamente se trata de encontrar la regla de formación del resultado a partir de los dos números de partida.
615 se puede obtener a partir del 2 y el 3 de la siguiente forma:
$2 \times 3 = 6$ (*Multiplicar los dos números*)
$3 - 2 = 1$ (*Restar al mayor el menor*)
$2 + 3 = 5$ (*Sumar ambos números*)

De igual forma se obtiene 261115 de 13 y 2:
$13 \times 2 = 26$ $\quad$ $13 - 2 = 11$ $\quad$ $13 + 2 = 15$

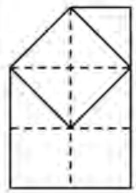
Podemos comprobar que aplicando la misma regla se obtiene 36513 de 4 y 9.
Operando así sobre la pareja 17 y 6 se obtiene:
$17 \times 6 = 102$ $\quad$ $17 - 6 = 11$ $\quad$ $17 + 6 = 23$

Por consiguiente el resultado es: 1021123.

XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel I)

11.(A) Si formamos 10 filas de N coches cada fila Asier tendrá $10 \times N$ coches, y como el número total de coches debe ser mayor que 50 y menor que 100, solo podrá tener 60, 70, 80 o 90 coches.
Por otra parte, sabemos que alguno de estos números más 2 debe ser divisible por 6 al objeto de poder formar 6 filas con el mismo número de coches cada una.
Todo se reduce entonces a comprobar qué números, elegidos entre 62, 72, 82 y 92, son divisibles por 6. Se encuentra inmediatamente que el único que cumple la condición es 72. Por tanto, Asier tiene 70 coches.

12.(E) La figura completa podemos seccionarla en 5 cuadrados de 2 cm de lado, más la mitad de uno de esos cuadrados, tal y como se muestra en la figura. Dado que cada uno de esos cuadrados mide $4\ cm^2$, el área de la figura completa es: $\mathbf{5} \times 4 + 2 = 22\ cm^2$.

13.(B) Con las condiciones que impone el enunciado es se deduce inmediatamente que las 10 bolsas tienen sucesivamente 1, 2, 3…9 y 10 canicas. Organizando la suma de la forma siguiente: $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 + 10 = (1 + 10) + (2 + 9) + (3 + 8) + (4 + 7) + /5 + 6)$, obtenemos muy cómodamente $5 \times 11 = 55$ canicas.

14.(E) Divertida duerme el mismo tiempo que Buena juega, o sea, 20 minutos. Como Amable duerme el doble que Divertida, Amable duerme $2 \times 30 = 60$ minutos. Sabiendo que Cariñosa duerme la tercera parte que Amable, deducimos que Cariñosa ha estado durmiendo $60 \div 3 = 20$ minutos.

15.(A) Como la longitud de la nariz de Pinocho se duplica cada vez que miente, su nariz medirá sucesivamente:
Primera mentira; 2 dm.
Segunda mentira; 4 dm.
Tercera mentira; 8 dm.
Cuarta mentira; 16 dm. Que en centímetros será $16 \times 10 = 160$ cm.

16.(D) En primer lugar, para facilitar los razonamientos, reordenamos de menor a mayor los puntos obtenidos:

272	**280**	**295**	**320**	**345**

El enunciado dice que Amaya obtuvo 40 puntos más que Manuel. Basta una hojeada a las puntuaciones para comprobar Amaya sacó 320 puntos y Manuel 280; ninguna otra pareja da la diferencia de 40 puntos.
Pongamos ahora el nombre de los dos sobre sus puntos:

	Manuel		**Amaya**	
272	**280**	**295**	**320**	**345**

Por otra parte sabemos que Iñigo, Maria y Begoña están ordenados así, por orden creciente de puntos. Solo falta colocarlos en los tres "huecos" que quedan para concluir que Iñigo obtuvo 272 puntos.

17.(C) El problema estará resuelto en cuanto sepamos cuantas hembras castañas hay. Vayamos con los machos.
Negros: como máximo hay 1, pues si hubiera más habría menos hembras que machos.
Castaños: como máximo hay 2, por la razón aducida antes.
Blancos: como máximo hay 1, por idéntica razón.
Dado que hay 4 machos, deberán ser necesariamente 1 negro, 2 castaños y 1 blanco. Recordando que el total de cachorritos castaños es 5, deducimos que 3 son hembras. En consecuencia, la probabilidad de que la prima escoja una hembra castaña es: $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

18.(B) Si pasan una media de 9,4 minutos al día zapeando, al año pasarán $365 \times 9{,}4 = 3431$ minutos. Expresando, ahora, en minutos las opciones que ofrece el problema, observamos que la opción B (Dos días y medio: $25 \times 24 \times 60 = 3600$ minutos) es claramente la que más se acerca a 3431 minutos.

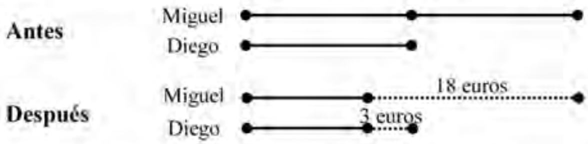
19.(D) Si nos fijamos bien vemos que el número de cada una de los dos casillas sombreadas está rodeado por 6 números que no deben ser consecutivos con él. Tomando la lista: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, observamos que para cualquier número que no sea el 1 o el 8 solo hay 5 no consecutivos con él. Por tanto, si el problema tiene solución, dichas casillas estarán ocupadas por el 1 y el 8, cuya suma es 9.

He aquí una solución:

	5	3	
7	1	8	2
	4	6	

XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel I)

20.(D) Mediante un esquema lineal la solución del problema es inmediata:



Restando los segmentos punteados: 18 – 3 = 15 euros, obtenemos lo que tenía Diego. Dado que Diego ha gastado 3 euros, ahora le quedan 12, al igual que a Miguel.

21.(B) Si numeramos los días como 0, 1, 2, 3,… …24, 25, resulta que tiene tos los días múltiplo de 4, dolor de barriga los múltiplos de 6 y dolor de cabeza los múltiplos de 7, esto es:
Tos, los días 4, 8, 12, 16, 20 y 24
Dolor de barriga, los días 6, 12, 18 y 24
Dolor de cabeza, los días 7, 14 y 21.
Contando los días obtenemos 13 días en total, pero como el 12 y el 24 los hemos contado dos veces, Juan Pupas estará malito 11 días y, en consecuencia, estará sano 25 – 11 = días.

22.(B) Nuestra unidad de medida está dividida en 16 cuadraditos. Por otra parte, la pajarita se compone de 5 cuadraditos más 6 medios cuadraditos y esto equivale a 5 + 3 = 8 cuadraditos, que es justamente la mitad de la unidad. Por tanto, el área de la pajarita es $\frac{1}{2}$.

23.(D) El producto de las dos edades es 351, que descompuesto en números primos es: $351 = 3^3 \times 13$, lo que arroja varias formas de ponerlo como producto de dos edades (números enteros). Además, sabemos que la suma de las dos edades es 40. Es casi inmediato darse cuenta de que $3^3 + 13 = 27 + 13 = 40$. De lo que se sigue que el menor tiene 13 años.

24.(B) Al ser de 4 cifras, todos esos números tendrán como primera cifra un 2 y el problema se reduce a rellenar las tres siguientes con 0 y 2. Podemos organizarlo de la manera siguiente:

Números sin ningún 0:

2222

Números con un solo 0:

2022
2202
2220

Números con un solo 2(dos ceros) en las tres últimas cifras:

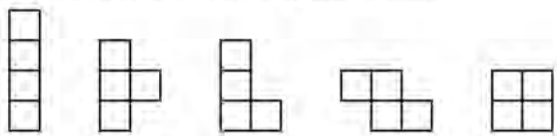
2200
2020
2002

Números sin ningún 2 (tres ceros) en las tres últimas cifras:

2000

En total, 8 números.

25.(D) Se pueden formar estas cinco figuras distintas:



XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel II)

XXV Concurso de Primavera de Matemáticas

Soluciones 2ª Fase Nivel II

1. (D) El dado rueda hacia delante 3 lugares, a la derecha dos y hacia atrás uno.
Las caras que quedan abajo antes de girar a la derecha son, en ese orden, 5, 3, 2 y 4.
Ahora rueda hacia la derecha, por lo que queda abajo un 1 y después un 3.
Finalmente, va hacia atrás y la cara inferior es un 2, por lo que en la cara superior habrá un 5.

2. (B) La ardilla Pilla come una pipa en las horas múltiplo de 3, una avellana en las múltiplo de 6 y una nuez en las múltiplo de 8.
La próxima vez que tome los tres frutos juntos será dentro de 24 horas, pues 24 es el mínimo común múltiplo de 3, 6 y 8.
Entre 0 y 24 tenemos nueve múltiplos de 3 (0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21 y 24), cinco múltiplos de 6 (0, 6, 12, 18, 24) y 4 múltiplos de 8 (0, 8, 16, 24).
Comerá 9 pipas, 5 avellanes y 4 nueces. Un total de 18 frutos secos.

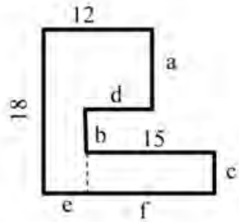
3. (A) Juntando las condiciones UNA, TRES y CUATRO obtenemos que los números son múltiplos de 22 y de dos o tres cifras:
22 (22×1), 44, 66, 88, 110, 132, 154, ………., 242, ……990 (22×45).
La condición DOS nos dice que los dividamos entre 5 y veamos qué divisiones dan resto 2.
22 : 5 da cociente 4 y resto 2, 22 SÍ
44 : 5da cociente y resto 4, 44 NO
66 : 5 da cociente 13y resto 1, 66 NO
88 : 5da cociente 17 y resto 3, 88 NO
110 : 5 da cociente 22 y resto 0, 110 NO
132 : 5 da cociente 26 y resto 2, 132SÍ
154 : 5 da cociente 30 y resto 4, 154 NO
Y así sucesivamente. Observamos que los que cumplen las cuatro condiciones son
22×1, 22×6, 22×11, 22×16, 22×21, 22×26, 22×31, 22×36 y 22×41.
9 números.

XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel II)

4. (B) Hoy es el día " x " de la semana.
Anteayer fue el día " x – 2",y de esta manera, los días van asi:
$x-5,\quad x-4,\quad x-3,\quad x-2,\quad x-1,\quad x,\quad x+1$
Como x – 3 es martes, x – 2 es miércoles, x – 1 es jueves, x es viernes y mañana será sábado.

5. (D) Nombrando los lados como se muestra en la figura, observamos que:

(1) $a+b+c=18$
(2) $d+e=12$
(3) $f=15$



Como el perímetro es la suma de los lados, el perímetro es

$$18+12+15+a+b+c+d+e+f$$

Sustituyendo los valores de (1), (2) y (3), nos queda que el perímetro es

$$18+12+15+18+12+15=90.$$

6. (C) Como $27^5=\left(3^3\right)^5=3^{15}$ la novena parte se obtiene al dividir entre 9 es $27^5:9=3^{15}:3^2=3^{12}$

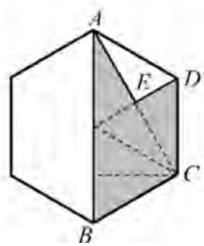
7. (D) El número más cercano será el que tenga la menor diferencia.

A) $\frac{5}{12}-\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$ **B)** $\frac{5}{11}-\frac{5}{12}=\frac{5}{132}$ **C)** $\frac{1}{2}-\frac{5}{12}=\frac{1}{12}$

D) $\frac{5}{12}-\frac{2}{5}=\frac{1}{60}$ **E)** $\frac{5}{12}-\frac{5}{13}=\frac{5}{156}$

Los apartados A y C dan el resultado mayor. El apartado B es mayor que el E, y D es menor que E porque $\frac{1}{60}=\frac{5}{300}<\frac{5}{156}=\frac{5}{12\cdot 13}$.

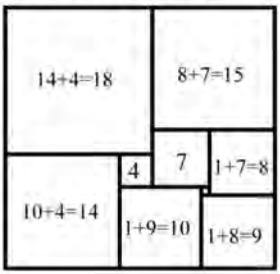
8. (E) Si dividimos medio hexágono regular como se muestra en la figura, observamos que está formado por 6 triángulos isósceles iguales.
Como el área del hexágono es 180 cm², la mitad será 90 cm².
La parte sombreada es $\frac{5}{6}$ de 90, es decir $\frac{5}{6}\cdot 90=75$ cm²



XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel II)

9. (A) Pensemos con pirámides con menor número de vértices:
La pirámide que menor número de vértices tiene es la de base triangular:
Tiene 4 vértices (3 en la base y uno arriba) y 6 aristas (3 en la base y 3 laterales).
La pirámide de base cuadrada: (4 + 1) vértices y (4 + 4) aristas.
La pirámide de base pentagonal: (5 + 1) vértices y (5 + 5) aristas.
Así que, la pirámide con 2022 vértices (2021 + 1) vértices, tendrá (2021 + 2021) aristas, es decir, 4042 aristas.

10.(E) Partiendo de los lados que nos dan, es fácil hallar los lados de los cuadrados de alrededor, por lo que los lados del rectángulo son 33 m (14 + 10 + 9) y 32 m (14 + 18).
La superficie que cubrimos con las alfombras es de $33 \times 32 = 1056$ m^2.



11.(A) Como A + A + A termina en A entonces A puede ser el 0 o el 5.
Si A = 0:
S + E = 10 y me llevo una a las centenas, por lo que S + E + T + 1 termina en E, es decir, 11 + T termina en E. Como E no puede ser 0 (ya que lo es A), a las unidades de mil solo puedo llevarme una, por lo que S = 1. Entonces, E = 9 y T = 8.
De esta manera, E +S +A + S + E +T +A = 9 + 1 + 0 + 1 + 9 + 8 + 0 = 28.
Si A = 5:
Me llevo una a las decenas, por lo que S + E = 9 y me llevo una a las centenas, por lo que S + E + T + 1 termina en E. Por otro lado, S + E + T + 1 = 9 + T + 1 termina en T. Por este motivo, A no puede ser 5.

12.(C) $300 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \Rightarrow a = 2, b = 1, c = 2$
$a^2 \cdot b^3 \cdot c^5 = 2^2 \cdot 1^2 \cdot 2^5 = 2^7 \Rightarrow d = 2, e = 7 \Rightarrow e^d = 7^2 = 49.$

XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel II)

13.(D) Vamos a llamar al número de dos cifras "D" y al de tres "T".
T es impar $\Rightarrow 9 \times T$ es impar $\Rightarrow 11 \times D$ es impar $\Rightarrow$ D es impar.
$9 \times T = 11 \times D \Rightarrow$ D es múltiplo de 9 y T múltiplo de 11.
Como D es impar y múltiplo de 9, D puede ser 9, 27, 45, 63, 81, 99.
$11 \times 9 = 99 = 9 \times 11 \neq 9 \times T \Rightarrow D \neq 9$.
$11 \times 27 = 297 = 9 \times 33 \neq 9 \times T \Rightarrow D \neq 27$.
$11 \times 45 = 495 = 9 \times 55 \neq 9 \times T \Rightarrow D \neq 45$.
$11 \times 63 = 693 = 9 \times 77 \neq 9 \times T \Rightarrow D \neq 63$.
$11 \times 81 = 891 = 9 \times 99 \neq 9 \times T \Rightarrow D \neq 81$.
$11 \times 90 = 990 = 9 \times 110 = 9 \times T \Rightarrow T = 110$ pero no nos sirve porque T es impar.
$11 \times 99 = 1089 = 9 \times 121 = 9 \times T \Rightarrow T = 121$.

14.(B) Los ángulos de un triángulo suman 180º, así que:
$R + U + 72º = 180º \Rightarrow R + U = 108º$,
$N + O + 61º = 180º \Rightarrow N + O = 119º$.

$$\left.\begin{array}{r} U+X+F=180º \\ I+Y+N=180º \end{array}\right\} \Rightarrow (U+X+F)+(I+Y+N)=180º+180º=360º$$

como $X+Y=115º \Rightarrow U+F+I+N=360º-115º=245º$

$U+N+R+U+F+I+N+O=(U+R)+(N+O)+(U+F+I+N)=$
$=108º+119º+245º=472º$.

15.(D) $a+b+c+5=18 \;\Rightarrow\; a+b+c=13$ (1)
$a+c+d+6=17 \;\Rightarrow\; a+c+d=11$ (2)
$c+d+e+9=15 \;\Rightarrow\; c+d+e=6$ (3) $\Rightarrow$ c, d, e menores que 4.
$? = 15-b-c-e$
Restando (1) – (2) tenemos que $b-d=2 \;\Rightarrow\; b=d+2$

5	a	6
b	c	d
?	e	9

Como c, d y e son menores que 4 y b es dos unidades mayor que d, d no puede ser 1, por lo que será 2 o 3. Si d es 3, b es 5 y no puede ser porque habría dos números iguales. Hemos averiguado que d = 2 y b = 4.

Entonces, $a+c=9$ y c solo puede ser 1 o 3.
- Si $c=1 \Rightarrow e=3$ y $a=8 \Rightarrow ?=15-4-1-3=7$.
- Si $c=3 \Rightarrow e=1$ y $a=6 \Rightarrow$ No puede ser porque habría dos números iguales.

XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel II)

16.(E) Lo primero que debemos calcular es cuántos partidos se juegan,

E1-E2, E1-E3, E1-E4, E1-E5, E1-E6
E2-E3, E2-E4, E2-E5, E2-E6
E3-E4, E3-E5, E3-E6
E4-E5, E4-E6
E5-E6

Así que se juegan $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ partidos.

Como 40 no es múltiplo de 3, algunos partidos terminan en empate.
Si solo hay un empate, la suma de las puntuaciones sería $1 + 1 + 3 \cdot 14 = 44 \neq 40$
Dos empates: $2 \cdot (1 + 1) + 3 \cdot 13 = 43 \neq 40$
Tres empates: $3 \cdot (1 + 1) + 3 \cdot 12 = 42 \neq 40$
Cuatro empates: $4 \cdot (1 + 1) + 3 \cdot 11 = 41 \neq 40$
Cinco empates: $5 \cdot (1 + 1) + 3 \cdot 10 = 40 \Rightarrow$ hubo 5 empates.

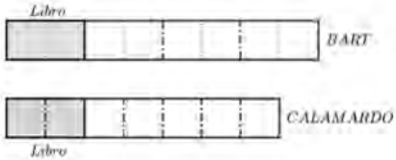
17.(B) El precio está entre 300 € y 400 €, por lo que la cifra de las centenas es 3. El precio correcto es 3ab y el erróneo, ba3. Como habría pagado 198 € de más, ba3 es mayor y " ba3 – 3ab = 198 " $\Rightarrow$ ba3 = 3ab + 198 $\Rightarrow$ b = 5.
Como el precio es múltiplo de 9, y sabemos que es 3a5 $\Rightarrow$ utilizando el criterio del 9 (la suma de las cifras es múltiplo de 9) 3 + a + 5 tiene que ser múltiplo de 9.
De esta manera, a = 1.
El precio del reloj es 315 € y el producto de sus cifras $3 \cdot 1 \cdot 5 = 15$.

18.(A) El 12% de las alumnas juegan al baloncesto, por lo que, como $\frac{12}{100} = \frac{3}{25}$, 3 de cada 25 alumnas juegan al baloncesto. De esta manera sabemos que el número de alumnas tiene que ser múltiplo de 25.
El 14% de los alumnos juegan al baloncesto, por lo que, como $\frac{14}{100} = \frac{7}{50}$, 7 de cada 50 alumnos juega al baloncesto. De esta manera sabemos que el número de alumnos es múltiplo de 50.
Si en total son 125 alumnos y hay más alumnas, el número de alumnas es 75 y el de alumnos 50.
Por ello, 9 alumnas (3 de 25 equivale a 9 de 75)y 7 alumnos juegan al baloncesto, lo que hace un total de 16.

XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel II)

19.(C) i) $-2-(-9)=7$
ii) $-5+3=-2$
iii) $-9-(-1)=-8$
La respuesta correcta es -9, 3, -9.

20.(E) Siguiendo las indicaciones del problema, obtenemos el dibujo que se muestra.
La parte blanca es la que no han gastado, y es fácil ver que se trata de 11 trozos del mismo tamaño. Por ello, como entre los dos todavía tienen 132 €, cada trozo corresponde a $132 : 11 = 12$ €.
Así pues, el libro cuesta $12 + 12 = 24$ €.



21.(C) Como una castaña se cambia por una almendra y una bellota, tres castañas se cambiarán por tres almendras y 3 bellotas.
Como tres almendras se cambian por dos bellotas, tres castañas se cambiarán por 2 bellotas y 3 bellotas es decir, 3 castañas se cambian por 5 bellotas.

22.(D) El rectángulo 1×90 es el de mayor perímetro, y es $1 + 1 + 90 + 90 = 182$ cm.
El rectángulo 9×10 es el de menor perímetro, y es $9 + 9 + 10 + 10 = 38$ cm.
Por ello, la resta de ambos perímetros es $182 - 38 = 144$.

23.(A) El mayor número que podemos conseguir es $4^5 + 3^2 = 1024 + 9 = 1033$ y el menor número es $5^2 + 4^2 = 25 + 64 = 89$. Por lo tanto la suma de ambos es $1033 + 89 = 1122$.

XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel II)

24.(C) Como un cuarto de las figuras de Sol son círculos, tres cuartos son cuadrados. Como Celia y Sol tienen el mismo número de cuadrados, y dos quintos de las figuras de Celia son cuadrados, dos quintos de las figuras de Celia son tres cuartos de las figuras de Sol.

$\frac{2}{5}$ de las figuras de Celia = $\frac{3}{4}$ de las figuras de Sol

Por otro lado, como dos quintos de las figuras de Celia son cuadrados, tres quintos de las figuras de Celia son círculos y como el número de círculos de Celia es 36,

$\frac{3}{5}$ de las figuras de Celia = 36, , por lo que Celia tiene $36 \cdot 5 : 3 = 60$ figuras.

Si sustituimos esta cantidad en la primera igualdad,

$\frac{2}{5}$ de 60 = $\frac{3}{4}$ de las figuras de Sol.

Sol tiene $(4 \cdot 2 \cdot 60) : (3 \cdot 5) = 32$ figuras

Así pues, entre las dos tendrán $60 + 32 = 92$ figuras.

25.(D) Los números que puede construir la niña Centésima son los OCHO siguientes:

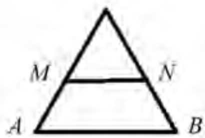
VII, XII, XV, XX, XL, LII, LV, LX.

XXV Concurso de Primavera de Matemáticas

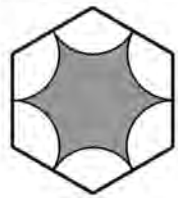
Soluciones 2ª Fase Nivel III

1. (C) Sea x la nota de la 2ª evaluación. La media ponderada se obtiene como $0{,}10 \cdot 7 + 0{,}20 \cdot x + 0{,}30 \cdot 9 + 0{,}40 \cdot 8 = 8$. Multiplicando por 10 y dejando la incógnita en el primer miembro tenemos: $2x = 80 - 7 - 27 - 32 = 14$, luego $x = 7$.

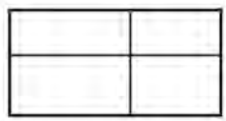
2. (D) El triángulo *MNC* es semejante al *ABC* y la razón de semejanza es 1:2, luego la razón de sus áreas es 1:4. Así el área de *MNC* es 2 cm²,y deja 6 cm² para el área del trapecio *ABNM*.



3. (A) El área de los seis arcos equivale al área de dos círculos de radio 3 cm. Luego el área de la figura sombreada es la del hexágono regular de lado 6 menos las áreas de esos dos círculos. Es decir: $\dfrac{6\cdot 6^2\sqrt{3}}{4} - 2\pi\cdot 3^2 = 54\sqrt{3} - 18\pi$

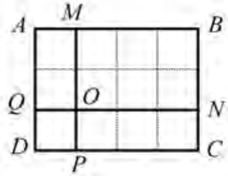


4. (A) El rectángulo, al trazar una paralela a cada lado, ha quedado dividido en cuatro rectángulos menores. Las áreas de dos rectángulos que comparten base están en proporción de sus alturas. Si suponemos que los de área 1 y 2 están apilados, conviene que el de área 3 esté alineado con el de área 1, ya que entonces, el área del cuarto rectángulo será 6 (y no 1,5). En este supuesto el área del rectángulo grande es 1 + 2 + 3 + 6 = 12. La otra posibilidad es que estén apilados los rectángulos de área 1 y 3, con lo que la mejor opción de área grande sería que el de área 2 se alinee con el de área 1, obteniendo área 6 para el cuarto rectángulo, y por tanto, de nuevo, área 12 para el rectángulo de partida (lo cual no es de extrañar, ya que el razonamiento podria haber empezado por rectángulos alineados en vez de apilados).



XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel III)

Hay otro método más rápido.



La suma de las áreas de los rectángulos opuestos por el vértice es la misma, es decir:

$$S_{AMOQ} + S_{ONCD} = S_{MBNO} + S_{OPDQ}$$

Por lo tanto el área será máxima cuando los dos de los tres conocidos sean los de mayor área. Luego $2 + 3 = 1 + x$ de donde se deduce que $x = 4$ y el área máxima es $1 + 2 + 3 + 4 = 12$.

5. (D) Razonamos a partir de la cifra central. Esta puede ir del 1 al 9, y las otras dos deben sumar el doble de aquella.

$a1b$; $a + b = 2$ tiene dos soluciones: 111 y 210.

$a2b$; $a + b = 4$ tiene cuatro soluciones: 123, 222, 321 y 420.

$a3b$; $a + b = 6$ tiene seis soluciones: 135, 234, 333, 432, 531 y 630

…

…

$a9b$; $a + b = 18$ tiene una solución: 999.

De forma que si quitamos los candidatos que acaban en 0 (que son cuatro; las sumas pares desde 2 hasta 8), el número de los restantes sigue una serie que empieza en 1 y aumenta de dos en dos hasta llegar a 9 (cuando la suma es 10) y a partir de ahí decrece de dos en dos hasta volver a 1, por lo que el número de candidatos añade a 4 la suma $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 41$. La respuesta es por tanto 45.

6. (B) Si el perímetro aumenta un 10 %, también lo hace el lado l del cuadrado, y así su área pasa de ser l^2 a ser $(l \cdot 1{,}1)^2 = l^2 \cdot 1{,}1^2 = l^2 \cdot 1{,}21$, y por tanto ha aumentado un 21%.

7. (B) $2^{18} \cdot 3^6 = (2^3 \cdot 3)^6 = a^b$ implica que:

$b = 1$ y $a = 24^6$, o $b = 2$ y $a = 24^3$, o $b = 3$ y $a = 24^2$, o $b = 6$ y $a = 24$

La suma mínima de a + b es 6 + 24 =30

XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel III)

8. (E) Parece más sencillo calcular el área del cuadrado total y quitarle el área del cuadrado blanco y las áreas de los dos rectángulos blancos iguales.

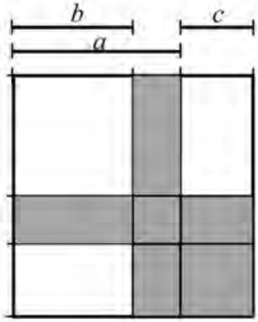
El área del cuadrado grande es $(a+c)^2$

El área del cuadrado blanco es b^2

El área de cada rectángulo blanco es $b \cdot c$.

Entonces el área de la zona sombreada es:

$(a+c)^2 - b^2 - 2bc$



Para identificar esta fórmula con alguna de las propuestas como solución debemos notar que al desarrollarla da lugar a los cuadrados con signo "+" de a y c, y con signo "–" de b, conteniendo además "+ $2ac$" y "– $2bc$". Vemos que eso ocurre con la respuesta E $(a+c)^2-(b+c)^2+c^2$.

9. (D) Si en la ecuación $x^2+64=20x^4$ hacemos el cambio $y = x^4$, la ecuación se transforma en una de segundo grado, $y^2+64=20y$, en la variable y, cuyas soluciones son: $y=\dfrac{20\pm\sqrt{400-4\cdot 64}}{2}=\dfrac{20\pm 12}{2}\Rightarrow\begin{cases} y_1=16 \\ y_2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x_1)^4=16\Rightarrow x_1=\pm 2 \\ (x_2)^4=4\Rightarrow x_2=\pm\sqrt{2}\end{cases}$

Con lo que las dos positivas suman $2+\sqrt{2}$.

10.(D) Patricia ha respondido m preguntas bien y $(25 - m)$ mal. Su puntuación ha sido $5m$. Gabriel ha respondido n preguntas bien y $(25 - n)$ las ha dejado en blanco. Su puntuación ha sido $5n + (25 - n)$.

La suma de las dos puntuaciones es: $5m + 5n + 25 - n = 5m + 4n + 25 = 225$;; es decir, $5m + 5n = 200$. Como 200 es múltiplo de 4 y de 5, se tiene que dar necesariamente que m sea múltiplo de 4 y n múltiplo de 5. Como m y n son a lo más 25, y la suma de puntuaciones está cerca de la suma máxima que es de 250 puntos, m y n estarán cerca de 25. Tanteemos un poco, usando lo que sabemos de los divisores de m y n.

Con $n = 25$, $m = 20$; con $n = 20$, $m = 24$, y ya no hay más posibilidades. Pero releemos el problema y vemos que n no puede ser 25, ya que se afirma que Gabriel dejó algunas respuestas en blanco. Luego la puntuación de Gabriel fue $5\cdot 20 + 5 = 105$.

XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel III)

11.(A) Para que sean primos entre sí debe ocurrir: que sea una pareja de un número par y otro impar, excluyendo las parejas {6,3}, {6,9} y {10,5}; o una pareja de impares, excluyendo la {3,9}.

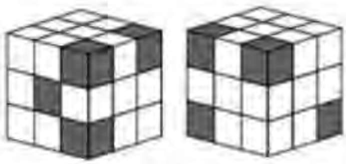
Parejas par- impar con los números del 2 al 10 hay $5 \cdot 4 = 20$.

Parejas impar-impar hay $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

Parejas totales hay $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$.

La probabilidad de pareja de primos entre sí es $\frac{17+5}{36} = \frac{22}{36} = \frac{11}{18}$.

