COMPENDIUM PAU ILLES BALEARS

2004 -2023

Amb totes les solucions oficials

Gerard Romo Garrido

Toomates Coolección vol. 74

Toomates Coolección

Los libros de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "**licencias digitales**" con las que las editoriales pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo libro, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.

Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de licencias digitales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf". **El conocimiento no es una mercancía**.

El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las editoriales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de unos libros de texto que actualmente son muy mediocres, y no mediante retorcidas técnicas comerciales.

¡Libérate de la tiranía y mediocridad de las editoriales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos

Toomates Coolección **Problem Solving** (en español):

Geometría Axiomática , Problemas de Geometría 1 , Problemas de Geometría 2
Introducción a la Geometría , Álgebra , Teoría de números , Combinatoria , Probabilidad
Trigonometría , Desigualdades , Números complejos , Funciones

Toomates Coolección **Llibres de Text** (en catalán):

Nombres (Preàlgebra) , Àlgebra , Proporcionalitat , Mesures geomètriques , Geometria analítica
Combinatòria i Probabilitat , Estadística , Trigonometria , Funcions , Nombres Complexos ,
Àlgebra Lineal , Geometria Lineal , Càlcul Infinitesimal , Programació Lineal , Mates amb Excel

Toomates Coolección **Compendiums**:

PAU España: Cataluña TEC Cataluña CCSS Valencia Galicia País Vasco Baleares
PAU Internacional: Portugal A Portugal B Italia UK (A Level) IB Francia (BAC)
Canguro: ESP CAT FR USA UK AUS
USA: Mathcounts AMC 8 10 12 AIME USAJMO USAMO TSTST TST ELMO Putnam
España: OME OMEFL OMEC OMEA OMEM CDP
Internacional: IMO OMI IGO SMT INMO CMO REOIM Arquimede HMMT BMO
Pruebas acceso: ACM4 , CFGS , PAP
Pizzazz!: Book A Book B Book C Book D Book E Pre-Algebra Algebra
AHSME: Book 1 Book 2 Book 3 Book 4 Book 5 Book 6 Book 7 Book 8 Book 9

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales, para facilitar su edición.

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a **toomates@gmail.com**

¡No utilices una versión anticuada! Todos estos libros se revisan y amplían constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.

Consulta el **Catálogo de libros** Toomates Coolección en http://www.toomates.net/biblioteca.htm
Encontrarás muchos más materiales para el aprendizaje de las matemáticas en **www.toomates.net**
Visita mi **Canal de Youtube**: **https://www.youtube.com/c/GerardRomo**

Versión de este documento: **05/03/2024**

Índex.

Les solucions de les proves es presenten després dels respectius enunciats.

Fuentes:

https://www.examenesdepau.com/examenes/baleares/matematicas-aplicadas/2008/
https://www.ebaumatematicas.com/

Proves d'accés a la Universitat (2004)

Selectivitat (LOGSE)

Matemàtiques II

Model 1

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.

Opció A

1. Calculau la distància entre els plans $x + y - z + 5 = 0$ i $x + y - z - 1 = 0$.

2. Estudiau el sistema segons els valors de k (6 punts) i resoleu-lo quan $k = 1$ (4 punts).

$$\begin{aligned} &x + y + z = k \\ &x + (1+k)y + z = 2k \\ &x + y + (1+k)z = 0 \end{aligned}$$

3. Es considera la funció $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{e^x}$. Es demana:
   a) Calcular els extrems relatius d'aquesta funció (4 punts).
   b) Calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (3 punts).
   c) Fer una gràfica de la funció (3 punts).

4. Feu un dibuix de la regió limitada per les corbes $y = \sin x$ i $y = \cos x$ i les rectes $x = \pi/4$ i $x = \pi$ (4 punts). Calculau-ne l'àrea (6 punts).

Opció B

1. Determinau les asímptotes i els extrems relatius de la funció $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ (7 punts).

   Feu una gràfica de la funció (3 punts).

2. Estudiau la posició relativa de les rectes següents:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{2} \quad , \quad \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{5}$$

3. Enunciau el teorema de Rolle (4 punts). Demostrau mitjançant un exemple que la condició que la funció és derivable en tot punt de l'interval obert (a,b) no és supèrflua i no pot fallar la derivabilitat ni tan sols en un punt (6 punts).

4. Resoleu l'equació $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = 0$

Proves d’accés a la Universitat (2004)

Selectivitat (LOGSE)

Matemàtiques II

Criteris específics de correcció

Model 1

1. Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d’un apartat.

2. La qualificació final s’obté de dividir el total de punts (màxim 40) entre 4.

3. Es valoraran positivament la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l’alumne.

4. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Proves d'accés a la Universitat (2004)

Selectivitat (LOGSE)

Matemàtiques II

Solucions

Model 1

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.

Opció A

1. Calculau la distància entre els plans $x + y - z + 5 = 0$ i $x + y - z - 1 = 0$.

Solució: La distància és $2\sqrt{3}$.

2. Estudiau el sistema segons els valors de k (6 punts) i resoleu-lo quan k = 1 (4 punts).

$$\begin{aligned} x + y + z &= k \\ x + (1+k)y + z &= 2k \\ x + y + (1+k)z &= 0 \end{aligned}$$

Solució: És determinat si $k \neq 0$. Si $k = 0$, és indeterminat. Per a $k = 1$, la solució és $(1,1,-1)$.

3. Es considera la funció $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{e^x}$. Es demana:

   a) Calculau els extrems relatius d'aquesta funció (4 punts).

   b) Calculau $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ i $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (3 punts).

   c) Feu una gràfica de la funció (3 punts).

Solució: a) min (-1,0) , max (1, 4/e); b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

4. Feu un dibuix de la regió limitada per les corbes $y = \sin x$ i $y = \cos x$ i les rectes $x = \pi/4$ i $x = \pi$ (4 punts). Calculau-ne l'àrea (6 punts).

Solució: $A = 1 + \sqrt{2}$.

Opció B

1. Determinau les asímptotes i els extrems relatius de la funció $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ (7 punts). Feu una gràfica de la funció (3 punts).

Solució: Asímptotes: $x = -1$, $x = 1$, $y = x$. Extrems: max $(-\sqrt{3}, -3\sqrt{3}/3)$, min $(\sqrt{3}, 3\sqrt{3}/3)$.

2. Estudiau la posició relativa de les rectes següents:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{2} \quad , \quad \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{5}$$

Solució: S'encreuen.

3. Enunciau el teorema de Rolle (4 punts). Demostrau mitjançant un exemple que la condició que la funció és derivable en tot punt de l'interval obert (a, b) no és supèrflua i no pot fallar la derivabilitat ni tan sols en un punt (6 punts).

Solució: $f(x)=\begin{cases} x+1 & si \quad 0\le x\le 1/2 \\ -x+2 & si \quad 1/2\le x\le 1 \end{cases}$

4. Resoleu l'equació $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = 0$

Solució: x = 0 (doble), x = - 3.

Proves d'accés a la Universitat (2004)

Selectivitat (LOGSE)

Matemàtiques II

Model 3

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.

Opció A

1. Determinau el punt d'inflexió d'abscissa positiva de la corba d'equació $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ (3 punts). Calculau l'equació de la recta tangent a la corba en aquest punt (3 punts). Quina és la posició de la corba respecte a la recta tangent? (4 punts).

2. Digau per a quins valors de k el següent sistema és compatible determinat (6 punts). Com és el sistema per a $k = 2$? (4 punts).

$$\begin{array}{l} (1-k)x + (2k+1)y + (2k+2)z = k \\ kx + ky = 2k + 2 \\ 2x + (k+1)y + (k-1)z = 9 - 2k + k^2 \end{array}$$

3. Enunciau el teorema de Bolzano (4 punts). Donau un exemple que demostri que perquè es compleixi el teorema de Bolzano, necessitam la continuïtat de la funció a tot l'interval tancat [a, b] (6 punts).

4. Donades $\dfrac{x-a}{-2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$ i $\left.\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ 2x+z=1 \end{array}\right\}$, calculau el valor de a de tal manera que les rectes es tallin (6 punts). Determinau el punt de tall (4 punts).

Opció B

1. Es considera la funció f(x) = x(x – a)(x – b)(x – c), on $0 < a < b < c$. Demostrau que l'equació f '(x) = 0 té exactament tres arrels reals.

2. Calculau els punts de la recta $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{2}$ que equidisten dels plans $3x + 4y = 1$ i $4x - 3z = 1$.

3. Feu un dibuix del recinte limitat per les corbes $y = x^{100}$ i $y = x^{101}$ (4 punts). Calculau l'àrea d'aquest recinte (6 punts).

4. Donau totes les matrius A tals que $A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A$ (6 punts). D'aquestes matrius, determinau les que tenen la suma de tots els elements igual a 0 (4 punts).

Proves d'accés a la Universitat (2004)

Selectivitat (LOGSE)

Matemàtiques II

Criteris específics de correcció

Model 3

1. Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat.

2. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts (màxim 40) entre 4.

3. Es valoraran positivament la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

4. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Proves d'accés a la Universitat (2004)

Selectivitat (LOGSE)

Matemàtiques II

Solucions

Model 3

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.

Opció A

1. Determinau el punt d'inflexió d'abscissa positiva de la corba d'equació y = $\frac{1}{1+x^2}$ (3 punts). Calculau l'equació de la recta tangent a la corba en aquest punt (3 punts). Quina és la posició de la corba respecte a la recta tangent? (4 punts).

Solució: x = $\sqrt{1/3}$, y – ¾ = -9/8√3 (x - $\sqrt{1/3}$), "còncava-convexa".

2. Digau per a quins valors de k el següent sistema és compatible determinat (6 punts). Com és el sistema per a k = 2?

(1 – k)x + (2k + 1)y + (2k + 2)z = k
kx + ky = 2k + 2
2x + (k + 1)y + (k – 1)z = 9 – 2k + k^2

Solució: És determinat per a k ≠ 0, 1, 2. Per a k = 2 és incompatible.

3. Enunciau el teorema de Bolzano (4 punts). Donau un exemple que demostri que perquè es compleixi el teorema de Bolzano, necessitam la continuïtat de la funció a tot l'interval tancat [a,b] (6 punts).

Solució: $f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad 0 \le x < 1/2 \\ 1 & si \quad 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$

4. Donades $\frac{x-a}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{2}$ i $\left.\begin{matrix} x+y-z=0 \\ 2x+z=1 \end{matrix}\right\}$, calculau el valor de a de tal manera que les rectes es tallin. Determinau el punt de tall.

Solució: Es tallen per a a = 5/4. El punt de tall és (3/4 , -5/4 , -1/2).

Opció B

1. **Es considera la funció f(x) = x(x – a)(x – b)(x – c), on 0 < a < b < c. Demostrau que l'equació f′(x) = 0 té exactament tres arrels reals.**

<u>Solució</u>: Aplicar Rolle als intervals [0, a], [a, b], [b, c].

2. **Calculau els punts de la recta $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}$ que equidisten dels plans 3x + 4y = 1 i 4x – 3z = 1.**

<u>Solució</u>: Valors del paràmetre t = -5/16, t = ¼. P_1 = (-13/8, 1/16, -5/8), P_2 = (-1/2, 7/4, 1/2).

3. **Feu un dibuix del recinte limitat per les corbes y = x^{100} i y = x^{101} (4 punts). Calculau l'àrea d'aquest recinte (6 punts).**

<u>Solució:</u> A = 1 / 10302.

4. **Donau totes les matrius A tals que $A\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}A$ (6 punts). D'aquestes matrius, determinau les que tenen la suma de tots els elements igual a 0 (4 punts).**

<u>Solució</u>: A = $\begin{pmatrix}y+t & y\\ y & t\end{pmatrix}$ A = $\begin{pmatrix}t/3 & -2t/3\\ -2t/3 & t\end{pmatrix}$

Prova d'accés a la Universitat (2005)

Selectivitat

Matemàtiques II

Model 2

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.

Opció A

1. Es considera la funció f(x) = $\dfrac{x^2-3}{x^2-4}$. Es demana:

a) Trobar els intervals on aquesta funció és creixent i on és decreixent. (4 punts)
b) Calcular les asímptotes. (2 punts)
c) Fer una gràfica de la funció. (4 punts)

2. Es consideren els punts A = (3,0,0), B = (0,2,0) i C = (0,0,1). Es demana:

a) Trobar l'equació general del pla π que els conté. (5 punts)
b) Trobar l'equació de la recta perpendicular a π i que passa per l'origen de coordenades (2 punts). Trobau també el punt d'intersecció de la recta amb el pla (3 punts).

3. Resoleu el següent sistema d'equacions quan sigui compatible determinat

$$x+y+z=2$$
$$2x+3y+z=3$$
$$kx+10y+4z=11$$

4. Demostrau que l'equació $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ té una única arrel real.

Opció B

1. Calculau l'àrea del recinte limitat per la corba d'equació $y = x^2 + x + 1$ i la recta d'equació $y = x + 2$.

2. Trobau els extrems relatius de la funció f(x) = x^3e^{-x} (6 punts). Calculau també $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ i $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ (4 punts).

3. Calculau la distància del punt P = (–1,4,1) a la recta d'intersecció dels plans $x - 2y + z - 1 = 0$ i $2x + y - 3z - 2 = 0$.

4. Comprovau que la inversa de la matriu A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ és la matriu

$A^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ (4 punts). Utilitzau-la per resoldre el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (6 punts).

Prova d'accés a la Universitat (2005)

Selectivitat

Matemàtiques II

Criteris específics de correcció

Model 2

1. Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat.

2. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts (màxim 40) entre 4.

3. Es valoraran positivament la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

4. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Prova d’accés a la Universitat (2005)

Selectivitat

Matemàtiques II

Solucions

Model 2

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s’obté de dividir el total entre 4.

Opció A

1. Es considera la funció f(x) = $\frac{x^2-3}{x^2-4}$. Es demana:

a) Trobar els intervals on aquesta funció és creixent i on és decreixent. (4 punts)
b) Calcular les asímptotes. (2 punts)
c) Fer una gràfica de la funció. (4 punts)

***Solució*: Creixent a $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$. Decreixent a $(0,2)$, $(2,+\infty)$. Les asímptotes són: verticals $x = \pm 2$, horitzontals $y = 1$.**

2. Es consideren els punts A = (3,0,0), B = (0,2,0) i C = (0,0,1). Es demana:

a) Trobar l’equació general del pla π que els conté. (5 punts)
b) Trobar l’equació de la recta perpendicular a π i que passa per l’origen de coordenades (2 punts). Trobau també el punt d’intersecció de la recta amb el pla (3 punts).

***Solució*: El pla és $2x + 3y + 6z - 6 = 0$. La recta és $(x,y,z) = t(2,3,6)$. El punt és (12/49,18/49,36/49).**

3. Resoleu el següent sistema d’equacions quan sigui compatible determinat

$$x+y+z=2$$
$$2x+3y+z=3$$
$$kx+10y+4z=11$$

***Solució*: Si $k \neq 7$, el sistema és determinat. La solució és (0,1/2,3/2).**

4. Demostrau que l’equació $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ té una única arrel real.

***Solució*: La funció $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$ és contínua a R, $f(0) < 0$, $f(1) > 0$, per tant, té una arrel dins l’interval (0,1). Pel teorema de Rolle, no pot tenir més arrels reals, ja que $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$ no val 0 a cap punt.**

Opció B

1. **Calculau l'àrea del recinte limitat per la corba d'equació $y = x^2 + x + 1$ i la recta d'equació $y = x + 2$.**

***Solució*: L'àrea és 4/3.**

2. **Trobau els extrems relatius de la funció f(x) = $x^3 e^{-x}$ (6 punts). Calculau també $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ i $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ (4 punts).**

***Solució*: Màxim (3,27/e³). $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ i $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$**

3. **Calculau la distància del punt P = (–1,4,1) a la recta intersecció dels plans x – 2y + z – 1 = 0 i 2x + y – 3z – 2 = 0.**

***Solució*: La distància és $\sqrt{18}$**

4. **Comprovau que la inversa de la matriu A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ és la matriu**

$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ (4 punts). Utilitzau-la per resoldre el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (6 punts).

Solució: La solució del sistema és (2,1,0).

Prova d'accés a la Universitat (2005)

Selectivitat

Matemàtiques II

Model 1

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.

Opció A

1. Estudiau el sistema segons els valors de m (7 punts) i resoleu-lo per a m = –1 (3 punts).
$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ my + z &= 0 \\ x + (m+1)y + mz &= m+1 \end{aligned}$$
2. Trobau l'equació de la recta que talla perpendicularment les rectes x = y = z i x = y +1 = 2z – 2.
3. Es considera la funció $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^n}$, on n és un enter positiu. Es demana:
   a) Trobar els extrems relatius d'aquesta funció (5 punts).
   b) Calcular $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ (2 punts).
   c) Fer una gràfica de la funció en el cas n = 2 (3 punts).
4. Enunciau el teorema de Rolle (4 punts). Demostrau que la funció $f(x) = x^3 - x + a$ compleix la hipòtesi d'aquest teorema a l'interval [0,1] qualsevol que sigui el valor de a. Trobau el punt en el qual es compleix la tesi (6 punts).

Opció B

1. Una matriu quadrada es diu ortogonal si la seva inversa coincideix amb la transposada. Es demana:
   a) Demostrar que una matriu de la forma $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in R$, és ortogonal. (4 punts)
   b) Calcular x i y de manera que la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ sigui ortogonal. (6 punts)
2. Estudiau la posició relativa dels plans següents segons els valors de k (6 punts):
$$(k-2)x + y + (2k+1)z = 1$$
$$2x + (k-1)y - z = 0$$
   Trobau l'equació contínua de la recta d'intersecció dels plans en el cas k = –1 (4 punts).
3. Es considera la funció $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$. Es demana:
   a) Trobar els extrems relatius d'aquesta funció (5 punts).
   b) Calcular $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ (2 punts).
   c) Fer una gràfica de la funció (3 punts).
4. Feu un dibuix de la regió limitada per la corba y = sin x.cos x i les rectes x = 0, x = 3π/2, y = 0 (4 punts). Calculau-ne l'àrea (6 punts).

Prova d'accés a la Universitat (2005)

Selectivitat

Matemàtiques II

Criteris específics de correcció

Model 1

1. Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat.

2. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts (màxim 40) entre 4.

3. Es valoraran positivament la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

4. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Prova d'accés a la Universitat (2005)

Selectivitat

Matemàtiques II

Solucions

Model 1

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.

Opció A

1. Estudiau el sistema segons els valors de m (7 punts) i resoleu-lo per a m = –1 (3 punts).

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ my + z &= 0 \\ x + (m+1)y + mz &= m+1 \end{aligned}$$

Solució: Per a $m \neq 0,1$ el sistema és compatible determinat. Si m = 0, és indeterminat, i si m = 1, és incompatible. Per a m = –1, la solució és (1/2, 1/2,1/2).

2. Trobau l'equació de la recta que talla perpendicularment les rectes x = y = z i x = y +1 = 2z – 2.

Solució: (x,y,z) = (5/2, 5/2,5/2) + t(1/2,–1/2,0)

3. Es considera la funció $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^n}$, on n és un enter positiu. Es demana:
   a) Trobar els extrems relatius d'aquesta funció (5 punts).
   b) Calcular $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ (2 punts).
   c) Fer una gràfica de la funció en el cas n = 2 (3 punts).

Solució: Un màxim a $(e^{1/n}, 1/ne)$. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ i $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

4. Enunciau el teorema de Rolle (4 punts). Demostrau que la funció $f(x) = x^3 - x + a$ compleix la hipòtesi d'aquest teorema a l'interval [0,1] qualsevol que sigui el valor de a. Trobau el punt en el qual es compleix la tesi (6 punts).

Solució: La funció és derivable en tot punt i f(0) = f(1) = a. El punt és $x = \sqrt{1/3}$.

Opció B

1. Una matriu quadrada es diu ortogonal si la seva inversa coincideix amb la transposada. Es demana:
   a) Demostrar que una matriu de la forma $\begin{pmatrix} cos\,\alpha & -sin\,\alpha \\ sin\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in$ R, és ortogonal. (4 punts)
   b) Calcular x i y de manera que la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ sigui ortogonal. (6 punts)

Solució: Els valors són x = 0, y = ±1.

2. Estudiau la posició relativa dels plans següents segons els valors de k (6 punts):
   (k – 2)x + y + (2k + 1)z = 1
   2x + (k – 1)y – z = 0
   Trobau l'equació contínua de la recta intersecció dels plans en el cas k = –1 (4 punts).

Solució: Si k = 0, els plans són paral·lels (no coincidents). Si k ≠ 0, els plans es tallen en una recta. La recta d'intersecció en el cas k = –1 és $\frac{x+1/2}{-3/4} = \frac{y+1/2}{-5/4} = \frac{z-0}{1}$.

3. Es considera la funció $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$. Es demana:
   a) Trobar els extrems relatius d'aquesta funció (5 punts).
   b) Calcular $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ *i* $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ (2 punts).
   c) Fer una gràfica de la funció (3 punts).

Solució: Mínim (0,0), màxim (2,4/e^2). $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ *i* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

4. Feu un dibuix de la regió limitada per la corba y = sin x.cos x i les rectes x = 0, x = 3π/2, y = 0 (4 punts). Calculau-ne l'àrea (6 punts).

Solució: Àrea = 3/2.

Prova d'accés a la Universitat (2006)

Selectivitat

Matemàtiques II

Model 3

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.

Opció A

1. Digau per a quins valors de k el següent sistema és compatible indeterminat (6 punts) i resoleu-lo en aquest cas (4 punts).
   $kx + (1 - k)y + (2 - k)z = 0$
   $x + y + z = 0$
   $kx + y + kz = 0$

2. Donat un cub (hexàedre regular) de costat 1 dm, es considera una de les seves diagonals i la diagonal d'una de les seves cares de manera que no tinguin (les diagonals) cap punt en comú. Calculau la distància entre les diagonals.
   Indicació: dibuixau el cub amb un vèrtex a l'origen de coordenades i els vèrtexs contigus sobre els eixos de coordenades.

3. Demostrau que la corba d'equació $y = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ no té cap punt d'inflexió (3 punts). Cercau l'equació de la recta tangent a la corba en el punt (x_0, y_0) on x_0 és el valor de x que fa mínima y'' (7 punts).

4. Cercau els extrems relatius de la funció $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{e^x}$ (4 punts). Calculau $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ (2 punts). Feu una gràfica aproximada d'aquesta funció (4 punts).

Opció B

1. Es considera la funció $f(x) = ae^{x^2+bx+c}$, $a > 0$. Calculau els paràmetres a,b,c sabent que la funció té un mínim relatiu en el punt (1,a) i f(0) = 1.

2. De totes les rectes que passen pel punt P = (0,2,–1), cercau la que talla les rectes d'equacions (x,y,z) = (1,1,2) + t(2,–1,0) i (x,y,z) = (0,1,1) + s(–3,1,2).

3. Calculau l'àrea de la regió limitada per les corbes $y = x^5 + x^2 + 1$, $y = x^5 - x + 1$.

4. Discutiu el rang de la matriu $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ segons els valors de k (4 punts).

   Resoleu el sistema $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ quan sigui compatible determinat (6 punts).

Prova d'accés a la Universitat (2006)

Selectivitat

Matemàtiques II

Criteris específics de correcció

Model 3

1. Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat.

2. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts (màxim 40) entre 4.

3. Es valoraran positivament la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

4. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Prova d'accés a la Universitat (2006)

Selectivitat

Matemàtiques II

Solucions

Model 3

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.

Opció A

1. **Digau per a quins valors de k el següent sistema és compatible indeterminat (6 punts) i resoleu-lo en aquest cas (4 punts).**

$$\begin{aligned} kx + (1-k)y + (2-k)z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ kx + y + kz &= 0 \end{aligned}$$

***Solució*: És indeterminat per a k = 1. La solució és (–z,0,z) $z \in R$.**

2. **Donat un cub (hexàedre regular) de costat 1 dm, es considera una de les seves diagonals i la diagonal d'una de les seves cares de manera que no tinguin (les diagonals) cap punt en comú. Calculau la distància entre les diagonals. Indicació: dibuixau el cub amb un vèrtex a l'origen de coordenades i els vèrtexs contigus sobre els eixos de coordenades.**

***Solució*: la distància és $\sqrt{1/6} \approx 0.41$ dm.**

3. **Demostrau que la corba d'equació $y = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ no té cap punt d'inflexió (3 punts). Cercau l'equació de la recta tangent a la corba en el punt (x_0, y_0) on x_0 és el valor de x que fa mínima y'' (7 punts).**

***Solució*: no té punts d'inflexió perquè $y'' = 12x^2 - 6x + 2$ no val mai zero. El valor de x que minimitza y'' és $x_0 = 1/4$. L'equació de la tangent és** $y - \frac{205}{256} = -\frac{5}{8}(x - \frac{1}{4})$

4. **Cercau els extrems relatius de la funció $f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$ (4 punts). Calculau $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ i $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ (2 punts). Feu una gràfica aproximada d'aquesta funció (4 punts).**

***Solució*: mínim (–1,0), màxim (1,4/e).** $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Opció B

1. Es considera la funció $f(x) = ae^{x^2+bx+c}$, a > 0. Calculau els paràmetres a,b,c sabent que la funció té un mínim relatiu en el punt (1,a) i f(0) = 1.

***Solució*: a = 1/e, b = –2, c = 1.**

2. De totes les rectes que passen pel punt P = (0,2,–1), cercau la que talla les rectes d'equacions (x,y,z) = (1,1,2) + t(2,–1,0) i (x,y,z) = (0,1,1) + s(–3,1,2).

***Solució*: la recta és** $\dfrac{x-0}{12} = \dfrac{y-2}{-5} = \dfrac{z+1}{-6}$

3. Calculau l'àrea de la regió limitada per les corbes y = x^5 + x^2 + 1, y = x^5 – x + 1.

***Solució*: l'àrea és 1/6.**

4. Discutiu el rang de la matriu $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ **segons els valors de k (4 punts).**

Resoleu el sistema $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **quan sigui compatible determinat (6 punts).**

Solució: si k ≠ $\dfrac{-1 \pm \sqrt{61}}{6}$, A té rang 3. Si k = $\dfrac{-1 \pm \sqrt{61}}{6}$, el rang de A és 2. El sistema és determinat quan k ≠ $\dfrac{-1 \pm \sqrt{61}}{6}$, la solució és (0,1,0).

Prova d'accés a la Universitat (2006)

Selectivitat

Matemàtiques II

Model 1

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.

Opció A

1. Es consideren les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculau la matriu X que verifica: AX + B = I, on I representa la matriu identitat.

2. Estudiau, segons els valors del paràmetre k, la posició relativa de les rectes
$x - k = \dfrac{y+1}{2k-1} = \dfrac{z}{2}$, $\dfrac{x}{k+1} = \dfrac{y-2}{-1} = z + 2$

3. Demostrau raonadament que l'equació $x^2 = x\sin x + \cos x$ té exactament dues arrels dins l'interval $[-\pi , \pi]$.

4. Una funció polinòmica de tercer grau, quants extrems relatius pot tenir com a màxim? (3 punts) Què podem dir dels punts d'inflexió? (3 punts) Raonau les respostes i donau exemples aclaridors (4 punts).

Opció B

1. Calculau m de manera que el sistema homogeni
$2x - my + 4z = 0$
$x + y + 7z = 0$
$mx - y + 13z = 0$
tingui solucions diferents de la trivial (4 punts) i resoleu-lo en aquest cas (6 punts).

2. Cercau l'equació implícita (o general) del pla que conté la recta $(x,y,z) = (1,2,-1) + k(-1,1,2)$ i és paral·lel a la recta que passa pels punts $A = (0,1,2)$ i $B = (1,-1,1)$ (6 punts). Calculau la distància de l'origen de coordenades a aquest pla (4 punts).

3. Es considera la funció $f(x) = e^x(x - k)$. Demostrau que per a qualsevol valor del paràmetre k, la funció presenta un únic extrem relatiu (6 punts). Feu una gràfica de la funció si sabem que $f(0) = 1$ (4 punts).

4. Calculau l'àrea de la regió limitada per la corba $y = x(x-1)(x-2)$ i la recta $y = 0$ (6 punts). Feu un dibuix d'aquesta regió (4 punts).

Prova d'accés a la Universitat (2006)

Selectivitat

Matemàtiques II

Criteris específics de correcció

Model 1

1. Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat.

2. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts (màxim 40) entre 4.

3. Es valoraran positivament la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

4. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Prova d'accés a la Universitat (2006)

Selectivitat

Matemàtiques II

Solucions

Model 1

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.

Opció A

1. Es consideren les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculau la matriu X que verifica: AX + B = I, on I representa la matriu identitat.

Solució: $X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

2. Estudiau, segons els valors del paràmetre k, la posició relativa de les rectes

$$x - k = \frac{y+1}{2k-1} = \frac{z}{2} \quad , \quad \frac{x}{k+1} = \frac{y-2}{-1} = z + 2$$

Solució: Si k ≠ –1/2, –3, les rectes es creuen. Si k = –1/2, són paral·leles. Si k = –3, es tallen en un punt.

3. Demostrau raonadament que l'equació $x^2 = x\sin x + \cos x$ té exactament dues arrels dins l'interval [–π , π].

Solució: té una arrel dins (–π , 0) i una dins (0 , π). La derivada s'anul·la només a x = 0.

4. Una funció polinòmica de tercer grau, quants extrems relatius pot tenir com a màxim? (3 punts) Què podem dir dels punts d'inflexió? (3 punts) Raonau les respostes i donau exemples aclaridors (4 punts).

Solució: pot tenir dos extrems relatius com a màxim. Té un únic punt d'inflexió.

Opció B

1. Calculau m de manera que el sistema homogeni

2x – my + 4z = 0

x + y + 7z = 0

mx – y + 13z = 0

tingui solucions diferents de la trivial (4 punts) i resoleu-lo en aquest cas (6 punts).

Solució: per a m = 3 i m = –12/7 el sistema té solucions no trivials. Per a m = 3 la solució és (–5z , –2z , z), z∈R. Per a m = –12/7, la solució és (28z , –35z , z), z∈R.

2. Cercau l'equació implícita (o general) del pla que conté la recta $(x,y,z) = (1,2,-1) + k(-1,1,2)$ i és paral·lel a la recta que passa pels punts $A = (0,1,2)$ i $B = (1,-1,1)$ (6 punts). Calculau la distància de l'origen de coordenades a aquest pla (4 punts).

Solució: el pla és $3x + y + z - 4 = 0$. La distància és $\dfrac{4}{\sqrt{11}} \approx 1.20$.

3. Es considera la funció $f(x) = e^x(x - k)$. Demostrau que per a qualsevol valor del paràmetre k, la funció presenta un únic extrem relatiu (6 punts). Feu una gràfica de la funció si sabem que $f(0) = 1$ (4 punts).
Solució: té un mínim a $(k-1, -e^{k-1})$. Si $f(0)=1$, ha de ser $k = -1$.

4. Calculau l'àrea de la regió limitada per la corba $y = x(x-1)(x-2)$ i la recta $y = 0$ (6 punts). Feu un dibuix d'aquesta regió (4 punts).
Solució: l'àrea és ½.

Prova d'accés a la Universitat (2007)

Selectivitat

Matemàtiques II

Model 1

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.

Opció A

1. Discutiu el següent sistema segons els valors del paràmetre k (6 punts) i resoleu-lo quan k = –1 (4 punts)

$x + y + z = k$
$(1+k)x + y + z = 2k$
$x + (1+k)y + z = 1$

2. Es considera el triangle de vèrtexs A = (0,0,1), B = (2,0,0) i C = (1,1,1). Quina és la intersecció dels (tres) plans que passant per cada vèrtex són perpendiculars a la recta determinada pels altres dos vèrtexs?

3. Demostrau que la corba f(x) = x – 2cos x té un punt d'inflexió a l'interior de l'interval [0 , π] i trobau l'equació de la recta tangent a la corba en aquest punt (7 punts). Feu un dibuix en un entorn del mateix punt (3 punts).

4. D'una funció y = f(x) , x > –1, sabem que té per derivada $y' = \frac{a}{1+x}$, on *a* és una constant. Determinau la funció si, a més, sabem f(0) = 1 i f(1) = –1 (6 punts). Feu una gràfica aproximada (4 punts).

Opció B

1. Discutiu el rang de la matriu següent segons els valors del paràmetre k

$A = \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \\ 1 & k & k \\ 1 & k^2 & k^2 \end{pmatrix}$ (4 punts). Resoleu el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ en el cas k = –1 (6 punts).

2. Siguin les rectes $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$ i la determinada per la intersecció dels plans x + y – z = 1, 2x – y + z = 2. Calculau l'equació del pla que passa per l'origen i és paral·lel a les dues rectes (6 punts). Calculau també l'equació de la recta que passa per (1,1,1) i és perpendicular al pla trobat (4 punts).

3. L'anul·lació de la primera derivada és una condició necessària perquè una funció (derivable) presenti un extrem local. Aquesta condició, però, no és suficient. Demostrau amb un exemple la segona afirmació (4 punts). En aquest mateix context, què podem dir sobre l'existència d'un punt d'inflexió? (6 punts).

4. Calculau l'àrea del recinte limitat per la corba y = x – 2sin x i les rectes y = 0, x = – π/3, x = π/3 (7 punts). Feu un dibuix aproximat del recinte (3 punts).

Prova d'accés a la Universitat (2007)

Selectivitat

Matemàtiques II

Criteris específics de correcció

Model 1

1. Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat.

2. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts (màxim 40) entre 4.

3. Es valoraran positivament la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

4. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Prova d’accés a la Universitat (2007)

Selectivitat

Matemàtiques II

Solucions

Model 1

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s’obté de dividir el total entre 4.

Opció A

1. Discutiu el següent sistema segons els valors del paràmetre k (6 punts) i resoleu-lo quan k = –1 (4 punts)

$x + y + z = k$
$(1+k)x + y + z = 2k$
$x + (1+k)y + z = 1$

Solució: Si $k \neq 0$, el sistema és compatible determinat. Si k = 0, és incompatible. En el

cas k = -1, la solució del sistema és (1,-2,0).

2. Es considera el triangle de vèrtexs A = (0,0,1), B = (2,0,0) i C = (1,1,1). Quina és la intersecció dels (tres) plans que passant per cada vèrtex són perpendiculars a la recta determinada pels altres dos vèrtexs?

Solució: La intersecció dels tres plans és la recta (x,y,z) = (1/2,3/2,0) + t(1,-1,2).

3. Demostrau que la corba f(x) = x – 2cos x té un punt d’inflexió a l’interior de l’interval [0 , π] i trobau l’equació de la recta tangent a la corba en aquest punt (7 punts). Feu un dibuix en un entorn del mateix punt (3 punts).

Solució: El punt d’inflexió és (π/2, π/2). L’equació de la recta tangent és y – π/2 = 3(x – π/2). La corba passa de còncava (y’’>0) a convexa (y’’<0).

4. D’una funció y = f(x) , x > –1, sabem que té per derivada $y' = \frac{a}{1+x}$, on *a* és una constant. Determinau la funció si, a més, sabem f(0) = 1 i f(1) = –1 (6 punts). Feu una gràfica aproximada (4 punts).

Solució: La funció és $y = \frac{-2}{\ln 2}\ln(1+x) + 1$

Opció B

1. Discutiu el rang de la matriu següent segons els valors del paràmetre k

$A = \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \\ 1 & k & k \\ 1 & k^2 & k^2 \end{pmatrix}$ (4 punts). Resoleu el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ en el cas k = –1 (6 punts).

Solució: Si $k \neq 0,1$*, llavors r = 3. Si k = 0 o k = 1, llavors r = 1. En el cas k = -1, el sistema és compatible determinat, i la solució és* $\left(\frac{b+c}{2}, \frac{c-a}{2}, \frac{a-b}{2}\right)$

2. Siguin les rectes $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$ i la determinada per la intersecció dels plans x + y – z = 1, 2x – y + z = 2. Calculau l'equació del pla que passa per l'origen i és paral·lel a les dues rectes (6 punts). Calculau també l'equació de la recta que passa per (1,1,1) i és perpendicular al pla trobat (4 punts).
Solució: El pla és x – 2y – z = 0. La recta és (x,y,z) = (1,1,1) + t(1,-2,-1)

3. L'anul·lació de la primera derivada és una condició necessària perquè una funció (derivable) presenti un extrem local. Aquesta condició, però, no és suficient. Demostrau amb un exemple la segona afirmació (4 punts). En aquest mateix context, què podem dir sobre l'existència d'un punt d'inflexió? (6 punts).
Solució: La funció $y = x^3$ té derivada 0 a x = 0 i no té extrem local a x = 0. L'anul·lació de la segona derivada és una condició necessària perquè una funció (prou derivable) presenti un punt d'inflexió. Aquesta condició, però, no és suficient: la funció $y = x^4$ té derivada segona 0 a x = 0 i no té punt d'inflexió a x = 0.

4.Calculau l'àrea del recinte limitat per la corba y = x – 2sin x i les rectes y = 0, x = – π/3, x = π/3 (7 punts). Feu un dibuix aproximat del recinte (3 punts).
Solució: La funció és imparella i a l'interval [– π/3 , x = π/3] és (estrictament) decreixent. L'àrea és $A = 2\left(1 - \frac{\pi^2}{18}\right) \approx 0.90$.

Prova d'accés a la Universitat (2007)

Selectivitat

Matemàtiques II

Model 3

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.

Opció A

1. A cada matriu real $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ li associam el polinomi p(x) = x^2 – (a+d)x + $|A|$, on $|A|$ indica el determinant de A. Direm que p(x) és el polinomi característic de la matriu A. Es demana:
   1) Trobar una matriu que tingui com a polinomi característic p(x) = x^2 + x + 1. Quantes matrius hi ha amb aquest mateix polinomi característic? (4 punts)
   2) Si A té inversa, demostrau que el polinomi característic de la inversa, A^{-1}, és $p(x)=x^2-\frac{a+d}{|A|}x+\frac{1}{|A|}$ (6 punts)

2. Calculau l'equació de la recta que passa pel punt P = (2, –1,1) i talla perpendicularment la recta

$$\frac{x-3}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{2}$$

3. Es considera la funció $y=\frac{(x+1)^2}{e^x}$. Trobau-li els extrems locals i els punts d'inflexió (6 punts). Feu una gràfica aproximada d'aquesta funció (4 punts).

4. Es consideren les corbes y = x^2 – 1 i $y=\sqrt{x+1}$. Trobau l'equació de la recta tangent a la primera corba en el punt de tall amb l'altra, d'abscissa positiva.

Opció B

1. Discutiu el sistema següent (6 punts) i resoleu-lo en el cas k = 1 (4 punts)
x + ky + 2z = 1
x + (2k–1)y + 3z = 1
x + ky + (k+3)z = 2k–1

2. Calculau els punts de la recta $\frac{x+2}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$ que estan a distància 1 del pla x + y + z = 0.

3. La recta y = 2x – 1 és una asímptota obliqua de la funció $f(x)=\frac{2x^2-1}{x+k}$. Trobau el valor de k (7 punts) i, si escau, els extrems locals (3 punts).

4. Utilitzant els teoremes de Bolzano i Rolle, demostrau que les corbes y = cos x i $y=\sqrt{x}$ es tallen en un únic punt.

Prova d'accés a la Universitat (2007)

Selectivitat

Matemàtiques II

Criteris específics de correcció

Model 3

1. Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat.

2. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts (màxim 40) entre 4.

3. Es valoraran positivament la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

4. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Prova d'accés a la Universitat (2007)

Selectivitat

Matemàtiques II

Solucions

Model 3

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.

Opció A

1. A cada matriu real $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ li associam el polinomi $p(x) = x^2 - (a+d)x + |A|$, on $|A|$ indica el determinant de A. Direm que p(x) és el polinomi característic de la matriu A. Es demana:

   1) Trobar una matriu que tingui com a polinomi característic $p(x) = x^2 + x + 1$. Quantes matrius hi ha amb aquest mateix polinomi característic? (4 punts)
   2) Si A té inversa, demostrau que el polinomi característic de la inversa, A^{-1}, és $p(x) = x^2 - \frac{a+d}{|A|}x + \frac{1}{|A|}$ (6 punts)

Solució: La matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ té polinomi característic $x^2 + x + 1$. Hi ha infinites

matrius amb aquest polinomi associat.

2. Calculau l'equació de la recta que passa pel punt P = (2, –1,1) i talla perpendicularment la recta

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$$

Solució: La recta és (x,y,z) = (2, –1,1) + t(17,–27, –12)

3. Es considera la funció $y = \frac{(x+1)^2}{e^x}$. Trobau-li els extrems locals i els punts d'inflexió (6 punts). Feu una gràfica aproximada d'aquesta funció (4 punts).

Solució: Max(1,4/e^x), Min(-1,0), PI1 = (1+$\sqrt{2}$, $\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{e^{1+\sqrt{2}}}$), PI2 = (1 - $\sqrt{2}$, $\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{e^{1-\sqrt{2}}}$)

4. Es consideren les corbes $y = x^2 - 1$ i $y = \sqrt{x+1}$. Trobau l'equació de la recta tangent a la primera corba en el punt de tall amb l'altra, d'abscissa positiva.

Solució: El punt de tall d'abscissa positiva és $(\Phi,\ \Phi^2-1)$ *on* Φ *és el nombre d'or,* $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. *L'equació és* $y-(\Phi^2-1) = (1+\sqrt{5})\,(x-\Phi)$

Opció B

1. Discutiu el sistema següent (6 punts) i resoleu-lo en el cas k = 1 (4 punts)

x + ky + 2z = 1
x + (2k–1)y + 3z = 1
x + ky + (k+3)z = 2k–1

Solució: Si $k \neq \pm 1$, el sistema és compatible determinat. Si k = 1, el sistema és indeterminat i si k = -1, el sistema és incompatible. Per a k = 1 les solucions són de la forma (x,1-x,0)

2. Calculau els punts de la recta $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ que estan a distància 1 del pla x + y + z = 0.

Solució: Corresponen als punts de paràmetres $t = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$, $t = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

3. La recta y = 2x – 1 és una asímptota obliqua de la funció $f(x) = \frac{2x^2-1}{x+k}$. Trobau el valor de k (7 punts) i, si escau, els extrems locals (3 punts).

Solució: El valor de a és 2, i el de b, 1/2. No té extrems locals.

4. Utilitzant els teoremes de Bolzano i Rolle, demostrau que les corbes y = cos x i $y = \sqrt{x}$ es tallen en un únic punt.

Solució: La funció $f(x) = \cos x - \sqrt{x}$ té un zero a l'interval (0,π/2) i la derivada $f'(x) = -\sin x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ *no s'anul·la en aquest interval.*

Prova d'accés a la Universitat (2008)

Matemàtiques II

Model 1

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.
Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.
Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Opció A

1. Què és la inversa d'una matriu quadrada? (3 punts). Calculau, si escau, la inversa de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (7 punts)

2. Es consideren les rectes $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{3} = z-2$, $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{-3}$.
a) Demostrau que es creuen (6 punts)
b) Determinau un vector director de la recta perpendicular comuna a les dues rectes (4 punts)

3. Es considera la funció $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$
a) Calculau $Lim_{x\to 1} f(x)$, $Lim_{x\to\infty} f(x)$
b) Demostrau que és creixent a l'interval obert (–1,1)
c) Determinau els extrems relatius
d) Feu un dibuix de la funció

4. Es considera la funció $A(t) = \int_0^t \frac{1}{1+x}dx$, t>0. Feu una interpretació geomètrica (en termes d'àrea) d'aquesta funció (3 punts). Calculau una fórmula més explícita per a la funció A(t) i representau-la gràficament (7 punts)

Opció B

1. Discutiu el següent sistema (5 punts) i resoleu-lo quan sigui compatible (5 punts):
2x + 2y – 4z = 1
mx + y + z = 0
x + y + 3z = –1
2. Es consideren els punts A = (1, –1,1), B = (2,3,1) i C = (1,2,0). Es demana:
a) Demostrar que determinen un triangle (3 punts)
b) Determinar els punts d'intersecció amb els eixos de coordenades del pla determinat per aquest triangle (7 punts)

3. Es considera la funció $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$
a) Calculau $Lim_{x\to -1} f(x)$, $Lim_{x\to 1} f(x)$, $Lim_{x\to\infty} f(x)$
b) Demostrau que no té extrems relatius
c) Demostrau que té un punt d'inflexió a x = 0
d) Feu un dibuix de la funció

4. Calculau l'àrea del recinte limitat per la corba $y = \frac{1}{1+x^2}$ i les rectes y = 0 , x = –1 , x = 1 (7 punts). Feu un dibuix aproximat del recinte (3 punts).

Prova d'accés a la Universitat (2008)

Matemàtiques II

Criteris específics de correcció

Model 1

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. En aquelles qüestions on hi ha apartats sense puntuar se suposarà que cadascun té igual valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb l'aplicació del 50% sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Opció A

1. Què és la inversa d'una matriu quadrada? (3 punts). Calculau, si escau, la inversa de la matriu $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$ (7 punts)

Solució: $A^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 4\\ 2 & 3 & -1\\ -2 & 3 & 1\end{pmatrix}$

Criteris: Si no s'arriba al resultat final correcte, màxim 5 punts dels 7 possibles.

2. Es consideren les rectes $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{3}=z-2$, $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-1}{-3}$.

a) Demostrau que es creuen (6 punts)

b) Determinau un vector director de la recta perpendicular comuna a les dues rectes (4 punts)

Solució: a) det (PQ,u,v) ≠ 0, les rectes es creuen. b) $u\wedge v = (-13,12,3)$

Criteris: b) Si no s'arriba al resultat final correcte, màxim 2 punts

3. Es considera la funció $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$

a) Calculau $Lim_{x\to 1} f(x)$, $Lim_{x\to\infty} f(x)$

b) Demostrau que és creixent a l'interval obert (–1,1)

c) Determinau els extrems relatius

d) Feu un dibuix de la funció

Solució: a) $Lim_{x\to 1} f(x)=+\infty$, $Lim_{x\to\infty} f(x)=0$. b) $f'(x)=\dfrac{-x-1}{(x-1)^3}$ > 0 a l'interval (-1,1). c) És decreixent a (-∞,-1) i a (1,+∞) i és creixent a (-1,1). d) Hi ha dues asímptotes: x = 1 , y = 0.

Criteris: 2.5 punts per apartat. d) s'ha de valorar especialment la repercussió gràfica dels resultats obtinguts als apartats anteriors.

4. Es considera la funció $A(t)=\int_0^t \frac{1}{1+x}dx$, t>0. Feu una interpretació geomètrica (en termes d'àrea) d'aquesta funció (3 punts). Calculau una fórmula més explícita per a la funció A(t) i representau-la gràficament (7 punts)
Solució: A(t) = ln (1 + t) , t>0
Criteris: S'ha de valorar fins a 3 punts la representació gràfica.

Opció B
1. Discutiu el següent sistema (5 punts) i resoleu-lo quan sigui compatible (5 punts):
2x + 2y – 4z = 1
mx + y + z = 0
x + y + 3z = –1
Solució: Si m ≠ 1, el sistema és compatible determinat. Si m = 1, és incompatible. La solució és $\left(\frac{-2}{5-5m}, \frac{m+3}{10-10m}, \frac{3m-3}{10-10m}\right)$
Criteris: Si no s'arriba a la solució correcta, s'ha de valorar fins a 3 punts (sobre 5).

2. Es consideren els punts A = (1, –1,1), B = (2,3,1) i C = (1,2,0). Es demana:
a) Demostrar que determinen un triangle (3 punts)
b) Determinar els punts d'intersecció amb els eixos de coordenades del pla determinat per aquest triangle (7 punts)
Solució: a) Els vectors AB = (1,4,0) i AC = (0,3,-1) són linealment independents. b) El pla és 4x – y – 3z – 2 = 0. Els punts de tall són X = (1/2,0,0) , Y = (0,-2,0) , Z = (0,0,-2/3)
Criteris: Si no es donen correctament els tres punts, s'ha de valorar l'apartat b) amb 5 punts com a màxim.

3. Es considera la funció $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$
a) Calculau $Lim_{x\to -1} f(x)$, $Lim_{x\to 1} f(x)$, $Lim_{x\to\infty} f(x)$
b) Demostrau que no té extrems relatius
c) Demostrau que té un punt d'inflexió a x = 0
d) Feu un dibuix de la funció
Solució: a) $Lim_{x\to -1} f(x)=\mp\infty$, $Lim_{x\to 1} f(x)=\mp\infty$, $Lim_{x\to\infty} f(x)=0$.
b) $f'(x)=\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}<0$ per a tot x ≠ ±1. c) $f''(x)=\frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$ s'anul·la a x = 0 amb canvi de signe a cada costat. d) Les rectes x = ±1 són asímptotes de la funció.
Criteris: 2,5 punts cada apartat. d) S'ha de valorar especialment la repercussió gràfica dels resultats obtinguts als apartats anteriors.

4. Calculau l'àrea del recinte limitat per la corba $y=\frac{1}{1+x^2}$ i les rectes y = 0 , x = –1 , x = 1 (7 punts). Feu un dibuix aproximat del recinte (3 punts).
Solució: $A=2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}$
Criteris: Si no s'arriba al valor correcte de l'àrea, s'han d'assignar com a màxim 5 punts (sobre 7).

Prova d'accés a la Universitat (2008)

Matemàtiques II

Model 3

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.
Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.
Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Opció A

1. Determinau totes les matrius de la forma $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & 0 \end{pmatrix}$ que commuten (X.A = A.X) amb la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Determinau el punt del pla 2x – y + z = 0 més pròxim al punt (1,1,1)

3. Es considera la funció $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

a) Calculau $Lim_{x \to -\infty} f(x)$, $Lim_{x \to +\infty} f(x)$

b) Calculau els extrems relatius

c) Feu un dibuix de la funció

4. Es considera la corba $y = e^{kx}$, k>0. Escriviu l'equació de la funció A(k) que ens dóna l'àrea de la regió limitada per aquesta corba i les rectes y = 0, x = 0, x = 1 (5 punts). Calculau $Lim_{k \to 0} A(k)$ (3 punts). Feu un dibuix aclaridor (2 punts).

Opció B

1. Demostrau, per a matrius 2×2, que «el determinant d'un producte és el producte de determinants» (6 punts). És cert que «el determinant d'una suma és la suma de determinants»? (4 punts)

2. Determinau el punt de la recta (x,y,z) = (0,1,–1) + t(1,2,3) més pròxim al punt (1,1,1).

3. Es considera la funció $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$

a) Calculau $Lim_{x \to 1} f(x)$, $Lim_{x \to -\infty} f(x)$, $Lim_{x \to +\infty} f(x)$

b) Calculau els extrems relatius

c) Feu un dibuix de la funció

4. Dibuixau la regió limitada per les corbes y = sin x , y = cos x , i les rectes x = 0 , x = π (4 punts). Calculau-ne l'àrea (6 punts).

Matemàtiques II

Criteris específics de correcció

Model 3

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. En aquelles qüestions on hi ha apartats sense puntuar se suposarà que cadascun té igual valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb l'aplicació del 50% sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Opció A

1. Determinau totes les matrius de la forma $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & 0 \end{pmatrix}$ que commuten (X.A = A.X) amb la matriu $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Solució: Tenen la forma $X=\begin{pmatrix} x & -2x/3 \\ -x & 0 \end{pmatrix}$

Criteris: Si no s'obté la matriu X correctament, s'han d'assignar 7 punts com a màxim.

2. Determinau el punt del pla 2x – y + z = 0 més pròxim al punt (1,1,1)

Solució: El punt és (1/3,4/3,2/3).

Criteris: Si no s'obté el punt correcte, s'han d'assignar 7 punts com a màxim.

3. Es considera la funció $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

a) Calculau $Lim_{x\to-\infty} f(x)$, $Lim_{x\to+\infty} f(x)$

b) Calculau els extrems relatius

c) Feu un dibuix de la funció

Solució: a) $Lim_{x\to-\infty} f(x)=0$, $Lim_{x\to+\infty} f(x)=0$. b) Presenta mínim a x = -1 i màxim a x = 1. c) L'eix y = 0 és una asímptota.

Criteris: c) S'ha de valorar especialment la repercussió gràfica dels resultats obtinguts als apartats anteriors.

4. Es considera la corba $y = e^{kx}$, k>0. Escriviu l'equació de la funció A(k) que ens dóna l'àrea de la regió limitada per aquesta corba i les rectes y = 0, x = 0, x = 1 (5 punts). Calculau $Lim_{k\to 0}A(k)$ (3 punts). Feu un dibuix aclaridor (2 punts).

Solució: $A(k) = \int_0^1 e^{kx}dx = \frac{e^k - 1}{k}$. $Lim_{k\to 0}A(k) = Lim_{k\to 0}\frac{e^k - 1}{k} = 1$

Criteris: Si s'escriu $A(k) = \int_0^1 e^{kx}dx$, però hi ha error en el càlcul integral, s'ha de valorar amb 3 punts com a màxim (sobre 5).

Opció B

1. Demostrau, per a matrius 2×2, que «el determinant d'un producte és el producte de determinants» (6 punts). És cert que «el determinant d'una suma és la suma de determinants»? (4 punts)

Solució: det(A + B) ≠ det A + det B. Per exemple: $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

Criteris: Les respostes sí/no sense més explicació no es valoraran en absolut.

2. Determinau el punt de la recta (x,y,z) = (0,1,–1) + t(1,2,3) més pròxim al punt (1,1,1).
Solució: El punt és (1/2,2,1/2)
Criteris: Si no s'obté el punt correcte, s'han d'assignar 7 punts com a màxim.

3. Es considera la funció $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

a) Calculau $Lim_{x\to 1}f(x)$, $Lim_{x\to -\infty}f(x)$, $Lim_{x\to +\infty}f(x)$
b) Calculau els extrems relatius
c) Feu un dibuix de la funció
Solució: a) $Lim_{x\to 1}f(x) = \mp\infty$, $Lim_{x\to -\infty}f(x) = -\infty$, $Lim_{x\to +\infty}f(x) = +\infty$. b) $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$, presenta màxim a x = 0 i mínim a x = 2. c) Té asímptotes x = 1 , y = x + 1.

Criteris: c) S'ha de valorar especialment la repercussió gràfica dels resultats obtinguts als apartats anteriors.

4. Dibuixau la regió limitada per les corbes y = sin x , y = cos x , i les rectes x = 0 , x = π (4 punts). Calculau-ne l'àrea (6 punts).

Solució: $A = \int_0^{\pi/4}(\cos x - \sin x)dx + \int_{\pi/4}^{\pi}(\sin x - \cos x)dx = 2\sqrt{2}$

Criteris: S'ha de valorar si es representen correctament les corbes y = sin x , y = cos x a l'interval [0, π]. Si hi ha errors en el càlcul integral, s'han d'assignar com a màxim 3 punts (sobre 6).

Prova d'accés a la Universitat (2009)

Matemàtiques II

Model 2

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.
Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.
Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Opció A

1. Es consideren les matrius de la forma $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & \sin x & \cos x \end{pmatrix}$, x∈R. Es demana:

i) Calcular A(0), A(π/2), A(–π/2), A(π), A(–π). (1.25 punts)
ii) Demostrar que A(x) té inversa qualsevol que sigui x. Calculau la inversa. (5 punts)
iii) Calcular els valors de x tals que A(x) = I (matriu identitat). És cert que A(x) ≠ A(y) sempre que x ≠ y? (3.75 punts)

2. Demostrau que el punt A = (–1,1,0) no és coplanari amb els punts B = (0,0,0), C = (0,1,0) i D = (1,2,1) (4 punts). Calculau la distància de A al pla determinat per B, C i D (6 punts).

3. Es considera la funció y = f(x), definida a l'interval [0,π], de la forma següent:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si\ x = 0 \\ \dfrac{x^2 - x}{\sin x} & si\ 0 < x < \pi \\ 0 & si\ x = \pi \end{cases}$$

i) Estudiau-ne la continuïtat (6 punts).
ii) Dibuixau la funció en un entorn de x = 0 i de x = π (4 punts).

4. La recta y = 2x – 2 és una asímptota obliqua de la funció $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x + k}$. Calculau el valor de k (4 punts) i els extrems relatius d'aquesta funció (6 punts).

Opció B

1. Per a quins valors de k té el següent sistema alguna solució distinta de la trivial (0,0,0)? (7 punts)
kx – y + z = 2x
x + 2ky – kz = y
x + ky – z = 0
Resoleu-lo en el cas k = 2 (3 punts).

2. Calculau l'equació contínua de la recta que passa pel punt (2,1,5) i és perpendicular a les rectes $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+2}{0} = \dfrac{z-3}{4}$, $\dfrac{x-1}{-5} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{-1}$.

3. Provau raonadament que l'equació $x^3 - 3x + 1 = 0$ té una única solució dins l'interval obert (1,2) (6 punts). Calculau-la amb un error menor que una dècima (4 punts).

4. Calculau l'àrea de la regió limitada per la corba $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ i les rectes y = 0, x = a, x = b, on a i b són les abscisses dels punts d'inflexió de la corba (6 punts). Feu un dibuix de la regió (4 punts).

Prova d'accés a la Universitat (2009)

Matemàtiques II

Criteris específics de correcció

Model 2

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té igual valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Opció A

1. Es consideren les matrius de la forma $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & \sin x & \cos x \end{pmatrix}$, x∈R. Es demana:

i) Calcular A(0), A(π/2), A(–π/2), A(π), A(–π). (1.25 punts)
ii) Demostrar que A(x) té inversa qualsevol que sigui x. Calculau la inversa. (5 punts)
iii) Calcular els valors de x tals que A(x) = I (matriu identitat). És cert que A(x) ≠ A(y) sempre que x ≠ y? (3.75 punts)

Solució: A(x) té inversa per a tot x: $|A(x)| = 1 \neq 0$. La inversa de A(x) és $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$. A(x) = I si i només si $x \in 2\pi Z$. No és cert: A(x) = A(y) si i només si $x - y \in 2\pi Z$.

Criteris: ii) La primera part fins a 1.5 punts. Si no es troba la inversa, fins a 3.5 punts.
iii) La primera part, fins a 2 punts. Si no es justifica la segona part i només es diu que no és cert, 0 punts.

2. Demostrau que el punt A = (–1,1,0) no és coplanari amb els punts B = (0,0,0), C = (0,1,0) i D = (1,2,1) (4 punts). Calculau la distància de A al pla determinat per B, C i D (6 punts).

Solució: $\overrightarrow{BC} = (0,1,0)$, $\overrightarrow{BD} = (1,2,1)$ són linealment independents, i $\overrightarrow{BA} = (-1,1,0)$ no és combinació lineal de $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{BD}$, per tant, A no és coplanari amb B,C,D. L'equació del pla BCD és x – z = 0, i la distància demanada és $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71$.

Criteris: Si no s'arriba a la distància correcta, fins a 4 punts dels 6 possibles.

3. Es considera la funció y = f(x), definida a l'interval [0,π], de la forma següent:

$$f(x)=\begin{cases} -1 & si\ x=0 \\ \dfrac{x^2-x}{\sin x} & si\ 0<x<\pi \\ 0 & si\ x=\pi \end{cases}$$

i) Estudiau-ne la continuïtat (6 punts).
ii) Dibuixau la funció en un entorn de x = 0 i de x = π (4 punts).
Solució: És contínua a 0≤x<π: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1=f(0)$. No és contínua a x = π:
$\lim\limits_{x\to \pi} f(x)=+\infty\neq f(\pi)$.
Criteris: ii) 2 punts per a cada part.

4. La recta y = 2x – 2 és una asímptota obliqua de la funció $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x+k}$. Calculau el valor de k (4 punts) i els extrems relatius d'aquesta funció (6 punts).
Solució: k = 1. La funció té un mínim a $(\frac{-2+\sqrt{6}}{2},\frac{7\sqrt{6}-12}{6})\approx(0.22,0.86)$ i un màxim a $(\frac{-2-\sqrt{6}}{2},-4-2\sqrt{6})\approx(-2.22,-8.90)$.
Criteris: Si no es troba el valor de k, fins a 2 punts dels 4 possibles. Si no es calculen els dos punts complets, fins a 4 punts dels 6 possibles.

Opció B
1. Per a quins valors de k té el següent sistema alguna solució distinta de la trivial (0,0,0)? (7 punts)
kx – y + z = 2x
x + 2ky – kz = y
x + ky – z = 0
Resoleu-lo en el cas k = 2 (3 punts).
Solució: Si k = 1 o k = 2, el sistema té solucions no trivials. En el cas k = 2, les solucions són (-z, z,z), z∈R.
Criteris: Si no es troben els dos valors de k, fins a 3 punts dels 7 possibles.

