

COMBINATORIA

Enfoque *Problem-solving*

Gerard Romo Garrido



Toomates Cool·lección

Los documentos de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho.

Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "**licencias digitales**" con las que las editoriales pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo libro, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.

Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de licencias digitales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf".

El conocimiento no es una mercancía.

El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las editoriales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de unos libros de texto que actualmente son muy mediocres, y no mediante retorcidas técnicas comerciales.

Este documento se comparte bajo una licencia "**Creative Commons**": Se permite, se promueve y se fomenta cualquier uso, reproducción y edición de todos estos materiales siempre que sea sin ánimo de lucro y se cite su procedencia. Todos los documentos se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas. Se agradecerá cualquier observación, comentario o colaboración a

toomates@gmail.com

Actualmente, **Toomates Cool·lección** consta de los siguientes libros:

Geometría axiomática:

GA	Geometría Axiomática	pdf	1 2 ... 23 portada
PG	Problemas de Geometría	pdf	1 2 3 4 5 6 7

Problem-solving:

AR	Teoría de números	pdf	1 2
PT	Trigonometría	pdf	doc
DE	Desigualdades	pdf	doc
PC	Números complejos	pdf	doc
PA	Álgebra (en preparación)	pdf	doc
PC	Combinatoria (en preparación)	pdf	doc
PR	Probabilidad (en preparación)	pdf	doc

Libros de texto (En catalán)

AG	Àlgebra	pdf	1 2
FU	Funcions	pdf	doc
GN	Geometria analítica	pdf	1 2
TR	Trigonometria	pdf	doc
CO	Nombres complejos	pdf	doc
AL	Àlgebra Lineal ^{2n batxillerat}	pdf	doc
GL	Geometria Lineal ^{2n batxillerat}	pdf	doc
CI	Càlcul Infinitesimal ^{2n batxillerat}	pdf	1 2
PL	Programació Lineal ^{2n batxillerat}	pdf	doc

Recopilaciones de problemas

SE	Compendium OME 2005-2019	pdf	
SA	Compendium AIME 1983-2019	pdf	
ST	Compendium PAU TEC 1998-2019	pdf	
SC	Compendium PAU CCSS 1998-2019	pdf	
PM	Problemas de Matemáticas	pdf	doc

Versión de este documento: 28/03/2020

www.toomates.net

Índice

1 Las fórmulas básicas de la combinatoria. [→](#)

2 Los números combinatorios. [→](#)

Soluciones. [→](#)

Este documento está en proceso de desarrollo

1 Las fórmulas básicas de la combinatoria.

Número de partes de un conjunto A.

Sea A un conjunto con n elementos. El número de subconjuntos de A (incluyendo \emptyset y el propio A) es

$$2^n$$

Variaciones de n elementos tomados de k en k.

Las formas diferentes de ordenar n objetos en grupos de longitud k, por lo tanto importa el orden y no hay repetición.

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Permutaciones de n elementos.

Es un caso particular del anterior cuando $k = n$.

$$P_n = n!$$

Combinaciones de n elementos tomados de k en k.

Son variaciones sin repetición en las que no importa el orden de los elementos.

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Variaciones con repetición de n elementos tomados de k en k.

Son variaciones en las que se pueden repetir elementos.

$$VR_n^k = n^k$$

Combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k.

Son combinaciones en las que se pueden repetir elementos.

$$CR_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k}$$

1.1 MF

Pat compra cuatro rosquillas a escoger entre un amplio surtido de tres tipos: Glazé, Chocolate y Vainilla. ¿Cuántas selecciones diferentes puede hacer?

2 Los números combinatorios.

Definición. Los números combinatorios.

Dados $n \geq k \geq 0$, definimos el número combinatorio "n sobre k" como

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Donde $n! = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1$, y $0! = 1$

Propiedades de los números combinatorios.

- a) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad n \geq k \geq 1$
- b) $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1} \quad n \geq k \geq 1$
- c) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- d) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$
- e) Todos los números combinatorios son enteros.

Demostración.

a)

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} = \\ &= \frac{(n-k)(n-1)!}{(n-k)k!(n-1-k)!} + \frac{k(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} = \\ &= \frac{(n-k)(n-1)! + k(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} k \binom{n}{k} &= k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} = \\ &= n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n \binom{n-1}{k-1} \end{aligned}$$

Soluciones.

1.1

Estamos hablando de un caso de combinaciones con repetición de 3 elementos tomados de 4 en 4:

$$CR_3^4 = C_{3+4-1}^4 = C_6^4 = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4! 2!} = 15$$