12.(D) Con las dos vistas del cubo que se nos ofrecen estamos viendo cuatro caras del cubo, en las que en total figuran cinco cubitos grises. Como vemos los cuatro cubitos esquina de la base (dos blancos y dos grises) no hay más cubitos grises esquina en la base. Sin embargo, solo vemos tres cubitos laterales centrales en la base, y por tanto el cuarto podría ser gris, lo mismo que el cubito central de la cara. Vayamos con la cara lateral oculta que falta, que es la que tiene tres cubitos blancos alineados superiormente. En la fila de arriba tiene esos tres cubitos blancos. En la de en medio, vemos que los laterales son blancos, y podría ser gris el centro. En la fila de abajo ya hemos visto los colores que puede haber porque son cubitos compartidos con la base, Nos queda el cubito central del cubo que no corresponde a ninguna cara y puede ser gris. Así como mucho puede haber otros $2 + 1 + 1 = 4$ cubitos grises aparte de los cinco que vemos.



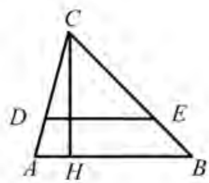
13.(D) El caudal del agua, depende del volumen de los tubos. Como se presupone que la longitud de los grandes y de los pequeños será la misma, deberemos tener en cuenta la superficie de la sección de los tubos. Un tubo de 3 cm de diámetro tendrá nueve veces más de superficie de sección que uno de 1 cm, luego habrá que colocar 9 tuberías pequeñas.

14.(C) En el cuadrado mágico la suma de todos sus números será la suma de los números enteros que van del –10 al 14, es decir $11 + 12 + 13 + 14 = 50$ (los números negativos se anulan al sumarse con sus opuestos). Como esta suma la podríamos hacer sumando los números por filas en el cuadrado mágico y todas ellas suman lo mismo, los número en cada una de ellas suman 10.

XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel III)

15.(B) Los cubos del problema tienen de arista: 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 cm. Las áreas de sus caras son: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 cm^2. Los cubos contribuyen a la superficie pedida con 4 de sus caras (las caras laterales) y la diferencia entre el área de una cara suya (la superior) y el área de la cara (la inferior) del cubo inmediatamente menor, salvo el cubo grande que añade una cara más (la de su base), entendiendo que encima del cubo de lado 1 hay un "cubo" de lado 0.
Así, la fórmula de la superficie de la torre es :
Las cuatro caras de cada cubo: $4\cdot(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2) = 560$
Las siete diferencias de caras:
$1^2 - 0^2 + 2^2 - 1^2 + 3^2 - 2^2 + 4^2 - 3^2 + 5^2 - 4^2 + 6^2 - 5^2 + 7^2 - 6^2 = 7^2$
La base de la torre: 7^2. Solo queda sumar bien los tres resultados: $560 + 49 + 49 = 658$

16.(B) Queremos que el triángulo *DEC* y el trapecio *ABED* tengan igual área, o lo que es lo mismo que el triángulo *ABC* tenga el doble de área que el *DEC* y como son semejantes, si las áreas están en proporción de 2:1 las longitudes de las líneas correspondientes estarán en la razón $\sqrt{2}:1$, y por tanto si *CH* mide 2, la altura del triángulo *DEC* medirá $\sqrt{2}$, y la del trapecio $2-\sqrt{2}$.



17.(A) Al ir en direcciones contrarias, el primer encuentro ocurrirá al repartirse 180º (están separados por media vuelta) proporcionalmente a sus velocidades. Dividimos 180º entre 2 + 3 y nos da que el primer encuentro ocurrirá a los $2 \cdot 36º$ de recorrido de Carlos y a $3 \cdot 36º$ de recorrido de Alba. Para el segundo encuentro la distancia para encontrarse será de 360º, y por tanto se producirá cuando Alba recorra otros 216º y Carlos 144º. Así Alba encuentra a Carlos en los grados: 108, 324, 540, … En tres minutos Alba habrá recorrido $180 \cdot 30º = 5400º$. Así que la solución redondeada a un entero por exceso de la ecuación $108 + 216n = 5400$, nos dará el número de cruces entre ambos ciclistas. Como n = 24,5 la respuesta es que se cruzan 25 veces.

XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel III)

18.(B) Si x es 0 el primer miembro vale 3. Si x es entero positivo tenemos: para $x = 1$, el primer miembro no da un número entero; para $x > 1$, cada uno de los sumandos es menor que $\frac{1}{3}$, y por tanto la suma es menor que 1. Si x es entero negativo, los tres sumandos son potencias naturales positivas de 2, 3 y 4, y por tanto dos de ellos son pares y la otra impar, con lo que la suma no puede ser par.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{4}\right)^x = ¿?$$

19.(A) Tenemos que : $8a+9b+10c=(a+b+c)+(7a+8b+9c) \Rightarrow$.

$$a+b+c=\frac{(4a+5b+6c)-(a+2b+3c)}{3}=\frac{71-47}{3}=8$$

$$71=4a+5b+6c=\frac{(7a+8b+9c)+(a+2b+3c)}{2}=\frac{(7a+8b+9c)+47}{2} \Rightarrow$$

$$(7a+8b+9c)=2\cdot 71-47=95$$

Por tanto $8a+9b+10c=(a+b+c)+(7a+8b+9c)=8+95=103$.

20.(D) Vamos primero a contar permitiendo que el 0 encabece el número de cinco cifras y luego descontaremos los números que empiezan por 0.

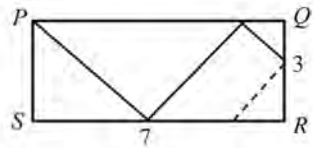
Claves de cinco cifras con cuatro iguales y una distinta. La distinta puede tomar 9 valores y ocupar cinco posiciones distintas. La cifra que se repite cuatro veces puede tomar 10 valores.

En consecuencia, el número de estas claves es $9 \cdot 5 \cdot 10 = 450$.

De ellas, por equidad y simetría habrá el mismo número de claves que empiecen por cero y que empiecen por otra cifra, luego a la hora de considerar números de cinco cifras, habrá que descontar los 45 que empiezan por 0. La respuesta es 405.

XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel III)

21.(C) Un poco de tanteo nos dará la solución. Asignaremos coordenadas a los vértices de la mesa. $S(0,0)$, $R(7,0)$, $Q(7,3)$, $P(0,3)$.
Golpeamos la bola:



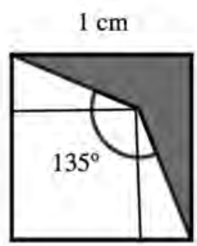
$P(0,3)$, $P_1(3,0)$, $P_2(6,3)$, $P_3(7,2)$, $P_4(5,0)$, $P_5(2,3)$, $P_6(0,1)$, $P_7(1,0)$, $P_8(4,3)$, $P_9(7,0)$.

Aunque se observan pautas de comportamiento (sumar o restar 3 a las coordenadas anteriores, siempre que los resultados estén entre 0 y 7 para la primera coordenada y entre 0 y 3 para la segunda) resulta más práctico dividir los lados en unidades y trazar la trayectoria de la bola.

22.(E) 2^9 y 2^{18} son cubos perfectos y por tanto no lo son el anterior al primero ni el posterior al segundo. Serán cubos perfectos entre esos valores los números a^3, con a entero positivo, que verifiquen que $2^9 \leq a^3 \leq 2^{18}$; es decir, $2^3 \leq a \leq 2^6$. Así tendremos todos los enteros que van desde 8 hasta 64, es decir 57.

23.(B) Los tres lados deben ser distintos y sumar 21. Los triángulos los nombramos a partir de las ternas de sus lados, ordenados estos de mayor a menor, teniendo en cuenta que los tres números deben ser distintos y el mayor debe ser menor que la suma de los otros dos (en este caso menor que 11)
(8,7,6), (9,7,5), (9,8,4), (10,6,5), (10,7,4), (10,8,3), (10,9,2).

24.(D) La cometa se puede descomponer a partir de su vértice obtuso en un cuadrado de diagonal 1 cm y dos triángulos rectángulos. El nuevo cuadrado tiene $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm de lado, y por tanto $\frac{1}{2}$ cm² de área. Los dos triángulos rectángulos equivalen en área a un rectángulo de lados $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm y $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ cm, y área $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$ cm².



El área del dardo es: $1-\frac{1}{2}-\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ cm².

XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel III)

25.(B) Si [28, x, y, 65] es una serie de Shonk, entonces $28 \cdot x \cdot y \cdot 65$ es un cuadrado perfecto y este producto debe tener sus factores primos con exponente par.
Como $28 = 4 \cdot 7$ y $65 = 5 \cdot 13$ entre x e y deben repartirse los factores 5, 7 y 13, pudiendo tener algún factor más. Los factores 5 y 7 no pueden ir los dos como factores de "y" ya que entonces "y" tendría que ser 35, ya que añadirle otro factor mayor que 1 haría que pasase de 65. Pero y = 35, no deja espacio para "x", ya que se tendría que llevar el factor 13 y no podría tener un factor más que lo situara entre 28 y 35. Así "x" debe tener al menos uno de los factores 5 y 7, y por tanto deja el 13 para "y". Entonces "y" no se puede llevar ni el 5 ni el 7. No queda más posibilidad que $x = 35$
y que $y = 4 \cdot 13 = 52$, de forma que $x + y = 87$.

XXV Concurso de Primavera de Matemáticas

Soluciones 2ª Fase Nivel IV

1. (A) Elevando la expresión del enunciado al cuadrado, obtenemos:

$$\left(\sqrt{49+20\sqrt{6}}-\sqrt{49-20\sqrt{6}}\right)^2=49+20\sqrt{6}+49-20\sqrt{6}-2\cdot\sqrt{49^2-\left(20\sqrt{6}\right)^2}=98-2\sqrt{1}=96.$$

Como hemos elevado al cuadrado, calculamos la raíz y extraemos factores para obtener nuestro resultado final: $\sqrt{96}=4\sqrt{6}$.

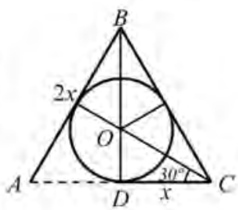
2. (B) Si $\begin{cases} a+2b+3c=9 \\ a+4b+9c=27 \end{cases}$ sumando ambas ecuaciones se obtiene $2a+6b+12c=36$.

Por lo tanto $a+3b+6c=18$.

3. (D) $x+\sqrt{x-2}=4 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}=4-x$ Elevando al cuadrado resulta $x-2=16+x^2-8x \Leftrightarrow x^2-9x+18=0$ cuyas soluciones son $x_1=3$ y $x_2=6$. De esas dos soluciones únicamente $x_1=3$ es válida ya que la solución de la raiz cuadrada es siempre un número positivo, por lo que tiene una única solución real.

4. (D) Si llamamos x al radio del cono, su diámetro y generatriz valen $2x$. Realizando una sección vertical del cono (figura 1) podemos ver que tenemos un triángulo equilátero ABC y otro rectángulo ABD cuya hipotenusa AB es el doble que el cateto $AD=DC$. Por ser equilátero el triángulo ABC los ángulos $\hat{A}, \hat{B}$ y $\hat{C}$ son de 60º.

Si consideramos ahora el centro de la esfera O vemos que con los puntos de tangencia se forman dos triángulos rectángulos iguales, por lo que la recta que une el centro O con el vértice C es bisectriz de $\hat{C}$. Esto nos permite calcula el valor del radio de la base del cono utilizando trigonometría:



$$tg30^\circ=\frac{15}{x}\Rightarrow x=\frac{15}{tg30^\circ}=\frac{15}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3\cdot 15}{\sqrt{3}}=15\sqrt{3}\,.$$

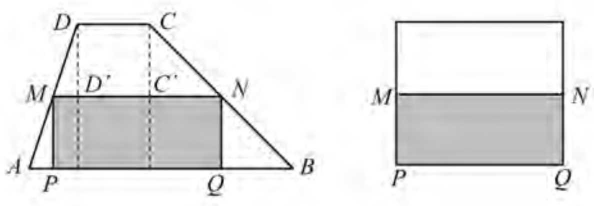
La altura del cono es $DB=\sqrt{(2x)^2-x^2}=x\sqrt{3}=15\sqrt{3}\sqrt{3}=45$ cm.

XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

5. (C) Dado que no son muchos números podemos hacer la lista de mayor a menor:
$400 \to 3100 \to 3010 \to 3001 \to 2200 \to 2110 \to 2101 \to 2020$
Ocupa la octava posición

6. (E) Podemos trabajar utilizando las propiedades de los logaritmos:
$\log_2(\log_{16} n) = \log_4(\log_4 n)$
Empezamos cambiando las bases:
$$\log_2\left(\frac{\log_4 n}{\log_4 16}\right) = \frac{\log_2(\log_4 n)}{\log_2 4} \Rightarrow \log_2\left(\frac{\log_4 n}{2}\right) = \frac{\log_2(\log_4 n)}{2}$$
$$\log_2(\log_4 n) - \log_2 2 = \frac{\log_2(\log_4 n)}{2} \Rightarrow \log_2(\log_4 n) - 1 = \frac{\log_2(\log_4 n)}{2}$$
$$\log_2(\log_4 n) = 2 \Rightarrow \log_4 n = 2^2 = 4\ .$$
Por lo tanto, $n = 4^4 = 256$ cuyas cifras suman 13

7. (C) Desde D y C trazamos rectas perpendiculares a la base AB que cortan al segmento MN en los puntos D' y C'. Como M y N son los puntos medios de los lados AD y BC, los triángulos APM y $MD'D$ son iguales y lo mismo pasa con los triángulos $C'NC$ y QBN. Podemos colocar ahora los dos triángulos de abajo arriba para ver que obtenemos dos rectángulos iguales, uno sombreado y otro no. Es decir, el área total mide 26 m^2.



XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

8. (B) Al sumar números consecutivos siempre vamos a poder operarlo como la suma de una progresión aritmética de diferencia 1. Es decir, queremos que:

$\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = 100$ y como $d = 1$ y $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$$\frac{a_1 + a_1 + n - 1}{2} \cdot n = \frac{2na_1 + n^2 - n}{2} = 100 \Rightarrow n^2 + (2a_1 - 1)n - 200 = 0$$

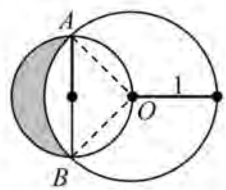
Las soluciones de esta ecuación deben dar –200 al multiplicarlas y al sumarlas $1 - 2a_1$ siendo a_1 un número entero positivo (para cumplir las condiciones del enunciado) y n un número natural mayor que 1 (para que estemos sumando al menos dos números seguidos). Como $1 - 2a_1$ es impar y negativo, las únicas posibilidades para n son 8 y 5, así que solo puede haber dos sumas posibles, una con cinco números seguidos y otra con ocho. Estas series son del 18 al 22 y del 9 al 16.

9. (A) El triángulo OAB es rectángulo en O ya que abarca un diámetro e isósceles ya que $OA = OB = 1$.

Con esto podemos calcular el diámetro del círculo pequeño que es $\sqrt{2}$. El área del círculo pequeño es, entonces $\frac{\pi}{2}$.

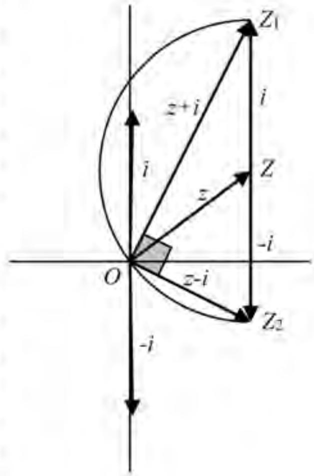
El área del sector circular OAB es, por tanto, un cuarto del círculo grande, es decir $\frac{\pi}{4}$. El área de ese sector que queda a la izquierda de la cuerda AB es $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ ya que el área del triángulo OAB es $\frac{1}{2}$.

El área sombreada es la mitad del círculo pequeño menos el área calculada anteriormente: $\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$



XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

10.(B) Para que el cociente de dos números complejos sea un imaginario puro deben formar entre si un ángulo de 90º (o de 270º que es equivalente a formar un ángulo recto por el otro lado). Si dibujamos el número complejo z, al sumarle o restarle i, estamos obteniendo otros números complejos que, representados en el plano, se sitúan un cuadrado por encima o por debajo. Como el ángulo que forman es de 90º eso significa que la recta perpendicular al eje de abscisas que une $z_1 = z + i$ con $z_2 = z - i$ es el diámetro de una circunferencia de centro $Z(a, b)$ que pasa por O, por $Z_1(a, b + 1)$ y por $Z_2(a, b - 1)$. Además, el módulo de z es también un radio de la circunferencia, por lo que debe medir 1, que es lo mismo que mide desde Z a Z_1 o desde Z a Z_2.

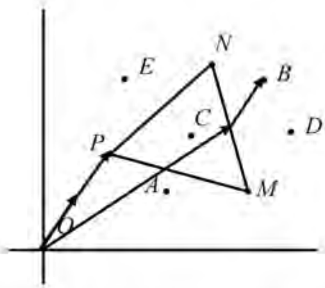


11.(B) El valor más pequeño que puede tomar x es dos para que los logaritmos sean positivos. Pero como los lados deben medir lo suficiente como para que $\log_2 x$ y $\log_4 x = \dfrac{\log_2 x}{2}$ sumen más que 3, x debe ser mayor que 4 ya que $\log_2 4 + \dfrac{\log_2 4}{2} = 3$. Por esto el valor mínimo de x es cinco. También se debe cumplir que al sumar $3 + \dfrac{\log_2 x}{2}$ debe ser mayor que $\log_2 x$. Cuando $x = 64$ se cumple la igualdad, por lo que el último valor posible debe ser 63. Del 5 al 63 tenemos 59 valores posibles.

XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

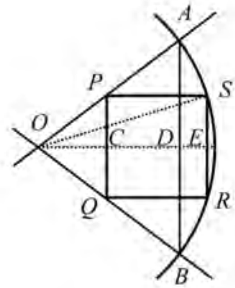
12.(E) Como están en progresión aritmética $b = a + d$ y $c = a + 2d$ por lo que la ecuación de la recta tiene la forma:
$ax + (a + d)y = a + 2d \Rightarrow a(x + y) + dy = a + 2d$
Obtenemos entonces que $y = 2$, $x + y = 1$ siempre cumplen esta ecuación.
Es decir $x = -1$; $y = 2$.

13.(B) La semisuma de las coordenadas de M y N son las coordenadas de su punto medio. Si le sumamos un vector que sea la mitad de $\overrightarrow{OP}$ debemos sumarle un vector paralelo a $\overrightarrow{OP}$ pero de la mitad de su módulo por lo que, desde el punto medio de MN la única posibilidad de obtener un vector paralelo a $\overrightarrow{OP}$ es acabar en B.



14.(A) Buscamos cifras a y b entre 1 y 9 (démonos cuenta de que 0 no vale porque ab y/o ba no sería(n) un número de dos cifras) tales que $7[ab] = 4[ba]$.
Sabiendo que $[ab] = 10a + b$ y, análogamente, que $[ba] = 10b + a$ podemos sustituir ambas expresiones en la primera igualdad para deducir que:
$70a + 7b = 40b + 4a$.
Despejando llegamos a que $66a = 33b$, y simplificando concluimos que $2^a = b$. Por tanto, los posibles números $[ab]$ son 12, 24, 36 y 48, que suman 120.

XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)



15.(D) Sean C, D y E, los puntos medios, respectivamente, de los segmentos PQ, AB y SR (que son paralelos entre sí). Estos tres puntos están alineados por construcción. Démonos cuenta de que el triángulo ODA es rectángulo por ser AOB isósceles y D el punto medio de AB, así que por Pitágoras tenemos que $OA^2 = OD^2 + AD^2$.

El segmento AD mide 3 cm por ser la mitad de AB y OA mide 5 cm por ser un radio de la circunferencia, luego OD mide 4 cm.

Sea l la longitud del lado del cuadrado. Por Tales los triángulos OPC y OAD son semejantes, de modo que $\dfrac{OC}{OD} = \dfrac{PC}{AD}$ y deducimos $OC = \dfrac{4PC}{3}$. El segmento PC mide la mitad de PQ que es un lado del cuadrado, luego $OC = \dfrac{2l}{3}$.

Además, $OE = OC + CE$ donde CE mide l por lo que $OE = \dfrac{5l}{3}$. Finalmente, démonos cuenta de que el triángulo OES es rectángulo por ser SOR isósceles y E el punto medio de SR, luego por Pitágoras tenemos que $OS^2 = OE^2 + SE^2$. El segmento SD mide la mitad de SR que es un lado del cuadrado y OS mide 5 cm por ser un radio de la circunferencia, así que $5^2 = \left(\dfrac{5l}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{l}{2}\right)^2$.

Despejando l^2, obtenemos que el área del cuadrado mide $\dfrac{900}{109}$ cm².

XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

16.(D) En la circunferencia goniométrica el ángulo de 20º se encuentra en el primer cuadrante y es menor que 45º, luego $0 < \text{sen}20° < \cos 20° < 1$. A partir de esta información podemos concluir que $0 < tg20° = \dfrac{sen20°}{\cos 20°} < 1$ porque el numerador de la fracción es menor que el denominador. Por tanto, $\dfrac{1}{tg20°} > 1$ al ser el inverso de un número positivo menor que 1. Podemos descartar entonces las respuestas A, B y C. Ahora bien, $\dfrac{1}{tg20°} = \dfrac{\cos 20°}{sen20°} = \cos 20° \cdot \dfrac{1}{sen20°} < \dfrac{1}{sen20°}$ dado que $\cos 20° < 1$.

Así pues, la respuesta correcta es D.

17.(C) Exactamente tres de las cinco predicciones acertaron, luego exactamente dos fallaron. Supongamos que la predicción (c) se cumplió, entonces el Real Madrid ganó y las predicciones (a), (b) y (d) también se cumplieron. ¡Pero esto son cuatro predicciones que acertaron! Por tanto, (c) debió fallar y el Real Madrid no ganó. Sabiendo esto, si la predicción (d) hubiera acertado, entonces necesariamente el partido acabó en empate y las predicciones (a) y (e) fallaron. ¡Pero esto son tres predicciones falladas! Por tanto, (d) debió fallar y el Real Madrid perdió. Sabiendo por (b) que el Real Madrid marcó y por (e) que se marcaron exactamente tres goles, el único resultado posible para que el Manchester City ganase es Madrid: 1, City: 2.

18.(A) Supongamos que la cifra escogida al azar por Juan es j. Dependiendo de la cifra escogida por María, podremos obtener las sumas $j + 1, j+ 2,\ldots,j + 9$ cuyas cifras de las unidades podrán ser cualquiera de las cifras del 0 al 9 exceptuando la propia j. Por tanto, de entre las 81 sumas posibles (asociadas a las 9 cifras elegibles por Juan por cada 9 elegibles por María), habrá 8 casos que acaben en cada una de las cifras del 1 al 9 (los 8 en que Juan no haya escogido esa cifra) y 9 casos que acaben en 0 (uno por cada cifra escogida por Juan). Es decir, la cifra de las unidades más probable de la suma será el 0.

XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

19.(C) Recordemos que $sen^2x + \cos^2 x = 1$, por lo que podemos sustituir $sen^2x + \cos^2 x = 1 - sen^2x$ en la ecuación dada para obtener $sen^8x + (1 - sen^2x)^3 = 1$. Desarrollando el primer término y cancelando el 1 que se repite a ambos lados de la ecuación, llegamos a la ecuación equivalente $sen^8x - sen^6x + 3sen^4x - 3sen^2x = 0$. Debemos por tanto encontrar las raices reales del polinomio $y^4 - 3y^3 + 3y^2 - 3y$ en la variable $y = sen^2x$ que podemos factorizar mediante Ruffini; el resultado es la expresión $y(y-1)(y^2+3)$. Las raíces reales son 0 y 1, por lo que debemos resolver las ecuaciones $sen^2x = 0$ y $sen^2x = 1$ con x en el intervalo $[0,\ 2\pi)$ para obtener todas las soluciones posibles de la ecuación original.

Esto nos arroja un total de cuatro soluciones, a saber: 0, $\frac{\pi}{2}, \pi$ y $\frac{3\pi}{2}$

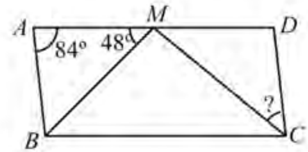
20.(C) Podemos describir la función f a trozos según los distintos valores absolutos evalúen números positivos o negativos. De este modo:

$$f(x) = \begin{cases} 2(a-x) + 3(-x-a) = -5x - a, & si\ \ x < -a \\ 2(a-x) + 3(x+a) = x + 5a, & si\ \ -a \le x < a \\ 2(x-a) + 3(x+a) = 5x + a, & si\ \ a \le x \end{cases}$$

Podemos observar que la función f es continua y decreciente en el primer trozo y creciente en el resto, por lo que el mínimo de la función se alcanza al final del primer trozo, es decir, en $x = -a$. Se tiene que $f(-a) = 4a$.

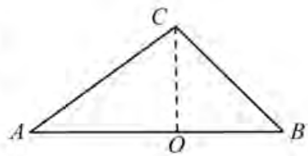
XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

21.(B) Los tres ángulos de un triángulo siempre suman 180º, por lo que en el triángulo ABM deducimos que $A\hat{B}M = 48^{\circ}$. Ahora bien, si un triángulo tiene dos de sus ángulos iguales, entonces es isósceles, por lo que los segmentos AB y AM tienen la misma longitud. Como $ABCD$ es un paralelogramo y M el punto medio del lado AD, concluimos que los segmentos DC y DM también tienen la misma longitud (en particular, la de AB y AM) y que el triángulo CDM también es isósceles con ángulos $D\hat{C}M$ y $D\hat{M}C$ iguales. En un paralelogramo los ángulos interiores opuestos son iguales y todos suman en conjunto 360º, así que $B\hat{C}D = B\hat{A}M = 84^{\circ}$ y $C\hat{D}M = A\hat{B}C = 96^{\circ}$.



Como $C\hat{D}M + D\hat{C}M + D\hat{M}C = 180^{\circ}$ y $D\hat{C}M = D\hat{M}C$, finalmente obtenemos que $D\hat{C}M = 42^{\circ}$.

22.(E) En el triángulo ABC podemos trazar la altura sobre el lado AB que corta en un punto O. De este modo, tenemos que $\dfrac{OC}{OA} = tgA = \dfrac{3}{4}$ y $\dfrac{OC}{OB} = tgB = \dfrac{21}{20}$ y podemos deducir que



$OA = \dfrac{4}{3}OC$ y $OB = \dfrac{20}{21}OC$. Por construcción, los triángulos AOC y BOC son rectángulos, luego por Pitágoras obtenemos que:

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 = \left(\frac{4}{3}OC\right)^2 + OC^2 = \frac{25}{9}OC^2 = \frac{5^2}{3^2}OC^2 \Rightarrow AC = \frac{5}{3}OC\,.$$

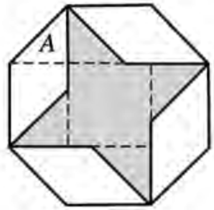
Análogamente

$$BC^2 = OB^2 + OC^2 = \left(\frac{20}{21}OC\right)^2 + OC^2 = \frac{841}{441}OC^2 = \frac{29^2}{21^2}OC^2 \Rightarrow BC = \frac{29}{21}OC$$

Podemos calcular entonces el cociente $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{\frac{5}{3}\cdot OC}{\frac{29}{21}\cdot OC} = \dfrac{35}{29}$.

XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

23.(B) El triángulo marcado como A es la mitad de un cuadrado con diagonal de 1 cm (lado del octógono), luego sus lados iguales miden $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ cm y su área $\dfrac{1}{4}$ cm². Este triángulo es igual a los cuatro triángulos marcados en la estrella, por lo que la suma de estas cuatro puntas de la estrella es 1 cm². En cuanto al resto de la estrella, es un cuadrado de lado coincidente con el del octógono, esto es 1 cm, luego su área es 1 cm². Así pues, el área total de la estrella es de 2 cm².

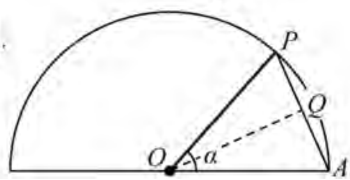


24.(D) En primer lugar, démonos cuenta de que tenemos que escoger dos cifras de entre las diez del sistema decimal; para esto tenemos $\binom{10}{2} = 45$ posibilidades.

Necesariamente una de las cifras será menor que la otra, así que veamos de cuántas maneras podemos seleccionar las posiciones en que usar la menor de las cifras escogidas (y en el resto completaremos con la mayor de ellas).Dado que cada cifra hemos de usarla al menos una vez, podremos usar la menor de ellas una, dos o tres veces, es decir, tendremos que seleccionar una, dos o tres posiciones en que usarla de entre las cuatro disponibles; para esto tenemos en conjunto $\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3} = 4+6+4 = 14$ posibilidades.

Combinando ambos conteos, concluimos que hay $45 \cdot 14 = 630$ claves distintas con dos y solo dos cifras del sistema decimal.

25.(E) Sea Q el punto medio de la cuerda AP. Dado que el triángulo AOP es isósceles (OA y OP son radios del semicírculo), el triángulo OQA es rectángulo con hipotenusa OA y ángulo $A\hat{O}Q = \dfrac{\alpha}{2}$. Como el lado AQ de longitud la mitad de la cuerda AP es opuesto al ángulo $A\hat{O}Q$, se tiene que $sen\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = senA\hat{O}Q = \dfrac{AQ}{AO} = \dfrac{AP}{2}$. En definitiva, $AP = 2sen\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$.



Participantes y relación de ganadores del XXV Concurso de Primavera de Matemáticas

Como todos los años la primera fase tuvo lugar en los propios centros de los participantes. El número de participantes en esta fase se sigue conservando e incluso superando la cifra de 50000, pero debido a la pandemia que hemos tenido que superar, nos hemos visto obligados a reducir el número de participantes en la segunda fase que se realiza en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid. De unos 3500 que la realizaban anteriormente este año han sido 2108.