2. Calculau l'equació contínua de la recta que passa pel punt (2,1,5) i és perpendicular a les rectes $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-3}{4}$, $\dfrac{x-1}{-5}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$.
Solució: Un vector director de la recta demanada és (4,7,1). La recta és $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{7}=\dfrac{z-5}{1}$
Criteris: Si no s'arriba a l'equació, fins a 6 punts dels 10 possibles.
3. Provau raonadament que l'equació $x^3 - 3x + 1 = 0$ té una única solució dins l'interval obert (1,2) (6 punts). Calculau-la amb un error menor que una dècima (4 punts).
Solució: $f(x) = x^3 - 3x + 1$ és contínua amb f(1) < 0, f(2) > 0. Per altra part, $f'(x) = 3x^2 - 3$ que s'anul·la per a x = ± 1. L'única solució α és tal que 1.5 < α < 1.6.
Criteris: S'han de repartir els 6 punts de la primera part en 3 per a l'existència i altres 3 per a la unicitat.

4. Calculau l'àrea de la regió limitada per la corba $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ i les rectes y = 0, x = a, x = b, on a i b són les abscisses dels punts d'inflexió de la corba (6 punts). Feu un dibuix de la regió (4 punts).
Solució: Els punts d'inflexió es troben a $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. L'àrea és $2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\dfrac{1}{1+x^2}dx=\dfrac{\pi}{3}\approx 1.05$.
Criteris: Si no es troben les inflexions, fins a 2 punts dels 6 possibles. Si es troben però hi ha errors en el càlcul integral, fins a 4 punts dels 6 possibles.

Prova d'accés a la Universitat (2009)

Matemàtiques II

Model 3

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.
Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.
Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Opció A

1. Demostrau que les matrius X reals, 2×2, tals que $X.X^T = I$ són precisament les que tenen la forma $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ *o bé* $\begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}$, amb $x^2 + y^2 = 1$.
(X^T indica la transposada de X. I indica la matriu identitat).

2. Estudiau la posició relativa dels plans següents segons els valors de m
$x + y = 1$
$my + z = 0$
$x + (1+m)y + mz = m+1$

3. Es considera la funció $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2}$. Es demana:
i) Determinar els extrems relatius (4 punts).
ii) Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)$ (6 punts).

4. Utilitzant els teoremes de Bolzano i Rolle, demostrau que l'equació $x^2 = x\sin x + \cos x$ té exactament dues solucions dins l'interval $[-\pi,\pi]$.

Opció B

1. Determinau el rang de la matriu real $A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix}$ segons els valors de a (7 punts).

Resoleu el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en el cas a = 0 (3 punts).

2. Sigui r la recta intersecció dels dos plans π_1: ax + by + cz + d = 0 i π_2 : a'x + b'y + c'z + d' = 0. Es considera la família de plans de la forma ax + by + cz + d + k(a'x + b'y + c'z + d') = 0 on k és un paràmetre real. Es demana:
i) Demostrau que la recta r està continguda en tots els plans de la família (3 punts).
ii) Calculau els plans de la família $2x – y + z + 1 + k(x + y + z – 2) = 0$ que es troben a distància 1 de l'origen de coordenades (7 punts).

3. Calculau els punts de la corba $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ en els quals el pendent de la recta tangent és 1.

4. Donada la funció $f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x = 0 \\ x.Lx & si\ x > 0 \end{cases}$ ($Lx = \log_e$), es demana:
i) Estudiau-ne la continuïtat (3 punts).
ii) Calculau l'àrea de la regió limitada per la corba y = f(x) i les rectes y = 0, x = k, x = 1, on k és l'abscissa del mínim de la funció (4 punts). Feu un dibuix de la regió (3 punts).

Prova d'accés a la Universitat (2009)

Matemàtiques II

Criteris específics de correcció

Model 3

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar es suposarà que cadascun te igual valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb l'aplicació del 50% sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en que hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Opció A

1. Demostrau que les matrius X reals, 2×2, tals que $X.X^T = I$ són precisament les que tenen la forma $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ *o bé* $\begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}$ amb $x^2 + y^2 = 1$.
(X^T indica la transposada de X. I indica la matriz identitat).
Solució: ----
Criteris: 5 punts per a cada implicació.

2. Estudiau la posició relativa dels plans següents segons els valors de m
$x + y = 1$
$my + z = 0$
$x + (1+m)y + mz = m+1$
Solució: Si $m \neq 0,1$ els plans es tallen en un punt. Si m = 0, els plans es tallen en una recta (els plans 1 i 3 coincideixen). En el cas m = 1, els tres plans no tenen cap punt comú (es tallen dos a dos).
Criteris: Cal distingir el cas m = 0 del cas m = 1. Si no es fa, fins a 7 punts dels 10 possibles.

3. Ee considera la funció $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2}$. Es demana:
i) Trobar els extrems relatius (4 punts).
ii) Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x)$ (6 punts).
Solució: $f'(x) = \dfrac{1 + 2x}{2\sqrt{1 + x + x^2}}$. Hi ha un mínim: (-1/2 , √3/2).
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = -1$
Criteris: i) Si no es calcula el punt mínim complet , fins a 3 punts dels 4 possibles.

ii) 1.5 punts per a cada límit.

4. Utilitzant els teoremes de Bolzano i Rolle, demostrau que l'ecuación $x^2 = x\sin x + \cos x$ té exactament dues solucions dins l'interval $[-\pi,\pi]$.
Solució: Si $f(x) = x^2 - x\sin x - \cos x$, aplicar el teorema de Bolzano i Rolle a f(x) en els intervals $[-\pi,0]$ i $[0,\pi]$.
Criteris: Enunciats dels teoremes correctes, 4 punts. Repartir els altres 6 punts a parts iguals entre l'existència i la unicitat.

Opció B

1. Trobau el rang de la matriu real $A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix}$ segons els valors de a (7 punts).

Resoleu el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en el cas a = 0 (3 punts).

Solució: Si $a \neq 0,2,-3$, el rang de A és 3. Altrament, el rang és 2. En el cas a = 0, el sistema té solució $(2x,-x,-x)$, $x \in R$.
Criteris: Si no s'obtenen tots els valors crítics de a, fins a 4 dels 7 possibles. Si no s'obté la solució del sistema, fins a 2 punts.

2. Sigui r la recta intersecció dels dos plans π_1: ax + by + cz + d = 0 i π_2 : a'x + b'y + c'z + d' = 0. Es considera la família de plans de la forma ax + by + cz + d + k(a'x + b'y + c'z + d') = 0 on k és un paràmetre real. Es demana:
i) Demostrau que la recta r està continguda en tots els plans de la família (3 punts).
ii) Trobar els plans de la família $2x - y + z + 1 + k(x + y + z - 2) = 0$ que es troben a distància 1 de l'origen de coordenades (7 punts).
Solució: Els valors de k són $4 \pm \sqrt{21}$.
Criteris: Si no s'obtenen els dos valors de k, fins a 4 punts dels 7 possibles.

3. Trobau els punts de la corba $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ en els quals el pendent de la recta tangent és 1.
Solució: Els punts són: $(-2\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}})$ i $(2\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}})$.
Criteris: Càlcul de la derivada fins a 4 punts dels 10 possibles.

4. Donada la función $f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x = 0 \\ x.Lx & si\ x > 0 \end{cases}$ (L = $\log_e$), es demana:
i) Estudiau la continuïtat (3 punts).
ii) Calcular l'àrea de la regió limitada per la corba y = f(x) i les rectes y = 0, x = k, x = 1, on k és l'abcissa del mínim de la funció (4 punts). Feu un dibuix de la regió (3 punts).
Solució: És continua a $x \geq 0$: $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$. L'abcissa del mínim és x = 1/e.
L'àrea és $\left|\frac{3-e^2}{4e^2}\right| \approx 0.15$
Criteris: ii) Si no es troba el valor de k, fins a 2 punts dels 4 possibles.

Prova d'accés a la Universitat (2010)

Matemàtiques II

Model 1

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.
Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.
Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Opció A

1. Determinau, segons els valors de m, el rang de la matriu real $A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & -1 \\ 0 & m-2 & 1 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (7 punts). En el cas m = 1, calculau les solucions del sistema homogeni $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (3 punts).
2. Calculau el valor de k per al qual les rectes següents són paral·leles (3 punts).

$$\frac{x-1}{k} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{k} \quad , \quad \frac{x+1}{2k} = \frac{y}{k+3} = \frac{z-2}{2}$$

Calculau, en aquest cas, la distància entre les rectes (7 punts).
3. Calculau el punt de la corba $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ en el qual el pendent de la recta tangent sigui màxim (6 punts). Feu un dibuix on apareguin la corba, el punt i la recta tangent (4 punts).
4. Calculau l'àrea de la regió limitada per la hipèrbola xy = 4 i la recta que la talla en els punts d'abscisses x = 1, x = 4 (7 punts). Feu un dibuix de la regió (3 punts).

Opció B

1. Es consideren les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculau la matriu X que verifica: XA + I = B, on I representa la matriu identitat.
2. Siguin $P = (a_1,b_1,c_1)$ i $Q = (a_2,b_2,c_2)$ dos punts del pla Ax + By + Cz + D = 0. Demostrau que el vector $\overrightarrow{PQ}$ és perpendicular al vector $\vec{n}$ = (A,B,C) (4 punts). Aplicau-ho per calcular l'equació general del pla que conté els punts P = (1,2,3), Q = (–1,0,2) i R = (1,1,1) (6 punts).
3. Es considera la funció f(x) = x | x |. Calculau les equacions i els dominis de les funcions $f(x), f'(x), f''(x)$ *i* $f'''(x)$ (6 punts). Representau-les gràficament (4 punts).
4. Sigui A(t), t > 0, l'àrea de la regió limitada per la corba $y = \sqrt[3]{x^2}$ i les rectes y = 0, x = t. Representau gràficament aquesta regió (4 punts) i calculau el valor de t per al qual A(t) = 1 (6 punts).

Prova d'accés a la Universitat (2010)

Matemàtiques II

Criteris específics de correcció

Model 1

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té igual valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Opció A

1.

- Càlcul correcte del determinant i determinació dels valors de m: 3 punts.
- Discussió del rang en funció dels valors de m trobats prèviament: 4 punts
- Solució del sistema homogeni quan $m=1$: 3 punts. Si no s'arriba a la solució del sistema, màxim 2 punts dels 3 possibles.

2.

- Calcular el valor de k per al qual les rectes són paral·leles: 3 punts.
- Calcular la distància entre les rectes: 7 punts. Si no s'arriba a la distància correcta, màxim 5 punts dels 7 possibles.

3.

- Determinació correcta del punt demanat amb un plantejament correcte: 6 punts. Si no es dóna el punt complet, màxim 4 punts dels 6 possibles.
- A la segona part, s'han de distribuir els 4 punts així: Dibuix de la corba, 2 punts. Dibuix del punt, 1 punt. Dibuix de la tangent,1 punt.

4.

- A la primera part: Càlcul de l'equació de la recta: 2 punts. Càlcul dels punts d'intersecció entre les dues corbes: 1 punt. La part de càlcul integral es valorarà fins a 4 punts.
- Dibuix de la regió: 3 punts.

Opció B

1.

- Càlcul correcte de la matriu demanada: 10 punts. Si no s'obté la solució correcta, màxim 8 punts dels 10 possibles.

2.

- Primera part. Demostració correcta de la propietat enunciada: 4 punts.
- Segona part. Determinació de l'equació del pla: 6 punts. La segona part s'ha de resoldre aplicant el resultat de la primera part. En cas contrari, cal valorar l'apartat com a màxim amb 3 punts dels 6 possibles.

3.

- Els punts de la primera part s'han de distribuir així: 2 punts per f, 2 punts per f', 1 punt per f'' i 1 punt per f'''.
- Quant a la segona part, 1 punt per cada gràfica.

4.

- Representar gràficament la regió: 4 punts.
- Càlcul de A(t): fins a 4 punts dels 6 possibles. Resoldre A(t)=1: 2 punts.

Matemàtiques II

Solucions

Model 1

Opció A

1. Determinau, segons els valors de m, el rang de la matriu real $A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & -1 \\ 0 & m-2 & 1 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (7 punts). En el cas m = 1, calculau les solucions del sistema homogeni A$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (3 punts).

Solució: Si m ≠ 1 , 4/3, el rang és 3. Si m = 1 o m = 4/3 el rang és 2. En el cas m = 1, el sistema és indeterminat amb solució (-2k , k , k)

2. Calculau el valor de k per al qual les rectes següents són paral·leles (3 punts).

$$\frac{x-1}{k} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{k} \quad , \quad \frac{x+1}{2k} = \frac{y}{k+3} = \frac{z-2}{2}$$

Calculau, en aquest cas, la distància entre les rectes (7 punts).

Solució: Per a k = 1 són paral·leles (no coincidents). La distància entre les rectes és $\sqrt{\frac{110}{4}} \approx 5.24$

3. Calculau el punt de la corba $y = \frac{1}{1+x^2}$ en el qual el pendent de la recta tangent sigui màxim (6 punts). Feu un dibuix on apareguin la corba, el punt i la recta tangent (4 punts).

Solució: Es tracta de trobar el màxim de la derivada primera $y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$. La derivada segona és $y'' = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$, que s’anul·la per a $x = \pm\sqrt{1/3}$. A $x = -\sqrt{1/3}$ hi tenim el màxim. El punt amb màxim pendent és $(-\sqrt{1/3}\ , 3/4)$.

4. Calculau l’àrea de la regió limitada per la hipèrbola xy = 4 i la recta que la talla en els punts d’abscisses x = 1, x = 4 (7 punts). Feu un dibuix de la regió (3 punts).

Solució: Equació de la recta: y = - x + 5. L’àrea de la regió és 15/2 – 4ln4 ≈ 1.95.

Opció B

1. Es consideren les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculau la matriu X que verifica: XA + I = B, on I representa la matriu identitat.

Solució: X = (B – I)A^{-1} = $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Siguin P = (a_1,b_1,c_1) i Q = (a_2,b_2,c_2) dos punts del pla Ax + By + Cz + D = 0. Demostrau que el vector $\overrightarrow{PQ}$ és perpendicular al vector $\vec{n}$ = (A,B,C) (4 punts). Aplicau-ho per calcular l'equació general del pla que conté els punts P = (1,2,3), Q = (–1,0,2) i R = (1,1,1) (6 punts).
Solució: El producte escalar dels vectors $\overrightarrow{PQ}$ i $\vec{n}$ és 0. El pla que es demana és 3x – 4y + 2z – 1 = 0.

3. Es considera la funció f(x) = x│x│. Calculau les equacions i els dominis de les funcions $f(x), f'(x), f''(x)\ i\ f'''(x)$ (6 punts). Representau-les gràficament (4 punts).
Solució: La funció f és derivable per tot, *f '* no és derivable a x = 0.
Dom(*f*) = Dom(*f'*) = R, Dom(*f ''*) = Dom(*f'''*) = R-{0}.

4. Sigui A(t), t > 0, l'àrea de la regió limitada per la corba $y = \sqrt[3]{x^2}$ i les rectes y = 0, x = t. Representau gràficament aquesta regió (4 punts) i calculau el valor de t per al qual A(t) = 1 (6 punts).

Solució: $A(t) = \frac{3\sqrt[3]{t^5}}{5}$. El valor de t per al qual A(t) = 1 és $t = \sqrt[5]{(5/3)^3} \approx 1.36$.

Prova d'accés a la Universitat (2010)

Matemàtiques II

Model 3

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.
Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.
Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Opció A

1. Determinau l'equació en forma contínua de la recta r que passa pel punt *(1,1,1)* i és paral·lela a la recta r_1 d'equacions implícites (7 punts)
$$r_1 : \begin{cases} -3x + y - z + 12 = 0, \\ x - 2y - 3z = 0. \end{cases}$$
Donau l'equació vectorial (1 punt), les equacions paramètriques (1 punt) i la forma implícita (1 punt) de la recta calculada r.
2. Calculau els valors de m per als quals la matriu
$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 0 & m & 2 \\ 3/2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
no té inversa (4 punts). Si m = 2 calculau, si és possible, la inversa de la matriu A (4 punts) i resoleu el sistema d'equacions $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (2 punts)
3. Determinau els intervals de creixement i decreixement, els màxims i mínims, els punts d'inflexió i els intervals de concavitat i convexitat de la funció $f(x) = (x-3)^4(x-1)$. (10 punts)
4. Feu un dibuix del recinte limitat per les paràboles $y = 6x - x^2$ i $y = x^2 - 2x$ (3 punts). Calculau l'àrea d'aquest recinte (7 punts).

Opció B

1. Determinau l'equació en forma contínua de la recta r que passa pel punt *(3,4,7)* i és perpendicular a les rectes r_1 i r_2 donades per (10 punts)
$$r_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{2}, \qquad r_2 : x - 1 = y - 2 = \frac{z-3}{4}.$$
Donau l'equació vectorial (1 punt), les equacions paramètriques (1 punt) i la forma implícita (1 punt) de la recta calculada r.
2. Discutiu el rang de la matriu A en funció dels diferents valors de a
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & a \end{pmatrix}. \qquad \text{(6 punts)}$$
Resoleu el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ per als valors de a per als quals el rang de la matriu A és 3 (4 punts).
3. Calculau els valors dels paràmetres a, b i c de la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ de manera que la funció $f(x)$ tingui un màxim per a x=-1, un mínim per a x=3 i passi pel punt $(0,5)$. (10 punts)
4. Utilitzant el teorema de Bolzano i de Rolle, provau que l'equació $\tan x = 2x$ té una única arrel real a l'interval $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. (10 punts)

Prova d'accés a la Universitat (2010)

Matemàtiques II

Criteris específics de correcció

Model 3

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té igual valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Opció A

1.

- Càlcul correcte del vector director de la recta *r*: 5 punts.
- Expressió correcta de l'equació contínua de la recta *r*: 2 punts.
- Expressió correcta de les altres 3 equacions: 1 punt per equació.

2.

- Càlcul correcte del determinant de A: 3 punts.
- Resolució correcta de l'equació det(A) = 0 i indicar correctament els valors de m per als quals la matriu A té inversa: 1 punt.
- Càlcul correcte de la inversa de la matriu A quan m = 2: 4 punts.
- Resoldre correctament el sistema: 2 punts.

3.

- Càlcul correcte de f'(x) i solució de l'equació f'(x) = 0: 2 punts.
- Determinar els intervals de creixement i decreixement i els màxims i mínims: 3 punts.
- Càlcul correcte de f''(x) i solució de l'equació f''(x) = 0: 2 punts.
- Determinar els punts d'inflexió i els intervals de concavitat i convexitat: 3 punts.

4.

- Dibuix del recinte: 3 punts.
- Càlcul correcte dels punts de tall: 2 punts.
- Expressió correcta de l'àrea com una integral i càlcul correcte de l'àrea: 5 punts.

Opció B

1.

- Càlcul correcte del vector director de la recta *r*: 5 punts.
- Expressió correcta de l'equació contínua de la recta *r*: 2 punts.
- Expressió correcta de les altres 3 equacions: 1 punt per equació.

2.

- Càlcul correcte del determinant de la matriu A: 3 punts.
- Solució de l'equació det(A) = 0: 1 punt.
- Discussió del rang: 2 punts.
- Solució correcta del sistema d'equacions quan $a \neq 8$: 4 punts.

3.

- Expressió correcta de cadascuna de les tres condicions com una equació i plantejament del sistema per resoldre: 5 punts.
- Solució correcta del sistema d'equacions: 4 punts.
- Expressió correcta de la funció $f(x)$: 1 punt.

4.

- Existència de solució: 4 punts.
- Unicitat de la solució: 6 punts.

Prova d'accés a la Universitat (2010)

Matemàtiques II

Solucions

Model 3

Opció A

1. En primer lloc hem de determinar un vector de la recta r_1 ja que aquest serà un vector director de la recta que busquem. Siguin π_1 el pla $-3x+y-z+12=0$ i π_2 el pla $x-2y-3z=0$. Sigui $\vec{d}=(v_1,v_2,v_3)$ el vector director de la recta r_1, i siguin $\vec{d}_{\pi_1}$ i $\vec{d}_{\pi_2}$ els vectors normals dels plans π_1 i π_2 respectivament, aleshores podem trobar $\vec{d}$ resolent el sistema donat per
$$\begin{cases}\vec{d}\cdot\vec{d}_{\pi_1}=0,\\ \vec{d}\cdot\vec{d}_{\pi_2}=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(v_1,v_2,v_3)\cdot(-3,1,-1)=0,\\ (v_1,v_2,v_3)\cdot(1,-2,-3)=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3v_1+v_2-v_3=0,\\ v_1-2v_2-3v_3=0.\end{cases}$$
D'on
$$v_1=\frac{\begin{vmatrix}v_3 & 1\\ 3v_3 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}}=\frac{-2v_3-3v_3}{6-1}=-v_3,\quad v_2=\frac{\begin{vmatrix}-3 & v_3\\ 1 & 3v_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}}=\frac{-9v_3-v_3}{5}=-2v_3.$$
Així, la solució del sistema d'equacions és $(-v_3,-2v_3,v_3)=-v_3\cdot(1,2,-1)$ i, per tant, $\vec{d}=(1,2,-1)$.
L'equació contínua de la recta *r* que passa pel punt (1,1,1) i és paral·lela a la recta r_1 és
$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-1}.$$
L'equació en forma vectorial: $(x,y,x)=(1,1,1)+\lambda(1,2,-1)$.
L'equació en forma paramètrica: $\begin{cases}x=1+\lambda,\\ y=1+2\lambda,\\ z=1-\lambda.\end{cases}$
Equacions implícites: qualsevol de les següents,
$$\begin{cases}2x-y-1=0,\\ x+z-2=0.\end{cases}\quad\begin{cases}2x-y-1=0,\\ y+2z-3=0.\end{cases}\quad\begin{cases}x+z-2=0,\\ y+2z-3=0.\end{cases}$$

2. Per determinar els valors de *m* per als quals la matriu no té inversa hem de determinar els valors que anul·len el seu determinant.
$$\det(A)=\begin{vmatrix}m & 1 & 0\\ 0 & m & 2\\ 3/2 & 2 & 1\end{vmatrix}=m^2-4m+3, \text{aleshores } \det(A)=0\Leftrightarrow m=1 \text{ o } m=3.$$
Per tant, si $m=1$ o $m=3$ la matriu *A* no té inversa.
Si $m=2$ el determinant de la matriu val $\det(A)=|A|=-1$, i la matriu és
$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 3/2 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$
La matriu inversa A^{-1} d'una matriu *A* ve donada per l'expressió
$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\left((-1)^{i+j}A_{ij}\right)^t.$$
Així,
$$\left((-1)^{i+j}A_{ij}\right)=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 2\\ 3/2 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 2\\ 3/2 & 2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 0\\ 3/2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3/2 & 2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 3 & -3\\ -1 & 2 & -5/2\\ 2 & -4 & 4\end{pmatrix}.$$

I, la seva transposada és

$$\left((-1)^{i+j}A_{ij}\right)^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ -3 & -5/2 & 4 \end{pmatrix}, \text{ i d'aquí tenim que } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \\ 3 & 5/2 & -4 \end{pmatrix}.$$

3. Per determinar el màxims i mínims de la funció $f(x) = (x-3)^4(x-1)$ hem de resoldre l'equació $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 4(x-3)^3(x-1) + (x-3)^4 = (x-3)^3(5x-7).$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3)^3(5x-7) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ o } x = 7/5$$

Per estudiar el seu caràcter optarem per estudiar el signe de la primera derivada. Els intervals de creixement i decreixement són: $(-\infty, 7/5), \left(\frac{7}{5}, 3\right), (3, +\infty)$.

	$-\infty$		7/5		3		$+\infty$
$Signe\ f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	
			màxim		*mínim*		

$(f'(0) = 189, f'(2) = -3, f'(4) = 13)$

En l'interval $(-\infty, 7/5)$ la funció és creixent.
En l'interval $\left(\frac{7}{5}, 3\right)$ la funció és decreixent.
En l'interval $(3, +\infty)$ la funció és creixent.
Al punt $(7/5, f(\frac{7}{5})) = (7/5, \frac{8192}{3125})$ la funció té un màxim. Al punt $(3, f(3)) = (3,0)$ la funció té un mínim.
Per calcular els punts d'inflexió hem de resoldre l'equació $f''(x) = 0$ i per classificar-los farem ús del criteri del signe de la segona derivada.

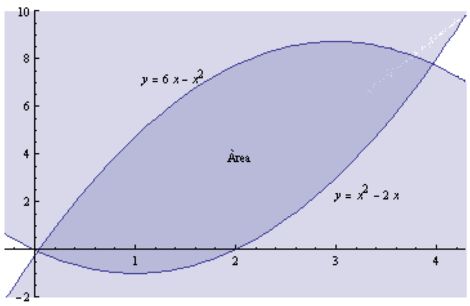
$$f''(x) = 3(x-3)^2(5x-7) + (x-3)^3 \cdot 5 = (x-3)^2(20x-36).$$
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2(20x-36) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ o } x = \frac{36}{20} = 9/5.$$

D'aquest dos punts hem de considerar el segon com a possible punt d'inflexió.

	$-\infty$		9/5		$+\infty$
$Signe\ f''(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\cap$		$\cup$	
		convexa	*Punt d'inflexió*	còncava	

$(f''(0) = -324, f''(2) = 4)$
En l'interval $(-\infty, 9/5)$ la funció és convexa.
En l'interval $\left(\frac{9}{5}, +\infty\right)$ la funció és còncava.
Al punt $(9/5, f(\frac{9}{5})) = (7/5, \frac{5184}{3125})$ la funció té un punt d'inflexió.

4. El recinte limitat per les dues paràboles es pot veure en el dibuix següent i es correspon amb la zona més fosca i assenyalada amb la paraula àrea.



Calculem doncs els punts d'intersecció entre ambdues corbes:

$$6x - x^2 = x^2 - 2x \Rightarrow 2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4.$$

$$\mathcal{A} = \left|\int_0^4 ((6x - x^2) - (x^2 - 2x))dx\right| = \left|\int_0^4 (8x - 2x^2)dx\right|$$
$$= \left|\left[\frac{8x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right]_{x=0}^4\right| = \left|\left[4x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_{x=0}^4\right| = \frac{64}{3}u^2.$$

Opció B

1. L'equació contínua de la recta *r* que passa pel punt (3,4,7) és
$$\frac{x-3}{v_1} = \frac{y-4}{v_2} = \frac{z-7}{v_3},$$
on $\vec{d} = (v_1, v_2, v_3)$ és el seu vector director. Com que la recta *r* ha d'esser perpendicular a les rectes r_1 i r_2 els vectors directors d'aquestes rectes han de ser perpendiculars al vector director de la recta *r*. Així
$$\begin{cases} \vec{d}\cdot\vec{d}_{\mathrm{r}_1} = 0, \\ \vec{d}\cdot\vec{d}_{\mathrm{r}_2} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (v_1, v_2, v_3)\cdot(2,3,2) = 0, \\ (v_1, v_2, v_3)\cdot(1,1,4) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2v_1 + 3v_2 + 2v_3 = 0, \\ v_1 + v_2 + 4v_3 = 0. \end{cases}$$
D'on
$$v_1 = \frac{\begin{vmatrix} -2v_3 & 3 \\ -4v_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-2v_3 + 12v_3}{2-3} = -10v_3,\ \ v_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2v_3 \\ 1 & -4v_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-8v_3 + 2v_3}{-1} = 6v_3.$$
Per tant, la solució del sistema d'equacions és $(-10v_3, 6v_3, v_3) = v_3\cdot(-10,6,1)$ i, podem agafar com a vector director $\vec{d} = (-10,6,1)$.

L'equació contínua de la recta *r* que passa pel punt (3,4,7) i és perpendicular a les rectes r_1 i $r_2$és
$$\frac{x-3}{-10} = \frac{y-4}{6} = \frac{z-7}{1}.$$
L'equació en forma vectorial: $(x, y, x) = (3,4,7) + \lambda(-10,6,1)$.
L'equació en forma paramètrica: $\begin{cases} x = 3 - 10\lambda, \\ y = 4 + 6\lambda, \\ z = 7 + \lambda. \end{cases}$
Equacions implícites: qualsevol de les següents,
$$\begin{cases} 6x + 10y - 58 = 0, \\ y - 6z + 38 = 0. \end{cases}$$

2. Observem en primer lloc que com el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0$ és no nul, tenim que el rang de la matriu *A* serà major o igual que 2, és a dir $rg(A) \geq 2$. Si $\det(A) = |A| = 0$ aleshores tindrem que $rg(A) = 2$. Així,
$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & a+2 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & a+2 \end{vmatrix} = 3(a+2) - 30$$
$$= 3a - 24,\quad \det(A) = 0 \Leftrightarrow a = 8.$$
Per tant:
-Si $a = 8$ aleshores $rg(A) = 2$.
-Si $a \neq 8$ aleshores $rg(A) = 3$.

Si $a \neq 8$ el sistema $A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ admet solució única que ve donada per $(x, y, z) = \left(-\frac{14-3a}{3(-8+a)}, -\frac{2}{3(-8+a)}, -\frac{2}{-8+a}\right)$.

3. Per determinar els valors dels paràmetres *a*, *b* i *c* de la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ hem de traduir les condicions que s'han de satisfer en equacions. Així, que la funció $f(x)$ tingui un màxim per a *x*=-1 i un mínim per a *x*=3, ens vol dir que $f'(-1) = 0$ i

que $f'(3)=0$. Que passi pel punt $(0,5)$ ens diu que $f(0)=5$. Per tant hem de resoldre el sistema d'equacions donat per

$$\begin{cases} f'(-1)=0, \\ f'(3)=0, \\ f(0)=5. \end{cases}$$

$f'(x)=3x^2+2ax+b,\ \ f'(-1)=3-2a+b,\ f'(3)=27+6a+b$ i $f(0)=c$. Per tant el sistema que hem de resoldre queda

$$\begin{cases} 3-2a+b=0, \\ 27+6a+b=0, \\ c=5. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -2a+b=-3, \\ 6a+b=-27, \\ c=5. \end{cases} \Longrightarrow a=-3, b=-9, c=5.$$

Per tant la funció és $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$.

4. Considerem la funció $f(x)=\tan x-2x$, que per ser una funció contínua i $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}-2\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{2}<0$, $\ f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2\frac{\pi}{4}=-1+\frac{\pi}{2}>0$, li podem aplicar el teorema de Bolzano i, per tant, existeix almenys una arrel a l'interval $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$. Existeix $c\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ tal que $f(c)=0$, és a dir, $\tan c=2c$. Podem dir ara que l'equació $\tan x=2x$ té al menys una arrel real a l'interval donat.

   Aplicant el teorema de Rolle veurem que tan sols existeix una arrel en aquest interval.

   Suposem que existeixen dues arrels a l'interval $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$. És a dir, existeixen $c_1,c_2\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ tals que $f(c_1)=f(c_2)=0$. Com que f és una funció contínua a l'interval $[c_1,c_2]$ i derivable a l'interval (c_1,c_2) amb $f(c_1)=f(c_2)$, aplicant el teorema de Rolle tenim que existeix $c_3\in\ (c_1,c_2)$ tal que $f'(c_3)$=0. Però

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-2 \quad , \quad f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-2\cos^2 x=0$$

   d'on $\cos^2 x=1/2$, $\quad \cos x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, per tant $x=\frac{\pi}{4}$ o $x=\frac{3\pi}{4}$. L'unica arrel de $f'(x)$ és precisament un dels extrems de l'interval i per tant no pot existir c_3.

Prova d'accés a la Universitat (2011)

Matemàtiques II

Model 3

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.
Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.
Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Opció A

1.
a) Comprovau que si A és una matriu quadrada tal que $A^2 = 2A - I$ on I és la matriu identitat, aleshores A és invertible. Quina és l'expressió de A^{-1}? (6 punts)
b) Utilitzau l'apartat a) per calcular la inversa de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(4 punts).}$$

2. Donats el punt $A = (1,3,0)$ i el pla $\pi: x + 2y + z - 1 = 0$, determinau les coordenades del punt A' simètric del punt A respecte del pla π (7 punts). Calculau la distància de A' al pla π (3 punts).

3. Considerau la funció real definida en tota la recta real per

$$f(x) = \frac{3x^2 - 1}{(x^2+1)^2}.$$

a) Calculau $f'(x)$ i $f''(x)$ i donau els resultats completament simplificats (7 punts).
b) Determinau els màxims i mínims de la funció $f(x)$ (3 punts).

4. Donada la funció $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}$,

a) Calculau $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ per a tot x (7 punts).
b) Calculau la integral $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}\, dx$ (3 punts).

Opció B

1. **a)** Sense desenvolupar el determinant, comprovau que:
$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = 0 \text{ (6 punts).}$$
   b) Determinau el rang del conjunt de vectors $\{(1,-2,0,-3),(-1,3,1,4),(2,1,5,-1)\}$ (4 punts).

2. Determinau l'equació del pla π que passant pels punts $A=(1,0,0)$ i $B=(0,2,0)$ talla l'eix OZ en el punt $C=(0,0,c)$ amb $c>0$ tal que l'àrea del triangle *ABC* val $\sqrt{6}$ (10 punts).

3. Considerau l'equació $x^3+\lambda\, x^2-2\,x=1$ on λ és una constant més gran que 2. Fent servir el teorema de Bolzano i el de Rolle, provau que l'equació admet una única solució no negativa i més petita que 1.

4. Sigui $I=\int_0^1 \frac{2}{3+\sqrt{x}}\,dx$

   a) Expressau *I* aplicant el canvi de variable $x=t^2$ (4 punts).
   b) Calculau el valor de *I* (6 punts).

Matemàtiques II

Criteris específics de correcció

Model 3

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Opció A

1. **a)** Justificar que la matriu A és invertible, comprovant que admet inversa per l'esquerra i per la dreta: 4 punts. Si no es justifica correctament, màxim 2 punts. Expressió de A^{-1}: 2 punts.
   b) Calcular la inversa de la matriu A utilitzant que A^{-1}=2 I –A: 4 punts. Si no s'usa aquesta expressió i la matriu inversa està ben calculada, màxim 2 punts.

2. a)
- Càlcul correcte de la recta que passa per A i és perpendicular al pla: 2 punts.
- Càlcul correcte de la intersecció d'aquesta recta amb el pla: 2 punts.
- Càlcul correcte del punt simètric: 3 punts.

b) Càlcul correcte de la distància demanada: 3 punts.

3. a)
- Càlcul correcte de $f'(x)$ completament simplificada: 3 punts. Si no es dóna completament simplificada, màxim 1 punt.
- Càlcul correcte de $f''(x)$ completament simplificada: 4 punts. Si no es dóna completament simplificada, màxim 2 punts.

b) Estudi correcte dels màxims i mínims: 3 punts.

4.

a) Càlcul correcte de la primitiva $F(x)$: 7 punts.
b) Càlcul correcte de la integral: 3 punts. Si no s'arriba al resultat correcte, màxim 2 punts.

Opció B

1. a) Càlcul correcte del determinant de la matriu sense desenvolupar: 6 punts. Si es desenvolupa el determinant màxim, 3 punts.

b) Determinació correcta del rang del conjunt de vectors: 4 punts.

2.

- Determinació correcta del punt $C = (0,0,c)$: 6 punts.
- Determinació de l'equació correcta del pla demanat: 4 punts.

3.

- Comprovació, amb el teorema de Bolzano, que l'equació donada té una solució a l'interval]0,1[: 8 punts.
- Justificació que l'equació només té una solució en aquest interval: 2 punts.

4.

a) Expressió correcta de la integral considerant el canvi de variable donat: 4 punts. Si no es realitza i especifica el canvi dels límits d'integració, màxim 2 punts.

b) Càlcul correcte del valor de la integral: 6 punts.

Prova d'accés a la Universitat (2011)

Matemàtiques II

Solucions

Model 3

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.
Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.
Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Opció A

1.

a) De $A^2 = 2\,A - I$ tenim que $I = 2\,A - A^2 = (2I - A)A$, per tant, tenim que A admet inversa per l'esquerra, i aquesta és la matriu $2I - A$. Prenent $A^{-1} = 2I - A$, tenim que

$$A^{-1}A = A\,A^{-1} = I$$

Aleshores A és invertible, i a més, $A^{-1} = 2I - A$.

a)

$$A^{-1} = 2I - A = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.

Equació de la recta que és perpendicular al pla $\pi: x + 2y + z - 1 = 0$ i que passa pel punt $A = (1,3,0)$:

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-0}{1}.$$

La intersecció del pla π amb la recta r és: $P = (0,1,-1)$.
Per calcular el punt $A' = (a,b,c)$ ens basarem en el fet que $\frac{A+A\prime}{2} = P$, d'on s'obté que $A' = (-1,-1,-2)$.

$$d(A',\pi) = d(A',P) = \sqrt{6}.$$

3.

$$f(x) = \frac{3x^2 - 1}{(x^2+1)^2}.$$

a) Calculau $f'(x)$ i $f''(x)$ i donau-ne els resultats completament simplificats (6 punts).

$$f'(x) = \frac{10x - 6x^3}{(1+x^2)^3}\ .\ f''(x) = \frac{2(5 - 34x^2 + 9x^4)}{(1+x^2)^4}.$$

b)

$$f'(x)=0 \Longrightarrow 10x-6x^3=0 \Longrightarrow x=0, x=-\sqrt{\frac{5}{3}}, x=\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{5}{3}}$		0		$+\sqrt{\frac{5}{3}}$		$-\infty$
$Signe\ f'(x)$		$+$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			màxim		*mínim*		*màxim*		

4. $f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}$.

a) Calculau $F(x)$ tal que $F'(x)=f(x)$ per a tot x.

$$F(x)=\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{x^4+1}+C.$$

b) Calculau la integral $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$ (3 punts).

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}\,dx=F(1)-F(0)=\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

Opció B

1. **a)**

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x & 3 & 1 \\ x & 5 & 1 \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

c) El rang del conjunt de vectors $\{(1,-2,0,-3),(-1,3,1,4),(2,1,5,-1)\}$ és 2.

2.

Sabem que l'àrea d'un triangle del qual es coneixen els vèrtexs ve donada per

$$\text{àrea } \overbrace{ABC}^{\triangle}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|$$

$$\overrightarrow{AB}=(-1,2,0),\ \overrightarrow{AC}=(-1,0,c),\ \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(2c,c,2)$$

Utilitzant la identitat anterior s'obté: $\frac{1}{2}\sqrt{5c^2+4}=\sqrt{6} \Longrightarrow c=2$.

Per tant, $C=(0,0,2)$ i l'equació del pla ve donada per:

$$2x+y+z-2=0.$$

3.

Considerem la funció $f(x) = x^3 + \lambda\, x^2 - 2\, x - 1$ i l'interval [0,1]. Observau que aquesta funció és contínua a [0,1] i derivable a (0,1). A més, com que $f(1) = \lambda - 2 > 0$ i $f(0) = -1 < 0$, aplicant el teorema de Bolzano podem dir que existeix un punt $c \in (0,1)$ tal que $f(c) = 0$.

La derivada té dues arrels, de les quals una és negativa i l'altra és a (0,1). Com només hi ha un zero de la derivada entre 0 i 1, i canvia de signe la funció a 0 i a 1, d'aquí es dedueix la unicitat.

4.

a) Si $x = t^2$ aleshores $dx = 2tdt$, a més, si $x = 0 \Rightarrow t = 0$ i $x = 1 \Rightarrow t = 1$, per tant,

$$I = \int_0^1 \frac{2}{3+\sqrt{x}}\, dx = 4\int_0^1 \frac{t}{t+3}\, dt\,.$$

b)

$$I = \int_0^1 \frac{2}{3+\sqrt{x}}\, dx$$

$$= 4\int_0^1 \frac{t}{t+3}\, dt = 4\int_0^1 \left(1 - \frac{3}{3+t}\right) dt = 4[t - 3\ln(3+t)]_{t=0}^{1}$$

$$= 4\left(1 + 3\ ln\frac{3}{4}\right).$$

Prova d'accés a la Universitat (2011)

Matemàtiques II

Model 2

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.
Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.
Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Opció A

1. Determinau l'equació del pla π que passa pel punt $(1,2,1)$ i és paral·lel a les rectes
$$r_1: \begin{cases} x+y-2z=0, \\ 2x-y-z=0. \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} -x-y+z+1=0, \\ y+z-2=0. \end{cases}$$
(10 punts)

2. Considerau la matriu
$$A=\begin{pmatrix} m & 0 & m \\ 0 & m & 4 \\ -1 & 3 & m \end{pmatrix}.$$
   a) Determinau per a quins valors del paràmetre *m* la matriu A no té inversa. (5 punts)
   b) Calculau, si és possible, la matriu inversa de A per a *m*=1. (4 punts)
   c) Si *B* és la matriu inversa de A i det(A)=5, quant val det(*B*) el determinant de *B*? (1 punt)

3. Demostrau que la funció polinòmica $f(x)=x^3-3x+\sqrt{2}$ no pot tenir dues arrels en l'interval $[0,1]$ (6 punts). Quantes arrels té a [0,1]? (4 punts)

4. Calculau l'àrea de la regió limitada por les paràboles $y^2=4x$ i $x^2=4y$ (6 punts). Feu un dibuix aproximat de la figura (4 punts).

Opció B

1. Considerau la matriu
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & x & x \end{pmatrix}.$$
   a) Resoleu l'equació det(*A*)=0 (8 punts)
   b) En quins casos admet inversa la matriu *A*? (2 punts)

2. Obteniu el pla π que passa pel punt $(3,2,7)$ i per la intersecció dels plans
$$\pi_1:\ x-y+z-4=0, \qquad \pi_2:\ x+y-z+7=0.$$
(10 punts)

3. Considerau la funció $f(x)=\dfrac{ke^x}{1+x^2}$.
   a) Determinau el valor de *k* perquè el pendent de la recta tangent a la funció a $x=0$ prengui el valor 3. (6 punts)
   b) Donat el valor de *k* calculat a l'apartat a), estudiau-ne els intervals de creixement i decreixement. (4 punts)

4. Calculau la integral $\int \ln(x+1)\,dx$. (10 punts)

Prova d’accés a la Universitat (2011)

Matemàtiques II

Criteris específics de correcció

Model 2

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d’un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l’alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Opció A

1.

- Determinació del vector director de r_1: 3 punts.
- Determinació del vector director de r_2: 3 punts.
- Determinació de l’equació del pla: 4 punts.

Si no s’arriba a l’equació correcta, màxim 4 punts.

2. a)

- Càlcul correcte del determinant de A: 2 punts.
- Resolució correcta de l’equació det(A) = 0: 2 punts.
- Indicació dels valors per als quals no existeix inversa: 1 punt.

b)

- Justificar que existeix la matriu inversa: 1 punt.
- Càlcul correcte de la inversa de la matriu A quan m = 1: 3 punts.

c)

- Resposta correcta: 1 punt.

3.

- Aplicació correcta del teorema de Rolle per justificar que la funció no pot tenir més d’una arrel a l’interval donat: 6 punts.
- Aplicació correcta del teorema de Bolzano per demostrar que almenys existeix una arrel a l’interval donat: 4 punts.

4.

- Dibuix correcte de la regió: 4 punts.
- Expressió correcta de l’àrea com una integral: 2 punts.
- Càlcul correcte de l’àrea: 4 punts.

Opció B

1. a)

- Càlcul correcte del determinant de la matriu A: 5 punts.
- Solució correcta de l'equació det(A) = 0: 3 punts.

b)

- Assenyalar que la matriu A té inversa quan det(A) $\neq 0$ i donar els valors adequats: 2 punts.

2.

- Càlcul correcte de l'equació del pla: 10 punts. Si no s'arriba a l'equació correcta, màxim 4 punts.

3. a)

- Càlcul correcte de $f'(x)$: 3 punts.
- Solució correcta de l'equació $f'(0)=3$: 3 punts.

b)

- Indicar que la funció és creixent en tot el seu domini justificant la resposta: 4 punts. Si no es dóna cap justificació, màxim 2 punts.

4.

- Càlcul correcte de la integral aplicant el mètode d'integració per parts: 10 punts.

Prova d'accés a la Universitat (2011)

Matemàtiques II

Solucions

Model 2

Opció A

1. Hem de calcular en primer lloc els vectors directors de les rectes r_1 i r_2 que seran els vectors directors del pla π.

   Fent el càlculs adients s'obtenen: $\overrightarrow{d_1} = (1,1,1)$ i $\overrightarrow{d_2} = (2,-1,1)$.

   Com el pla π ha de passar pel punt (1,2,1) tenim que la seva equació bé donada per:
$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ y-2 & -1 & 1 \\ z-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2x + y - 3z - 1 = 0.$$

2. **a)** Per veure que la matriu *A* no té inversa hem d'estudiar quan el seu determinant és distint de zero. Així
$$\det(A) = det\begin{pmatrix} m & 0 & m \\ 0 & m & 4 \\ -1 & 3 & m \end{pmatrix} = m^3 + m^2 - 12m = m(m+4)(m-3)$$
   Per tant, no existeix inversa de la matriu *A* sempre que $\det(A) = 0$, és a dir, si $m = 0, m = -4 \;\; i \;\; m = 3$.

   b) Si $m = 1$, tenim que:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{i, a més,} \qquad \det(A) = -10 \neq 0\,.$$

   La matriu inversa A^{-1} d'una matriu *A* ve donada per l'expressió
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\left((-1)^{i+j}A_{ij}\right)^t.$$
   Així,
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 11/10 & -3/10 & 1/10 \\ 2/5 & -1/5 & 2/5 \\ -1/10 & 3/10 & -1/10 \end{pmatrix}.$$

   c) Si det(A)=5, aleshores det(A^{-1})=det(B)=1/det(A)=1/5.

3. $f(x) = x^3 - 3x + \sqrt{2} \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$. Per tant $f'(x) = 0$ tan sols se satisfà per a $x = \pm 1$ que no pertanyen al interval (0,1). Utilitzant el teorema de Rolle i reducció al absurd es demostra que no poden existir dues arrels al interval [0,1].

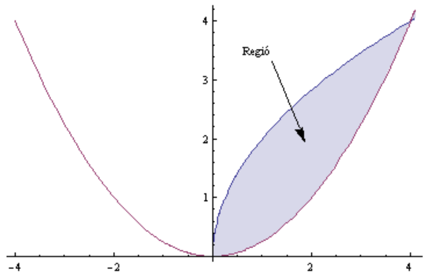
   Com que *f* és una funció contínua al interval [0,1], derivable en (0,1) i a més $f(0) = \sqrt{2} > 0$, $f(1) = -2 + \sqrt{2} < 0$, aplicant el teorema de Bolzano existeix $c \in (0,1)$ tal que $f(c) = 0$.

4. Calculem en primer lloc els punts d'intersecció entre ambdues corbes.

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 4x \\ x^2 = 4y \end{array}\right\} \Longrightarrow x = 0, x = 4.$$

Per tant,l'àrea demana és

$$\mathcal{A} = \left| \int_0^4 (\sqrt{4x} - \frac{x^2}{4}) dx \right| = \frac{16}{3} u^2.$$



Opció B

1. **a)** Aplicant les propietats dels determinants:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 & x \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & 1 & x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & x \\ 0 & x & -x \\ 1 & x & x \end{vmatrix} = 2x^2\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Per tant det(A)=0 si x=0, x=1/2.

b) La matriu A admet inversa si det(A)≠0, i això ocorre quan x≠0 i x≠1/2.

2. L'equació del pla π és

$$-x + 9y - 9z + 48 = 0.$$

Es pot obtenir de diverses maneres.

3. **a)** Hem de calcular la primera derivada i resoldre l'equació $f'(0)$ =3.

$$f'(x) = \frac{ke^x(x-1)^2}{(1+x^2)^2}.$$

$$f'(0) = 3 \Longrightarrow ke^0(0-1)^2 = 3 \Longrightarrow k = 3.$$

b) Com que $f'(x) > 0$ per a tot $x \neq 1$, tenim que $f(x)$ és una funció creixent en $(-\infty, 1)$ i $(1, +\infty)$.

4. Tenim que:

$$\int \ln(x+1)\, dx = (x+1)\ln(x+1) - x + C.$$

Prova d'accés a la Universitat (2012)

Matemàtiques II

Model 3

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.
Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.
Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Opció A

1. a) Calculau totes les matrius 2x2 de la forma $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix}$ que satisfan $A^2=0$. (6 punts)
   b) Demostrau que les matrius de l'apartat anterior no són invertibles. (4 punts)

2. Calculau la recta perpendicular al pla que passa pels punts $P_1(1,1,1), P_2(0,2,1), P_3(0,0,-1)$ i que passa pel punt (0,0,0). (10 punts)

3. Calculau els màxims i mínims relatius de la funció: $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+2x+3}$. (10 punts)

4. Feu un dibuix del recinte limitat per la corba $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3}$ entre els valors $x=0$, $x=1$ i l'eix OX (3 punts). Calculau l'àrea d'aquest recinte. (7 punts)

Opció B

1. a) Calculau la posició relativa de les rectes: $r_1:\begin{cases} x+2y+3z=-1, \\ x+y-z=0, \end{cases}$ $r_2:\begin{cases} x+y=0, \\ 2x+y=1. \end{cases}$ (5 punts)
   b) Calculau, si escau, o bé el punt d'intersecció o bé la recta perpendicular a aquestes dues i que les talli. (5 punts)

2. a) Discutiu el següent sistema d'equacions lineals segons els valors del paràmetre *a*

$$\begin{cases} x+2y+z=-1, \\ x+a\,y-a\,z=0, \\ 3a\,x+6y-3z=-1. \end{cases} \qquad \text{(6 punts)}$$

   b) Resoleu el sistema en el cas en què sigui compatible indeterminat. (4 punts)

3. Sigui a un valor real que està estrictament entre –1 i 1 ($-1<a<1$). Definim la funció següent en funció de a: $f(x)=\frac{1}{3}\cdot x^3+a\cdot x^2+x-3$. Demostrau que la funció anterior només s'anul·la per a un valor de x. (10 punts)

4. Calculau la següent integral indefinida: $\int x\cdot\sqrt[3]{4+x^2}\,dx$ (10 punts)

Matemàtiques II

Criteris específics de correcció

Model 3

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té igual valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Opció A

1. a)

- Càlcul correcte de la fórmula per a A: 5 punts.
- Si no dóna l'expressió de totes les components en funció de a, 2 punts com a màxim.

b)

- Comprovació que el determinant de A és zero: 4 punts.
- Si demostra que el determinant de A és zero però no diu que A no és invertible, màxim 2 punts dels 4 possibles.

2.

- Càlcul del pla que passa pels punts: 5 punts.
- Càlcul de la recta que passa pels punts: 5 punts.
- Si s'equivoca en el pla, però calcula la recta bé d'acord amb "el seu pla", 3 punts com a màxim dels 5 possibles.

3

- Càlcul correcte de *f'(x)*: 3 punts.
- Solució correcta de l'equació *f'(x)=0:* 2 punts.
- Comprovació que les solucions calculades són màxims o mínims: 3 punts.
- Expressió completa dels mínims i màxims: 2 punts. (Si només dóna les coordenades x però no dóna les coordenades y dels màxims i mínims: 1 punt.)

4.

- Dibuix del recinte: 3 punts.
- Expressió correcta de l'àrea com una integral i càlcul correcte de l'àrea: 5 punts. Si no s'arriba al valor correcte de l'àrea, màxim 3 punts dels 7 possibles.

Opció B

1.

- Comprovació que les rectes es tallen: 5 punts.
- Càlcul de la recta perpendicular: 5 punts.
- Si s'equivoca i diu que les rectes es creuen i calcula correctament la recta perpendicular al pla que delimiten les dues rectes que passa pel punt de intersecció: màxim 3 punts dels 5 possibles.

2.

- Càlcul correcte del determinant de la matriu del sistema i determinació dels valors de a: 2 punts.
- Discussió del sistema en funció dels valors de a calculats prèviament: 4 punts.
- Solució correcta del sistema quan $a=-1$: 2 punts.
- Solució correcta del sistema quan $a=4/3$: 2 punts
- Si no s'arriba a la solució del sistema en cada cas, màxim 1 punt dels 2 possibles. (Restau 0.25 punts per cada component de la solució que estigui malament. Si té totes les components malament: 0 punts.)

3.

- Càlcul correcte de $f'(x)$: 2 punts.
- Comprovació que la derivada no té solució: 2 punts.
- Aplicació del teorema de Rolle i afirmar que $f(x)=0$ té com a màxim 1 solució: 2 punts.
- Calcular el canvi de signe entre 0 i 3: 2 punts. (Si s'ha equivocat però calcula el canvi de signe, 1 punt com a màxim.)
- Aplicació del teorema de Bolzano: 2 punts.

4.

- Càlcul correcte de la integral indefinida: 10 punts.
- Si fa el canvi de variable correcte però s'equivoca en el càlcul de la integral, 5 punts com a màxim.

Prova d'accés a la Universitat (2012)

Matemàtiques II

Model 3. Solucions

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.
Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.
Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Opció A

1. a) Calculau totes les matrius 2x2 de la forma $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix}$ que satisfan $A^2=0$. (6 punts)
   b) Demostrau que les matrius de l'apartat anterior no són invertibles. (4 punts)

   SOLUCIÓ

   a) Calculem $A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b & ab+bd \\ a+d & b+d^2 \end{pmatrix}$. Tenim, per tant, que $a^2+b=0, b(a+d)=0, a+d=0, b+d^2=0$. Per tant, $d=-a, b=-a^2$. Les matrius seran de la forma $A=\begin{pmatrix} a & -a^2 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$.
   b) Suposem que una matriu A de l'apartat anterior és invertible. Si multiplicam per A^{-1} l'expressió $A^2=0$ resulta que $A=0$, però això és absurd, ja que $A\neq 0$. Per tant, les matrius no són invertibles.

2. Calculau la recta perpendicular al pla que passa pels punts $P_1(1,1,1), P_2(0,2,1), P_3(0,0,-1)$ i que passa pel punt (0,0,0). (10 punts)

   SOLUCIÓ

   Calculem primer el pla. Els vectors directors del pla seran el P2P1=(-1,1,0) i el P3P1=(-1,-1,-2). El pla serà:
   $$\begin{vmatrix} x & y & z+1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}=0,\quad -2x+z+1-(-(z+1)+2y)=0,$$
   $-2x-2y+2z+2=0,\ x+y-z-1=0.$
   El vector director de la recta serà el perpendicular al pla: v(1,1,-1). La recta serà: $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$.

3. Calculau els màxims i mínims relatius de la funció: $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+2x+3}$. (10 punts)

SOLUCIÓ

Derivant la funció anterior i igualant a zero, obtenim:

$$f'(x)=\frac{2(x^2+2x+3)-(2x+1)(2x+2)}{(x^2+2x+3)^2}=$$
$$=\frac{2x^2+4x+6-(4x^2+4x+2x+2)}{(x^2+2x+3)^2}=\frac{-2x^2-2x+4}{(x^2+2x+3)^2}=0.$$

Obtenim com a solucions de l'equació anterior x=1,x=-2. Estudiem si són màxims, mínims o punts crítics:

x	$-\infty$	-2	1	∞
f'(x)	-	+	-	
f(x)	↘	↗	↘	

Tenim que a x=-2 hi ha un mínim i a x=1 hi ha un màxim. Els extrems seran (-2, -1) mínim i (1,1/2) màxim.

4. Feu un dibuix del recinte limitat per la corba $f(x)=\frac{x}{x^2+3}$ entre els valors $x=0$, $x=1$ i l'eix OX (3 punts). Calculau l'àrea d'aquest recinte. (7 punts)

SOLUCIÓ

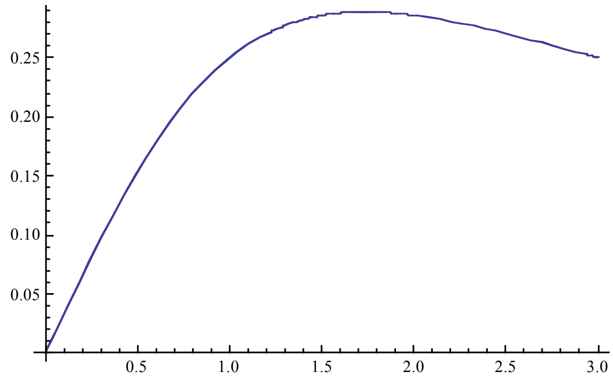
Per fer un dibuix de la funció anterior, ens adonam que la funció passa pel punt (0,0) i si calculam la derivada podem trobar els extrems:

$$f'(x)=\frac{x^2+3-2x\cdot x}{(x^2+3)^2}=\frac{-x^2+3}{(x^2+3)^2}=0.$$

La funció anterior tindrà dos possibles extrems a $x=\pm\sqrt{3}$. Si fem la taula de la derivada, obtenim:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	∞
f'(x)	-	+	-	
f(x)	↘	↗	↘	

Per tant, la funció f(x) té un mínim a $\left(-\sqrt{3},\frac{-\sqrt{3}}{6}\right)$ i un màxim a $\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$. Observam també que té una asímptota horitzontal a y=0. El gràfic de la funció per a x entre 0 i 3 serà:



L'àrea del recinte valdrà:

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+3}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+3}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+3)\right]_0^1 = \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 3) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

Opció B

1\. a) Calculau la posició relativa de les rectes: $r_1:\begin{cases} x+2y+3z=-1, \\ x+y-z=0, \end{cases}$ $r_2:\begin{cases} x+y=0, \\ 2x+y=1. \end{cases}$ (5 punts)

b) Calculau, si escau, o bé el punt d'intersecció o bé la recta perpendicular a aquestes dues i que les talli. (5 punts)

SOLUCIÓ

a) Per veure si les rectes es tallen o es creuen, hem de veure que el sistema d'equacions conjunt té solució, o que el rang de les matrius del sistema i de l'ampliada és 3. El sistema d'equacions és:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+3z=-1, \\ x+y-z=0, \\ x+y=0, \\ 2x+y=1. \end{array}\right\}$$

La matriu del sistema és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per veure que el rang de la matriu ampliada és 3, hem de veure que el determinant de la matriu anterior és 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}_{f_4+f_1} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -(3-3-(-3+3)) = 0.$$

El rang de la matriu ampliada és 3 o menor. Vegem que el rang de la matriu del sistema i de l'ampliada és 3 veient que un menor d'ordre 3 és diferent de 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2+3-(3-1) = -1.$$

b) Calculem a continuació el punt de tall resolent el sistema següent:

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=0, \\ x+y=0, \\ 2x+y=1, \end{array}\right\}$$

Restant la tercera de la segona equació, obtenim x=1. Per tant, de la segona equació, deduïm que y=-1 i de la primera, z=x+y=0. El punt de tall serà (1,-1,0)

2. a) Discutiu el següent sistema d'equacions lineals segons els valors del paràmetre *a*

$$\left\{\begin{array}{r} x+2y+z=-1, \\ x+a\,y-a\,z=0, \\ 3a\,x+6y-3z=-1. \end{array}\right. \qquad \text{(6 punts)}$$

b) Resoleu el sistema en el cas en què sigui compatible indeterminat. (4 punts)

SOLUCIÓ

a) Calculem el determinant del sistema:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & -a \\ 3a & 6 & -3 \end{vmatrix} = -3a-6a^2+6-(3a^2-6-6a) = -9a^2+3a+12.$$

Igualant el determinant anterior a 0, obtenim dos valors de a: $-9a^2+3a+12=0, \Rightarrow a=-1, a=\frac{4}{3}$. Si a és diferent de -1 i de 4/3, el rang de la matriu del sistema i de l'ampliada serà 3 i el sistema serà compatible determinat; o sigui, tindrà solució única.

Estudiem els dos casos restants.

a=-1. La matriu ampliada serà: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. Si fem el determinant de les tres darreres columnes, obtenim: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -2-3-(-6+1) = 0.$ El rang de la matriu del sistema serà 2, ja que, per exemple, el menor següent no és nul ($\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2-(-1) = 3 \neq 0$) i de l'ampliada serà 2. Per tant, el sistema serà compatible indeterminat; o sigui, tindrà múltiples solucions.

a=4/3. La matriu ampliada serà: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4/3 & -4/3 & 0 \\ 4 & 6 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. Si fem el determinant de les tres darreres columnes, obtenim: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4/3 & -4/3 & 0 \\ 6 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{8}{3} + 4 - \left(8 - \frac{4}{3}\right) = 0.$

El rang de la matriu del sistema serà 2, ja que, per exemple, el menor següent no és nul ($\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4/3 & -4/3 \end{vmatrix} = -\frac{8}{3} - \frac{4}{3} = -4 \neq 0$) i de l'ampliada serà 2. Per tant, el sistema serà compatible indeterminat; o sigui, tindrà múltiples solucions.

b) Hem de resoldre el sistema per a=-1 i per a=4/3.

a=-1:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+z=-1 \\ x-y+z=0 \\ -x+2y-z=-1/3 \end{array}\right\}$$

Eliminem la tercera fila, ja que el rang de les matrius és 2. El sistema que hem de resoldre és: $\left.\begin{array}{l} x+2y=-1-z \\ x-y=-z \end{array}\right\}$.