En las siguientes tablas se refleja el número de participantes por cursos, niveles y género

	NIVEL 1				NIVEL 2			
	5º P		6º P		1º ESO		2º ESO	
nº de participantes (inscritos)	57 (57)	26 (26)	184 (187)	93 (98)	182 (192)	86 (90)	279 (299)	157 (170)
Totales por curso	83 (83)		277 (285)		268 (282)		436 (469)	
Totales por nivel	803 (849)				704 (751)			

	NIVEL 3				NIVEL 4			
	3º ESO		4º ESO		1º Bach.		2º Bach.	
nº de participantes (inscritos)	222 (239)	111 (114)	216 (234)	111 (118)	163 (183)	70 (84)	118 (137)	33 (33)
Totales por curso	333 (353)		327 (352)		233 (267)		151 (170)	
Totales por nivel	660 (705)				384 (437)			

Participantes y relación de ganadores del XXV Concurso de Primavera de Matemáticas

La relación con los tres participantes que mayor puntuación obtuvieron y el Centro Escolar en el que estudian es la siguiente.

PRIMER NIVEL (5º y 6º de Primaria)

1º. Iván Aguilera Rollón. 6Primaria, *Colegio Nazaret–Oporto*, Madrid
1º. Lucas Casero Ramírez. 6Primaria, *Colegio Valdeluz*, Madrid
3º. Paula Serrano Realpe. 5Primaria, *Colegio San Agustín*, Madrid

SEGUNDO NIVEL (1º y 2º ESO)

1º. Álvaro Collado Montoto. 2ESO, *Eurocolegio CASVI*, Villaviciosa de Odón
1º. Pablo Llamas Martínez. 2ESO, *Escuela Ideo*, Madrid
3º. Darío Fernández García. 1ESO, *Colegio Berriz–Veracruz*, Las Rozas

TERCER NIVEL (3º y 4º ESO)

1º. Alejandro Gómez–Olano Espluga. 3ESO, *Colegio Santa Mª del Pilar*, Madrid
2º. Manuel Eymar Carballo. 4ESO, *IES Ramiro de Maeztu*, Madrid
3º. Diego López Aragón. 4ESO, *IES María Guerrero*, Collado Villalba

CUARTO NIVEL (1º y 2º Bachillerato)

1º. Álvaro Gamboa Rodríguez. 1BACH, *IES Ciudad de los Poetas*, Madrid
2º. Daniel RIbalta Andrés. 1BACH, *IES Lope de Vega*, Madrid
3º. Hugo Labella López. 2BACH, *Colegio Mirabal*, Boadilla del Monte

XXI Concurso Intercentros de Matemáticas *"Joaquín Hernández"*

PRUEBA POR EQUIPOS NIVEL I (1 ESO - 2 ESO)

1. El tesoro de Sandokán

Sandokán se ha hecho con un cofre de monedas y las ha repartido a partes iguales con sus amigos Yáñez, Tremal-Naik y Kammammuri. El número de monedas que había en el cofre tiene cinco cifras y, ¡oh, sorpresa!, el número de monedas que le ha correspondido a cada uno de los cuatro piratas tiene las mismas cinco cifras, pero en orden inverso. ¿Cuántas monedas había en el cofre?

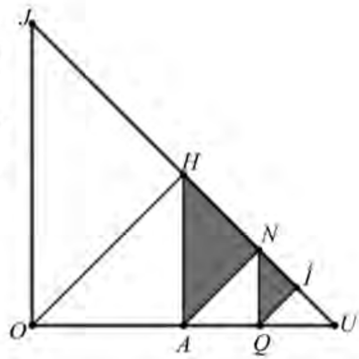
2. Corredores

Jessi y Julián corren en una pista circular. Ambos parten a la vez del mismo punto S y en el mismo sentido. Al salir chocan manos y cada vez que se cruzan en el camino hacen lo mismo, ¡PLAS!

Jessi da una vuelta completa en 8 minutos. A los 72 minutos es la sexta vez que chocan manos y como justo están en el punto S deciden parar. ¿Cuánto tiempo tarda Julián en dar una vuelta completa?

3. Triángulos

En el triángulo rectángulo isósceles *JOU* trazamos los segmentos *OH*, *AN* y *QÍ* perpendiculares a la hipotenusa *JU* y los segmentos *AH* y *QN* perpendiculares al lado *OU*, como ves en la figura. ¿Qué fracción del triángulo *JOU* está coloreada?



XXI Concurso Intercentros de Matemáticas *"Joaquín Hernández"*

PRUEBA POR EQUIPOS NIVEL II (3 ESO - 4 ESO)

1. Las sumas de Teo

Teo va creciendo pero aún es pequeño y solo sabe hacer sumas de once números. Ayer se encontró con una docena de números escritos en su pizarra, así que tapó el primero de ellos y sumó los once restantes; luego tapó el segundo y sumó los once restantes; y así continuó hasta que tapó el último y sumó los once restantes.

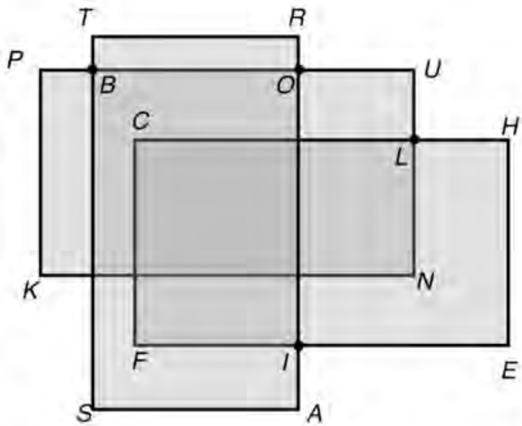
De esta manera obtuvo estas sumas:

166 – 164 – 163 – 159 – 157 – 155 – 152 – 151 – 149 – 148 – 144 – 140

¿Cuáles eran los doce números que estaban escritos en la pizarra de Teo?

2. Tres alfombras

Hemos tirado al suelo tres grandes alfombras iguales, *TRAS*, *PUNK*, *CHEF*, rectangulares de medidas 11 m × 20 m. Además hemos señalado cuatro puntos, *BOLI*, para darte las siguientes medidas: PB = 1 m, RO = 2 m, UL = 4 m, LH = 3 m, IA = 3 m. Si todos los ángulos que ves son rectos, ¿qué superficie de suelo están cubriendo las alfombras?



3. Piedras

En la playa me entretuve de esta manera.

Cogí muchísimas piedras blancas y negras, 300 de cada color.

Luego me propuse formar una larga fila formada por 152 de dichas piedras con una única prohibición: no puede haber tres piedras seguidas del mismo color.

¿Cuál es el máximo número de piedras negras que puede haber en esa fila?

XXI Concurso Intercentros de Matemáticas *"Joaquín Hernández"*

PRUEBA POR EQUIPOS NIVEL III (BACH)

1. Denominador 2023

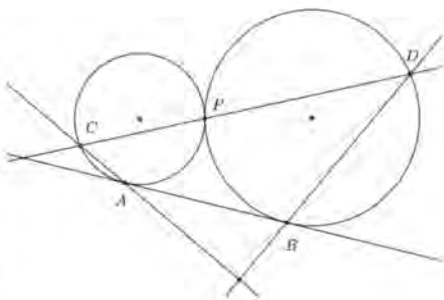
Considera la lista de las 2022 fracciones propias con denominador 2023:

$$\frac{1}{2023} \quad \frac{2}{2023} \quad \frac{3}{2023} \quad \cdots \quad \frac{2022}{2023}$$

Deduce razonadamente el número de fracciones de la lista que no son irreducibles.

2. Dos circunferencias

Las circunferencias c_1 y c_2 son tangentes exteriores siendo P el punto de tangencia. La tangente común a c_1 y c_2 toca a c_1 en el punto A y a c_2 en el punto B. Sea C un punto cualquiera de la circunferencia c_1 distinto de A y D un punto cualquiera de la circunferencia c_2 distinto de B, de modo que C y D están alineados con P. Calcula razonadamente el ángulo que forman las rectas AC y BD.



3. El árbol genealógico

Llamamos *imagen* de un número de cuatro cifras al número que se obtiene al invertir el orden de sus cifras. Por ejemplo, la *imagen* de 2023 es 3202. Llamamos *familiares* a los números que sumados con su *imagen* dan el mismo resultado. Por ejemplo, 5304 es *familiar* de 2127, porque $5304 + 4035 = 2127 + 7212$. Si un *familiar* es menor que otro decimos que es un *antepasado*, y si es mayor, decimos que es un *descendiente*.

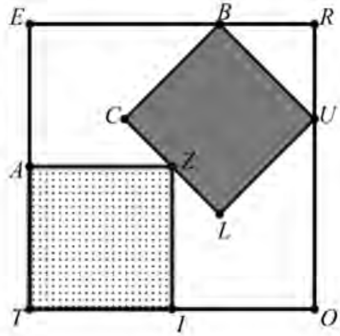
¿Cuántos *antepasados* de cuatro cifras tiene 2023? ¿Y cuántos *descendientes*?

XXI Concurso Intercentros de Matemáticas *"Joaquín Hernández"*

PRUEBA INDIVIDUAL NIVEL I (1 ESO - 2 ESO)

1. Cuadrados

En el dibujo ves tres cuadrados: *RETO*, *TIZA* y *CLUB*. Los lados de *CLUB* son paralelos a la diagonal de *RETO* y $TI = IO$. Si $TO = 6$ cm, ¿cuál es el área de *CLUB*?



2. La media

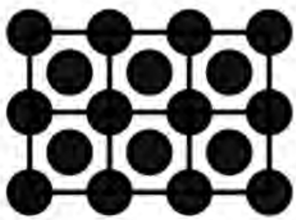
El quíntuple de la media de dos números es igual al cuádruple del mayor.

La diferencia entre los dos números es treinta y cuatro unidades menor que la media.

¿Cuáles son esos números?

3. El tablero

En un tablero cuadriculado de m filas × n columnas se coloca una ficha en el centro de cada casilla y una ficha en cada vértice de la cuadrícula hasta que no quede lugar para más fichas. En el dibujo ves un tablero de 2 × 3 con sus 18 fichas.



Si para un tablero he necesitado 203 fichas, ¿qué tamaño tenía? Da todas las posibilidades.

XXI Concurso Intercentros de Matemáticas *"Joaquín Hernández"*

PRUEBA INDIVIDUAL NIVEL II (3 ESO - 4 ESO)

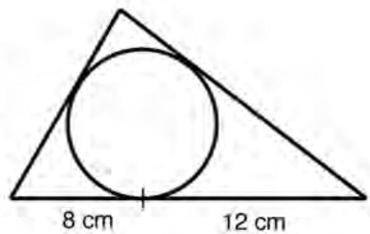
1. El camino florido

El camino de mi jardín es una recta que mide 24 m. He decidido plantar flores en su recorrido, pero no al principio ni al final. Planto margaritas cada $\frac{4}{21}$ m, planto claveles cada $\frac{12}{35}$ m, y planto rosas cada $\frac{4}{7}$ m.

¿Cuántas veces, a lo largo del camino, coincidirán los tres tipos de flores en el mismo punto?

2. Triángulo rectángulo

Hemos dibujado la circunferencia inscrita a este triángulo rectángulo. El punto de tangencia divide a la hipotenusa en dos segmentos de 8 cm y 12 cm. ¿Qué área tiene el triángulo rectángulo?



3. Los tres amigos

Don Retorcido coge dos números del conjunto {1, 2, 3, . . ., 36} y deja todos los demás a Comenúmeros. Llega la niña Centésima y dice: "anda, el producto de los números de don Retorcido es igual que la suma de los números de Comenúmeros".

¿Cuáles son los dos números que eligió don Retorcido?

XXI Concurso Intercentros

XXI Concurso Intercentros de Matemáticas *"Joaquín Hernández"*

PRUEBA INDIVIDUAL NIVEL III (BACH)

1. Polígonos regulares

Un polígono regular de lado 1 cm está rodeado de cuadrados y pentágonos regulares. Una parte del dibujo se muestra en la figura. Calcula:

(a) El perimetro de poligono exterior una vez completada la figura.

(b) El radio del polígono interior en función de ϕ.

[Dato: $\cos(36°) = \frac{\phi}{2}$]

2. El secretario despistado

La directora de publicidad de una empresa encarga a su secretario enviar cartas postales a cinco empresas distintas. Después de preparar los sobres y redactar las cinco cartas personalizadas, introduce las cartas en los sobres y…¡no acierta ni una!

Si lo hubiera hecho al azar, ¿qué probabilidad habría tenido de hacerlo así?

3. La gran suma

¿Cuál es el mínimo número de enteros consecutivos empezando por 1 que es necesario sumar para obtener una suma superior a 2023?

XXI Concurso Intercentros de Matemáticas *"Joaquín Hernández"*

PRUEBA DE RELEVOS NIVEL I (1 ESO - 2 ESO)

EMPIEZA CON EL PROBLEMA I A

I A.

Elena quiere enseñarte a jugar al miniajedrez (un tablero con cinco cuadrados por lado). Para que te familiarices con el tablero se inventa un juego. ¿Cuántos cuadrados, de todos los tamaños, hay en el tablero?

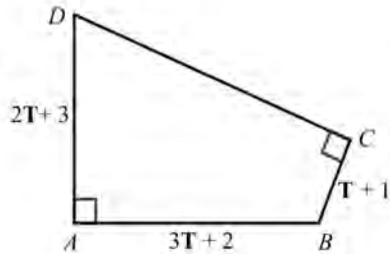
[Anota la respuesta en la tarjeta y pásala a tu relevo de 3ESO – 4ESO]

I B. [Sea **T** la respuesta del problema **III B**]

El cuadrilátero *ABCD* de la figura tiene ángulos rectos en *A* y *C* y sus lados, en cm, miden:

$AB = 3\mathbf{T}+2 \qquad BC = \mathbf{T}+1 \qquad AD = 2\mathbf{T}+3$

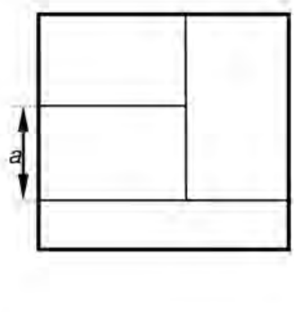
¿Cuál es, en cm, el perímetro del cuadrilátero?



[Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema]

I C. [Sea **T** la respuesta del problema **III C**]

He dividido un cuadrado de $24 \cdot \mathbf{T}$ cm de lado en cuatro rectángulos, todos ellos con la misma área. ¿Qué longitud tiene el segmento *a*?



[Anota la respuesta en la tarjeta y pásala a tu relevo de 3ESO – 4ESO]

XXI Concurso Intercentros de Matemáticas *“Joaquín Hernández”*

PRUEBA DE RELEVOS NIVEL II (3 ESO - 4 ESO)

EMPIEZA CON EL PROBLEMA II B

II A. [Sea **T** la respuesta del problema **I A**]

Para mi fiesta de cumpleaños he comprado **T** cajas y las he numerado del 1 al **T**. En cada una de ellas quiero meter tantos caramelos como indica el número de la caja. He empezado a rellenar las cajas impares y justo cuando las he completado se me acabaron los caramelos. ¿Cuántos caramelos tengo que comprar para rellenar todas las cajas que me faltan?

[Anota la respuesta en la tarjeta y pásala a tu relevo de Bachillerato]

II B.

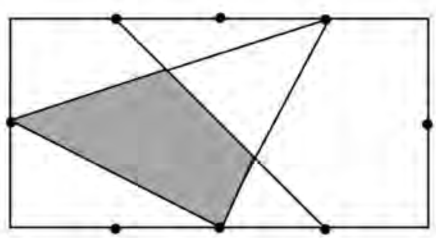
Isa está entrenando para participar en la competición de natación en aguas abiertas. Para ello, todos los días en las nueve últimas semanas nadó la misma cantidad de largos, unos días en una piscina cubierta de 25 m de longitud y otros en una piscina al aire libre de 20 m de longitud.

Haciendo cuentas de todo lo que había nadado observó que había nadado la misma distancia en las dos piscinas. ¿Cuántos dias nadó en la piscina al aire libre?

[Anota la respuesta en la tarjeta y pásala a tu relevo de Bachillerato]

II C. [Sea T la respuesta del problema I C]

En los lados de un rectángulo de base $b=\dfrac{T+3}{2}$ cm y altura $a=\dfrac{b}{2}$ cm hemos señalado ocho puntos que dividen a los lados largos en cuatro partes iguales y a los lados pequeños en dos partes iguales.



¿Cuál es el área del cuadrilátero sombreada?

[Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema]

XXI Concurso Intercentros de Matemáticas *"Joaquín Hernández"*

PRUEBA DE RELEVOS NIVEL III (BACH)

EMPIEZA CON EL PROBLEMA III C

IIIA. [Sea **T** la respuesta del problema **II A**]

Si $\boxed{E = a^2 + 4b^2 + 4ab + 14a + 28b + \dfrac{\mathbf{T}+12}{12}}$, con a y b números reales cualesquiera, ¿cuál es el valor mínimo que puede tomar la expresión E?

[Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema]

III B. [Sea **T** la respuesta del problema **II B**]

El factorial de un número entero positivo n se define como

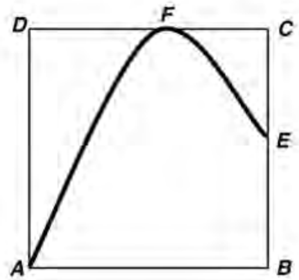
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$.

¿Para cuántos números enteros positivos k menores que **T** es imposible encontrar un valor de n para el que $n!$ termine en exactamente k ceros?

[Anota la respuesta en la tarjeta y pásala a tu relevo de 1ESO – 2ESO]

III C.

Un trozo de parábola está en el interior de un cuadrado de lado 8. Calcula la longitud del segmento DF sabiendo que BE = 5,12.



[Anota la respuesta en la tarjeta y pásala a tu relevo de 1ESO – 2ESO]

LIX Olimpiada Matemática

REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

LIX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA
Comunidad de Madrid
FASE CERO [sábado 19 de noviembre 2022]

- En la hoja de respuestas, marca la letra de la opción que creas correcta.
- Cada respuesta **correcta te aportará 5 puntos**, cada respuesta **en blanco 1 punto** y cada respuesta **errónea 0 puntos**.
- No está permitido el uso de calculadoras, instrumentos de medida o de cualquier aparato electrónico.

TIEMPO: 2 horas y 30 minutos

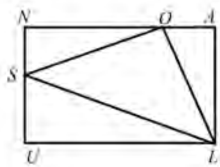
1 Isabel tardaría 8 horas en sembrar un campo y Sofia tardaría 10 horas en sembrar ese mismo campo. Deciden unirse y comienzan juntas a sembrar el campo pero al cabo de 2 horas a Isabel le da lumbago y tiene que retirarse. ¿Cuántas horas deberá trabajar sola Sofia para terminar de sembrar el campo?

A) 4,5 **B)** 5 **C)** 5,5 **D)** 6 **E)** 6,5

2 ¿Cuántos pares ordenados de números enteros (x, y) satisfacen $x^2 \le y \le x + 6$?

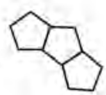
A) 14 **B)** 18 **C)** 24 **D)** 26 **E)** 28

3 El área del rectángulo $LUNA$ es 1, el área de NOS es $\frac{1}{8}$ y el área de LUS es $\frac{1}{3}$. ¿Qué área tiene el triángulo SOL?



A) $\frac{5}{12}$ **B)** $\frac{7}{18}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{7}{24}$ **E)** $\frac{11}{24}$

4 Fernando va uniendo pentágonos regulares como se ve al margen. Ya ha colocado tres y se pregunta: ¿cuántos pentágonos necesito para cerrar mi corona y así mi último pentágono quede unido con el primero?

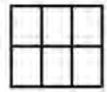


A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 14

5 ¿Cuál es el valor máximo que puede tomar la función $f(x) = |x-5| - (x^2 - x - 8)$?

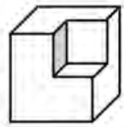
A) 3 **B)** 5 **C)** 8 **D)** 13 **E)** 14

6 Tengo una ficha roja, dos verdes y tres amarillas y las quiero colocar en las seis casillas del tablero. ¿De cuántas maneras puedo hacerlo si las fichas verdes no pueden estar en casillas que compartan lado?



A) 72 **B)** 128 **C)** 64 **D)** 48 **E)** 32

7 Sergio tiene un cubo macizo de madera de 20 cm de arista. Cuando Sol lo ve, con una sierra, le quita un cubito de 1 cm de arista de uno de los vértices (ver figura sin escala) y, como le gusta lo que obtiene, quita otros cubitos de 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 cm de arista de cada uno de los restantes vértices del cubo de Sergio. ¿Cuántos dm^2 de pintura necesitarán los amigos para pintar la figura resultante?



A) 24 **B)** 26 **C)** 28 **D)** 30 **E)** 34

8 Si a y b son números enteros, ¿cuál es la suma de todos los valores posibles de a que satisfacen la igualdad $\frac{3}{a-1}=\frac{b+3}{5}$?

A) 0 **B)** 6 **C)** 8 **D)** 20 **E)** 28

9 Don Retorcido está aburrido al pie de una escalera de 32 escalones. De repente divisa a su amigo Comenúmeros en el escalón número 22 y decide ir a su encuentro. Para hacerlo más divertido solo se permite dar saltos hacia arriba de 3 escalones y saltos hacia abajo de 4 escalones. ¿De cuántas maneras puede llegar don Retorcido al escalón de Comenúmeros con el menor número de saltos?

A) 66 **B)** 56 **C)** 55 **D)** 45 **E)** 44

10 El magnífico ciclista Van Popel participaba en una contrarreloj individual. Hizo la primera mitad del recorrido a una velocidad media de 30 km/h. Su entrenador le dijo que si quería ganar debería conseguir que su velocidad media en todo el recorrido fuera de 60 km/h. ¿Cuál debe ser su velocidad media, en km/h, en la segunda mitad para conseguir su objetivo?

A) 30 **B)** 60 **C)** 90 **D)** 120 **E)** Es imposible

11 Si expresamos el producto $\left(1-\frac{3}{10}\right)\left(1-\frac{3}{11}\right)\left(1-\frac{3}{12}\right)\cdots\left(1-\frac{3}{100}\right)$ como fracción irreducible $\frac{m}{n}$, ¿cuánto vale la suma $m+n$?

A) 1029 **B)** 2022 **C)** 1679 **D)** 197 **E)** 1926

12 El octógono regular $ABCDEFGH$ tiene área 1440. ¿Cuál es el área del trapecio $ABCD$?

A) 288 **B)** 360 **C)** 384 **D)** 400 **E)** 480

LIX Olimpiada Matemática

13 Las gráficas de las funciones $y = x^3 + 3$ e $y = 5x + 1$ se cortan en más de un punto. ¿Cuánto suman las abscisas de esos puntos de corte?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** $\frac{1}{5}$ **E)** $\frac{1}{2}$

14 Del trapecio isósceles $ABCD$ sabemos las longitudes de sus lados: $AB = 6$, $BC = 5$, $CD = 8$, $DA = 5$. ¿Cuánto vale el área del triángulo BCD?

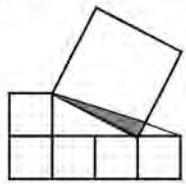
A) 2 **B)** $12\sqrt{2}$ **C)** $4\sqrt{21}$ **D)** $7\sqrt{6}$ **E)** $8\sqrt{6}$

15 Dado un pentágono regular de lado 1 cm, el área, en cm^2, del conjunto de puntos del plano exteriores al pentágono y que se encuentran a menos de 1 cm de distancia de ese pentágono es:

A) $5+\pi$ **B)** $\frac{3}{2}+2\pi$ **C)** 7 **D)** 8 **E)** 3π

16 Los números enteros a, b, c cumplen que $a^2bc = 1$. ¿Cuál de las afirmaciones siguientes es necesariamente cierta?

A) $a = b = 1$ **B)** $ac = -1$ **C)** $ab^2c = 1$ **D)** $b = c$ **E)** $a \neq 1$

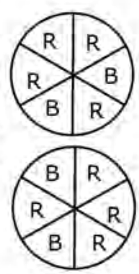


17 En el dibujo ves seis cuadrados, cinco de ellos de área 14. ¿Qué área tiene el triángulo sombreado?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 9

18 El ángulo $B\hat{A}C$ del triángulo ABC mide 68º. Los puntos D y E están en los lados AB y AC, respectivamente, y son tales que $BD = DE = EC$. Si los segmentos BE y CD se cortan en el punto F, ¿cuánto mide el ángulo $B\hat{F}C$?

A) 120º **B)** 121º **C)** 122º **D)** 123º **E)** 124º



19 Un disco está dividido en seis sectores idénticos. Coloreamos esos sectores de rojo o de blanco. ¿Cuántas configuraciones distintas podemos obtener? Ten en cuenta que las dos configuraciones que te mostramos son la misma, simplemente hemos girado el disco.

A) 12 **B)** 14 **C)** 16 **D)** 18 **E)** 20

LIX Olimpiada Matemática

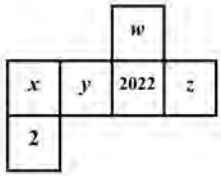
20 ¿Cuántos divisores tiene 12!? [Recuerda: $12! = 12\cdot 11 \ldots \cdot 3\cdot 2\cdot 1$]

A) 24 **B)** 420 **C)** 99 **D)** 792 **E)** 100

21 Los lados AB, BC y CA de cierto triángulo ABC miden respectivamente 27, 25 y 26. Si el incentro de ese triángulo es el punto I, la medida del segmento BI es…

A) 15 **B)** $9\sqrt{3}$ **C)** $3\sqrt{26}$ **D)** $\frac{2}{3}\sqrt{546}$ **E)** 26

22 El diagrama muestra el desarrollo de un cubo en cuyas caras están escritos los números enteros 2, x, y, 2022, z, w. Cada uno de los números x, y, z, w es la media aritmética de los números que están en las cuatro caras adyacentes a él. ¿Cuánto vale x?



A) 506 **B)** 1214 **C)** 916 **D)** 1012 **E)** 810

23 ¿Cuál es la suma de las soluciones de la ecuación $\left(2\cdot 4^{x^2-3x}\right)^2=\frac{2^x}{2}$?

A) 3 **B)** $\frac{13}{4}$ **C)** $\frac{7}{4}$ **D)** $\frac{3}{2}$ **E)** 0

24 Recortando un cartón rectangular obtenemos nueve cuadrados: uno de ellos tiene área 64 cm^2, dos tienen área 16 cm^2 y seis de área 4cm^2. El perímetro del rectángulo inicial, en cm, es…

A) 44 **B)** 46 **C)** 52 **D)** 62 **E)** 68

25 ¿Cuántos pares ordenados (x, y) de enteros positivos verifican que $\frac{1}{x}+\frac{540}{xy}=2$?

A) 4 **B)** 8 **C)** 16 **D)** 24 **E)** 48

LIX Olimpiada Matemática

Facultad de Ciencias MATEMÁTICAS

LIX Olimpiada Matemática Española

Fase Local Comunidad de Madrid

19 de diciembre de 2022

PROBLEMA 1

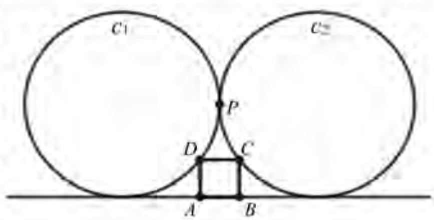
¿Cuántos números de tres cifras distintas y no nulas son múltiplos de 3?

PROBLEMA 2

¿Cuál es el mayor entero n menor que 1000, cuyo cuadrado da resto n al dividirlo entre 1000?

PROBLEMA 3

Consideramos dos circunferencias c_1 y c_2 de radio 1 y tangentes entre sí exteriormente en el punto P. Como se muestra en la figura, trazamos una de las tangentes comunes a c_1 y c_2 que no pasa P, e inscribimos un cuadrado $ABCD$ en el espacio resultante de forma que A y B estén sobre la tangente, C sobre c_2 y D sobre c_1. Halla la longitud del lado del cuadrado $ABCD$.



PROBLEMA 4

Tenemos tres cajas. Las cajas A y B contienen, cada una, una bola blanca y una bola negra. Las cuatro bolas son idénticas salvo por el color. La caja C está vacía. Extraemos al azar una bola de la caja A y, sin mirar, la metemos en la caja C. Igualmente, extraemos una bola de B y la metemos en C. Ahora extraemos una bola de C y resulta ser blanca. Metemos de nuevo la bola en C y sacamos otra vez una bola, que vuelve a ser blanca. Hacemos otra vez lo mismo y resulta ser otra vez blanca. Calcula la probabilidad de que en C haya una bola negra.

PROBLEMA 5

¿Cuál es el resto de dividir entre 400 la suma de las 101 primeras potencias de 7, es decir, $7^0 + 7^1 + 7^2 + \ldots + 7^{99} + 7^{100} + 7^{101}$?

PROBLEMA 6

Sea $P(x)$ un polinomio de quinto grado con coeficientes enteros. Sabemos que:

i) $P(x)$ tiene al menos una raíz entera.

ii) $P(2) = 13$.

iii) $P(10) = 5$.

Encuentra una de las raíces enteras de $P(x)$.

LIX Olimpiada Matemática

PROBLEMA 7

Sea $ABCD$ un cuadrilátero con $AB = 48$, $CD = 60$, $\angle BAD = \angle ADC = 60°$ y $\angle DCB = 90°$. Determina la longitud del lado DA.

PROBLEMA 8

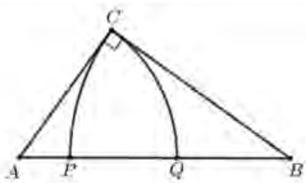
La función $f(x)$ está definida para todos los valores de x en el intervalo $[0, 1]$ y tiene las siguientes propiedades:

- $f(1 - x) = 1 - f(x)$ para todo x en el intervalo $[0, 1]$
- $f\left(\frac{1}{3}x\right) = \frac{1}{2}f(x)$ para todo x en el intervalo $[0, 1]$
- $f(a) \leq f(b)$ para todo a y b con $0 \leq a \leq b \leq 1$

¿Cuál es el valor de $f\left(\frac{6}{7}\right)$?

PROBLEMA 9

El diagrama muestra un triángulo rectángulo ABC con $\angle BCA = 90°$ y en él dos arcos de circunferencia CQ y CP, cuyos centros son A y B, respectivamente.
Demuestra que $\frac{1}{2}PQ^2 = AP \cdot BQ$.



PROBLEMA 10

Pablo tiene fichas de colores: seis rojas, tres azules y tres verdes.

Quiere colocarlas en fila de forma que no haya nunca dos del mismo color juntas. ¿De cuántas formas puede hacerlo?