Restant les dues equacions anteriors, calculam el valor de y: y=-1/3. La x serà: x=-z+y=-1/3-z, amb z lliure.

a=4/3:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+z=-1 \\ x+4/3y-4/3z=0 \\ 4/3x+2y-z=-1/3 \end{array}\right\}$$

Eliminam la tercera fila, ja que el rang de les matrius és 2. El sistema que hem de resoldre és: $\left.\begin{array}{l} x+2y=-1-z \\ x+4/3y=4/3z \end{array}\right\}$ Restant les dues equacions anteriors, calculam el valor de y: y=-3/2-7/2z. La x serà:

X=-1-z-2y=-1-z+3+7z=2+6z amb z lliure.

3. Sigui a un valor real que està estrictament entre –1 i 1 ($-1 < a < 1$). Definim la funció següent en funció de a: $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + a \cdot x^2 + x - 3$. Demostrau que la funció anterior només s'anul·la per a un valor de x. (10 punts)

SOLUCIÓ

Calculam primer els possibles valors que anul·len la derivada: $f'(x) = x^2 + 2ax + 1 = 0, \Rightarrow x = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 4}}{2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$. Com que a està entre -1 i 1, el discriminant de l'equació anterior és negatiu i, per tant, l'equació anterior no té solució i la derivada no s'anul·la per a cap punt. Fent servir el teorema de Rolle, podem deduir que hi ha com a màxim un valor que anul·la f(x), ja que, si n'hi hagués dos, $x_1 < x_2$, tals que $f(x_1) = f(x_2) = 0$, fent servir el teorema de Rolle, podem deduir que existeix un valor

$x_{12} \in (x_1, x_2)$ tal que $f'(x_{12}) = 0$, però això no pot ser, ja que sabem que la derivada no es pot anul·lar.
Ara mirem de trobar un canvi de signe en la funció: $f(0) = -3 < 0$, $f(3) = 9 + 9a > 0$. Per tant, fent servir el teorema de Bolzano, podem dir que existeix un valor c entre 0 i 3 tal que f(c)=0.

4. Calculau la següent integral indefinida: $\int x \cdot \sqrt[3]{4+x^2}\, dx$ (10 punts)

SOLUCIÓ

Fem el canvi de variable $t = 4 + x^2$. Tenim que dt=2xdx. Per tant, xdx=dt/2 i substituint a la integral, ens surt:

$$\frac{1}{2}\int \sqrt[3]{t}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{1/3+1}}{(1/3+1)} + C = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}(4+x^2)^{4/3} + C = \frac{3}{8}\cdot\sqrt[3]{(4+x^2)^4} + C.$$

Prova d'accés a la Universitat (2012)

Matemàtiques II

Model 2

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.
Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.
Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Opció A

1. **a)** Calculau totes les matrius 2x2 de la forma $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ c & -2-a \end{pmatrix}$ que satisfan $A^2+2\cdot A+3\cdot I=0,$ on I és la matriu identitat. O sigui, calculau l'expressió de c en funció de a. (5 punts)
   b) Demostrau que les matrius de l'apartat anterior són invertibles i calculau la seva inversa. (5 punts)
2. Demostrau que les rectes següents es tallen (5 punts) i calculau el punt de tall: (5 punts)
   $r_1:\begin{cases} x+2y+3z=-1, \\ y-z=2, \end{cases}$ $r_2:\begin{cases} x+y+z=-1, \\ 2x+z=-4. \end{cases}$
3. Sigui a un valor estrictament positiu. Considerem la funció polinòmica dependent de a: $f(x)=x^3+a\cdot x+1.$
   a) Demostrau que l'equació $f(x)=0$ només pot tenir com a màxim una solució. (5 punts)
   b) Demostrau que la solució de l'apartat anterior existeix i està entre -1 i 0. (5 punts)

4. Feu un dibuix del recinte limitat per la corba $f(x)=\dfrac{x^2}{x+2}$ entre els valors $x=-1$, $x=1$ i l'eix OX (3 punts). Calculau l'àrea d'aquest recinte (7 punts).

Opció B

1. Demostrau que el punts $P_1(2,1,1), P_2(5,2,1), P_3(9,1,0), P_4(11,4,1)$ són coplanaris (5 punts) i calculau l'equació del pla que els conté. (5 punts)
2. Discutiu el següent sistema d'equacions lineals segons els valors del paràmetre *b*
   $$\begin{cases} 3\,x+6y+9\,z=1, \\ 3\,x+b\,y+b\,z=1, \\ b\,x+y-z=1. \end{cases} \qquad \text{(7 punts)}$$
   Resoleu el sistema en el cas en què sigui compatible indeterminat. (3 punts).
3. Determinau els màxims i mínims de la funció: $f(x)=\dfrac{1+x}{1+x+x^2}$. (10 punts)
4. Calculau la següent integral indefinida: $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2+4}\,dx.$ (10 punts)

Matemàtiques II

Criteris específics de correcció

Model 2

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té igual valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Opció A

1. a)

- Càlcul correcte de la fórmula per a A: 5 punts.
- Si no dóna l'expressió de c en funció de a, 2 punts com a màxim.

b)

- Comprovació que el determinant de A no és zero: 2 punts.
- Càlcul correcte de la inversa de A: 3 punts. (Si deixa la inversa sense simplificar correctament, 2 punts com a màxim.)

2.

- Comprovació que les rectes es tallen: 5 punts.
- Càlcul del punt de tall: 5 punts. (Restau un punt per cada component que estigui malament. Si totes les components estan malament: 0 punts.)

3

a)

- Càlcul correcte de *f'(x)*: 2 punts.
- Comprovació que la derivada no té solució: 2 punts.
- Aplicació del teorema de Rolle i afirmar que f(x)=0 té com a màxim 1 solució: 2 punts.

b)

- Calcular el canvi de signe entre -1 i 0: 2 punts. (Si s'ha equivocat però calcula el canvi de signe, 1 punt com a màxim.)
- Aplicació del teorema de Bolzano: 2 punts.

4.

- Dibuix del recinte: 3 punts.
- Expressió correcta de l'àrea com una integral i càlcul correcte de l'àrea: 5 punts. Si no s'arriba al valor correcte de l'àrea, màxim 3 punts dels 7 possibles.

Opció B

1. Demostració que els quatre punts són coplanaris: 5 punts

Equació del pla que els conté: 5 punts.

Si s'ha equivocat en l'equació del pla: màxim 3 punts dels 5.

2.

- Càlcul correcte del determinant de la matriu del sistema i determinació dels valors de *b*: 2 punts.
- Discussió del sistema en funció dels valors de *b* calculats prèviament: 5 punts.
- Solució correcta del sistema quan $b=3$: 3 punts. Si no s'arriba a la solució del sistema, màxim 2 punts dels 3 possibles. (Restau 1 punt per cada component de la solució que estigui malament. Si té totes les components malament: 0 punts.)

3.

- Càlcul correcte de $f'(x)$: 3 punts.
- Solució correcta de l'equació $f'(x)=0$: 2 punts.
- Comprovació que les solucions trobades són màxims o mínims: 3 punts.
- Expressió completa dels mínims i màxims: 2 punts. (Si només dóna les coordenades x però no dóna les coordenades y dels màxims i mínims: 1 punt)

4.

- Càlcul correcte de la integral indefinida: 10 punts.
- Si fa el canvi de variable correcte però s'equivoca en el càlcul de la integral, 5 punts com a màxim.

Prova d'accés a la Universitat (2012)

Matemàtiques II

Model 2. Solucions

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.
Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.
Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Opció A

1. **a)** Calculau totes les matrius 2x2 de la forma $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ c & -2-a \end{pmatrix}$ que satisfan $A^2+2\cdot A+3\cdot I=0,$ on I és la matriu identitat. O sigui, calculau l'expressió de c en funció de a. (5 punts)
   b) Demostrau que les matrius de l'apartat anterior són invertibles i calculau la seva inversa. (5 punts) (5 punts)

   SOLUCIÓ

   a) Calculem $A^2+2\cdot A+3\cdot I=0,$

$$A^2+2A+3I=\begin{pmatrix} a & 1 \\ c & -2-a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 1 \\ c & -2-a \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} a & 1 \\ c & -2-a \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a^2+c & -2 \\ -2c & c+(2+a)^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2a & 2 \\ 2c & -4-2a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+2a+c+3 & 0 \\ 0 & a^2+2a+c+3 \end{pmatrix}.$$

Per tant, s'ha de satisfer $a^2+2a+c+3=0,$ o $c=-a^2-2a-3.$

b) Les matrius seran de la forma: $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ -a^2-2a-3 & -2-a \end{pmatrix}.$

Si calculam el seu determinant, tenim que $\det(A)=a(-2-a)+a^2+2a+3=3.$ Com que el determinant és no nul, la matriu serà invertible. De cara a calcular la seva inversa multiplicam per A^{-1} l'expressió $A^2+2\cdot A+3\cdot I=0,$ i obtenim $A+2\cdot I+3\cdot A^{-1}=0,$ d'on obtenim

$$A^{-1}=-\frac{1}{3}(A+2I)=-\frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} a & 1 \\ -a^2-2a-3 & -2-a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ -a^2-2a-3 & -a \end{pmatrix}.$$

2. Demostrau que les rectes següents es tallen (5 punts) i calculau el punt de tall: (5 punts)

$$r_1:\begin{cases} x+2y+3z=-1, \\ y-z=2, \end{cases} \quad r_2:\begin{cases} x+y+z=-1, \\ 2x+z=-4. \end{cases}$$

SOLUCIÓ

Per veure que es tallen, hem de veure que el sistema d'equacions conjunt té solució, o que el rang de les matrius del sistema i de l'ampliada és 3. El sistema d'equacions és:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+3z=-1, \\ y-z=2, \\ x+y+z=-1, \\ 2x+z=-4. \end{array}\right\}$$

La matriu del sistema és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Per veure que el rang de la matriu ampliada és 3, hem de veure que el determinant de la matriu anterior és 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -2 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ f_3-f_1 \\ f_4-2f_1 \end{array} == \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ -4 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 4+10-(16-2)=0.$$

El rang de la matriu ampliada és 3 o menor. Vegem que el rang de la matriu del sistema i de l'ampliada és 3 vegent que un menor d'ordre 3 és diferent de 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-2-(3-1) = -1-2 = -3.$$

Calculem a continuació el punt de tall resolent el sistema següent:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+3z=-1, \\ y-z=2, \\ x+y+z=-1, \end{array}\right\}$$

Restant la primera de la tercera equació, obtenim y+2z=0. Restant d'aquesta equació la segona, obtenim 3z=-2, d'on z=-2/3 i y=-2z=4/3. La x valdrà:

x=-1-y-z=-1+2/3-4/3=-5/3.

3. Sigui a un valor estrictament positiu. Considerem la funció polinòmica dependent de a: $f(x)=x^3+a\cdot x+1.$

   a) Demostrau que l'equació $f(x)=0$ només pot tenir com a màxim una solució. (5 punts)

   b) Demostrau que la solució de l'apartat anterior existeix i està entre -1 i 0. (5 punts)

SOLUCIÓ

a) Calculem primer els possibles valors que anul·len la derivada: $f'(x) = 3x^2 + a = 0, \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{a}{3}}$. Com que a és positiu, l'equació anterior no té solució i la derivada no s'anul·la per cap punt. Fent servir el teorema de Rolle, podem deduir que hi ha com a màxim un valor que anul·la f(x), ja que si n'hi hagués dos $x_1 < x_2$ tals que $f(x_1) = f(x_2) = 0$, fent servir el teorema de Rolle, podem deduir que existeix un valor $x_{12} \in (x_1, x_2)$ tal que $f'(x_{12}) = 0$, però això no pot ser ja que sabem que la derivada no es pot anul·lar.

b) Ara mirem de trobar un canvi de signe en la funció: $f(-1) = -1 - a + 1 = -a < 0,\ f(0) = 1 > 0,$ per tant, fent servir el teorema de Bolzano, podem dir que existeix un valor c entre -1 i 0 tal que f(c)=0.

4. Feu un dibuix del recinte limitat per la corba $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$ entre els valors $x = -1$, $x = 1$ i l'eix OX (3 punts). Calculau l'àrea d'aquest recinte (7 punts).

SOLUCIÓ

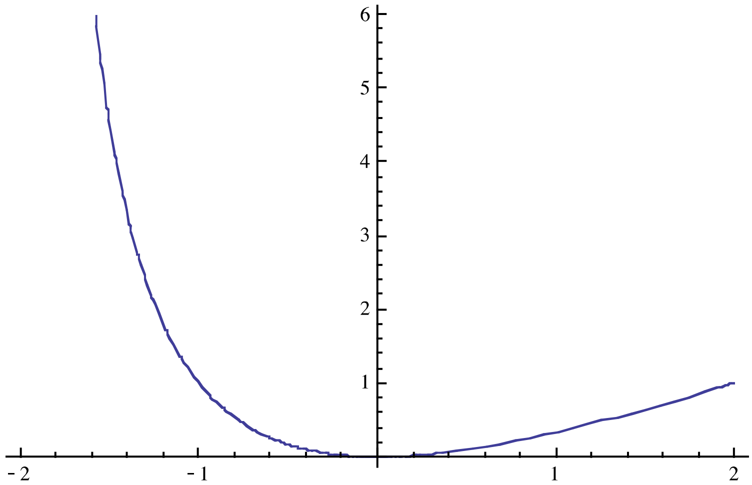
Per fer un dibuix de la funció anterior, ens adonam que la funció passa pel punt (0,0) i si calculam la derivada podem trobar els extrems:

$$f'(x) = \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2} = 0.$$

La funció anterior tindrà dos possibles extrems a x=0 i x=-4. Si fem la taula de la derivada, obtenim:

x	$-\infty$		-4		-2		0		∞
f'(x)		+		-		-		+	
f(x)		↗		↘		↘		↗	

Per tant, la funció f(x) té un mínim a (0,0) i un màxim a
(-4,-8). Observem també que té una asímptota vertical a x=-2. El gràfic de la funció per a x entre -2 i 2 serà:



L'àrea del recinte valdrà:

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{x+2}dx=\int_{-1}^{1}\left((x-2)+\frac{4}{x+2}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-2x+4\ln(x+2)\right]_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{1}{2}-2+4\ln 3-\left(\frac{1}{2}+2+4\ln 1\right)=-4+4\ln 3.$$

Opció B

1. Demostrau que el punts $P_1(2,1,1), P_2(5,2,1), P_3(9,1,0), P_4(11,4,1)$ són coplanaris (5 punts) i calculau l'equació del pla que els conté. (5 punts)

   SOLUCIÓ
   Per demostrar que són coplanaris, vegem que el rang de la matriu formada pels vectors P2P1, P3P1 i P4P1 és 2.

   P2P1=(3,1,0), P3P1=(7,0,-1), P4P1=(9,3,0). La matriu resultant és: $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Calculem el determinant: det=-9-(-9)=0. Per tant, el rang serà menor que 3, però tenim un menor d'ordre 2 (el format per les dues primeres files i columnes), que vaL -7. Per tant, el rang és 2 i els 4 punts són coplanaris.

   L'equació del pla que els conté val:

   $$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0,\ -(x-2)-(7(z-1)-3(y-1))=0,$$

   $$-x+3y-7z+6=0,\ x-3y+7z-6=0.$$

2. Discutiu el següent sistema d'equacions lineals segons els valors del paràmetre b

   $$\begin{cases} 3\,x+6y+9\,z=1, \\ 3\,x+b\,y+b\,z=1, \\ b\,x+y-z=1. \end{cases} \qquad \text{(7 punts)}$$

   Resoleu el sistema en el cas en què sigui compatible indeterminat. (3 punts).

   SOLUCIÓ

   a) Calculem el determinant del sistema:

   $$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 3 & b & b \\ b & 1 & -1 \end{vmatrix}=-3b+6b^2+27-(9b^2-18+3b)=-3b^2-6b+45.$$

   Igualant el determinant anterior a 0, obtenim dos valors de b: $b^2+2b-15=0,\Rightarrow b=-5, b=3.$ Si b és diferent de -5 i de 3, el rang de la matriu del sistema i de l'ampliada serà 3 i el sistema serà compatible determinat; o sigui, tindrà solució única.

Estudiem els dos casos restants.

b=-5. La matriu ampliada serà: $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 1 \\ 3 & -5 & -5 & 1 \\ -5 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Si fem el determinant de les tres darreres columnes, obtenim:

$\begin{vmatrix} 6 & 9 & 1 \\ -5 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -30+9+5-(-5-45-6)=40.$. El rang de la matriu del sistema serà 2, ja que, per exemple, el menor següent no és nul ($\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -15-18=-33 \neq 0$) i de l'ampliada serà 3. Per tant, el sistema serà incompatible; o sigui, no tindrà cap solució.

b=3. La matriu ampliada serà: $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Si fem el determinant de les tres darreres columnes, obtenim: $\begin{vmatrix} 6 & 9 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 18+9-3-(3+27-6)=0$. El rang de la matriu del sistema serà 2, ja que, per exemple, el menor següent no és nul ($\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -15-18=-33 \neq 0$) i de l'ampliada serà 2. Per tant, el sistema serà compatible indeterminat; o sigui, tindrà múltiples solucions.

b) Hem de resoldre el sistema per a b=3:

$$\left.\begin{aligned} 3x+6y+9z&=1 \\ 3x+3y+3z&=1 \\ 3x+y-z&=1 \end{aligned}\right\}$$

Eliminem la primera fila ja que el rang de les matrius és 2. El sistema que hem de resoldre és: $\left.\begin{aligned} 3x+3y&=1-3z \\ 3x+y&=1+z \end{aligned}\right\}$.

Restant les dues equacions anteriors, trobem el valor de y: y=-2z. La x serà: x=(1+z-y)/3=(1+z+2z)/3=(1+3z)/3=1/3+z, amb z lliure.

3. Determinau els màxims i mínims de la funció: $f(x)=\dfrac{1+x}{1+x+x^2}$. (10 punts)

SOLUCIÓ

Derivant la funció anterior i igualant a zero, obtenim:

$$f'(x)=\frac{(1+x+x^2)-(2x+1)(x+1)}{(1+x+x^2)^2}=$$

$$=\frac{1+x+x^2-(2x^2+2x+x+1)}{(1+x+x^2)^2}=\frac{-x^2-2x}{(1+x+x^2)^2}=0.$$

Obtenim com a solucions de l'equació anterior x=0, x=-2. Estudiem si són màxims, mínims o punts crítics:

x	$-\infty$		-2		0		∞
f'(x)		-		+		-	
f(x)		↘		↗		↘	

Tenim que a x=-2 hi ha un mínim i a x=0 hi ha un màxim. Els extrems seran (-2, -1/3) mínim i (0,1) màxim.

4. Calculau la següent integral indefinida: $\int \frac{1}{2x^2+4}dx.$ (10 punts)

SOLUCIÓ

Primer traiem el 4 fora de la integral:

$\int \frac{1}{2x^2+4}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\frac{2}{4}x^2+1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\frac{1}{2}x^2+1}dx$. A continuació fem el canvi de variable $t = \frac{x}{\sqrt{2}}$ Tenim que $dt = \frac{dx}{\sqrt{2}}$, d'on $dx = \sqrt{2}dt$ i substituint a la integral, ens surt:

$$\frac{1}{4}\int \frac{\sqrt{2}dt}{1+t^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}arctg(t) + C = \frac{\sqrt{2}}{4}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

Matemàtiques II

Model 1

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1 (a) Donada la matriu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a+2 & a-1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, calculau els valors de a per als quals la matriu $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}$ no tingui inversa. (6 punts)

(b) Suposant que $a = 1$, trobau totes les matrius $\mathbf{X}$ que satisfan $\mathbf{AX} + \mathbf{Id} = \mathbf{A}$, on $\mathbf{Id}$ és la matriu identitat. (4 punts)

2 (a) Discutiu per a quins valors de a i b el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{aligned} ax + (2a+1)y - az &= 1, \\ ax + y - az &= -2b, \\ ay + (1-a)z &= b. \end{aligned}\right\}$$

(7 punts)

(b) Resoleu-lo en el cas (o els casos) en què sigui compatible indeterminat. (3 punts)

3 Considerem la funció $f(x) = \frac{\sin x}{\frac{1}{2} + \cos x}$.

(a) Verificau que $f(0) = f(\pi) = 0$. (1 punt)

(b) Comprovau que l'equació $f'(x) = 0$ no té cap solució a l'interval $(0, \pi)$. (4 punts)

(c) Explicau per què no es pot aplicar el teorema de Rolle en aquest cas. (5 punts)

4 Feu un dibuix del recinte limitat per les corbes $y_1(x) = \frac{1}{x}$, $y_2(x) = 4x$ i $y_3(x) = \frac{1}{4}x$, per als valors de x positius. (4 punts) Calculau l'àrea d'aquest recinte. (6 punts)

Matemàtiques II

Model 1

OPCIÓ B

1 Donat el punt $P(1,1,1)$ i el pla $\pi : x - y + z = 5$.

(a) Calculau les equacions contínues de la recta perpendicular al pla π que passa pel punt P. (4 punts)

(b) Calculau el simètric del punt P respecte del pla π. (6 punts)

2 (a) Discutiu per a quins valors de a el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{array}{rr} ax + (2a+1)y + (1-a)z = & 0, \\ 3ax + az = & a, \\ ax + ay + (1-a)z = & 0. \end{array}\right\}$$

(7 punts)

(b) Resoleu-lo en el cas (o els casos) en què sigui compatible indeterminat. (3 punts)

3 Sigui la funció $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$.

(a) Calculau les asímptotes de la funció $f(x)$. (3 punts)

(b) Calculau els extrems de la funció $f(x)$. (7 punts)

4 Calculau la següent integral indefinida $\int \frac{x^3}{x^2-5x+6}\,dx$. (10 punts)

Prova d'accés a la Universitat (2013)

Matemàtiques II

Model 1

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1 (a) Donada la matriu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a+2 & a-1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, calculau els valors de a per als quals la matriu $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}$ no tingui inversa. (6 punts)

(b) Suposant que $a = 1$, trobau totes les matrius $\mathbf{X}$ que satisfan $\mathbf{AX} + \mathbf{Id} = \mathbf{A}$, on $\mathbf{Id}$ és la matriu identitat. (4 punts)

SOLUCIÓ

(a) Si calculam $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}$ obtenim:

$$\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a(a+4)+1 & (a-1)(2a+1) \\ 2a+1 & a^2-1 \end{pmatrix}.$$

Perquè la matriu anterior no tingui inversa, el seu determinant ha d'ésser nul. Si calculam el seu determinant, obtenim: $\det(\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}) = a^4 - a$. Resolent l'equació $a^4 - a = 0$, obtenim que a pot ésser: $a = 0, 1$.

(b) Suposem que $a = 1$. Diem a la matriu $\mathbf{X}$ de la forma següent: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Si fem $\mathbf{AX} + \mathbf{Id}$, obtenim $\begin{pmatrix} 3x+1 & 3y \\ x+z & y+t+1 \end{pmatrix}$. Igualant la matriu anterior a la matriu $\mathbf{A}$ quan $a = 1$, $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, obtenim que $x = \frac{2}{3}$, $y = 0$, $z = \frac{1}{3}$, $t = 0$. Per tant, les matrius $\mathbf{X}$ seran de la forma: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

2 (a) Discutiu per a quins valors de a i b el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{aligned} ax + (2a+1)y - az &= 1, \\ ax + y - az &= -2b, \\ ay + (1-a)z &= b. \end{aligned}\right\}$$

(7 punts)

(b) Resoleu-lo en el cas (o els casos) en què sigui compatible indeterminat. (3 punts)

SOLUCIÓ

(a) La matriu del sistema $\mathbf{A}$ i la matriu ampliada $\overline{\mathbf{A}}$ només depenen d'un paràmetre (el paràmetre a) i són les següents:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 2a+1 & -a \\ a & 1 & -a \\ 0 & a & 1-a \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a & 2a+1 & -a & 1 \\ a & 1 & -a & -2b \\ 0 & a & 1-a & b \end{pmatrix}.$$

El determinant de la matriu del sistema $\mathbf{A}$ val: $\det(\mathbf{A}) = 2a^3 - 2a^2$. Si resolem l'equació $2a^3 - 2a^2 = 0$, obtenim que $a = 0, 1$. Per tant, tenim que si $a \neq 0, 1$, el rang de les matrius $\mathbf{A}$ i $\overline{\mathbf{A}}$ serà 3 i el sistema serà compatible determinat.

Falta estudiar els casos $a = 0$ i $a = 1$. Per estudiar aquests dos casos i fixat el paràmetre a, estudiarem el rang de la matriu ampliada que és on intervé el paràmetre b.

Per $a = 0$, la matriu del sistema és: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matriu ampliada és: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2b \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$. El rang de la matriu $\mathbf{A}$ val clarament 2.

Per calcular el rang de la matriu ampliada fem el determinant següent:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2b \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = 2b + 1.$$

Per tant, si $b \neq -\frac{1}{2}$, el rang de la matriu $\overline{\mathbf{A}}$ serà 3 i el sistema serà incompatible. Per a $b = -\frac{1}{2}$ el rang de la matriu $\overline{\mathbf{A}}$ serà 2 i el sistema serà compatible indeterminat.

Si $a = 1$, la matriu del sistema serà: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La matriu ampliada és: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2b \\ 0 & 1 & 0 & b \end{pmatrix}$. El rang de la matriu $\mathbf{A}$ val clarament 2.

Per calcular el rang de la matriu ampliada fem el determinant següent:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2b \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = 1.$$

Com que el determinant val 1, el rang de la matriu ampliada serà 3 i el sistema serà incompatible.

Com es pot veure, de cara a la discussió de la compatibilitat del sistema, només intervé un sol paràmetre.

(b) Hem de solucionar el sistema per a $a = 0$ i $b = -\frac{1}{2}$. El sistema a resoldre és:

$$\left.\begin{array}{rl} y = & 1, \\ y = & 1, \\ z = & -\frac{1}{2}. \end{array}\right\}$$

Les solucions són: $y = 1,\ z = -\frac{1}{2}$ i la x lliure.

$\boxed{3}$ Considerem la funció $f(x) = \frac{\sin x}{\frac{1}{2}+\cos x}$.

(a) Verificau que $f(0) = f(\pi) = 0$. (1 punt)

(b) Comprovau que l'equació $f'(x) = 0$ no té cap solució a l'interval $(0, \pi)$. (4 punts)

(c) Explicau per què no es pot aplicar el teorema de Rolle en aquest cas. (5 punts)

SOLUCIÓ

(a) $f(0) = f(\pi) = 0$, ja que $\sin 0 = \sin \pi = 0$.

(b) La derivada $f'(x)$ val: $f'(x) = \frac{2(\cos(x)+2)}{(2\cos(x)+1)^2}$. Per trobar x tal que $f'(x) = 0$, hem de resoldre: $2 + \cos x = 0$, o si es vol $\cos x = -2$. Com que la funció $\cos x$ està entre -1 i 1, l'equació anterior no té solució.

(c) Per poder aplicar el teorema de Rolle, necessitam que la funció $f(x)$ sigui derivable a l'interval d'aplicació; en el nostre cas, $(0, \pi)$. Ara bé, veiem que la funció $f(x)$ no és contínua i, per tant, no és derivable quan $\frac{1}{2} + \cos x = 0$, o $x = \frac{2\pi}{3}$, valor que està a l'interval $(0, \pi)$. En resum, no podem aplicar el teorema de Rolle en aquest cas.

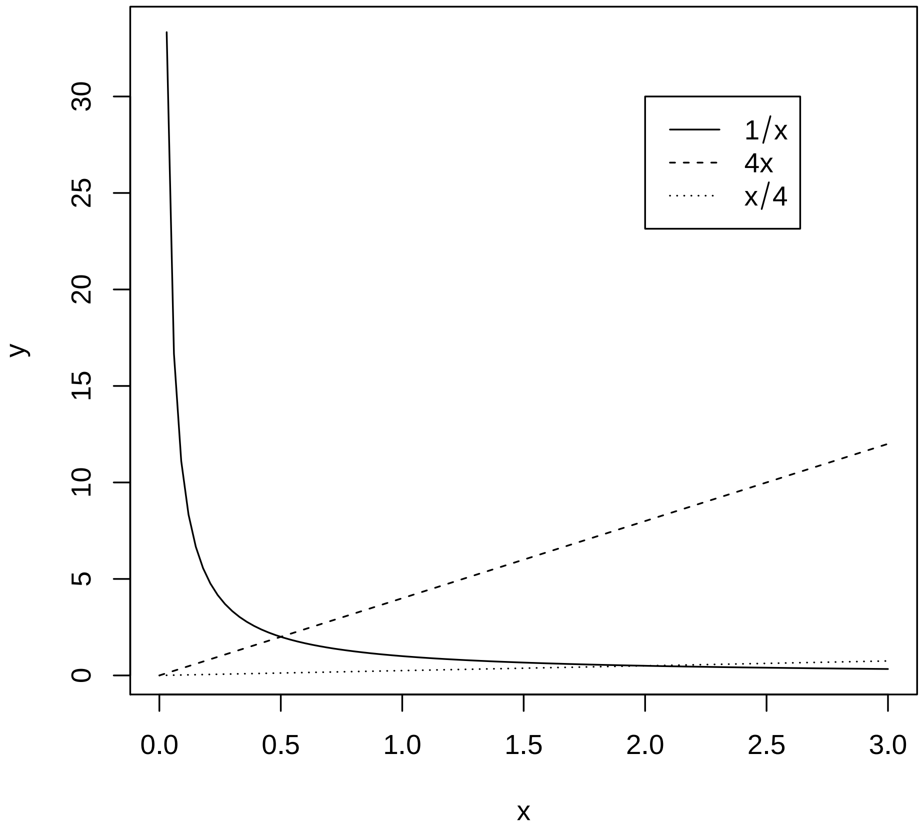
$\boxed{4}$ Feu un dibuix del recinte limitat per les corbes $y_1(x) = \frac{1}{x}$, $y_2(x) = 4x$ i $y_3(x) = \frac{1}{4}x$, per als valors de x positius. (4 punts) Calculau l'àrea d'aquest recinte. (6 punts)

SOLUCIÓ

Primer de tot calculam els punts d'intersecció de les corbes:

- Corbes $y_1(x)$ i $y_2(x)$: es tallen en el punt $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ (consideram només el cas en què l'abscissa x és positiva.)
- Corbes $y_1(x)$ i $y_3(x)$: es tallen en el punt $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ (consideram només el cas en què l'abscissa x és positiva.)
- Corbes $y_2(x)$ i $y_3(x)$: es tallen en el punt $(0, 0)$.

El gràfic del recinte es pot veure a la figura següent:



Per calcular l'àrea demanada A, ho farem en dues parts: primer calcularem l'àrea entre les corbes $y_2(x) = 4x$ i $y_3(x) = \frac{x}{4}$ entre $x = 0$ i $x = \frac{1}{2}$ i després l'àrea entre les corbes $y_1(x) = \frac{1}{x}$ i $y_3(x) = \frac{x}{4}$ entre $x = \frac{1}{2}$ i $x = 2$:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(4x - \frac{x}{4}\right)\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{4}\right)\, dx = \left[2x^2 - \frac{x^2}{8}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\ln x - \frac{x^2}{8}\right]_{\frac{1}{2}}^{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{32} + \ln 2 - \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{32} = 2\ln 2. \end{aligned}$$

Matemàtiques II

Model 1

OPCIÓ B

1 Donat el punt $P(1,1,1)$ i el pla $\pi : x - y + z = 5$.

(a) Calculau les equacions contínues de la recta perpendicular al pla π que passa pel punt P. (4 punts)

(b) Calculau el simètric del punt P respecte del pla π. (6 punts)

SOLUCIÓ

(a) El vector director de la recta buscada serà el perpendicular al pla: $\mathbf{v} = (1,-1,1)$. Les equacions contínues de la recta seran:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}.$$

(b) Diem $P' = (x,y,z)$ al simètric respecte del punt P. Tindrem que el punt mitjà de P i P', $\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2}, \frac{z+1}{2}\right)$, ha d'estar damunt la recta de l'apartat anterior i ha d'estar també al pla π:

$$\left.\begin{array}{rl} \frac{x+1}{2} - 1 = & 1 - \frac{y+1}{2}, \\ \frac{x+1}{2} - 1 = & \frac{z+1}{2} - 1, \\ \frac{x+1}{2} - \frac{y+1}{2} + \frac{x+1}{2} = & 5. \end{array}\right\}$$

El sistema anterior es pot posar com a:

$$\left.\begin{array}{rl} x + y = & 2, \\ x - z = & 0, \\ x - y + z = & 9. \end{array}\right\}$$

Si resolem el sistema anterior obtenim: $x = \frac{11}{3}$, $y = -\frac{5}{3}$ i $z = \frac{11}{3}$. El punt P' serà: $P' = \left(\frac{11}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{11}{3}\right)$.

2 (a) Discutiu per a quins valors de a el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{array}{rl} ax + (2a+1)y + (1-a)z = & 0, \\ 3ax + az = & a, \\ ax + ay + (1-a)z = & 0. \end{array}\right\}$$

(7 punts)

(b) Resoleu-lo en el cas (o els casos) en què sigui compatible indeterminat. (3 punts)

SOLUCIÓ

(a) La matriu del sistema $\mathbf{A}$ i la matriu ampliada $\overline{\mathbf{A}}$ del mateix són les següents:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 2a+1 & 1-a \\ 3a & 0 & a \\ a & a & 1-a \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a & 2a+1 & 1-a & 0 \\ 3a & 0 & a & a \\ a & a & 1-a & 0 \end{pmatrix}.$$

El determinant de la matriu del sistema $\mathbf{A}$ val: $\det(\mathbf{A}) = 4a^3 + a^2 - 3a$. Si resolem l'equació $4a^3 + a^2 - 3a = 0$, obtenim que $a = -1, 0, \frac{3}{4}$. Per tant, tenim que si $a \neq -1, 0, \frac{3}{4}$, el rang de les matrius $\mathbf{A}$ i $\overline{\mathbf{A}}$ serà 3 i el sistema serà compatible determinat. Falta estudiar els casos $a = -1$ $a = 0$ i $a = \frac{3}{4}$.

Per $a = -1$, la matriu del sistema és: $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

La matriu ampliada és: $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. El rang de les matrius $\mathbf{A}$ i $\overline{\mathbf{A}}$ val clarament 2 i el sistema serà compatible indeterminat.

Si $a = 0$, la matriu del sistema serà: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matriu ampliada és: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. El rang de les matrius $\mathbf{A}$ i $\overline{\mathbf{A}}$ val clarament 2 i el sistema serà compatible indeterminat.

Si $a = \frac{3}{4}$, la matriu del sistema serà: $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{9}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

La matriu ampliada és: $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{9}{4} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$. El rang de la matriu $\mathbf{A}$ val clarament 2.

Per calcular el rang de la matriu ampliada fem el determinant següent:

$$\begin{vmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{21}{64}.$$

Com que el determinant és diferent de 0, el rang de la matriu ampliada serà 3 i el sistema serà incompatible.

(b) Hem de solucionar el sistema per a $a = -1$ i $a = 0$.

Per a $a = -1$ el sistema a resoldre és:

$$\left.\begin{aligned} -x - y + 2z &= 0, \\ -3x - z &= -1, \\ -x - y + 2z &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Les solucions són: $y = 2 - 7x,\ z = 1 - 3x$ i la x lliure.

Per a $a = 0$ el sistema a resoldre és:

$$\left.\begin{aligned} y + z &= 0, \\ z &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Les solucions són $y = z = 0$ i la x lliure.

3 Sigui la funció $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$.

(a) Calculau les asímptotes de la funció $f(x)$. (3 punts)

(b) Calculau els extrems de la funció $f(x)$. (7 punts)

SOLUCIÓ

(a) La funció $f(x)$ no té asímptotes verticals, ja que el denominador no s'anul·la mai ni té asímptotes obliqües, ja que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Calculam les asímptotes horitzontals de la forma $y = k$. Per calcular k, fem el límit següent:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2+1} = 1.$$

Per tant, només té l'asímptota horitzontal $y = 1$.

(b) Per calcular els extrems, primer fem la derivada:

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Si igualam la derivada a 0, ens surten dos valors de x: $x = \pm 1$. Ara fem la taula següent per veure si els valors obtinguts són màxims, mínims o punts de sella.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Per tant, el punt $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ és un mínim i el punt $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ és un màxim.

4 Calculau la següent integral indefinida $\int \frac{x^3}{x^2-5x+6}\,dx$. (10 punts)

SOLUCIÓ

Primer de tot, dividim ja que el grau del numerador és major que el grau del denominador:

$$x^3 = (x^2-5x+6)(x+5) + (19x-30).$$

La integral demanada serà:

$$\int (x+5)\,dx + \int \frac{19x-30}{x^2-5x+6}\,dx = \left(\frac{x^2}{2}+5x\right) + \int \frac{19x-30}{x^2-5x+6}\,dx.$$

Per fer la integral restant, descomponem la funció racional de la forma següent:

$$\frac{19x-30}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}.$$

Les constants A i B han de complir:

$$A(x-3)+B(x-2) = 19x-30.$$

Les constants A i B valen: $A = -8$ i $B = 27$.

La integral serà:

$$\int \frac{19x-30}{x^2-5x+6}\,dx = -8\int \frac{1}{x-2}\,dx + 27\int \frac{1}{x-3}\,dx = -8\ln|x-2| + 27\ln|x-3| + C.$$

La integral demanada serà:

$$\int \frac{x^3}{x^2-5x+6}\,dx = \frac{x^2}{2} + 5x - 8\ln|x-2| + 27\ln|x-3| + C.$$

Prova d'accés a la Universitat (2013)

Matemàtiques II

Model 2

OPCIÓ B

a) Considerem el punt $P(1,2,3)$ i la recta $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$.

i) Calculau l'equació general del pla π que conté el punt P i la recta r. (4 punts)

ii) Calculau el punt simètric de P respecte la recta r. (6 punts)

b) i) Discutiu per a quins valors d'a i b el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{aligned} (a-1)x + 5ay + az &= a - b, \\ y - 2az &= a + b, \\ 3ay + (2-a)z &= b. \end{aligned}\right\}$$

(7 punts)

ii) Resoleu-lo en el cas (o casos) en que sigui compatible indeterminat. (3 punts)

c) Sigui la funció $f(x) = \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x-2)}$.

i) Calculau els extrems de la funció $f(x)$. (7 punts)

ii) Estudieu quan la funció $f(x)$ és còncava o convexa. (3 punts)

d) Calculau la següent integral indefinida $\int \frac{x-1}{x^3+x^2}\,dx$. (10 punts)

Matemàtiques II

Model 2

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

OPCIÓ A

a) i) Donada la matriu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 2+a & 2a \\ 0 & a-1 & 3a \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$, calculeu el seu rang en funció d'a.

(6 punts)

ii) Calculeu $\mathbf{A}^{-1}$ per $a = 1$. (4 punts)

b) i) Discutiu per a quins valors d'a el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{aligned} (a+3)x + (2a-1)y &= 0, \\ (a+1)x - az &= a, \\ 2x + (a-2)y - az &= a. \end{aligned}\right\}$$

(7 punts)

ii) Resoleu-lo en el cas (o casos) en que sigui compatible indeterminat. (3 punts)

c) Sigui la funció $f(x) = \sin(2x) - x$. Demostreu que la funció $f(x)$ té exactament tres zeros en l'interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. O sigui, heu de provar que existeixen exactament tres valors de x en l'interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tals que $f(x) = 0$. (10 punts)

d) Feu un dibuix del recinte limitat per les corbes $y_1(x) = 4 - x^2$, $y_2(x) = x^2$. (4 punts) Calculau l'àrea d'aquest recinte. (6 punts)

El cas positiu no té solució. Si analitzam el cas negatiu, ens surt $x-1=-x+2$, d'on $x=\frac{3}{2}$.

A continuació fem la taula següent per veure si el valor obtingut és un màxim, mínim o un punt de sella.

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$		$+$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Per tant, el punt $\left(\frac{3}{2},4\right)$ és un mínim.
Una altra forma de veure-ho és calcular la derivada segona i mirar el signe en $x=\frac{3}{2}$:

$$f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}-\frac{2}{(x-2)^3}, \quad f''\left(\frac{3}{2}\right)=32>0,$$

Com que $f''\left(\frac{3}{2}\right)$ és positiu, es tracta d'un mínim com ja havíem comprovat abans.

ii) Per estudiar la convexitat i la concavitat hem de mirar el signe de la derivada segona:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\cap$		$\cup$		$\cap$	

Serà convexa en la regió $(-\infty,1)\cup(2,\infty)$ i serà cóncava en l'interval $(1,2)$.

$d)$ Calculau la següent integral indefinida $\int \frac{x-1}{x^3+x^2}\,dx$. (10 punts)

Solució. Ja que el grau del numerador és menor que el del denominador, descomposem la funció racional de la forma següent:

$$\frac{x-1}{x^3+x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}=\frac{Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2}{x^2(x+1)}.$$

Les constants A, B i C han de complir:

$$Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2=x-1.$$

Les constants A B i C valen: $A=2$, $B=-1$ i $C=-2$.
La integral serà:

$$\int\frac{x-1}{x^3+x^2}\,dx=2\int\frac{1}{x}\,dx-\int\frac{1}{x^2}-2\int\frac{1}{x+1}\,dx=2\ln|x|+\frac{1}{x}-2\ln|x+1|+C.$$

Solució. i) La matriu del sistema $\mathbf{A}$ i la matriu ampliada $\overline{\mathbf{A}}$ del mateix són les següents:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a-1 & 5a & a \\ 0 & 1 & -2a \\ 0 & 3a & 2-a \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a-1 & 5a & a & a-b \\ 0 & 1 & -2a & a+b \\ 0 & 3a & 2-a & b \end{pmatrix}.$$

El determinant de la matriu del sistema $\mathbf{A}$ val: $\det(\mathbf{A}) = 6a^3 - 7a^2 + 3a - 2$. Si resolem l'equació $6a^3 - 7a^2 + 3a - 2 = 0$, obtenim que $a = 1$. Per tant, tenim que si $a \neq 1$, el rang de les matrius $\mathbf{A}$ i de $\overline{\mathbf{A}}$ serà 3 i el sistema serà compatible determinat.
Falta estudiar el cas $a = 1$.

Per $a = 1$, la matriu del sistema és: $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

La matriu ampliada és: $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 1-b \\ 0 & 1 & -2 & b+1 \\ 0 & 3 & 1 & b \end{pmatrix}$. El rang de la matriu $\mathbf{A}$ val claramente 2. Per calcular el rang de la matriu $\overline{\mathbf{A}}$, fem el determinant següent:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1-b \\ 1 & -2 & b+1 \\ 3 & 1 & b \end{vmatrix} = 5 - 20b.$$

Si $b \neq \frac{1}{4}$, el rang de la matriu $\overline{\mathbf{A}}$ serà 3 i el sistema és incompatible. Per $b = \frac{1}{4}$, el rang de la matriu $\overline{\mathbf{A}}$ serà 2 i el sistema serà compatible indeterminat.

ii) Hem de solucionar el sistema per $a = 1$ i $b = \frac{1}{4}$.
El sistema a resoldre és:

$$\left.\begin{aligned} 5y + z &= \tfrac{3}{4}, \\ y - 2z &= \tfrac{5}{4}, \\ 3y + z &= \tfrac{1}{4} \end{aligned}\right\}$$

Les solucions són: $y = \frac{1}{4},\ z = -\frac{1}{2}$ i la x lliure.

c) Sigui la funció $f(x) = \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x-2)}$.

i) Calculau els extrems de la funció $f(x)$. (7 punts)

ii) Estudieu quan la funció $f(x)$ és còncava o convexa. (3 punts)

Solució. i) Per calcular els extrems, primer fem la derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Si igualam la derivada a 0, ens surt un únic valor de x: $x = \frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x-1)^2} &= 0, \\ \frac{1}{(x-2)^2} &= \frac{1}{(x-1)^2}, \\ (x-1)^2 &= (x-2)^2, \\ x - 1 &= \pm(x-2). \end{aligned}$$

OPCIÓ B

a) Considerem el punt $P(1,2,3)$ i la recta $r : \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$.

i) Calculau l'equació general del pla π que conté el punt P i la recta r. (4 punts)

ii) Calculau el punt simètric de P respecte la recta r. (6 punts)

Solució. i) El pla π tendrà com a vectors directors el vector director de la recta ($\mathbf{v}_1 = (3,2,1)$) i el vector format per un punt del pla i el punt P ($\mathbf{v}_2 = (2,-1,1)-(1,2,3) = (1,-3,-2)$). L'equació del pla π serà:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

Arreglant l'expressió anterior surt: $\pi : -x+7y-11z+20=0$.

ii) El punt simètric $P' = (x,y,z)$ verifica que el vector $\vec{PP'} = (x-1, y-2, z-3)$ és perpendicular al vector director de la recta r, $\mathbf{v}_1 = (3,2,1)$, i que el punt mig entre P i P', $\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z+3}{2}\right)$, està en la recta r:

$$\left.\begin{array}{r} 3(x-1)+2(y-2)+(z-3)=0 \\ \frac{\frac{x+1}{2}-2}{3} = \frac{\frac{y+2}{2}+1}{2}, \\ \frac{\frac{x+1}{2}-2}{3} = \frac{\frac{z+3}{2}-1}{1}. \end{array}\right\}$$

El sistema anterior es pot escriure com:

$$\left.\begin{array}{rl} 3x+2y+z = & 10, \\ 2x-3y = & 18, \\ x-3z = & 6. \end{array}\right\}$$

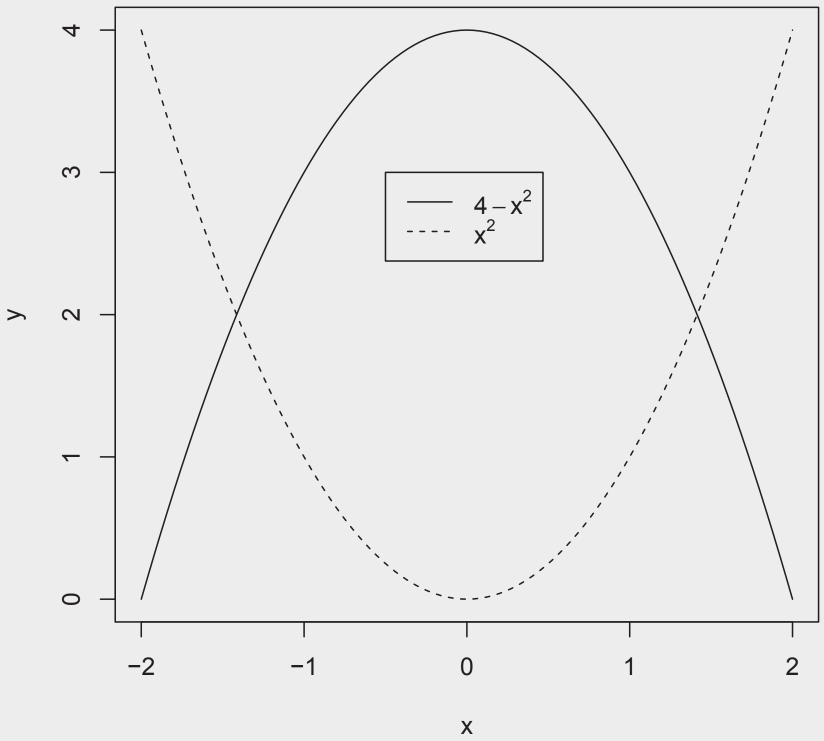
El sistema d'equacions anterior té com a solucions $x = \frac{36}{7}$, $y = -\frac{18}{7}$ i $z = -\frac{2}{7}$. El punt P' serà, doncs, $P' = \left(\frac{36}{7}, -\frac{18}{7}, -\frac{2}{7}\right)$.

b) i) Discutiu per a quins valors d'a i b el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{array}{rl} (a-1)x+5ay+az = & a-b, \\ y-2az = & a+b, \\ 3ay+(2-a)z = & b. \end{array}\right\}$$

(7 punts)

ii) Resoleu-lo en el cas (o casos) en que sigui compatible indeterminat. (3 punts)



L'àrea demanada serà:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4 - x^2 - x^2)\,dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4 - 2x^2)\,dx = \left[4x - \frac{2x^3}{3}\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\ &= 2\left(4\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{16\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

- $a=0$: el sistema a resoldre és:

$$\left.\begin{array}{rr} 3x-y= & 0, \\ x= & 0, \\ 2x-2y= & 0. \end{array}\right\}$$

Les solucions són: $x=0,\ y=0$ i z lliure.

- $a=\frac{5}{3}$: el sistema a resoldre és:

$$\left.\begin{array}{rr} \frac{14}{3}x+\frac{7}{3}y= & 0, \\ \frac{8}{3}x-\frac{5}{3}z= & \frac{5}{3}, \\ 2x-\frac{1}{3}y-\frac{5}{3}z= & \frac{5}{3}. \end{array}\right\}$$

Les solucions són: $y=-2x,\ z=-1+\frac{8}{5}x$ i x lliure.

c) Sigui la funció $f(x)=\sin(2x)-x$. Demostreu que la funció $f(x)$ té exactament tres zeros en l'interval $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. O sigui, heu de provar que existeixen exactament tres valors de x en l'interval $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ tals que $f(x)=0$. (10 punts)

Solució. Si fem la derivada, tenim que $f'(x)=2\cos(2x)-1$. Ara calculem els zeros de la derivada en l'interval $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$: $2\cos(2x)-1=0,\ \cos(2x)=\frac{1}{2}$. Hi ha dos valors de x que compleixen l'equació anterior: $x=\pm\frac{\pi}{6}$. Com que la derivada té dos zeros en l'interval considerat, sabem que, aplicant el Teorema de Rolle, la funció $f(x)$ té 3 zeros com a màxim en l'interval $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.
Per veure que hi ha exactament tres zeros, trobem 3 canvis de signe:

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}>0,\ f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1+\frac{\pi}{4}<0.$$

Pel Teorema de Bolzano, tenim que hi ha un valor x entre $-\frac{\pi}{2}$ i $-\frac{\pi}{4}$ tal que $f(x)=0$.
Si fem $f(0)=0$. Per tant, un dels tres valors buscats és $x=0$.
Per últim, si fem

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{\pi}{4}>0,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}<0.$$

Per tant, aplicant el Teorema de Bolzano, deduïm que existeix un valor x entre $\frac{\pi}{4}$ i $\frac{\pi}{2}$ tal que $f(x)=0$.

d) Feu un dibuix del recinte limitat per les corbes $y_1(x)=4-x^2$, $y_2(x)=x^2$. (4 punts) Calculau l'àrea d'aquest recinte. (6 punts)

Solució. Primer de tot calculem els punts d'intersecció de les corbes:

$$\begin{array}{rlrl} 4-x^2= & x^2, & 2x^2 & =4, \\ x^2= & 2, & x & =\pm\sqrt{2}. \end{array}$$

Les dues corbes es tallen als punts $(-\sqrt{2},2)$ i $(\sqrt{2},2)$.
El gràfic del recinte es pot veure a la figura següent:

El determinant de la matriu del sistema $\mathbf{A}$ val: $\det(\mathbf{A}) = 3a^3 - 2a^2 - 5a$. Si resolem l'equació $3a^3 - 2a^2 - 5a = 0$, obtenim que $a = -1, 0, \frac{5}{3}$. Per tant, tenim que si $a \neq -1, 0, \frac{5}{3}$, el rang de les matrius $\mathbf{A}$ i de $\overline{\mathbf{A}}$ serà 3 i el sistema serà compatible determinat.

Falta estudiar els casos $a = -1$, $a = 0$ i $a = \frac{5}{3}$.

Per $a = -1$, la matriu del sistema és: $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

La matriu ampliada és: $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. El rang de la matriu $\mathbf{A}$ val clarament 2. Per calcular el rang de la matriu ampliada fem el determinant següent:

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Per tant, el rang de la matriu $\overline{\mathbf{A}}$ serà 2 i el sistema serà compatible indeterminat.

Si $a = 0$, la matriu del sistema serà: $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

La matriu ampliada és: $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. El rang de la matriu $\mathbf{A}$ val clarament 2. Per calcular el rang de la matriu ampliada fem el determinant següent:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

El rang de la matriu $\overline{\mathbf{A}}$ serà 2 i el sistema serà compatible indeterminat.

Si $a = \frac{5}{3}$ la matriu del sistema serà: $\begin{pmatrix} \frac{14}{3} & \frac{7}{3} & 0 \\ \frac{8}{3} & 0 & -\frac{5}{3} \\ 2 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$.

La matriu ampliada és: $\begin{pmatrix} \frac{14}{3} & \frac{7}{3} & 0 & 0 \\ \frac{8}{3} & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ 2 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$.

El rang de la matriu $\mathbf{A}$ val clarament 2. Per calcular el rang de la matriu ampliada fem el determinant següent:

$$\begin{vmatrix} \frac{7}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{vmatrix} = 0.$$

Per tant, el rang de la matriu $\overline{\mathbf{A}}$ serà 2 i el sistema serà compatible indeterminat.

ii) Hem de solucionar el sistema en els casos següents:

- $a = -1$: el sistema a resoldre és:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= 0, \\ z &= -1, \\ 2x - 3y + z &= -1. \end{aligned}\right\}$$

Les solucions són: $y = \frac{2}{3}x$, $z = -1$ i x lliure.

Matemàtiques II

Model 2

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

OPCIÓ A

a) i) Donada la matriu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 2+a & 2a \\ 0 & a-1 & 3a \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$, calculeu el seu rang en funció d'a.

(6 punts)

ii) Calculeu $\mathbf{A}^{-1}$ per $a = 1$. (4 punts)

Solució. i) Si calculam el determinant de la matriu $\mathbf{A}$ obtenim: $\det\mathbf{A} = a^3 + 8a$. Igualant el determinant anterior a 0, veim que s'anul·la només per $a = 0$. D'aquí podem deduir que el rang de la matriu $\mathbf{A}$ serà 3 si $a \neq 0$ ja que el determinant de la matriu és diferent de 0.

Si $a = 0$, obtenim la matriu $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, que, clarament té rang 2 ja que el menor $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$ és diferent de 0.

ii) La matriu $\mathbf{A}$ per $a = 1$ val $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La seva inversa val: $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

b) i) Discutiu per a quins valors d'a el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{aligned} (a+3)x + (2a-1)y &= 0, \\ (a+1)x - az &= a, \\ 2x + (a-2)y - az &= a. \end{aligned}\right\}$$

(7 punts)

ii) Resoleu-lo en el cas (o casos) en que sigui compatible indeterminat. (3 punts)

Solució. i) La matriu del sistema $\mathbf{A}$ i la matriu ampliada $\overline{\mathbf{A}}$ del mateix són les següents:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a+3 & 2a-1 & 0 \\ a+1 & 0 & -a \\ 2 & a-2 & -a \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a+3 & 2a-1 & 0 & 0 \\ a+1 & 0 & -a & a \\ 2 & a-2 & -a & a \end{pmatrix}.$$

Prova d'accés a la Universitat (2014)

Matemàtiques II

Model 2

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Discutiu per a quins valors de k el sistema següent és compatible: (7 punts)

$$\left\{\begin{aligned} x+2y-z&=8,\\ 2x-3y+z&=-1,\\ 3x-y+kz&=5.\end{aligned}\right.$$

b) Resoleu-lo en el cas (o els casos) en què sigui compatible. (3 punts)

2. Determina el(s) punt(s) de la recta $r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{2}$ que equidista dels plans π_1 : $x+y+z+3=0$ i $\pi_2:\left\{\begin{aligned} x=&\ -3+\lambda,\\ y=&\ -\lambda+\mu,\\ z=&\ -6+\mu.\end{aligned}\right.$ (10 punts)

3. Donada la funció:

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll}\frac{1}{x}, & \text{si } -2\le x\le -1,\\ \frac{x^2-3}{2} & \text{si } -1<x\le 0.\end{array}\right.$$

a) Provau que $f(x)$ és contínua a l'interval $[-2,0]$ i derivable a l'interval $(-2,0)$. (6 punts)

b) Estudiau si la funció és creixent o decreixent als intervals $(-2,-1)$ i $(-1,0)$. (4 punts)

4. Calculau la següent integral indefinida (10 punts)

$$\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx.$$

Matemàtiques II

Model 2

OPCIÓ B

1. *a*) Discutiu per a quins valors de m el sistema següent és compatible: (7 punts)

$$\left.\begin{array}{rl} y+z= & 1, \\ (m-1)\cdot x+3y+z= & 2, \\ x+(m-1)\cdot y-z= & 0. \end{array}\right\}$$

b) Resoleu-lo en el cas (o els casos) en què sigui compatible indeterminat. (3 punts)

2. Trobau l'equació contínua de la recta r paral.lela al pla $\pi : 2x-2y+5z=3$ i perpendicular a la recta $s : \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{3}$ al punt $P(-1,2,0)$. (10 punts)

3. a) Calculau el valor de a perquè la funció

$$f(x)=\begin{cases} 1-\cos x & \text{si } x\leq 0, \\ x^2+ax & \text{si } x>0, \end{cases}$$

verifiqui el teorema de Rolle a l'interval $\left[-\frac{\pi}{2},1\right]$. (5 punts)

b) Considerant el valor de a determinat a l'apartat a), trobau el valor $c\in\left(-\frac{\pi}{2},1\right)$ tal que $f'(c)=0$. (5 punts)

4. Feu un dibuix del recinte limitat per la corba $y(x)=\cos x$, l'eix OX i les rectes verticals $x=-\frac{\pi}{2}$ i $x=\frac{\pi}{2}$. (4 punts) Calculau l'àrea d'aquest recinte. (6 punts)

Matemàtiques II

Model 2

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Discutiu per a quins valors de k el sistema següent és compatible: (7 punts)

$$\begin{cases} x + 2y - z = 8, \\ 2x - 3y + z = -1, \\ 3x - y + kz = 5. \end{cases}$$

b) Resoleu-lo en el cas (o els casos) en què sigui compatible. (3 punts)

Solució. *a*) La matriu del sistema $\mathbf{A}$ i la matriu ampliada $\overline{\mathbf{A}}$ del mateix sistema són les següents:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & k \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & k & 5 \end{pmatrix}.$$

El determinant de la matriu del sistema $\mathbf{A}$ val: $\det(\mathbf{A}) = -7k$. Si resolem l'equació $-7k = 0$, obtenim que $k = 0$. Per tant, tenim que si $k \neq 0$, el rang de les matrius $\mathbf{A}$ i $\overline{\mathbf{A}}$ serà 3 i el sistema serà compatible determinat.
Falta estudiar el cas $k = 0$.

Per a $k = 0$, la matriu del sistema és: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ i la matriu ampliada és: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. El rang de la matriu $\mathbf{A}$ val clarament 2.

Calculem el rang de la matriu $\overline{\mathbf{A}}$. Per fer-ho, fem el determinant:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 8 \\ -3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2.$$

El rang de la matriu $\overline{\mathbf{A}}$ serà, doncs, 3 i el sistema serà incompatible.

b) Ara resoldrem el sistema per a $k \neq 0$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & k \end{vmatrix}}{-7k} = \frac{22k-2}{7k}, \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 8 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & k \end{vmatrix}}{-7k} = \frac{17k-6}{7k}, \\ z &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{-7k} = \frac{-2}{k}. \end{aligned}$$

2. Determina el(s) punt(s) de la recta $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$ que equidista dels plans π_1 : $x+y+z+3=0$ i $\pi_2 : \begin{cases} x = & -3+\lambda, \\ y = & -\lambda+\mu, \\ z = & -6+\mu. \end{cases}$ (10 punts)

Solució. Primer de tot, escrivim el pla π_2 en forma general:

$$\begin{vmatrix} x+3 & y & z+6 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad x+y-z-3=0.$$

Un punt de la recta r es pot posar de forma paramètrica així:

$$(x,y,z) = (1+2\lambda, -1+\lambda, 2\lambda)$$

Hem de trobar un punt $P \in r$ tal que $d(P,\pi_1) = d(P,\pi_2)$:

$$\begin{aligned} \frac{|(1+2\lambda)+(-1+\lambda)+2\lambda+3|}{\sqrt{3}} &= \frac{|(1+2\lambda)+(-1+\lambda)-2\lambda-3|}{\sqrt{3}} \\ |5\lambda+3| &= |\lambda-3| \\ 5\lambda+3 &= \pm(\lambda-3) \end{aligned}$$

Tenim dues possibles solucions: $5\lambda+3=\lambda-3$ i $5\lambda+3=-\lambda+3$. De la primera, obtenim $\lambda=-\frac{3}{2}$ i de la segona, $\lambda=0$. Fent servir $\lambda=-\frac{3}{2}$, obtenim $P\left(-2,-\frac{5}{2},-3\right)$ i fent servir $\lambda=0$, tenim $P(1,-1,0)$.

3. Donada la funció:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{si } -2 \leq x \leq -1, \\ \frac{x^2-3}{2} & \text{si } -1 < x \leq 0. \end{cases}$$

a) Provau que $f(x)$ és contínua a l'interval $[-2,0]$ i derivable a l'interval $(-2,0)$. (6 punts)

b) Estudiau si la funció és creixent o decreixent als intervals $(-2,-1)$ i $(-1,0)$.(4 punts)

Solució. *a*) Hem de veure que $f(x)$ és contínua a l'interval $[-2,0]$ i derivable a l'interval $(-2,0)$. Com que $f(x)$ està definida a trossos i en cada tros és contínua i derivable, l'únic punt a estudiar és $x=-1$.
Estudiem la continuïtat a $x=-1$. Per fer-ho, calculem els límits laterals de $f(x)$ i mirem si coincideixen entre si i amb $f(-1)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1^-} f(x) &= \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x} = -1,\\ \lim_{x\to -1^+} f(x) &= \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-3}{2} = -1.\end{aligned}$$

La funció serà contínua a $x=-1$.
A continuació estudiem la derivabilitat a $x=-1$. Per fer-ho, calculam els límits laterals de $f'(x)$ i miram si coincideixen:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1^-} f'(x) &= \lim_{x\to -1^-} \frac{-1}{x^2} = -1,\\ \lim_{x\to -1^+} f'(x) &= \lim_{x\to -1^+} x = -1.\end{aligned}$$

La funció serà derivable a $x=-1$.

b) Hem de calcular les derivades de $f(x)$ als dos subintervals considerats.
Si $x\in(-2,-1)$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \quad \text{per tant, } f \text{ és decreixent.}$$

Si $x\in(-1,0)$:

$$f'(x) = x < 0, \quad \text{per tant, } f \text{ és decreixent.}$$

4. Calculau la següent integral indefinida (10 punts)

$$\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx.$$

Solució. Es tracta d'una integral racional. Com que el grau del numerador és més gran que el grau del denominador, dividim els dos polinomis i ens surt:

$$\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx = \int \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C,$$

on C és la constant d'integració.

Matemàtiques II

Model 2

OPCIÓ B

1. *a*) Discutiu per a quins valors de m el sistema següent és compatible: (7 punts)

$$\left.\begin{array}{r}y+z=&1,\\(m-1)\cdot x+3y+z=&2,\\x+(m-1)\cdot y-z=&0.\end{array}\right\}$$

b) Resoleu-lo en el cas (o els casos) en què sigui compatible indeterminat. (3 punts)

Solució. *a*) La matriu del sistema $\mathbf{A}$ i la matriu ampliada $\overline{\mathbf{A}}$ del mateix sistema són les següents:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m-1 & 3 & 1 \\ 1 & m-1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & m-1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El determinant de la matriu del sistema $\mathbf{A}$ val: $\det(\mathbf{A}) = m^2 - m - 2$. Si resolem l'equació $m^2 - m - 2 = 0$, obtenim que $m = -1, 2$. Per tant, tenim que si $m \neq -1, 2$, el rang de les matrius $\mathbf{A}$ i $\overline{\mathbf{A}}$ serà 3 i el sistema serà compatible determinat.
Falta estudiar els casos $m = -1$ i $m = 2$.

Per a $m = -1$, la matriu del sistema és: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

La matriu ampliada és: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. El rang de la matriu $\mathbf{A}$ val clarament 2. Per calcular el rang de la matriu ampliada fem el determinant següent:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3.$$

Per tant, el rang de la matriu $\overline{\mathbf{A}}$ serà 3 i el sistema serà incompatible.

Si $m = 2$, la matriu del sistema és: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

La matriu ampliada és: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. El rang de la matriu $\mathbf{A}$ val clarament 2.
Per calcular el rang de la matriu ampliada fem el determinant següent:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Per tant, el rang de la matriu $\overline{\mathbf{A}}$ també serà 2 i el sistema serà compatible indeterminat.

b) Ara resoldrem el sistema per a $m = 2$:

$$\left.\begin{aligned} y + z &= 1, \\ x + 3y + z &= 2, \\ x + y - z &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Eliminam la segona equació. Fent servir la primera, tenim que $z = 1 - y$ i substituint a la darrera, tindrem $x + 2y - 1 = 0$, i per tant, $x = 1 - 2y$.
Les solucions seran $x = 1 - 2y$, $z = 1 - y$ i la variable y lliure.

2. Trobau l'equació contínua de la recta r paral.lela al pla $\pi : 2x - 2y + 5z = 3$ i perpendicular a la recta $s : \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3}$ al punt $P(-1, 2, 0)$. (10 punts)

Solució. Sigui $\mathbf{v}_r = (a, b, c)$ el vector director de la recta r. El vector $\mathbf{v}_r$ ha de ser perpendicular al vector normal al pla π, $\mathbf{n} = (2, -2, 5)$ i perpendicular al vector director de la recta s, $\mathbf{v}_s = (2, -1, 3)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n} &= 0, \quad (a,b,c)\cdot(2,-2,5) = 0, \quad 2a - 2b + 5c = 0, \\ \mathbf{v}_r \cdot \mathbf{v}_s &= 0, \quad (a,b,c)\cdot(2,-1,3) = 0, \quad 2a - b + 3c = 0. \end{aligned}$$

Fent servir les dues condicions anteriors, deduïm que $b = 2c$ i que $a = -\frac{c}{2}$. Agafant $c = 2$, un vector director de la recta r serà: $\mathbf{v}_r = (-1, 4, 2)$.

El punt de la recta r serà $P(-1, 2, 0)$. L'equació de r serà:

$$\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{2}.$$

3. a) Calculau el valor de a perquè la funció

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{si } x \leq 0, \\ x^2 + ax & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

verifiqui el teorema de Rolle a l'interval $\left[-\frac{\pi}{2}, 1\right]$. (5 punts)

b) Considerant el valor de a determinat a l'apartat a), trobau el valor $c \in \left(-\frac{\pi}{2}, 1\right)$ tal que $f'(c) = 0$. (5 punts)

Solució. a) Hem de veure que $f(x)$ és contínua a l'interval $\left[-\frac{\pi}{2}, 1\right]$ i derivable a l'interval $\left(-\frac{\pi}{2}, 1\right)$. Com que $f(x)$ està definida a trossos i en cada tros és contínua i derivable, l'únic punt a estudiar és $x = 0$.

Estudiem la continuïtat a $x = 0$. Per fer-ho, calculem els límits laterals de $f(x)$ i mirem si coincideixen:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} (1 - \cos x) = 0, \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} (x^2 + ax) = 0. \end{aligned}$$

La funció serà contínua a $x = 0$.

A continuació estudiem la derivabilitat a $x = 0$. Per fer-ho, calculam els límits laterals de $f'(x)$ i miram si coincideixen:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f'(x) &= \lim_{x\to 0^-} \sin x = 0, \\ \lim_{x\to 0^+} f'(x) &= \lim_{x\to 0^+} (2x + a) = a. \end{aligned}$$

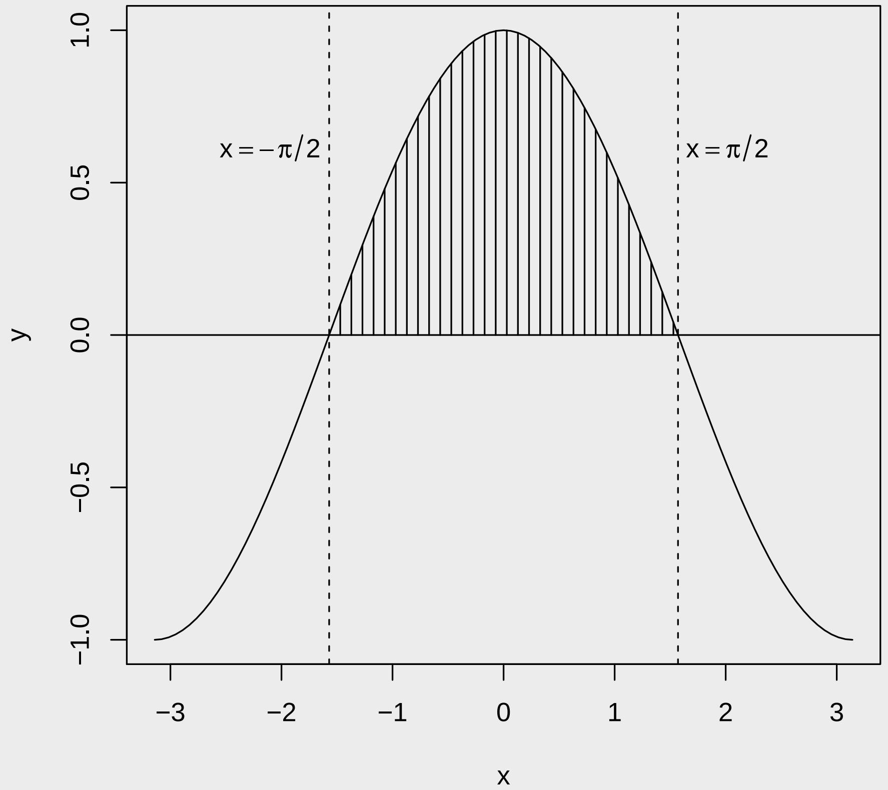
La funció serà derivable a $x = 0$ si $a = 0$.

En resum, es compleixen les condicions del teorema de Rolle quan $a = 0$.

b) A continuació, calculem els valors c tals que $f'(c) = 0$. Mirem primer a l'interval $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$: $f'(c) = \sin c = 0$. Aleshores, c serà $c = 0$. Si miram a l'interval $(0, 1]$, tindrem que $f'(c) = 2c = 0$, $c = 0$, que no pot ser, ja que $0 \notin (0, 1]$. En conclusió, el valor de c serà $c = 0$.

4. Feu un dibuix del recinte limitat per la corba $y(x) = \cos x$, l'eix OX i les rectes verticals $x = -\frac{\pi}{2}$ i $x = \frac{\pi}{2}$. (4 punts) Calculau l'àrea d'aquest recinte. (6 punts)

Solució. El gràfic del recinte es pot veure a la figura següent:



L'àrea demanada A serà:

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx = [\sin x]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Matemàtiques II

Model 3

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Discutiu per a quins valors de b el sistema següent és compatible: (7 punts)

$$\left\{\begin{array}{rl} x+2y-z= & 2, \\ x+(1+b)\cdot y-b\cdot z= & 2b, \\ x+b\cdot y+(1+b)\cdot z= & 1. \end{array}\right.$$

b) Resoleu-lo en el cas (o els casos) en què sigui compatible indeterminat. (3 punts)

2. Calculau l'equació general del pla que passa pels punts A, B i C (4 punts), sent:

A : el simètric del punt $P(1,2,3)$ respecte del pla $x=z$. (3 punts)
B : la projecció ortogonal del punt $Q(2,1,3)$ damunt el pla $z=0$. (3 punts)
C : l'origen de coordenades.

3. Sigui $f(x)=\mathrm{e}^x\cdot\cos x$ definida a l'interval $(0,2\pi)$.

a) Calculau i determinau els extrems de $f(x)$. (6 punts)
b) Calculau i determinau els punts d'inflexió de $f(x)$. (4 punts)

4. Feu un dibuix del recinte limitat per la corba $x\cdot y=36$, l'eix OX i les rectes verticals $x=6$ i $x=12$. (4 punts) Calculau l'àrea d'aquest recinte. (6 punts)

Matemàtiques II

Model 3

OPCIÓ B

1. *a*) Discutiu per a quins valors de a el sistema següent és compatible: (7 punts)

$$\left\{\begin{array}{rl} a\cdot x+y+2z= & 1, \\ 2x-2y= & 0, \\ a\cdot x+y-z= & 1. \end{array}\right.$$

b) Resoleu-lo en el cas (o els casos) en què sigui compatible. (3 punts)

2. Trobau els punts P situats a distància 5 de l'origen de coordenades i que pertanyen a la recta r que passa pels punts $A(1,2,5)$ i $B(6,5,6)$. (10 punts)

3. a) Calculau a i b perquè la funció

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll} \ln(x-1)^2+a, & \text{si } 3/2\leq x\leq 2, \\ b\cdot x^2-6x, & \text{si } 2<x\leq 4. \end{array}\right.$$

sigui contínua a l'interval $[3/2,4]$ i derivable a l'interval $(3/2,4)$. (7 punts)

b) Per als valors de a i b determinats a l'apartat a), calculau els punts de l'interval $(1,4)$ on el pendent de la recta tangent és 3. (3 punts)

4. Calculau la integral indefinida següent (10 punts)

$$\int \frac{x}{(x-1)^2}\,dx.$$

Matemàtiques II

Criteris específics de correcció

Model 3

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

OPCIÓ A

1. *a*) Càlcul del $\det(\mathbf{A})$, 2 punts. Discussió, 5 punts: donau 1 punt per discussió quan $b \neq 0, 1$; 2 punts per discussió quan $b = 0$ i 2 punts per discussió quan $b = 1$.
Si s'equivoca en el càlcul del $\det(\mathbf{A})$ o en la resolució de l'equació $\det(\mathbf{A}) = 0$, i tota la resta està bé, donau 3 punts com a màxim dels 7 possibles. Si s'equivoca en les dues coses ($\det(\mathbf{A})$ i equació), 0 punts.

b) Resolució per a $b = 1$, 3 punts. (1 punt per incògnita)

2.
- Càlcul del punt A: 3 punts, 0.5 punts per cada condició que ha de satisfer A i 1.5 punts pel càlcul d'A.
- Càlcul del punt B, 3 punts. (1 punt per component correcte)
- Càlcul de l'equació del pla que passa per A, B i C, 4 punts. (1 punt per cada vector director correcte i 2 punts per l'equació.)

Si s'ha equivocat en qualque càlcul anterior però tota la resta és correcta, màxim 4 punts dels 10 possibles.

3. *a*) Càlcul de $f'(x)$, 2 punts. Resolució de $f'(x)$, 2 punts (1.5 punts per cada valor calculat). Dir si és màxim o mínim, 2 punts (1 punt per cada valor). Si només dóna la coordenada x, donau 0.5 punts per valor, que serà 1 punt en total si ha trobat els dos punts.)

b) Càlcul de $f''(x)$, 2 punts. Càlcul del punt d'inflexió, 2 punts. (Si només dóna la coordenada x, donau només 1 punt.)

Si s'equivoca en qualque càlcul anterior però tota la resta és correcta, màxim 4 punts dels 10 possibles. Si hi ha 2 errors, 0 punts.

4.
- Recinte, 4 punts.
- Àrea, 6 punts.

Al càlcul de la integral, si hi ha qualque error "suau", màxim 2 punts dels 4 possibles. Dibuix correcte sense cap explicació que ho avali, 0 punts.

OPCIÓ B

1. *a*) Càlcul del $\det(\mathbf{A})$, 2 punts. Discussió, 5 punts: donau 2 punts per discussió quan $a \neq -1$ i 3 punts per discussió quan $a = -1$.
Si s'equivoca en el càlcul del $\det(\mathbf{A})$ o en la resolució de l'equació $\det(\mathbf{A}) = 0$, i tota la resta està bé, donau 3 punts com a màxim dels 7 possibles. Si s'equivoca en les dues coses ($\det(\mathbf{A})$ i equació), 0 punts.

b) Resolució per a $a \neq -1$, 3 punts. (1 punt per incògnita)

2.
- Càlcul correcte del vector director de la recta r, 1 punt.
- Càlcul de la recta r en forma paramètrica, 2 punts.
- Plantejament de l'equació que ha de satisfer λ, 3 punts.
- Càlcul de les λ, 2 punts. (1 punt per cada valor de λ)
- Càlcul dels punts P, 2 punts. (1 punt per cada punt)

Si s'ha equivocat en qualque càlcul anterior però tota la resta és correcta, màxim 6 punts dels 10 possibles.

3. a)
- Afirmar que f és contínua a trossos, 1 punt.
- Estudi de la continuïtat a $x = 2$, 2 punts (0.5 punts per cada límit correcte i 1 punt per l'equació que satisfan a i b).
- Estudi de la derivabilitat, 2 punts (0.5 punts per cada límit correcte i 1 punt per l'equació que satisfan a i b).

a) Càlcul de a i b, 2 punts (1 punt per cada valor).

b)
- Determinació de $x = 5/3 \in (3/2, 2)$, 1.5 punts.
- Determinació de $x = 9/4 \in (2, 4)$, 1.5 punts.

Si s'equivoca en qualque càlcul anterior però tota la resta és correcta, màxim 5 punts dels 10 possibles. Si hi ha 2 errors, 0 punts.

4.
- Càlcul dels valors A i B, 4 punts. (2 punts per cada valor)
- Càlcul de la integral, 6 punts.

Si hi ha qualque error però tota la resta és correcta, màxim 4 punts dels 10 possibles. Si no apareix cap càlcul que avali el resultat, 0 punts.

Matemàtiques II

Model 3

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Discutiu per a quins valors de b el sistema següent és compatible: (7 punts)

$$\left\{\begin{aligned} x+2y-z &= 2, \\ x+(1+b)\cdot y-b\cdot z &= 2b, \\ x+b\cdot y+(1+b)\cdot z &= 1. \end{aligned}\right.$$

b) Resoleu-lo en el cas (o els casos) en què sigui compatible indeterminat. (3 punts)

Solució. *a*) La matriu del sistema $\mathbf{A}$ i la matriu ampliada $\overline{\mathbf{A}}$ del mateix sistema són les següents:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+b & -b \\ 1 & b & 1+b \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1+b & -b & 2b \\ 1 & b & 1+b & 1 \end{pmatrix}.$$

El determinant de la matriu del sistema $\mathbf{A}$ val: $\det(\mathbf{A})=2(b-1)b$. Si resolem l'equació $2(b-1)b=0$, obtenim que $b=0,1$. Per tant, tenim que si $b\neq 0,1$, el rang de les matrius $\mathbf{A}$ i $\overline{\mathbf{A}}$ serà 3 i el sistema serà compatible determinat.
Falta estudiar els casos $b=0$ i $b=1$.

Per a $b=0$, la matriu del sistema és: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matriu ampliada és: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. El rang de la matriu $\mathbf{A}$ val clarament 2.

Per calcular el rang de la matriu ampliada fem el determinant següent:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=3.$$

Per tant, el rang de la matriu $\overline{\mathbf{A}}$ serà 3 i el sistema serà incompatible.

Si $b=1$, la matriu del sistema és: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

La matriu ampliada és: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. El rang de la matriu $\mathbf{A}$ val clarament 2.

Per calcular el rang de la matriu ampliada fem el determinant següent:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Per tant, el rang de la matriu $\overline{\mathbf{A}}$ també serà 2 i el sistema serà compatible indeterminat.

b) Ara resoldrem el sistema per a $b = 1$:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z &= \ 2, \\ x + 2y - z &= \ 2, \\ x + y + 2z &= \ 1. \end{aligned}\right\}$$

Eliminam la segona equació. Fent servir la primera, tenim que $z = x + 2y - 2$ i substituint a la darrera, tindrem

$$x + y + 2(x + 2y - 2) = 1, \quad 3x + 5y = 5, \quad y = 1 - \frac{3}{5}x,$$

i per tant,

$$z = x + 2 - \frac{6}{5}x - 2 = -\frac{1}{5}x.$$

Les solucions seran $y = 1 - \frac{3}{5}x$, $-\frac{1}{5}x$ i la variable x lliure.

2. Calculau l'equació general del pla que passa pels punts A, B i C (4 punts), sent:

A : el simètric del punt $P(1, 2, 3)$ respecte del pla $x = z$. (3 punts)
B : la projecció ortogonal del punt $Q(2, 1, 3)$ damunt el pla $z = 0$. (3 punts)
C : l'origen de coordenades.

Solució. Calculam el punt $A(x, y, z)$. Aquest ha de satisfer que el vector $\mathbf{PA} = (x-1, y-2, z-3)$ ha de ser paral·lel al normal al pla $x = z$ ($(1, 0, -1)$) i que el punt mitjà de A i P ha d'estar al pla $x = z$:

$$\left.\begin{aligned} x - 1 &= \ -(z - 3), \\ y - 2 &= \ 0, \\ \tfrac{x+1}{2} &= \ \tfrac{z+3}{2}. \end{aligned}\right\}$$

Les solucions del sistema anterior són $A(3, 2, 1)$.

A continuació calculem el punt B. La projecció del punt $Q(2, 1, 3)$ damunt el pla $z = 0$ serà $B(2, 1, 0)$.

Els vectors directors del pla demanat seran: $\mathbf{BA} = (1, 1, 1)$ i $\mathbf{CA} = (3, 2, 1)$:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad -x + 2y - z = 0, \quad x - 2y + z = 0.$$

3. Sigui $f(x) = \mathrm{e}^x \cdot \cos x$ definida a l'interval $(0, 2\pi)$.

a) Calculau i determinau els extrems de $f(x)$. (6 punts)
b) Calculau i determinau els punts d'inflexió de $f(x)$. (4 punts)

Solució. *a*) Calculam

$$f'(x) = \mathrm{e}^x \cdot \cos x - \mathrm{e}^x \sin x = \mathrm{e}^x(\cos x - \sin x).$$

Si fem $f'(x) = 0$, obtenim:

$$\cos x - \sin x = 0, \quad x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}.$$

A continuació miram si els punts obtinguts són màxims o mínims. Per fer-ho, calculam $f''(x)$:

$$f''(x) = \mathrm{e}^x(\cos x - \sin x) - \mathrm{e}^x(\sin x + \cos x) = -2\mathrm{e}^x \sin x.$$

Per a $x = \frac{\pi}{4}$,

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}} \sin \frac{\pi}{4} = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}} < 0.$$

Per tant, el punt $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}\right)$ és un màxim.

Per a $x = \frac{5\pi}{4}$,

$$f''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -2\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{4}} \sin \frac{5\pi}{4} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}} > 0.$$

Per tant, el punt $\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \mathrm{e}^{\frac{5\pi}{4}}\right)$ és un mínim.

b) Per calcular els punts d'inflexió, hem de resoldre $f''(x) = 0$. Els valors x obtinguts són:

$$f''(x) = -2\mathrm{e}^x \sin x = 0, \quad x = \pi.$$

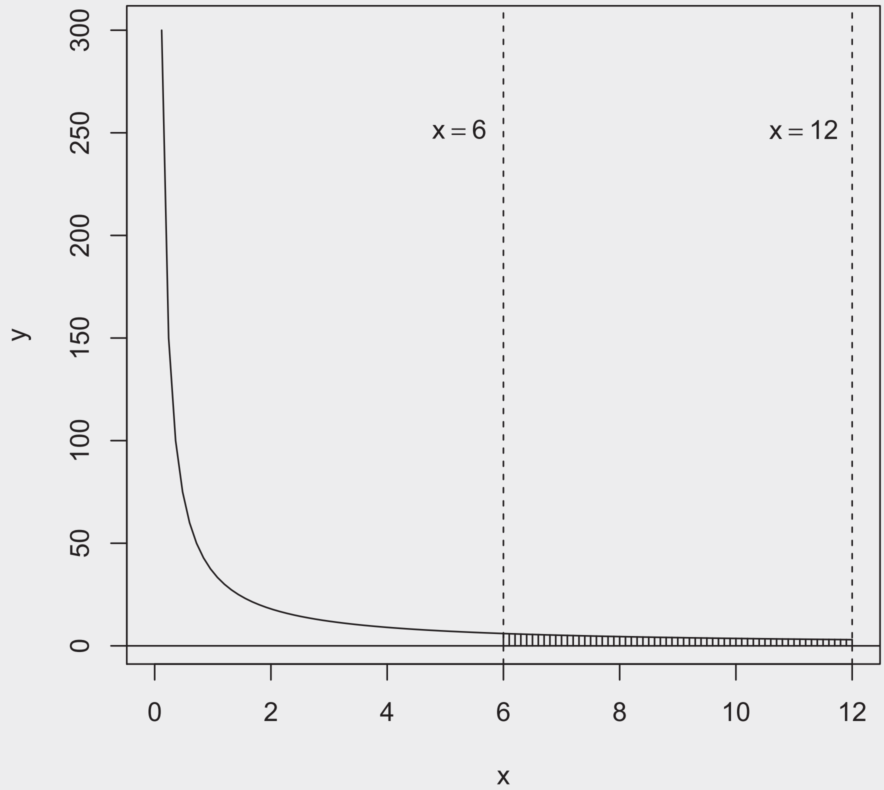
Perquè siguin punts d'inflexió, han de satisfer que $f'''(\pi) \neq 0$. Calculam $f'''(x)$:

$$f'''(x) = -2(\mathrm{e}^x \sin x + \mathrm{e}^x \cos x).$$

Per a $x = \pi$, $f'''(\pi) = 2\mathrm{e}^\pi$. Per tant, el punt $(\pi, -\mathrm{e}^\pi)$ és un punt d'inflexió.

4. Feu un dibuix del recinte limitat per la corba $x \cdot y = 36$, l'eix OX i les rectes verticals $x = 6$ i $x = 12$. (4 punts) Calculau l'àrea d'aquest recinte. (6 punts)

Solució. El gràfic del recinte es pot veure a la figura següent:



L'àrea demanada A serà:

$$A = \int_6^{12} \frac{36}{x}\, dx = 36 \cdot [\ln x]_6^{12} = 36 \cdot (\ln(12) - \ln 6) = 36 \cdot \ln 2.$$

Matemàtiques II

Model 3

OPCIÓ B

1. *a*) Discutiu per a quins valors de a el sistema següent és compatible: (7 punts)

$$\begin{cases} a \cdot x + y + 2z = & 1, \\ \quad 2x - 2y = & 0, \\ a \cdot x + y - z = & 1. \end{cases}$$

b) Resoleu-lo en el cas (o els casos) en què sigui compatible. (3 punts)

Solució. *a*) La matriu del sistema $\mathbf{A}$ i la matriu ampliada $\overline{\mathbf{A}}$ del mateix sistema són les següents:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ a & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ a & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El determinant de la matriu del sistema $\mathbf{A}$ val: $\det(\mathbf{A}) = 6(1+a)$. Si resolem l'equació $6(1+a) = 0$, obtenim que $a = -1$. Per tant, tenim que si $a \neq -1$, el rang de les matrius $\mathbf{A}$ i $\overline{\mathbf{A}}$ serà 3 i el sistema serà compatible determinat.
Falta estudiar el cas $a = -1$.

Per a $a = -1$, la matriu del sistema és: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

La matriu ampliada és: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. El rang de la matriu $\mathbf{A}$ val clarament 2. Per calcular el rang de la matriu ampliada fem el determinant següent:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6.$$

Per tant, el rang de la matriu $\overline{\mathbf{A}}$ serà 3 i el sistema serà incompatible.

b) Ara resoldrem el sistema per a $a \neq -1$:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{6(1+a)} = \frac{6}{6(1+a)} = \frac{1}{1+a}, \\
y &= \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ a & 1 & -1 \end{vmatrix}}{6(1+a)} = \frac{6}{6(1+a)} = \frac{1}{1+a}, \\
z &= \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{6(1+a)} = 0.
\end{aligned}$$

2. Trobau els punts P situats a distància 5 de l'origen de coordenades i que pertanyen a la recta r que passa pels punts $A(1, 2, 5)$ i $B(6, 5, 6)$. (10 punts)

Solució. Calculam el vector director de la recta: $\mathbf{AB} = (5, 3, 1)$. Els punts de la recta r seran en forma paramètrica:

$$r : \begin{cases} x = & 1 + 5\lambda, \\ y = & 2 + 3\lambda, \\ z = & 5 + \lambda. \end{cases}$$

Hem de trobar els punts P de la recta r a distància 5 de l'origen:

$$\begin{aligned}
d(P, O) = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2} &= 5, \\
\sqrt{(1 + 5\lambda)^2 + (2 + 3\lambda)^2 + (5 + \lambda)^2} &= 5, \\
35\lambda^2 + 32\lambda + 30 &= 25, \\
35\lambda^2 + 32\lambda + 5 &= 0.
\end{aligned}$$

Les solucions de l'equació de segon grau anterior són: $\lambda = -\frac{5}{7}$ i $\lambda = -\frac{1}{5}$. Els punts seran:

$$\begin{aligned}
P_1 \left(1 - 5 \cdot \frac{5}{7}, 2 - 3 \cdot \frac{5}{7}, 5 - \frac{5}{7}\right) &= \left(-\frac{18}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{30}{7}\right) \\
P_2 \left(1 - 5 \cdot \frac{1}{5}, 2 - 3 \cdot \frac{1}{5}, 5 - \frac{1}{5}\right) &= \left(0, \frac{7}{5}, \frac{24}{5}\right).
\end{aligned}$$

3. a) Calculau a i b perquè la funció

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x-1)^2 + a, & \text{si } 3/2 \leq x \leq 2, \\ b \cdot x^2 - 6x, & \text{si } 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

sigui contínua a l'interval $[3/2, 4]$ i derivable a l'interval $(3/2, 4)$. (7 punts)

b) Per als valors de a i b determinats a l'apartat a), calculau els punts de l'interval $(1, 4)$ on el pendent de la recta tangent és 3. (3 punts)

Solució. a) Hem de veure que $f(x)$ és contínua a l'interval $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$ i derivable a l'interval $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$. Com que $f(x)$ està definida a trossos i en cada tros és contínua i derivable als intervals oberts corresponents, l'únic punt a estudiar és $x = 2$.
Estudiem la continuïtat a $x = 2$. Per fer-ho, calculem els límits laterals de $f(x)$ i

mirem si coincideixen:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} (\ln(x-1)^2 + a) = a,\\ \lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} (b\cdot x^2 - 6x) = 4b - 12.\end{aligned}$$

La funció, perquè sigui contínua a $x = 2$, ha de satisfer que $a = 4b - 12$.
A continuació estudiem la derivabilitat a $x = 2$. Per fer-ho, calculam els límits laterals de $f'(x)$ i miram si coincideixen:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-} f'(x) &= \lim_{x\to 2^-} \frac{2}{x-1} = 2,\\ \lim_{x\to 2^+} f'(x) &= \lim_{x\to 2^+} (2bx - 6) = 4b - 6.\end{aligned}$$

Perquè la funció sigui derivable a $x = 2$, s'ha de verificar que $4b - 6 = 2$, d'on $b = 2$.
Fent servir que $a = 4b - 12$, tindrem que $a = -4$.

b) Finalment, calculam el pendent en els valors x tals que $f'(x) = 0$.
Si $x \in \left(\frac{3}{2}, 3\right)$,

$$f'(x) = \frac{2}{x-1} = 3 \Longrightarrow x = \frac{5}{3}.$$

Si $x \in (2, 4)$,

$$f'(x) = 4x - 6 = 3 \Longrightarrow x = \frac{9}{4}.$$

4. Calculau la integral indefinida següent (10 punts)

$$\int \frac{x}{(x-1)^2}\,dx.$$

Solució. Com que és una integral racional, posem la funció a integrar de la forma:

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2},$$

on les constants A i B satisfan:

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}, \quad A(x-1) + B = x.$$

La constant A serà $A = 1$ i B complirà $B - A = 0$, d'on $B = A = 1$.

La integral a calcular ens queda:

$$\int \frac{x}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C,$$

on C és la constant d'integració.

Matemàtiques II

Model 3

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Discutiu per a quins valors de a el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{array}{rl} a\cdot x+y+z= & a^2, \\ x-y+z= & 1, \\ 3x-y-z= & 1, \\ 6x-y+z= & 3a \end{array}\right\}$$

(7 punts)

b) Resoleu-lo en el cas (o els casos) en què sigui compatible. (3 punts)

2. Estudiau la posició relativa de les rectes (6 punts):

$$r: \frac{x-2}{-3}=\frac{y-3}{5}=z, \quad s: \left\{\begin{array}{rl} x= & 1-t, \\ y= & 2t, \\ z= & 5 \end{array}\right.$$

i, en cas que es tallin, trobau el punt d'intersecció (4 punts).

3. Determinau els valors de a, b i c perquè la funció $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ passi pel punt $(1,0)$, tingui un màxim relatiu a $x=-1$ i un mínim relatiu a $x=0$. (10 punts)

4. Calculau la integral indefinida següent: (10 punts)

$$\int \frac{2x+5}{(x+3)^3}\,dx.$$

Matemàtiques II

Model 3

OPCIÓ B

1. *a*) Demostrau que l'equació matricial següent no té solució: (6 punts) (Indicació: agafau determinants)

$$\mathbf{AB} - \mathbf{A} = \mathbf{C},$$

on

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) Resoleu l'equació matricial anterior però ara agafant: (4 punts)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Trobau la recta que passa pel punt $A(1,0,2)$ i és paral·lela als plans $x - 2y + 3z + 1 = 0$ i $2x - 3y + z + 6 = 0$. (10 punts).

3. *a*) Demostrau que $x = 0$ és l'única arrel de l'equació: (4 punts)

$$5x^9 + 3x^5 + 7x = 0.$$

b) Demostrau que $x = 0$ és l'única arrel de l'equació: (6 punts)

$$\mathrm{e}^x = 1 + x.$$

4. Feu un dibuix aproximat de les corbes $y = 6x - x^2$ i $y = x^2 - 2x$, i indicau els punts on es tallen. (4 punts) Calculau l'àrea del recinte limitat per les dues corbes anteriors (6 punts).

Matemàtiques II

Model 3. Criteris específics de correcció

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

OPCIÓ A

1. *a*) Càlcul del $\det(\overline{\mathbf{A}})$, 3 punts. Discussió, 5 punts. Donau 2 punts per discussió quan $a \neq 2$ i 2 punts per discussió quan $a = 2$.
Si s'equivoca en el càlcul del $\det(\overline{\mathbf{A}})$ o en la resolució de l'equació $\det(\overline{\mathbf{A}}) = 0$, i tota la resta està bé, donau 3 punts com a màxim dels 7 possibles. Si s'equivoca en les dues coses ($\det(\mathbf{A})$ i equació), 0 punts.

b) Resolució per a $a = 2$, 3 punts. (1 punt per incògnita)

2.
- Plantejar la matriu formada pels vectors directors de r i s i el vector format per un punt de r i l'altre de s, 2 punts.
- Justificar que la matriu anterior té rang 2 i per tant, les rectes es tallen, 4 punts.
- Càlcul del punt d'intersecció, 4 punts.

Si s'ha equivocat en qualque càlcul anterior però tota la resta és correcta, màxim 5 punts dels 10 possibles.

3. *a*) Imposar que f passa pel punt $(1, 0)$, 1 punt.

b) Determinar la condició $1 + a + b + c = 0$, 1 punt.

c) Càlcul de $f'(x) = 0$, 1 punt.

d) Dir que $x = -1$ i $x = 0$ són solucions de $f'(x) = 0$, 1 punt.

e) Determinar les condicions $3 - 2a + b = 0$, $b = 0$, 2 punts.

f) Deduir que $a = \frac{3}{2}$, 1 punt.

g) Càlcul del valor de c, 1 punt.

h) Comprovar que $x = -1$ és un màxim relatiu, 1 punt.

i) Comprovar que $x = 0$ és un mínim relatiu, 1 punt.

Si s'equivoca en qualque càlcul anterior però tota la resta és correcta, màxim 5 punts dels 10 possibles. Si hi ha 2 errors, 0 punts.

4.
- Posar la descomposició de la funció a integrar, 2 punts.
- Càlcul de les constants A, B i C, 4 punts.
- Càlcul de la integral, 4 punts.

Si s'equivoca en qualque càlcul anterior però tota la resta és correcta, màxim 6 punts dels 10 possibles. Si hi ha 2 errors, 0 punts. Si no apareixen càlculs que avalin les respostes, 0 punts.

Matemàtiques II

Model 3. Criteris específics de correcció

OPCIÓ B

1.
- Si planteja que el determinant de la part esquerra és igual al determinant de la part dreta, 1 punt.
- Si descompon el determinant de la part esquerra com a det(**A**)det(**B** − **Id**), 2 punts.
- Si raona que l'equació no té solució, 3 punts.
- Càlcul de $(\mathbf{B} - \mathbf{Id})^{-1}$, 2 punts.
- Càlcul de la matriu **A**, 2 punts.

Si a l'apartat b) s'equivoca en algun càlcul insignificant, màxim 2 punts dels 4 possibles.

2.
- Plantejar que el vector director ha de ser perpendicular als vectors normals dels plans, 4 punts.
- Resolució del sistema anterior, 2 punts.
- Càlcul de la recta demanada, 4 punts.

Si s'ha equivocat en qualque càlcul anterior però tota la resta és correcta, màxim 6 punts dels 10 possibles.

3.
- Apartat a)
  - Càlcul de $f'(x)$, 1 punt.
  - Dir que $f'(x) > 0$, i per tant, $f'(x)$ no té solució, 1 punt.
  - Aplicar el teorema de Rolle i deduir que l'equació $f(x) = 0$ només té la solució $x = 0$, 2 punts.
- Apartat b)
  - Càlcul de $f'(x)$, 1 punt.
  - Veure que $f'(x) = 0$ només té la solució $x = 0$, 1 punt.
  - Raonar que si $f(x) = 0$ tingués una altra solució $c \neq 0$, arribam a un absurd, 4 punts.

4.
- Recinte, 6 punts.
- Àrea, 4 punts.

Cap càlcul o explicació que avali el dibuix, 0 punts. Al càlcul de la integral, si hi ha qualque error insignificant, màxim 3 punts dels 4 possibles. Dibuix correcte sense cap explicació que l'avali, 0 punts.

Matemàtiques II

Model 3. Solucions

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Discutiu per a quins valors de a el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{array}{rl} a\cdot x+y+z= & a^2, \\ x-y+z= & 1, \\ 3x-y-z= & 1, \\ 6x-y+z= & 3a \end{array}\right\}$$

(7 punts)

b) Resoleu-lo en el cas (o els casos) en què sigui compatible. (3 punts)

Solució. *a*) La matriu del sistema $\mathbf{A}$ i la matriu ampliada $\overline{\mathbf{A}}$ del sistema són les següents:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 3a \end{pmatrix}.$$

El determinant de la matriu ampliada del sistema $\overline{\mathbf{A}}$ val: $\det(\overline{\mathbf{A}})=-16+16a-4a^2$. Si resolem l'equació $-16+16a-4a^2=0$, obtenim que $a=2$. Per tant, tenim que si $a\neq 2$, el rang de la matriu $\overline{\mathbf{A}}$ serà 4 i el rang de la matriu $\mathbf{A}$ serà com a màxim 3. Per tant, el sistema serà incompatible.

Falta estudiar el cas $a=2$. La matriu del sistema és en aquest cas: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

El rang de la matriu anterior és 3 ja que per exemple el determinant format per les tres primeres files i columnes és diferent de zero:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}=10.$$

La matriu ampliada és: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Aquesta matriu també tindrà rang 3, ja que és més gran que el rang de la matriu $\mathbf{A}$ però no arriba a 4, perquè el seu determinant és nul. Per tant, el sistema serà compatible determinat.

b) Ara resoldrem el sistema per a $a = 2$. Basta agafar les tres primeres files i columnes, ja que el rang de les matrius corresponents és 3:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + z &= 4, \\ x - y + z &= 1, \\ 3x - y - z &= 1, \end{aligned}\right\}$$

Sumant la primera equació i la tercera ens surt: $5x = 5$, d'on $x = 1$.
Sumant les dues darreres, ens surt: $4x - 2y = 2$, d'on $y = \frac{4x-2}{2} = 1$.
A l'últim, el valor de z es pot obtenir de la primera equació: $z = 4 - y - 2x = 1$.
Les solucions són: $x = 1$, $y = 1$ i $z = 1$.

2. Estudiau la posició relativa de les rectes (6 punts):

$$r : \frac{x-2}{-3} = \frac{y-3}{5} = z, \quad s : \left\{\begin{aligned} x &= 1 - t, \\ y &= 2t, \\ z &= 5 \end{aligned}\right.$$

i, en cas que es tallin, trobau el punt d'intersecció (4 punts).

Solució. Per veure la posició relativa de les rectes r i s, hem de calcular el rang de la matriu formada pel vector director de r, $(-3, 5, 1)$, el vector director de s, $(-1, 2, 0)$ i un vector format per un punt de r i l'altre de s, $(1, 0, 5) - (2, 3, 0) = (-1, -3, 5)$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

El determinant de la matriu anterior és nul, però clarament hi ha un menor d'ordre 2 diferent de zero. Per tant, el rang és 2, i com que els vectors directors de r i s són linealment independents, les dues rectes es tallen.

A continuació determinem el punt de intersecció. Per fer-ho, posem primer s en forma contínua:

$$s : \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-5}{0}.$$

Per determinar la intersecció, hem de resoldre el sistema següent:

$$\left.\begin{aligned} x - 2 &= -3z, \\ y - 3 &= 5z, \\ z - 5 &= 0, \\ 2(x-1) &= -y. \end{aligned}\right\}$$

De la tercera equació, tenim que $z = 5$. De la segona, tenim que $y = 28$ i de la primera, tenim que $x = -13$. Per tant, el punt de intersecció serà $(-13, 28, 5)$.

3. Determinau els valors de a, b i c perquè la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ passi pel punt $(1, 0)$, tingui un màxim relatiu a $x = -1$ i un mínim relatiu a $x = 0$. (10 punts)

Solució. Com que ens diuen que passa pel punt $(1, 0)$, tenim que $1 + a + b + c = 0$, o, si es vol, $a + b + c = -1$.

Els màxims i mínims relatius es troben resolent $f'(x) = 0$. Calculem la derivada $f'(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b.$$

Sabem que els valors $x = -1$ i $x = 0$ són solució de l'equació $f'(x) = 0$:

$$3 - 2a + b = 0, \; b = 0.$$

Com que $b = 0$, de la primera equació deduïm que $a = \frac{3}{2}$.

Com $a + b + c = -1$, podem calcular el valor de c: $c = -1 - a - b = -1 - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$.

Els valors de a, b i c són: $a = \frac{3}{2}$, $b = 0$ i $c = -\frac{5}{2}$.

Comprovem que $x = -1$ és un màxim relatiu. Si fem $f''(x)$, obtenim $f''(x) = 6x + 2a = 6x + 3$. Si substituïm per $x = -1$, obtenim $f''(-1) = -3$. Com que és negatiu, tenim que $x = -1$ és un màxim relatiu.

Comprovem que $x = 0$ és un mínim relatiu. Si fem $f''(0)$ obtenim $f''(0) = 3$. Com que és positiu, tenim que $x = 0$ és un mínim relatiu.

4. Calculau la integral indefinida següent: (10 punts)

$$\int \frac{2x + 5}{(x + 3)^3}\, dx.$$

Solució. Es tracta d'una integral racional. Com que el grau del numerador és menor que el grau del denominador, descomponem la funció a integrar de la forma següent:

$$\frac{2x + 5}{(x + 3)^3} = \frac{A}{x + 3} + \frac{B}{(x + 3)^2} + \frac{C}{(x + 3)^3} = \frac{A(x + 3)^2 + B(x + 3) + C}{(x + 3)^3}.$$

Tenim que:

$$A(x + 3)^2 + B(x + 3) + C = 2x + 5.$$

Substituint x per -3 obtenim el valor de C: $C = -1$.

Agafam dos valors qualsevol de x: $x = 0, 1$. Substituint-los a la igualtat anterior, obtenim el sistema següent pels valors A i B:

$$\left.\begin{aligned} 9A + 3B = {} & 6, \\ 16A + 4B = {} & 8. \end{aligned}\right\}$$

La solució del sistema anterior és: $A = 0$ i $B = 2$.

La integral a resoldre es pot escriure com a:

$$\int \frac{2x + 5}{(x + 3)^3}\, dx = 2 \int \frac{1}{(x + 3)^2}\, dx - \int \frac{1}{(x + 3)^3}\, dx = \frac{-2}{x + 3} + \frac{1}{2(x + 3)^2} + K,$$

on K és la constant d'integració.

Matemàtiques II

Model 3. Solucions

OPCIÓ B

1. *a*) Demostrau que l'equació matricial següent no té solució: (6 punts) (Indicació: agafau determinants)

$$\mathbf{AB} - \mathbf{A} = \mathbf{C},$$

on

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) Resoleu l'equació matricial anterior però ara agafant: (4 punts)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solució. *a*) Si traiem factor comú $\mathbf{A}$, l'equació queda:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} - \mathbf{Id}) = \mathbf{C}$$

Si agafam determinants, tenim:

$$\det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B} - \mathbf{Id}) = \det(\mathbf{C}).$$

Ara bé, el valor del determinant $\det(\mathbf{B} - \mathbf{Id})$ és nul. Per tant, ens queda: $0 = -2$. Això és una contradicció. Concloem que l'equació anterior no té solució.

b) El valor de la matriu $\mathbf{A}$ serà:

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{Id})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$$

2. Trobau la recta que passa pel punt $A(1, 0, 2)$ i és paral·lela als plans $x - 2y + 3z + 1 = 0$ i $2x - 3y + z + 6 = 0$. (10 punts).

Solució. Sigui $\mathbf{v} = (x, y, z)$ el vector director de la recta. Si la recta ha de ser paral·lela als dos plans anteriors, el vector director anterior ha de ser perpendicular als vectors normals de cada pla:

$$\left.\begin{array}{rl} x - 2y + 3z = & 0, \\ 2x - 3y + z = & 0. \end{array}\right\}$$

Les solucions del sistema anterior són: $x = 7z$ i $y = 5z$. Agafant $z = 1$, un vector director de la recta seria: $\mathbf{v} = (7, 5, 1)$. L'equació de la recta demanada serà:

$$\frac{x-1}{7} = \frac{y}{5} = z - 2.$$

3. *a*) Demostrau que $x = 0$ és l'única arrel de l'equació: (4 punts)

$$5x^9 + 3x^5 + 7x = 0.$$

b) Demostrau que $x = 0$ és l'única arrel de l'equació: (6 punts)

$$\mathrm{e}^x = 1 + x.$$

Matemàtiques II

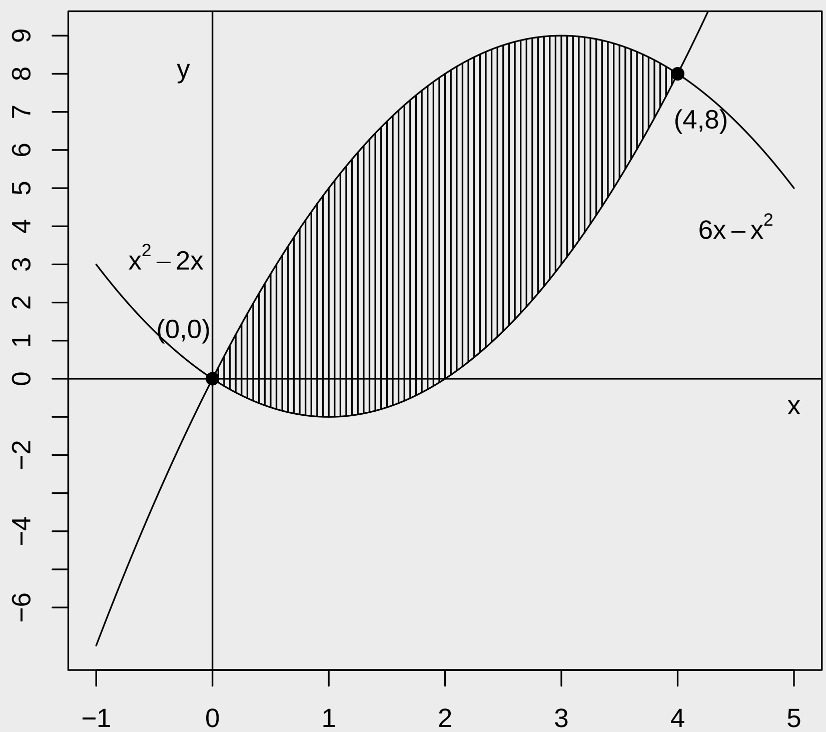
Model 3. Solucions

Solució. *a*) Sigui $f(x) = 5x^9 + 3x^5 + 7x$. La derivada de la funció anterior val: $f'(x) = 45x^8 + 15x^4 + 7$. L'equació $f'(x) = 0$ no té cap solució, ja que per a tot x, $f'(x) > 0$. Per tant, l'equació $f(x) = 0$ té una solució com a màxim, ja que si en tingués dues, aplicant el teorema de Rolle, resultaria que l'equació $f'(x) = 0$, tindria una solució, i acabam de veure que no en té cap. Per tant, l'única solució de $f(x) = 0$ és $x = 0$, tal com volíem demostrar.

b) Sigui $f(x) = e^x - (1 + x)$. Ens demanen demostrar que l'equació $f(x) = 0$ té com a única solució $x = 0$. Fem la derivada de $f(x)$: $f'(x) = e^x - 1$. L'equació $f'(x) = 0$ només té una solució $x = 0$. Suposem que l'equació $f(x) = 0$ té una altra solució a part de $x = 0$, diguem-li c. Suposem, sense pèrdua de generalitat, que $c > 0$. Tindríem que $f(0) = 0$ i $f(c) = 0$. Aplicant el teorema de Rolle, tindríem que existeix un valor $c' \in (0, c)$ tal que $f'(c') = 0$, però això no pot ser ja que $c' \neq 0$, i hem vist que l'única solució de l'equació $f'(x) = 0$ és el valor 0. Hem arribat a una contradicció. Concloem, doncs, que l'equació $f(x) = 0$ té com a única solució $x = 0$.

4. Feu un dibuix aproximat de les corbes $y = 6x - x^2$ i $y = x^2 - 2x$, i indicau els punts on es tallen. (4 punts) Calculau l'àrea del recinte limitat per les dues corbes anteriors (6 punts).

Solució. El gràfic del recinte es pot veure a la figura següent:



Els punts de tall de les corbes són $x = 0$ i $x = 4$. Els valors anteriors surten de resoldre l'equació:

$$6x - x^2 = x^2 - 2x.$$

L'àrea del recinte indicat val:

$$\int_0^4 (6x - x^2 - (x^2 - 2x))\,dx = \int_0^4 (-2x^2 + 8x)\,dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + 4x^2\right]_0^4$$
$$= -\frac{2\cdot 4^3}{3} + 4^3 = 21.3333\,\mathrm{u}^2.$$

Matemàtiques II

Model 1

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Discutiu per a quins valors de m el sistema següent té solució distinta de la trivial:

$$\left.\begin{array}{rl} m\cdot x+2y+z= & 0, \\ 4x+2m\cdot y+m\cdot z= & 0, \\ 2x+(2m-2)\cdot y+z= & 0. \end{array}\right\}$$

(7 punts)

b) Resoleu-lo en el cas (o els casos) en què sigui compatible indeterminat. (3 punts)

2. Determinau el valor de m perquè els punts $A(1,2,0)$, $B(0,3,-1)$, $C(1,0,1)$ i $D(-1,2,m)$ siguin coplanaris (6 punts) i calculau l'equació general del pla que els conté (4 punts).

3. Donada la funció $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$, determinau el valor c que verifica que el pendent de la recta tangent de $f(x)$ a $x=c$ és mínim (6 punts) i calculau la corresponent recta tangent de $f(x)$ a $x=c$. (4 punts)

4. Feu un dibuix aproximat de les corbes $y=3x-x^2$ i $y=x-3$ i indicau els punts on es tallen (4 punts). Calculau l'àrea del recinte limitat per les dues corbes anteriors (6 punts).

Matemàtiques II

Model 1

OPCIÓ B

1. Calculau la matriu $\mathbf{X}$ tal que:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{X} - \mathbf{B}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B},$$

on

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(10 punts)

2. Calculau el punt simètric del punt $A(-3, 1, -7)$ respecte de la recta $x + 1 = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$.
(10 punts)

3. Demostrau que existeix un únic valor $x > 0$ solució de l'equació $x^2 - \mathrm{e}^{-x} = 0$. (6 punts per l'existència i 4 punts per la unicitat).

4. Calculau la integral indefinida següent: (10 punts)

$$\int \frac{x-2}{x^2+x}\, dx$$

Matemàtiques II

Model 1. Criteris específics de correcció

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

OPCIÓ A

1. *a*) Càlcul del $\det(\mathbf{A})$, 2 punts. Discussió, 5 punts. Donau 1 punt per discussió quan $m \neq \pm 2$, 2 punts per discussió quan $m = -2$ i 2 punts per discussió quan $m = 2$. Si s'equivoca en el càlcul del $\det(\mathbf{A})$ o en la resolució de l'equació $\det(\mathbf{A}) = 0$, i tota la resta està bé, donau 3 punts com a màxim dels 7 possibles. Si s'equivoca en les dues coses ($\det(\mathbf{A})$ i equació), 0 punts.

b) Resolució per a $m = -2$, 3 punts. (1 punt per incògnita)

2.
- Càlcul correcte dels tres vectors: 3 punts, 1 punt per vector.
- Comprovació que són coplanaris, 2 punts.
- Càlcul del valor de m, 1 punt.
- Càlcul del pla, 4 punts.

Si s'ha equivocat en qualque càlcul anterior però tota la resta és correcta, màxim 5 punts dels 10 possibles.

3.
- Càlcul de $f'(c)$, 0.5 punts. Raonar que $f'(c)$ és el pendent de la recta tangent, 2 punts.
- Càlcul de $f''(c)$, 0.5 punts. Raonar que $f''(c)$ ens dóna el mínim de la tangent, 2 punts.
- Resolució de $f''(c) = 0$, 1 punt.
- Càlcul de la recta tangent, 4 punts.

Si s'equivoca en qualque càlcul anterior però tota la resta és correcta, màxim 5 punts del 10 possibles. Si hi ha 2 errors, 0 punts.

4.
- Recinte, 6 punts.
- Àrea, 4 punts.

Cap càlcul o explicació que avali el dibuix, 0 punts. Al càlcul de la integral, si hi ha qualque error insignificant, màxim 3 punts dels 4 possibles. Si fa el dibuix correcte sense cap explicació que l'avali, 0 punts.

OPCIÓ B

1. *a*) Càlcul de l'expressió de la matriu $\mathbf{X}$, 4 punts.

b) Càlcul de $\mathbf{B}^{-1}$, 2 punts.

c) Càlcul del valor de la matriu $\mathbf{X}$, 4 punts.

Si s'ha equivocat en el càlcul de l'expressió de $\mathbf{X}$ però tota la resta està **perfecta**, màxim 5 punts dels 10 possibles.

Si s'ha equivocat en el càlcul de $\mathbf{B}^{-1}$ però tota la resta està **perfecta**, màxim 6 punts dels 10 possibles.

Si s'ha equivocat dues vegades, 0 punts.

2.
- Càlcul correcte del pla que conté el punt A i la recta, 3 punts.
-
- Càlcul correcte del pla π, 3 punts.
- Càlcul del punt simètric, 4 punts.

Si s'ha equivocat en qualque càlcul anterior però tota la resta és correcta, màxim 5 punts dels 10 possibles.

3.
- Càlcul de $f'(x)$, 1 punt.
- Témer-se que $f'(x)$ mai val 0 i que, per tant, l'equació $f(x) = 0$ té com a màxim una solució, 5 punts.
- Trobar un canvi de signe en l'equació $f(x) = 0$ i aplicar el teorema de Bolzano per veure que té una solució, 4 punts.

4.
- Posar la descomposició de la funció a integrar, 2 punts.
- Càlcul de les constants A i B, 4 punts.
- Càlcul de la integral, 4 punts.

Si s'equivoca en qualque càlcul anterior però tota la resta és correcta, màxim 6 punts dels 10 possibles. Si hi ha 2 errors, 0 punts. Si no apareixen càlculs que avalin les respostes, 0 punts.

Matemàtiques II

Model 2

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Discutiu per a quins valors de m el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{aligned} x + (m-2)\cdot y + 2mz &= 1, \\ 3x - y - 2z &= 2, \\ x + z &= 3. \end{aligned}\right\}$$

(7 punts)

b) Resoleu-lo en el cas en què $m = 1$. (3 punts)

2. Determinau m perquè la recta $\frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$ i el pla $\pi : x + 2y + m \cdot z = 6$ formin un angle de 45 graus (6 punts) i calculau el punt d'intersecció entre la recta i el pla.(4 punts)

3. Considerau la funció $f(x) = 2 \cdot \mathrm{e}^{-(x-1)} + 4x$. Calculau-ne els màxims i mínims relatius (4 punts), donau-ne els intervals de creixement i decreixement (3 punts) i demostrau que $f(x)$ és còncava per a tot valor x. Entenem que una funció és còncava en un punt x si $f''(x) > 0$. (3 punts)

4. Calculau la següent integral indefinida: (10 punts)

$$\int (x^2 + 1) \cdot \ln x \, dx.$$

Matemàtiques II

Model 2

OPCIÓ B

1. Sigui $\mathbf{A}$ la matriu següent:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix},$$

on a és un valor real.

Calculau $\mathbf{A}^2$ $\mathbf{A}^3$ i $\mathbf{A}^4$ (4 punts) i donau una fórmula general per a l'expressió de $\mathbf{A}^n$. (6 punts)

2. Determinau m perquè la recta $\frac{x}{-1} = \frac{y+1}{m} = \frac{z+3}{3}$ sigui paral·lela al pla $x + y - z = 5$ (5 punts) i calculau la distància entre ells. (5 punts)

3. De tots els rectangles de diagonal $6\sqrt{2}$ cm, determinau el rectangle de perímetre màxim. (10 punts)

4. Considerem les funcions $f(x) = x^3$ i $g(x) = 3x^2 - 4$. Feu un dibuix aproximat de les funcions anteriors per a $x \in [-3, 3]$ (6 punts). Calculau l'àrea limitada per les gràfiques de les funcions anteriors. (4 punts)

Matemàtiques II

Model 2. Criteris específics de correcció

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

OPCIÓ A

1. *a*) Càlcul del $\det(\mathbf{A})$, 2 punts. Discussió, 5 punts. Donau 2 punts per discussió quan $m \neq 3$ i 3 punts per discussió quan $m = 3$.
Si l'alumne s'equivoca en el càlcul del $\det(\mathbf{A})$ o en la resolució de l'equació $\det(\mathbf{A}) = 0$, i tota la resta està bé, donau 3 punts com a màxim dels 7 possibles. Si s'equivoca en totes dues coses ($\det(\mathbf{A})$ i equació), 0 punts.

b) Resolució per a $m = 1$, 3 punts. (1 punt per incògnita)

2.
- Plantejar l'equació corresponent al producte escalar del vector director de la recta pel vector normal del pla, 2 punts.
- Resolució de l'equació corresponent, 4 punts.
- Càlcul del punt d'intersecció de la recta amb el pla, 4 punts. Restar un punt per cada incògnita mal calculada.

Si s'ha equivocat en el càlcul de m però té bé el punt d'intersecció, donar-li els 4 punts corresponents. En general, si s'ha equivocat en qualque càlcul per determinar m però tota la resta és correcta, màxim 5 punts dels 6 possibles.

3.
- Càlcul de $f'(x)$, 1 punts.
- Càlcul de l'extrem, 2 punts.
- Comprovar que l'extrem calculat és un mínim, 1 punts.
- Donar els intervals de decreixement i creixement, 3 punts. Donau 1.5 punts pels intervals de decreixement i 1.5 punts pels intervals de creixement.
- Càlcul de $f''(x)$, 1.5 punts.
- Adonar-se que $f''(x) > 0$ per a tot valor de x, 1.5 punts.

Si s'ha equivocat en qualque càlcul anterior però tota la resta és correcta, màxim 7 punts dels 10 possibles.

4.
- Plantejar la integral per parts, 2 punts.
- Aplicar bé la fórmula per parts, 3 punts.
- Resoldre la integral que queda després d'aplicar parts, 2 punts.
- Donar l'expressió de la integral, 3 punts.
- Restar 1 punt si no ha posat la constant d'integració.

Si s'equivoca en qualque càlcul anterior però tota la resta és correcta, màxim 7 punts dels 10 possibles. Si hi ha 2 errors, 0 punts. Si no apareix el quocient o cap càlcul que avali el resultat, 0 punts.

OPCIÓ B

1. *a*) Càlcul de l'expressió de la matriu $\mathbf{A}^2$, 1 punt.
b) Càlcul de l'expressió de la matriu $\mathbf{A}^3$, 1.5 punts.
c) Càlcul de l'expressió de la matriu $\mathbf{A}^4$, 1.5 punts.
d) Càlcul de l'expressió de la matriu $\mathbf{A}^n$, 6 punts.

2.
- Donar l'equació que ens diu que el vector director de la recta és perpendicular al vector normal del pla, 4 punts.
- Resoldre l'equació corresponent, 3 punts.
- Càlcul de la distància demanada, 3 punts. Si s'ha equivocat en el càlcul de la m, però calcula bé la distància entre la recta i el pla, prenent la "seva" m, donar 3 punts.

Si s'ha equivocat en qualque càlcul anterior però tota la resta és correcta, màxim 7 punts dels 10 possibles.