XXVIII OLIMPIADA de MAYO

Primer Nivel Mayo de 2022

Olimpíada de Mayo
Competencia Juvenil Iberoamericana de Matemática

Duración de la prueba: 3 horas.
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada uno de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 30 de mayo.

PROBLEMA 1

Esta mañana a Emi se le cayó su reloj y a partir de ese momento comenzó a avanzar más lentamente. Cuando según el reloj pasaron 2 minutos, en realidad ya pasaron 3.
Ahora son las 18:25 y el reloj dice que son las 15:30.
¿A qué hora se le cayó el reloj a Emi?

PROBLEMA 2

Beto eligió seis de los nueve dígitos del 1 al 9 y escribió la lista, ordenada de menor a mayor, de todos los números de tres dígitos distintos que se pueden formar usando los dígitos que eligió.
En la lista de Beto, el número 317 aparece en la posición 22.
¿Qué número aparece en la posición 60 de la lista de Beto? Dar todas las posibilidades.

PROBLEMA 3

Elegir nueve de los dígitos del 0 al 9 y colocarlos en los casilleros de la figura de manera que no haya dígitos repetidos y la suma indicada sea correcta.

$$\begin{array}{r} \square\square\square \\ +\ \square\square\square \\ \square\square\square \\ \hline 2022 \end{array}$$

¿Qué digito quedó sin utilizar? ¿Es posible completar los casilleros para que el dígito que quede sin utilizar sea otro?

PROBLEMA 4

Ana y Bruno tienen un tablero cuadriculado de 8×8. Ana pinta cada una de las 64 casillas con algún color. Después Bruno elige dos filas y dos columnas del tablero y mira las 4 casillas donde se cruzan.
El objetivo de Bruno es que estas 4 casillas sean del mismo color.
¿Cuántos colores como mínimo debe usar Ana para que Bruno no pueda cumplir su objetivo?
Mostrar cómo puede pintar el tablero con esa cantidad de colores y explicar por qué si usa menos colores entonces Bruno siempre puede cumplir su objetivo.

PROBLEMA 5

Vero tenía un triángulo isósceles de papel. Usando una tijera, lo dividió en tres triángulos más pequeños y los pintó de azul, rojo y verde. Una vez hecho esto, observó que:

- con el triángulo azul y el triángulo rojo se puede formar un triángulo isósceles;
- con el triángulo azul y el triángulo verde se puede formar un triángulo isósceles;
- con el triángulo rojo y el triángulo verde se puede formar un triángulo isósceles.

Mostrar cómo puede haber sido el triángulo de Vero y cómo puede haber hecho los cortes para que esta situación sea posible.

XXVIII OLIMPIADA de MAYO

SEGUNDO Nivel Mayo de 2022

Olimpíada de Mayo

Competencia Juvenil Iberoamericana de Matemática

Duración de la prueba: 3 horas.
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 30 de mayo.

PROBLEMA 1

En un tablero de 7×7 algunas casillas están pintadas de rojo. Sea a la cantidad de filas que tienen un número impar de casillas rojas y sea b la cantidad de columnas que tienen un número impar de casillas rojas. Determinar todos los posibles valores de $a + b$.
Para cada valor hallado, dar un ejemplo de cómo puede estar pintado el tablero.

PROBLEMA 2

Hay nueve tarjetas que tienen escritos los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, un dígito en cada tarjeta. Usando todas las tarjetas se forman algunos números (por ejemplo, se podrían formar los números 8, 213, 94, 65 y 7).

a) Si todos los números formados son primos, determinar el mínimo valor posible de su suma.
b) Si todos los números formados son compuestos, determinar el mínimo valor posible de su suma.

Nota: Un número p es primo si sus únicos divisores son 1 y p. Un número es compuesto si tiene más de dos divisores. El 1 no es primo ni compuesto.

PROBLEMA 3

Sean $ABCD$ un cuadrado, E un punto del lado CD y F un punto en el interior del cuadrado tal que el triángulo BFE es isósceles y $B\widehat{F}E = 90°$. Si $DF = DE$, calcular la medida del ángulo $F\widehat{D}E$.

PROBLEMA 4

a) En cada vértice de un triángulo se escribe un entero positivo. Luego, en cada lado del triángulo se escribe el máximo común divisor de sus extremos. ¿Es posible que los números escritos en los lados sean tres enteros consecutivos, en algún orden?
b) En cada vértice de un tetraedro se escribe un entero positivo. Luego, en cada arista del tetraedro se escribe el máximo común divisor de sus extremos. ¿Es posible que los números escritos en las aristas sean seis enteros consecutivos, en algún orden?

PROBLEMA 5

En el pizarrón están marcados los vértices de un polígono regular de N lados. Ana y Beto juegan por turnos, empieza Ana. Cada jugador en su turno debe hacer una de las siguientes acciones:

- unir dos vértices con un segmento, sin cortar otro segmento ya marcado; o
- borrar un vértice que no pertenezca a ningún segmento marcado.

El jugador que en su turno no pueda realizar ninguna acción pierde el juego.
Determinar cuál de los dos jugadores puede asegurarse la victoria:

a) si $N = 28$;
b) si $N = 29$.

Nota: Dos segmentos marcados pueden compartir un vértice.

XXVIII OLIMPIADA DE MAYO 2022
RESULTADOS DE ESPAÑA

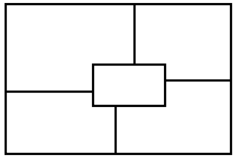
NIVEL 1

	NOMBRE Y APELLIDOS	PREMIO
1	Iván Aguilera Rollón	ORO
2	Lucas Álvarez de Otto	PLATA
3	Fernando Sesma Otazu	PLATA
4	Álvaro Collado Montoto	BRONCE
5	Paula Serrano Realpe	BRONCE
6	Darío Fernández García	BRONCE
7	Sabela Herranz Serrano	BRONCE
8	Lucas Casero Ramírez	MENCIÓN
9	Erika Romero Guerrero	MENCIÓN
10	Ezequiel Prado Cachi	MENCIÓN

NIVEL 2

	NOMBRE Y APELLIDOS	PREMIO
1	Artur Ostrovskyi	ORO
2	Carlos Villagordo Espinosa	PLATA
3	Alejandro Gomez-Olano Espluga	PLATA
4	Rubén Besada Rodríguez	BRONCE
5	Enrique Ortiz Gilarranz	BRONCE
6	Ivan Chaya de los Rios	BRONCE
7	Oscar Sills	BRONCE
8	Manuel Rivas Gómez	MENCIÓN
9	Fernando Coloma Regadera	MENCIÓN
10	Izan Rodríguez Mesa	MENCIÓN

18 La bandera que me he inventado tiene cinco regiones y quiero colorearla con mis colores favoritos: negro, blanco y rosa. ¿De cuántas maneras podré hacerlo si dos regiones vecinas no pueden tener el mismo el color?



A) 6 **B)** 8 **C)** 10
D) 27 **E)** 30

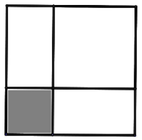
19 El año 2023 es un año *suma siete* porque sus cifras suman siete. ¿Cuántos años *suma siete* hay entre los años 2000 y 3000?

A) 15 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 21 **E)** 25

20 Luisa se ha inventado un juego para el que necesita 50 canicas del mismo color. En un gran frasco guarda 120 canicas rojas, 140 azules y 160 verdes. Si se tapa los ojos y empieza a sacar canicas del tarro, ¿cuántas necesita sacar como mínimo para asegurarse de poder jugar a su juego?

A) 51 **B)** 148 **C)** 210 **D)** 50 **E)** 150

21 Hemos dividido un cuadrado de 9 cm de lado en dos cuadrados y dos rectángulos (como puedes ver en la figura). Juntando los dos rectángulos podemos formar un cuarto cuadrado. ¿Cuál es, en cm^2, el área del cuadrado más pequeño (pintado de gris)?



A) 36 **B)** 25 **C)** 24 **D)** 9 **E)** 4

22 Luis se comió un cuarto de una tarta. Después llegó Esteban y se comió un tercio de lo que quedaba. Más tarde Alfredo se comió la mitad de lo que quedaba. ¿Qué fracción de tarta quedó para María?

A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{4}{9}$ **C)** $\frac{5}{9}$ **D)** $\frac{5}{8}$ **E)** $\frac{2}{3}$

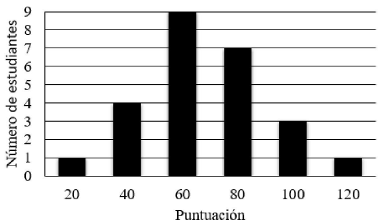
23 Los hermanos Ainhoa y Asier van andando al mismo colegio. Ainhoa tarda veinte minutos en llegar al colegio y Asier media hora. Hoy Ainhoa ha salido de casa cinco minutos después que Asier. Si van por el mismo trayecto, ¿al cabo de cuántos minutos alcanzará a Asier?

A) 6 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 14

24 ¿Cuántos números de tres cifras son múltiplos de 7?

A) 150 **B)** 142 **C)** 140 **D)** 130 **E)** 128

25 La gráfica recoge las puntuaciones obtenidas por los 25 estudiantes de mi clase que participaron el curso pasado en la primera fase del Concurso de Primavera. ¿Cuál fue la media de sus puntuaciones?



A) 68 **B)** 72
C) 65,5 **D)** 75,5
E) 70

XXVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE **1 de febrero de 2023**

NIVEL I **5 – 6 PRIMARIA**

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones !!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 punto***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

1 Acabamos de empezar y Comenúmeros ya se ha zampado tres números de esta multiplicación. ¿Cuánto suman los números que se ha comido?

$$\begin{array}{r} \square\ 4\ \square \\ \times\ \ 8 \\ \hline 4\ \square\ 4\ 4 \end{array}$$

A) 11 **B)** 15 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 12

2 Lucía tiene 20 euros en monedas de cincuenta céntimos y 70 euros en monedas de dos euros. ¿Cuántas monedas tiene en total?

A) 90 **B)** 150 **C)** 45 **D)** 63 **E)** 75

3 Si me das trece cromos tendré el doble que si me quitas dos. ¿Cuántos cromos tengo?

A) 13 **B)** 15 **C)** 17 **D)** 21 **E)** 25

4 Un perro pesa lo mismo que tres gatos. Un gato pesa lo mismo que dos pollos. Si un pollo pesa 2,5 kg, ¿cuántos kg pesan cinco gatos y dos perros?

A) 50 **B)** 55 **C)** 58 **D)** 60 **E)** 68

5 En una caja de zapatos tengo todos mis tesoros. Si consigo dos brillantes más, tendré tantos brillantes como canicas. Si regalo tres canicas tendré tantas canicas como conchas marinas. Tengo tantas castañas como brillantes, canicas y conchas marinas juntas. Además, tengo dos caracolas. Si en total hay 190 objetos, ¿cuántos brillantes tengo?

A) 31 **B)** 26 **C)** 36 **D)** 41 **E)** 29

6 Si sumo todos los números de tres cifras que terminan en 7 y a esa suma le resto la suma de todos los números de tres cifras que terminan en 5, obtengo como resultado:

A) 180 **B)** 200 **C)** 280 **D)** 1998 **E)** 2000

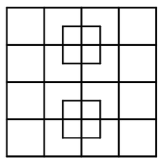
7 Muriel ha ensayado el tiro a canasta desde la línea de tiros libres. Ha hecho 90 lanzamientos y ha fallado 33. El porcentaje de aciertos es aproximadamente:

A) 33% **B)** 36% **C)** 45% **D)** 63% **E)** 74%

8 La niña Centésima se encuentra una cartulina rectangular que mide 1 m × 0,6 m. Con gran paciencia se pone a recortar cuadraditos de 2 cm de lado hasta que se queda sin cartulina. Para entretenerse coloca todos sus cuadraditos uno detrás de otro, formando una larguísima tira de cuadraditos. ¿Qué longitud tiene la tira de la niña Centésima?

A) 30 m **B)** 3 m **C)** 45 m **D)** 150 m **E)** 15 m

9 ¿Cuántos cuadrados puedes ver en esta figura?

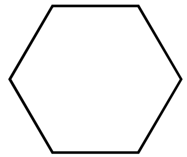


A) 18 **B)** 24 **C)** 32
D) 40 **E)** 44

10 De los 225 escolares del colegio de don Retorcido, 144 juegan al tenis, 130 al baloncesto y 96 a ambos deportes. ¿Cuántos no juegan ni al tenis ni al baloncesto?

A) 49 **B)** 57 **C)** 39 **D)** 47 **E)** 67

11 La mesa hexagonal está preparada, seis amigas deportistas han quedado para comer pero en el último momento falló *Mecanso*. *Hábil* y *Fuerza* se sientan juntas; enfrente de *Tesón* está la silla de *Mecanso*; *Hábil* y *Tesón* no se sientan juntas; a la izquierda de *Rapidez* no hay nadie; *Generosa* siempre está contenta y le da igual qué sitio le toque. Solo una de estas opciones es correcta. ¿Cuál es?



A) Entre *Tesón* y *Hábil* se sienta *Rapidez* **B)** *Rapidez* y *Tesón* se sientan juntas
C) A la izquierda de *Fuerza* se sienta *Generosa* **D)** A la derecha de *Hábil* está *Tesón*
E) Enfrente de *Hábil* está *Generosa*

12 Rellena los cinco cuadraditos con números primos de una cifra (puede haber cifras repetidas).

$$\square\,\square \times \square = \square\,\square$$

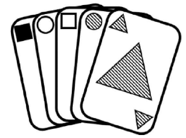
¿Cuál es la suma de los cinco números?

A) 25 **B)** 17 **C)** 20 **D)** 13 **E)** 22

13 Un vaso pesa 75 gramos y una taza 60 gramos. ¿Cuántos vasos, como mínimo, hay que colocar en uno de los platillos de una balanza y cuántas tazas, como mínimo, en el otro para que la balanza quede en equilibrio?

A) 6 vasos y 8 tazas **B)** 4 vasos y 5 tazas **C)** 14 vasos y 17 tazas
D) 12 vasos y 15 tazas **E)** 5 vasos y 8 tazas

14 En el montón quedan catorce cartas: dos de triángulo negro, tres de triángulo rayado, dos de círculo blanco, una de círculo rayado, dos de cuadrado blanco, dos de cuadrado negro y el resto de cuadrado rayado. Para ganar me vale un triángulo o una figura rayada. Saco una carta del montón. ¡Tachán! ¿Qué probabilidad tengo de ganar?



A) $\frac{5}{7}$ **B)** $\frac{9}{14}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{5}{14}$ **E)** $\frac{4}{7}$

15 Unos amigos han ido de excursión al campo y han llevado quince pizzas. Para comer repartieron una pizza para cada dos y para merendar una pizza para cada cuatro. Si al final no sobró nada de pizza, ¿cuántos amigos eran?

A) 10 **B)** 15 **C)** 20 **D)** 25 **E)** 30

16 Voy a invitar a mis 353 amigos a una fiesta de fin de año. El frutero me ha asegurado que cada racimo tiene 90 uvas. ¿Cuántos racimos tengo que comprar, como mínimo, para que todos (incluida yo) tengamos doce uvas?

A) 46 **B)** 48 **C)** 45 **D)** 47 **E)** 44

17 Íñigo tiene entre 40 y 50 años, justo el triple que su hija Ane que tiene menos de 15 años. ¿Cuántos años tiene Íñigo?

A) 41 **B)** 42 **C)** 45 **D)** 46 **E)** 48

18 Piensa en el mayor número de cuatro cifras diferentes que sumen 23. Piensa ahora en el menor número de cuatro cifras diferentes que sumen 20. Restando esos dos números obtienes:

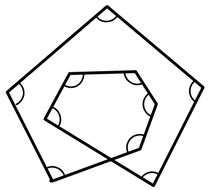
A) 8571 **B)** 8481 **C)** 8562 **D)** 8669 **E)** 8661

19 Tengo seis números que puedo repartir en dos conjuntos de tal manera que el producto de los números de cada conjunto sea el mismo. Los cinco primeros números son 2, 3, 12, 20 y 42. De entre los siguientes números, ¿cuál puede ser el sexto número?

A) 45 **B)** 63 **C)** 105 **D)** 140 **E)** 175

20 Si eres hábil angulista no necesitas más datos y sabrás averiguar cuánto suman esos diez ángulos del dibujo.

A) 1080º **B)** 1260º **C)** 1350º
D) 1620º **E)** 1800º

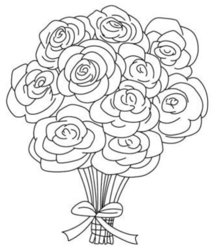


21 El menor número que es múltiplo de 24 y de 36, y acaba en 8 es:

A) 648 **B)** 468 **C)** 408 **D)** 288 **E)** 248

22 La fracción $\frac{2\cdot 2023+3\cdot 4046}{6\cdot 6069}$ es igual a:

A) $\frac{3}{4}$ **B)** $\frac{5}{6}$ **C)** $\frac{2}{3}$ **D)** $\frac{4}{3}$ **E)** $\frac{4}{9}$



23 En una floristería colocan todas sus rosas en ramos de doce flores, sobrando seis. ¿Cuántas rosas sobrarán si ahora tienen 2023 rosas más?

A) 0 **B)** 1 **C)** 7 **D)** 9 **E)** 11

24 Tenemos un libro con 382 páginas. ¿Cuántas páginas cumplen que la suma de sus cifras da como resultado un número par?

A) 189 **B)** 190 **C)** 191 **D)** 192 **E)** 193

25 En la primera fase de un mundial de fútbol los equipos juegan en liguillas de cuatro selecciones, a partido único de uno contra otro. La victoria se puntúa con tres puntos, el empate con uno y la derrota se queda sin puntos. ¿Cuál de estas puntuaciones de los cuatro equipos no es posible que se haya dado al final de la fase?

A) 6 – 6 – 6 – 0 **B)** 5 – 5 – 5 – 0 **C)** 4 – 4 – 4 – 1
D) 3 – 3 – 3 – 3 **E)** 9 – 2 – 2 – 2

XXVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE **1 de febrero de 2023**

NIVEL II **1ESO – 2ESO**

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones !!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 punto***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

1 Con el agua que tengo en mi regadera he calculado que podría regar diez rosas o quince claveles. Después de regar ocho rosas, ¿cuántos claveles puedo regar con el agua que me queda?

A) Seis **B)** Cinco **C)** Cuatro
D) Tres **E)** Dos

2 La operación favorita de la niña Centésima es la diferencia de los cuadrados y ha utilizado el símbolo ♫ para representarla: a ♫ $b = a^2 - b^2$. ¿Cuál es el resultado de (1 ♫ 2) ♫ (3 ♫ 4)?

A) –40 **B)** 0 **C)** 7 **D)** 58 **E)** –58

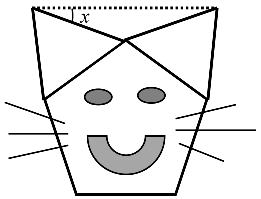
3 Si el ángulo complementario de A es $B - C$, ¿cuál es el suplementario de $A + B$?

A) 90º **B)** 180º + C **C)** C **D)** 180º – C **E)** 90º – C

4 Don Retorcido se encuentra con un rectángulo y, por la cara que ha puesto, parece que no le ha gustado. Entonces disminuye su base en una quinta parte y aumenta su altura en dos terceras partes y obtiene un nuevo rectángulo. De esta manera, podemos decir que el área del rectángulo original:

A) Ha disminuido en $\frac{1}{3}$ **B)** Ha disminuido en $\frac{7}{15}$ **C)** No ha variado

D) Ha aumentado en $\frac{1}{3}$ **E)** Ha aumentado en $\frac{7}{15}$



5 Ya sé que no soy un gran dibujante pero aun así os presento a mi gato geométrico. Su cabeza es un pentágono regular y sus orejas son triángulos equiláteros. ¿Cuánto mide el ángulo x?

A) 18º **B)** 22º **C)** 24º **D)** 26º **E)** 36º

6 El mínimo común múltiplo de los números naturales que van del 2 al 9, ambos incluidos, es:

A) 1260 **B)** 1890 **C)** 2520 **D)** 3780 **E)** 5040

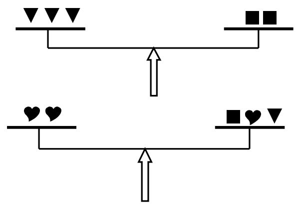
7 Mamá y papá quieren hacerse una foto con sus tres hijas, todos sentados en un sofá. Si mamá y papá se van a sentar en los extremos y sus hijas entre ellos, ¿de cuántas maneras pueden colocarse para hacerse la foto?

A) 120 **B)** 28 **C)** 24 **D)** 12 **E)** 6

8 Don Retorcido no puede estarse quieto. Ahora ha sumado los mil primeros números pares empezando por el 2 y a continuación le ha restado la suma de los mil primeros números impares empezando por el 1. ¿Qué resultado final ha obtenido?

A) 1000 **B)** 2000 **C)** 1001 **D)** 999 **E)** 900

9 Si las dos balanzas están en equilibrio, ¿cuál de las siguientes agrupaciones pesa lo mismo que ■■■▼?



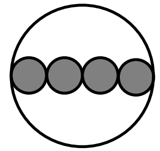
A) ▼▼▼ **B)** ♥▼▼▼ **C)** ♥♥♥

D) ♥♥■■ **E)** ▼▼▼▼

10 Ay, las potencias. ¿Cuál es el valor de $\frac{20^{40}}{40^{20}}$?

A) 2^{20} **B)** 1 **C)** 10^{20} **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{1}{2^{20}}$

11 Estás viendo una vivienda para pulgas. En cada uno de los cuatro círculos iguales caben 6 pulgas. ¿Cuántas pulgas caben en la zona blanca?



A) 36 **B)** 48 **C)** 60 **D)** 72 **E)** 84

12 Queremos colorear una cuadrícula de 3 × 3 utilizando los colores amarillo, rojo y verde. La única condición es que en cada fila y columna aparezcan los tres colores, como en el ejemplo que te mostramos. ¿Cuántas maneras diferentes hay de colorear la cuadrícula?

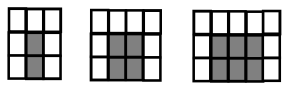
A	R	V
R	V	A
V	A	R

A) 12 **B)** 18 **C)** 24 **D)** 27 **E)** 36

13 Si escribes el menor número cuyas cifras sumen 2023, ¿cuál es la primera cifra?

A) 0 **B)** 3 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

14 Julen va colocando fichas grises de dos en dos y Pablo las rodea con fichas blancas como ves en los dibujos. En la figura que tenga 2023 fichas blancas, ¿cuántas fichas grises habrá?



A) 4046 **B)** 6069 **C)** 2025 **D)** 4044 **E)** 4034

15 Una uva y una castaña pesan juntas 7 gramos. Si yo sé que siete uvas pesan lo mismo que tres castañas, ¿cuántos gramos pesan juntas dos castañas y doce uvas?

A) 32 **B)** 34 **C)** 34,80 **D)** 35 **E)** 35,40

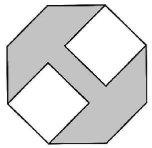
16 ¡Operaciones encadenadas con números negativos! Si –5 lo sumo con –4; luego divido entre –3; resto –2; y, finalmente multiplico por –1. El resultado final es:

A) 5 **B)** –5 **C)** 0 **D)** –10 **E)** –15

17 ¿Cuántos números capicúas de tres cifras son múltiplos de 11?

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

19 La figura sombreada es la resultante de quitar a un octógono regular dos cuadrados construidos hacia dentro a partir de dos lados opuestos del octógono. Si el lado del octógono mide 2 cm, ¿cuál es el área, en cm^2, de la figura sombreada?



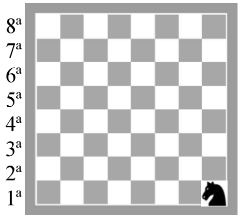
A) $8\sqrt{2}$ **B)** $8\sqrt{2}-2$ **C)** $4\sqrt{2}+4$ **D)** $16-8\sqrt{2}$ **E)** $6\sqrt{2}+2$

20 En la primera fase de un mundial de fútbol los equipos juegan en liguillas de cuatro selecciones, a partido único de uno contra otro. La victoria se puntúa con tres puntos, el empate con uno y la derrota se queda sin puntuar. ¿Cuál de estas puntuaciones de los cuatro equipos no es posible que se haya dado al final de la fase?

A) 9–4–3–1 **B)** 9–4–2–1 **C)** 7–6–4–0 **D)** 7–6–3–1 **E)** 6–5–5–0

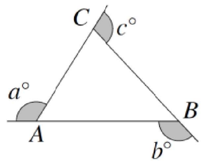
21 Un caballo está en una esquina de la primera fila de un tablero de ajedrez. ¿Cuántos movimientos del caballo son necesarios para que visite las otras siete casillas de la primera fila?

[En el ajedrez los caballos se mueven haciendo una L]



A) Dieciséis **B)** Quince **C)** Catorce
D) Trece **E)** Doce

22 De un triángulo sabemos que sus tres ángulos exteriores están en progresión aritmética, siendo $a < b < c$. ¿Cuánto mide el ángulo interior B del triángulo?

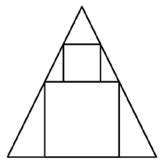


A) 30° **B)** 40° **C)** 60° **D)** 90° **E)** 120°

23 Comenúmeros ha escrito una lista con todos los enteros positivos del 1 al 50. A continuación va a empezar a comerse los números que ha escrito con las siguientes condiciones: siempre come dos números a la vez, siendo uno el doble que el otro. Si no puede hacer esto, ya no come más. ¿Cuántos números podrá comer como máximo?

A) 50 **B)** 46 **C)** 42 **D)** 38 **E)** 34

24 En un triángulo isósceles inscribimos un cuadrado de 6 cm de lado y, sobre él, inscribimos otro cuadrado de 4 cm de lado. ¿Cuál es el área, en cm^2, del triángulo inicial?



A) 81 **B)** 162 **C)** 60 **D)** 140 **E)** 105

25 En una bolsa tenemos cinco bolas azules y más de una bola amarilla. Añadimos dos bolas amarillas y unas cuantas azules (más de una). Tras este cambio, la probabilidad de sacar una bola amarilla sigue siendo la misma que al principio. ¿Cuántas bolas hay ahora en la bolsa?

A) 8 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 20

concurso de primavera MATEMÁTICAS

XXVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE **1 de febrero de 2023**

NIVEL III **3ESO – 4ESO**

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones !!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 punto***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** ☒ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

1 La niña Centésima se encuentra una bolsa repleta de lápices de colores: rojos, naranjas y verdes. Se concentra y de un vistazo dice: hay 180 que no son rojos, 222 que no son naranjas y 204 que no son verdes. ¿Cuántos lápices verdes hay?

A) 182 **B)** 180 **C)** 102 **D)** 101 **E)** 99

2 Si $\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{n}=\frac{53}{216}$, el valor de n es:

A) 6 **B)** 12 **C)** 24 **D)** 36 **E)** 72

3 ¿Cuál es el mayor número natural n que cumple que 5^n es divisor del producto de los treinta primeros enteros positivos?

A) 1 **B)** 5 **C)** 7 **D)** 10 **E)** 25

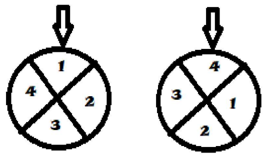
4 La descomposición en factores primos de un número es $a^3 \cdot b^2 \cdot c$. ¿Cuántos divisores tiene ese número?

A) 6 **B)** 9 **C)** 12 **D)** 24 **E)** 32

5 Una persona tarda 20 minutos en limpiar un local, mientras que su compañero tarda 30 minutos. ¿Cuántos minutos tardarán ambos trabajadores juntos?

A) 6 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 14

6 Si hacemos girar estas dos ruletas, ¿cuál es la probabilidad de que los números señalados sumen más de 4?

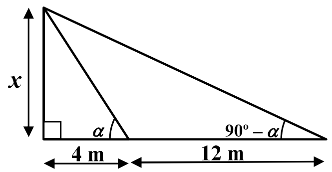


A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{3}{16}$ **D)** $\frac{5}{8}$ **E)** $\frac{11}{16}$

7 Dos ciclistas están separados 10 km en la misma carretera. A la misma hora arrancan dirigiéndose el uno hacia el otro; el primero circula a una velocidad constante de 5 m/s y el segundo a una velocidad constante de 3 m/s. Cuando coinciden, ¿cuántos metros ha recorrido el primer ciclista más que el segundo?

A) 1250 **B)** 2500 **C)** 3750 **D)** 5000 **E)** 7500

8 En el dibujo están todos los datos necesarios para que averigües la longitud de x. ¿O no?



A) 8 m **B)** 6 m **C)** 10 m
D) 6,5 m **E)** No hay datos suficientes

9 ¿Cuál es el valor de $\dfrac{3^{16}-2^{16}}{(3^8+2^8)(3^4+2^4)(3^2+2^2)}$?

A)1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

10 ¿Cuál de los siguientes números no es divisor de 30!?

[Recuerda que factorial de 30 es $30! = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$]

A) 49·25 **B)** 15! **C)** 2023 **D)** 2024 **E)** 2025

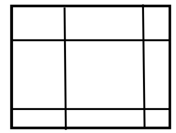
11 Don Retorcido se encuentra un prisma rectangular y, por la cara que ha puesto, parece que no le ha gustado. Entonces, disminuye su largo en una quinta parte, aumenta su ancho en dos terceras partes, y disminuye su alto en dos quintas partes. De esta manera, podemos decir que el volumen de prisma:

A) Ha disminuido en un 20 % **B)** Ha disminuido en un 15 % **C)** No ha variado
D) Ha aumentado en un 20 % **E)** Ha aumentado en un 15 %

12 Tenemos un bloque de hierro macizo con forma de prisma rectangular. Sus dimensiones son 2 m, 3 m y 4 m. Con una maquinaria de precisión cortamos el bloque en cubos de arista 1,25 dm. Una vez terminada la tarea, si colocáramos todos los cubitos uno encima de otro obtendríamos una torre de una altura aproximada de:

A) 1 hm **B)** 1 km **C)** 1,2 km **D)** 1,5 km **E)** 15 km

13 A partir de dos líneas horizontales y dos verticales hemos dividido un rectángulo en nueve rectángulos. Sabiendo que el área de cinco de estos rectángulos es 1, 2, 3, 4 y 5 cm^2, ¿cuál puede ser el área máxima, en cm^2, de nuestro rectángulo de partida?