3.
- Determinar la relació entre els dos costats del rectangle aplicant el teorema de Pitàgores, 3 punts.
- Donar l'expressió del perímetre del rectangle, 1 punt.
- Escriure la funció a màximitzar en funció d'un dels costats del rectangle, 2 punts.
- Donar el valor del costat màxim, 2 punts.
- Comprovar que és un màxim, 1 punt.
- Donar les dimensions del rectangle de perímetre màxim, 1 punt.

Si s'equivoca en qualque càlcul anterior però tota la resta és correcta, màxim 7 punts dels 10 possibles. Si hi ha 2 errors, 0 punts.

4.
- Recinte, 6 punts.
- Àrea, 4 punts.

Cap càlcul o explicació que avali el dibuix, 0 punts. Al càlcul de la integral, si hi ha qualque error insignificant, màxim 3 punts dels 4 possibles. Dibuix correcte sense cap explicació que l'avali, 0 punts.

Universitat de les Illes Balears | Prova d'accés a la Universitat | Convocatòria 2016

Matemàtiques II

Model 2. Solucions

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Discutiu per a quins valors de m el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{aligned} x+(m-2)\cdot y+2mz = &\ 1, \\ 3x-y-2z = &\ 2, \\ x+z = &\ 3. \end{aligned}\right\}$$

(7 punts)

b) Resoleu-lo en el cas en què $m=1$. (3 punts)

Solució. *a*) La matriu del sistema és:

$$\begin{pmatrix} 1 & m-2 & 2m \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estudiem quan el determinant del sistema anterior s'anul·la. El determinant de la matriu anterior val:

$$9-3m.$$

El determinant serà nul per a $m=3$.
Si $m \neq 3$, el rang de la matriu del sistema serà 3, el mateix que el rang de la matriu ampliada. Per tant, el sistema serà compatible determinat.
Si $m=3$, el sistema serà:

$$\left.\begin{aligned} x+y+6z = &\ 1, \\ 3x-y-2z = &\ 2, \\ x+z = &\ 3. \end{aligned}\right\}$$

El rang del sistema serà 2, ja que per exemple el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, és diferent de zero. El rang de la matriu ampliada serà 3, ja que el menor següent és no nul:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -9 \neq 0.$$

Per tant, es tractaria d'un sistema incompatible.

b) Hem de resoldre el sistema en el cas en què $m=1$:

$$\left.\begin{aligned} x-y+2z=&\ \ 1,\\ 3x-y-2z=&\ \ 2,\\ x+z=&\ \ 3.\end{aligned}\right\}$$

Les solucions són: $x=\frac{13}{6},\ y=\frac{17}{6},\ z=\frac{5}{6}$.

2. Determinau m perquè la recta $\frac{x-1}{0}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{1}$ i el pla $\pi: x+2y+m\cdot z=6$ formin un angle de 45 graus (6 punts) i calculau el punt d'intersecció entre la recta i el pla.(4 punts)

Solució. Ens demanen calcular m perquè el vector director de la recta $(0,1,1)$ i el vector normal del pla $(1,2,m)$ formin un angle de $90-45=45$ graus. Per tant:

$$\begin{aligned}(0,1,1)\cdot(1,2,m)=&2+m=\sqrt{0^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+m^2}\cdot\cos(45)\\ =&\sqrt{2}\cdot\sqrt{m^2+5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{m^2+5}.\end{aligned}$$

El valor(s) de m satisfaran:

$$m+2=\sqrt{m^2+5},\ \Rightarrow (m+2)^2=m^2+5.$$

Arreglant la darrera expressió, tindrem que m satisfà l'equació següent:

$$4m-1=0.$$

El valor de m serà $m=\frac{1}{4}$.

Calculem el punt d'intersecció entre la recta i el pla. Per fer-ho, hem de resoldre el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{aligned} x=&\ \ 1,\\ y-z=&\ -4,\\ 4x+8y+z=&\ \ 24.\end{aligned}\right\}$$

Les solucions són: $x=1,\ y=\frac{16}{9},\ z=\frac{52}{9}$. El punt d'intersecció serà: $\left(1,\frac{16}{9},\frac{52}{9}\right)$.

3. Considerau la funció $f(x)=2\cdot \mathrm{e}^{-(x-1)}+4x$. Calculau-ne els màxims i mínims relatius (4 punts), donau-ne els intervals de creixement i decreixement (3 punts) i demostrau que $f(x)$ és còncava per a tot valor x. Entenem que una funció és còncava en un punt x si $f''(x)>0$. (3 punts)

Solució. La derivada de $f(x)$ val:

$$f'(x)=-2\mathrm{e}^{-(x-1)}+4.$$

Per calcular els possibles extrems, igualam l'expressió anterior a zero i resolem l'equació corresponent:

$$-2\mathrm{e}^{-(x-1)}+4=0,\ \Rightarrow \mathrm{e}^{-(x-1)}=2,\ \Rightarrow x=1-\ln 2\approx 0.3069.$$

Mirem si el valor determinat és un extrem relatiu:

x	$-\infty$	$1-\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Tindrem que $f(x)$ serà decreixent a l'interval $(-\infty, 1-\ln 2)$, creixent a l'interval $(1-\ln 2, \infty)$ i en $x = 1-\ln 2$ presenta un mínim.

Estudiem la convexitat i la concavitat. Per fer-ho, fem la derivada segona:

$$f''(x) = 2\mathrm{e}^{-(x-1)}.$$

Observam que $f''(x) > 0$ per a tot valor de x. Per tant, $f(x)$ serà còncava per a qualsevol valor de x.

4. Calculau la següent integral indefinida: (10 punts)

$$\int (x^2+1)\cdot \ln x \, dx.$$

Solució. Resolem la integral anterior per parts.

$$\begin{aligned} u = &\quad \ln x, & du &= \tfrac{dx}{x}, \\ dv = &\quad (x^2+1), & v &= \tfrac{x^3}{3} + x. \end{aligned}$$

La integral queda:

$$\begin{aligned} \int \ln x (x^2+1)\, dx &= \ln x \left(\frac{x^3}{3} + x\right) - \int \frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3} + x\right) dx \\ &= \ln x \left(\frac{x^3}{3} + x\right) - \int \left(\frac{x^2}{3} + 1\right) dx \\ &= \ln x \left(\frac{x^3}{3} + x\right) - \frac{x^3}{9} - x + K, \end{aligned}$$

on K és la constant d'integració.

Matemàtiques II

Model 2. Solucions

OPCIÓ B

1. Sigui $\mathbf{A}$ la matriu següent:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix},$$

on a és un valor real.

Calculau $\mathbf{A}^2$ $\mathbf{A}^3$ i $\mathbf{A}^4$ (4 punts) i donau una fórmula general per a l'expressió de $\mathbf{A}^n$. (6 punts)

Solució. Les matrius $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$ i $\mathbf{A}^4$ valen:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2a & a^2 & 0 \\ 1 & 2a & a^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 3a^2 & a^3 & 0 \\ 3a & 3a^2 & a^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^4 = \begin{pmatrix} a^4 & 0 & 0 \\ 4a^3 & a^4 & 0 \\ 6a^2 & 4a^3 & a^4 \end{pmatrix}.$$

La fórmula general per a la matriu $\mathbf{A}^n$ serà:

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ na^{n-1} & a^n & 0 \\ \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} & na^{n-1} & a^n \end{pmatrix}.$$

2. Determinau m perquè la recta $\frac{x}{-1} = \frac{y+1}{m} = \frac{z+3}{3}$ sigui paral·lela al pla $x + y - z = 5$ (5 punts) i calculau la distància entre ells. (5 punts)

Solució. La recta serà paral·lela al pla si el vector director de la recta $(-1, m, 3)$ és perpendicular al vector normal del pla $(1, 1, -1)$. Per tant, el seu producte escalar serà nul:

$$(-1, m, 3) \cdot (1, 1, -1) = -1 + m - 3 = 0,$$

d'on deduïm que $m = 4$.

Per calcular la distància entre la recta al pla, prenem un punt qualsevol de la recta $(0, -1, -3)$ i calculam la distància d'aquest punt al pla:

$$d(r, \pi) = \frac{|0 - 1 + 3 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \approx 1.7321.$$

3. De tots els rectangles de diagonal $6\sqrt{2}$ cm, determinau el rectangle de perímetre màxim. (10 punts)

Solució. Siguin a i b les dimensions d'un rectangle de diagonal $6\sqrt{2}$. Tindrem, aplicant el teorema de Pitàgores, que els valors a i b satisfan:

$$a^2 + b^2 = (6\sqrt{2})^2 = 72, \Rightarrow b = \sqrt{72 - a^2}.$$

El perímetre serà:

$$P = 2(a + b) = 2\left(a + \sqrt{72 - a^2}\right).$$

Per maximitzar la funció P, farem la derivada i a continuació, la igualarem a zero per calcular els possibles extrems:

$$P' = 2\left(1 - \frac{a}{\sqrt{72-a^2}}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{72-a^2}-a}{\sqrt{72-a^2}}\right).$$

Igualant l'expressió anterior a zero, calculam els possibles extrems,

$$\sqrt{72-a^2} - a = 0, \;\Rightarrow a = \sqrt{72-a^2}, \;\Rightarrow a^2 = 72 - a^2, \;\Rightarrow a = \sqrt{36} = 6.$$

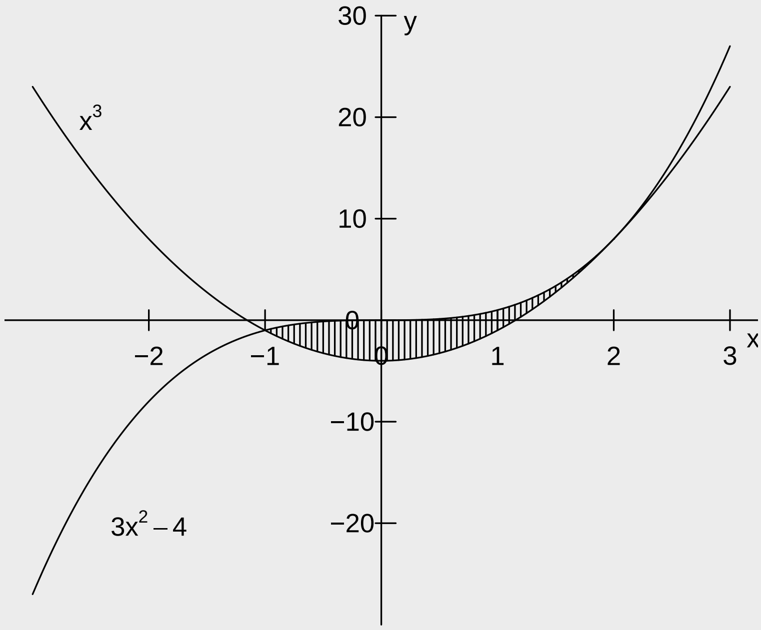
Vegem que és un màxim:

a	0		6		$\sqrt{72}$
P'		$+$		$-$	
P		$\nearrow$		$\searrow$	

L'altre costat valdrà: $b = \sqrt{72-6^2} = 6$. Per tant, les dimensions del rectangle seran $a = 6$ i $b = 6$, és a dir, un quadrat de costat 6 cm.

4. Considerem les funcions $f(x) = x^3$ i $g(x) = 3x^2 - 4$. Feu un dibuix aproximat de les funcions anteriors per a $x \in [-3, 3]$ (6 punts). Calculau l'àrea limitada per les gràfiques de les funcions anteriors. (4 punts)

Solució. El gràfic del recinte es pot veure a la figura següent:



Determinem els punts de tall entre les dues funcions:

$$f(x) = g(x), \Rightarrow x^3 = 3x^2 - 4, \Rightarrow x = -1, 2.$$

L'àrea demanada serà:

$$\begin{aligned} A = \int_{-1}^{2} (x^3 - (3x^2 - 4))\, dx = \int_{-1}^{2} (x^3 - 3x^2 + 4)\, dx = & \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 4x\right]_{-1}^{2} \\ = & \frac{2^4}{4} - 2^3 + 4 \cdot 2 - \left(\frac{(-1)^4}{4} - (-1)^3 + 4 \cdot (-1)\right) \\ = & 4 - (-2.75) = 6.75 \text{ u}^2. \end{aligned}$$

Matemàtiques II

Model 1

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Discutiu per a quins valors de a el sistema següent té solució:

$$\left.\begin{array}{rl} x+(a-1)\cdot y+3z= & 1, \\ 3x+2y+z= & -1, \\ -a\cdot x-y+z= & 1. \end{array}\right\}$$

(7 punts)

b) Resoleu-lo en el cas (o casos) en què sigui compatible indeterminat. (3 punts)

2. Donats els punts $A(0,0,0)$ i $B(1,1,2)$, determinau els punts C i D tals que el quadrilàter $ABCD$ sigui un rectangle en el pla $x+y-z=0$ i la coordenada x del punt C valgui 1. Vegeu figura adjunta. (10 punts)

3. Considerem la funció $f(x)=e^{x-3}-x-2$, per a $x\geq 0$. Calculau-ne els seus extrems relatius (3 punts), donau-ne els intervals de creixement i decreixement (4 punts) i deduïu que si $x\geq 4$, $f(x)\geq -4$. (3 punts)

4. Feu un dibuix aproximat de les corbes $y=\sin x$ i $y=\cos x$, on $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$, indicant els punts on es tallen (5 punts). Calculau l'àrea del recinte limitat per les dues corbes anteriors i les rectes verticals $x=\pm\frac{\pi}{4}$. (5 punts)

Matemàtiques II

Model 1

OPCIÓ B

1. Calculau la matriu $\mathbf{X}$ tal que:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B},$$

on

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(10 punts)

2. Calculau el punt simètric del punt $A(1, 1, 1)$ respecte del pla $\pi : x + y + 3z = 6$.
(10 punts)

3. Donau el triangle isòsceles de perímetre 9 cm que té àrea màxima. (10 punts)

4. Calculau la integral indefinida següent: (10 punts)

$$\int \frac{2x^2 + x - 2}{x^3 - 2x^2 - x + 2}\, dx$$

Universitat de les Illes Balears | Prova d'accés a la Universitat | Convocatòria 2016

Matemàtiques II

Model 1. Criteris específics de correcció

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

OPCIÓ A

1. *a*) Càlcul del $\det(\mathbf{A})$, 2 punts. Discussió, 5 punts. Donau 1 punt per discussió quan $a \neq 1, 3$, 2 punts per discussió quan $a = 1$ i 2 punts per discussió quan $a = 3$.
Si l'alumne s'equivoca en el càlcul del $\det(\mathbf{A})$ o en la resolució de l'equació $\det(\mathbf{A}) = 0$, i tota la resta està bé, donau 3 punts com a màxim dels 7 possibles. Si s'equivoca en totes dues coses ($\det(\mathbf{A})$ i equació), 0 punts.

b) Resolució per a $a = 1$, 3 punts. (1 punt per incògnita)

2.
- Plantejament del sistema que satisfaran els punts C i D, 7 punts. Si hi falta qualque equació, restau 1 punt per equació faltant.
- Resolució del sistema, 3 punts.

Si s'ha equivocat en qualque càlcul anterior però tota la resta és correcta, màxim 5 punts dels 10 possibles.

3.
- Càlcul de $f'(x)$, 1 punt.
- Resolució de $f'(x) = 0$, 1 punt.
- Comprovació que el punt calculat és un mínim, 1 punt.
- Donar els intervals de creixement i decreixement, 4 punts. Donau 2 punts pels intervals de decreixement i 2 punts pels intervals de creixement.
- Raonar que $f(x)$ és creixent a l'interval donat, 1.5 punts.
- Dir que $f(x) \geq f(4)$ i adonar-se que $f(4) \geq -4$, 1.5 punts.

Si s'equivoca en qualque càlcul anterior però tota la resta és correcta, màxim 7 punts del 10 possibles. Si hi ha 2 errors, 0 punts.

4.
- Recinte, 5 punts.
- Àrea, 5 punts.

Cap càlcul o explicació que avali el dibuix, 0 punts. Al càlcul de la integral, si hi ha qualque error insignificant, màxim 4 punts dels 5 possibles. Si fa el dibuix correcte sense cap explicació que l'avali, 0 punts.

OPCIÓ B

1. *a*) Càlcul de l'expressió de la matriu $\mathbf{X}$, 4 punts.

b) Càlcul de $\mathbf{A}^{-1}$, 2 punts.
c) Càlcul del valor de la matriu $\mathbf{X}$, 4 punts.

Si s'ha equivocat en el càlcul de l'expressió de $\mathbf{X}$ però tota la resta està **perfecta**, màxim 6 punts dels 10 possibles.

Si s'ha equivocat en el càlcul de $\mathbf{A}^{-1}$ però tota la resta està **perfecta**, màxim 7 punts dels 10 possibles.

Si s'ha equivocat dues vegades, 0 punts.

2.
- Càlcul correcte de les relacions que ha de satisfer el punt A', 7 punts. Donar 2 punts si escriu la recta on està el punt A' i 3 punts per la relació que el punt mitjà del segment AA' ha de pertànyer al pla.
- Resolució del sistema corresponent, 3 punts.

Si s'ha equivocat en qualque càlcul anterior però tota la resta és correcta, màxim 7 punts dels 10 possibles.

3.
- Càlcul de l'àrea del triangle en funció dels costats o en funció d'un costat i l'alçada del triangle, 2 punts.
- Establir la relació que hi ha entre els costats i l'alçada del triangle, 2 punts.
- Posar la funció a maximitzar en funció d'un costat, 2 punts.
- Fer la derivada de la funció i resoldre l'equació corresponent per determinar-ne el possible màxim, 2 punts.
- Comprovar que és màxim, 1 punt.
- Donar les dimensions del triangle corresponent, 1 punt.

Si s'ha equivocat en qualque càlcul anterior però tota la resta és correcta, màxim 7 punts dels 10 possibles.

4.
- Posar la descomposició de la funció corresponent a integrar, 3 punts.
- Càlcul de les constants A i B, 3 punts.
- Càlcul de la integral, 4 punts.

Si s'equivoca en qualque càlcul anterior però tota la resta és correcta, màxim 7 punts dels 10 possibles. Si hi ha 2 errors, 0 punts. Si no apareixen càlculs que avalin les respostes, 0 punts.

Universitat de les Illes Balears | Prova d'accés a la Universitat | Convocatòria 2016

Matemàtiques II

Model 1. Solucions

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Discutiu per a quins valors de a el sistema següent té solució:

$$\left.\begin{array}{rl} x+(a-1)\cdot y+3z = & 1, \\ 3x+2y+z = & -1, \\ -a\cdot x-y+z = & 1. \end{array}\right\}$$

(7 punts)

b) Resoleu-lo en el cas (o casos) en què sigui compatible indeterminat. (3 punts)

Solució. *a*) La matriu del sistema és:

$$\begin{pmatrix} 1 & a-1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estudiem quan el determinant del sistema anterior s'anul·la. El determinant de la matriu anterior val:

$$-a^2+4a-3.$$

El determinant serà nul per a $a=1,3$.
Si $a\neq 1,3$, el rang de la matriu del sistema serà 3, el mateix que el rang de la matriu ampliada. Per tant, el sistema serà compatible determinat.
Si $a=1$, el sistema serà:

$$\left.\begin{array}{rl} x+3z = & 1, \\ 3x+2y+z = & -1, \\ -x-y+z = & 1. \end{array}\right\}$$

El rang del sistema serà 2, ja que per exemple el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\neq 0$, és diferent de zero. El rang de la matriu ampliada serà 2, ja que els dos menors següents són nuls:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Per tant, es tractaria d'un sistema compatible indeterminat.

Si $a = 3$, el sistema serà:

$$\left.\begin{array}{rl} x + 2y + 3z = & 1, \\ 3x + 2y + z = & -1, \\ -3x - y + z = & 1. \end{array}\right\}$$

El rang del sistema serà 2, ja que per exemple el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, és diferent de zero. El rang de la matriu ampliada serà 3, ja que el menor següent és no nul:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Per tant, es tractaria d'un sistema incompatible.

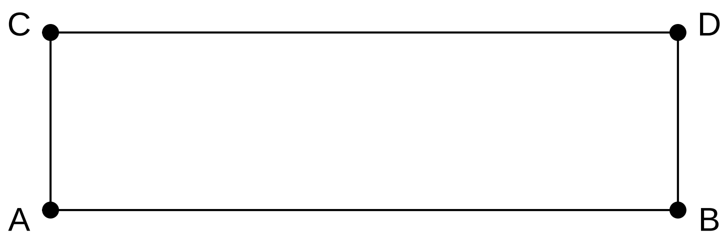
b) Hem de resoldre el sistema en el cas en què $a = 1$.
De la primera equació tenim que $x = 1 - 3z$ i de la darrera,

$$y = -x + z - 1 = -1 + 3z + z - 1 = -2 + 4z.$$

Per tant, les solucions seran:

$$x = -3z + 1, \;\; y = 4z - 2, \;\; \text{i } z \text{ lliure.}$$

2. Donats els punts $A(0,0,0)$ i $B(1,1,2)$, determinau els punts C i D tals que el quadrilàter $ABCD$ sigui un rectangle en el pla $x + y - z = 0$ i la coordenada x del punt C valgui 1. Vegeu figura adjunta. (10 punts)



Solució. Siguin $C(1, y_1, z_1)$ i $D(x_2, y_2, z_2)$. Perquè el quadrilàter $ABCD$ sigui un rectangle s'ha de satisfer:

- El vector AB ha d'ésser el mateix que el vector CD: $x_2 - 1 = 1$, $y_2 - y_1 = 1$,

$z_2 - z_1 = 2$.

- Els punts C i D han d'estar al pla: $1 + y_1 - z_1 = 0$, $x_2 + y_2 - z_2 = 0$.
- El vector AB ha d'ésser perpendicular al vector AC: $(1, 1, 2) \cdot (1, y_1, z_1) = 0$, $\Rightarrow$ $1 + y_1 + 2z_1 = 0$.

Tenim que $x_2 = 2$.

Ens queda el sistema següent a resoldre:

$$\left.\begin{array}{ll} y_2 - y_1 & = 1, \\ z_2 - z_1 & = 2, \\ 1 + y_1 - z_1 & = 0, \\ x_2 + y_2 - z_2 & = 0, \\ 1 + y_1 + 2z_1 & = 0. \end{array}\right\}$$

Si restam la cinquena equació de la tercera, ens surt que $z_1 = 0$. Per tant, $z_2 = 2$. Queda el sistema següent:

$$\left.\begin{array}{ll} y_2 - y_1 & = 1, \\ 1 + y_1 & = 0, \\ 2 + y_2 & = 2. \end{array}\right\}$$

Per tant, $y_1 = -1$ i $y_2 = 0$. Els punts C i D seran: $C(1, -1, 0)$ i $D(2, 0, 2)$.

3. Considerem la funció $f(x) = e^{x-3} - x - 2$, per a $x \geq 0$. Calculau-ne els seus extrems relatius (3 punts), donau-ne els intervals de creixement i decreixement (4 punts) i deduïu que si $x \geq 4$, $f(x) \geq -4$. (3 punts)

Solució. Per calcular els extrems relatius, primer fem la derivada:

$$f'(x) = e^{x-3} - 1.$$

Si igualam la derivada a zero, ens sortiran els candidats a extrems relatius:

$$f'(x) = 0, \Rightarrow x = 3.$$

Fem la taula següent per estudiar el creixement i el decreixement:

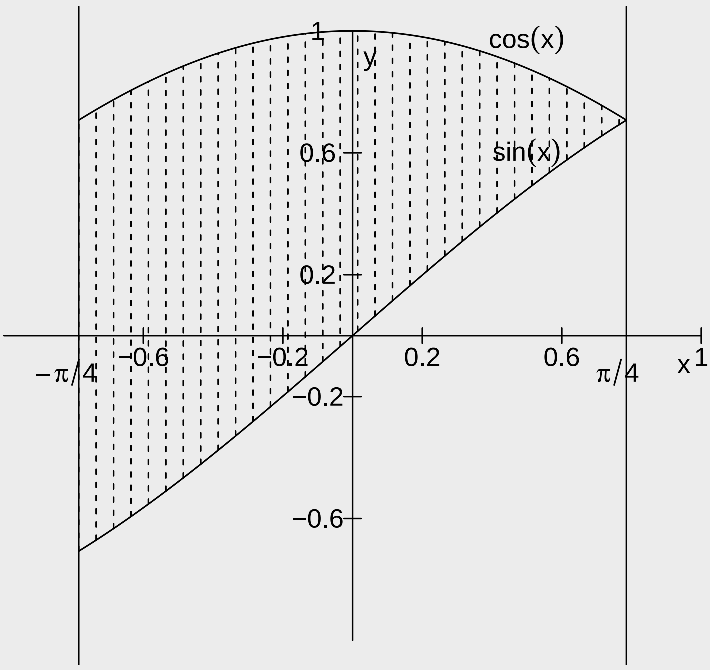
x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Per tant, la funció serà decreixent a l'interval $(-\infty, 3)$, creixent a l'interval $(3, \infty)$ i en $x = 3$, $f(x)$ té un mínim.

Si $x \geq 4$, vol dir que estam a l'interval $(4, \infty)$, on la funció és creixent. Per tant, podem deduir que $f(x) \geq f(4) = e^2 - 6 \approx -3.2817 \geq -4$, tal com volíem veure.

4. Feu un dibuix aproximat de les corbes $y = \sin x$ i $y = \cos x$, on $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, indicant els punts on es tallen (5 punts). Calculau l'àrea del recinte limitat per les dues corbes anteriors i les rectes verticals $x = \pm\frac{\pi}{4}$. (5 punts)

Solució. El gràfic del recinte es pot veure a la figura següent:



A l'interval considerat, les corbes es tallen en $x = \frac{\pi}{4}$, ja que si resolem l'equació $\sin(x) = \cos(x)$, l'única solució a l'interval $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ és $x = \frac{\pi}{4}$.

L'àrea del recinte indicat val:

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos(x) - \sin(x))\, dx = {} & [\sin(x) + \cos(x)]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\ = {} & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ = {} & 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \approx 1.4142\,\mathrm{u}^2.\end{aligned}$$

Universitat de les Illes Balears | Prova d'accés a la Universitat | Convocatòria 2016

Matemàtiques II

Model 1. Solucions

OPCIÓ B

1. Calculau la matriu $\mathbf{X}$ tal que:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{B},$$

on

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&0&1\\2&1&1\\1&0&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&3&3\\2&2&0\\3&0&2\end{pmatrix}.$$

(10 punts)

Solució. Si aïllam la matriu $\mathbf{X}$, ens queda:

$$\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&1&0\\1&0&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&3&3\\2&2&0\\3&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&1&0\\1&0&-2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}3&0&2\\2&-1&-3\\-6&3&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&1&0\\1&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\-2&-1&8\\-4&3&-4\end{pmatrix}$$

2. Calculau el punt simètric del punt $A(1,1,1)$ respecte del pla $\pi: x+y+3z=6$.

(10 punts)

Solució. Sigui $A'(x,y,z)$ el punt simètric. El punt A' ha de ser un punt de la recta perpendicular al pla π i que passa pel punt A:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{3},$$

i el punt mitjà del segment AA' ha de pertànyer al pla:

$$\frac{x+1}{2}+\frac{y+1}{2}+3\cdot\frac{z+1}{2}=6. \qquad (1)$$

De les primeres igualtats, deduïm que els valors x,y i z satisfan:

$$y=x,\ \ z=3x-2. \qquad (2)$$

De l'equació (1), tindrem que els valors x,y i z han de complir:

$$x+y+3z=7.$$

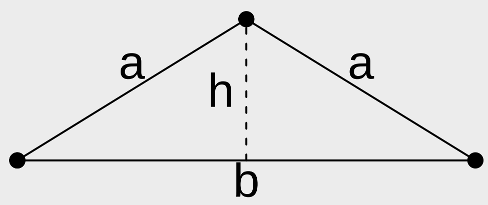
Substituint les expressions (2) a la darrera expressió, podem donar el valor de x:

$$x+x+3(3x-2)=7,\ \Rightarrow 11x=13,\ \Rightarrow x=\frac{13}{11}.$$

Els valors de y i z seran: $y=x=\frac{13}{11}$, $z=3x-2=\frac{17}{11}$. El punt simètric serà $A'\left(\frac{13}{11},\frac{13}{11},\frac{17}{11}\right)$.

3. Donau el triangle isòsceles de perímetre 9 cm que té àrea màxima. (10 punts)

Solució. Siguin a i b les llargades dels dos costats del triangle isòsceles, on b seria la llargada del costat desigual. Sigui h l'altura del triangle sobre el costat desigual. (Vegeu figura adjunta)



Aplicant el teorema de Pitàgores, tenim que la relació entre a, b i h és:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Ens diuen que el perímetre són 9 cm. Per tant,

$$2a + b = 9, \Rightarrow a = \frac{9-b}{2}.$$

Ens demanen maximitzar l'àrea del triangle, que serà:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{b \cdot \sqrt{\left(\frac{9-b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}}{2} = \frac{3b}{4}\sqrt{9-2b},$$

on hem fet servir les relacions anteriors.

Si derivam l'expressió anterior com a funció de b, ens surt:

$$A' = \frac{3}{4}\left(\sqrt{9-2b} + \frac{-2b}{2\sqrt{9-2b}}\right) = \frac{3}{4}\frac{(9-2b-b)}{\sqrt{9-2b}} = \frac{9}{4}\frac{(3-b)}{\sqrt{9-2b}}$$

Igualant la darrera expressió a zero per calcular els possibles extrems de la funció, ens surt que $b = 3$. Comprovam que és un màxim:

b	0		3		$\frac{9}{2}$
A'		$+$		$-$	
A		$\nearrow$		$\searrow$	

Concloem, doncs, que el triangle amb àrea màxima tindria dimensions $b = 3$ cm i $a = 9 - 3b = 3$ cm. Per tant, es tractaria d'un triangle equilàter.

4. Calculau la integral indefinida següent: (10 punts)

$$\int \frac{2x^2 + x - 2}{x^3 - 2x^2 - x + 2}\, dx$$

Solució. Si descomponem el denominador, obtenim:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x+1)(x-1)(x-2).$$

Per fer la darrera integral, descomponem la funció a integrar de la forma següent:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 + x - 2}{x^3 - 2x^2 - x + 2} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} \\ &= \frac{A(x-1)(x-2)}{x^3 - 2x^2 - x + 2} + \frac{B(x+1)(x-2)}{x^3 - 2x^2 - x + 2} + \frac{C(x+1)(x-1)}{x^3 - 2x^2 - x + 2}, \end{aligned}$$

on A, B i C són constants a calcular.

Igualant els numeradors de la darrera expressió, obtenim:

$$2x^2 + x - 2 = A(x-1)(x-2) + B(x+1)(x-2) + C(x+1)(x-1).$$

Substituint x per $-1, 1$ i 2, obtenim els valors de les constants A, B i C:

$$\begin{aligned} &x = -1: \ 6A = -1, \ \Rightarrow A = -\tfrac{1}{6}. \\ &x = 1: \ -2B = 1, \ \Rightarrow B = -\tfrac{1}{2}. \\ &x = 2: \ 3C = 8, \ \Rightarrow C = \tfrac{8}{3}. \end{aligned}$$

La integral a resoldre queda:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 + x - 2}{x^3 - 2x^2 - x + 2}\, dx &= -\frac{1}{6}\int \frac{1}{x+1}\, dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\, dx + \frac{8}{3}\int \frac{1}{x-2}\, dx \\ &= -\frac{1}{6}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{8}{3}\ln|x-2| + K, \end{aligned}$$

on K és la constant d'integració.

Model 2

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada problema es puntua sobre 10 punts. Suposem que P_1, P_2, P_3 i P_4 son les qüalificacions dels problemes sobre 10. La qualificació final s'obté d'aplicar la fórmula següent: $\frac{4}{15}\cdot(P_1+P_2+P_3)+\frac{1}{5}\cdot P_4$. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Discutiu per a quins valors de m el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{aligned} mx+3z &= m,\\ x+2y-z &= 1,\\ 2x+y-z &= 2. \end{aligned}\right\}$$

(7 punts)

b) Resoleu-lo en el cas o els casos en què sigui compatible indeterminat. (3 punts)

2. El nombre de litres per metre quadrat que va ploure en un determinat lloc ve donat per la funció següent:

$$Q(t) = -\frac{t^3}{8}+\frac{3t^2}{2}-\frac{9t}{2}+10,$$

on t ve donat en dies i va des del dia $t=1$ (dilluns) fins al dia $t=8$ (dilluns de l'altra setmana).

a) Determinau el dia de la setmana que va ploure més i el que va ploure menys. Quants de litres per metre quadrat va ploure aquests dos dies? (6 punts)
b) Feu un petit dibuix de la funció anterior durant els 8 dies. (4 punts)

3. Donades les rectes $r : \frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$ i $s : \frac{x}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{-2}$,

a) demostrau que es creuen. (4 punts)
b) calculau la distància entre les rectes. (6 punts)

4. Llançam dos daus de 6 cares no trucats i consideram els esdeveniments següents:

S_7 : "la suma dels resultats dels dos daus és 7".
P : "el producte dels resultats dels dos daus és imparell".

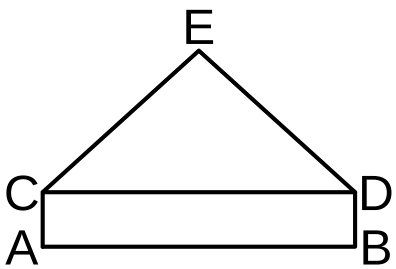
a) Calculau les probabilitats que passin els esdeveniments anteriors. (6 punts)
b) Són independents S_7 i P? Raonau la resposta. (4 punts)

Model 2

OPCIÓ B

1. Tenim tres aixetes per omplir un dipòsit d'aigua i suposam que el cabal que cau per cada aixeta és constant. Si fem servir l'aixeta 1, tardam 10 hores per omplir el dipòsit, si fem servir les aixetes 1 i 2, tardam 4 hores, i si les fem servir totes tres, tardam una hora. Suposant que la suma dels cabdals de les tres aixetes és 10 litres per minut, calculau el cabdal de l'aigua de cada aixeta (8 punts) i el volum del dipòsit (2 punts).

2. Hem de dissenyar una finestra com la que surt a la figura adjunta, o sigui, el polígon ACEDB, de 30 metres de perímetre. Es tracta d'un rectangle amb un triangle equilàter damunt. Calculau les dimensions del rectangle perquè l'àrea de la finestra sigui màxima. (10 punts)



3. Considerem les rectes següents dependents d'un paràmetre λ:

$$r: \left.\begin{array}{rl} x = & 1+\lambda t, \\ y = & -1+t, \\ z = & 3-2t. \end{array}\right\}, \quad s: \frac{x-2}{\lambda} = \frac{y}{2\lambda} = \frac{z-3}{-1}.$$

a) Calculau el valor de λ perquè r i s es tallin. (7 punts)
b) Calculau el punt d'intersecció pe al valor de λ calculat. (3 punts)

4. El test d'intel·ligència (CI) és una prova que en teoria mesura la intel·ligència de l'individu i dona un valor que aproximadament té de mitjana 100. O sigui, el nivell 100 se suposa que és el nivell d'intel·ligència d'una persona normal. Suposem ara que el nivell d'intel·ligència d'una determinada població segueix una distribució normal de mitjana 100 i desviació típica 10.

a) Calculau el percentatge de la població que es considera superdotada. Una persona es considera superdotada si té un nivell d'intel·ligència superior a 130. (3 punts)
b) Calculau el percentatge de la població amb un nivell d'intel·ligència entre 90 i 110. (3 punts)
c) Ens diuen que el 70% de la població té un nivell d'intel·ligència menor que un cert llindar. Calculau aquest llindar. (4 punts)

Model 2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

Model 2. Criteris específics de correcció

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Les puntuacions tant dels apartats com dels subapartats són independents. Si l'alumne s'ha equivocat en qualque apartat o subapartat però fa bé els altres (segons les "seves" dades), donau la puntuació adient. En aquest cas, s'ha de refer el problema, ja que s'han de posar les dades "equivocades" de l'alumne per resoldre els altres apartats o subapartats en què no s'ha equivocat. En canvi, si s'equivoca en dos apartats o subapartats, donau 0 punts.

OPCIÓ A

1. *a*) Puntuacions de l'apartat a):

   i) Càlcul del determinant de la matriu del sistema, 2 punts.
   ii) Discussió, 5 punts.
      i. Donau 2 punts per discussió quan $m \neq -9$
      ii. Donau 3 punts per discussió quan $m = -9$.

   b) Resolució per a $m = -9$, 3 punts. (1 punt per incògnita)

   Si el determinant està malament, donar 5 punts com a màxim.

2. a) Càlcul de $Q'(t)$, 2 punts.
   Resolució de $Q'(t) = 0$, 2 punts.
   Càlcul del màxim i del mínim, 2 punts. Donau un punt pel màxim i un punt pels mínims. Si només donen un mínim, donar-ho com a correcte. Si no té en compte els extrems de l'interval i només mira els valors $t = 2$ i $t = 6$, donau 0.5 punts a l'apartat.

   b) Dibuix de la funció $Q(t)$, 4 punts. Si fa el dibuix sense cap tipus d'explicació de com l'ha obtingut, donau 0 punts. Si fan el dibuix discret (en els enters de 1 fins a 8) sense juntar els punts, donar la puntuació màxima, 4 punts.

   Aquest problema es pot fer de dues maneres més:

   1) Considerant la funció $Q(t)$ discreta i calculant la taula de $Q(1), Q(2), \ldots, Q(8)$ i mirant quins són el mínim i el màxim.
   2) Per calcular el que va ploure el dia n, poden fer la integral de $Q(t)$ entre n i $n+1$ i després calcular el mínim i el màxim dels resultats obtinguts.

Tant si ho fan d'una manera com de l'altra, si està bé, donar un 10 de l'exercici.

3. *a*) Puntuacions de l'apartat a):

Model 2. Criteris específics de correcció

i) Càlcul dels vectors directors de r i s, 1 punt.
ii) Demostrar que es creuen, 3 punts. Si s'equivoca en el càlcul del vector w entre un punt de r i un punt de s però fa bé la resta, donau 2 punts.

b) Puntuacions de l'apartat b):

i) Càlcul del pla que conté r i és paral·lel a s, 3 punts.
ii) Càlcul de la distància entre r i s, 3 punts.

4. *a*) Puntuacions de l'apartat a):

i) Càlcul de l'esdeveniment S_7, 2 punts.
ii) Càlcul de l'esdeveniment P, 2 punts.
iii) Càlcul de la probabilitat que passi S_7, 1 punt.
iv) Càlcul de la probabilitat que passi, P, 1 punt.

b) Puntuacions de l'apartat b):

i) Càlcul de l'esdeveniment intersecció entre S_7 i P, 2 punts.
ii) Demostrar que no són independents, 2 punts.

OPCIÓ B

1. *a*) Plantejament del sistema d'equacions dels cabdals de les aixetes, 4 punts. Restau 1 punt per cada equació mal expressada. Si totes les equacions estan malament, donau 0 punts.
b) Resolució del sistema anterior, 4 punts. Restau 1 punt per cada cabdal mal calculat. Si tots els cabdals estan mal calculats, donau 0 punts.
c) Càlcul del volum del dipòsit, 2 punts.

Els apartats són independents. Per exemple, si planteja el sistema malament però resol "el seu sistema" bé i comenta si li dóna alguna solucó sense sentit, donar els 4 punts per la resolució.

2. *a*) Plantejar la relació que hi ha entre x i y mitjançant el perímetre, 2 punts.
b) Càlcul de la funció àrea, 2 punts.
c) Càlcul de la derivada de la funció àrea, 2 punts.
d) Resoldre l'equació $A'(x) = 0$ calculant el valor adient de x, 2 punts.
e) Càlcul del valor de y, 1 punt.
f) Comprovar que és un màxim, 1 punt.

Si afegeixen el segment CD al perímetre i tot el demés està bé, donar 8punts.

3. *a*) Càlcul dels vectors directors de r i s, 2 punts.
b) Càlcul del vector w entre un punt de r i un punt de s, 1 punt.
c) Plantejament que l'equació del determinant dels tres vectors directors anteriors sigui zero, 2 punts.
d) Càlcul del valor de λ, 2 punts.
e) Càlcul del punt intersecció, 3 punts. Restau 1 punt per cada coordenada incorrecta del punt intersecció.

4. *a*) Puntuació de l'apartat a):

i) plantejar bé la probabilitat demanada, 1 punt,

Model 2. Criteris específics de correcció

   ii) estandarditzar la variable X, 1 punt,
   iii) càlcul de la probabilitat, 1 punt.

b) Puntuació de l'apartat b):

   i) plantejar bé la probabilitat demanada, 1 punt,
   ii) estandarditzar la variable X, 1 punt,
   iii) càlcul de la probabilitat, 1 punt.

c) Apartat c):

   i) plantejar bé la condició donada en termes de la variable X, 1 punt,
   ii) plantejar la condició en termes de la variable Z, 1 punt,
   iii) establir la condició que verifica x, 1 punt,
   iv) càlcul de x, 1 punt.

Model 2. Solucions

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada problema es puntua sobre 10 punts. Suposem que P_1, P_2, P_3 i P_4 son les qüalificacions dels problemes sobre 10. La qualificació final s'obté d'aplicar la fórmula següent: $\frac{4}{15}\cdot(P_1+P_2+P_3)+\frac{1}{5}\cdot P_4$. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Discutiu per a quins valors de m el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{aligned} mx+3z=&\ m,\\ x+2y-z=&\ 1,\\ 2x+y-z=&\ 2.\end{aligned}\right\}$$

(7 punts)

b) Resoleu-lo en el cas o els casos en què sigui compatible indeterminat. (3 punts)

Solució. *a*) La matriu del sistema és:

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 3\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Estudiem quan el determinant del sistema anterior s'anul·la. El determinant de la matriu anterior val:

$$-m-9.$$

El determinant serà nul per a $m=-9$.
Si $m\neq -9$, el rang de la matriu del sistema serà 3, el mateix que el rang de la matriu ampliada. Per tant, el sistema serà compatible determinat.
Si $m=-9$, el sistema serà:

$$\left.\begin{aligned} -9x+3z=&\ -9,\\ x+2y-z=&\ 1,\\ 2x+y-z=&\ 2.\end{aligned}\right\}$$

El rang del sistema serà 2, ja que, per exemple, el menor $\begin{vmatrix} -9 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}\neq 0$, és diferent de zero. El rang de la matriu ampliada serà 2, ja que el determinant següent és zero:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -9\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=0.$$

Per tant, es tractaria d'un sistema compatible indeterminat.

b) Hem de resoldre el sistema en el cas en què $m = -9$:
Les solucions són: $y = x - 1,\ z = 3(x - 1)$, amb x variable lliure.

2. El nombre de litres per metre quadrat que va ploure en un determinat lloc ve donat per la funció següent:

$$Q(t) = -\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10,$$

on t ve donat en dies i va des del dia $t = 1$ (dilluns) fins al dia $t = 8$ (dilluns de l'altra setmana).

a) Determinau el dia de la setmana que va ploure més i el que va ploure menys. Quants de litres per metre quadrat va ploure aquests dos dies? (6 punts)

b) Feu un petit dibuix de la funció anterior durant els 8 dies. (4 punts)

Solució. *a*) Per trobar els dies que va ploure menys i més, calculam els possibles extrems relatius de la funció $Q(t)$:

$$Q'(t) = -\frac{3t^2}{8} + 3t - \frac{9}{2}.$$

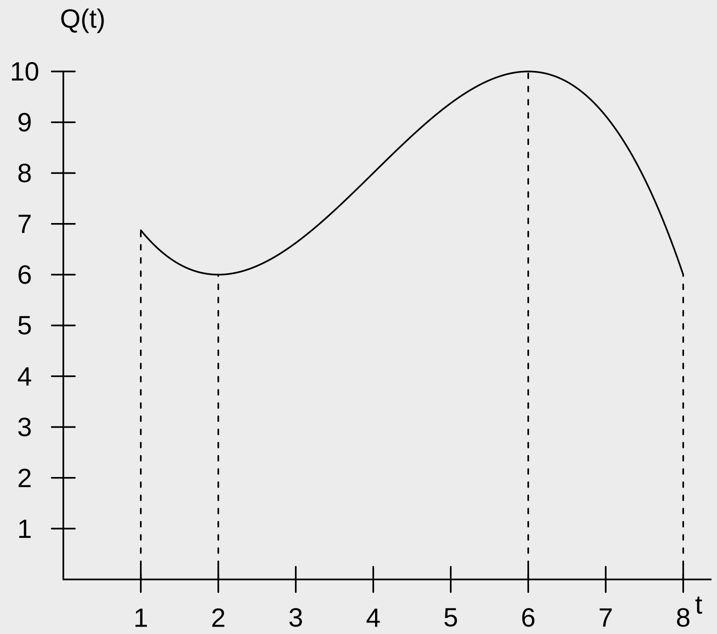
Resolent l'equació $Q'(t) = 0$, obtenim $t = 2$ i $t = 6$.
Ara fem una petita taula amb els dies obtinguts anteriorment juntament amb el primer i l'últim dia, per veure els dies que va ploure més i menys:

Dia	$Q(t)$
1	6.875
2	6
6	10
8	6

Els dies que va ploure menys varen ser els dies 2 (dimarts) i 8 (dilluns de l'altra setmana), amb 6 litres per metre quadrat, i el dia que va ploure més va ser el dia 6 (dissabte) amb 10, litres per metre quadrat.

b) El gràfic de la funció $Q(t)$ es pot veure al dibuix següent:

Model 2. Solucions



3. Donades les rectes $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$ i $s : \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-2}$,

a) demostrau que es creuen. (4 punts)
b) calculau la distància entre les rectes. (6 punts)

Solució. *a*) Per demostrar que es creuen, considerem $v_r = (2, 3, -1)$ el vector director de r, $v_s = (1, 2, -2)$ el vector director de s, i un vector que uneix un punt de r i un punt de s: $w = P_r - P_s = (1, 0, -1) - (0, 2, -1) = (1, -2, 0)$. Si el rang de la matriu formada pels vectors v_r, v_s i w és màxim o 3, voldrà dir que es creuen. Per comprovar això, basta veure que el determinant de la matriu anterior és diferent de zero:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -10.$$

b) Per calcular la distància entre les rectes, primer calculam el pla π que conté r i és paral·lel a s:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4x + 3y + z + 5 = 0.$$

La distància entre les dues rectes serà la distància d'un punt qualsevol de s, per exemple

Model 2. Solucions

$P_s(0,2,-1)$ a π:

$$d(r,s) = d(P_s,\pi) = \frac{-4\cdot 0 + 3\cdot 2 - 1 + 5}{\sqrt{4^2+3^2+1^2}} = 5\sqrt{\frac{2}{13}} \approx 1.96116.$$

4. Llançam dos daus de 6 cares no trucats i consideram els esdeveniments següents:

S_7 : "la suma dels resultats dels dos daus és 7".
P : "el producte dels resultats dels dos daus és imparell".

a) Calculau les probabilitats que passin els esdeveniments anteriors. (6 punts)
b) Són independents S_7 i P? Raonau la resposta. (4 punts)

Solució. El conjunt de resultats possibles per a l'experiment en qüestió és el següent:

$$E = \{(i,j),|i \in \{1,\dots,6\},\ j \in \{1,\dots,6\}\}.$$

En total tenim 36 resultats possibles.

a) L'esdeveniment S_7 és el següent:

$$S_7 = \{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\}.$$

En total hi ha 6 resultats. Aplicant la regla de Laplace, la probabilitat que passi S_7 serà: $p(S_7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
L'esdeveniment P serà:

$$P = \{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}.$$

En total tenim 9 resultats possibles. Aplicant la regla de Laplace, la probabilitat que passi P serà: $p(P) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

b) Perquè siguin independents s'ha de satisfer $p(S_7 \cap P) = p(S_7)\cdot p(P)$. Calculem $p(S_7 \cap P)$. L'esdeveniment $S_7 \cap P$ serà buit, ja que és impossible que la suma dels resultats sigui 7 i el producte, imparell. Per tant, $p(S_7 \cap P) = 0 \neq p(S_7)\cdot p(P)$. Concloem, doncs, que els successos no són independents.

Model 2. Solucions

OPCIÓ B

1. Tenim tres aixetes per omplir un dipòsit d'aigua i suposam que el cabal que cau per cada aixeta és constant. Si fem servir l'aixeta 1, tardam 10 hores per omplir el dipòsit, si fem servir les aixetes 1 i 2, tardam 4 hores, i si les fem servir totes tres, tardam una hora. Suposant que la suma dels cabdals de les tres aixetes és 10 litres per minut, calculau el cabdal de l'aigua de cada aixeta (8 punts) i el volum del dipòsit (2 punts).

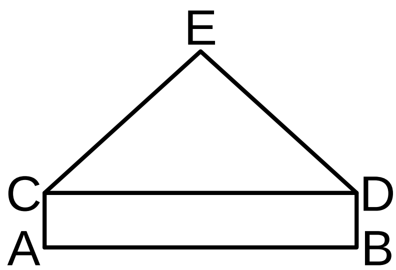
Solució. Sigui V el volum del dipòsit, v_1, el cabdal de l'aixeta 1, v_2, el cabdal de l'aixeta 2 i v_3, el cabdal de l'aixeta 3.

Com que tardam 10 hores a omplir el dipòsit amb l'aixeta 1, tindrem que $V = 10 \cdot 60 \cdot v_1 = 600 \cdot v_1$. Si tardam 4 hores a omplir el dipòsit amb les aixetes 1 i 2, tindrem $V = 4 \cdot 60 \cdot (v_1 + v_2) = 240 \cdot (v_1 + v_2)$ i si tardam una hora a omplir el dipòsit amb les tres aixetes, tindrem $V = 60 \cdot (v_1 + v_2 + v_3)$. Com que la suma dels cabdals són 10 litres per minut ($v_1 + v_2 + v_3 = 10$), hem de resoldre el sistema següent:

$$\left.\begin{aligned} 240 \cdot (v_1 + v_2) = {} & 600 \cdot v_1, \\ 60 \cdot (v_1 + v_2 + v_3) = {} & 600 \cdot v_1, \\ v_1 + v_2 + v_3 = 10. & \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 360v_1 - 240v_2 = {} & 0, \\ 540v_1 - 60v_2 - 60v_3 = {} & 0, \\ v_1 + v_2 + v_3 = 10. & \end{aligned}\right\}$$

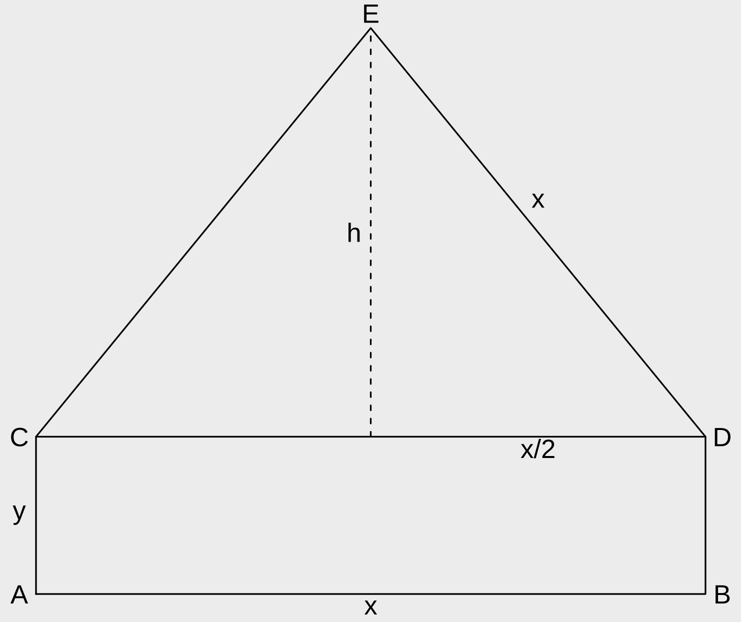
Les solucions del sistema anterior són $v_1 = 1$ litre per minut, $v_2 = \frac{3}{2} = 1.5$ litres per minut i $v_3 = \frac{15}{2} = 7.5$ litres per minut. El volum del dipòsit serà de $V = 600 \cdot v_1 = 600$ litres.

2. Hem de dissenyar una finestra com la que surt a la figura adjunta, o sigui, el polígon ACEDB, de 30 metres de perímetre. Es tracta d'un rectangle amb un triangle equilàter damunt. Calculau les dimensions del rectangle perquè l'àrea de la finestra sigui màxima. (10 punts)



Model 2. Solucions

Solució. Diguem x i y a les dimensions del rectangle:



El perímetre de la finestra serà:

$$P = 3x + 2y = 30.$$

Per tant, $y = \frac{30-3x}{2}$.

Per calcular l'àrea de la finestra, primer hem de calcular l'alçada del triangle h fent servir el teorema de Pitàgores:

$$h = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}x^2} = \frac{\sqrt{3}x}{2}.$$

L'àrea de la finestra serà l'àrea del rectangle més l'àrea del triangle:

$$A = x \cdot y + \frac{x \cdot h}{2} = x \cdot \frac{(30-3x)}{2} + \frac{\sqrt{3}x^2}{4} = 15x + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}\right)x^2.$$

Model 2. Solucions

Per trobar el màxim de la funció A, l'hem de derivar i igualar a zero:

$$A' = 15 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\right) x = 0, \Rightarrow x = \frac{15}{\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{30}{6 - \sqrt{3}} \approx 7.02914.$$

El valor de y serà:

$$y = \frac{30 - 3x}{2} = \frac{15}{11}\left(5 - \sqrt{3}\right) \approx 4.45629.$$

Es tracta d'un màxim, ja que $A'' = \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 < 0$.

3. Considerem les rectes següents dependents d'un paràmetre λ:

$$r : \left.\begin{array}{rl} x = & 1 + \lambda t, \\ y = & -1 + t, \\ z = & 3 - 2t. \end{array}\right\}, \quad s : \frac{x-2}{\lambda} = \frac{y}{2\lambda} = \frac{z-3}{-1}.$$

a) Calculau el valor de λ perquè r i s es tallin. (7 punts)
b) Calculau el punt d'intersecció pe al valor de λ calculat. (3 punts)

Solució. Els vectors directors de r i s seran:

$$v_r = (\lambda, 1, -2), \; v_s = (\lambda, 2\lambda, -1),$$

i un vector format per un punt de r i un punt de s serà:

$$w = P_r - P_s = (1, -1, 3) - (2, 0, 3) = (-1, -1, 0).$$

Les dues rectes es tallaran si els vectors v_r, v_s i w són linealment dependents, o, dit en altres paraules, el determinant de la matriu formada pels tres vectors és nul:

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda & -1 \\ 1 & 2\lambda & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 3\lambda = 0.$$

Això es verifica per a $\lambda = \frac{1}{3}$.

Calculem el punt d'intersecció de r i s per a $\lambda = \frac{1}{3}$:

$$r : \left.\begin{array}{rl} x = & 1 + \frac{1}{3} t, \\ y = & -1 + t, \\ z = & 3 - 2t. \end{array}\right\} \quad s : \frac{x-2}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{2}{3}} = \frac{z-3}{-1}.$$

Tindrem:

$$\frac{y}{3} = \frac{2}{3}(x-2), \Rightarrow \frac{t-1}{3} = \frac{2}{9}t - \frac{2}{3}, \Rightarrow t = -3.$$

Model 2. Solucions

El punt d'intersecció serà:

$$\left(1+\frac{1}{3}\cdot(-3), -1-3, 3-2\cdot(-3)\right) = (0,-4,9).$$

4. El test d'intel·ligència (CI) és una prova que en teoria mesura la intel·ligència de l'individu i dona un valor que aproximadament té de mitjana 100. O sigui, el nivell 100 se suposa que és el nivell d'intel·ligència d'una persona normal. Suposem ara que el nivell d'intel·ligència d'una determinada població segueix una distribució normal de mitjana 100 i desviació típica 10.

a) Calculau el percentatge de la població que es considera superdotada. Una persona es considera superdotada si té un nivell d'intel·ligència superior a 130. (3 punts)
b) Calculau el percentatge de la població amb un nivell d'intel·ligència entre 90 i 110. (3 punts)
c) Ens diuen que el 70% de la població té un nivell d'intel·ligència menor que un cert llindar. Calculau aquest llindar. (4 punts)

Solució. Sigui X la variable aleatòria que ens dona el nivell d'intel·ligència d'un individu qualsevol de la població.

a) Ens demanen $p(X \geq 130)$. Si estandarditzam, obtenim:

$$p(X \geq 130) = p\left(Z \geq \frac{130-100}{10}\right) = p(Z \geq 3) = 1-p(Z \leq 3) = 1-0.9987 = 0.0013,$$

on Z és una normal estàndard.
Per tant, el 0.13% de la població és superdotada.

b) Ens demanen $p(90 \leq X \leq 110)$:

$$\begin{aligned} p(90 \leq X \leq 110) =& p\left(\frac{90-100}{10} \leq Z \leq \frac{110-100}{10}\right) = p(-1 \leq Z \leq 1) \\ =& p(Z \leq 1) - p(Z \leq -1) = 0.8413 - 0.1587 = 0.6827. \end{aligned}$$

El percentatge serà: 68.27%.

c) Ens diuen que $p(X \leq x) = 0.7$, on x és el llindar a calcular. Si estandarditzam, obtenim:

$$p(X \leq x) = p\left(Z \leq \frac{x-100}{10}\right) = 0.7.$$

Tenim que $\frac{x-100}{10} = 0.5244$. Per tant, el valor de x serà:

$$x = 100 + 10 \cdot 0.5244 = 105.244.$$

Model 2. Solucions

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

Modelo 1

Contestad de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se dispone de 90 minutos.

Cada problema se puntúa sobre 10 puntos. Supongamos que P_1, P_2, P_3 y P_4 son les calificaciones de los problemas sobre 10. La calificación final se obtiene de aplicar la fórmula siguiente: $\frac{4}{15}\cdot(P_1+P_2+P_3)+\frac{1}{5}\cdot P_4$. Se valorarán la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

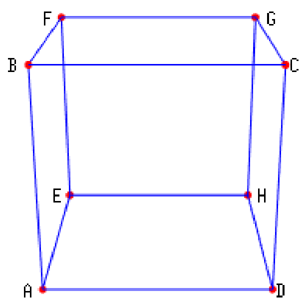
Podéis utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizará el uso de las que traigan información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1. Las edades de Juan, Miguel y Gabriel suman 70 años. La edad de Juan, el doble de la edad de Miguel y el triple de la edad de Gabriel suman 160 años y la edad de Gabriel iguala a la suma de las edades de Juan y Miguel. Hallar las edades de Juan, Miguel y Gabriel (7 puntos) y en qué año nació cada uno. (3 puntos)

2. Entre dos torres de 15 y 25 metros de altura, respectivamente, hay una distancia de 30 metros. En medio de las dos torres tenemos que poner otra torreta de 5 metros de altura y tenemos que extender un cable que una los extremos de la parte de arriba de la primera torre con la torreta y los extremos de la parte de arriba de ésta con la segunda torre. ¿Dónde tenemos que situar la torreta de 5 metros para que la longitud total del cable sea mínima? (7 puntos) ¿cuánto vale la longitud del cable en este caso? (3 puntos)

3. Consideremos el cubo que aparece a la figura adjunta. Supongamos que el punto C tiene coordenadas $(1, 1, 1)$, las aristas del cubo son paralelas a los ejes coordenados (o sea, la arista AE es paralela al eje X, la arista AD, al eje Y y la arista AB, al eje Z) y los lados del cubo tienen longitud 2. Hallar el plano que pasa por los puntos A, E, C y G (7 puntos) y la recta perpendicular al plano anterior que pasa por el punto D. (3 puntos)



4. El tiempo que un alumno puede estar concentrado y escuchar al profesor en una clase de Matemáticas se modela como una distribución normal de media 15 minutos y desviación típica 5 minutos.

a) Hallar la probabilidad de que un alumno esté concentrado más de 20 minutos. (3 puntos)
b) Hallar la probabilidad de que un alumno esté concentrado entre 10 y 30 minutos. (3 puntos)
c) Nos dicen que la probabilidad de que un alumno esté concentrado más de x minutos vale 0.75. Hallar este valor de x minutos. (4 puntos)

Modelo 1

OPCIÓN B

1. *a*) Discutir para qué valores de a el sistema siguiente es compatible:

$$\left.\begin{aligned} ax + y - 2z &= -1, \\ -x + ay + z &= 2, \\ 3x + y - z &= 0, \\ y + z &= 3. \end{aligned}\right\}$$

(6 puntos)

b) Resolvedlo en el caso en que sea compatible (4 puntos)

2. Consideremos la función $f(x) = x \cdot |x-1|$. Hacer un dibujo aproximado de la función anterior en el intervalo $[0,2]$. (6 puntos). Hallar el área limitada por la gráfica de la función anterior y el eje de las X. (4 puntos)

3. Dados los puntos $A(1,0,3)$ y $B(1,3,4)$, hallar los puntos situados en el plano $z=1$ que formen con los puntos A y B un triángulo equilátero. (6 puntos) Hallar el volumen del tetraedro formado por los 3 puntos anteriores y el origen de coordenadas. (4 puntos)

4. Suponemos que los estudiantes de la UIB sólo tienen dos sistemas operativos en sus teléfonos móviles: android y IOS (el de los iphone). El 80 % de los estudiantes de la UIB tienen el sistema operativo android. El 25 % de las chicas estudiantes de la UIB tienen IOS en su teléfono móvil y el 45 % de los estudiantes de la UIB son chicos.

a) Hallar la probabilidad de que un muchacho de la UIB tenga IOS en su teléfono móvil. (6 puntos)

b) Hallar la probabilidad de que un estudiante que tenga android en el teléfono móvil sea chica. (4 puntos)

Modelo 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla de la distribución normal $N(0,1)$.

Model 1. Criteris específics de correcció

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Les puntuacions tant dels apartats com dels subapartats són independents. Si l'alumne s'ha equivocat en qualque apartat o subapartat però fa bé els altres (segons les "seves" dades), donau la puntuació adient. En aquest cas, s'ha de refer el problema, ja que s'han de posar les dades "equivocades" de l'alumne per resoldre els altres apartats o subapartats en què no s'ha equivocat. En canvi, si s'equivoca en dos apartats o subapartats, donau 0 punts.

OPCIÓ A

1. *a*) Interpretació correcta de l'enunciat com a equacions lineals: 4 punts. Si la traducció a equacions no és correcta: 0 punts. Solució correcta del sistema d'equacions plantejat: 3 punts.

b) Interpretació dels resultats donant els anys en què varen néixer: 3 punts. Qualsevol altra situació: 0 punts.

2. *a*) Plantejar bé la funció $f(x)$, 2 punts.

b) Calcular la derivada, 2 punts.

c) Resoldre l'equació $f'(x) = 0$, 2 punts.

d) Comprovar que és un mínim, 1 punt.

e) Calcular la llargada del cable, 3 punts.

3. *a*) Càlcul de les coordenades dels vèrtexs del cub, 4 punts. Restau un punt per cada vèrtex malament, amb un mínim de 0 punts.

b) Càlcul del pla que passa pels quatre punts, 3 punts.

c) Càlcul de la recta demanada, 3 punts.

4. *a*) Apartat a):

i) plantejar bé la probabilitat demanada, 1 punt,
ii) estandarditzar la variable X, 1 punt,
iii) càlcul de la probabilitat, 1 punt.

b) Apartat b):

i) plantejar bé la probabilitat demanada, 1 punt,
ii) estandarditzar la variable X, 1 punt,
iii) càlcul de la probabilitat, 1 punt.

c) Apartat c):

i) plantejar bé la condició donada en termes de la variable X, 1 punt,

Model 1. Criteris específics de correcció

ii) plantejar la condició en termes de la variable Z, 1 punt,
iii) establir la condició que verifica x, 1 punt,
iv) càlcul de x, 1 punt.

OPCIÓ B

1. a) Càlcul del determinant de la matriu ampliada, 1 punt.
Resolució de l'equació que diu que el determinant de la matriu ampliada és zero, 2 punts.
Discussió per a $a \neq \frac{1}{3}, 5$, 1 punt.
Discussió per a $a = \frac{1}{3}$, 1 punt.
Discussió per a $a = 5$, 1 punt.
Resolució per a $a = \frac{1}{3}$, 2 punts. Restau 1 punt per cada variable mal calculada, amb un mínim de 0 punt.
Resolució per a $a = 5$, 2 punts. Restau 1 punt per cada variable mal calculada, amb un mínim de 0 punts.

2. *a*) Esbós de la funció, 6 punts. Si no justifica com ha fet el dibuix i simplement dibuixa la funció, 0 punts.
b) Càlcul de l'àrea demanada, 4 punts.
i) Plantejar la integral, 0.5 punts.
ii) Dividir la integral en dues, 1 punt.
iii) Càlcul de cada integral, 2 punts, 1 punt per cada integral.
iv) Càlcul de la integral total, 0.5 punts.

3. *a*) Plantejament del sistema d'equacions de les distàncies, 3 punts.
b) Resolució del sistema, 3 punts. Si només calcula una solució en lloc de les dues, donau només 2 punts.
c) Càlcul del volum demanat, 4 punts.

4. Plantejament de les probabilitats donades pel problema, 2 punts.
Plantejament correcte de la probabilitat demanada a l'apartat a), 2 punts.
Càlcul de la probabilitat demanada a l'apartat a), 2 punts.
Plantejament correcte de la probabilitat demanada a l'apartat b), 2 punts.
Càlcul de la probabilitat demanada a l'apartat b), 2 punts.

Model 1. Solucions

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada problema es puntua sobre 10 punts. Suposem que P_1, P_2, P_3 i P_4 son les qüalificacions dels problemes sobre 10. La qualificació final s'obté d'aplicar la fórmula següent: $\frac{4}{15}\cdot(P_1+P_2+P_3)+\frac{1}{5}\cdot P_4$. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. Les edats d'en Joan, en Miquel i en Gabriel sumen 70 anys. L'edat d'en Joan, el doble de l'edat d'en Miquel i el triple de l'edat d'en Gabriel sumen 160 anys i l'edat d'en Gabriel igual la suma de les edats d'en Joan i en Miquel. Calculau les edats d'en Joan, en Miquel i en Gabriel (7 punts) i quin any va néixer cadascun. (3 punts)

Solució. Siguin J, M i G les edats d'en Joan, en Miquel i en Gabriel, respectivament. La informació que ens donen es pot resumir en el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{aligned} J+M+G &= 70,\\ J+2M+3G &= 160,\\ G &= J+M. \end{aligned}\right\}$$

Les solucions del sistema anterior són:

edat d'en Joan: $J=15$.
edat d'en Miquel: $M=20$.
edat d'en Gabriel: $G=35$.

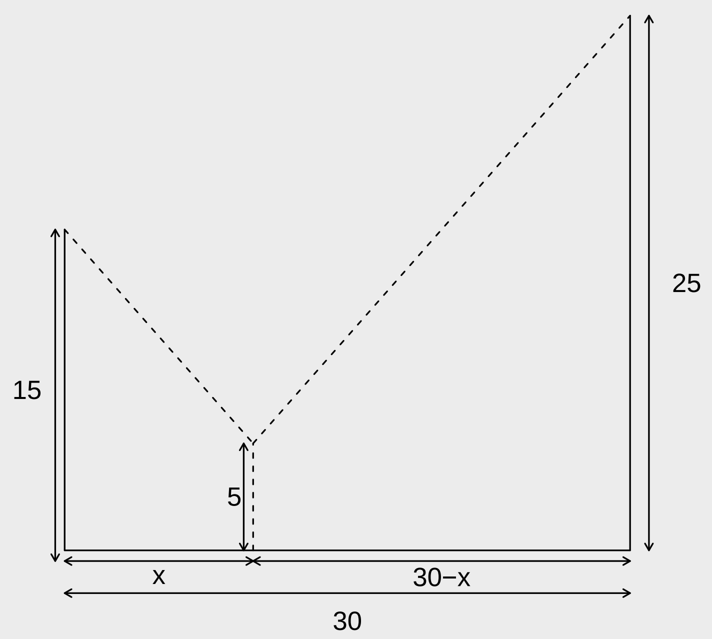
En Joan va néixer l'any 2002, en Miquel, l'any 1997 i en Gabriel, l'any 1982.

2. Entre dues torres de 15 i 25 metres d'alçada, respectivament, hi ha una distància de 30 metres. Enmig de les dues torres hi hem de posar una altra torreta de 5 metres d'alçada i hem d'estendre un cable que uneixi els extrems de dalt de la primera torre amb la torreta i els extrems de dalt d'aquesta amb la segona torre. On hem de situar la torreta de 5 metres perquè la longitud total del cable sigui mínima? (7 punts). Què val la llargada del cable en aquest cas? (3 punts)

Solució. Sigui $f(x)$ la funció que ens dona la llargada total del cable sent x la distància que hi ha des de la torreta de 15 metres fins a la posició on posem la torreta de 5 metres: (vegeu la figura adjunta)

$$f(x)=\sqrt{x^2+10^2}+\sqrt{(30-x)^2+20^2}=\sqrt{x^2+100}+\sqrt{(30-x)^2+400}.$$

Model 1. Solucions



Minimitzarem $f(x)$. Per fer-ho, derivam i igualam a zero:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+100}} - \frac{30-x}{\sqrt{(30-x)^2+400}} = 0, \Rightarrow x = 10 \text{ metres.}$$

Comprovam que és un mínim veient que la derivada segona a $x = 10$ és positiva (de fet, ho és per a qualsevol x):

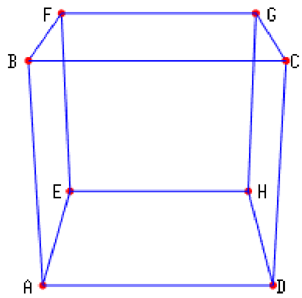
$$f''(x) = 100\left(\frac{1}{(x^2+100)^{3/2}} + \frac{4}{((30-x)^2+400)^{3/2}}\right) > 0.$$

La llargada del cable en aquest cas serà:

$$f(10) = 30\sqrt{2} \approx 42.4264 \text{ metres.}$$

3. Considerem el cub que apareix a la figura adjunta. Suposem que el punt C té coordenades $(1,1,1)$, les arestes del cub són paral·leles als eixos coordenats (o sigui, l'aresta AE és paral·lela a l'eix X, l'aresta AD, a l'eix Y i l'aresta AB, a l'eix Z) i els costats del cub tenen llargada 2. Calculau el pla que passa pels punts A, E, C i G (7 punts) i la recta perpendicular al pla anterior que passa pel punt D. (3 punts)

Model 1. Solucions



Solució. Les coordenades dels vèrtexs del cub són les següents:

$$A(1,-1,-1),\ B(1,-1,1),\ C(1,1,1),\ D(1,1,-1),$$
$$E(-1,-1,-1),\ F(-1,-1,1),\ G(-1,1,1),\ H(-1,-1,1).$$

Per determinar el pla que passa pels punts A, E, C i G, calculam els vectors AE i AC, que seran els vectors directors del pla cercat:

$$AE = (-2,0,0),\ AC = (0,2,2).$$

El pla serà:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z+1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4y - 4z = 0,\ \Rightarrow y - z = 0.$$

La recta perpendicular al pla anterior que passa pel punt D tindrà com a vector director el vector $(0,1,-1)$ i serà:

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}.$$

4. El temps que un alumne pot estar concentrat i escoltar el professor en una classe de Matemàtiques es modela com una distribució normal de mitjana 15 minuts i desviació típica 5 minuts.

a) Calculau la probabilitat que un alumne estigui concentrat més de 20 minuts. (3 punts)
b) Calculau la probabilitat que un alumne estigui concentrat entre 10 i 30 minuts. (3 punts)
c) Ens diuen que la probabilitat que un alumne estigui concentrat més de x minuts val 0.75. Calculau aquest valor de x minuts. (4 punts)

Solució. Sigui X la variable aleatòria que ens dona el temps que està concentrat un alumne en una classe de Matemàtiques.

a) Ens demanen $p(X \geq 20)$. Si estandarditzam, obtenim:

$$p(X \geq 20) = p\left(Z \geq \frac{20-15}{5}\right) = p(Z \geq 1) = 1 - p(Z \leq 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587,$$

on Z és una normal estàndard.

Model 1. Solucions

b) Ens demanen $p(10 \leq X \leq 30)$:

$$\begin{aligned} p(10 \leq X \leq 30) =& p\left(\frac{10-15}{5} \leq Z \leq \frac{30-15}{5}\right) = p(-1 \leq Z \leq 3) \\ =& p(Z \leq 3) - p(Z \leq -1) = 0.9987 - 0.1587 = 0.84. \end{aligned}$$

c) Ens diuen que $p(X \geq x) = 0.75$, o si es vol $p(X \leq x) = 1 - 0.75 = 0.25$. Si estandarditzam, obtenim:

$$p(X \leq x) = p\left(Z \leq \frac{x-15}{5}\right) = 0.25.$$

Tenim que $\frac{x-15}{5} = -0.6745$. Per tant, el valor de x serà:

$$x = 15 + 5 \cdot (-0.6745) = 11.6276.$$

Model 1. Solucions

OPCIÓ B

1. *a*) Discutiu per a quins valors de a el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{array}{rl} ax+y-2z= & -1, \\ -x+ay+z= & 2, \\ 3x+y-z= & 0, \\ y+z= & 3. \end{array}\right\}$$

(6 punts)

b) Resoleu-lo en el cas en què sigui compatible (4 punts)

Solució. *a*) El rang de la matriu del sistema valdrà 3 com a màxim ja que només hi ha tres incògnites. Per tant, perquè el rang de la matriu ampliada sigui menor o igual que 3, el determinant de la matriu ampliada ha de ser nul. La matriu ampliada del sistema és:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & -2 & -1 \\ -1 & a & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

El determinant de la matriu anterior val:

$$-3a^2+16a-5.$$

El determinant serà nul per a $a=\frac{1}{3}$ i $a=5$.
Si $a\neq\frac{1}{3},5$, el rang de la matriu ampliada del sistema serà 4, però el rang de la matriu del sistema val 3, per tant, es tractarà d'un sistema incompatible.
Si $a=\frac{1}{3}$, el sistema serà:

$$\left.\begin{array}{rl} \frac{1}{3}x+y-2z= & -1, \\ -x+\frac{1}{3}y+z= & 2, \\ 3x+y-z= & 0, \\ y+z= & 3. \end{array}\right\}$$

El rang de la matriu del sistema serà 3, ja que el determinant següent és diferent de zero:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 1 & -2 \\ -1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\frac{50}{9}\neq 0.$$

Per tant, es tractaria d'un sistema compatible determinat.
Si $a=5$, el sistema serà:

$$\left.\begin{array}{rl} 5x+y-2z= & -1, \\ -x+5y+z= & 2, \\ 3x+y-z= & 0, \\ y+z= & 3. \end{array}\right\}$$

Model 1. Solucions

El rang de la matriu del sistema serà 3, ja que el determinant següent és diferent de zero:

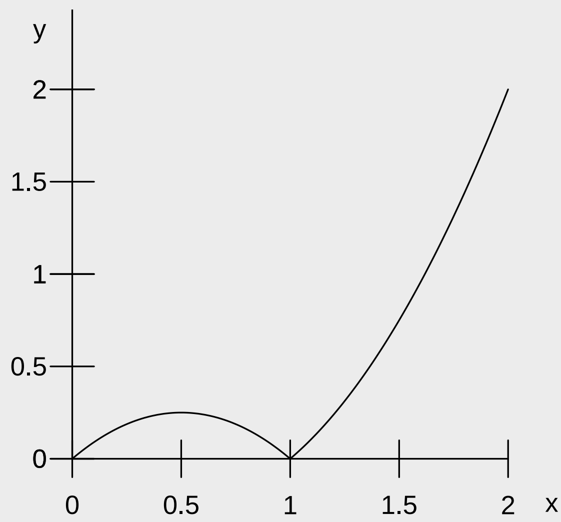
$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Per tant, es tractaria d'un sistema compatible determinat.

b) Hem de resoldre el sistema en el cas en què $a = \frac{1}{3}$ i $a = 5$:
En el cas $a = \frac{1}{3}$, les solucions són: $x = -\frac{3}{25},\ y = \frac{42}{25},\ z = \frac{33}{25}$.
En el cas $a = 5$, les solucions són: $x = 1,\ y = 0,\ z = 3$.

2. Considerem la funció $f(x) = x \cdot |x-1|$. Feu un dibuix aproximat de la funció anterior en l'interval $[0, 2]$. (6 punts). Calculau l'àrea limitada per la gràfica de la funció anterior i l'eix de les X. (4 punts)

Solució. *a*) L'esbós de la funció és el següent:



b) Ens demanen la integral següent:

$$\int_0^2 x \cdot |x-1|\, dx.$$

Model 1. Solucions

Degut al valor absolut, dividirem la integral anterior en dos trossos:

$$\int_0^1 x \cdot |x-1|\,dx + \int_1^2 x \cdot |x-1|\,dx = \int_0^1 x \cdot (1-x)\,dx + \int_1^2 x \cdot (x-1)\,dx.$$

El valor de la primera integral serà:

$$\int_0^1 x \cdot (1-x)\,dx = \int_0^1 (x-x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

El valor de la segona integral serà:

$$\int_1^2 x \cdot (x-1)\,dx = \int_0^1 (x^2-x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6}.$$

El valor de la integral demanada serà:

$$\int_0^2 x \cdot |x-1|\,dx = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1.$$

3. Donats els punts $A(1,0,3)$ i $B(1,3,4)$, determinau els punts situats en el pla $z=1$ que formin amb els punts A i B un triangle equilàter. (6 punts) Calculau el volum del tetraedre format pels 3 punts anteriors i l'origen de coordenades. (4 punts)

Solució. Diguem C als punts demanats. Podem escriure els punts C de la forma $C(x,y,1)$ ja que estan al pla $z=1$.

Perquè el triangle ABC sigui equilàter, s'ha de verificar:

$$\begin{aligned} d(C,A) =& d(B,A), \;\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2+4} = \sqrt{10}, \;\Rightarrow (x-1)^2+y^2 = 6, \\ d(C,B) =& d(B,A), \;\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2+9} = \sqrt{10} \;\Rightarrow (x-1)^2+(y-3)^2 = 1. \end{aligned}$$

Resolent el sistema anterior ens surt: $y = \frac{7}{3}$, $x = \frac{1}{3}\left(3 \pm \sqrt{5}\right)$.

El volum demanat serà:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{3}\left(3\pm\sqrt{5}\right) & 0 \\ 0 & 3 & \frac{7}{3} & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\left(\frac{25}{3} \pm 3\sqrt{5}\right).$$

4. Suposem que els estudiants de la UIB només tenen dos sistemes operatius als seus telèfons mòbils: Android i IOS (el dels iPhone). El 80% dels estudiants de la UIB tenen el sistema operatiu Android. El 25% de les al·lotes estudiants de la UIB tenen IOS al seu telèfon mòbil i el 45% dels estudiants de la UIB són al·lots.

a) Calculau la probabilitat que un al·lot de la UIB tingui IOS al seu telèfon mòbil. (6 punts)

b) Calculau la probabilitat que un estudiant que tingui Android al telèfon mòbil sigui al·lota. (4 punts)

Model 1. Solucions

Solució. Considerem els successos següents:

D: l'estudiant és una al·lota.
H: l'estudiant és un al·lot.
A: l'estudiant té Android al seu telèfon mòbil.
I: l'estudiant té IOS al seu telèfon mòbil.

Ens donen les probabilitats següents:

$$p(A) = 0.8,\ p(I|D) = 0.25,\ p(H) = 0.45,\ p(D) = 0.55.$$

Ens demanen les probabilitats següents:

a) $p(I|H)$. Podem posar la probabilitat $p(I)$ com a:

$$\begin{aligned} p(I) =& 1 - p(A) = 0.2 = p(I \cap H) + p(I \cap D) = p(H) \cdot p(I|H) + p(D) \cdot p(I|D) \\ =& 0.45 \cdot p(I|H) + 0.55 \cdot 0.25 = \\ =& 0.45 \cdot p(I|H) + 0.1375. \end{aligned}$$

Aïllant $p(I|H)$ de l'expressió anterior, tenim:

$$p(I|H) = \frac{0.2 - 0.1375}{0.45} = 0.13889.$$

b) $p(D|A)$. Aplicant la regla de Bayes, tenim:

$$p(D|A) = \frac{p(D \cap A)}{p(A)} = \frac{p(D) \cdot p(A|D)}{p(A)} = \frac{0.55 \cdot 0.75}{0.8} = 0.51562.$$

Model 1. Solucions

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

Model 3

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Discutiu per a quins valors de m el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} 4x & + & my & + & z = & m+2, \\ x & + & y & + & mz = & -2(m+1), \\ 4x & + & y & + & z = & m. \end{array}\right\}$$

(7 punts)

b) Resoleu-lo en el cas en què $m = 0$. (3 punts)

2. Considerem la funció $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$. Feu un dibuix aproximat de la funció anterior en l'interval $[-1, 1]$. (5 punts). Calculau l'àrea limitada per la gràfica de la funció anterior, l'eix de les X i les rectes verticals $x = -\frac{1}{2}$ i $x = \frac{1}{2}$. (5 punts)

3. Determinau els punts A, B i C de la recta $x - 12 = \frac{y+6}{2} = \frac{z-6}{3}$ que estan als plans coordenats (6 punts) i determinau quin d'aquests tres punts, A, B, C, està situat entre els altres dos. (4 punts)

4. Volem fer un estudi de les opinions polítiques dels estudiants de primer curs de la UIB. Per això, hem agafat una mostra representativa de 500 estudiants de primer curs i els hem demanat quin partit polític varen votar a les darreres eleccions. Dels 500 estudiants, 200 varen respondre que varen votar el PP, 100 el PSIB i la resta altres formacions polítiques. Sabent que 200 dels estudiants eren al·lots, que el 40% dels votants del PP són al·lotes i que el 50% dels votants del PSIB són al·lots, es demana:

a) La probabilitat que un estudiant hagi votat altres formacions polítiques i sigui al·lota. (4 punts)

b) La probabilitat que un estudiant al·lot hagi votat el PP. (2 punts)

c) La probabilitat que un estudiant que ha votat altres formacions polítiques sigui al·lota. (4 punts)

Model 3

OPCIÓ B

1. Considerem les matrius $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Trobau la matriu $\mathbf{X}$ que verifica: (10 punts)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Trobau els valors a, b i c per tal que la funció

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 5, & \text{si } x < 2, \\ cx + 1, & \text{si } x \geq 2, \end{cases}$$

verifiqui les hipòtesis del teorema de Rolle en l'interval $[0, 4]$ (6 punts). Determinau en quin(s) punt(s) se verifica el que assegura el teorema. (4 punts)

3. El pla perpendicular al punt mig del segment d'extrems $P(0, 3, 8)$ i $Q(2, 1, 6)$ talla als eixos coordenats en els punts A, B i C. Trobau l'àrea del triangle ABC. (10 punts).

4. Considerem la població d'estudiants que han aprovat la selectivitat en la convocatòria de juny un any determinat. Sigui X la variable aleatòria que modela la proporció d'estudiants de la població anterior que escull estudiar un grau d'humanitats. Aquesta variable aleatòria X es modela amb una distribució normal de mitjana 0.35 i desviació típica 0.1. Es demana:

a) quina és la probabilitat que en un any qualsevol més del 45% dels estudiants de la població considerada estudiïn un grau d'humanitats? (5 punts)

b) En els darrers 10 anys, en quants anys el percentatge d'estudiants de la població considerada que han escollit estudiar un grau d'humanitats no ha superat el 30%? (5 punts)

Model 3

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0, 1)$.

Model 1

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Discutiu per a quins valors de m el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} 4x & + & my & + & z = & m+2, \\ mx & + & y & - & z = & 0, \\ x & + & 3y & + & z = & 0. \end{array}\right\}$$

(7 punts)

b) Resoleu-lo en el cas en què $m = -2$. (3 punts)

2. Calculau les dimensions d'una capsa amb les dues tapes de base quadrangular de volum 64 metres cúbics de superfície mínima. Comprovau que la solució obtinguda és un mínim. (10 punts)

3. Calculau les equacions paramètriques de la recta que passa per l'origen de coordenades i talla les rectes: (10 punts)

$$\mathbf{r} : x = 2y = z - 1, \quad \mathbf{s} : 3x = 2y - 2 = 6z.$$

4. En una classe de segon de batxillerat, el 60% dels alumnes són al·lotes, el 40% varen aprovar Llengua Castellana i el 20% són al·lotes que varen aprovar Llengua Castellana. Es demana:

a) Quina és la probabilitat de trobar una persona que sigui al·lot i suspengui[1] Llengua Castellana? (5 punts)

b) Quina és la probabilitat que un al·lot suspengui Llengua Castellana? (2 punts)

c) Si un alumne ha aprovat Llengua Castellana, quina és la probabilitat que sigui un al·lot? (3 punts)

[1] Entenem per suspendre quan un alumne suspèn l'assignatura o no es presenta.

Model 1

OPCIÓ B

1. Determinau quines relacions han d'existir entre a, b, c i d perquè es verifiqui $\mathbf{AM} = \mathbf{MA}$, sent $\mathbf{A}$ i $\mathbf{M}$ les matrius següents: (10 punts)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

2. Considerem la funció $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$. Feu un dibuix aproximat de la funció anterior en l'interval $[-1, 1]$. (6 punts). Calculau l'àrea limitada per la gràfica de la funció anterior i l'eix de les X. (4 punts)

3. Calculau la distància entre les rectes següents: (10 punts)

$$\mathbf{r} : \left\{ \begin{array}{rcrcl} z & + & y & = & 5, \\ & & z & = & 4, \end{array} \right. \qquad \mathbf{s} : \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & - & z & = & 3, \\ & & y & = & 0. \end{array} \right.$$

4. El nombre de passes que fa el professor Jaimito durant una hora de classe es modela amb una distribució normal de mitjana 100 passes i desviació típica 20.5 passes.

a) Calculau la probabilitat que el professor faci més de 125 passes durant una classe. (4 punts)

b) Ens diuen que en el 45% de les classes que fa el professor aquest fa menys de x passes. Trobau aquest valor x. (6 punts)

Model 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

Model 1. Criteris específics de correcció

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Les puntuacions tant dels apartats com dels subapartats són independents. Si l'alumne s'ha equivocat en qualque apartat o subapartat però fa bé els altres (segons les "seves" dades), donau la puntuació adient. En aquest cas, s'ha de refer el problema, ja que s'han de posar les dades "equivocades" de l'alumne per resoldre els altres apartats o subapartats en què no s'ha equivocat. En canvi, si s'equivoca en dos apartats o subapartats, donau 0 punts.

OPCIÓ A

1. a) Càlcul correcte del determinant de la matriu del sistema: 2 punts.
Resolució correcta de l'equació que diu que el determinant de la matriu del sistema és zero: 2 punts.
Discussió correcta per a $m \neq -3, 5$: 1 punt.
Discussió correcta per a $m = -3$: 1 punt.
Discussió correcta per a $m = 5$: 1 punt.
b) Resolució per a $m = -2$: 3 punts. Si hi ha qualque error: 0 punts.

2. Plantejar bé la funció a minimitzar S: 3 punts.
Calcular correctament la derivada: 2 punts.
Resoldre correctament l'equació $S'(a) = 0$ o $S'(h) = 0$: 2 punts.
Comprovar que és un mínim: 1 punt.
Calcular les dimensions del cub: 2 punts.

Si s'equivoca en calcular les derivades: 0 punts.

3. Trobar la condició que diu que la recta a calcular talla a la recta **r**: 3 punts.
Trobar la condició que diu que la recta a calcular talla a la recta **s**: 3 punts.
Resoldre el sistema adient: 2 punts.
Escriure la recta en forma paramètrica: 2 punts.

4. Plantejament de les dades de l'enunciat com a probabilitats: 3 punts. Si ho fan per taules de contingència o per diagrama en arbres correctament: 3 punts.
Interpretació correcta de la probabilitat demanada a l'apartat a): 1 punt.
Càlcul de la probabilitat demanada a l'apartat a): 1 punt.
Interpretació correcta de la probabilitat demanada a l'apartat b): 1 punt.
Càlcul de la probabilitat demanada a l'apartat b): 1 punt.
Interpretació correcta de la probabilitat demanada a l'apartat c): 1.5 punts.
Càlcul de la probabilitat demanada a l'apartat b): 1.5 punts.

Model 1. Criteris específics de correcció

OPCIÓ B

1. Càlcul del producte de matrius **AM**: 2 punts.
Càlcul del producte de matrius **MA**: 2 punts.
Plantejament del sistema d'equacions **AM** = **MA**: 3 punts.
Resolució del sistema anterior: 3 punts.

Si no determina la relació correcta, màxim: 7 punts.

2. *a*) Esbós de la funció: 6 punts. Si no justifica com ha fet el dibuix i simplement dibuixa la funció: 0 punts.

b) Càlcul de l'àrea demanada: 4 punts.

i) Plantejar la integral: 0.5 punts.
ii) Dividir la integral en dues: 1 punt.
iii) Càlcul de cada integral: 2 punts, 1 punt per cada integral.
iv) Càlcul de la integral total: 0.5 punts.

3. Càlcul dels vectors directors de les rectes: 2 punts.
Càlcul del pla que conté una recta i és paral·lel a l'altra: 3 punts.
Plantejament que la distància entre les dues rectes és igual a la distància entre un punt de la recta **s** (si **s** és la recta paral·lela al pla) i el pla determinat: 3 punts.
Càlcul de la distància entre un punt de la recta **s** i el pla determinat: 2 punts.

4. *a*) Puntuació de l'apartat a):

i) Plantejar bé la probabilitat demanada: 2 punts,
ii) Estandarditzar la variable X: 1 punt,
iii) Càlcul de la probabilitat: 1 punt.

b) Puntuació de l'apartat b):

i) Plantejar bé la condició que ha de satisfer x: 2 punts,
ii) Estandarditzar la variable X: 2 punts,
iii) Càlcul del valor de x: 2 punts.

Model 1. Solucions

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Discutiu per a quins valors de m el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} 4x & + & my & + & z = & m+2, \\ mx & + & y & - & z = & 0, \\ x & + & 3y & + & z = & 0. \end{array}\right\}$$

(7 punts)

b) Resoleu-lo en el cas en què $m = -2$. (3 punts)

Solució. *a*) La matriu del sistema és la següent:

$$\begin{pmatrix} 4 & m & 1 \\ m & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

El determinant de la matriu anterior val: $-m^2 + 2m + 15$.
El determinant serà nul per a $m = -3$ i $m = 5$.
Si $m \neq -3, 5$, el rang de la matriu del sistema serà 3 i el rang de la matriu ampliada també serà 3 ja que només hi ha tres equacions. Per tant, en aquest cas, es tractaria d'un sistema compatible determinant.
Si $m = -3$, el sistema serà:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} 4x & - & 3y & + & z = & -1, \\ -3x & + & y & - & z = & 0, \\ x & + & 3y & + & z = & 0. \end{array}\right\}$$

El rang de la matriu del sistema serà 2, ja que el determinant següent és diferent de zero:

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

El rang de la matriu ampliada serà 3 ja que el determinant següent format per les 3 últimes columnes no és nul:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Per tant, es tractaria d'un sistema incompatible.
Si $m = 5$, el sistema serà:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} 4x & + & 5y & + & z = & 7, \\ 5x & + & y & - & z = & 0, \\ x & + & 3y & + & z = & 0. \end{array}\right\}$$

El rang de la matriu del sistema serà 2, ja que el determinant següent és diferent de zero:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -21 \neq 0.$$

El rang de la matriu ampliada serà 3 ja que el determinant següent format per les 3 últimes columnes no és nul:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 28 \neq 0.$$

Per tant, es tractaria d'un sistema incompatible.

b) En el cas $m = -2$, el sistema és:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} 4x & - & 2y & + & z = & 0, \\ -2x & + & y & - & z = & 0, \\ x & + & 3y & + & z = & 0. \end{array}\right\}$$

Com que és un sistema homogeni i sabem que té solució única, aquesta serà $x = y = z = 0$.

2. Calculau les dimensions d'una capsa amb les dues tapes de base quadrangular de volum 64 metres cúbics de superfície mínima. Comprovau que la solució obtinguda és un mínim. (10 punts)

Solució. Sigui a la mesura del costat de la base i h l'altura de la capsa. El volum de la mateixa serà:

$$V = a^2 h,$$

i la superfície de la capsa serà:

$$S = 2a^2 + 4ah.$$

Sabem que $V = 64$, o, si es vol $a^2 h = 64$. Aïllant h de l'expressió anterior, obtenim $h = \frac{64}{a^2}$. La superfície de la capsa valdrà, en funció d'a:

$$S = 2a^2 + 4a \cdot \frac{64}{a^2} = 2a^2 + \frac{256}{a}.$$

Per trobar el mínim de la funció anterior, derivam i igualam a zero:

$$S' = \frac{4\left(a^3 - 64\right)}{a^2} = 0.$$

Model 1. Solucions

L'única solució real de l'equació anterior és $a = 4$. Les dimensions de la capsa seran 4 metres de costat de la base i $h = \frac{64}{4^2} = 4$ metres d'altura. Es tractaria, doncs, d'un cub.

Comprovem que el que hem trobat és efectivament un mínim:

$$S'' = \frac{512}{a^3} + 4.$$

Substituint per $a = 4$, obtenim $S''(4) = 12 > 0$. Com que la derivada segona és positiva, es tractaria d'un mínim.

3. Calculau les equacions paramètriques de la recta que passa per l'origen de coordenades i talla les rectes: (10 punts)

$$\mathbf{r}: x = 2y = z - 1, \quad \mathbf{s}: 3x = 2y - 2 = 6z.$$

Solució. Les rectes $\mathbf{r}$ i s en forma paramètrica valen:

$$\mathbf{r}: \left.\begin{array}{rl} x = & 2t, \\ y = & t, \\ z = & 1 + 2t. \end{array}\right\}, \quad \mathbf{s}: \left.\begin{array}{rl} x = & \frac{2s-2}{3}, \\ y = & s, \\ z = & \frac{2s-2}{6}. \end{array}\right\}$$

Sigui $\mathbf{v} = (a, b, c)$ el vector director de la recta cercada. Com que la recta que busquem talla a $\mathbf{r}$, tenint en compte que el vector director de la recta $\mathbf{r}$ és $(2, 1, 2)$, que la recta passa per l'origen i que $(0, 0, 1)$ és un punt de la recta $\mathbf{r}$, el determinant següent serà nul:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 2 & c \end{vmatrix} = -a + 2b = 0.$$

De la mateixa manera, com que la recta que busquem talla a s, tenint en compte que el vector director de la recta s és $\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}\right)$, que la recta passa per l'origen i que $\left(-\frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right)$ és un punt de la recta s, el determinant següent serà nul:

$$\begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & a \\ 0 & 1 & b \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & c \end{vmatrix} = \frac{a}{3} - \frac{2c}{3} = 0.$$

Resolent el sistema d'equacions trobat pels valors a, b i c, obtenim:

$$\left.\begin{array}{rl} -a + 2b & = 0, \\ \frac{a}{3} - \frac{2c}{3} & = 0, \end{array}\right\} \Rightarrow b = \frac{a}{2}, \ c = \frac{a}{2}.$$

Agafant $a = 2$, tenim que un vector director de la recta buscada serà $(2, 1, 1)$. Les equacions paramètriques de la recta buscada són:

$$\left.\begin{array}{rl} x = & 2t, \\ y = & t, \\ z = & t. \end{array}\right\}$$

4. En una classe de segon de batxillerat, el 60% dels alumnes són al·lotes, el 40% varen aprovar Llengua Castellana i el 20% són al·lotes que varen aprovar Llengua Castellana. Es demana:

Model 1. Solucions

a) Quina és la probabilitat de trobar una persona que sigui al·lot i suspengui[1] Llengua Castellana? (5 punts)
b) Quina és la probabilitat que un al·lot suspengui Llengua Castellana? (2 punts)
c) Si un alumne ha aprovat Llengua Castellana, quina és la probabilitat que sigui un al·lot? (3 punts)

Solució. Siguin els esdeveniments següents:

D: "Ésser al·lota".
H: "Ésser al·lot".
A: "Aprovar Llengua Castellana".
S: "Suspendre Llengua Castellana".

Ens donen les probabilitats següents:

$$p(\mathrm{D}) = 0.6,\ p(\mathrm{H}) = 0.4,\ p(\mathrm{A}) = 0.4,\ p(\mathrm{S}) = 0.6,\ p(\mathrm{D}\cap\mathrm{A}) = 0.2.$$

Ens demanen

a) $p(\mathrm{H}\cap\mathrm{S}) = p(\mathrm{S}) - p(\mathrm{D}\cap\mathrm{S}) = p(\mathrm{S}) - (p(\mathrm{D}) - p(\mathrm{D}\cap\mathrm{A})) = 0.6 - (0.6 - 0.2) = 0.2.$
b) $p(\mathrm{S}|\mathrm{H}) = \frac{p(\mathrm{H}\cap\mathrm{S})}{p(\mathrm{H})} = \frac{0.2}{0.4} = 0.5.$
c) $p(\mathrm{H}|\mathrm{A}) = \frac{p(\mathrm{H}\cap\mathrm{A})}{p(\mathrm{A})} = \frac{p(\mathrm{H})-p(\mathrm{H}\cap\mathrm{S})}{p(\mathrm{A})} = \frac{0.4-0.2}{0.4} = 0.5.$

[1] Entenem per suspendre quan un alumne suspèn l'assignatura o no es presenta.

Model 1. Solucions

OPCIÓ B

1. Determinau quines relacions han d'existir entre a, b, c i d perquè es verifiqui $\mathbf{AM} = \mathbf{MA}$, sent $\mathbf{A}$ i $\mathbf{M}$ les matrius següents: (10 punts)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Solució. Si calculam els productes $\mathbf{AM}$ i $\mathbf{MA}$ obtenim:

$$\mathbf{AM} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{MA} = \begin{pmatrix} b & b-a \\ d & d-c \end{pmatrix}.$$

Com que les dues matrius anteriors han d'ésser iguals, hem de resoldre el sistema d'equacions següent:

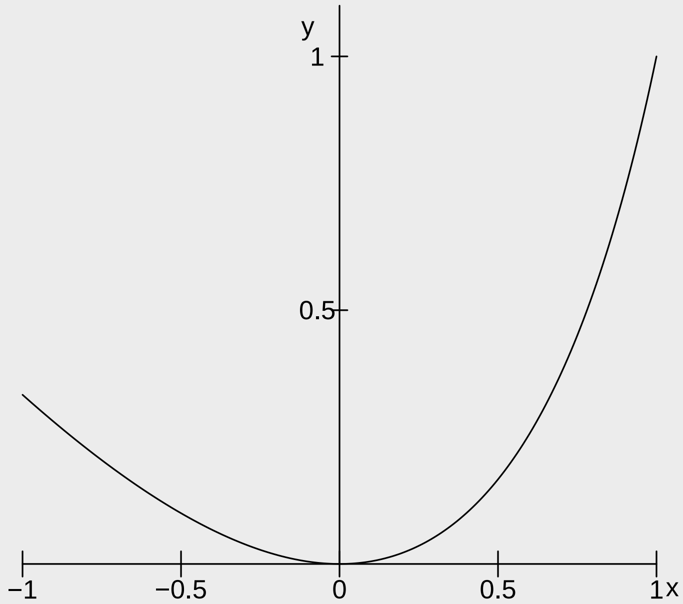
$$\left.\begin{aligned} -c &= b, \\ -d &= b-a, \\ a+c &= d, \\ b+d &= d-c. \end{aligned}\right\}$$

Les solucions són: $c = -b$ i $d = a - b$, amb a i b lliures.

2. Considerem la funció $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$. Feu un dibuix aproximat de la funció anterior en l'interval $[-1, 1]$. (6 punts). Calculau l'àrea limitada per la gràfica de la funció anterior i l'eix de les X. (4 punts)

Solució. *a*) L'esbós de la funció és el següent:

Model 1. Solucions



b) Ens demanen la integral següent:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2-x}\, dx.$$

Es tracta d'una integral racional. Com el grau del numerador supera al grau del denominador, hem de dividir:

$$\frac{x^2}{2-x} = -x-2+\frac{4}{2-x}.$$

La integral anterior serà doncs:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2-x}\, dx = \int_{-1}^{1} -(x+2)\, dx + \int_{-1}^{1} \frac{4}{2-x}\, dx$$
$$= -\left.\frac{(x+2)^2}{2}\right]_{-1}^{1} - 4\ln(2-x)\big]_{-1}^{1} = 4\ln 3 - 4 \approx 0.3944.$$

3. Calculau la distància entre les rectes següents: (10 punts)

$$\mathbf{r}:\begin{cases} z + y = 5, \\ z = 4, \end{cases} \qquad \mathbf{s}:\begin{cases} 2x - z = 3, \\ y = 0. \end{cases}$$

Model 1. Solucions

Solució. El vector director de la recta $\mathbf{r}$ és $\mathbf{v_r} = (1, 0, 0)$ i el vector director de la recta $\mathbf{s}$ és $\mathbf{v_s} = (1, 0, 2)$.

El pla que conté la recta $\mathbf{r}$ i és paral·lel a la recta $\mathbf{s}$ val:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y-1 & 0 & 0 \\ z-4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2y = 0, \Rightarrow y = 1.$$

La distància entre les dues rectes es pot calcular com la distància entre un punt qualsevol de la recta $\mathbf{s}$ (per exemple $(2, 0, 1)$) i el pla anterior:

$$d(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \frac{|0-1|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = 1.$$

4. El nombre de passes que fa el professor Jaimito durant una hora de classe es modela amb una distribució normal de mitjana 100 passes i desviació típica 20.5 passes.

a) Calculau la probabilitat que el professor faci més de 125 passes durant una classe. (4 punts)

b) Ens diuen que en el 45% de les classes que fa el professor aquest fa menys de x passes. Trobau aquest valor x. (6 punts)

Solució. Sigui X la variable aleatòria que ens dóna el nombre de passes que fa el professor durant una hora de classe. Ens diuen que $X = N(\mu = 100, \sigma = 20.5)$. Ens demanen:

a) $p(X > 125) = p\left(Z > \frac{125-100}{20.5}\right) = p(Z > 1.22) = 0.1112$, on Z representa la distribució normal estàndard, o $Z = N(0, 1)$.

b) Sabem $p(X < x) = 0.45$. Si estandaritzam, tendrem $p\left(Z < \frac{x-100}{20.5}\right) = 0.45$. Fent servir la simetria de la normal estàndard, tenim que $p\left(Z < -\frac{(x-100)}{20.5}\right) = 1 - 0.45 = 0.55$. Mirant les taules, $-\frac{(x-100)}{20.5} = \frac{0.12+0.13}{2} = 0.125$. El valor de x serà doncs $x = -0.125 \cdot 20.5 + 100 = 97.438$.

Model 1. Solucions

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

Model 1

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Discutiu per a quins valors de a el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} (a+2)x & + & (a-1)y & - & z = & 1, \\ ax & - & y & + & z = & -1, \\ 11x & + & ay & - & z = & a. \end{array}\right\}$$

(7 punts)

b) Resoleu-lo en el cas en què $a = 0$. (3 punts)

2. Les funcions $f(x) = x^4 + ax^2 + bx$ i $g(x) = x - cx^2$ passen pel punt $(1, 0)$. Determinau els coeficients a, b i c perquè tinguin la mateixa recta tangent en aquest punt i calculau-la. (10 punts)

3. Determinau la posició relativa del pla $x + y + z = 1$ amb la recta d'equacions $x - 1 = y - 1 = \frac{z-1}{-2}$. (4 punts) Calculau la projecció ortogonal de la recta sobre el pla. (6 punts)

4. Les alçades X dels estudiants de 18 anys dels instituts de Palma es modelen segons una llei normal de mitjana $\mu = 1.78$ m i desviació típica $\sigma = 0.65$ m. Es demana:

a) Percentatge d'estudiants de 18 anys dels instituts de Palma que fan més d'1.90 m. (4 punts)

b) Agafam una mostra de 100 estudiants de 18 anys dels instituts de Palma i en volem seleccionar els 30 més alts. Quina és l'alçada mínima que ha de fer un estudiant de 18 anys dels instituts de Palma per ser seleccionat? (6 punts)

Model 1

OPCIÓ B

1. Considerem la matriu i els vectors següents:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 6-2y \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Calculau x i y perquè es verifiqui:

$$\mathbf{b} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{d}.$$

(10 punts)

2. Considerem la regió delimitada per la funció $f(x) = x^2 - x^4$ i l'eix d'abscisses o eix OX. Feu un esbós de la regió demanada (6 punts) i calculau l'àrea de la regió. (4 punts)

3. Considerem la recta $\frac{x-1}{2} = y+1 = -z+1$ i el pla $x - y = 0$. Calculau l'àrea del triangle format pel punt de tall entre la recta i el pla, el punt $(1,-1,1)$ de la recta i la projecció ortogonal d'aquest punt sobre el pla. (10 punts)

4. En una comunitat de 500 estudiants de segon de batxillerat, 200 estudien l'opció científica tecnològica. N'hi ha 150 que practiquen futbol i 100 que practiquen bàsquet (entenem que no n'hi ha cap que practiqui futbol i bàsquet a la vegada). Dels que practiquen bàsquet, 70 estudien l'opció científica tecnològica, i hi ha 150 estudiants que no practiquen esport ni fan l'opció científica tecnològica. Es demana:

a) Probabilitat que un estudiant estudiï l'opció científica tecnològica i no practiqui esport. (3 punts)

b) Sabent que un estudiant practica futbol, quina és la probabilitat que estudiï l'opció científica tecnològica? (3 punts)

c) Són independents els esdeveniments "practicar futbol" i "estudiar l'opció científica tecnològica". Raonau la resposta. (4 punts)

Model 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

Model 1. Criteris específics de correcció

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Les puntuacions tant dels apartats com dels subapartats són independents. Si l'alumne s'ha equivocat en qualque apartat o subapartat però fa bé els altres (segons les "seves" dades), donau la puntuació adient. En aquest cas, s'ha de refer el problema, ja que s'han de posar les dades "equivocades" de l'alumne per resoldre els altres apartats o subapartats en què no s'ha equivocat. En canvi, si s'equivoca en dos apartats o subapartats, donau 0 punts.

OPCIÓ A

1. a) Càlcul correcte del determinant de la matriu del sistema: 2 punts.
Resolució correcta de l'equació que diu que el determinant de la matriu del sistema és zero: 2 punts.
Discussió correcta per a $a \neq 4, 5$: 1 punt.
Discussió correcta per a $a = 4$: 1 punt.
Discussió correcta per a $a = 5$: 1 punt.

b) Resolució per a $a = 0$: 3 punts. Si hi ha qualque error: 0 punts.

2.
- Càlcul correcte de les condicions que han satisfer a, b i c imposant que les funcions $f(x)$ i $g(x)$ passen per $(1, 0)$: 1 punt, 0.5 punts per a cada funció.
- Calcular correctament el pendent de la recta tangent a $f(x)$ al punt $(1, 0)$: 2 punts.
- Calcular correctament el pendent de la recta tangent a $g(x)$ al punt $(1, 0)$: 2 punts.
- Establir el sistema d'equacions a resoldre: 2 punts.
- Resolució del sistema i donar els valors de a, b i c: 3 punts.

3.
- Veure que el vector director de la recta és un vector perpendicular al vector normal del pla: 3 punts.
- Veure que la recta és paral·lela al pla però no hi està inclosa: 1 punt. Si no comproven que la recta no és al pla, només donau els 3 punts de l'apartat anterior.
- Càlcul correcte del vector director de la recta projectada: 2 punts.
- Càlcul correcte d'un punt de la recta projectada: 3 punts.
- Donar l'equació de la recta projectada: 1 punt.

4. a) Puntuació de l'apartat a):

i) Plantejar bé la probabilitat demanada: 1 punt,
ii) Estandarditzar correctament la variable X: 1 punt,
iii) Càlcul correcte de la probabilitat: 2 punts.

Model 1. Criteris específics de correcció

b) Puntuació de l'apartat b):

i) Plantejar bé la condició que ha de satisfer h: 1 punt,
ii) Estandarditzar la variable X: 2 punts,
iii) Càlcul del valor de h: 3 punts.

OPCIÓ B

1. - Càlcul correcte de $\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{c}$: 2 punts.
- Càlcul correcte de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{d}$: 1 punt.
- Plantejament del sistema a resoldre per x i y: 1 punt.
- Càlcul correcte dels valors de y: 3 punts (1.5 punts per cada valor de y).
- Càlcul correcte dels corresponents valors de x: 3 punts (1.5 punts per cada valor de x)

2. *a*) Esbós de la funció, 6 punts. Si no justifica com ha fet el dibuix i simplement dibuixa la funció: 0 punts.

b) Càlcul de l'àrea demanada: 4 punts.

i) Plantejar correctament la integral: 1 punt.
ii) Càlcul correcte de la primitiva: 1 punt.
iii) Càlcul correcte de la integral: 2 punts.

3. - Càlcul correcte del punt d'intersecció entre la recta i el pla: 2 punts.
- Càlcul correcte de la projecció ortogonal del punt $(1, -1, 1)$: 3 punts.
- Càlcul correcte dels vectors **AB** i **AC** (o qualsevol parella de vectors del triangle ABC per permeti calcular la seva àrea): 2 punts.
- Càlcul correcte de l'àrea del triangle ABC: 3 punts.

4. a) − Traducció correcta de les dades a la probabilitat demanada a l'apartat a): 1.5 punts.
− Càlcul correcte de la probabilitat demanada a l'apartat a): 1.5 punts.

b) − Traducció correcta de les dades a la probabilitat demanada a l'apartat b): 1.5 punts.
− Càlcul correcte de la probabilitat demanada a l'apartat b): 1.5 punts.

c) − Càlcul correcte de les probabilitats demanades: 3 punts (1 punt per cada probabilitat).
− Comprovació correcta que els esdeveniments no són independents: 1 punt.

Model 1. Solucions

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Discutiu per a quins valors de a el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} (a+2)x & + & (a-1)y & - & z & = & 1, \\ ax & - & y & + & z & = & -1, \\ 11x & + & ay & - & z & = & a. \end{array}\right\}$$

(7 punts)

b) Resoleu-lo en el cas en què $a = 0$. (3 punts)

Solució. *a*) La matriu del sistema és la següent:

$$\begin{pmatrix} a+2 & a-1 & -1 \\ a & -1 & 1 \\ 11 & a & -1 \end{pmatrix}.$$

El determinant de la matriu anterior val: $-a^2 + 9a - 20$.
El determinant serà nul per a $a = 4$ i $a = 5$.
Si $a \neq 4, 5$, el rang de la matriu del sistema serà 3 i el rang de la matriu ampliada també serà 3, ja que només hi ha tres equacions. Per tant, en aquest cas, es tractaria d'un sistema compatible determinat.
Si $a = 4$, el sistema serà:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 6x & + & 3y & - & z & = & 1, \\ 4x & - & y & + & z & = & -1, \\ 11x & + & 4y & - & z & = & 4. \end{array}\right\}$$

El rang de la matriu del sistema serà 2, ja que el determinant següent és diferent de zero:

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -15 \neq 0.$$

El rang de la matriu ampliada serà 3, ja que el determinant següent format per les 3 últimes columnes no és nul:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Per tant, es tractaria d'un sistema incompatible.
Si $a = 5$, el sistema serà:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 7x & + & 4y & - & z = & 1, \\ 5x & - & y & + & z = & -1, \\ 11x & + & 5y & - & z = & 5. \end{array}\right\}$$

El rang de la matriu del sistema serà 2, ja que el determinant següent és diferent de zero:

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -27 \neq 0.$$

El rang de la matriu ampliada serà 3, ja que el determinant següent format per les 3 últimes columnes no és nul:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$$

Per tant, es tractaria d'un sistema incompatible.

b) En el cas $a = 0$, el sistema és:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & - & z = & 1, \\ & - & y & + & z = & -1, \\ 11x & & & - & z = & 0. \end{array}\right\}$$

Com que és un sistema compatible determinat i sabem que té solució única, aquesta serà $x = -\frac{1}{10}$, $y = -\frac{1}{10}$, $z = -\frac{11}{10}$.

2. Les funcions $f(x) = x^4 + ax^2 + bx$ i $g(x) = x - cx^2$ passen pel punt $(1, 0)$. Determinau els coeficients a, b i c perquè tinguin la mateixa recta tangent en aquest punt i calculau-la. (10 punts)

Solució. Si les funcions $f(x)$ i $g(x)$ passen pel punt $(1, 0)$, han de satisfer:

$$f(1) = 0, \ \Rightarrow 1 + a + b = 0,$$
$$g(1) = 0, \ \Rightarrow 1 - c = 0, \ \Rightarrow c = 1.$$

El pendent de la recta tangent de $f(x)$ en el punt $(1, 0)$ serà

$$f'(1) = (4x^3 + 2ax + b)_{x=1} = 4 + 2a + b.$$

El pendent de la recta tangent de $g(x)$ en el punt $(1, 0)$ serà

$$g'(1) = (1 - 2cx)_{x=1} = 1 - 2c = -1.$$

Com que $c = 1$, tenim que $g'(1) = -1$, i per tant, $f'(1) = -1$, llavors hem de resoldre el sistema següent:

$$\left.\begin{array}{rr} 1 + a + b = & 0, \\ 4 + 2a + b = & -1. \end{array}\right\}$$

Model 1. Solucions

La solució del sistema anterior és: $a = -4$ i $b = 3$. Els valors de a, b i c són, doncs, $a = -4$, $b = 3$ i $c = 1$.

El pendent de la recta tangent serà: $m = -1$. La recta tangent serà:

$$y = -(x-1) = 1 - x.$$

3. Determinau la posició relativa del pla $x + y + z = 1$ amb la recta d'equacions $x - 1 = y - 1 = \frac{z-1}{-2}$. (4 punts) Calculau la projecció ortogonal de la recta sobre el pla. (6 punts)

Solució. La recta donada té per vector director el vector $(1, 1, -2)$, i el pla té per vector normal el vector $(1, 1, 1)$, com que el producte escalar $(1, 1, -2) \cdot (1, 1, 1) = 0$, tenim que la recta i el pla són paral.lels. A més, com que el punt $(1, 1, 1)$ de la recta no és al pla, són paral·lels i no coincidents.

Per calcular la projecció ortogonal de la recta sobre el pla, en ser la recta paral·lela al pla, basta calcular la projecció ortogonal d'un punt de la recta i la projecció serà la recta que té per vector director el mateix que la recta que ens donen $(1, 1, -2)$ i que passa pel punt calculat. Agafam $(1, 1, 1)$ com a punt de la recta. La projecció ortogonal d'aquest punt sobre el pla vindrà donada per la intersecció del pla $x + y + z = 1$ amb la recta que té com a vector director el vector normal d'aquest pla i que passa pel punt $(1, 1, 1)$:

$$\left.\begin{aligned} x - 1 = &\ y - 1 = z - 1, \\ x + y + z = &\ 1. \end{aligned}\right\}$$

La solució del sistema anterior serà el punt del pla $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. La projecció ortogonal de la recta serà la recta següent:

$$x - \frac{1}{3} = y - \frac{1}{3} = \frac{z - \frac{1}{3}}{-2}.$$

4. Les alçades X dels estudiants de 18 anys dels instituts de Palma es modelen segons una llei normal de mitjana $\mu = 1.78$ m i desviació típica $\sigma = 0.65$ m. Es demana:

a) Percentatge d'estudiants de 18 anys dels instituts de Palma que fan més d'1.90 m. (4 punts)

b) Agafam una mostra de 100 estudiants de 18 anys dels instituts de Palma i en volem seleccionar els 30 més alts. Quina és l'alçada mínima que ha de fer un estudiant de 18 anys dels instituts de Palma per ser seleccionat? (6 punts)

Solució. *a*) Ens demanen:

$$\begin{aligned} p(X > 1.9) =& p\left(Z > \frac{1.9 - 1.78}{0.65}\right) = p(Z > 0.1846) \\ =& 1 - p(Z < 0.1846) = 1 - \frac{0.5714 + 0.5753}{2} = 1 - 0.5733 = 0.4266, \end{aligned}$$

on Z és una normal estàndard ($Z = N(0, 1)$).

Model 1. Solucions

b) Ens demanen trobar l'alçada h tal que $p(X > h) = 0.3$:

$$p(X > h) = p\left(Z > \frac{h - 1.78}{0.65}\right) = 0.3,$$

d'on

$$p\left(Z < \frac{h - 1.78}{0.65}\right) = 1 - p\left(Z > \frac{h - 1.78}{0.65}\right) = 1 - 0.3 = 0.7.$$

Mirant a les taules,

$$\frac{h - 1.78}{0.65} = 0.52, \Rightarrow h = 1.78 + 0.52 \cdot 0.65 = 2.118 \text{ m}.$$

Model 1. Solucions

OPCIÓ B

1. Considerem la matriu i els vectors següents:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 6-2y \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Calculau x i y perquè es verifiqui:

$$\mathbf{b} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{d}.$$

(10 punts)

Solució. Calculem $\mathbf{b} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{c}$ i $\mathbf{A}\cdot\mathbf{d}$:

$$\mathbf{b} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -xy-2y^2+2 \\ \frac{3}{2}-2y^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{d} = \begin{pmatrix} x(6-2y)-2y \\ -2y \end{pmatrix}.$$

Hem de resoldre el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{rl} -xy-2y^2+2 = & x(6-2y)-2y, \\ \frac{3}{2}-2y^2 = & -2y, \end{array}\right\}$$

A partir de la segona equació, podem calcular y:

$$2y^2-2y-\frac{3}{2}=0, \Rightarrow 4y^2-4y-3=0, \; y=-\frac{1}{2},\frac{3}{2}.$$

Fent servir la primera equació, calculam els valors x corresponents a cada y:

$y=-\frac{1}{2}$**:**

$$-xy-2y^2+2 = x(6-2y)-2y, \Rightarrow \frac{1}{2}x+\frac{3}{2}=7x+1, \Rightarrow x=\frac{1}{13}.$$

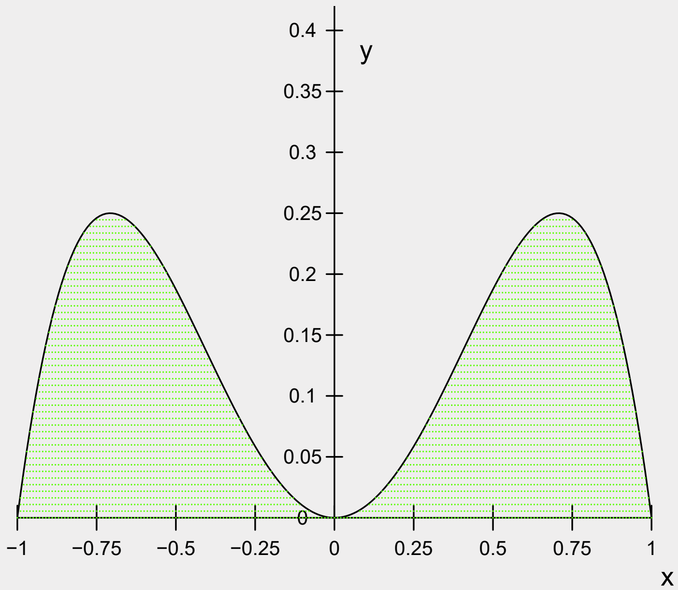
$y=\frac{3}{2}$**:**

$$-xy-2y^2+2 = x(6-2y)-2y, \Rightarrow -\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}=3x-3, \Rightarrow x=\frac{1}{9}.$$

2. Considerem la regió delimitada per la funció $f(x)=x^2-x^4$ i l'eix d'abscisses o eix OX. Feu un esbós de la regió demanada (6 punts) i calculau l'àrea de la regió. (4 punts)

Solució. *a*) L'esbós de la funció juntament amb la regió demanada és el següent:

Model 1. Solucions



b) L'àrea demanada ve donada per:

$$\int_{-1}^{1}\left(x^2-x^4\right)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{15}\approx 0.2667.$$

3. Considerem la recta $\frac{x-1}{2}=y+1=-z+1$ i el pla $x-y=0$. Calculau l'àrea del triangle format pel punt de tall entre la recta i el pla, el punt $(1,-1,1)$ de la recta i la projecció ortogonal d'aquest punt sobre el pla. (10 punts)

Solució. Calculem primer el punt d'intersecció entre la recta i el pla:

$$\left.\begin{aligned}\tfrac{x-1}{2} &= y+1,\\ y+1 &= -(z-1),\\ x-y &= 0.\end{aligned}\right\}$$

El punt intersecció del sistema anterior és: $(-3,-3,3)$.

Per calcular la projecció ortogonal del punt $(1,-1,1)$ sobre el pla, considerem la recta perpendicular al pla que passa pel punt $(1,-1,1)$: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{0}$ i a continuació fem la intersecció d'aquesta recta sobre el pla:

$$\left.\begin{aligned} x-1 &= -(y+1),\\ z &= 1,\\ x-y &= 0. \end{aligned}\right\}$$

El punt intersecció del sistema anterior és $(0,0,1)$.