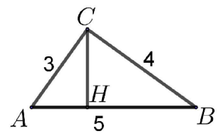


A) 36 **B)** 48 **C)** 63 **D)** 64 **E)** 81

14 ¿Cuántos números de tres cifras distintas son múltiplos de 9?

A) 75 **B)** 76 **C)** 77 **D)** 78 **E)** 82

15 En un triángulo ABC de lados 5, 4 y 3 cm trazamos la altura CH sobre AB. ¿Cuánto mide el área, en cm^2, del triángulo CHB?



A) 4 **B)** $\frac{24}{5}$ **C)** $\frac{81}{25}$ **D)** $\frac{64}{15}$ **E)** $\frac{96}{25}$

16 El mínimo común múltiplo de los números naturales que van del 1 al 15 es múltiplo de:

A) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$ **B)** $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ **C)** $2 \cdot 3^3 \cdot 5$
D) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ **E)** 100

17 La niña Centésima dobla una hoja cuadrada de papel por la mitad y luego vuelve a doblarla por la mitad, obteniendo como resultado un rectángulo no cuadrado. Si el rectángulo final tiene 40 cm de perímetro, ¿cuántos cm mide el perímetro de la hoja?

A) 52 **B)** 64 **C)** 100 **D)** 160 **E)** 200

18 Se sabe que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}$.

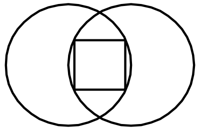
¿Cuál es el valor de la suma $10 \cdot 11 + 11 \cdot 12 + 12 \cdot 13 + \cdots + 20 \cdot 21$?

A) 2750 **B)** 2488 **C)** 2332 **D)** 2200 **E)** 2090

18 Tenemos cuatro números enteros positivos diferentes. Hemos efectuado todas las posibles sumas de dos de estos números, obteniendo los siguientes resultados: 23, 29, 36, 43 y 49, repitiéndose uno solo de estos totales. ¿Cuál es el mayor de los cuatro números?

A) 14 **B)** 21 **C)** 28 **D)** 35 **E)** 42

19 Dos circunferencias de radio 1 se cortan de modo que cada una de ellas pasa por el centro de la otra. Se inscribe un cuadrado en el espacio comprendido entre las dos circunferencias. El área del cuadrado es:

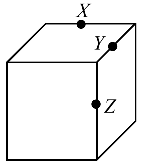


A) $2-\frac{\sqrt{7}}{2}$ **B)** $2+\frac{\sqrt{7}}{2}$ **C)** $4-\sqrt{5}$ **D)** 1 **E)** $\frac{\sqrt{5}}{5}$

20 El mayor cuadrado perfecto que es divisor de 10! es:

A) $(4!)^2$ **B)** $(5!)^2$ **C)** $(6!)^2$ **D)** $(7!)^2$ **E)** $(8!)^2$

21 La arista de un cubo es 2. Un plano corta el cubo pasando por los puntos X, Y, Z que son puntos medios de las correspondientes aristas del cubo. El área de la sección es:

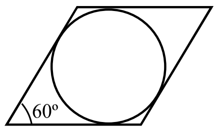


A) $\sqrt{3}$ **B)** $3\sqrt{3}$ **C)** $6\sqrt{2}$ **D)** 6 **E)** 8

22 El resultado de la operación $\binom{7}{3}\cdot\binom{3}{3}+\binom{7}{4}\cdot\binom{3}{2}+\binom{7}{5}\cdot\binom{3}{1}+\binom{7}{6}\cdot\binom{3}{0}$ es el número:

A) 180 **B)** 196 **C)** 210 **D)** 216 **E)** 225

23 En un rombo cuyo ángulo menor mide 60º hemos inscrito un círculo de radio 1. El área del rombo es:



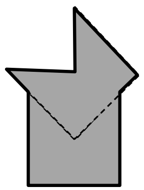
A) 6 **B)** 4 **C)** $2\sqrt{3}$

D) $3\sqrt{3}$ **E)** $\frac{8}{3}\sqrt{3}$

24 Cinco estudiantes han calculado la tangente de 15º y solo uno se ha equivocado. ¿Cuál?

A) $\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}$ **B)** $\frac{(3-\sqrt{3})^2}{6}$ **C)** $2-\sqrt{3}$ **D)** $\frac{\sqrt{3}-1}{3}$ **E)** $\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$

25 Hemos formado dos pentágonos idénticos quitando un triángulo rectángulo isósceles a sendos cuadrados de lado 1. A continuación hemos encajado un pentágono en el otro, como muestra la figura. El perímetro del octógono sombreado así formado es:



A) 4 **B)** $4+2\sqrt{2}$ **C)** 5 **D)** $6-2\sqrt{2}$ **E)** 6

concurso de primavera MATEMÁTICAS

XXVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE **1 de febrero de 2023**

NIVEL IV **Bachillerato**

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones !!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 punto***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

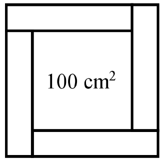
ORGANIZA
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

1 La suma $1 + 2\sqrt{2} + 3 + 4\sqrt{2} + \cdots + 15 + 16\sqrt{2}$ es igual a:

A) $60 + 72\sqrt{2}$ **B)** $60 + 75\sqrt{2}$ **C)** $64 + 72\sqrt{2}$ **D)** $64 + 65\sqrt{2}$ **E)** $71 + 72\sqrt{2}$

2 En la figura se muestran cuatro rectángulos idénticos, cada uno de los cuales tiene perímetro 32 cm, rodeando un cuadrado de 100 cm² de área. ¿Cuál es, en cm², el área de cada rectángulo?

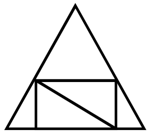


A) 36 **B)** 39 **C)** 42 **D)** 45 **E)** 48

3 Sabemos que para todo *n* positivo $\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$. Entonces, $A + B$ es igual a:

A) –1 **B)** 0 **C)** 1 **D)** 2 **E)** 3

4 Inscribimos un rectángulo en un triángulo equilátero de lado 10 cm, como se ve en la figura. Dividimos el rectángulo mediante una diagonal en dos triángulos rectángulos con los que se puede formar otro triángulo equilátero. ¿Cuánto mide la base, en cm, del rectángulo?



A) 6 **B)** $4\sqrt{3}$ **C)** $4\sqrt{2}$ **D)** $5\sqrt{3}$ **E)** $\frac{20}{3}$

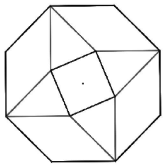
5 Si $1 + a + a^2 + \cdots = n$, entonces *a* es igual:

A) $\frac{n}{n+1}$ **B)** $\sqrt{n}$ **C)** $\frac{n-1}{n+1}$ **D)** $\frac{n-1}{n}$ **E)** $\frac{n^2}{n^2+1}$

6 La hipérbola $y = \frac{2x-6}{3x+12}$ tiene por asíntotas:

A) $x = 3;\ y = \frac{2}{3}$ **B)** $x = -4;\ y = \frac{2}{3}$ **C)** $x = 3;\ y = -4$ **D)** $x = 6;\ y = \frac{2}{3}$ **E)** $x = 6;\ y = -12$

7 Hemos dividido un octógono regular en cuatro rombos, cuatro triángulos isósceles y un cuadrado central, como se ve en la figura. Si el lado del octógono mide 2 cm, el área, en cm², del cuadrado es:

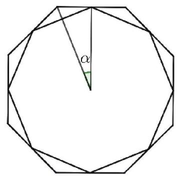


A) 1 **B)** $4\sqrt{2} - 2$ **C)** $3\sqrt{2} - 1$ **D)** $8 - 4\sqrt{2}$ **E)** $6 - 4\sqrt{2}$

8 El número 100! tiene 158 cifras en nuestro sistema de numeración decimal de las cuales las *n* últimas cifras son ceros. El valor de *n* es:

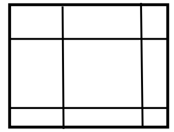
A) 10 **B)** 11 **C)** 20 **D)** 23 **E)** 24

9 En un polígono regular de ángulo central 2α hemos inscrito otro polígono regular que tiene como vértices los puntos medios de los lados del primer polígono. La proporción de áreas entre el polígono menor y el mayor es:



A) $\mathrm{sen}^2 2\alpha$ **B)** $\cos^2 2\alpha$ **C)** $\mathrm{sen}^2\alpha$ **D)** $\cos^2\alpha$ **E)** $\cos 2\alpha$

10 A partir de dos líneas horizontales y dos verticales hemos dividido un rectángulo en nueve rectángulos. Sabiendo que el área de cinco de estos últimos es 1, 2, 3, 4 y 5 cm², ¿cuál puede ser el área máxima, en cm², de nuestro rectángulo de partida?

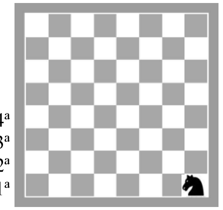


A) 36 **B)** 48 **C)** 63 **D)** 64 **E)** 81

11 Consideramos las rectas $r: y = mx$ y $s: y = -mx + n$ con m y n números enteros positivos menores que 10 elegidos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el triángulo formado por el eje de abscisas y las dos rectas tenga un área menor que 1?

A) $\frac{32}{81}$ **B)** $\frac{11}{27}$ **C)** $\frac{34}{81}$ **D)** $\frac{35}{81}$ **E)** $\frac{4}{9}$

12 Un caballo que está en una esquina de la primera fila de un tablero de ajedrez, ¿a cuántas casillas de la fila cuarta puede llegar en dos o tres movimientos?



A) Ocho **B)** Siete **C)** Seis **D)** Cinco **E)** Cuatro

13 Calcula el valor de $\sqrt{5} \cdot \sqrt{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}} \cdot \ldots$

A) $\sqrt{125}$ **B)** 5 **C)** $\sqrt[4]{125}$ **D)** 25 **E)** 125

14 Tiramos tres dados normales con seis caras numeradas del 1 al 6 y si salen resultados repetidos los descartamos. Por ejemplo, si salen dos cincos y un cuatro descartamos los dos cincos y nos quedamos solo con el cuatro. Y si salen tres resultados iguales se descartan los tres dados. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma final esté comprendida entre 1 y 6, ambos incluidos?

A) $\frac{5}{12}$ **B)** $\frac{91}{216}$ **C)** $\frac{23}{54}$ **D)** $\frac{95}{216}$ **E)** $\frac{4}{9}$

15 Definimos $f(n)$ como una función que eleva un número natural *n* al cuadrado y suma las cifras del resultado obtenido. Por ejemplo, $f(15) = 9$ ya que $15^2 = 225$ y $2 + 2 + 5 = 9$. Consideremos $f_i(n) = f(f_{i-1}(n))$ y $f_1(n) = f(n)$, es decir, $f_2(n) = f(f(n))$. ¿Cuánto vale $f_{2023}(11)$?

A) 4 **B)** 7 **C)** 9 **D)** 13 **E)** 16

16 En 1770, Joseph-Louis Lagrange demostró que todo número entero positivo se puede escribir como suma de cuatro cuadrados de enteros no negativos. Por ejemplo, $13 = 0^2 + 0^2 + 2^2 + 3^2$. ¿Cuántos de los quince primeros enteros positivos se pueden escribir como suma de tres cuadrados ?

A) 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 15

17 Los números enteros positivos *m*, *n* y *p* satisfacen la ecuación $3m + \frac{3}{n+\frac{1}{p}} = 17$.

El valor de *m* es:

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

XXVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

TABLA DE SOLUCIONES (1ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**A**	1	**D**	1	**E**	1	**C**
2	**E**	2	**A**	2	**B**	2	**B**
3	**C**	3	**E**	3	**C**	3	**B**
4	**B**	4	**D**	4	**D**	4	**A**
5	**A**	5	**C**	5	**D**	5	**D**
6	**A**	6	**C**	6	**D**	6	**B**
7	**D**	7	**D**	7	**B**	7	**D**
8	**A**	8	**A**	8	**A**	8	**E**
9	**D**	9	**B**	9	**E**	9	**D**
10	**D**	10	**C**	10	**C**	10	**D**
11	**E**	11	**D**	11	**A**	11	**A**
12	**E**	12	**A**	12	**D**	12	**C**
13	**B**	13	**C**	13	**D**	13	**B**
14	**E**	14	**E**	14	**B**	14	**E**
15	**C**	15	**D**	15	**E**	15	**D**
16	**B**	16	**B**	16	**D**	16	**C**
17	**B**	17	**D**	17	**B**	17	**E**
18	**A**	18	**A**	18	**A**	18	**C**
19	**D**	19	**C**	19	**A**	19	**A**
20	**B**	20	**A**	20	**E**	20	**C**
21	**D**	21	**D**	21	**B**	21	**B**
22	**A**	22	**E**	22	**C**	22	**C**
23	**C**	23	**B**	23	**E**	23	**E**
24	**E**	24	**B**	24	**A**	24	**D**
25	**A**	25	**C**	25	**D**	25	**E**

concurso de primavera MATEMÁTICAS

XXVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE **22 de abril de 2023**

NIVEL I **5PRIM – 6PRIM**

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones !!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	**5 *puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	**1 *punto***
*Cada respuesta **errónea***	**0 *puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

1 Para empezar don Retorcido pregunta: ¿cuántos números hay que sean mayores que 26 y menores que 2023 y que la suma de sus cifras sea igual a 3?

A) 12 **B)** 13 **C)** 14 **D)** 15 **E)** 16

2 ¿Cuál es el número que está en el medio entre 3,5677 y 3,5993?

A) 3,5885 **B)** 3,5795 **C)** 3,58885 **D)** 3,5835 **E)** 3,5875

3 La fortuna de Lolita se duplica cada día. Si hoy, sábado, tiene 240 €, ¿cuánto tenía el martes pasado?

A) 7,5 € **B)** 10 € **C)** 15 € **D)** 30 € **E)** 65 €

4 La niña Centésima pensó un número, lo multiplicó por tres, después le restó quince y dividió el resultado entre dos. Finalmente sumó tres al resultado y ¡tachán! obtuvo el número que había pensado. ¿Qué número pensó la niña Centésima?

A) 2 **B)** 9 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 12

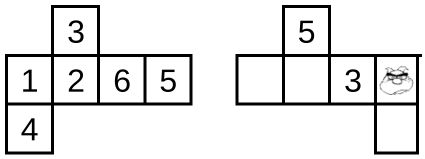
5 Con las bellotas de la encina de mi jardín, quince ardillas pueden comer una bellota diaria durante once días. Pasados cinco días se marchan cinco ardillas, ¿cuántos días podrán seguir comiendo una bellota al día las ardillas que se han quedado?

A) 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

6 Para una tómbola se han vendido mil boletos numerados de 0 a 999. Los boletos que tienen la cifra seis tienen premio. ¿Cuántos boletos no han obtenido premio?

A) 270 **B)** 324 **C)** 444 **D)** 729 **E)** 890

7 A la izquierda ves el desarrollo de un dado. A la derecha ves otro desarrollo de ese mismo dado, pero Comenúmeros ya se ha comido muchos números. ¿Qué número había en el lugar en el que está ahora nuestro amigo?



A) 1 **B)** 2 **C)** 4
D) 6 **E)** Es imposible que sea el mismo dado

8 En el colegio de Nicolás hay trescientos alumnos. El 30% no ha traído hoy a clase el mural del día de las matemáticas a pesar de que el 90% de los alumnos lo tenía hecho. ¿Cuántos alumnos se han olvidado su mural en casa?

A) 60 **B)** 70 **C)** 80 **D)** 90 **E)** 100

9 Pedrito tiene una hoja de papel cuadrada. La dobla por la mitad y forma un rectángulo. La vuelve a doblar por la mitad y forma otro rectángulo (que no es un cuadrado). Si el área de este último rectángulo es 36 cm^2, ¿cuál es el perímetro de la hoja de papel sin doblar?

A) 24 cm **B)** 48 cm **C)** 52 cm **D)** 40 cm **E)** 32 cm

10 Mi colegio está a 450 m de casa. Por la mañana voy directa, pero a la vuelta doy un rodeo por el parque, lo que alarga el camino unos 3500 dm. Cuando vuelvo del cole salgo a pasear con mi perrillo y andamos 3 km en total. El sábado y el domingo voy al parque y cada día recorro 70 hm. ¿Qué opción aproxima mejor la distancia que recorro en una semana?

A) 47 km **B)** 32600 m **C)** 34 km **D)** 507 hm **E)** 36 km

11 Un moñoño cuesta el triple que una chocoplasta y Julia ha comprado la mitad de moñoños que de chocoplastas. Se ha gastado 4,20 €. ¿Cuánto le han costado las chocoplastas?

A) 1,24 € **B)** 1,46 € **C)** 1,68 € **D)** 2,24 € **E)** 2,52 €

12 La abuela Rosario ha hecho 46 croquetas y se las han comido todas entre sus veinte hijos y nietos. Si cada hijo come tres croquetas y cada nieto dos, ¿cuántos nietos tiene la abuela Rosario?

A) 14 **B)** 17 **C)** 12 **D)** 15 **E)** 11

13 Julián sale de casa a hacer recados. Tiene que ir a la farmacia, a la frutería, a la panadería y a la tintorería. No ha decidido en qué orden hacerlo. ¿Cuántas posibilidades tiene?

A) 8 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 20 **E)** 24

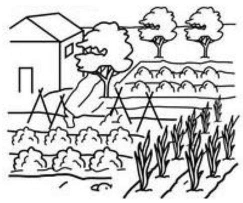
14 La diferencia de edades entre la mayor y la menor de las hermanas Alba, Bea y Carmen es siete años. Además, la suma de sus edades es 16 y el producto 90. ¿Cuál es la edad de la mediana?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

15 Pablo ha leído cinco octavas partes de un libro y Amaia cuatro quintos del mismo libro. A Pablo le faltan 90 páginas para terminarlo. ¿Cuántas páginas le faltan por leer a Amaia?

A) 81 **B)** 48 **C)** 30 **D)** 72 **E)** 56

16 La niña Centésima tiene en su huerto un sistema de riego automático que riega las plantas cada tres días. Cada cuatro días visita su huerto y si coincide que es un día que toca riego lo apaga antes de que empiece para no mojarse. Si el primer día de riego de este año fue el 3 de enero y el primer día que la niña Centésima visitó el huerto fue el 4 de enero, ¿cuántas veces se han regado las plantas en los cien primeros días del año?



A) 24 **B)** 25 **C)** 26 **D)** 27 **E)** 28

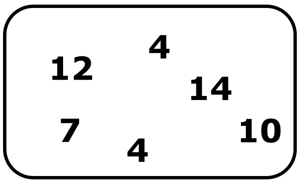
17 La raqueta para la que llevaba ahorrando un año costaba 46 €. El mes pasado la subieron un 15%, pero por suerte hoy la han rebajado un 20%. ¿Cuánto cuesta hoy la raqueta?

A) 42,32 € **B)** 43,66 € **C)** 46,92 € **D)** 37,40 € **E)** 45 €

18 Luis ordena los libros de su biblioteca. Si hace montones de cinco le faltan tres. Si hace montones de nueve le sobran dos. Si el número de libros está comprendido entre 80 y 100, ¿cuántos libros hay en la biblioteca de Luis?

A) 80 **B)** 88 **C)** 90 **D)** 92 **E)** 94

19 Don Retorcido coge un bolígrafo rojo y escribe tres números pares y tres números impares. Llega Comenúmeros, divide cada número par entre dos, suma tres a cada número impar, escribe en azul los seis números obtenidos y os los enseña. Si la suma de los números pares rojos era 42, ¿cuánto sumaban los números rojos impares?



A) 21 **B)** 30 **C)** 31 **D)** 39 **E)** 42

20 Tengo quince cajas y en cada una voy a guardar un número distinto de canicas de manera que todas las cajas tengan al menos una canica. ¿Cuántas canicas necesito como mínimo para cumplir mi plan?

A) 30 **B)** 120 **C)** 150 **D)** 60 **E)** 90

21 De todos los rectángulos de perímetro 26 cm y cuyos lados miden un número entero de centímetros, el área del que tiene mayor superficie es:

A) 35 cm^2 **B)** 36 cm^2 **C)** 40 cm^2 **D)** 42 cm^2 **E)** 46 cm^2

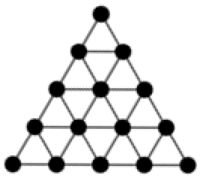
22 Miguel lanza tres monedas distintas y obtiene: cruz en la de dos euros, cruz en la de un euro y cara en la de cincuenta céntimos. Ahora lanza Diego. ¿Qué probabilidad tiene de obtener lo contrario, es decir, cara en la de dos euros, cara en la de un euro y cruz en la de cincuenta céntimos?

A) $\frac{1}{9}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{6}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{1}{8}$

23 Lola repartió 315 € entre sus sobrinos según sus edades. A Leire y Malen les dio un porrón de euros a cada una; a Ainhoa y a Ane, dos porrones a cada una; y a Juan tres porrones de euros. ¿Cuántos euros recibió Ainhoa?

A) 90 **B)** 70 **C)** 65 **D)** 50 **E)** 35

24 Con bolitas y palillos Lucía hace triángulos cada vez más grandes formados por triangulitos. Este que ves tiene cuatro pisos. Si tiene cincuenta bolitas y muchísimos palillos, ¿cuántos pisos tiene el triángulo más grande que puede formar?



A) 6 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 14

25 Margarita ha encontrado una caja con ochenta monedas de 50, 20 y 10 céntimos. El número de monedas de 10 céntimos es el triple que el de 50 céntimos y la mitad que el de 20 céntimos. Si en total hay 16 euros, ¿cuántas monedas de 20 céntimos encontró Margarita?

A) 12 **B)** 14 **C)** 24 **D)** 48 **E)** 54

XXVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE **22 de abril de 2023**

NIVEL III **3ESO – 4ESO**

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones !!!

Escribe tu número de identificación, tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. **Presta mucha atención al formato de los números**.

IMPORTANTE: Comprueba que el número Mod. en tu hoja de respuestas es 3.

No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	**5** ***puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	**1** ***punto***
*Cada respuesta **errónea***	**0** ***puntos***

LEE ATENTAMENTE CÓMO DEBES MARCAR LAS OPCIONES EN LA HOJA DE RESPUESTAS Y QUÉ HACER SI TE EQUIVOCAS.

Te sugerimos que vayas marcando tus soluciones en la hoja de la prueba y cuando tengas cuatro o cinco, las pases todas juntas a la hoja de respuestas.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

1

La niña Centésima elabora una lista de números de la siguiente forma: 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1,… y así continúa. Cuando ha escrito cien números, ¿cuál es el último número que ha escrito?

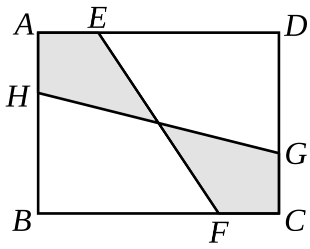
A) 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

2

En la operación $2 - 3 \cdot 4 + 5$, ¿cuántos resultados diferentes puedes obtener si te permitimos poner los paréntesis que quieras?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

3



En el siguiente rectángulo $AE = AH = GC = CF = 2$, $DG = 4$ y $ED = 6$. ¿Cuánto mide el área sombreada?

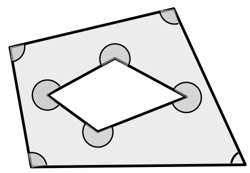
A) 12 **B)** 14 **C)** 16 **D)** 18 **E)** 20

4

Si $\begin{cases} a^2 + b^2 - c^2 = -1 \\ a^2 - b^2 + c^2 = 5 \\ -a^2 + b^2 + c^2 = 7 \end{cases}$, entonces $(a \cdot b \cdot c)^2$ es:

A) 900 **B)** 576 **C)** 144 **D)** 36 **E)** 1200

5



¿Cuál es la suma de los ocho ángulos señalados en la figura?

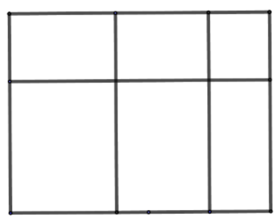
A) 720º **B)** 900º **C)** 1080º **D)** 1260º **E)** 1440º

6

¿De cuántas formas diferentes podemos elegir dos números enteros positivos de modo que su producto sea 280?

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

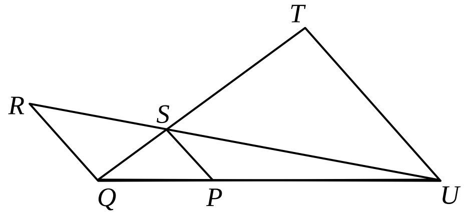
7



A partir de una línea horizontal y dos verticales hemos dividido un rectángulo en seis rectángulos, y sabemos que cuatro de ellos tienen áreas 1, 2, 3 y 4 cm^2. ¿Cuál puede ser el área mínima, en cm^2, de nuestro rectángulo de partida?

A) 11,25 **B)** 12 **C)** 13,5 **D)** 14,5 **E)** 15

8



Si QR, PS y UT son segmentos paralelos, ¿cuánto mide PS sabiendo que QR = 15 y UT = 30?

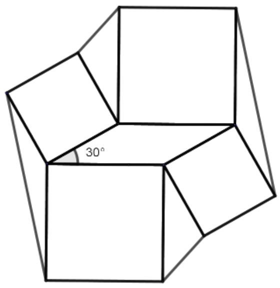
A) 10 **B)** 12 **C)** 14
D) 16 **E)** 18

9

En el plano cartesiano formamos un triángulo con los puntos $(0, 0)$, $(0, 20)$ y $(15, 0)$. ¿Cuánto suman las tres alturas del triángulo?

A) 42 **B)** 47 **C)** 50 **D)** 51 **E)** 55

10 La figura está formada por dos cuadrados de lado a, dos cuadrados de lado b, un romboide de ángulo agudo de 30º y cuatro triángulos de conexión entre cuadrados distintos conectados por un vértice. ¿Cuál es la fórmula que proporciona el área de la figura completa?



A) $2(a+b)^2$ **B)** $2a^2+2b^2+2ab$ **C)** $2a^2+2b^2+6ab$

D) $2a^2+2b^2+3ab$ **E)** $2a^2+2b^2+3\frac{ab}{2}$

11 ¿Cuál es la cifra de las unidades de la siguiente suma: $5^0+5^1+5^2+5^3+\cdots+5^{2023}$?

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 1

12 ¿Cuántos pares de números primos de dos cifras cumplen la condición $a^2-b^2=10(a+b)$?

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

13 El producto de dos números es 1331. Sabiendo que el segundo es el cuadrado del primero, ¿cuál es el número más pequeño?

A) 5 **B)** 7 **C)** 9 **D)** 11 **E)** 13

14 ¿Cuántos centímetros mide el perímetro de un hexágono regular cuya área es $24\sqrt{3}$ cm^2?

A) $6\sqrt{3}$ **B)** 12 **C)** $12\sqrt{3}$ **D)** 24 **E)** $24\sqrt{3}$

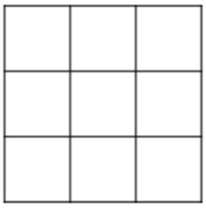
15 Dos vértices de un triángulo son $A(4, 3)$ y $B(6, 9)$. Su baricentro es $G(3, 5)$. Entonces, las coordenadas del tercer vértice C son:

A) (–1, 6) **B)** (5, –3) **C)** (5, 6) **D)** (–1, 3) **E)** (6, 5)

16 Sabiendo que x e y son dos números no nulos que cumplen que $\frac{4x-y}{2y-x}=3$, ¿podrías calcular el valor de $\frac{x+2y}{4y-x}$?

A) 2 **B)** 1 **C)** 0 **D)** –1 **E)** –2

17 En una cuadrícula 3×3 como la de la imagen queremos pintar dos cuadrados de azul y siete de rojo. Consideramos que dos cuadrículas pintadas son iguales si se puede obtener una girando la otra. ¿De cuántas maneras diferentes podemos pintar nuestra cuadrícula?



A) 6 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 14

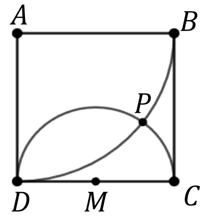
18 Consideramos el número $N=123456789101112\ldots21$ formado por los veintiún primeros enteros positivos colocados en orden. ¿Cuál es el resto de la división $N:15$?

A) 1 **B)** 6 **C)** 9 **D)** 11 **E)** 12

19 ¿Cuál es el resultado de la multiplicación $10003 \cdot 10007$?

A) $10^8 + 21$ **B)** $10^9 + 10^5 + 21$ **C)** $10^7 + 10^4 + 21$
D) $10^8 + 10^5 + 21$ **E)** $10^8 + 10^4 + 21$

20 En un cuadrado de 2 cm de lado trazamos, con centro en A, un cuarto de circunferencia de radio 2 cm. Con centro en M, punto medio de DC, trazamos una semicircunferencia de 1 cm de radio como se ve la figura. Si el punto P es la intersección de los dos arcos trazados, ¿a qué distancia, en cm, está del lado AD?



A) $\frac{3}{2}$ **B)** $\frac{8}{5}$ **C)** $\frac{13}{4}$ **D)** $2\sqrt{3}$ **E)** $\frac{7}{2}$

21 Las soluciones de la ecuación $x^2 + mx + n = 0$ son el triple de las soluciones de la ecuación $x^2 + px + m = 0$, ($p \neq 0$). ¿Cuál es el cociente $\frac{n}{p}$?

A) 81 **B)** 27 **C)** 18 **D)** 9 **E)** 6

22 Si sabemos que $\frac{n! \cdot (n+1)!}{2}$ es un cuadrado perfecto, ¿cuál de los siguientes números puede ser un posible valor de n?

A) 27 **B)** 28 **C)** 29 **D)** 30 **E)** 31

23 Un equipo de baloncesto ha anotado el 70% de los tiros de dos puntos y el 40% de los triples que han intentado. Además, han anotado 10 tiros libres (de un punto) para un total de 96 puntos. Si sabemos que han lanzado un 60% más de dos que de tres, ¿cuántos triples han intentado?

A) 20 **B)** 25 **C)** 27 **D)** 32 **E)** 40

24 Alba camina sobre una senda rectangular de lados 30 y 40 metros. Por culpa de una espesa niebla solo puede ver hasta 10 metros en cada dirección. ¿Cuál de las siguientes cifras se aproxima más a la cantidad de metros cuadrados que ha podido ver Alba al recorrer el perímetro completo del rectángulo?