Els punts del triangle a considerar són $A(1,-1,1)$, $B(-3,-3,3)$ i $C(0,0,1)$. Els vectors $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{AC}$ valen:

$$\mathbf{AB} = (-3,-3,3)-(1,-1,1) = (-4,-2,2), \quad \mathbf{AC} = (0,0,1)-(1,-1,1) = (-1,1,0).$$

L'àrea del triangle serà:

$$A = \frac{1}{2}|\mathbf{AB}\times\mathbf{AC}| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} i & j & k\\ -4 & -2 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|-2i-2j-6k| = \frac{1}{2}\sqrt{4+4+36} = \sqrt{11}.$$

4. En una comunitat de 500 estudiants de segon de batxillerat, 200 estudien l'opció científica tecnològica. N'hi ha 150 que practiquen futbol i 100 que practiquen bàsquet (entenem que no n'hi ha cap que practiqui futbol i bàsquet a la vegada). Dels que practiquen bàsquet, 70 estudien l'opció científica tecnològica, i hi ha 150 estudiants que no practiquen esport ni fan l'opció científica tecnològica. Es demana:

a) Probabilitat que un estudiant estudiï l'opció científica tecnològica i no practiqui esport. (3 punts)

b) Sabent que un estudiant practica futbol, quina és la probabilitat que estudiï l'opció científica tecnològica? (3 punts)

c) Són independents els esdeveniments "practicar futbol" i "estudiar l'opció científica tecnològica". Raonau la resposta. (4 punts)

Solució. Primer de tot, posem tota la informació donada a la taula de freqüències següent:

Esport/Opció	Científica tecnològica	No científica tecnològica	Total
Futbol			150
Bàsquet	70		100
No esport		150	
Total	200		500

Ara omplim els forats de la taula anterior:

Esport/Opció	Científica tecnològica	No científica tecnològica	Total
Futbol	**30**	**120**	150
Bàsquet	70	**30**	100
No esport	**100**	150	**250**
Total	200	**300**	500

Ens demanen:

Model 1. Solucions

a) $p(\text{científica tecnològica} \cap \text{No esport}) = \frac{100}{500} = \frac{1}{5} = 0.2$.

b) $p(\text{científica tecnològica}|\text{Futbol}) = \frac{p(\text{científica tecnològica} \cap \text{Futbol})}{p(\text{Futbol})} = \frac{\frac{30}{500}}{\frac{150}{500}} = \frac{30}{150} = \frac{1}{5} = 0.2$.

c) Les probabilitats dels esdeveniments "estudiar l'opció científica tecnològica" i "practicar futbol" són:

$$p(\text{científica tecnològica}) = \frac{200}{500} = \frac{2}{5} = 0.4, \quad p(\text{futbol}) = \frac{150}{500} = \frac{3}{10} = 0.3,$$

i la probabilitat de la intersecció serà:

$$p(\text{científica tecnològica} \cap \text{futbol}) = \frac{30}{500} = \frac{3}{50} = 0.06.$$

Observem que $\frac{3}{50} \neq \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{10}$. Per tant, no són esdeveniments independents.

Model 1. Solucions

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

Model 2

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Discutiu per a quins valors de m el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} 4x & + & 3y & + & 2z = & 0, \\ 2x & + & y & - & z = & m, \\ 6x & + & 6y & + & m^2z = & -9. \end{array}\right\}$$

(7 punts)

b) Resoleu-lo en el cas en què sigui compatible indeterminat. (3 punts)

2. Calculau els màxims i mínims relatius de la funció $f(x) = x^3 - 3x - 2$ (3 punts), els intervals de creixement i decreixement (3 punts) i feu un esbós de la seva gràfica per x entre -3 i 3. (4 punts)

3. Determinau un pla que, passant per l'origen de coordenades, sigui paral·lel a la recta d'equacions

$$\left.\begin{array}{rl} x + y = & 1, \\ y + z = & 2, \end{array}\right\}$$

i també paral·lel a la recta que passa pels punts de coordenades $(1, 1, 0)$ i $(0, 1, 1)$. (10 punts)

4. El pes dels adults de 40 anys d'una certa comunitat es modela amb una distribució normal de mitjana $\mu = 85$ kg i desviació típica $\sigma = 15$ kg. Ens demanen:

a) Quin percentatge de la població té sobrepès? Entenem que una persona adulta de 40 anys té sobrepès si pesa més de 100 kg. (4 punts)

b) Consideram el col·lectiu dels individus més prims de la comunitat. Si ens diuen que aquest col·lectiu representa el 40% de tots els individus de la comunitat, quin és el pes màxim d'un individu del col·lectiu? (6 punts)

Model 2

OPCIÓ B

1. Considerem la matriu i els vectors següents:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}.$$

Trobau x, y i z perquè se satisfaci:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{c} = \mathbf{d}.$$

(10 punts)

2. Considerem la regió delimitada per la funció $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, l'eix d'abscisses o eix OX i les rectes verticals $x = -1$ i $x = 1$. Feu un esbós de la regió demanada (6 punts) i calculau l'àrea de la regió. (4 punts)

3. Considerem els punts $A(0,0,0)$, $B(1,1,0)$ i $C(0,1,1)$. Calculau l'àrea del triangle que formen els punts A, B i C (5 punts) i determinau l'angle que formen els vectors $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{AC}$. (5 punts)

4. S'ha fet un estudi sobre la por de volar i el nivell d'estrès en una certa comunitat. Ens diuen que el 60% dels individus no tenen por de volar, el 50% té un nivell baix d'estrès, el 25%, un nivell mitjà, i el 5% té un nivell alt d'estrès i por de volar. Sabent, a més a més, que el 5% dels individus té un nivell mitjà d'estrès i no té por de volar, es demana:

a) Probabilitat que un individu de la comunitat tingui un nivell d'estrès mitjà i por de volar. (3 punts)

b) Sabent que un individu té por de volar, quina és la probabilitat que tingui un nivell baix d'estrès? (3 punts)

c) Són independents els esdeveniments "nivell d'estrès baix" i "por de volar"? Raonau la resposta. (4 punts)

Model 2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

Model 2. Criteris específics de correcció

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Les puntuacions tant dels apartats com dels subapartats són independents. Si l'alumne s'ha equivocat en qualque apartat o subapartat però fa bé els altres (segons les "seves" dades), donau la puntuació adient. En aquest cas, s'ha de refer el problema, ja que s'han de posar les dades "equivocades" de l'alumne per resoldre els altres apartats o subapartats en què no s'ha equivocat. En canvi, si s'equivoca en dos apartats o subapartats, donau 0 punts.

OPCIÓ A

1. a) Càlcul correcte del determinant de la matriu del sistema: 2 punts.
Resolució correcta de l'equació que diu que el determinant de la matriu del sistema és zero: 2 punts.
Discussió correcta per a $m \neq \pm 3$: 1 punt.
Discussió correcta per a $m = -3$: 1 punt.
Discussió correcta per a $m = 3$: 1 punt.

b) Resolució per a quan el sistema és compatible indeterminat: 3 punts. Si hi ha qualque error: 0 punts.

2.
- Càlcul correcte de $f'(x)$: 1 punt.
- Càlcul correcte dels zeros de $f'(x) = 0$: 1 punt.
- Càlcul correcte dels màxims i mínims: 1 punt.
- Càlcul correcte dels intervals de creixement: 1.5 punts.
- Càlcul correcte dels intervals de decreixement: 1.5 punts.
- Esbós de la funció: 4 punts. Si no justifica com ha fet el dibuix i simplement dibuixa la funció: 0 punts.

3.
- Càlcul correcte dels vectors directors del pla demanat: 6 punts (3 punts per cada vector director).
- Càlcul correcte de l'equació del pla: 4 punts.

4. *a*) Puntuació de l'apartat a):

i) Plantejar bé la probabilitat demanada: 1 punt,
ii) Estandarditzar la variable X: 1 punt,
iii) Càlcul correcte de la probabilitat: 2 punts.

b) Puntuació de l'apartat b):

Model 2. Criteris específics de correcció

i) Plantejar bé la condició que ha de satisfer p: 1 punt,
ii) Estandarditzar la variable X: 2 punts,
iii) Càlcul correcte del valor de p: 3 punts.

OPCIÓ B

1. - Càlcul correcte de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{c}$: 4 punts.
- Plantejament correcte del sistema a resoldre per x i y: 3 punts.
- Resolució correcta del sistema: 3 punts (1 punt per incògnita).

2. *a*) Esbós de la funció: 6 punts. Si no justifica com ha fet el dibuix i simplement dibuixa la funció: 0 punts.

b) Càlcul correcte de l'àrea demanada: 4 punts.

i) Plantejar correctament la integral: 0.5 punts.
ii) Dividir correctament la integral en dues: 1 punt.
iii) Càlcul correcte de cada integral: 2 punts (1 punt per cada integral).
iv) Càlcul correcte de la integral total: 0.5 punts.

3. - Càlcul correcte dels vectors **AB** i **AC** (o qualsevol altra parella de vectors que permeti calcular l'àrea del triangle): 2 punts.
- Càlcul correcte de l'àrea del triangle ABC: 3 punts.
- Donar correctament la definició de $\cos\alpha$, on α és l'angle que formen els vectors **AB** i **AC**: 3 punts.
- Càlcul correcte de l'angle i donar el seu valor en radians o en graus: 2 punts.

4. a) – Traducció correcta de les dades a la probabilitat demanada a l'apartat a): 1.5 punts.
– Càlcul correcte de la probabilitat demanada a l'apartat a): 1.5 punts.

b) – Traducció correcta de les dades a la probabilitat demanada a l'apartat b): 1.5 punts.
– Càlcul correcte de la probabilitat demanada a l'apartat b): 1.5 punts.

c) – Càlcul correcte de les probabilitats demanades: 3 punts (1 punt per cada probabilitat).
– Comprovació correcta que els esdeveniments no són independents: 1 punt.

Model 2. Solucions

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Discutiu per a quins valors de m el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} 4x & + & 3y & + & 2z = & 0, \\ 2x & + & y & - & z = & m, \\ 6x & + & 6y & + & m^2z = & -9. \end{array}\right\}$$

(7 punts)

b) Resoleu-lo en el cas en què sigui compatible indeterminat. (3 punts)

Solució. *a*) La matriu del sistema és la següent:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 6 & m^2 \end{pmatrix}.$$

El determinant de la matriu anterior val: $18 - 2m^2$.
El determinant serà nul per a $m = \pm 3$.
Si $m \neq \pm 3$, el rang de la matriu del sistema serà 3 i el rang de la matriu ampliada també serà 3, ja que només hi ha tres equacions. Per tant, en aquest cas, es tractaria d'un sistema compatible determinat.
Si $m = -3$, el sistema serà:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} 4x & + & 3y & + & 2z = & 0, \\ 2x & + & y & - & z = & -3, \\ 6x & + & 6y & + & 9z = & -9. \end{array}\right\}$$

El rang de la matriu del sistema serà 2, ja que el determinant següent és diferent de zero:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

El rang de la matriu ampliada serà 3, ja que el determinant següent format per les 3 últimes columnes no és nul:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 6 & 9 & -9 \end{vmatrix} = 90 \neq 0.$$

Model 2. Solucions

Per tant, es tractaria d'un sistema incompatible.
Si $m = 3$, el sistema serà:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} 4x & + & 3y & + & 2z = & 0, \\ 2x & + & y & - & z = & 3, \\ 6x & + & 6y & + & 9z = & -9. \end{array}\right\}$$

El rang de la matriu del sistema serà 2, ja que el determinant següent és diferent de zero:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

El rang de la matriu ampliada serà 2, ja que el determinant següent format per les 3 últimes columnes és nul:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 6 & 9 & -9 \end{vmatrix} = 0.$$

Per tant, es tractaria d'un sistema compatible indeterminat.

b) La solució del sistema per a $m = 3$ serà:

$$y = \frac{6}{5} - \frac{8}{5}x = 1.2 - 1.6x, \quad z = -\frac{9}{5} + \frac{2}{5}x = -1.8 + 0.4x,$$

amb x lliure.

2. Calculau els màxims i mínims relatius de la funció $f(x) = x^3 - 3x - 2$ (3 punts), els intervals de creixement i decreixement (3 punts) i feu un esbós de la seva gràfica per x entre -3 i 3. (4 punts)

Solució. Per calcular els màxims i mínims, hem de calcular primer els zeros de la derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0, \Rightarrow x = \pm 1.$$

A continuació miram si són màxims o mínims:

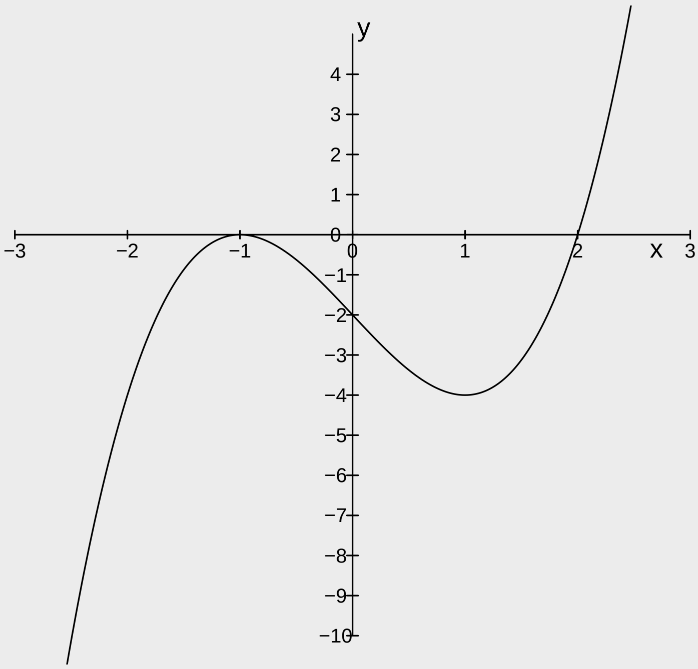
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Aleshores el punt $(-1, 0)$ és un màxim relatiu, i el punt $(1, -4)$, un mínim relatiu.

Els intervals de creixement seran: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, i els de decreixement, $(-1, 1)$.

L'esbós de la funció és el següent:

Model 2. Solucions



3. Determinau un pla que, passant per l'origen de coordenades, sigui paral·lel a la recta d'equacions

$$\left.\begin{array}{r} x+y= & 1, \\ y+z= & 2, \end{array}\right\}$$

i també paral·lel a la recta que passa pels punts de coordenades $(1,1,0)$ i $(0,1,1)$. (10 punts)

Solució. Els vectors directors del pla seran, per una part, el vector director de la recta $x+y=1, y+z=2$:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = i - j + k = (1,-1,1),$$

i, per una altra part, l'altre vector serà:

$$(1,1,0)-(0,1,1)=(1,0,-1).$$

L'equació del pla serà:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = x + 2y + z = 0.$$

4. El pes dels adults de 40 anys d'una certa comunitat es modela amb una distribució normal de mitjana $\mu = 85$ kg i desviació típica $\sigma = 15$ kg. Ens demanen:

Model 2. Solucions

a) Quin percentatge de la població té sobrepès? Entenem que una persona adulta de 40 anys té sobrepès si pesa més de 100 kg. (4 punts)

b) Consideram el col·lectiu dels individus més prims de la comunitat. Si ens diuen que aquest col·lectiu representa el 40% de tots els individus de la comunitat, quin és el pes màxim d'un individu del col·lectiu? (6 punts)

Solució. *a*) Sigui X la variable aleatòria que ens dona el pes d'un individu escollit a l'atzar de la comunitat. Ens demanen la probabilitat següent:

$$p(X > 100) = p\left(Z > \frac{100-85}{15}\right) = p(Z > 1) = 1 - p(Z < 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587,$$

on Z és una normal estàndard ($Z = N(0,1)$).
Per tant, el 15.87% dels individus de la comunitat tenen sobrepès.

b) Sigui p el pes màxim d'un individu del col·lectiu. Sabem:

$$p(X < p) = 0.4, \Rightarrow p\left(Z < \frac{p-85}{15}\right) = 0.4.$$

El valor 0.4 no surt a les taules, això és degut al fet que el valor $\frac{p-85}{15}$ és negatiu. Per tant, fent servir la simetria de la normal, podem escriure:

$$p\left(Z < -\frac{p-85}{15}\right) = 0.6.$$

Mirant a les taules,

$$-\frac{(p-85)}{15} = \frac{0.25+0.26}{2} = 0.255, \Rightarrow p = 85 - 0.255 \cdot 15 = 81.175 \text{ kg}.$$

Model 2. Solucions

OPCIÓ B

1. Considerem la matriu i els vectors següents:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}.$$

Trobau x, y i z perquè se satisfaci:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{c} = \mathbf{d}.$$

(10 punts)

Solució. Calculam $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{c}$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -2 + 2x + y \\ -2 + x + 2y \\ x \end{pmatrix}.$$

Hem de resoldre el sistema d'equacions següent:

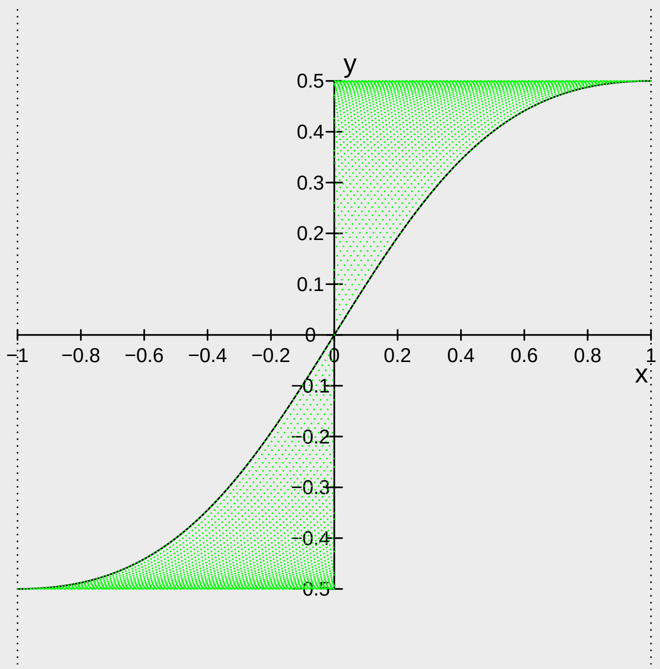
$$\left.\begin{array}{rl} -2 + 2x + y = & z, \\ -2 + x + 2y = & z, \\ x = & z. \end{array}\right\}$$

La solució al sistema anterior és: $x = y = z = 1$.

2. Considerem la regió delimitada per la funció $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, l'eix d'abscisses o eix OX i les rectes verticals $x = -1$ i $x = 1$. Feu un esbós de la regió demanada (6 punts) i calculau l'àrea de la regió. (4 punts)

Solució. *a*) L'esbós de la funció juntament amb la regió demanada és el següent:

Model 2. Solucions



b) L'àrea de la regió demanada serà:

$$A = \left| \int_{-1}^{0} \frac{x}{1+x^2}\, dx \right| + \int_{0}^{1} \frac{x}{1+x^2}\, dx$$
$$= \left| \left[\frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) \right]_{-1}^{0} \right| + \left[\frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) \right]_{0}^{1} = 2\left(\frac{1}{2}\ln 2\right) = \ln 2 \approx 0.6931.$$

3. Considerem els punts $A(0,0,0)$, $B(1,1,0)$ i $C(0,1,1)$. Calculau l'àrea del triangle que formen els punts A, B i C (5 punts) i determinau l'angle que formen els vectors **AB** i **AC**. (5 punts)

Solució. Calculem primer els vectors **AB** i **AC**:

$$\mathbf{AB} = (1,1,0) - (0,0,0) = (1,1,0),$$
$$\mathbf{AC} = (0,1,1) - (0,0,0) = (0,1,1).$$

L'àrea del triangle serà $\frac{1}{2}|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}|$:

$$A = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2}|i - j + k| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Model 2. Solucions

L'angle α entre els vectors $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{AC}$ satisfà:

$$\cos\alpha = \frac{(1,1,0)\cdot(0,1,1)}{|(1,1,0)|\cdot|(0,1,1)|} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

L'angle α serà: $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$, que correspon a 60 graus.

4. S'ha fet un estudi sobre la por de volar i el nivell d'estrès en una certa comunitat. Ens diuen que el 60% dels individus no tenen por de volar, el 50% té un nivell baix d'estrès, el 25%, un nivell mitjà, i el 5% té un nivell alt d'estrès i por de volar. Sabent, a més a més, que el 5% dels individus té un nivell mitjà d'estrès i no té por de volar, es demana:

a) Probabilitat que un individu de la comunitat tingui un nivell d'estrès mitjà i por de volar. (3 punts)
b) Sabent que un individu té por de volar, quina és la probabilitat que tingui un nivell baix d'estrès? (3 punts)
c) Són independents els esdeveniments "nivell d'estrès baix" i "por de volar"? Raonau la resposta. (4 punts)

Solució. Primer posam a la taula següent les probabilitats donades:

Por de volar/Nivell d'estrès	Baix	Mitjà	Alt	Total
Si			0.05	
No		0.05		0.6
	0.5	0.25		1

A continuació, omplim els forats:

Por de volar/Nivell d'estrès	Baix	Mitjà	Alt	Total
Si	**0.15**	**0.20**	0.05	**0.4**
No	**0.35**	0.05	**0.2**	0.6
	0.5	0.25	**0.25**	1

Ens demanen:

a) $p(\text{Estrés mitjà} \cap \text{Por de volar}) = 0.20.$
b) $p(\text{Estrés baix} \mid \text{Por de volar}) = \frac{p(\text{Estrés baix} \cap \text{Por de volar})}{p(\text{Por de volar})} = \frac{0.15}{0.4} = 0.375.$
c) les probabilitats dels esdeveniments "nivell d'estrès baix" i "por de volar" són les següents:

$$p(\text{Estrés baix}) = 0.5, \quad p(\text{Por de volar}) = 0.4.$$

La probabilitat de l'esdeveniment intersecció val:

$$p(\text{Estrés baix} \cap \text{Por de volar}) = 0.15.$$

Com que $0.15 \neq 0.5\cdot 0.4$, els esdeveniments no són independents.

Model 2. Solucions

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0, 1)$.

Model 2

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les dues opcions, A i B, proposades.

Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritza l'ús de les que puguin emmagatzemar o transmetre informació.

OPCIÓ A

1. Donat el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} x+y=1, \\ ax+z=0, \\ x+(1+a)y+az=a+1, \end{cases}$$

determina el paràmetre a, i resol sempre que es pugui, de manera que el sistema:

(a) tengui solució única, (4 punts)

(b) tengui infinites solucions, (4 punts)

(c) no tengui solució. (2 punts)

2. Considera la funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donada per

$$y = f(x) = x^3 - 3x.$$

(a) Calcula l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció al punt d'abscissa $x = -1$. (2 punts)

(b) Fes un esbós de la gràfica de $y = f(x)$ i calcula: els punts de tall amb els eixos, els extrems relatius i el comportament de la funció a l'infinit. (4 punts)

(c) Calcula l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció donada i la recta $y = 2$.(4 punts)

Model 2. **Opció A**. Segueix.

3. Considera el punt $P = (2, -1, 1)$ i la recta r donada per

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + 4z - 1 = 0 \\ x + 2y - 3z - 2 = 0 \end{array}\right\} (r)$$

   (a) Calcula l'expressió de l'equació contínua de la recta r. (2 punts)

   (b) Calcula l'equació del pla, Π, perpendicular a la recta r que passa pel punt P. (2 punts)

   (c) Calcula el punt, Q, d'intersecció del pla Π amb la recta r. (3 punts)

   (d) De totes les rectes que passen pel punt $P = (2, -1, 1)$, calcula aquella que talla perpendicularment a la recta r. (3 punts)

4. El nombre d'hores de vida d'un cert bacteri (tipus A) es distribueix segons una normal de mitjana 110 hores i desviació típica de 0,75 hores. Calcula la probabilitat que, escollint a l'atzar un bacteri:

   (a) el seu nombre d'hores de vida sobrepassi les 112,25 hores. (4 punts)

   (b) el seu nombre d'hores de vida sigui inferior a 109,25 hores. (4 punts)

   D'un altre bacteri (tipus B) se sap que el nombre d'hores de vida es distribueix segons una normal de mitjana 110 hores, però es desconeix la seva desviació típica. Experimentalment s'ha comprovat que la probabilitat que un bacteri tipus B visqui més de 125 hores és 0,1587. Calcula la desviació típica de la distribució del nombre d'hores de vida dels bacteris tipus B. (2 punts)

Model 2

OPCIÓ B

1. Una empresa té tres mines: **A**, **B** i **C**, i en cada una, el mineral extret conté els elements químics: níquel (Ni), coure (Cu) i ferro (Fe), en diferent concentració. Les concentracions són:

   - Mina **A**: Ni (1%), Cu (2%), Fe (3%),
   - Mina **B**: Ni (2%), Cu (5%), Fe (7%),
   - Mina **C**: Ni (1%), Cu (3%), Fe (1%).

   Per obtenir 7 tones de níquel, 18 de coure i 16 de ferro en total, quantes tones de mineral s'han d'extreure de cada mina?

   (a) Planteja un sistema d'equacions que interpreti l'enunciat. (4 punts)

   (b) Classifica el sistema. (2 punts)

   (c) Resol el sistema. (4 punts)

2. Considera la funció $f(x) = \frac{3}{x^2 - x}$.

   (a) Calcula el seu domini i els intervals de creixement i decreixement. (3 punts)

   (b) Calcula una primitiva qualsevol de $f(x)$. (4 punts)

   (c) Calcula l'àrea delimitada per la gràfica de la funció $y = f(x)$, l'eix OX i les rectes $x = 2$ i $x = 3$. (3 punts)

3. Donada la recta r i el pla π

$$(r) \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1}, \qquad (\pi) \quad 3x - my + z = 1,$$

   es demana si existeix algun valor del paràmetre m per al qual

   (a) el pla i la recta són paral·lels. (4 punts)

   (b) o bé, el pla conté la recta. (3 punts)

   (c) o bé, el pla i la recta es tallen exactament en un punt. (3 punts)

   En cada cas, si existeix, cacula'l.

Model 2. **Opció B**. Segueix.

4. Una empresa de fabricació d'impressores té dos centres de producció, la fàbrica europea (E) i la fàbrica asiàtica (A). L'1 % de les impressores de la fàbrica E i el 3% de les impressores de la fàbrica A es produeixen amb un defecte. El mercat d'un determinat país s'abasteix d'impressores procedents de la fàbrica E en un 80%, mentre que la resta prové de la fàbrica A.

   (a) Quina és la probabilitat que una impressora d'aquest país tingui el defecte? (4 punts)

   (b) Si el país té, aproximadament, dos milions d'impressores fabricades per aquesta empresa, quantes tindran el defecte? (2 punts)

   (c) Si s'escull a l'atzar una impressora d'aquest país i resulta ser una impressora defectuosa, quina és la probabilitat que provingui de la fàbrica E? (4 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0, 1)$

Model 2. Criteris de correcció

Heu de corregir quatre qüestions en total. Recordau que l'alumne les haurà escollit d'entre les dues opcions, A i B, proposades.

Si l'alumne presenta més de quatre qüestions, corregiu-ne les quatre primeres.

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, cadascuna té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic).

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Les puntuacions tant dels apartats com dels subapartats són independents. Si l'alumne s'ha equivocat en qualque apartat o subapartat però fa bé els altres (segons les "seves" dades), donau-li la puntuació adient. En aquest cas, s'ha de refer el problema, ja que s'han de posar les dades "equivocades" de l'alumne per resoldre els altres apartats o subapartats en què no s'ha equivocat. En canvi, si s'equivoca en dos o més apartats o subapartats, donau 0 punts.

OPCIÓ A

1. (a) Discussió correcta SCD i plantejament de det$\neq 0$ = 0,5 punts
   Calcula $a = 0$ i $a = -1$ com a solucions del det= 0 = 1 punt
   Estableix $a \neq 0, -1$, perquè el SEL tengui solució única = 1 punt
   Calcula correctament: 1, 2 o 3 incògnites:
   1 incòg.=0,5; 2 incòg.=1; 3 incòg.=1,5 punts
   (total 4 punts)

   (b) Estableix $a = 0$ perquè el SEL tengui infinites solucions = 1 punt
   Estableix $a = -1$ perquè el SEL tengui infinites solucions = 1 punt
   Calcula correctament la solució del SEL en el cas $a = 0$ = 1 punt
   Calcula correctament la solució del SEL en el cas $a = -1$ = 1 punt
   (total 4 punts)

   (c) Discussió correcta i plantejament de la impossibilitat d'aquest cas = 2 punts
   (total 2 punts)

2. (a) Calcula un punt per on passa la recta tangent = 0,5 punts
   Calcula el pendent de la recta tangent = 0,5 punts
   Escriu correctament l'equació de la recta tangent = 1 punt
   (total 2 punts)

(b)	Calcula correctament les coordenades del màxim i mínim	0,5 + 0,5 = 1 punt
	Calcula correctament les coord. dels 3 punts de tall amb $x = 0$	0,33×3 = 1 punt
	Calcula correctament $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^3 = \pm\infty$	= 1 punt
	Fa correctament l'esbós de la funció	= 1 punt
		(total 4 punts)
(c)	Calcula el punt $P = (-1, 2)$ de tall de f amb $y = 2$	= 0,5 punts
	Calcula el punt $Q = (2, 2)$ de tall de f amb $y = 2$	= 1 punt
	Escriu correctament la integral	= 1 punt
	Calcula bé la primitiva	= 1 punt
	Dona el resultat correcte	= 0,5 punts
		(total 4 punts)

3\.

(a)	Calcula el vector posició de r	= 0,5 punts
	Calcula el vector director de r	= 0,5 punts
	Escriu correctament l'equació contínua de r	= 1 punt
		(total 2 punts)
(b)	Calcula correctament el vector associat al pla Π	= 1 punt
	Imposa correctament que $P \in \Pi$	= 0,5 punts
	Escriu correctament l'equació del pla Π	= 0,5 punts
		(total 2 punts)
(c)	Resol el SEL i calcula correctament: 1, 2 o 3 incògnites: $Q = (1/10, 0, -3/10)$	
		1 incòg.=1; 2 incòg.=2; 3 incòg.=3 punts
		(total 3 punts)
(d)	Calcula el vector posició: P o Q	= 1 punt
	Calcula el vector director: $\sim (-19, 10, -13)$	= 1 punt
	Escriu correctament l'equació de la recta	= 1 punt
		(total 3 punts)

4\. Tipus A: $N(110,\, 0,75)$

(a)	Planteja correctament el problema, $P(X > 112,25)$	= 1 punt
	Tipifica correctament la distribució normal, $P(Z > 3)$	= 1 punt
	Resol correctament la probabilitat, $P(Z > 3) = 1 - P(Z \leq 3)$	= 1 punt
	Calcula correctament la probabilitat, $P(X > 112,25) = 0,0013$	= 1 punt
		(total 4 punts)

(b) Planteja correctament el problema, $P(X < 109,25)$ = 1 punt

Tipifica correctament la distribució normal, $P(Z < -1)$ = 1 punt

Resol correctament la probabilitat, $P(Z < -1) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1)$= 1 punt

Calcula correctament la probabilitat, $P(X < 109,25) = 0,1587$ = 1 punt

(total 4 punts)

Tipus B: $N(110, \sigma)$. Calcula la desviació típica:

Planteja correctament el problema, $P(X > 125) = 0,1587$ = 0,5 punts

Tipifica correctament la distribució normal, $P(Z > 15/\sigma) = 0,1587$ = 0,5 punts

Resol correctament la probabilitat, $P(Z \leq 15/\sigma) = 0,8413$ = 0,5 punts

Calcula correctament la desviació típica, $\sigma = 15$ hores = 0,5 punts

(total 2 punts)

Model 2

OPCIÓ B

1.
   - Mina **A**: Ni (1%), Cu (2%), Fe (3%),
   - Mina **B**: Ni (2%), Cu (5%), Fe (7%),
   - Mina **C**: Ni (1%), Cu (3%), Fe (1%),

   (a) Planteja un sistema d'equacions que interpreti l'enunciat:
   Estableix correctament les incògnites del problema = 2 punts
   Escriu correctament el SEL = 2 punts
   (total 4 punts)

   (b) Classifica el sistema:
   Calcula correctament el determinant = 1 punt
   Estableix que és un SCD = 1 punt
   (total 2 punts)

   (c) Resol el sistema:
   Resol el SEL i calcula correctament: 1, 2 o 3 incògnites:
   1 incòg.=1; 2 incòg.=2; 3 incòg.=4 punts
   (total 4 punts)

2. (a) Calcula correctament el domini = 1 punt
   Calcula correctament els intervals de creix. =1 punt
   Calcula correctament els intervals de decreix. =1 punt
   (total 3 punts)

   (b) Descompon $f(x)$ en dues fraccions simples (A i B) =1 punt
   Calcula correctament el numerador A = 0,5 punts
   Calcula correctament el numerador B = 0,5 punts
   Calcula correctament les dues integrals 0,5×2 = 1 punt
   Obté una primitiva qualsevol de $f(x)$ = 1 punt
   (total 4 punts)

   (c) Escriu correctament la integral definida a fer = 1 punt
   Usa correctament la regla de Barrow = 1 punt
   Calcula el valor de l'àrea = 1 punt
   (total 3 punts)

3. (a) Planteja teòricament el cas $= 1$ punt
Fa els càlculs necessaris per a respondre la pregunta $= 2$ punts
Resol el cas, i. e. $m = 5/3$ $= 1$ punt
(total 4 punts)

(b) Planteja teòricament el cas $= 1$ punt
Fa els càlculs necessaris per respondre la pregunta $= 1$ punt
Resol el cas, i. e. $\nexists m$ $= 1$ punt
(total 3 punts)

(c) Planteja teòricament el cas $= 1$ punt
Fa els càlculs necessaris per respondre la pregunta $= 1$ punt
Resol el cas, i. e. $m \neq 5/3$ $= 1$ punt
(total 3 punts)

4. (a)
- Resposta amb taula de contingència:
  Taula de contingència correcta $= 2$ punts
  Càlcul correcte de la probabilitat, $P(\text{defect.}) = 14/1000$ $= 2$ punts
- Resposta amb teorema de la probabilitat total:
  Escriu correctament el teor. prob. total $= 2$ punts
  Càlcul correcte de la probabilitat, $P(\text{defect.}) = 14/1000$ $= 2$ punts

(total 4 punts)

(b) Càlcul correcte $= 2$ punts
(total 2 punts)

(c)
- Resposta amb taula de contingència:
  Taula de contingència correcta $= 2$ punts
  Càlcul correcte de la probabilitat, $P(\text{defect.}) = 14/100$ $= 2$ punts
- O bé resposta amb teorema de Bayes:
  Escriu correctament el teor. de Bayes $= 2$ punts
  Càlcul correcte de la probabilitat, $P(\text{defect.}) = 14/100$ $= 2$ punts

(total 4 punts)

Model 3

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les dues opcions, A i B, proposades.

Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritza l'ús de les que puguin emmagatzemar o transmetre informació.

OPCIÓ A

1. Donada l'equació matricial
$$M \cdot X + N = P,$$
on X és la matriu incògnita i
$$M = \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & a \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Per a quins valors del paràmetre a existeix la matriu inversa de M? (1 punt)

   (b) Calcula la matriu inversa de M. (3 punts)

   (c) Per a $a = 2$, resol l'equació matricial, si és possible. (3 punts)

   (d) Per als valors de a per als quals existeix la matriu inversa de M, resol l'equació matricial. (3 punts)

2. Considera la funció
$$f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+3)}.$$

   (a) Determina: el domini, els intervals de creixement i decreixement, les coordenades dels màxims i mínims i el $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$. (2 punts)

   (b) Fes un esbós de la gràfica. (1 punt)

   (c) Obté els valors de A i B per als quals (3 punts)
$$f(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}.$$

   (d) Calcula l'àrea de la regió limitada per la gràfica de la funció, l'eix OX i les rectes d'equacions $x = -2$ i $x = 2$. (4 punts)

Model 3. **Opció A**. Segueix.

3. Donades les rectes

$$\textbf{(I)} \begin{cases} 15x + 12y - 14z = & -17, \\ 8x - y - 5z = & 23, \end{cases} \qquad \textbf{(II)} \begin{cases} 9x + 5y - 2z = & 5, \\ 24x - 2y - 13z = & 67. \end{cases}$$

   (a) Calcula un vector posició i un vector director de cada una. (4 punts)

   (b) Calcula l'equació vectorial de cada una. (2 punts)

   (c) Calcula el rang de la matriu formada pels dos vectors directors i el vector diferència, o vector resta, dels dos vectors posició obtinguts. (2 punts)

   (d) De l'anterior rang, dedueix la posició relativa d'ambdues rectes. (2 punts)

4. Tenim tres urnes, la primera conté 2 bolles blaves; la segona, 1 bolla blava i 1 de vermella; la tercera, 2 bolles vermelles. Fem l'experiment aleatori

   "Triam una urna a l'atzar i extraiem una bolla"

   Suposa que totes les urnes tenen la mateixa probabilitat de ser escollides.

   (a) Calcula la probabilitat del succés R = "bolla extreta vermella" (5 punts).

   (b) Si la bolla extreta resulta que és vermella, quina és la probabilitat que l'urna escollida hagi estat la tercera? (5 punts).

Model 3

OPCIÓ B

1. Donades les matrius A i B,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

   (a) calcula $A \cdot B$ i $(A \cdot B)^{t}$, on la "t" indica matriu transposada. (4 punts)

   (b) és possible calcular B^2? Si ho és, calcula-la. (1 punt)

   (c) per als diferents valors de x, calcula el rang de la matriu A. (5 punts)

2. En un aquari, l'estudi de l'evolució de la població de peixos s'ha modelat segons la funció $t \to P(t)$,

$$P(t) = \sqrt{t+1} - \sqrt{t},$$

   on la variable t, que és un nombre real major o igual que zero, mesura el nombre d'anys transcorreguts des de l'1 de gener de l'any 2000 i $P(t)$ indica nombre d'individus, en milers, en l'instant de temps t. Segons el model, calcula:

   (a) La població que hi havia l'1 de gener de l'any 2000 i la població que hi haurà a la fi de l'any 2020. (1 punt)

   (b) La mida de la població (en nombre d'individus) a llarg termini. (3 punts)

   (c) L'any en el qual s'arriba a la població mínima i quants individus hi haurà. (4 punts)

   (d) Fes un esbós de la gràfica de l'evolució poblacional $t \to P(t)$. (2 punts)

3. Donats els plans

   (I) $3x - ay + 2z - (a-1) = 0$, **(II)** $2x - 5y + 3z - 1 = 0$, **(III)** $x + 3y - (a-1)z = 0$,

   (a) Demostra que, per a qualsevol valor del paràmetre a, no n'hi ha cap parell que siguin paral·lels. (4 punts)

   (b) Estudia la seva posició relativa, segons els diferents valors del paràmetre a. (6 punts)

4. El pes d'un grup de persones segueix una distribució normal de mitjana 54,3 kg i desviació típica de 6,5 kg.

   (a) Quin és el percentatge de persones amb pes superior a 57 kg? (3 punts)

   (b) Quin percentatge de persones pesen entre 50 i 57 kg? (4 punts)

   (c) Si s'escull una persona a l'atzar que està dins del 70% de les persones que menys pesen, com a màxim, quants quilos hauria de pesar? (3 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0,1)$

Model 3. Criteris de correcció

Heu de corregir quatre qüestions en total. Recordau que l'alumne les haurà escollit d'entre les dues opcions, A i B, proposades.

Si l'alumne presenta més de quatre qüestions, corregiu-ne les quatre primeres.

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, cadascuna té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic).

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Les puntuacions tant dels apartats com dels subapartats són independents. Si l'alumne s'ha equivocat en qualque apartat o subapartat però fa bé els altres (segons les "seves" dades), donau-li la puntuació adient. En aquest cas, s'ha de refer el problema, ja que s'han de posar les dades "equivocades" de l'alumne per resoldre els altres apartats o subapartats en què no s'ha equivocat. En canvi, si s'equivoca en dos o més apartats o subapartats, donau 0 punts.

OPCIÓ A

1. (a) Càlcul del $\det(M) = -a - a^2$ $= 0{,}5$ punts
   Solució de l'equació $-a - a^2 = 0$, $a = -1, 0$ $= 0{,}5$ punts
   (total 1 punt)

   (b) Calcula la matriu inversa de M: $= 3$ punts
   (total 3 punts)

   (c) Càlcul de M^{-1} $= 2$ punts
   Càlcul de la solució X $= 1$ punt
   (total 3 punts)

   (d) Càlcul de la solució X $= 3$ punts
   (total 3 punts)

2. (a) Càlcul de cada element demanat: 0,4 punts $0{,}4 \times 5 = 2$ punts
   (total 2 punts)

   (b) Esbós de la gràfica: $= 1$ punt
   (total 1 punt)

   (c) Càlcul de la constant A $= 1{,}5$ punts
   Càlcul de la constant B $= 1{,}5$ punts
   (total 3 punts)

(d) Expressió correcta de l'àrea demanada en termes d'una integral = 1 punt
Separar la integral en dues (fraccions simples) = 1 punt
Càlculs intermedis correctes $-\frac{1}{3}\ln 5$ = 1 punt
Valor de l'àrea com un nombre positiu $\frac{1}{3}\ln 5$ = 1 punt
(total 4 punts)

3. (a) $vd_{(\mathrm{I})} = (-74, -37, -111) = (2, 1, 3)$, $P_{(\mathrm{I})} = (5, -3, 4)$,
$vd_{(\mathrm{II})} = (-69, 69, -138) = (3, -3, 6)$, $P_{(\mathrm{II})} = (5, -6, 5)$ 1×4 = 4 punts
(total 4 punts)

(b)

$$\textbf{(I)} \begin{cases} x &= 5 + 2\lambda, \\ y &= -3 + \lambda, \\ z &= 4 + 3\lambda, \end{cases} \qquad \textbf{(II)} \begin{cases} x &= 5 + 3\mu, \\ y &= -6 - 3\mu, \\ z &= 5 + 6\mu. \end{cases}$$

1×2 = 2 punts
(total 2 punts)

(c) $P_{(\mathrm{II})} - P_{(\mathrm{I})} = (5, -3, 4) - (5, -6, 5) = (0, 3, -1)$
$\mathrm{rang}(vd_{(\mathrm{I})}, vd_{(\mathrm{II})}, P_{(\mathrm{I})}P_{(\mathrm{II})})=\mathrm{rang}((2, 3, 1), (5, -3, 4), (0, 3, -1))=2$ (total 2 punts)

(d) Les rectes es tallen (total 2 punts)

4. (a)
- Resposta amb diagrama en arbre:
  Diagrama en arbre correcte = 2 punts
  Plantejament correcte de $P(\text{Vermella}) = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1$ = 2 punts
  Càlcul correcte de $P(\text{Vermella}) = \frac{1}{2}$ = 1 punt
- O bé resposta amb teorema de la probabilitat total:
  Plantejament correcte del teorema de la prob. total = 2 punts
  Plantejament correcte de $P(\text{Vermella}) = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1$ = 2 punts
  Càlcul correcte de $P(\text{Vermella}) = \frac{1}{2}$ = 1 punt

(total 5 punts)

(b)
- Resposta amb diagrama en arbre:
  Expressió correcta $P(3^{\text{a}}\text{Urna}/\text{V}) = \frac{P(3^{\text{a}}\text{Urna} \cap \text{V})}{P(\text{V})}$ = 3 punts
  Càlcul correcte de la probabilitat, $\frac{P(3^{\text{a}}\text{Urna} \cap \text{V})}{P(\text{V})} = \frac{1}{6}$ = 2 punts
- O bé resposta amb teorema de Bayes:
  Usa el teor. de Bayes $P(3^{\text{a}}\text{Urna}/\text{V}) = \frac{P(3^{\text{a}}\text{Urna}) \times P(\text{V}/3^{\text{a}}\text{Urna})}{P(\text{V})}$ = 3 punts
  Càlcul correcte de $\frac{P(3^{\text{a}}\text{Urna}) \times P(\text{V}/3^{\text{a}}\text{Urna})}{P(\text{V})} = \frac{1}{6}$ = 2 punts

(total 5 punts)

Model 3

OPCIÓ B

1. (a)	Càlcul correcte de AB	$= 3$ punts
	Càlcul correcte de $(A \cdot B)^{\mathrm{t}}$	$= 1$ punt
		(total 4 punts)
(b)	Si justifica que no és possible calcular B^2	$= 1$ punt
		(total 1 punt)
(c)	Si prova que $\mathrm{rang}(A) \leq 2$ ($\det(A)=0$)	$= 1$ punt
	Si prova que per a $x \neq 4 \Rightarrow \mathrm{rang}(A) = 2$	$= 2$ punts
	Si prova que per a $x = 4 \Rightarrow \mathrm{rang}(A) = 1$	$= 2$ punts
		(total 5 punts)
2. (a)	Càlcul correcte de $P(0) = 10^3$ individus	=0,5 punts
	Càlcul correcte de $P(20) = \sqrt{21} - \sqrt{20} \sim 110$ individus	=0,5 punts
		(total 1 punt)
(b)	Plantejament del càlcul del límit $\lim_{t\to+\infty} P(t)$	=1 punt
	Eliminar la indeterminació $\infty - \infty$ del càlcul del límit $\lim_{t\to+\infty} P(t)$	=2 punts
		(total 3 punts)
(c)	Provar que $P'(t) = 0$ no té solució	$= 2$ punts
	Provar que $P'(t) < 0$, per a tot $t > 0$, i. e. $\nexists$ mínim poblac.	$= 2$ punts
		(total 4 punts)
(d)	Fes un esbós de la gràfica de l'evolució poblacional $t \to P(t)$:	$= 2$ punts
		(total 2 punts)
3. (a)	Càlcul del vector associat a cada un dels plans	$= 2$ punts
	Prova que no hi ha cap parell de vect. ass. proporcionals	$= 2$ punts
		(total 4 punts)
(b)	Es prova que si $a \neq 2, 5$, es tallen en un punt	$= 2$ punts
	Es prova que si $a = 2$, són no coincidents i es tallen en una recta	$= 2$ punts
	Es prova que si $a = 5$, es tallen dos a dos	$= 2$ punts
		(total 6 punts)
4. (a)	Planteja correctament el problema, $P(X > 57)$	$= 0{,}5$ punts
	Tipifica correctament la distribució normal, $P(Z > 0,4615)$	$= 0{,}5$ punts
	Resol correctament la probabilitat, $P(Z > 0,4615) = 1 - P(Z \leq 0,4615)$	$= 1$ punt
	Calcula correctament la probabilitat, $P(X > 57) = 0,3288$	$= 0{,}5$ punts
	Calcula correctament el percentatge, $32,88\%$	$= 0{,}5$ punts
		(total 3 punts)

(b) Planteja correctament el problema, $P(50 < X < 57)$ $= 1$ punt

Tipifica correctament la distribució normal, $P(-0,6154 < Z < 0,4615)$ $= 0{,}5$ punts

Resol correctament la probabilitat, $P(Z > 0,4615) = 1 - P(Z \leq 0,4615)$ $= 1$ punt

Calcula correctament la probabilitat, $P(50 < X < 57) = 0,4063$ $= 1$ punt

Calcula correctament el percentatge, $40,63\%$ $= 0{,}5$ punts

(total 4 punts)

(c) Calcula el punt corresponent al 70% tipificat, $Z = 0,525$ =2 punts

Calcula $X = 57,41$ kg $= 1$ punt

(total 3 punts)

Model 3

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades.

Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

1. Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{pmatrix},$$

   (a) Estudia el rang de la matriu A segons els valors de a. (6 punts)

   (b) Determina per a quins valors de a la matriu A és invertible. (1 punt)

   (c) Per al valor de $a = -1$ calcula la solució, X, de l'equació matricial

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(3 punts)}$$

2. Sigui la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcula A^{t}, A^2 i A^{-1}, on A^{t} és la matriu transposada i A^{-1} la inversa. (3 punts)

   (b) Sigui I la matriu identitat. Resol X de l'equació

$$A^2 - 2AX + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}. \qquad \text{(3 punts)}$$

   (c) Calcula totes les matrius B per a les quals es té que

$$A \cdot B = B \cdot A^{\mathrm{t}} \qquad \text{(4 punts)}$$

3. Considera la funció
$$f(x) = \frac{1}{x^4}.$$
   (a) Representa-la gràficament. (7 punts)
   (b) Comprova que $f(2) = f(-2)$. (1 punt)
   (c) Comprova que no existeix $c \in [-2, 2]$ tal que $f'(c) = 0$. (1 punt)
   (d) Hi ha una contradicció amb la conclusió del teorema de Rolle? (1 punt)

4. Donada la funció
$$f(x) = \frac{-x}{4 - x^2}.$$
   (a) Calcula una primitiva de $f(x)$. (5 punts)
   (b) Calcula l'àrea delimitada per la gràfica de $f(x)$, les rectes $x = \sqrt{5}$ i $x = \sqrt{6}$, i l'eix X. (5 punts)

5. Considera els punts,
$$A = (5, a, 7), \quad B = (3, -1, 7), \quad C = (6, 5, 4).$$
   (a) Determina el valor del paràmetre a per al qual els punts A, B i C formen un triangle rectangle, amb l'angle recte al punt B. (3 punts)
   (b) Per al valor de $a = -2$, calcula l'àrea del triangle de vèrtexs A, B i C. (3 punts)
   (c) Per al valor de $a = 5$, calcula l'angle format pels vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$. (4 punts)

6. Donades les rectes
$$r : \frac{x - m}{-1} = \frac{y + 10}{4} = \frac{z + 3}{1}, \qquad s : \begin{cases} x = 1, \\ y = 6 + 4\lambda, \\ z = -1 + 2\lambda. \end{cases}$$
   (a) Calcula el valor de m per tal que es tallin en un punt, (7 punts)
   (b) Calcula el punt de tall. (3 punts)

7. Es disposa de dues urnes: U_1 i U_2.
A U_1 hi ha: 4 bolles vermelles i 5 bolles negres.
A U_2 hi ha: 6 bolles vermelles i 3 bolles negres.
A l'atzar es treu una bolla de U_1 i s'introdueix a U_2, a continuació s'extreu a l'atzar una bolla de U_2. Calcula la probabilitat que:
   (a) surti una bolla vermella de U_2 (3 punts)
   (b) la bolla extreta de U_1 sigui negra, sabent que la bolla que ha sortit de U_2 també ha estat negra. (3 punts)
   (c) surti almenys una bolla vermella. (4 punts)

8. Una companyia aèria ha observat que els pesos de les maletes d'un determinat trajecte segueixen una distribució normal de mitjana 7,5 kg i desviació típica de 0,4 kg. Calcula la probabilitat que, escollida una maleta a l'atzar:

   (a) pesi menys de 7,2 kg però més de 7 kg. (4 punts)

   (b) pesi entre 7,8 kg i 8 kg. (3 punts)

   (c) Si en un trajecte hi ha 90 maletes, quantes maletes és d'esperar que pesin almenys 8,1 kg? (3 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0,1)$

Model 3. Criteris de correcció

Heu de corregir quatre qüestions en total d'entre les vuit proposades.

Si l'alumne presenta més de quatre qüestions, corregiu-ne les quatre primeres.

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic).

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Les puntuacions tant dels apartats com dels subapartats són independents. Si l'alumne s'ha equivocat en qualque apartat o subapartat però fa bé els altres (segons les "seves" dades), donau-li la puntuació adient. En aquest cas, s'ha de refer el problema, ja que s'han de posar les dades "equivocades" de l'alumne per resoldre els altres apartats o subapartats en què no s'ha equivocat. En canvi, si s'equivoca en dos o més apartats o subapartats, donau 0 punts.

---

1. (a) Càlcul correcte del determinant de A: $= 1$ punt
   Càlcul correcte de les arrels del determinant, $a = 0, \pm 1$: $= 1$ punt
   Discussió correcta del rang de A, 1 punt per cada cas, 1×4 $= 4$ punts
   (total 6 punts)
   (b) Si contesta que $a \neq 0, \pm 1$, aleshores A invertible (total 1 punt)
   (c) Respondre que és SCI. $= 1$ punt
   Solució correcta del sistema $= 2$ punts
   (total 3 punts)

2. (a) Càlcul correcte de cada matriu $A^{\rm t}$, A^2 i A^{-1}, 1 punt per cada cas, 1×3(total 3 punts)
   (b) Solució correcta de X. (total 3 punts)
   Si hi ha 1 element de X equivocat: 2 punts
   Si hi ha 2 o més elements de X equivocats: 0 punts
   (c) Plantejament correcte del sistema d'equacions lineals $= 2$ punts
   Calcula la matriu B correctament $= 2$ punts
   Si hi ha 1 element de B equivocat: 1 punt
   Si hi ha 2 o més elements de B equivocats: 0 punts (total 4 punts)

3. (a) Domini correcte $= 1$ punt
$f'(x)$ correcte $= 1$ punt
Argumentar que $\nexists$ extrems relatius $= 1$ punt
Per a cada interval de creix./decreix., 0,5 punts cada un, $0{,}5\times 2$ $= 1$ punt
Per cada asímptota horitzontal correcta, 1 punt, 1×2 $= 2$ punts
Per l'asímptota $x = 0^{\pm}$ correcta $= 1$ punt
(total 7 punts)
(b) Càlcul correcte de $f(2) = f(-2)$ (total 1 punt)
(c) Si justifica que $f'(x) \neq 0$ (total 1 punt)
(d) Si justifica que no està sota les hipòtesis del teorema de Rolle (total 1 punt)

4. (a) Si resol la integral immediata (total 5 punts)
Si integra racional, descomposició en fraccions simples: 1 punt
Calcula els numeradors de les fraccions simples: 2 punts
Calcula correctament les dues primitives: 2 punts
(b) Expressa correctament la integral definida $= 1$ punt
Aplica correctament Barrow $= 2$ punts
Càlculs correctes $= 2$ punts
(total 5 punts)

5. (a) Càlcul correcte dels vectors $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BC}$ $= 1$ punt
Imposa la condició de producte escalar zero $= 1$ punt
Càlcul correcte de a $= 1$ punt
(total 3 punts)
(b) Fórmula de l'àrea del triangle correcta $= 1$ punt
Càlcul correcte del producte vectorial $=1$ punt
Càlcul de l'àrea correcta $=1$ punt
(total 3 punts)
(c) Fórmula de l'angle de dos vectors correcta. $= 2$ punts
Càlcul del cosinus de l'angle. $= 1$ punt
Càlcul correcte de l'angle. $= 1$ punt
(total 4 punts)

6.	(a)	Càlcul correcte de m	(total 7 punts)
	(b)	Càlcul correcte del punt de intersecció	(total 3 punts)
7.	(a)	Plantejament correcte	= 1 punt
		Desenvolupament correcte	= 1 punt
		Resultat correcte	= 1 punt
			(total 3 punts)
	(b)	Plantejament correcte	= 1 punt
		Desenvolupament correcte	= 1 punt
		Resultat correcte	= 1 punt
			(total 3 punts)
	(c)	Plantejament correcte	= 2 punts
		Desenvolupament correcte	= 1 punt
		Resultat correcte	= 1 punt
			(total 4 punts)
8.	(a)	Planteja correctament el problema	= 1 punt
		Tipifica correctament la distribució normal	= 1 punt
		Redueix correctament la probabilitat a la taula	= 1 punt
		Càlculs correctes	=1 punt
			(total 4 punts)
	(b)	Planteja correctament el problema	=1 punt
		Tipifica correctament la distribució normal	=1 punt
		Redueix la probabilitat a la taula i els càlculs són correctes	= 1 punt
			(total 3 punts)
	(c)	Planteja correctament el problema	= 1 punt
		Tipifica correctament la distribució normal	= 1 punt
		Redueix la probabilitat a la taula i els càlculs són correctes	= 1 punt
			(total 3 punts)

Model 1

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades.

Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

1. Considera les matrius:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcula'n els determinants: $\det(\mathbf{A})$, $\det(\mathbf{B})$. (2 punts)

   (b) Calcula la matriu producte $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, la matriu transposada $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})^{\mathrm{t}}$. (3 punts)

   (c) Perquè es compleixi la relació $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, quantes files i columnes ha de tenir la matriu $\mathbf{X}$? (2 punts)

   (d) Calcula la matriu $\mathbf{X}$ que satisfà la relació (3 punts)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

2. Una empresa fabrica tres tipus de bombeta: A, B i C. La bombeta tipus A té 10 punts LED, la tipus B té 20 punts LED, i la tipus C té 50 punts LED. El nombre de bombetes de 10 punts LED fabricades diàriament és λ vegades el nombre de bombetes de 50 punts LED. A l'empresa l'interessa saber quantes bombetes de cada tipus pot fabricar diàriament.

   (a) Si $\lambda = 2$, i aquesta empresa usa, diàriament, 30000 punts LED amb els quals fabrica 1300 bombetes:

      (i) planteja el sistema d'equacions lineals d'aquest problema. (3 punts)

      (ii) classifica el sistema d'equacions lineals i, si és possible, determina quantes bombetes de cada tipus es poden fabricar. (4 punts)

   (b) Si $\lambda = 3$, i l'empresa fabrica diàriament 1000 bombetes; classifica el sistema d'equacions lineals i determina el nombre de punts LED necessaris. (2 punts)

   En aquest cas, quantes bombetes de cada tipus es poden fabricar? (1 punt)

3. Considera la funció $f : I\!R \longrightarrow I\!R$ definida per

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax}-1}{2x} & \text{si} \quad x \neq 0, \\ b & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

   (a) Estudia la continuïtat de la funció f als punts $x_0 \neq 0$. (3 punts)

   (b) Calcula la relació que hi ha d'haver entre a i b perquè f sigui una funció contínua al punt $x_0 = 0$. (5 punts)

   (c) Si per als valors de $a = 2$ i $b = 1$, f és una funció derivable al punt $x = 0$, calcula $f'(0)$. (2 punts)

4. El nombre d'individus d'una població en un determinat instant de temps, t, expressat en milions d'individus, ve donat per la funció

$$P(t) = \frac{15 + t^2}{(t+1)^2},$$

on la variable real $t \geq 0$ mesura el nombre d'anys transcorreguts des de l'1 de gener de l'any 2000.

   (a) Calcula la població que hi havia l'1 de gener de l'any 2000. (2 punts)

   (b) Prova que el nombre d'individus de la població assoleix un mínim. Quin any s'assoleix aquest mínim? Quants d'individus hi haurà l'any del mínim? (4 punts)

   (c) Calcula la grandària de la població, això és el nombre d'individus, que hi haurà a llarg termini. (4 punts)

5. Donades les rectes

$$\textbf{(I)} \begin{cases} y &= x + 3, \\ z &= 2x + 2, \end{cases} \qquad \textbf{(II)} \begin{cases} y &= -\frac{1}{2}, \\ x &= 2z + 3, \end{cases}$$

   (a) Calcula l'equació vectorial de cada una de les rectes (I) i (II). (1 punt)

   (b) Si és possible, calcula el pla paral·lel a la recta (II) que conté a la recta (I). (3 punts)

   (c) Calcula el pla perpendicular a la recta (II) que passa pel punt $(-1, 0, 2)$. (3 punts)

   (d) Calcula la recta de direcció perpendicular a les de les rectes (I) i (II) que passa per l'origen. (3 punts)

6. Donats els punts
$$P = (1,0,1), \quad Q = (1,1,0), \quad \text{i} \quad R = (0,1,1).$$

   (a) Comprova que P, Q i R no estan alineats. (2 punts)

   (b) Calcula l'equació vectorial del pla que determinen P, Q i R. (3 punts)

   (c) Calcula l'àrea del triangle que té per vèrtexs P, Q i R. (3 punts)

   (d) Calcula, de forma raonada, la condició que han de complir a, b i c perquè els punts P, Q, R i $S = (a,b,c)$ pertanyin a un mateix pla. (2 punts)

7. En una urna hi ha 12 bolles vermelles, 8 bolles blanques i 5 bolles blaves. Es realitza l'experiment aleatori d'extreure dues bolles, consecutivament i sense devolució a l'urna. Calcula la probabilitat dels següents esdeveniments:

   (a) **A**="les dues bolles són vermelles" (2 punts)

   (b) **B**="les dues bolles són del mateix color" (3 punts)

   (c) **C**="almenys una bolla és vermella" (3 punts)

   (d) **D**="cap de les dues bolles és vermella" (2 punts)

8. L'alçada de les persones d'una classe es distribueix segons una normal de mitjana 160 cm i desviació típica 10 cm. Calcula la probabilitat que, escollida a l'atzar una persona de la classe, la seva alçada:

   (a) sobrepassi els 170 cm. (3 punts)

   (b) sigui menor que 155 cm. (3 punts)

   (c) estigui compresa entre 155 cm i 170 cm (4 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0,1)$

Model 1. Criteris de correcció

Heu de corregir quatre qüestions en total d'entre les vuit proposades.