A) 2400 **B)** 2800 **C)** 1700 **D)** 2700 **E)** 3100

25 El perro *Kiwi* tiene cuatro calcetines amarillos y cuatro verdes. Cuando va a la nieve se pone dos calcetines en cada pata de forma aleatoria. ¿Cuál es la probabilidad de que los cuatro calcetines verdes queden por encima de los amarillos?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{1}{16}$ **D)** $\frac{1}{46}$ **E)** $\frac{1}{70}$

XXVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE 22 de abril de 2023

NIVEL IV BACHILLERATO

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones !!!

Escribe tu número de identificación, tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. **Presta mucha atención al formato de los números**.

IMPORTANTE: Comprueba que el número Mod. en tu hoja de respuestas es 4.

No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 punto***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

LEE ATENTAMENTE CÓMO DEBES MARCAR LAS OPCIONES EN LA HOJA DE RESPUESTAS Y QUÉ HACER SI TE EQUIVOCAS.

Te sugerimos que vayas marcando tus soluciones en la hoja de la prueba y cuando tengas cuatro o cinco, las pases todas juntas a la hoja de respuestas.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

1 Colocamos en una tabla de dimensiones 3×3 todos los divisores de 36, uno en cada casilla, de modo que el producto de los elementos de cada fila, de cada columna y de cada diagonal sea el mismo. En la figura aparecen colocados tres de ellos. El valor de x es:

x	1	18
2		

A) 3 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 9 **E)** 12

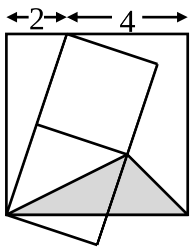
2 En una familia de cuatro miembros, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente dos de ellos cumplan años en domingo?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{216}{2401}$ **D)** $\frac{47}{1296}$ **E)** $\frac{1}{16}$

3 Si $a + b = 2c$, entonces el valor de $\frac{a}{a-c} + \frac{c}{b-c}$ es:

A) $\frac{1}{2}$ **B)** 1 **C)** 0 **D)** –1 **E)** $\frac{1}{3}$

4 Se consideran dos cuadrados iguales. Construimos otro cuadrado de lado 6 como indica la figura. El área del triángulo coloreado es:



A) 4 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 3

5 El triángulo ABC tiene un ángulo recto en C. Si sen A = $\frac{2}{3}$, ¿cuánto vale tg B?

A) $\frac{3}{2}$ **B)** $\frac{2}{3}$ **C)** 2 **D)** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **E)** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

6 ¿Cuál es el resultado de esta multiplicación:

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \dots\right)?$$

A) 2 **B)** $\sqrt{2}$ **C)** $2+\sqrt{2}$ **D)** $2-\sqrt{2}$ **E)** 1

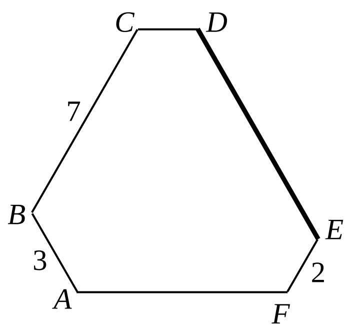
7 ¿Cuántos pares de números primos de dos cifras cumplen la condición $a^2 - b^2 = 4(a+b)$?

A) 6 **B)** 5 **C)** 7 **D)** 4 **E)** 8

8 Victoria tiene una serie de fichas cuadradas idénticas. Si construye con ellas un cuadrado de n fichas por lado le sobran 64 fichas, pero para construir un cuadrado de n + 1 fichas por lado le faltan 25 fichas. ¿Cuántas fichas tiene Victoria?

A) 89 **B)** 1975 **C)** 2000 **D)** 2019 **E)** 2024

9 Se ha construido el hexágono de la figura con los lados paralelos a los de un hexágono regular. El lado AB mide 3 cm, BC mide 7 cm y EF mide 2 cm. ¿Cuántos cm mide el lado DE?



A) 7 **B)** 7,5 **C)** 8 **D)** 8,5 **E)** 9

10 Las coordenadas de dos vértices consecutivos de un cuadrado son $A(-2, 1)$ y $B(3, 0)$. Si el centro del cuadrado está en el primer cuadrante, ¿qué coordenadas tiene el vértice C, opuesto al A?

A) (4, 5) **B)** (–1, 7) **C)** (1, 3) **D)** (4, 7) **E)** (3, 4)

11 Si $|a| < 1$ y $1 + a + a^2 + a^3 \ldots = b$, entonces $1 - a + a^2 - a^3 + a^4 \ldots$ es igual a:

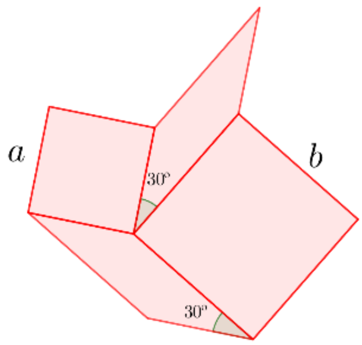
A) $\frac{b}{b+1}$ **B)** $\frac{b}{1-b}$ **C)** $\frac{b}{2b-1}$ **D)** $\frac{b}{2b+1}$ **E)** $\frac{1}{b+1}$

12 El resultado de la operación $\binom{4}{0}^2 + \binom{4}{1}^2 + \binom{4}{2}^2 + \binom{4}{3}^2 + \binom{4}{4}^2$ es:

A) $(1 + 4 + 6 + 4 + 1)^2$ **B)** $\binom{8}{4}$ **C)** $(2^4)^2$

D) $2 \cdot (1^2 + 4^2 + 6^2)$ **E)** $\frac{8!}{4!}$

13 El octógono de la figura se puede dividir en dos cuadrados de lados a y b y dos romboides de ángulos agudos de 30º. La expresión que determina el área del octógono es:



A) $(a + b)^2 + ab$ **B)** $(a + b)^2$ **C)** $(a + b)^2 - ab$

D) $a^2 + b^2 + \frac{ab}{2}$ **E)** $a(a + 2b) + b(b + 2a)$

14 Si $\begin{cases} 3a + 2b + c = 1 \\ 2a + b + 3c = 4 \\ a + 3b + 2c = -5 \end{cases}$, entonces $a \cdot b \cdot c$ es:

A) 24 **B)** –6 **C)** 12 **D)** –20 **E)** 30

15 Si $N = \frac{\log 49}{\log 2023} + \frac{\log 289}{\log 2023}$, entonces podemos asegurar que:

A) $N < 1$ **B)** $N = 1$ **C)** $N > 2$ **D)** $N = 2$ **E)** $1 < N < 2$

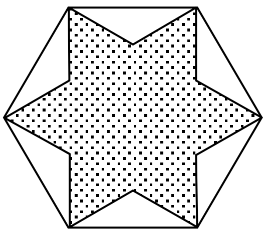
16 Si un número complejo $z \neq 1$ verifica $z^n = 1$, el valor de $z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n-1}$ es:

A) $-i$ **B)** –1 **C)** 0 **D)** 1 **E)** i

17 Sabemos que a, b y c son números naturales distintos de una cifra. Con ellos, formamos la ecuación de segundo grado $(x - 2a) \cdot (x - 2b) + (x - b) \cdot (x - c) = 0$. ¿Cuál es el mayor valor posible de la suma de las soluciones de dicha ecuación?

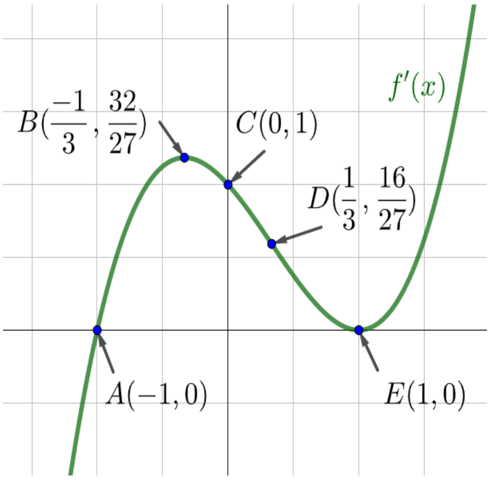
A) 25 **B)** $\frac{51}{2}$ **C)** 26 **D)** $\frac{53}{2}$ **E)** 27

18 Hemos inscrito una estrella de seis puntas en un hexágono regular como se muestra en la figura. La relación entre el área del hexágono y el área de la estrella es:



A) 1,25 **B)** 1,5 **C)** 1,75 **D)** 2 **E)** 2,25

19 En la gráfica está representada $f'(x)$, la derivada de $f(x)$. Podemos afirmar que $f(x)$ presenta:



A) Un mínimo relativo en $x=-1$ y un máximo relativo en $x=1$

B) Un máximo relativo en $x=\frac{-1}{3}$ y un mínimo relativo en $x=1$

C) Un punto de inflexión en $x=\frac{1}{3}$

D) Un punto de inflexión en $x=0$

E) Dos puntos de inflexión en $x=\frac{-1}{3}$ y en $x=1$

20 La probabilidad de que Ángel y Beatriz aparezcan juntos en la foto del grupo de cinco personas que se han colocado en fila al azar es:

A) $\frac{1}{4!}$ **B)** $\frac{2}{5}$ **C)** $\frac{1}{5}$ **D)** $\frac{1}{10}$ **E)** $\frac{1}{2}$

21 Las raíces del polinomio x^3-3x^2+x+5 son:

A) $-1,-2+i,-2-i$ **B)** $1,1+2i,1-2i$ **C)** $-1,1+i,1-i$
D) $1,-1,-5$ **E)** $-1,2+i,2-i$

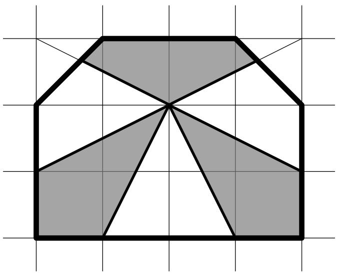
22 El valor de $(1+\text{tg}10°)\cdot(1+\text{tg}35°)$ es:

A) $\frac{3}{4}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** 1 **D)** 2 **E)** $\frac{1}{4}$

23 En un rectángulo de dimensiones 8×6 se traza una diagonal. A continuación se dibujan las circunferencias inscritas en los dos triángulos rectángulos formados por los lados del rectángulo y la diagonal trazada. La distancia entre los centros de las dos circunferencias es:

A) $2\sqrt{6}$ **B)** 5 **C)** $3\sqrt{2}$ **D)** $2\sqrt{5}$ **E)** 4,5

24 En una retícula 3×4 dibujamos un hexágono y sombreamos como indica la figura. ¿Cuál es la proporción del área sombreada y la no sombreada del hexágono?



A) $\frac{2}{3}$ **B)** $\frac{5}{3}$ **C)** $\frac{17}{16}$ **D)** $\frac{9}{8}$ **E)** $\frac{4}{3}$

25 Los números x, y, z cumplen $5x+3y-z=15$ y $7x+4y-2z=3$. La media aritmética de x, y, z es:

A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

XXVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

TABLA DE SOLUCIONES (2ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**D**	1	**D**	1	**C**	1	**E**
2	**D**	2	**C**	2	**D**	2	**C**
3	**C**	3	**B**	3	**B**	3	**B**
4	**B**	4	**D**	4	**D**	4	**B**
5	**C**	5	**A**	5	**E**	5	**D**
6	**D**	6	**B**	6	**C**	6	**A**
7	**D**	7	**A**	7	**A**	7	**A**
8	**A**	8	**B**	8	**A**	8	**C**
9	**B**	9	**E**	9	**B**	9	**C**
10	**E**	10	**A**	10	**E**	10	**A**
11	**C**	11	**D**	11	**A**	11	**C**
12	**A**	12	**A**	12	**C**	12	**B**
13	**E**	13	**A**	13	**D**	13	**C**
14	**C**	14	**C**	14	**D**	14	**B**
15	**B**	15	**D**	15	**D**	15	**E**
16	**B**	16	**E**	16	**B**	16	**B**
17	**A**	17	**C**	17	**C**	17	**A**
18	**D**	18	**B**	18	**B**	18	**B**
19	**A**	19	**C**	19	**D**	19	**E**
20	**B**	20	**E**	20	**B**	20	**B**
21	**D**	21	**C**	21	**B**	21	**E**
22	**E**	22	**A**	22	**E**	22	**D**
23	**B**	23	**E**	23	**B**	23	**D**
24	**B**	24	**D**	24	**D**	24	**C**
25	**D**	25	**B**	25	**E**	25	**D**

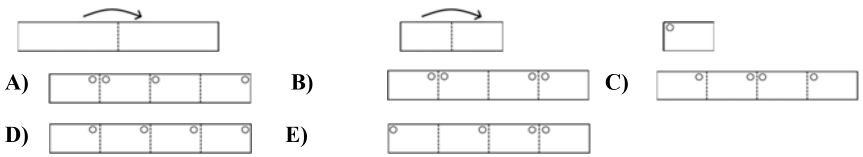
19 En el examen que hoy ha puesto don Retorcido solo entra el número 2024. ¡¡¡Bien!!! Cuidado, no te fíes de don Retorcido, mucha concentración. Hay cuatro afirmaciones:

[A1] El número siguiente a 2024 es un número primo.
[A2] Si a cada cifra de 2024 le sumas 5 obtienes un nuevo número que es múltiplo de 11.
[A3] El área de un rectángulo de lados 88 m y 23 m es justamente 2024 m^2.
[A4] $2024^1 - 1^{2024} = 2023$.

¿Cuántas de esas cuatro afirmaciones son verdaderas?

A) Ninguna **B)** Una **C)** Dos **D)** Tres **E)** Todas

20 La niña Centésima dobla un rectángulo de papel por la mitad a lo ancho. Luego lo vuelve a doblar igual, por la mitad a lo ancho. Cuando acaba, hace un pequeño agujero en la esquina superior izquierda y lo desdobla. ¿Cómo queda el papel tras desdoblarlo?



21 Una bolsa contiene trece canicas de las cuales cuatro son negras, seis blancas y tres rojas. ¿De cuántas maneras puedes sacar un puñado de cinco canicas que contenga al menos una de cada color?

A) 6 **B)** 18 **C)** 36 **D)** 80 **E)** 190

22 ¿Qué cifra ocupa la posición decimal número 20 del resultado de dividir 50 entre 37?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

23 Zoe elige su número favorito y realiza las siguientes operaciones encadenadas: le suma 20; multiplica por 8; luego lo divide entre 3; y le resta 22. De esta manera el número favorito de Zoe se ha transformado en el número 50. El número favorito de Zoe cumple que…

A) Es un número primo **B)** Es par **C)** Es mayor que 8
D) Tiene dos cifras **E)** Es múltiplo de 5

24 En una familia cada hijo tiene el triple de hermanas que de hermanos, y cada hija tiene el doble de hermanas que de hermanos. ¿Cuántos hijos e hijas hay en total?

A) 15 **B)** 13 **C)** 11 **D)** 9 **E)** 6

25 En la fiesta final de curso, las consonantes P, Q, R y S bailan en pareja, con las vocales A, E, I y O. Averigua quién baila con O teniendo en cuenta estos datos: R baila con A, Q no baila con O ni con I, y además O y P no se soportan.

A) P **B)** Q **C)** R **D)** S **E)** No puede saberse

concurso de primavera MATEMÁTICAS

XXVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE **7 de febrero de 2024**

NIVEL I **5PRIM – 6PRIM**

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones !!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 punto***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

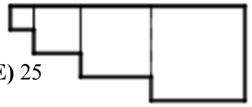
ORGANIZA
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Divermates
Smartick

1 ¡Comenúmeros tiene hambre! Ha decidido que el menú de hoy va a consistir en números pares de dos cifras que no tengan cifras repetidas. ¿Cuántos números podrá comerse?

A) 40 **B)** 41 **C)** 42 **D)** 45 **E)** 50

2 La figura está formada por cuatro cuadrados de lados 1, 2, 3 y 4 cm. ¿Cuánto mide, en cm, su perímetro?



A) 30 **B)** 29 **C)** 28 **D)** 27 **E)** 25

3 Las cifras del número 1201 suman cuatro. ¿Cuántos números hay de cuatro cifras que sumen cuatro?

A) 12 **B)** 16 **C)** 19 **D)** 20 **E)** 24

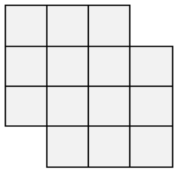
4 Cuatro amigos van en un patinete gigante: Fede, Gloria, Héctor e Isabel. ¿De cuántas maneras pueden colocarse sabiendo que Fede y Héctor no pueden estar seguidos?

A) 8 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** 14

5 En el Quidditch se suman 3 puntos si se gana un partido, un punto si se empata y cero puntos si se pierde. El equipo de Harry Potter consiguió 11 puntos en los cinco primeros partidos de la temporada. Después de eso no ha vuelto a empatar. Si al final de los veinte partidos de la temporada consiguió 38 puntos, ¿cuántos partidos ha ganado en total?

A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

6 ¿Cuántos cuadrados de cualquier tamaño hay en esta figura?

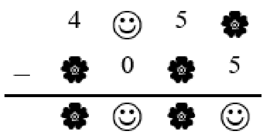


A) 24 **B)** 23 **C)** 19 **D)** 16 **E)** 14

7 Ana, Diego, Lucía y Miguel han hecho varias fotos. En todas ellas salen al menos dos de ellos y en ninguna salen exactamente los mismos. ¿Cuántas fotos han sacado como máximo?

A) 12 **B)** 11 **C)** 10 **D)** 9 **E)** 8

8 En esta resta, cada símbolo representa siempre la misma cifra. ¿Cuánto vale la carita feliz?



A) 2 **B)** 3 **C)** 5
D) 6 **E)** 7

9 Emma dobla un trozo de papel cuadrado por la mitad. Si el perímetro del rectángulo obtenido es 18 cm, ¿cuál es, en cm^2, el área del cuadrado original de Emma?

A) 9 **B)** 16 **C)** 36 **D)** 81 **E)** 144

10 "Si me das un euro", le dice María a Jesús, "tendré el doble de euros que tú; en cambio, si yo te doy un euro tendremos la misma cantidad". ¿Cuántos euros tienen entre los dos?

A) 7 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 16 **E)** 21

11 Don Retorcido ha multiplicado mentalmente dos números de dos cifras y ha anotado el resultado. Después de tan noble hazaña se ha ido a la cocina y se ha preparado un té. Luego ha vuelto a su despacho a repasar la cuenta, pero ha encontrado que Comenúmeros se ha comido una cifra de cada factor y una del resultado. Así, solo puede ver que 3● × ●9 = 18●3. ¿Cuánto suman los números desaparecidos?

A) 14 **B)** 12 **C)** 10 **D)** 13 **E)** 11

12 Rata encontró un campo de fresas. Ayer se comió la mitad de las fresas del campo y hoy se ha comido la tercera parte de las que quedaban. Si para mañana le quedan 24 fresas, ¿cuántas fresas había en el campo al principio?

A) 48 **B)** 58 **C)** 60 **D)** 72 **E)** 96

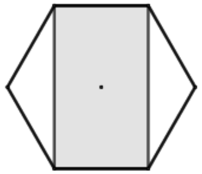
13 Hemos hecho doce jugadas. Cada vez que ganaste te di dos canicas, cada vez que perdiste me diste tres. Terminé ganando 21 canicas. ¿Cuántas jugadas gané?

A) 3 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 9

14 Si sumas todos los números del 1 al 1000 que acaban en 7 y al resultado le restas todos los números del 1 al 1000 que acaban en 2, ¿qué obtienes?

A) 450 **B)** 455 **C)** 475 **D)** 490 **E)** 500

15 El hexágono regular de la figura tiene 36 cm^2 de área. ¿Cuál es el área, en cm^2, del rectángulo sombreado?

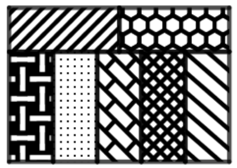


A) 30 **B)** 27 **C)** 24 **D)** 21 **E)** 18

16 ¿Cuál es la cifra de las unidades de 2^{43}?

A) 8 **B)** 6 **C)** 4 **D)** 2 **E)** 0

17 Los siete primos tenemos toallas del mismo tamaño y las hemos colocado formando un rectángulo sin que se solapen, como ves en la figura. Si llamamos L al largo de las toallas y A al ancho, ¿cuál es el resultado de dividir L entre A?



A) 1,5 **B)** 2 **C)** 2,5
D) 3 **E)** 3,5

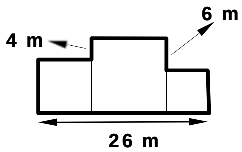
18 A la niña Centésima le gustan las figuras de animales. Compra sesenta figuras entre vacas, ovejas y gallinas. Cada vaca cuesta treinta euros, cada oveja dos euros y cada gallina un euro. Si en total gastó cien euros, averigua cuántas figuras de gallina compró.

A) 48 **B)** 28 **C)** 51 **D)** 35 **E)** 11

18 El Pájaro Loco tenía un buen número de bellotas para pasar el mes de febrero. Al cabo de unos días se comió 40 bellotas, contó las que le quedaban y pensó "todavía me quedan más de la mitad de las que tenía al principio". Pasados los días encontró diez bellotas más y luego se comió siete. Entonces, mirando las bellotas que le quedaban, pensó "vaya, me quedan menos de 45 bellotas". ¿Cuántas bellotas le quedan al Pájaro Loco?

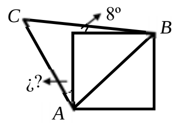
A) 44 **B)** 43 **C)** 42 **D)** 41 **E)** 40

19 En la figura puedes ver que hemos juntado tres cuadrados para formar un polígono de ocho lados. ¿Cuántos metros mide el perímetro del octógono?



A) 70 **B)** 72 **C)** 74 **D)** 76 **E)** 78

20 En la figura ves un cuadrado y un triángulo isósceles con $AB = AC$. ¿Cuánto mide el ángulo marcado con las interrogaciones?



A) 29º **B)** 26º **C)** 20º **D)** 16º **E)** 8º

21 Ariel escribe en la pizarra todos los números desde el 1 hasta el 900. Aparece Teo y borra todos los múltiplos de 3. Llega Zoe y borra todos los múltiplos de 5. ¿Cuántos números quedan ahora en la pizarra?

A) 400 **B)** 420 **C)** 440 **D)** 480 **E)** 840

22 ¿Cuál es la cifra de las unidades del producto $3^{41} \cdot 7^{46}$?

A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

23 El partido de balonmano va a comenzar y necesitamos camisetas para los siete jugadores del equipo. En una gran caja, revueltas, hay 20 camisetas blancas, 19 azules, 18 rojas y 17 amarillas. Si empezamos a sacar camisetas al tuntún, ¿cuál es el mínimo número de camisetas que debemos sacar para asegurarnos de tener siete camisetas del mismo color?

A) 7 **B)** 10 **C)** 21 **D)** 25 **E)** 28

24 ¡Un crucigrama con números de tres cifras! Una cifra en cada casilla. Ninguna cifra se repite y el 0 no está. Cuando lo rellenes, ¿cuál es la suma de las cinco cifras de las casillas grises?

	Múltiplo de 5	El producto de sus cifras es 21	Cuadrado perfecto
Sus cifras suman 11			
Múltiplo de 11			
Sus cifras suman 21			

A) 21 **B)** 22 **C)** 23
D) 24 **E)** 25

25 Piensa en el mayor número cuyas cifras, todas diferentes, suman nueve. ¿Cuál de estas opciones es la correcta?

A) Es múltiplo de 23 **B)** Es múltiplo de 4 **C)** Es impar
D) Es múltiplo de 7 **E)** Es múltiplo de 59

concurso de primavera MATEMÁTICAS

XXVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE **7 de febrero de 2024**

NIVEL II **1ESO – 2ESO**

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones !!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 punto***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Divermates
Smartick

1 Empieza el concurso con un examen de Verdadero (V) o Falso (F).

[P1] No hay números primos de dos cifras cuyas cifras sumen 12.
[P2] Si A es el área de un círculo de radio r y L es el perímetro de su circunferencia, entonces se cumple que $2 \cdot A = r \cdot L$.
[P3] En la descomposición en factores primos de 2024 aparecen únicamente tres factores primos.

¿Cuál es la secuencia correcta?

A) FVV **B)** FFV **C)** VVF **D)** VVV **E)** FFF

2 Las sumas de tres números tomados de dos en dos son 36, 41 y 47. ¿Cuál es el número que está en el medio?

A) 17 **B)** 18 **C)** 19 **D)** 20 **E)** 21

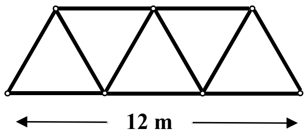
3 He dibujado un círculo y luego he trazado 2024 diámetros diferentes. ¿En cuántos sectores ha quedado dividido mi círculo?

A) 2024 **B)** 2025 **C)** 4047 **D)** 4048 **E)** 2^{2024}

4 Maribel ha conseguido un litro de pintura rosa mezclando dos partes de pintura blanca y una de pintura roja. Juan Pablo ha mezclado tres partes de pintura blanca con una parte de pintura roja para obtener dos litros de pintura rosa. Si Maribel y Juan Pablo mezclan ahora sus botes de pintura rosa, ¿qué fracción de pintura roja hay en esa mezcla final?

A) $\frac{5}{18}$ **B)** $\frac{2}{7}$ **C)** $\frac{2}{3}$ **D)** $\frac{7}{36}$ **E)** $\frac{7}{12}$

5 Estás viendo el perfil de un puente de 12 m de longitud construido con once barras de acero, todas ellas iguales. ¿Cuántas barras necesitaremos para construir otro puente con igual diseño pero de 44 m de longitud?



A) 33 **B)** 36 **C)** 40 **D)** 43 **E)** 44

6 De tres números A, B, C sabemos que A no es múltiplo de 5, B no es múltiplo de 3 y C no es par. Si mcm(A, B) = 900, mcm(A, C) = 90 y mcm(B, C) = 300, ¿cuál es la suma de los tres números $A + B + C$?

A) 1290 **B)** 690 **C)** 490 **D)** 330 **E)** 133

7 El resultado de $\frac{2024 + 10120}{6072 + 2024} - \frac{8096}{6 \cdot 2024}$ es igual a:

A) $\frac{1}{2024}$ **B)** $\frac{2}{3}$ **C)** $\frac{2}{2024}$ **D)** $\frac{3}{4}$ **E)** $\frac{5}{6}$

8 ¡Comenúmeros tiene hambre! Ha decidido que el menú de hoy va a consistir en números de tres cifras que no tengan cifras repetidas. ¿Cuántos números podrá comerse?

A) 252 **B)** 257 **C)** 508 **D)** 648 **E)** 657

9 Con estos bonitos símbolos, ■▼♥, queremos construir hileras de cuatro símbolos con tres condiciones: siempre tienen que aparecer los tres símbolos; está prohibido que haya dos cuadrados juntos; el triángulo siempre tiene que estar al lado de un cuadrado y un corazón. Con esas normas, ¿cuántas hileras diferentes se pueden formar?

A) 12 **B)** 8 **C)** 6 **D)** 4 **E)** 3

10 ¡Siempre aparecen las potencias! ¿Cuál es el valor de $\frac{2^{40} \cdot 5^{10} \cdot 10^{100}}{20^{50} \cdot 50^{20} \cdot 100^{10}}$?

A) 10^{80} **B)** 1 **C)** $2^{10} \cdot 5^{10}$ **D)** $\frac{1}{100^{10}}$ **E)** $\frac{10^{90}}{2^{10}}$

11 En una academia de música, la mitad de los estudiantes tocan el piano; el 55% tocan el violín; y hay 15% que tocan ambos instrumentos. Si hay ocho estudiantes que no tocan ni el violín ni el piano, ¿cuántos estudiantes tocan los dos instrumentos?

A) 18 **B)** 16 **C)** 14 **D)** 12 **E)** 10

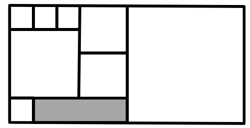
12 El número 2024 es múltiplo de 11. ¿Cuántos números de cuatro cifras son múltiplos de 11 con la condición de que la cifra 2 aparezca exactamente dos veces, situada en las unidades de millar y en las decenas?

A) 4 **B)** 6 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

13 Ya has llegado al problema trece. ¿Cuántos números de tres cifras no nulas, abc, con $a < b < c$ cumplen que la suma de sus cifras es 13?

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

14 Con ocho cuadrados y un rectángulo gris he formado una bonita alfombra de 30 dm de largo y 15 dm de ancho, como en la figura. ¿Qué área, en dm^2, tiene el rectángulo gris?



A) 48 **B)** 45 **C)** 42 **D)** 40 **E)** 36

15 En un depósito están mezclados 26 litros de leche y 14 litros de agua. Si se extraen 5 litros de dicha mezcla, ¿cuántos litros más de leche que de agua quedan en el depósito?

A) 10,5 **B)** 10,75 **C)** 11 **D)** 11,5 **E)** 11,75

16 En este cuadrado mágico cada fila, columna y diagonal suman lo mismo. Lo difícil es que hay algunos números negativos. ¿Qué número hay en la casilla inferior izquierda?

1	**–6**	
–4		**0**
¿?		

A) –5 **B)** –3 **C)** –1 **D)** 2 **E)** 3

17 ¿Cuántos años tiene usted, don Retorcido? ¡No seáis impertinentes! Dividid los grados que mide cada ángulo de un pentágono regular entre el número de divisores que tiene el 72, y a ese resultado sumadle el número primo capicúa más pequeño con más de dos cifras. Pues esa será mi edad dentro de veinte años. ¿Cuántos años tiene don Retorcido?

A) 72 **B)** 75 **C)** 80 **D)** 90 **E)** 95

17 En un bombo hay diez bolas numeradas con número par y diez con número impar. Si sacamos dos de ellas con reemplazamiento, ¿cuál es la probabilidad de que el producto de sus números sea par?

A) $\frac{7}{9}$ **B)** $\frac{4}{5}$ **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{3}{5}$ **E)** $\frac{1}{2}$

18 La suma de 30 enteros positivos consecutivos es 675. ¿Cuál es el menor de los 30?

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

19 Un polinomio $P(x)$ de grado 4 y coeficiente principal 1 tiene las raíces 1, 2, 3 y 4. ¿Cuál es la suma de todos sus coeficientes?

A) 0 **B)** 2 **C)** 10 **D)** -2 **E)** 24

20 En el octógono regular de la figura hemos dibujado un cuadrado. Si el lado del octógono mide 1 cm, ¿cuál es el área, en cm^2, del cuadrado?

A) $2+\sqrt{2}$ **B)** $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C)** $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ **D)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **E)** $\frac{1}{2}$

21 El triángulo ABC tiene área 832 cm^2. Llamamos D al punto medio del lado AB, llamamos E al punto medio del lado BC y llamamos F al punto medio del segmento AE. ¿Cuál es, en cm^2, el área del triángulo DEF?

A) 78 **B)** 92 **C)** 104 **D)** 124 **E)** 130

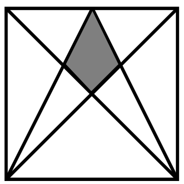
22 Kiwi, Tardis y Espagueti están jugando con fichas. Han empezado con 12, 11 y 10 fichas respectivamente y, en cada turno, el jugador que más fichas tiene reparte una a cada uno de los otros y descarta otra. El juego acaba cuando alguien se queda sin fichas. ¿Cuántos turnos durará la partida?

A) 28 **B)** 29 **C)** 30 **D)** 31 **E)** 32

23 Se tiene el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \boldsymbol{x+2y+3z=35} \\ \boldsymbol{x-2y+3z=15} \\ \boldsymbol{x-3y+9z=46} \end{cases}$. Entonces $\boldsymbol{x\cdot y\cdot z}$ es:

A) 150 **B)** 160 **C)** 180 **D)** 195 **E)** 210

24 Partiendo de un cuadrado y, ayudándonos de sus vértices y del punto medio del lado superior, hemos diseñado la figura que ves. Si para pintar la zona gris hemos necesitado 4 m^2 de pintura, ¿cuántos m^2 necesitaremos para colorear la zona blanca?



A) 48 **B)** 44 **C)** 40 **D)** 36 **E)** 32

25 Don Retorcido os propone este último reto con raíces. Calcula:

$$\left(\sqrt{3+\sqrt{2}}+\sqrt{3-\sqrt{2}}\right)^4+\left(\sqrt{3+\sqrt{2}}-\sqrt{3-\sqrt{2}}\right)^4$$

A) 0 **B)** 128 **C)** 216 **D)** $48\sqrt{7}$ **E)** $64+18\sqrt{7}$

concurso de primavera MATEMÁTICAS

XXVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE **7 de febrero de 2024**

NIVEL III **3ESO – 4ESO**

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones !!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 punto***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** $\boxed{\text{X}}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Divermates
Smartick

1 Cuando Luca escribe la edad de su madre y a continuación la suya, se forma un número de cuatro cifras. Si a este número se le resta la suma de ambas edades, el resultado es 4257. ¿Cuál es la edad de su madre?

A) 40 **B)** 41 **C)** 42 **D)** 43 **E)** 44

2 En una lista tenemos 80 números enteros consecutivos. Si la mediana de los 25 primeros es 100, ¿cuál es la mediana de los 55 restantes?

A) 125 **B)** 130 **C)** 132 **D)** 135 **E)** 140

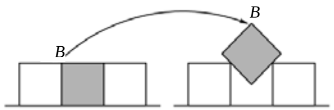
3 En este cuadrado mágico cada fila, columna y diagonal suman lo mismo. ¿Cuál es el valor de **M + A + G + I + C + O**?

13	M	A
G	I	**7**
C	O	**9**

A) 70 **B)** 71 **C)** 72 **D)** 73 **E)** 74

4 Tres cuadrados de un centímetro de lado están colocados en fila. Recortamos el cuadrado central, lo rotamos 45° y lo apoyamos en el hueco que ha quedado como indica la figura. ¿A cuántos centímetros del suelo está el punto B?

A) 1 **B)** $\sqrt{2}$ **C)** $\frac{3}{2}$ **D)** $\sqrt{2}+\frac{1}{2}$ **E)** 2



5 En el triángulo ABC tomamos un punto P sobre el lado AB de tal manera que $PB = 4AP$, de manera análoga tomamos el punto Q sobre el lado AC tal que $QC = 4AQ$. Si $PQ = 8$, ¿cuánto mide el lado BC del triángulo?

A) 40 **B)** 32 **C)** 24 **D)** 12 **E)** 10

6 Carmen y Esteban van de la mano hasta la parada del autobús. Esteban va dando zancadas y Carmen va dando saltitos. Carmen da diez saltitos por cada cuatro zancadas de Esteban. Si al llegar a la parada han contado 3577 movimientos entre zancadas y saltitos, ¿cuál es la suma de las cifras del número de saltitos que ha dado Carmen?

A) 13 **B)** 14 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 17

7 La media de 20 números es 30 y la media de otros 30 números es 20. ¿Cuál es la media de los 50 números?

A) 22 **B)** 23 **C)** 24 **D)** 25 **E)** 26

8 Alba, Braulio, Carmen y Diego han jugado seis partidos de dobles al tenis. En cada partido ganó una de las parejas y al final de cada partido se sorteaban nuevas parejas. Si Alba ganó con sus parejas cuatro partidos, Braulio dos y Carmen uno, ¿cuántos partidos ganó Diego?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

9 El producto de las edades de mis padres es 2024 y la suma de sus edades no alcanza los cien años, ¿cuál es la diferencia de sus edades?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

10 En un campamento de verano, por la mañana podemos elegir entre jugar al fútbol, al baloncesto, al vóley o al tenis. Por la tarde podemos elegir entre natación, surf y piragüismo, y por la noche entre jugar a las cartas y contar historias en la hoguera. Mi amiga Isabel ha elegido fútbol, surf y cartas. ¿De cuántas formas puedo elegir si quiero coincidir con ella como mucho en una actividad?

A) 21 **B)** 20 **C)** 19 **D)** 18 **E)** 17

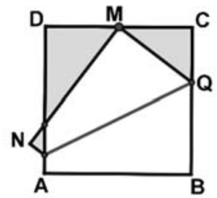
11 Tenemos un dado de seis caras donde figuran los seis primeros números primos. Lanzamos el dado dos veces. Calcula la probabilidad de que la suma de las tiradas sea par.

A) $\frac{1}{36}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{11}{36}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{13}{18}$

12 Colocamos en fila, de izquierda a derecha, los cuatro ases de la baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de que el as de oros esté a la derecha del as de copas?

A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{3}{4}$

13 Doblamos una hoja cuadrada de papel, de vértices A, B, C, D, de forma que llevamos el vértice B al punto medio M del lado CD, como muestra la figura. Si el segmento QC mide 12 cm, ¿cuánto mide, en cm, el lado AB?



A) 36 **B)** 35 **C)** 32 **D)** 30 **E)** 27

14 ¿Cuál es la cifra de las unidades del producto $2^{38} \cdot 3^{41} \cdot 7^{46}$?

A) 8 **B)** 6 **C)** 4 **D)** 2 **E)** 0

15 En la siguiente tira, del tercer número en adelante, cada número es la suma de los dos que le preceden. ¿Qué número hay en la casilla que tiene las interrogaciones?

6				¿?			2024

A) 450 **B)** 468 **C)** 498 **D)** 502 **E)** 524

16 ¿Cuántos números de tres cifras cumplen que la cifra de las decenas es igual al producto de las otras dos cifras?

A) 20 **B)** 23 **C)** 26 **D)** 29 **E)** 32

18 Observa estas tres progresiones aritméticas.

4	9	14	19	24	…
10	21	32	43	54	…
16	33	50	67	84	…

¿Cuál es la suma de las cifras del número más pequeño que está en las tres?

A) 16 **B)** 18 **C)** 19 **D)** 21 **E)** 22

19 Tenemos un tablero de 3×5 y una ficha en una de las casillas. En cada movimiento la ficha se puede mover a una casilla contigua en horizontal o vertical, pero no en diagonal. ¿Desde cuántas casillas del tablero se puede salir y visitar todas las casillas en 14 movimientos?

A) 4 **B)** 6 **C)** 8 **D)** 12 **E)** 15

20 ¿Sabías que todos los capicúas de cuatro cifras son múltiplos de 11? Si tomamos un número capicúa de cuatro cifras al azar y lo dividimos entre 11, ¿qué probabilidad hay de obtener otro número capicúa?

A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{2}{5}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{3}{5}$ **E)** 1

21 María recorre todos los días un camino de la siguiente manera: el primer kilómetro lo recorre a 3 km/h, el segundo a 4 km/h, el tercero a 5 km/h y el último kilómetro a 6 km/h. ¿Cuál es, en km/h, la velocidad media de este recorrido?

A) 4 **B)** $\frac{9}{2}$ **C)** $\frac{19}{5}$ **D)** 5 **E)** $\frac{80}{19}$

22 ¿Cuál es el mayor número primo que divide a: $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots-98^2+99^2$?

A) 11 **B)** 17 **C)** 19 **D)** 29 **E)** 31

23 Dados los números reales positivos a, b y c, sabemos que $x=\frac{a}{b+c}=\frac{b}{a+c}=\frac{c}{a+b}$.

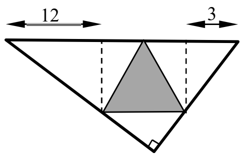
El valor de x es:

A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{2}{5}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{3}{5}$ **E)** 1

24 El área de un hexágono regular mide 18 cm^2 y el área de un triángulo equilátero 75 cm^2. Si el perímetro del hexágono mide P metros, ¿cuántos metros mide el perímetro del triángulo?

A) $\frac{5P}{2}$ **B)** $\frac{8P}{3}$ **C)** $\frac{P}{2}$ **D)** $\frac{4P}{5}$ **E)** $3P$

25 En un triángulo rectángulo se inscribe un triángulo equilátero como indica la figura. El área del triángulo equilátero vale:



A) $9\sqrt{3}$ **B)** $10\sqrt{3}$ **C)** $12\sqrt{3}$ **D)** $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ **E)** $\frac{27\sqrt{3}}{2}$

concurso de primavera MATEMÁTICAS

XXVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

1ª FASE 7 de febrero de 2024

NIVEL IV BACHILLERATO

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones !!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 punto***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Divermates
Smartick

1 Los logaritmos han venido para ayudarnos. Calcula el valor de:

$$\log\left(\frac{1}{2}\right)^5+\log\left(\frac{2}{3}\right)^5+\log\left(\frac{3}{4}\right)^5+\cdots+\log\left(\frac{99}{100}\right)^5$$

A) 0 **B)** 1 **C)** –1 **D)** 10 **E)** –10

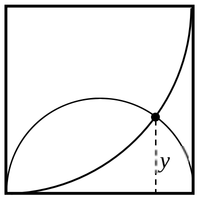
2 Los números positivos x e y cumplen que $\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{y}{x}\right)^2=2$. Con estos datos, calcula el valor de $\left(\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{x}{y}\right)^3+\left(\frac{y}{x}\right)^3+\left(\frac{x}{y}\right)^4+\left(\frac{y}{x}\right)^4$.

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 10

3 Las soluciones de las ecuaciones $x^2-3ax+2a^2=0$ y $x^2-bx=0$ son cuatro números diferentes que están en progresión aritmética. Si fijamos un valor positivo de a, ¿cuál es la suma de los valores que puede tomar b?

A) a **B)** $-a$ **C)** $2a$ **D)** $-2a$ **E)** 0

4 En la figura vemos un cuadrado de lado 2; un cuarto de circunferencia; una semicircunferencia y el punto de intersección entre las dos. ¿Cuánto mide el segmento y, perpendicular a un lado del cuadrado?



A) $\frac{4}{5}$ **B)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D)** $\frac{5}{6}$ **E)** 1

5 La diferencia entre las áreas de dos triángulos semejantes es 18 cm² y su cociente es el cuadrado de un entero. Si el área del más pequeño, en cm², viene dada por un número entero y uno de sus lados mide 3 cm, el lado correspondiente del triángulo mayor mide, en cm:

A) 15 **B)** 12 **C)** 9 **D)** 6 **E)** 4

6 Los números enteros a, b, c cumplen la igualdad $a^2+b^2+c^2+35=6a-10b+2c$. ¿Cuál es el valor de la suma $a+b+c$?

A) –2 **B)** –1 **C)** 0 **D)** 1 **E)** 3

7 ¿Cuántas cifras tiene el número 20^{24}?

A) 31 **B)** 32 **C)** 34 **D)** 36 **E)** 40

8 ¿Para cuántos n del conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 614\}$ es el producto $(n^2-n+3)(n^2+n+3)$ múltiplo de 5?

A) 150 **B)** 200 **C)** 307 **D)** 425 **E)** 492

9 El número real K es tal que la región del plano definida por $|2x|+|y|\le K$ tiene área 250. El valor de K es:

A) $5\sqrt{3}$ **B)** $3\sqrt{5}$ **C)** $7\sqrt{2}$ **D)** $5\sqrt{10}$ **E)** $10\sqrt{5}$

10 Tiramos dos dados al azar y llamamos a al resultado del primer dado y b al del segundo. ¿Cuál es la probabilidad de que la fracción $\frac{a}{b}$ sea irreducible y menor que 1?

A) $\frac{11}{36}$ **B)** $\frac{5}{18}$ **C)** $\frac{13}{36}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** $\frac{7}{18}$

11 ¿Para qué valor de n se cumple que: $(1+i)^n=-n$? [Recuerda que $i^2=-1$]

A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 10

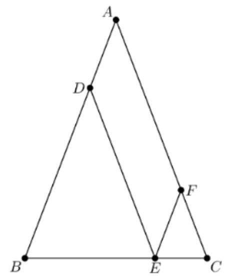
12 Para todo valor de x se cumple que la expresión cos^4x-sen^4x es igual a:

A) $2\,cos^2x-1$ **B)** $1-2\,sen^2x$ **C)** $cos\,2x$
D) $\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x}$ **E)** Todas las anteriores

13 Escogemos al azar un número de cinco cifras. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga al menos una cifra repetida?

A) $\frac{189}{625}$ **B)** $\frac{42}{125}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{83}{125}$ **E)** $\frac{436}{625}$

14 Del siguiente triángulo conocemos las medidas de los lados $AB=AC=30$. Los puntos D, E y F se encuentran sobre los lados AB, BC y AC respectivamente, cumpliendo que DE es paralelo a AC, y EF es paralelo a AB. ¿Cuánto mide el perímetro del paralelogramo $ADEF$?



A) 56 **B)** 60 **C)** 64 **D)** 68 **E)** 72

15 Si $a+b=5$ y $a^3+b^3=32$, ¿cuánto vale $a^{-1}+b^{-1}$?

A) $\frac{5}{32}$ **B)** $\frac{3}{5}$ **C)** $\frac{27}{37}$ **D)** $\frac{25}{31}$ **E)** 27

16 Para cada entero positivo n definimos la función $P(n)$ como la suma de las cifras de n más el número de cifras de n. Por ejemplo, $P(208)=2+0+8+3=13$.
¿Cuántos números n hay para los que $P(n)=5$?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

17 De lunes a miércoles vinieron 22 estudiantes de bachillerato en bicicleta. El lunes vinieron 15, el martes 12 y el miércoles 9. ¿Cuántos estudiantes como mucho pudieron haber venido los tres días en bicicleta?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

XXVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

TABLA DE SOLUCIONES (1ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**B**	1	**D**	1	**D**	1	**E**
2	**C**	2	**E**	2	**E**	2	**D**
3	**D**	3	**D**	3	**A**	3	**C**
4	**D**	4	**A**	4	**D**	4	**A**
5	**E**	5	**D**	5	**A**	5	**D**
6	**B**	6	**E**	6	**E**	6	**B**
7	**B**	7	**E**	7	**C**	7	**B**
8	**E**	8	**D**	8	**D**	8	**E**
9	**C**	9	**C**	9	**A**	9	**D**
10	**C**	10	**B**	10	**E**	10	**A**
11	**B**	11	**D**	11	**E**	11	**B**
12	**D**	12	**C**	12	**C**	12	**E**
13	**E**	13	**B**	13	**C**	13	**E**
14	**E**	14	**E**	14	**A**	14	**B**
15	**C**	15	**A**	15	**B**	15	**D**
16	**A**	16	**B**	16	**E**	16	**E**
17	**C**	17	**D**	17	**C**	17	**D**
18	**A**	18	**A**	18	**C**	18	**A**
19	**D**	19	**D**	19	**A**	19	**C**
20	**B**	20	**A**	20	**A**	20	**C**
21	**A**	21	**D**	21	**C**	21	**E**
22	**E**	22	**D**	22	**A**	22	**A**
23	**A**	23	**D**	23	**E**	23	**C**
24	**B**	24	**C**	24	**B**	24	**A**
25	**D**	25	**A**	25	**B**	25	**C**

XXVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS	
2ª FASE	**13 de abril de 2024**
NIVEL I	**5 – 6 PRIMARIA**

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones !!!

Escribe tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

Cada respuesta ***correcta*** *te aportará*	**5** ***puntos***
Cada pregunta que dejes ***en blanco***	**1** ***punto***
Cada respuesta ***errónea***	**0** ***puntos***

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** $\boxed{X}$ LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

SI TE EQUIVOCAS, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

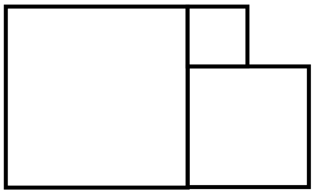
ORGANIZA
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación, Ciencia y Universidades de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Divermates
Smartick

1 En 2024 estamos celebrando el 27º Concurso de Primavera. Don Retorcido te pregunta: ¿En qué año celebraremos el 2024º Concurso de Primavera?

A) 4018 **B)** 4019 **C)** 4020 **D)** 4021 **E)** 4022

2 Francisco ha juntado tres cuadrados como muestra la figura. Si la superficie del grande mide 64 cm^2 y la del pequeño 4 cm^2, ¿qué área, en cm^2, tiene el cuadrado mediano?



A) 25 **B)** 30 **C)** 34 **D)** 36 **E)** 49

3 Si $\boxed{A = 0{,}03 \times 234}$, $\boxed{B = 3{,}1 : 0{,}4}$ y $\boxed{C = 8{,}2 - 1{,}09}$, entonces:

A) $A < B < C$ **B)** $A < C < B$ **C)** $C < A < B$ **D)** $C < B < A$ **E)** $B < A < C$

4 Diego siempre quiere ir disfrazado al cole. Al final ha llegado a un acuerdo con sus padres. Los días del mes que son múltiplos de 2 y no de 3 irá disfrazado de superhéroe; los que son múltiplos de 3 y no de 2 irá de Griezmann; y el resto irá sin disfrazar. En un mes de 31 días, ¿cuántos días irá sin disfrazar?

A) 12 **B)** 14 **C)** 16 **D)** 18 **E)** 20

5 Suma las cifras del producto del número formado con 97 nueves por el formado con 97 sietes. ¿Cuál es el resultado?

A) 999 **B)** 873 **C)** 792 **D)** 963 **E)** 777

6 Una caja con 13 kilos de naranjas pesa el triple que la misma caja con 3 kilos de naranjas. ¿Cuántos kilos pesa la caja vacía?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

7 Miguel invitó a sus amigos a merendar. Tenía 15 piezas de fruta entre naranjas y peras. Cortó cada naranja en siete trozos y cada pera en cuatro trozos, con lo que le quedaron 75 trozos de fruta. ¿Cuántas peras tenía?

A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

8 En una bolsa hay seis bolas rojas numeradas del 1 al 6, cinco bolas verdes numeradas del 1 al 5 y nueve bolas amarillas numeradas del 1 al 9. Si saco una al azar, ¿qué probabilidad tengo de que la bola no sea roja y el número sea par?

A) $\frac{7}{10}$ **B)** $\frac{3}{7}$ **C)** $\frac{3}{5}$ **D)** $\frac{3}{10}$ **E)** $\frac{7}{20}$

9 Entre mis cuatro abuelos suman 320 años. Mis dos abuelas tienen la misma edad, mi abuelo paterno tiene cinco años más que la abuela y mi abuelo materno un año menos que la abuela. ¿Cuál es la suma de las cifras de la edad de una abuela?

A) 8 **B)** 13 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 16

10 Cinco amigas van a merendar. Todas comen y beben algo distinto: una de ellas come sándwich y bebe leche; otra toma té con pastas; Meli merienda una tostada; a Puri no le gusta ni el zumo ni el café; Anita bebe agua; Merche toma un sándwich y Loli bebe zumo. ¿Qué bebida toma Meli?

A) Café **B)** Zumo **C)** Leche **D)** Agua **E)** Té

11 En este cuadrado la suma de los cuatro números de cada línea, de cada columna y de cada diagonal era siempre la misma hasta que Comenúmeros se comió los números que faltan. ¿Cuánto suman los cinco números que se comió nuestro amigo?

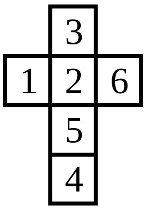
	**21**	**20**	**10**
18	**12**	**13**	
14	**16**		**11**
19		**8**	

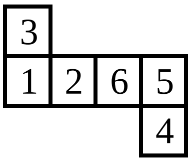
A) 70 **B)** 68 **C)** 66 **D)** 64 **E)** 62

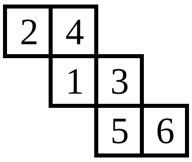
12 ¿Cuánto mide usted, Don Retorcido? Yo mido 85 centímetros más la mitad de mi altura, respondió con seguridad. ¿Cuántos centímetros mide Don Retorcido?

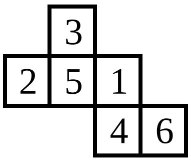
A) 160 **B)** 165 **C)** 170 **D)** 175 **E)** 180

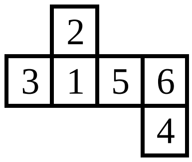
13 En un dado la suma de los números de dos caras opuestas es siempre igual. ¿Cuál de estos desarrollos planos de un dado tiene bien escritos los números?

A)


B)


C)


D)


E)


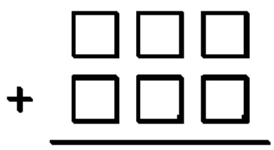
14 Para practicar para el Concurso de Primavera la niña Centésima ha hecho 60 problemas en seis días, del 1 al 6 de abril. Si cada día hizo dos problemas más que el día anterior, ¿cuántos hizo el 5 de abril?

A) 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 15

15 En mi hucha tengo bastantes billetes de 5 euros y un montonazo de monedas de 20 céntimos. En total tengo 100 euros. Si tengo 32 monedas más que billetes, ¿cuántos euros tengo en monedas?

A) 10 **B)** 15 **C)** 20 **D)** 25 **E)** 30

16 Queremos rellenar los recuadros de la suma de la figura con las cifras 1, 2, 3, 4, 5 y 6, sin repetir ninguna y de modo que el resultado sea el menor posible. ¿Cuánto vale la suma?



A) 123 **B)** 254 **C)** 316 **D)** 381 **E)** 579

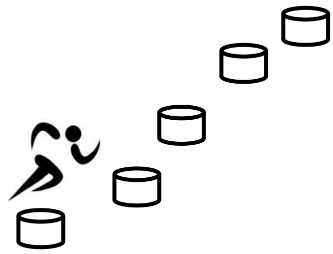
17 Celia pesó 3,3 kg al nacer. Según internet, un bebe engorda 2 dag al día durante el primer mes; engorda 150 g a la semana durante el segundo y tercer mes; y en los siguientes tres meses 0,6 kg por mes. Si esto es así, ¿qué cantidad aproxima mejor lo que pesará Celia pasados seis meses?

A) 650 dag **B)** 6,4 kg **C)** 7,1 hg **D)** 6300 g **E)** 7 kg

18 En una caja hay tres bolas numeradas del 1 al 3. Mariquilla saca una, mira el número y la devuelve a la caja. A continuación, Ana y Marta hacen lo mismo y al final suman los tres números que han obtenido. ¿Cuántos valores distintos puede tomar esa suma?

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

19 A Emma le encanta correr y su entrenadora le ha puesto esta prueba. Emma se coloca en la primera piedra de una hilera de cinco piedras y el objetivo es llegar a la última piedra dando saltos. Emma puede dar saltos tan grandes como quiera, es decir, puede saltar a la siguiente piedra, o pasar por encima de una, o de dos, lo que quiera. Si siempre da saltos hacia adelante, ¿de cuántas maneras puede llegar Emma a la quinta piedra?

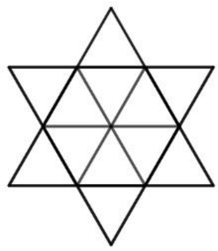


A) 10 **B)** 9 **C)** 8 **D)** 7 **E)** 6

20 ¡Menudo trancazo tienen! Julián tose cada 8 minutos, Jessi estornuda cada 12 minutos y Lucía se suena cada media hora. ¿Cuántas veces como mínimo escucharemos a los tres a la vez entre las 8:30 y las 19:45?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

21 ¿Cuántos triángulos de cualquier tamaño hay en esta estrella?

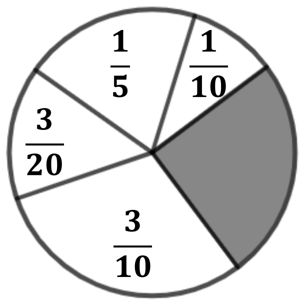


A) 12 **B)** 14 **C)** 18 **D)** 20 **E)** 22

22 Por cuatro manzanas y dos peras pagué 1,54 € y por dos peras y cuatro plátanos 1,70 €. ¿Cuánto me costarán una manzana, una pera y un plátano, todos juntos?

A) 0,81 € **B)** 0,76 € **C)** 0,66 € **D)** 0,36 € **E)** 0,24 €

23 Todos han comido ya una fracción del bizcocho. ¿Qué fracción ha quedado?



A) $\frac{2}{5}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{7}{20}$ **D)** $\frac{3}{10}$ **E)** $\frac{1}{4}$

24 La niña Centésima se ha inventado una operación y la ha llamado **tridente**:

$$a \,\Psi\, b = (a + b) : (a - b)$$

Así, por ejemplo, 4 Ψ 2 = (4 + 2):(4 – 2) = 6:2 = 3 y 5 Ψ 1 = (5 + 1):(5 – 1) = 6:4 = 1,5.
La niña Centésima pregunta: ¿Cuál es el valor de (9 Ψ 4) Ψ (8 Ψ 3)?

A) 12 **B)** 1,18 **C)** 2 **D)** 25 **E)** 1,125

25 He dibujado un hexágono regular y un triángulo equilátero de tal manera que el perímetro del hexágono es el doble del perímetro del triángulo. Si el área del triángulo mide 12 cm^2, ¿cuántos cm^2 mide el área del hexágono?

A) 6 **B)** 12 **C)** 24 **D)** 36 **E)** 72

concurso de primavera MATEMÁTICAS

XXVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE **13 de abril de 2024**

NIVEL II **1ESO – 2ESO**

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones !!!

Escribe tu número de identificación, tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. **Presta mucha atención al formato de los números**.

No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	**5 *puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	**1 *punto***
*Cada respuesta **errónea***	**0 *puntos***

LEE ATENTAMENTE CÓMO DEBES MARCAR LAS OPCIONES EN LA HOJA DE RESPUESTAS Y QUÉ HACER SI TE EQUIVOCAS.

Te sugerimos que vayas marcando tus soluciones en la hoja de la prueba y cuando tengas cuatro o cinco, las pases todas juntas a la hoja de respuestas.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

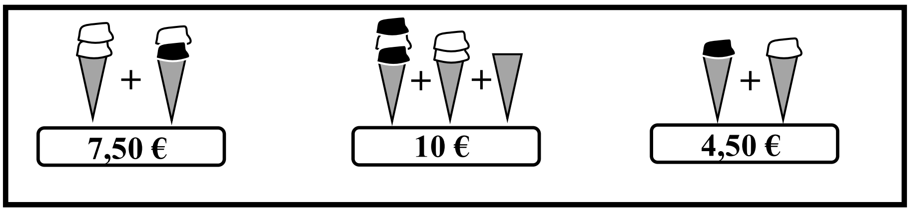
ORGANIZA
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

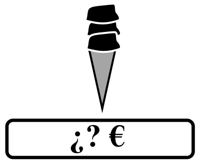
COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación, Ciencia y Universidades de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Divermates
Smartick

1 ¡Empezamos! ¡¡Bien!!
Calcula el valor de 2,024·2,024 – 20,24·0,2024 + 202,4·0,2024 – 2024·0,02024.

A) 0 **B)** 0,2024 **C)** 2,024 **D)** 20,24 **E)** 202,4

2 En la heladería de la playa venden cucuruchos y bolas de helado de nata y de chocolate. La lista de precios la dan de esta curiosa manera:





¿Cuántos euros tendré que pagar por un cucurucho con tres bolas de chocolate?

A) 6 **B)** 6,50 **C)** 7 **D)** 7,50 **E)** 8

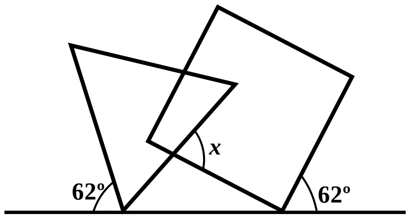
3 Si el área de un círculo de radio r es A, ¿cuál es la longitud de su circunferencia?

A) $\sqrt{A}$ **B)** $\frac{rA}{2}$ **C)** $\frac{A}{2r}$ **D)** $\frac{A}{r}$ **E)** $\frac{2A}{r}$

4 En un estanque hay carpas rojas y amarillas. Sabemos que $\frac{2}{5}$ del total son amarillas; $\frac{3}{4}$ de las amarillas son hembras; y hay la misma cantidad de machos que de hembras. ¿Qué fracción de carpas son machos rojos?

A) $\frac{1}{5}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{3}{5}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{2}{5}$

5 En el dibujo se ve a un cuadrado perseguido por un triángulo equilátero. ¿Cuánto mide el ángulo x?



A) 86º **B)** 87º **C)** 88º
D) 89º **E)** 90º

6 Atención a cómo se van colocando los números en estas filas:

F1	1	14	15	16	29	30	31
F2	2	13	12	17	28	27	…
F3	3	10	11	18	25	26	…
F4	4	9	8	19	24	23	…
F5	5	6	7	20	21	22	…

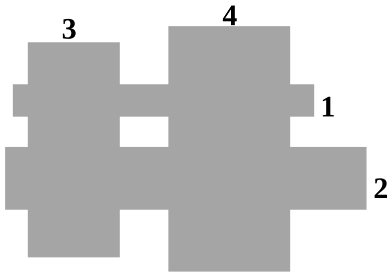
¿En qué fila estará colocado el número 2024?

A) F1 **B)** F2 **C)** F3 **D)** F4 **E)** F5

7 Si a, b, c son enteros positivos con mcm(a, b) = 2^3 y mcm(b, c) = 2^4, ¿cuál es el mcm(a, c)?

A) 2^3 **B)** 2^4 **C)** 2^5 **D)** 2^7 **E)** 2^{12}

8 La niña Centésima no para quieta. Ha recortado cuatro rectángulos de cartulina con estas medidas en cm: 1×10, 2×12, 3×7, 4×8. Después, con mucho cuidado para que todos los ángulos sean rectos, los ha colocado como ves en el dibujo. Ahora Centésima te pregunta: ¿qué área, en cm^2, ocupa la zona gris?



A) 66 **B)** 72 **C)** 74 **D)** 82 **E)** 87

9 Vamos a llamar *duoles* a los números naturales que al dividirlos entre 3, 4, 5 o 6 nos dan como resto 2. El primer número *duol* es el 2, ¿cuánto suman los dos siguientes *duoles*?

A) 174 **B)** 178 **C)** 182 **D)** 184 **E)** 190

10 ¡Cada vez nos gustan más las potencias! Si $4^a \cdot 5^b \cdot 6^c = 8^8 \cdot 9^9 \cdot 10^{10}$, ¿cuánto vale $a + b + c$?

A) 27 **B)** 29 **C)** 36 **D)** 42 **E)** 47

11 En la academia Bailaquetebaila durante el primer trimestre el 30 % de los inscritos se apuntaron a chotis y el resto a sardanas. En el segundo trimestre el 20 % de los que bailaban chotis se pasaron a sardanas, pero el 30 % de los que bailaban sardanas se cambiaron a chotis. ¿Qué porcentaje de los inscritos está apuntado a sardanas en el segundo trimestre?

A) 50 % **B)** 55 % **C)** 60 % **D)** 65 % **E)** 70 %

12 Don Retorcido quiere esconder su tesoro de números en cajas para que Comenúmeros no se los coma. Si guarda siete números en cada caja le quedan tres cajas vacías, pero si guarda cinco números en cada caja le quedan tres números sin guardar. ¿Cuántos números tiene don Retorcido?

A) 59 **B)** 60 **C)** 61 **D)** 62 **E)** 63

13 ¿Cuántos números capicúas de nueve cifras pueden formarse empleando exactamente 2 doses, 3 treses y 4 cuatros?

A) 12 **B)** 14 **C)** 16 **D)** 18 **E)** 24

14 La niña Centésima se propone colorear de negro cuatro de las dieciséis casillas blancas de un tablero de 4×4 de modo que en cada fila y en cada columna haya exactamente una casilla negra. Pero se impone la condición de que no puede haber dos casillas negras tocándose, ni siquiera por una esquina. ¿De cuántas maneras podrá hacerlo?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** Es imposible

15 En la fiesta del verano once amigos se comieron quince melones. Partieron algunos melones en seis rodajas y otros en ocho rodajas. Si todos los amigos comieron la misma cantidad de rodajas, ¿cuántas rodajas comió cada amigo?

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

16 Carmen se ha inventado esta fórmula: $\boxed{C = \dfrac{A \cdot (R - M)}{E + N}}$.

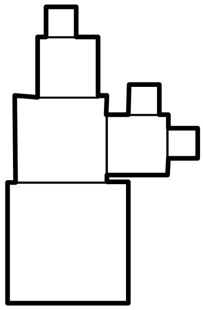
Si $C = -2$, $A = 6$, $R = 2$, $E = -20$, $N = 5$, ¿cuál es el valor de la M?

A) –5 **B)** –3 **C)** 1 **D)** 2 **E)** 7

17 ¿Cuánto vale esta curiosa suma: $1 + 5 + 2 + 5 + 3 + 5 + \ldots + 54 + 5 + 55 + 5$?

A) 1815 **B)** 1890 **C)** 1905 **D)** 1955 **E)** 2055

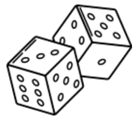
18 La niña Centésima tiene cuadrados de cartulina de lados 1, 2, 3 y 4 cm y con varios de ellos ha formado esta sorprendente figura que ves. Llega don Retorcido, que no pierde la ocasión, y le pide que calcule el perímetro, en cm, de su construcción. ¡Díselo tú!



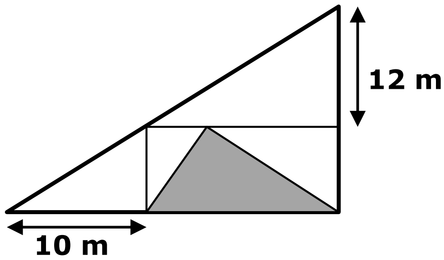
A) 36 **B)** 38 **C)** 39 **D)** 40 **E)** 42

19 Se tiran dos dados a la vez. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de sus dos resultados sea mayor que 19?

A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{5}{12}$ **E)** $\frac{2}{9}$



20 En la figura ves un triángulo rectángulo sobre el que descansa un rectángulo que, a su vez, tiene en su interior un triángulo sombreado. ¿Qué área, en m^2, tiene dicho triángulo sombreado?



A) 44 **B)** 60 **C)** 66
D) 80 **E)** No puede saberse

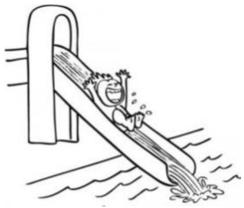
21 Alba y Belén han resuelto la mitad de sus ejercicios de matemáticas por separado y la otra mitad juntas. Alba tiene un porcentaje de acierto del 92 % en los ejercicios que ha hecho ella sola y del 94 % en el total. Belén tiene un porcentaje de acierto del 84 % en los que ha hecho ella sola, ¿cuál es su porcentaje total de aciertos?

A) 86 **B)** 87 **C)** 88 **D)** 90 **E)** 92

22 Don Retorcido retuerce los números de esta manera: si tú le dices un número, él multiplica el anterior y el posterior y te da el resultado. Así, si le dices 5, él lo retuerce a $4 \cdot 6 = 24$. ¿Cuál de estos números no es el resultado de un retorcimiento de don Retorcido?

A) 63 **B)** 80 **C)** 143 **D)** 180 **E)** 399

23 Decimos que un número es *descendente* si sus cifras son distintas y van decreciendo de izquierda a derecha. Por ejemplo, 7542 es descendente pero 7742 y 7561 no lo son. ¿Cuántos números descendentes de nueve cifras hay?



A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

24 En este cuadrado están escritos los números del 1 al 9 cumpliendo esta regla: los cuatros números que comparten vértice siempre suman 20. ¿Qué número hay en la casilla superior izquierda?

¿?		
	5	
		7

A) 1 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 8 **E)** 9

25 En mi instituto hay más de 750 estudiantes y menos de 1050 y se ofrecen tres actividades extraescolares. El 57 % juega al ajedrez; de estos, los $\frac{5}{6}$ tocan el piano; y de estos últimos, el 75 % hace senderismo. ¿Cuántos estudiantes practican las tres actividades?

A) 285 **B)** 280 **C)** 275 **D)** 260 **E)** 250

XXVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS	
2ª FASE	13 de abril de 2024
NIVEL III	3ESO – 4ESO

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones !!!

Escribe tu número de identificación, tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. **Presta mucha atención al formato de los números**.

No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

*Cada respuesta **correcta** te aportará*	***5 puntos***
*Cada pregunta que dejes **en blanco***	***1 punto***
*Cada respuesta **errónea***	***0 puntos***

LEE ATENTAMENTE CÓMO DEBES MARCAR LAS OPCIONES EN LA HOJA DE RESPUESTAS Y QUÉ HACER SI TE EQUIVOCAS.

Te sugerimos que vayas marcando tus soluciones en la hoja de la prueba y cuando tengas cuatro o cinco, las pases todas juntas a la hoja de respuestas.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación, Ciencia y Universidades de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Divermates
Smartick

1 Don Retorcido tiene 150 cartulinas para sus trabajos manuales. En un despiste llega Comenúmeros y corta algunas de esas cartulinas en diecisiete trozos cada una. Cuando vuelve don Retorcido se encuentra con 1510 trozos, entre cartulinas enteras y trozos más pequeños. ¿Cuántas cartulinas quedaron intactas?

A) 60 **B)** 65 **C)** 70 **D)** 75 **E)** 85

2 El año pasado mi zumo favorito era de 250 ml. Este año, el mismo zumo es de 200 ml pero el precio no ha cambiado. ¿En qué porcentaje ha aumentado el precio por ml de mi zumo favorito?

A) 5 % **B)** 10 % **C)** 15 % **D)** 20 % **E)** 25 %

3 Seis gatos y seis perros van al cine y compran las doce butacas de una fila. Según las normas gatunas los seis gatos tienen que sentarse juntos. ¿Cuál es la probabilidad de que los seis perros también se sienten juntos?

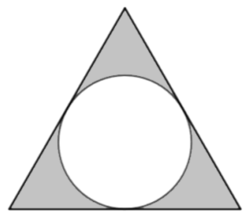
A) $\frac{2}{7}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{5}{12}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{5}{18}$

4 Ana, Bea y Celia son tres amigas. Ana tiene piedras pero Bea y Celia no. Comienza este reparto: Ana da a Bea las tres cuartas partes de sus piedras; Bea da a Celia la mitad de sus piedras y dos piedras más; Celia da a Ana algunas piedras. Al final las tres amigas tienen el mismo número de piedras. ¿Cuántas piedras dio Celia a Ana?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

5 Irene ha calculado la media de las calificaciones obtenidas en los controles que ha realizado este curso. Se ha dado cuenta de que, si en cada uno de los dos próximos obtuviese una puntuación de 9 puntos, su media subiría un punto. Y, en cambio, si sacase 9 puntos en cada uno de los cuatro siguientes, su media subiría un punto y medio. ¿Cuál es su media actual?

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 7,5 **E)** 9



6 En la figura tenemos un triángulo equilátero de 2 cm de lado y su circunferencia inscrita. ¿Cuánto mide, en cm^2, el área sombreada?

A) $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}$ **B)** $\frac{2\sqrt{2}-\pi}{2}$ **C)** $\frac{3\sqrt{2}-2\pi}{2}$ **D)** $\frac{3\sqrt{3}-2\pi}{3}$ **E)** $\frac{2\sqrt{3}-\pi}{3}$

7 El producto de las soluciones enteras de la ecuación $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$ es:

A) 16 **B)** –16 **C)** 4 **D)** –4 **E)** –1

8 Sara colecciona canicas, todas ellas de igual tamaño. Por ahora ha conseguido 20 rojas, 21 blancas, 22 verdes, 23 azules y 24 negras. Para el juego de hoy necesita cuatro canicas de diferente color. Si empieza a sacar canicas al azar, ¿cuál es el número mínimo de canicas que tiene que coger para asegurarse de que habrá cuatro de diferente color?

A) 27 **B)** 64 **C)** 70 **D)** 86 **E)** 90

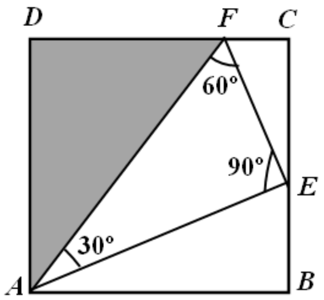
9 El resultado de la resta $3,\widehat{420} - 1,\widehat{383}$ es:

A) $\frac{55}{27}$ **B)** $\frac{57}{25}$ **C)** $\frac{78}{37}$ **D)** $\frac{23}{11}$ **E)** $\frac{225}{111}$

10 En un montón de cuatro cartas boca abajo tenemos dos oros y dos copas. Cogemos al azar dos de ellas. ¿Cuál es la probabilidad de que sean las dos copas?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{1}{5}$ **E)** $\frac{1}{6}$

11 En el cuadrado *ABCD*, de un centímetro de lado, inscribimos un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura. ¿Cuánto vale, en cm^2, el área del triángulo sombreado *ADF*?



A) $\frac{4-\sqrt{3}}{6}$ **B)** $\frac{2-\sqrt{3}}{6}$ **C)** $\frac{4-\sqrt{3}}{3}$
D) $\frac{2-\sqrt{3}}{3}$ **E)** $\frac{2+\sqrt{3}}{6}$

12 Si $a+b=4$ y $a^2+b^2=12$, ¿cuál es el valor de a^4+b^4?

A) 152 **B)** 150 **C)** 148 **D)** 140 **E)** 136

13 En una fiesta de veinte personas hay cinco que se conocen entre sí y quince que no conocen a nadie. Las personas que se conocen se saludan con un abrazo, y las que no se conocen con un apretón de manos. Si todas las personas de la fiesta se saludaron, ¿cuántos apretones de manos hubo?

A) 175 **B)** 180 **C)** 185 **D)** 190 **E)** 195

14 Construimos la sucesión 1, –2, 3, –4, 5… ¿Cuál es la media de los 2024 primeros términos?

A) –1 **B)** –0,5 **C)** 0 **D)** 0,5 **E)** 1

15 La niña Centésima tenía que multiplicar 66 por el decimal periódico $1,\widehat{ab}$; donde a y b son sus cifras decimales. La pobre se ha equivocado y lo ha multiplicado por el decimal exacto $1,ab$. Cuando se ha dado cuenta del error ha visto que el resultado le ha salido una décima menos que si lo hubiese hecho bien. ¿Cuánto vale la suma $a+b$?

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

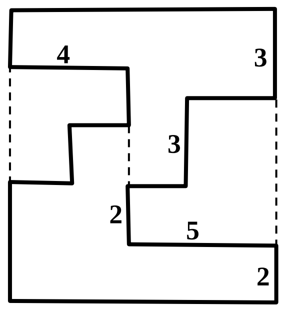
16 Alba está tirando monedas a una fuente rectangular que mide 6×12 metros. Después de tirar unas cuantas calcula el área de los triángulos cuyos vértices son las monedas. ¿Cuál es el menor número de monedas que debe lanzar para asegurarse de que hay algún triángulo con un área menor o igual a 18 m^2?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

17 Si $x = \frac{a}{b}$ con $b \neq 0$ y $a \neq b$, ¿cuánto vale $\frac{2a+b}{b-2a}$?

A) $\frac{2x+1}{1-2x}$ **B)** $\frac{2}{x+1}$ **C)** $\frac{x+1}{x-1}$ **D)** $\frac{2x}{2x-1}$ **E)** $\frac{x+1}{2}$

18 Si todos los ángulos de la figura son rectos, ¿cuánto mide su perímetro?



A) 38 **B)** 40 **C)** 48 **D)** 52 **E)** 56

19 ¿Para cuántos números enteros k el valor absoluto $|k^2 + 4k - 5|$ es un número primo?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

20 El triángulo *ABC* es rectángulo en *C*. La altura *CR* y la mediana *CM* dividen en tres partes iguales al ángulo *C*. Si el área del triángulo *CRM* vale *k*, ¿cuál es el área del triángulo *ABC*?

A) $4\sqrt{3}k$ **B)** $3\sqrt{3}k$ **C)** $3k$ **D)** $4k$ **E)** $5\sqrt{3}k$

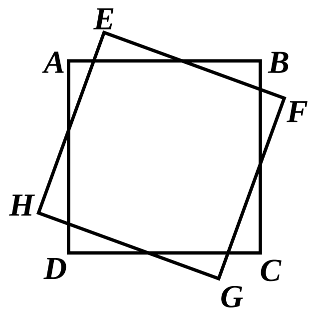
21 Si a y b cumplen que su producto $ab < 0$, entonces la recta $y = ax + b$ no puede pasar por el punto:

A) (–2024, 0) **B)** (–20, 24) **C)** (20, –24) **D)** (20, 24) **E)** (0, 2024)

22 De una sucesión sabemos que su primer término es el 0 y su segundo el 1. También sabemos que los términos siguientes son el resto que obtenemos al dividir la suma de los dos anteriores entre 8. ¿Qué término ocupa la posición 2024?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 5

23 Rotamos el cuadrado *ABCD* alrededor de su centro hasta obtener el cuadrado *EFGH*. Si el ángulo *EAB* mide 35º, ¿cuánto hemos rotado el cuadrado original?

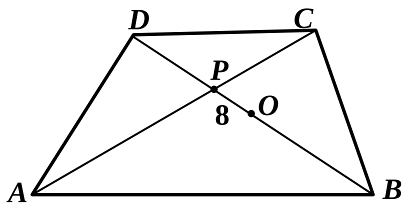


A) 15º **B)** 20º **C)** 25º **D)** 30º **E)** 35º

24 En una urna tenemos diez bolas numeradas del 1 al 10. Extraemos cuatro bolas una a una y sin reemplazamiento y vamos sumando los resultados que obtenemos. ¿Cuál es la probabilidad de que en algún momento esta suma sea igual a 6?

A) $\frac{11}{72}$ **B)** $\frac{1}{18}$ **C)** $\frac{19}{360}$ **D)** $\frac{13}{120}$ **E)** $\frac{2}{45}$

25 En el trapecio *ABCD* los lados *AB* y *CD* son paralelos, *BC* = *CD* y la diagonal *BD* es perpendicular al lado *AD*. Sea *O* el punto medio de la diagonal *BD* y *P* el punto de intersección de las diagonales del trapecio. Si *OP* mide 8 cm, ¿cuánto mide, en cm, la diagonal *BD*?



A) 40 **B)** 42 **C)** 44 **D)** 46 **E)** 48

	XXVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
	2ª FASE **13 de abril de 2024**
	NIVEL IV **BACHILLERATO**

¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones !!!

Escribe tu número de identificación, tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. **Presta mucha atención al formato de los números**.

No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

Cada respuesta ***correcta*** *te aportará*	**5** ***puntos***
Cada pregunta que dejes ***en blanco***	**1** ***punto***
Cada respuesta ***errónea***	**0** ***puntos***

LEE ATENTAMENTE CÓMO DEBES MARCAR LAS OPCIONES EN LA HOJA DE RESPUESTAS Y QUÉ HACER SI TE EQUIVOCAS.

Te sugerimos que vayas marcando tus soluciones en la hoja de la prueba y cuando tengas cuatro o cinco, las pases todas juntas a la hoja de respuestas.

CONVOCA
Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA
Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación, Ciencia y Universidades de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Divermates
Smartick

1 Sol ha tenido seis exámenes bastante complicados. La nota media del Ex1 y Ex2 ha sido 5,7; del Ex2 y Ex3 5,8; del Ex3 y Ex4 5,5; del Ex4 y Ex5 6,2; y del Ex5 y Ex6 6,8. ¿Cuál ha sido la nota media de Sol de esos seis exámenes?

A) 5 **B)** 5,4 **C)** 5,6 **D)** 5,8 **E)** 6

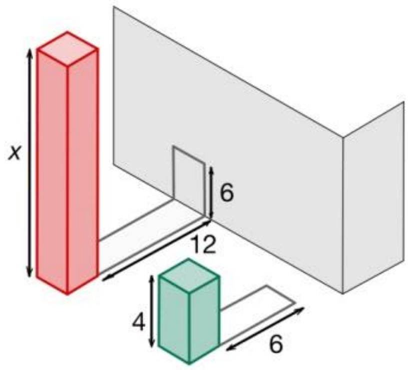
2 Tenemos las nueve cifras no nulas $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ que cumplen:

$$\boxed{a \cdot b \cdot c = c \cdot d \cdot e = e \cdot f \cdot g \qquad a < b \qquad c < e \qquad f < g}$$

¿Cuál es el valor de la suma $f + i + c + h + a$?

A) 25 **B)** 23 **C)** 20 **D)** 18 **E)** 16

3 En la figura se ven dos torres a la misma distancia de una pared. Iluminadas por el sol, la torre de 4 m de altura proyecta una sombra de 6 m de longitud sobre el suelo y la torre más alta reparte su sombra entre los 12 m que arroja sobre el suelo y los 6 m que sube por pared. ¿Qué altura, en metros, tiene la torre más alta?

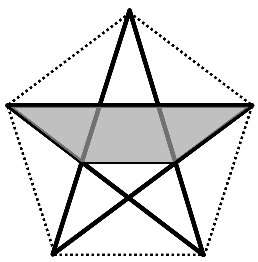


A) 6 **B)** 8 **C)** 10
D) 12 **E)** 14

4 Un problema con letras. Si a amigas podan un jardín de b m^2 en c días, ¿cuántos días tardarían d amigas en podar un jardín de e m^2?

A) $\frac{abd}{ce}$ **B)** $\frac{abe}{cd}$ **C)** $\frac{ace}{bd}$ **D)** $\frac{cde}{ab}$ **E)** $\frac{cbd}{ae}$

5 Con ayuda de un pentágono regular hemos dibujado una estrella de cinco puntas de área 60. ¿Qué área tiene el trapecio sombreado?



A) 20 **B)** 30 **C)** 32 **D)** 36 **E)** 40

6 Se tiene el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y + z + t = 14 \\ x - y + z - t = 2 \\ x + 2y + 4z + 8t = 41 \\ x - 2y + 4z - 8t = -7 \end{cases}$. El producto $x \cdot y \cdot z \cdot t$ es:

A) 60 **B)** 90 **C)** 120 **D)** 150 **E)** 180

7 En un bombo hay diez bolas numeradas con número par y diez con número impar. Sacamos dos de ellas. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de sus números sea par?

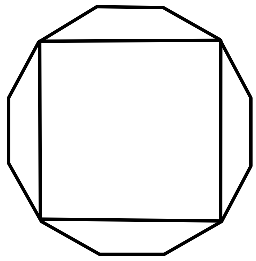
A) $\frac{10}{19}$ **B)** $\frac{9}{19}$ **C)** $\frac{2}{5}$ **D)** $\frac{3}{5}$ **E)** $\frac{1}{2}$

8 Don Retorcido ha multiplicado dos números de tres cifras y ha anotado el resultado: 123 453. Luego le ha intrigado el resultado, pero no se acordaba de los factores. Recordaba que los había apuntado en una libreta y, cuando la ha encontrado, ha visto que Comenúmeros se había zampado los números de en medio, y solo sabe que eran 3?7 y 3?9. ¿Cuánto suman los números desaparecidos?

A) 9 **B)** 8 **C)** 7 **D)** 6 **E)** 5

9 Si $2f(x) + f(1-x) = x^2$ para cualquier valor real de x, entonces $f(x)$ es:

A) $\frac{(1-x)^2}{4}$ **B)** $\frac{(1+x)^2}{3}$ **C)** $\frac{x^2+2x+2}{4}$ **D)** $\frac{x^2+2x-1}{3}$ **E)** $x^2 - \frac{1}{3}$

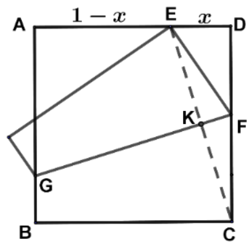


10 En el dodecágono regular de la figura hemos inscrito un cuadrado. Si el lado del dodecágono mide 1 cm, ¿cuál es el área, en cm^2, del cuadrado?

A) $4 + 2\sqrt{3}$ **B)** $8 - 2\sqrt{3}$ **C)** $\frac{6+3\sqrt{3}}{2}$ **D)** $\sqrt{27}$ **E)** $\frac{15}{2}$

11 Sabiendo que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2 = 385$, ¿cuál es la suma de todos los productos de dos números enteros diferentes desde el 1 al 10?

A) 1225 **B)** 1325 **C)** 1320 **D)** 1445 **E)** 1640

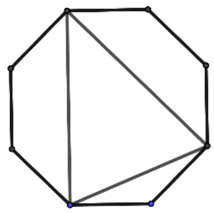


12 Doblamos una hoja cuadrada *ABCD* de lado 1 de forma que el vértice *C* vaya a parar al punto *E* en el lado *AD*. Si *DE* mide *x*, ¿cuánto mide *DF*?

A) $\frac{1-x^2}{2}$ **B)** $\frac{3-x^2}{2}$ **C)** $\frac{4-x^2}{3}$ **D)** $\frac{5-x^2}{4}$ **E)** $\frac{2+x^2}{2}$

13 Los números positivos *a*, *b* y *c* están en progresión geométrica y los sistemas $\begin{cases} x - y = a \\ x + 2y = a + c \end{cases}$ y $\begin{cases} 4y - x = a + b \\ 2x + y = 18 \end{cases}$ tienen la misma solución. El valor de *a* + *b* + *c* es:

A) 7 **B)** 13 **C)** 14 **D)** 21 **E)** 26



14 En un octógono regular inscribimos el triángulo isósceles de la figura. Si el lado del octógono mide 2 cm, el área, en cm^2, del triángulo es:

A) $2+4\sqrt{3}$ **B)** $4+2\sqrt{3}$ **C)** $4 + 3\sqrt{2}$ **D)** $3 + 4\sqrt{2}$ **E)** $4 + 2\sqrt{6}$

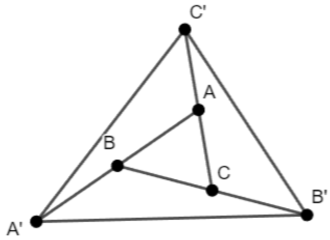
15 Siendo i la unidad imaginaria ($i^2 = -1$), $1 + i + i^2 + \cdots + i^{2024}$ es igual a:

A) 0 **B)** *i* **C)** 1 **D)** –*i* **E)** –1

16 De los siguientes números, ¿cuál tiene más divisores?

A) 5400 **B)** 7200 **C)** 8640 **D)** 9000 **E)** 9720

17 Alargando los lados del triángulo *ABC* de la figura construimos el *A´B´C´*. Si sabemos que *AC* = *AC´*, *BA* = *BA´* y *CB* = *CB´*, ¿cuál es el cociente entre las superficies $\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}$?

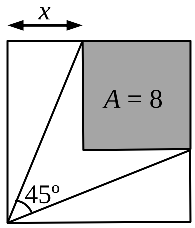


A) 7 **B)** 2 **C)** $\frac{3}{2}$ **D)** 5 **E)** $\frac{5}{2}$

18 Sabiendo que $f(3x-1)=2x^2+x+1$, ¿cuánto vale $f\big(f(5)\big)$?

A) 7 **B)** 31 **C)** 37 **D)** 122 **E)** 407

19 Tenemos dos cuadrados colocados como se indica en la figura. Sabemos que el área del cuadrado pequeño es 8 cm^2. La longitud, en cm, del segmento marcado con x es:

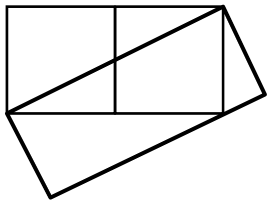


A) 1 **B)** $\sqrt{2}$ **C)** $\sqrt{3}$ **D)** 2 **E)** $\sqrt{5}$

20 Transformamos el punto *A*(4, 2) en el punto *B*(b_1, b_2) girándolo 30º alrededor del origen en sentido antihorario. La primera coordenada del punto *B* es:

A) $2+\sqrt{3}$ **B)** $2\sqrt{3}$ **C)** $2\sqrt{3}+1$ **D)** $2\sqrt{3}-1$ **E)** 1

21 El lado de los dos cuadrados de la figura mide 1.
El área del rectángulo inclinado mide:

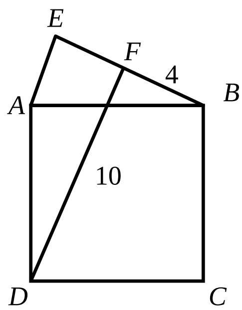


A) $\sqrt{5}$ **B)** $\frac{2}{\sqrt{5}}$ **C)** 2 **D)** $\frac{\sqrt{10}}{2}$ **E)** $\sqrt{10}$

22 Un guepardo corre a 90 km/h mientras que un caracol necesita 20 horas para recorrer un kilómetro. Si el guepardo corre durante 18 segundos, ¿cuántas horas necesitará el caracol para recorrer la misma distancia?

A) 9 **B)** 8 **C)** 7 **D)** 6 **E)** 5

23 Sobre el cuadrado *ABCD* se dibuja el triángulo rectángulo *AEB*, rectángulo en *E*. Trazamos el segmento *DF* paralelo a *AE*.
Si *BF* = 4 y *DF* = 10, la longitud de *AE* es:



A) 6 **B)** 5 **C)** 4 **D)** 3 **E)** 2

24 Sean $a, b \in \mathbb{R}, a > 1$ y $b \neq 0$. Si $ab = a^b$ y $\frac{a}{b} = a^{3b}$, entonces b^{-a} es:

A) $\frac{1}{2}$ **B)** 2 **C)** 4 **D)** 8 **E)** 16

25 Consideramos todos los números de la forma $p^2 - 1$ con p primo mayor que 3. ¿Cuál es el mayor número que divide a todos ellos?

A) 3 **B)** 4 **C)** 12 **D)** 15 **E)** 24

XXVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

TABLA DE SOLUCIONES (2ª Fase)

Nivel I		Nivel II		Nivel III		Nivel IV	
1	**D**	1	**A**	1	**B**	1	**E**
2	**D**	2	**B**	2	**E**	2	**C**
3	**B**	3	**E**	3	**A**	3	**E**
4	**C**	4	**E**	4	**C**	4	**C**
5	**B**	5	**A**	5	**B**	5	**B**
6	**A**	6	**A**	6	**A**	6	**C**
7	**C**	7	**B**	7	**D**	7	**B**
8	**D**	8	**A**	8	**C**	8	**A**
9	**E**	9	**D**	9	**A**	9	**D**
10	**A**	10	**C**	10	**E**	10	**A**
11	**A**	11	**B**	11	**A**	11	**C**
12	**C**	12	**E**	12	**E**	12	**A**
13	**B**	13	**A**	13	**B**	13	**D**
14	**C**	14	**B**	14	**B**	14	**C**
15	**A**	15	**E**	15	**A**	15	**C**
16	**D**	16	**B**	16	**C**	16	**C**
17	**E**	17	**A**	17	**A**	17	**A**
18	**B**	18	**A**	18	**E**	18	**C**
19	**C**	19	**E**	19	**D**	19	**D**
20	**B**	20	**B**	20	**D**	20	**D**
21	**D**	21	**D**	21	**A**	21	**C**
22	**A**	22	**D**	22	**E**	22	**A**
23	**E**	23	**C**	23	**B**	23	**D**
24	**A**	24	**B**	24	**A**	24	**E**
25	**E**	25	**A**	25	**E**	25	**E**