Si l'alumne presenta més de quatre qüestions, corregiu-ne les quatre primeres.

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic).

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Les puntuacions tant dels apartats com dels subapartats són independents. Si l'alumne s'ha equivocat en qualque apartat o subapartat però fa bé els altres (segons les "seves" dades), donau-li la puntuació adient. En aquest cas, s'ha de refer el problema, ja que s'han de posar les dades "equivocades" de l'alumne per resoldre els altres apartats o subapartats en què no s'ha equivocat. En canvi, si s'equivoca en dos o més apartats o subapartats, donau 0 punts.

---

1. (a) Càlcul correcte de cada determinant: 1 punt — $1+1=2$ punts
   (total 2 punts)

   (b) Càlcul correcte de la matriu producte $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ — $=2$ punts
   Càlcul correcte de la matriu transposada $(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})^{\mathrm{t}}$ — $=1$ punt
   (total 3 punts)

   (c) Nombre correcte de files de la matriu $\mathbf{X}$ — $=1$ punt
   Nombre correcte de columnes de la matriu $\mathbf{X}$ — $=1$ punt
   (total 2 punts)

   (d) Càlcul correcte del $\det(A)$ — $=1$ punt
   Fent operacions amb matrius, càlcul correcte de la matriu $\mathbf{X}$ — $=2$ punts
   (total 3 punts)

2. **(a.i)** Estableix correctament les incògnites: 0,5 per incògn. — $0,5\times 3=$ 1,5 punts
   Planteja correctament el sist. d'equac.: 0,5 per equac. — $0,5\times 3=$ 1,5 punts
   (total 3 punts)

   (a.ii) Càlcul determ. dels coef. + classifica sist. d'eq. sistema CD — $1+1=2$ punts
   Calcula correctament: 1, 2 o 3 incògnites:
   1 incògn. = 0,5; 2 incògn. = 1; 3 incògn. = 2 punts

	(total 4 punts)
(b) Discuteix correctament rang(A) = rang(A') = 2, sistema CI	$= 1$ punt
Determina que fan falta 20000 punts LED	$= 1$ punt
	(total 2 punts)
Resol el sistema CI $(3z, 1000-4z, z)$	$= 0{,}5$ punts
Determina el domini de la solució $0 \le z \le 250$, $z \in \mathbb{N}$	$= 0{,}5$ punts
	(total 1 punt)
3. (a) Càlcul correcte de $f(x_0)$	$= 1$ punt
Càlcul correcte de cada límit lateral: 0,25 punts	$0,25 \times 2 = 0{,}5$ punts
Comprovació que $f(x_0) = \lim_{x\to x_0^{\pm}} f(x)$	$= 0{,}5$ punts
Conclusió que f és contínua als punts $x_0 \neq 0$	$= 1$ punt
	(total 3 punts)
(b) Càlcul correcte de $f(0) = b$	$= 1$ punt
Càlcul correcte de cada límit lateral: 1 punt	$1 \times 2 = 2$ punts
Imposar que $f(0) = \lim_{x\to 0\pm} f(x)$ i obtenir la condició $b = a/2$	$= 2$ punts
	(total 5 punts)
(c) Càlcul correcte de la derivada $f'(0) = \frac{0}{0}$	$= 1$ punt
Càlcul correcte de L'Hôpital, $f'(0) = 1$	$= 1$ punt
	(total 2 punts)
4. (a) Càlcul correcte de $P(0) = 15$	$= 2$ punts
	(total 2 punts)
(b) Càlcul correcte de $P'(t)$	$= 1$ punt
Resol $P'(t) = 0$, any=2015	$= 1$ punt
Estudi dels signes de $P'(t)$: $t = 15$ és mínim	$= 1$ punt
Calcula correctament $P(15) = 937\,500$ habitants	$= 1$ punt
	(total 4 punts)
(c) Si càlcul correcte amb (1r+2n) L'Hôpital	$1,5 \times 2 = 3$ punts
Si usa $\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{t^2}$	$= 3$ punts
Càlcul correcte de la tendència: 1 milió d'hab.	$= 1$ punt
	(total 4 punts)
5. (a) Calcular l'equació vectorial de cada recta: 0,5 punts	$0,5 \times 2 = 1$ punt
	(total 1 punt)

(b)	Càlcul dels vectors posició i directors del pla	= 2 punts
	Càlcul de l'equació	= 1 punt
		(total 3 punts)
(c)	Càlcul del vector associat al pla i equació del pla	=2 punts
	Imposar que passa pel punt $(-1, 0, 2)$ (terme indep. de l'eq.)	= 1 punt
		(total 3 punts)
(d)	Càlcul del vector perpend. als vect. directors	= 2 punts
	Equació correcta de la recta per $(0, 0, 0)$	= 1 punt
		(total 3 punts)

6\.

(a)	Comprova que $\text{rang}(PQ, PR) = 2$, o equivalent	= 2 punts
		(total 2 punts)
(b)	Calcula vector posició	= 1 punt
	Calcula vectors directors: 0,5 cada un	$0,5 \times 2 =$ 1 punt
	Calcula correctament l'equació	= 1 punt
		(total 3 punts)
(c)	Escriu correctament la fórmula o plantejament equivalent	= 1 punt
	Resol correctament l'àrea, $\sqrt{3}/2$	= 2 punts
		(total 3 punts)
(d)	Argumenta correctament	= 1 punt
	Escriu correctament la relació, $a + b + c - 2 = 0$	= 1 punt
		(total 2 punts)

7\.

(a)	Càlcul de la prob. del 1r esdev.	= 0,5 punts
	Càlcul de la prob. del 2n esdev. condicionat al primer	= 1 punt
	Càlcul del producte d'ambdues probabilitats 11/50	= 0,5 punts
		(total 2 punts)
(b)	Càlcul de la probabilitat de cada esdev.: 0,5 punts	$0,5 \times 3 =$ 1,5 punts
	Ús de la fórmula d'esdev. incompatibles (suma)	= 1 punt
	Càlcul correcte de la probabilitat 26/75	= 0,5 punts
		(total 3 punts)
(c)	Fórmula esdev. oposat, per casos o argumentació correcta	= 2 punts
	Càlcul correcte, 37/50	= 1 punt
		(total 3 punts)

(d) Càlcul de la prob. del 1r esdev. = 0,5 punts
Càlcul de la prob. del 2n esdev. condicionat al primer = 1 punt
Càlcul del producte d'ambdues probabilitats 13/50 = 0,5 punts
(total 2 punts)

8. (a) Planteja correctament el problema, $P(X > 170)$ = 1 punt
Tipifica correctament la distribució normal, $P(Z > 1)$ = 1 punt
Calcula correctament la probabilitat, $1 - P(Z \leq 1) = 0,1587$ = 1 punt
(total 3 punts)

(b) Planteja correctament el problema, $P(X < 155)$ = 1 punt
Tipifica correctament la distribució normal, $P(Z < -0,5)$ = 1 punt
Calcula correctament la probabilitat, $1 - P(Z \leq 0,5) = 0,3085$ = 1 punt
(total 3 punts)

(c) Planteja correctament el problema, $P(155 \leq X \leq 170)$ =1 punt
Tipifica correctament la distribució normal, $P(-0,5 \leq Z \leq 1)$ = 1 punt
Resol correctament la probabilitat, $P(Z \leq 1) - 1 + P(Z < 0,5)$ = 1 punt
Calcula correctament la probabilitat, $P(Z \leq 1) - 1 + P(Z < 0,5) = 0,5328$= 1 punt
(total 4 punts)

Prova de batxillerat per a l'accés a la Universitat (PBAU)

Matemàtiques II

Versió en català

Instruccions generals:

- No podeu llegir l'enunciat fins que el professor no us autoritzi.
- No us podeu moure del lloc per demanar dubtes sobre l'examen, sinó que heu de fer-ho des del vostre lloc.
- Durant l'examen no està permès emprar telèfon mòbil (l'haureu de tenir apagat dins la bossa), rellotge ni qualsevol altre dispositiu electrònic.
- Recordau aferrar l'etiqueta identificadora al full de respostes als llocs indicats.
- Recordau que durant l'examen no està permès passar cap tipus de material a una altra persona.
- Si acabau la prova abans que expiri el temps assignat, heu d'aixecar el braç per esperar instruccions.

Model 3

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades.

Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

1. Siguin les matrius:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   i λ un paràmetre real qualsevol.

   (a) Calculau la matriu $\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}$. (2 punts)

   (b) Calculau la matriu $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})^2$. (3 punts)

   (c) Calculau, si existeixen, els valors del paràmetre λ per als quals es satisfà la relació $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})^2 = \mathbf{B}$. (5 punts)

2. Considerau el sistema d'equacions lineals depenent del paràmetre a,

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y &= 4 \\ ay &= -3 \\ ax + 3z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

   (a) Discutiu el sistema segons el paràmetre a. (4 punts)

   (b) Per al valor del paràmetre a per al qual el sistema té solució, resoleu-lo. (6 punts)

3. Considerau la funció $f(x) = e^{3x-2}$.

   (a) Determinau les coordenades del punt en el qual la tangent a la gràfica de la funció $y = f(x)$ té pendent igual a $3/e$. Escriviu l'equació d'aquesta recta tangent. (4 punts)

   (b) Calculau el $\lim_{x\to 2/3} \frac{1-f(x)}{6x-4}$. (2 punts)

   (c) Feu un esbós de la gràfica de la funció $y = f(x)$. (2 punts)

   (d) Calculau l'àrea de la superfície fitada per la gràfica de la funció $y = f(x)$ i les rectes $x = 0$ i $y = 1$. (2 punts)

4. Donada la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+a}{2x-4} & \text{si } x \leq 0, \\ 10x^2 + x + b & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

   (a) Calculau la condició que han de complir els paràmetres a i b perquè la funció $y = f(x)$ sigui contínua. (3 punts)

   (b) Calculau $f'(x)$. (4 punts)

   (c) Trobau la condició i calculau els paràmetres a i b perquè la funció $y = f(x)$ sigui derivable. (3 punts)

5. Del paral·lelogram (quadrilàter els costats oposats del qual són paral·lels) $ABCD$, es coneixen els vèrtexs consecutius $A(1, 0, -1)$, $B(2, 1, 0)$ i $C(4, 3, -2)$.

   (a) Calculau el cosinus de l'angle que formen els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$. (2 punts)

   (b) Calculau les coordenades del punt mitjà, M, del segment AC. (2 punts)

   (c) Calculau les coordenades del vèrtex D. (4 punts)

   (d) Calculau l'àrea del paral·lelogram $ABCD$. (2 punts)

6. Donades les rectes

$$r \equiv \begin{cases} x + y = 3, \\ 2x - z = 1, \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = -\lambda, \\ z = -4 - \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

   (a) Calculau una equació vectorial per a la recta r. (2 punts)

   (b) Calculau la posició relativa de les rectes r i s (3 punts)

   (c) Calculau l'equació general del pla perpendicular a la recta r que passa pel punt $P(2, 0, -1)$. (2 punts)

   (d) Calculau l'equació general del pla paral·lel a la recta r que conté a la recta s. (3 punts)

7. Donats dos esdeveniments A i B, es coneixen les probabilitats següents: $P(A) = 0.7$, $P(\bar{B}) = 0.4$ i $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.58$, on $\bar{A}$ i $\bar{B}$ indiquen els esdeveniments contraris (o complementaris) de A i B, respectivament. Calculau les probabilitats següents:

   (a) $P(\bar{A})$, $P(B)$ i $P(A \cap B)$. Són A i B esdeveniments independents? (4 punts)

   (b) $P(A \cup B)$. (1 punt)

   (c) $P(B \cap \bar{A})$. (3 punts)

   (d) $P(A/B)$ i $P(\bar{A}/B)$. (2 punts)

8. El temps de durada de les actualitzacions d'un cert programa antivirus segueix una distribució estadística normal de mitjana 8.8 mesos amb una desviació típica de 3 mesos.

   (a) Quin percentatge de les actualitzacions supera els 10 mesos? (3 punts)

   (b) Quin percentatge de les actualitzacions s'ha mantingut entre 7 i 10 mesos? (3 punts)

   (c) Per a quin valor del paràmetre c es té que l'interval $(8.8 - c, 8.8 + c)$ és l'interval de temps de durada del 98% de les actualitzacions? (4 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0,1)$

Model 3. Criteris de correcció

Heu de corregir quatre qüestions en total d'entre les vuit proposades.

Si l'alumne presenta més de quatre qüestions, corregiu-ne les quatre primeres.

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic).

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Encara que el resultat final no sigui correcte valorau, segons les penalitzacions corresponents, totes les parts que siguin correctes.

Les puntuacions tant dels apartats com dels subapartats són independents. Per tant, si l'alumne s'ha equivocat en qualque apartat o subapartat però fa bé la resta d'apartats o subapartats (segons les "seves" dades), puntuau la resta d'apartats o subapartats com a correctes. En aquest cas, cal refer els altres apartats o subapartats del problema amb les dades "equivocades" de l'alumne. Si l'alumne s'equivoca en dos o més apartats o subapartats, donau 0 punts.

---

1. (a) Càlcul correcte dels 9 elements de $\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I}$ — 2 punts
   Si té només 1 element equivocat — 1 punt
   Si té 2 elements equivocats — 0 punts
   (total 2 punts)

   (b) Càlcul correcte dels 9 elements de $(\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I})^2$ — 3 punts
   Si té només 1 element equivocat — 2 punts
   Si té només 2 elements equivocats — 1 punt
   Si té 3 elements equivocats — 0 punts
   (total 3 punts)

   (c) Si escriu correctament el S.E.L. — 2 punts
   Si troba les solucions del S.E.L. — 2 punts
   Dona la solució correcta — 1 punts
   (total 5 punts)

2. (a) Càlcul del determinant — 1 punt
   Cas $a \neq 0$, sist. comp. deter. — 1 punt
   Cas $a = 0$, sist. indeter. — 2 punts
   (total 4 punts)

   (b) Càlcul correcte de les 3 solucions — 6 punts
   2 solucions equivocades — 0 punts
   Només 1 solució equivocada — 4 punts
   (total 6 punts)

3.	(a) Derivada	1 punt
	(b) Abscissa	1 punt
	(c) Coordenades del punt correctes	1 punt
	(d) Equació de la recta	1 punt
		(total 4 punts)
	(e) Càlcul indeterminació 0/0	1 punt
	Càlcul del límit	1 punt
		(total 2 punts)
	(f) Esbós de la gràfica exponencial	(total 2 punts)
	(g) Càlcul de la primitiva i Barrow correcte	1 punt
	Resultat final correcte	1 punt
		(total 2 punts)
4.	(a) Troba la condició	1 punt
	Justifica que: f cont. $\Leftrightarrow f$ cont. a $x=0$	2 punts
		(total 3 punts)
	(b) Cada derivada correcta: 2 punts	(total 4 punts)
	(c) Justifica que: f deriv. $\Leftrightarrow f$ deriv. a $x=0$	1 punt
	Troba el valor del paràmetre a	1 punt
	Troba el valor del paràmetre b	1 punt
		(total 3 punts)
5.	(a) Plantejament: 1 punt + solució correcta: 1 punt	(total 2 punts)
	(b) Plantejament: 1 punt + solució correcta: 1 punt	(total 2 punts)
	(c) Plantejament: 1 punt + cada coord. correcta 1 punt ($\times 3$)	(total 4 punts)
	(d) Plantejament: 1 punt + solució correcta: 1 punt	
	2 coordenades incorrectes: 0 punts	
	1 coordenada incorrecta: 0,5 punts	
		(total 2 punts)

6. (a) vector direct. 0,5 punts; vector pos. 0,5 punts; equació de la recta 1 punt
(total 2 punts)

   (b) Plantejament i resultat correcte — 3 punts
   Plantejament correcte i errors al càlcul 2 punts; altrament 0 punts
   (total 3 punts)

   (c) Vector perpendicular al pla — 1 punt
   Equació del pla — 1 punt
   (total 2 punts)

   (d) Plantejament i resultat correcte — 3 punts
   Plantejament correcte i errors al càlcul 1,5 punts; altrament 0 punts
   (total 3 punts)

7. (a) Per cada probabilitat correcta: 1 punt ($\times 3$) — 3 punts
   Independència correcta — 1 punt
   (total 4 punts)

   (b) Càlcul de $P(A \cup B)$ correcte — (total 1 punt)

   (c) Càlcul de $P(B \cap \overline{A})$ correcte — (total 3 punts)

   (d) Per cada probabilitat correcta: 1 punt ($\times 2$) — (total 2 punts)

8. (a) Planteja i tipifica correctament, $P(X \geq 10)$, $P(Z \geq 0,4)$ — 1 punt
   Càlculs correctes — 1 punt
   Percentatge correcte — 1 punt
   (total 3 punts)

   (b) Planteja i tipifica correctament, $P(7 \leq X \leq 10)$, $P(-0,6 \leq Z \leq 0,4)$ — 1 punt
   Càlculs correctes — 1 punt
   Percentatge correcte — 1 punt
   (total 3 punts)

   (c) Planteja correctament — 1 punt
   Tipifica correctament — 1 punt
   Solució correcta — 2 punts
   (total 4 punts)

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Prova de batxillerat per a l'accés a la Universitat (PBAU)

Matemàtiques II

Versió en català

Instruccions generals

1. Emplenau la caràtula amb el número del document d'identitat, nom i cognoms.
2. **ÉS IMPORTANT** que marqueu correctament totes les caselles corresponents al document d'identitat, codi de matèria i opció. La marca ha de quedar com aquesta: ■

   Fixau-vos bé que marcau correctament la fila i la columna corresponents al número que heu de marcar. Un error freqüent és marcar l'1 a la fila 0. Després d'emplenar les caselles del document d'identitat i el codi d'examen, revisau que les heu marcades correctament.

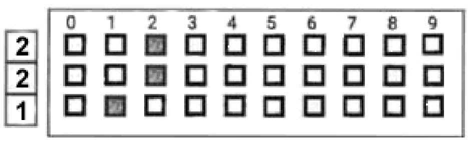
   Instruccions per marcar el document d'identitat al full de respostes

	Document	**Instrucció**
1	DNI / NIE	Heu de marcar la part numèrica del document. Si el document té menys de 8 dígits numèrics, mirau el punt 3 d'aquesta taula.
2	Identificadors de més de 8 dígits numèrics	Heu de marcar els primers 8 dígits numèrics del document començant per l'esquerra. Exemple d'identificador: 800A12B7457 8 0 0 1 2 7 4 5
3	Identificadors de menys de 8 dígits numèrics	Per exemple, si el document té 6 dígits numèrics, heu de marcar 2 zeros començant per l'esquerra i després marcar-ne la part numèrica. Exemple d'identificador: 81A2B745 0 0 8 1 2 7 4 5

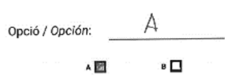
3. Indicau a la pàgina 1 el nom de la matèria i marcau-ne el codi, tal com s'indica a la figura:

   Codi de la matèria:

   221



4. Independentment de les preguntes que contesteu, heu de marcar obligatòriament l'opció A, tal com s'indica a la imatge:



5. Començau a respondre l'examen per la pàgina 2, seguint la numeració i no heu d'escriure fora dels marges superior (per damunt del codi de barres) i inferior (després del peu de pàgina).
6. Si acabau la prova abans que expiri el temps assignat, heu d'aixecar el braç per esperar instruccions.
7. No heu de llevar la grapa del full de respostes.

Model 1

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades.

Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

1. Considerau les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 3\lambda & 6 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calculau el determinant de la matriu A. (1 punt)

   (b) En funció del paràmetre λ, calculau el rang de la matriu A. (3 punts)

   (c) Per al valor de $\lambda = 1$, calculau la matriu inversa de A, A^{-1}. (3 punts)

   (d) Per al valor de $\lambda = 1$, resoleu l'equació matricial $XA = B$. (3 punts)

2. Durant un any, certa empresa ven 21000 vehicles de tres models A, B i C, al preu de 10000, 15000 i 20000 euros, respectivament. El total de les vendes és de 332 milions d'euros. S'ha observat que també s'han venut 21000 vehicles comptant només els del model B i λ vegades els del model A.

   (a) Plantejau un sistema d'equacions amb les condicions del problema, en funció del nombre de vehicles venuts de cada model. (3 punts)

   (b) Calculau el nombre de vehicles venuts de cada model, suposant $\lambda = 3$. (3 punts)

   (c) Determinau si existeix algun valor del paràmetre λ per al qual l'anterior situació no es pugui donar. (4 punts)

3. Donades les funcions $f(x) = x^2 - 4x$ i $g(x) = 4 - 4x$.

   (a) Representau-les gràficament en un mateix sistema de coordenades. (5 punts)

   (b) Calculau els punts de tall d'ambdues gràfiques. (2 punts)

   (c) Calculau l'àrea del recinte limitat per les gràfiques d'ambdues funcions. (3 punts)

4. Sigui la funció $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$.
   (a) Calculau el domini i els punts de tall de la gràfica de la funció amb els eixos. (2 punts)
   (b) Calculau la derivada de la funció i obteniu els intervals de creixement i decreixement. (2 punts)
   (c) Comprovau que $f(-1) = f(1)$ i que $f'(x)$ no és mai zero a l'interval $[-1, 1]$. Contradiu aquest fet el teorema de Rolle? (3 punts)
   (d) Feu un esbós de la gràfica de la funció $y = f(x)$. (3 punts)
5. Sigui a un paràmetre real. Considerau el pla $\pi \equiv 3x - 2y - z = 4$, el punt $P(1, 1, 0)$ i la recta
$$r \equiv \begin{cases} x - y & = 0, \\ x - az & = 1. \end{cases}$$
   En cada cas, si existeix, obteniu el valor del paràmetre a per al qual:
   (a) el punt P pertany a la recta r. (1 punt)
   (b) la recta r i el pla π es tallen en un únic punt. (3 punts)
   (c) la recta r està continguda en el pla π. (3 punts)
   (d) la recta r és perpendicular al pla π. (3 punts)
6. Donats els punts $A(1, 1, 1)$, $B(0, 0, -2)$, $C(2, -1, 0)$, $D(-1, 2, -1)$ i $E(0, 0, 0)$.
   (a) Comprovau que els punts A, B i C determinen un únic pla, π. (2 punts)
   (b) Esbrinau si el triangle de vèrtexs A, B i C és rectangle en el vèrtex A. (3 punts)
   (c) Trobau l'angle que forma la recta que passa pels punts A i D amb el pla π. (3 punts)
   (d) Calculau el volum del tetraedre definit pels vectors $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ i $\vec{AD}$. (2 punts)
7. Una prova diagnòstica d'una malaltia dona resultat negatiu el 5% de les vegades que s'aplica a un individu que la pateix i dona positiu el 10% de les vegades que s'aplica a un individu que no la pateix. Les estadístiques mostren que la dita malaltia afecta 50 de cada 10000 persones. Si una persona escollida a l'atzar se sotmet a la prova diagnòstica, calculau les probabilitats següents:
   (a) Que un individu no pateixi la malaltia. (1 punt)
   (b) Que la prova doni resultat positiu. (3 punts)
   (c) Que la persona no pateixi la malaltia, si el resultat de la prova és negatiu. (3 punts)
   (d) Que el resultat de la prova sigui erroni. (3 punts)

8. Es tenen tres urnes A, B i C. L'urna A conté 4 bolles vermelles i 2 bolles negres. L'urna B conté 3 bolles vermelles i 3 bolles negres. L'urna C conté 6 bolles negres. S'escull una urna a l'atzar i s'extreuen dues bolles de manera consecutiva i sense reemplaçament.

   (a) Calculau la probabilitat que la primera bolla extreta sigui vermella. (3 punts)

   (b) Calculau la probabilitat que la primera bolla extreta sigui vermella i la segona sigui negra. (3 punts)

   (c) Sabent que la primera bolla extreta és vermella, calculau la probabilitat que la segona sigui negra. (4 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0,1)$

Model 1. Criteris de correcció

Heu de corregir quatre qüestions en total d'entre les vuit proposades.

Si l'alumne presenta més de quatre qüestions, corregiu-ne les quatre primeres.

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic).

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Encara que el resultat final no sigui correcte valorau, segons les penalitzacions corresponents, totes les parts que siguin correctes.

Les puntuacions tant dels apartats com dels subapartats són independents. Per tant, si l'alumne s'ha equivocat en qualque apartat o subapartat però fa bé la resta d'apartats o subapartats (segons les "seves" dades), puntuau la resta d'apartats o subapartats com a correctes. En aquest cas, cal refer els altres apartats o subapartats del problema amb les dades "equivocades" de l'alumne. Si l'alumne s'equivoca en dos o més apartats o subapartats, donau 0 punts.

---

1. (a) Càlcul del determinant correcte (total 1 punt)
   (b) 1 punt per a cada rang correcte ($\times$ 3) (total 3 punts)
   (c) Per a $\lambda = 1$, càlcul correcte de la matriu inversa (total 3 punts)
   Si la matriu té 1 element equivocat: 2 punts
   Si la matriu té 2 elements equivocats: 1 punt
   Si la matriu té 3 elements equivocats: 0 punt
   (d) Resposta correcta de X (total 3 punts)
   1 punt per element correcte de X ($\times$ 3)
2. (a) 1 punt per equació correcta ($\times$ 3 equacions) (total 3 punts)
   (b) 1 punt per incògnita correcta ($\times$ 3 incògnites) (total 3 punts)
   (c) Càlcul del det(A) correcte 2 punts
   Per a $\lambda = 2$: Rang(A) $= 2$, Rang(A^*) $= 3$ i S.I. 2 punts
   (total 4 punts)
3. (a) Esbós correcte de la paràbola calculant els elements imprescindibles 3 punts
   Representació gràfica de la recta 2 punts
   (total 5 punts)
   (b) 1 punt per a cada punt de tall ($\times$ 2 punts) (total 2 punts)
   (c) Plantejament: 1 punt. Primitiva: 1 punt. Solució: 1 punt (total 3 punts)

4. (a) Domini 1 punt. Punts de tall: 1 punt (total 2 punts)
   (b) Càlcul de la derivada: 1 punt. Intervals de creix. i decreix.: 1 punt (total 2 punts)
   (c) Comprovació d'hipòtesis t. Rolle 1 punt
   Argumentació de no contradicció 2 punts
   (total 3 punts)
   (d) Esbós correcte de la gràfica calculant els elements imprescindibles (total 3 punts)

5. (a) Justificar que $P \in r$, $\forall a \in \mathbb{R}$ (total 1 punt)
   (b) Solució justificada $a \neq 1$ (total 3 punts)
   (c) Solució justificada que $\nexists\, a \in \mathbb{R}$ t.q. $r \subset \pi$ (total 3 punts)
   (d) Solució justificada que $\nexists\, a \in \mathbb{R}$ t.q. $r \perp \pi$ (total 3 punts)

6. (a) Comprovació que A, B i C no estan alineats (total 2 punts)
   (b) Comprovació correcta que $\overset{\triangle}{ABC}$ no és rectangle a A (total 3 punts)
   (c) Càlcul correcte de l'angle: 0 (total 3 punts)
   (d) Càlcul correcte del volum: 1 (total 2 punts)

7. (a) Càlcul correcte de $P(S)$ (total 1 punt)
   (b) Plantejament correcte de la manera com es pot calcular $P(+)$ 1 punt
   Càlculs correctes 2 punts
   (total 3 punts)
   (c) Plantejament correcte de la manera com es pot calcular $P(S/-)$ 1 punt
   Càlculs correctes 2 punts
   (total 3 punts)
   (d) Plantejament correcte de la manera com es pot calcular $P(\text{resultat erroni})$ 1 punt
   Càlculs correctes 2 punts
   (total 3 punts)

8. (a) Plantejament correcte de la manera com es pot calcular $P(1^{\text{a}}\text{V})$ 1 punt
   Càlculs correctes 2 punts
   (total 3 punts)
   (b) Plantejament correcte de la manera com es pot calcular $P(1^{\text{a}}\text{V} \cap 2^{\text{a}}\text{N})$ 1 punt
   Càlculs correctes 2 punts
   (total 3 punts)
   (c) Plantejament correcte de la manera com es pot calcular $P(2^{\text{a}}\text{N}/1^{\text{a}}\text{V})$ 2 punts
   Càlculs correctes 2 punts
   (total 4 punts)

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades. Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4.

Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic, o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

P1. — Considera la matriu M i el vector $\mathbf{b}$,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ a+1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

respectivament.

(a) [**3 punts**] Indica per a quins valors de a la matriu M és invertible.

(b) [**3 punts**] Calcula, per a tots els valors de a que sigui possible, la inversa de M.

(c) [**4 punts**] Calcula, per al cas $a = 0$, el vector $\mathbf{x}$ tal que $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

P2. — Considera les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

i sigui O la matriu nul·la d'ordre 2×2.

(a) [**4 punts**] Calcula totes les matrius X tals que $AX - X = B$.

(b) [**3 punts**] Troba una matriu Y diferent de O tal que $(A - B)Y = O$.

(c) [**3 punts**] Indica totes les matrius Z que compleixen la igualtat $AZ = O$.

P3. — Considera el pla $\pi : 2x + 3y + z - 6 = 0$.

(a) [**3 punts**] Determina els vèrtexs del triangle que ve determinat per la intersecció del pla amb els eixos de coordenades.

(b) [**3 punts**] Calcula l'àrea del triangle anterior.

(c) [**4 punts**] Sigui A el vèrtex del triangle sobre l'eix d'abscisses (eix OX). Calcula la recta perpendicular al pla que passa per A.

P4. — Siguin a i b dues constants reals no nul·les.
Considerem el pla $\pi : x + ay - 2z = 3$ i la recta

$$r : \begin{cases} x + bz = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

(a) **[4 punts]** Per a quins valors de a i b la recta r és perpendicular al pla π? Per a aquests casos concrets, calcula el punt de tall entre r i π, i calcula o justifica quina és la distància de la recta al pla.

(b) **[3 punts]** Per a quins valors de a i b la recta r és paral·lela al pla π?

(c) **[3 punts]** Existeixen alguns valors de a i b per als quals la recta r està continguda en el pla π?

P5. — La quantitat de tones d'aigua infectada per un bacteri s'espera que segueixi la funció $f(x) = e^{-x} + 0.15x + 1$ sent $x \geq 0$ els dies d'infecció i $f(x)$ les tones d'aigua infectada.

(a) **[4 punts]** Quantes tones d'aigua hi havia inicialment infectades pel bacteri? Cap a quin valor tendeix la quantitat d'aigua infectada? Interpreta els resultats.

(b) **[4 punts]** En quin moment hi ha menys quantitat d'aigua infectada? Quantes tones hi ha en aquell moment?

(c) **[2 punts]** Hi ha algun moment en què l'aigua no estigui infectada? Justifica la resposta.

P6. — **[10 punts]** Representa la regió compresa entre la corba $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, l'eix d'abscisses (eix OX) i les rectes $x = 0$ i $x = 7$. Calcula'n l'àrea.

P7. — Un espai mostral conté dos successos A i B. Sabent que $P(A \cap B) = 0.3$, $P(A/B) = P(B/A)$ i $P(A^c) = 0.4$ (sent A^c el succés complementari), calcula:

(a) **[2 punts]** $P(B/A)$.

(b) **[3 punts]** $P(B)$.

(c) **[3 punts]** $P(A^c \cap B^c)$.

(d) **[2 punts]** Són A i B successos independents?

P8. — El pes dels nadons segueix una distribució normal de mitjana $\mu = 3.1$ kg i desviació típica σ desconeguda. Se sap que només el 30.5% dels nadons pesa més de 3.8 kg. Calcula, arrodonint els resultats a 4 decimals,

(a) **[4 punts]** Quina és la desviació típica?

(b) **[3 punts]** Suposant que $\sigma = 1.3725$, quina és la probabilitat que un nadó pesi menys de 2.7 kg?

(c) **[3 punts]** Suposant que $\sigma = 1.3725$, quina és la probabilitat que un nadó pesi entre 2.7 i 3.5 kg?

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0,1)$.

Criteris de correcció globals

- Heu de corregir quatre qüestions en total d'entre les vuit proposades. Si l'alumne presenta més de quatre qüestions, corregiu-ne les quatre primeres.
- Cada problema té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions màximes que apareixen a cada apartat (si no està indicat, tots els apartats d'una mateixa pregunta tenen la mateixa valoració). Les puntuacions dels apartats són independents: si l'alumne s'ha equivocat en qualque apartat però fa bé els altres (segons les "seves" dades equivocades), donau-li la puntuació adient.
- Es valorarà conjuntament el resultat, la justificació (ja sigui simbòlica o escrita), la claredat i ús del llenguatge matemàtic i no matemàtic, i l'estructura de la resposta. Orientativament, penalitzau:
  - Els errors de càlcul amb un 25%; els errors greus i/o que portin a resultats incoherents o absurds, amb un 50%.
  - En preguntes de justificar, si la justificació és només "intuïtiva" (p. ex. una observació que no respon exhaustivament a allò que s'ha demanat), amb el 30%-50%; en preguntes de justificar, una resposta sense cap justificació s'ha de penalitzar amb el 100%.
  - En qualsevol pregunta, si apareixen raonaments (que no són clars/evidents) sense justificar, amb el 20%-30%.
  - La imprecisió en l'ús del llenguatge matemàtic (p. ex. variables sense introduir/que canvien de significat), o la falta de claredat per absència de llenguatge matemàtic, amb un 20%-30%.
  - L'estructura s'ha de penalitzar en funció de la dificultat per entendre la resposta.
- Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris generals o específics. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Criteris de correcció específics

Només es detallen els apartats en què hi ha diverses preguntes o que es poden desglossar. En apartats on s'omet el criteri de correcció específic, aquest serà simplement "Càlcul i/o justificació correcta".

P1. — Considera la matriu M i el vector $\mathbf{b}$,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ a+1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

respectivament.

(a) **[3 punts]** Indica per a quins valors de a la matriu M és invertible.

Criteris: -1 punt per error de càlcul. -1.5 punt si es malinterpreta la igualtat (i.e. que és invertible si $\det = 0$).

(b) **[3 punts]** Calcula, per a tots els valors de a que sigui possible, la inversa de M.

Criteris: -1 punt per error de càlcul. -1 punt si s'olvida una passa concreta. Només 1 punt si es calcula per a un cas concret.

(c) **[4 punts]** Calcula, per al cas $a = 0$, el vector $\mathbf{x}$ tal que $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Criteris: -1 punt per error de càlcul. No penalitzar si es reutilitza el càlcul incorrecte de l'apartat anterior.

P2. — Considera les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

i sigui O la matriu nul·la d'ordre 2×2.

(a) [**4 punts**] Calcula totes les matrius X tals que $AX - X = B$.

Criteris: 2 punts si s'aïlla bé el sistema, 1 punt si es calcula bé la inversa, i 1 punt si es proporciona la solució final correcta. En cas de resoldre'l amb X com a matriu de 4 variables, -1 punt per error de càlcul.

(b) [**3 punts**] Troba una matriu Y diferent de O tal que $(A - B)Y = O$.

Criteris: -1 punt per error de càlcul (màxim 2 errors). Si es deixa el cas general està bé. Si es troba un únic cas particular, independentment del mètode, és vàlid.

(c) [**3 punts**] Indica totes les matrius Z que compleixen la igualtat $AZ = O$.

Criteris: -1 punt per error de càlcul.

P3. — Considera el pla $\pi : 2x + 3y + z - 6 = 0$.

(a) [**3 punts**] Determina els vèrtexs del triangle que ve determinat per la intersecció del pla amb els eixos de coordenades.

Criteris: 1 punt per cada vèrtex correctament calculat.

(b) [**3 punts**] Calcula l'àrea del triangle anterior.

Criteris: 1 punt pel càlcul dels vectors, 2 punts pel càlcul de l'àrea. -1 punt per error de càlcul. No penalitzar si s'ometen unitats o no es simplifica el resultat.

(c) [**4 punts**] Sigui A el vèrtex del triangle sobre l'eix d'abscisses (eix OX). Calcula la recta perpendicular al pla que passa per A.

Criteris: 2 punts per calcular bé el vector director de la recta, 2 punts per escriure una equació vàlida. -1 punt per error de càlcul.

P4. — Siguin a i b dues constants reals no nul·les.
Considerem el pla $\pi : x + ay - 2z = 3$ i la recta

$$r : \begin{cases} x + bz = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

(a) [**4 punts**] Per a quins valors de a i b la recta r és perpendicular al pla π? Per a aquests casos concrets, calcula el punt de tall entre r i π, i calcula o justifica quina és la distància de la recta al pla.

Criteris: Si es determina que la única solució, $a = 0$, no està considerada per l'enunciat, 4 pt. Alternativament, 1 punt pel vector director de r, 1 punt pel punt d'intersecció de la recta amb el pla, 1 punt per una expressió de la recta, 1 punt per justificació de la distància igual a zero. Penalitzar -1 punt per error de càlcul.

(b) [**3 punts**] Per a quins valors de a i b la recta r és paral·lela al pla π?

Criteris: 1.5 punts per plantejar ($\vec{d_r} \cdot \vec{n} = 0$ i no existeix punt en comú). 1.5 punts per càlcul correcte (0.75 punts cada variable). -1 punt per error de càlcul.

(c) [**3 punts**] Existeixen alguns valors de a i b per als quals la recta r està continguda en el pla π?

Criteris: 1.5 punts per plantejar ($\vec{d_r} \cdot \vec{n} = 0$ i existeix algun punt en comú). 1.5 punt per càlcul correcte. -1 punt per error de càlcul que no s'hagn penalitzat a l'apartat anterior.

P5. — La quantitat de tones d'aigua infectada per un bacteri s'espera que segueixi la funció $f(x) = e^{-x} + 0.15x + 1$ sent $x \geq 0$ els dies d'infecció i $f(x)$ les tones d'aigua infectada.

(a) [**4 punts**] Quantes tones d'aigua hi havia inicialment infectades pel bacteri? Cap a quin valor tendeix la quantitat d'aigua infectada? Interpreta els resultats.

Criteris: 1 punt pel càlcul de $f(0)$, 2 punts pel càlcul del límit i 1 punt per la interpretació.

(b) [**4 punts**] En quin moment hi ha menys quantitat d'aigua infectada? Quantes tones hi ha en aquell moment?

Criteris: 2 punts per cada pregunta (a: 1 punt plantejament, 1 punt resolució; b: 1 punt resolució, 1 punt justificació). -1 punt per càlculs mal fets.

(c) [**2 punts**] Hi ha algun moment en què l'aigua no estigui infectada? Justifica la resposta.

Criteris: -2 punts si no està justificat.

P6. — [**10 punts**] Representa la regió compresa entre la corba $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, l'eix d'abscisses (eix OX) i les rectes $x = 0$ i $x = 7$. Calcula'n l'àrea.
Criteris: 5 punts per la representació, dividits en: 1 pt domini, 1 pt asímptotes, 2 pt monotonia, 1 pt gràfic i eixos. 5 punts pel càlcul de l'àrea.

P7. — Un espai mostral conté dos successos A i B. Sabent que $P(A \cap B) = 0.3$, $P(A/B) = P(B/A)$ i $P(A^c) = 0.4$ (sent A^c el succés complementari), calcula:

(a) **[2 punts]** $P(B/A)$.

(b) **[3 punts]** $P(B)$.

(c) **[3 punts]** $P(A^c \cap B^c)$.

(d) **[2 punts]** Són A i B successos independents?

Criteris: en cada apartat, -1 punt si l'error és de càlcul. Si el resultat no té sentit, s'elimina tota la puntuació. Es permet qualsevol resolució sempre que estigui justificada.

P8. — El pes dels nadons segueix una distribució normal de mitjana $\mu = 3.1$ kg i desviació típica σ desconeguda. Se sap que només el 30.5% dels nadons pesa més de 3.8 kg. Calcula, arrodonint els resultats a 4 decimals,

(a) **[4 punts]** Quina és la desviació típica?

Criteris: 1 punt plantejar bé el problema, 1 punt tipificar correctament, 2 punts solució correcta.

(b) **[3 punts]** Suposant que $\sigma = 1.3725$, quina és la probabilitat que un nadó pesi menys de 2.7 kg?

Criteris: 1 punt plantejar bé el problema, 1 punt tipificar correctament, 1 punt resultat correcte.

(c) **[3 punts]** Suposant que $\sigma = 1.3725$, quina és la probabilitat que un nadó pesi entre 2.7 i 3.5 kg?

Criteris: 1 punt plantejar bé el problema, 1 punt tipificar correctament, 1 punt resultat correcte.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0,1)$.

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades. Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4.

Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic, o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

P1. — Considera la matriu M i el vector $\mathbf{b}$,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ a+1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

respectivament.

(a) **[3 punts]** Indica per a quins valors de a la matriu M és invertible.

Solució.

$$\det(M) = a(a+1) + 1 - 2 - (a+1) = a^2 - 2 = 0 \iff a = \pm\sqrt{2}.$$

Aleshores, la matriu és invertible per a $a \in \mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, +\sqrt{2}\}$.

(b) **[3 punts]** Calcula, per a tots els valors de a que sigui possible, la inversa de M.

Solució.

$$M^{-1} = \frac{1}{a^2-2} \begin{pmatrix} -1 & -1+a & 1 \\ -a & 2-a & -2+a^2+a \\ a+1 & -1 & -a-1 \end{pmatrix}.$$

(c) **[4 punts]** Calcula, per al cas $a = 0$, el vector $\mathbf{x}$ tal que $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Solució. $M\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff \mathbf{x} = M^{-1}\mathbf{b}$. Per $a = 0$ tenim que

$$M^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Notem que també es pot veure directament substituint $a = 0$ a M, ja que la darrera columna de M és el vector que es demana.

P2. — Considera les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

i sigui O la matriu nul·la d'ordre 2×2.

(a) **[4 punts]** Calcula totes les matrius X tals que $AX - X = B$.

Solució. $AX - X = (A - I)X = B$. Per tant,

$$X = (A - I)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(b) **[3 punts]** Troba una matriu Y diferent de O tal que $(A - B)Y = O$.

Solució. Sigui

$$Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

tenim que Y ha de complir que

$$\begin{pmatrix} a - 2c & b - 2d \\ -a + 2c & -b + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, $a = 2c$ i $b = 2d$. Llavors qualsevol matriu de la forma

$$\begin{pmatrix} 2c & 2d \\ c & d \end{pmatrix}$$

és vàlida sempre que c i d no s'anul.lin a la vegada.

(c) **[3 punts]** Indica totes les matrius Z que compleixen la igualtat $AZ = O$.

Solució. A és una matriu invertible, ja que $\det(A) = 9 \neq 0$. Aleshores, $AZ = O \iff A^{-1}AZ = A^{-1}O \iff Z = A^{-1}O = O$. L'única matriu és $Z = O$.

P3. — Considera el pla $\pi : 2x + 3y + z - 6 = 0$.

(a) **[3 punts]** Determina els vèrtexs del triangle que ve determinat per la intersecció del pla amb els eixos de coordenades.

Solució. Sigui A el tall amb l'eix OX, llavors $A = (a, 0, 0)$.
Sigui B el tall amb l'eix OY, llavors $B = (0, b, 0)$.
Sigui C el tall amb l'eix OZ, llavors $C = (0, 0, c)$.
Imposem que aquests punts pertanyen al pla π:

A compleix $2a + 0 + 0 - 6 = 0 \to a = 3 \to A = (3, 0, 0)$.
B compleix $0 + 3b + 0 - 6 = 0 \to b = 2 \to B = (0, 2, 0)$.
C compleix $0 + 0 + c - 6 = 0 \to c = 6 \to C = (0, 0, 6)$.

(b) **[3 punts]** Calcula l'àrea del triangle anterior.

Solució. Tenim que $\vec{AB} = (-3, 2, 0)$ i $\vec{AC} = (-3, 0, 6)$.
Aleshores, l'àrea del triangle ve donada per

$$A_{triangle} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} \right\|}{2} = \frac{\sqrt{12^2 + 18^2 + 6^2}}{2} = \frac{\sqrt{504}}{2} = \frac{6\sqrt{14}}{2} = 3\sqrt{14}u^2.$$

(c) **[4 punts]** Sigui A el vèrtex del triangle sobre l'eix d'abscisses (eix OX). Calcula la recta perpendicular al pla que passa per A.

Solució. El vector director de la recta és $d_r = (2, 3, 1)$ i ha de passar pel punt $A = (3, 0, 0)$. Aleshores, la recta és

$$r : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda, \\ y = 3\lambda, \\ z = \lambda. \end{cases}$$

P4. — Siguin a i b dues constants reals no nul·les.
Considerem el pla $\pi : x + ay - 2z = 3$ i la recta

$$r : \begin{cases} x + bz = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

(a) **[4 punts]** Per a quins valors de a i b la recta r és perpendicular al pla π? Per a aquests casos concrets, calcula el punt de tall entre r i π, i calcula o justifica quina és la distància de la recta al pla.

Solució. Punts de r: $A = (0, 0, 1/b)$ i $B = (1, 0, 0)$, $\vec{d_r} = \vec{AB} = (1, 0, -1/b)$.
Vector normal al pla: $\vec{n} = (1, a, -2)$. La recta és perpendicular al pla si $\vec{d_r} = \lambda(1, a, -2)$. I.e $(1, 0, -1/b) = \lambda(1, a, -2)$. Aleshores, s'ha de complir que

$$\begin{aligned} &\lambda = 1, \\ &a\lambda = 0 \to a = 0, \\ &-1/b = -2\lambda \to b = 1/2. \end{aligned}$$

Ara bé, com que a és no nul, no es dóna aquest cas. L'exercici ja estaria acabat. Si algú el calcula hauria de ser P és tal que satisfà el sistema. La distància és 0 ja que són secants.

$$\begin{aligned} &x - 2z = 3 \to x = 2z + 3, \\ &x + \frac{1}{2}z = 1 \to 2z + 3 + \tfrac{1}{2}z = 1 \to \tfrac{5}{2}z = -2 \to z = \frac{-4}{5}, \\ &y = 0. \end{aligned}$$

Per tant, $P = (7/5, 0, -4/5)$.

(b) **[3 punts]** Per a quins valors de a i b la recta r és paral·lela al pla π?

Solució. Volem que $\vec{d_r} \cdot \vec{n} = 0$. Per tant,

$$\vec{d_r} \cdot \vec{n} = 1 + 0 + \frac{2}{b} = 0 \leftrightarrow b = -2.$$

Per tant, a pot ser qualsevol valor real, però $b = -2$.

(c) **[3 punts]** Existeixen alguns valors de a i b per als quals la recta r està continguda en el pla π?

Solució. La recta estarà continguda en el pla si $\vec{d_r} \cdot \vec{n} = 0$ i, a més, un punt qualsevol de r pertany a π. Ara bé, $B \notin \pi$, ja que $1 \neq 3$. Aleshores, NO existeixen valors de a i b perquè la recta estigui continguda en π.

P5. — La quantitat de tones d'aigua infectada per un bacteri s'espera que segueixi la funció $f(x) = e^{-x} + 0.15x + 1$ sent $x \geq 0$ els dies d'infecció i $f(x)$ les tones d'aigua infectada.

(a) **[4 punts]** Quantes tones d'aigua hi havia inicialment infectades pel bacteri? Cap a quin valor tendeix la quantitat d'aigua infectada? Interpreta els resultats.

Solució.

- Inicialment hi ha $f(0) = 2$ tones d'aigua.
- Tenim que $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} + 0.15x + 1 = +\infty$. Llavors tendeix que tota l'aigua estigui infectada.

(b) **[4 punts]** En quin moment hi ha menys quantitat d'aigua infectada? Quantes tones hi ha en aquell moment?

Solució.

- Cercam el mínim de la funció: $f'(x) = -e^{-x}+0.15 = 0$. És a dir, a $x = -\ln(0.15) \approx 1.897119984885881$ dies.
- En aquest moment hi ha un total de $f(-\ln(0.15)) = e^{\ln(0.15)} - 0.15\ln(0.15)+1 \approx 1.434567997732882$ tones.

(c) **[2 punts]** Hi ha algun moment en què l'aigua no estigui infectada? Justifica la resposta.

Solució. No perquè el mínim s'assoleix quan hi ha 1.434567997732882 tones. També es pot fer calculant x perquè $f(x) = 0$ i veure que no té solució.

P6. — [10 punts] Representa la regió compresa entre la corba $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, l'eix d'abscisses (eix OX) i les rectes $x = 0$ i $x = 7$. Calcula'n l'àrea.

Solució. La funció $f(x) = 0$ només a $x = 0$. A més, és una funció positiva per a $x \in (0, +\infty]$. La seva representació es troba a la figura 1.

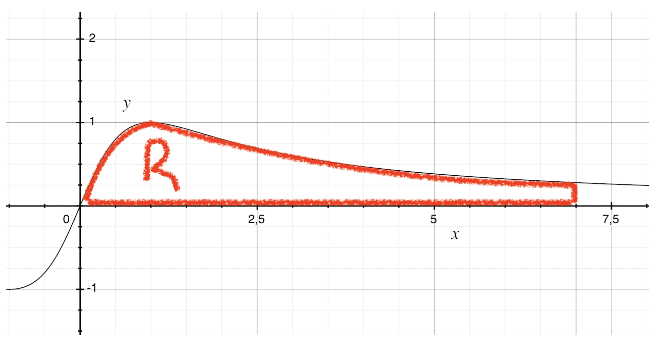


Figura 1: Regió compresa entre la corba $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, l'eix OX i les rectes $x = 0$ i $x = 7$

Aleshores, l'àrea que volem calular és

$$A = \int_0^7 \frac{2x}{x^2+1} = \left[\ln|x^2+1|\right]_0^7 = \ln(50) - \ln(1) = \ln(50) \approx 3.912023005428146u^2$$

P7. — Un espai mostral conté dos successos A i B. Sabent que $P(A\cap B) = 0.3$, $P(A/B) = P(B/A)$ i $P(A^c) = 0.4$ (sent A^c el succés complementari), calcula:

(a) **[2 punts]** $P(B/A)$.

(b) **[3 punts]** $P(B)$.

(c) **[3 punts]** $P(A^c \cap B^c)$.

(d) **[2 punts]** Són A i B successos independents?

Solució.

(a) $P(B/A) = 0.5$,

(b) $P(B) = 0.6$,

(c) $P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (0.6 + 0.6 - 0.3) = 0.1$,

(d) No són independents, perquè $P(B/A) \neq P(B)$.

P8. — El pes dels nadons segueix una distribució normal de mitjana $\mu = 3.1$ kg i desviació típica σ desconeguda. Se sap que només el 30.5% dels nadons pesa més de 3.8 kg. Calcula, arrodonint els resultats a 4 decimals,

(a) **[4 punts]** Quina és la desviació típica?

Solució. $p(x > 3.8) = p\left(z > \frac{3.8 - 3.1}{\sigma}\right) = 1 - p\left(z \leq \frac{3.8 - 3.1}{\sigma}\right) = 0.305$. Per tant, tenim que $p\left(z \leq \frac{3.8 - 3.1}{\sigma}\right) = 1 - 0.305 = 0.695$. D'on

$$\frac{3.8 - 3.1}{\sigma} = 0.51 \;\rightarrow\; \sigma = 1.3725.$$

(b) **[3 punts]** Suposant que $\sigma = 1.3725$, quina és la probabilitat que un nadó pesi menys de 2.7 kg?

Solució. $p(x < 2.7) = p\left(z < \frac{2.7 - 3.1}{1.3725}\right) = p\left(z < -0.2914\right) = 1 - p\left(z < 0.2914\right) = 1 - 0.6141 = 0.3859$.

(c) **[3 punts]** Suposant que $\sigma = 1.3725$, quina és la probabilitat que un nadó pesi entre 2.7 i 3.5 kg?

Solució. $p(2.7 < x < 3.5) = p\left(\frac{2.7 - 3.1}{1.3725} < z < \frac{3.5 - 3.1}{1.3725}\right) = p\left(-0.2914 < z < 0.2914\right) = p\left(z < 0.2914\right) - p\left(z < -0.2914\right) = 2p\left(z < 0.2914\right) - 1 = 0.2282$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0,1)$.

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades. Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4.

Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic, o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

P1. — Sigui el sistema

$$\begin{cases} mx + y - z = 1 \\ 2x + my = 1 \\ x + mz = 0 \end{cases}.$$

(a) [**7 punts**] Discuteix el nombre de solucions que té el sistema segons el paràmetre m.

(b) [**3 punts**] Resol el sistema per al cas $m = 1$.

P2. — Sigui A una matriu invertible $n \times n$ amb coeficients reals tal que compleix la igualtat $A^2 + A = I$. Aleshores,

(a) [**3 punts**] Satisfà la matriu

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

les condicions de l'enunciat? És a dir, compleix M la igualtat de l'enunciat i, a més, és invertible?

Tornant a considerar que A és una matriu qualsevol que satisfà les condicions de l'enunciat,

(b) [**3 punts**] Calcula la inversa de A.

(c) [**4 punts**] Comprova que se satisfà la igualtat $A(B + A) - I = A(B - I)$, sent B una matriu quadrada qualsevol $n \times n$ amb coeficients reals.

P3. — Siguin els punts $A = (1, 2, 0)$, $B = (-1, 0, 1)$, $C = (0, 0, 1)$ i $D = (3, 1, 2)$.

(a) [**4 punts**] Determina la recta r que passa per D i és perpendicular al pla que conté els punts A, B i C.

(b) [**4 punts**] Determina si els punts A, B, C i D són coplanaris o no.

(c) [**2 punts**] És D el punt de tall de la recta amb el pla de l'apartat (a)? Justifica la resposta.

P4. — Sigui el pla $\pi : 3x + y + z = 2$ i els punts $P = (0, 1, 1)$ i $Q = (2, -1, -3)$.

(a) [**2 punts**] Són P i Q punts del pla π? Justifica la resposta.

(b) [**4 punts**] Calcula el punt S situat sobre la recta PQ que es troba a $3/4$ parts de P i a $1/4$ part de Q.

(c) [**4 punts**] Determina l'equació implícita (també anomenada cartesiana) de la recta que passa per P i és perpendicular al pla π.

P5. — La reproducció d'un insecte al llarg del temps segueix la funció $f(x) = e^{-x}(2x+1)$ sent $x \geq 0$ el temps en mesos i $f(x)$ el nombre d'insectes en milions.

(a) [**4 punts**] Quants de milions d'insectes hi havia en l'instant inicial? Cap a on tendeix la quantitat d'insectes al llarg dels anys? Interpreta els resultats.

(b) [**4 punts**] Quin és el màxim nombre d'insectes que hi arriba a haver? En quin instant de temps s'assoleix aquest valor?

(c) [**2 punts**] Hi ha algun moment en què la població supera els 2 milions d'insectes? Justifica la resposta.

P6. — [**10 punts**] Calcula la integral de la funció $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x - 6}{x^2 + x - 2}$.

P7. — En una classe on tots els alumnes practiquen algun esport, el 60% dels alumnes juga a futbol o bàsquet i el 10% practica els dos. Per altra banda, se sap que hi ha un 60% d'alumnes que no juga a futbol.

(a) [**3 punts**] Sigui $F =$'juga a futbol' i sigui $B =$'juga a bàsquet', escriu, en termes d'unions, interseccions i complementaris d'aquests dos esdeveniments, les tres probabilitats que indica l'enunciat.

(b) Calcula la probabilitat que, escollint a l'atzar un alumne de la classe,

(b.1) [**1 punt**] Jugui a futbol.

(b.2) [**2 punts**] Jugui a bàsquet.

(b.3) [**2 punts**] Jugui a bàsquet i no a futbol (és a dir, només jugui a bàsquet).

(b.4) [**2 punts**] No jugui ni a futbol ni a bàsquet.

P8. — (a) [**5 punts**] En un examen de tecnologia, quina és la probabilitat de treure una nota entre 5 i 7 si se sap que les notes segueixen una distribució normal de mitjana 6 i desviació típica 2?

(b) [**5 punts**] En un examen de filosofia, el 35% dels alumnes presentats varen obtenir una nota major que 6, mentre que el 51% en varen obtenir una menor que 4. Suposant que les notes segueixen una distribució normal, determina quina és la seva mitjana μ i la seva desviació típica σ.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0, 1)$.

Criteris de correcció globals

- Heu de corregir quatre qüestions en total d'entre les vuit proposades. Si l'alumne presenta més de quatre qüestions, corregiu-ne les quatre primeres.
- Cada problema té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions màximes que apareixen a cada apartat (si no està indicat, tots els apartats d'una mateixa pregunta tenen la mateixa valoració). Les puntuacions dels apartats són independents: si l'alumne s'ha equivocat en qualque apartat però fa bé els altres (segons les "seves" dades equivocades), donau-li la puntuació adient.
- Es valorarà conjuntament el resultat, la justificació (ja sigui simbòlica o escrita), la claredat i ús del llenguatge matemàtic i no matemàtic, i l'estructura de la resposta. Orientativament, penalitzau:
  - Els errors de càlcul amb un 25%; els errors greus i/o que portin a resultats incoherents o absurds, amb un 50%.
  - En preguntes de justificar, si la justificació és només "intuïtiva" (p. ex. una observació que no respon exhaustivament a allò que s'ha demanat), amb el 30%-50%; en preguntes de justificar, una resposta sense cap justificació s'ha de penalitzar amb el 100%.
  - En qualsevol pregunta, si apareixen raonaments (que no són clars/evidents) sense justificar, amb el 20%-30%.
  - La imprecisió en l'ús del llenguatge matemàtic (p. ex. variables sense introduir/que canvien de significat), o la falta de claredat per absència de llenguatge matemàtic, amb un 20%-30%.
  - L'estructura s'ha de penalitzar en funció de la dificultat per entendre la resposta.
- Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris generals o específics. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Criteris de correcció específics

Només es detallen els apartats en què hi ha diverses preguntes o que es poden desglossar. En apartats on s'omet el criteri de correcció específic, aquest serà simplement "Càlcul i/o justificació correcta".

P1. — Sigui el sistema

$$\begin{cases} mx + y - z = 1 \\ 2x + my = 1 \\ x + mz = 0 \end{cases} .$$

(a) [**7 punts**] Discuteix el nombre de solucions que té el sistema segons el paràmetre m.

Criteris: 1 punt pel càlcul de det(A), 2 punts per cada cas concret. -1 punt per conclusió mal feta. -1 punt per error de càlcul.

(b) [**3 punts**] Resol el sistema per al cas $m = 1$.

Criteris: -1 punt per error de càlcul.

P2. — Sigui A una matriu invertible $n \times n$ amb coeficients reals tal que compleix la igualtat $A^2 + A = I$. Aleshores,

(a) **[3 punts]** Satisfà la matriu

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

les condicions de l'enunciat? És a dir, compleix M la igualtat de l'enunciat i, a més, és invertible?

Criteris: +1 punt si comproven $\det(M) \neq 0$ (invertible), +1 si punt realitzen correctament M^2 i +1 punt si demostren bé la igualtat $M^2 + M = I$.

Tornant a considerar que A és una matriu qualsevol que satisfà les condicions de l'enunciat,

(b) **[3 punts]** Calcula la inversa de A.

Criteris: +3 punts si proporciona el resultat. 0 altrament.

(c) **[4 punts]** Comprova que se satisfà la igualtat $A(B + A) - I = A(B - I)$, sent B una matriu quadrada qualsevol $n \times n$ amb coeficients reals.

Criteris: +2 punts si realitza les passes correctes, +2 si arriba al resultat final correcte.

P3. — Siguin els punts $A = (1, 2, 0)$, $B = (-1, 0, 1)$, $C = (0, 0, 1)$ i $D = (3, 1, 2)$.

(a) **[4 punts]** Determina la recta r que passa per D i és perpendicular al pla que conté els punts A, B i C.

Criteris: +2 punts si calcula bé el vector de la recta, +2 punts si proporciona la recta correctament.

(b) **[4 punts]** Determina si els punts A, B, C i D són coplanaris o no.

Criteris: +1 punt si calcula bé els vectors, +2 punts si calcula bé el determinant, +1 punt si dona bé la resposta.

(c) **[2 punts]** És D el punt de tall de la recta amb el pla de l'apartat (a)? Justifica la resposta.

Criteris: +2 punts si la resposta està correctament justificada.

P4. — Sigui el pla $\pi : 3x + y + z = 2$ i els punts $P = (0, 1, 1)$ i $Q = (2, -1, -3)$.

(a) **[2 punts]** Són P i Q punts del pla π? Justifica la resposta.

Criteris: +1 punt per punt ben justificat.

(b) **[4 punts]** Calcula el punt S situat sobre la recta PQ que es troba a $3/4$ parts de P i a $1/4$ part de Q.

Criteris: -1 punt per error de càlcul.

(c) **[4 punts]** Determina l'equació implícita (també anomenada cartesiana) de la recta que passa per P i és perpendicular al pla π.

Criteris: +2 punts pel càlcul del vector director, +2 punts si proporcionen correctament l'equació implícita. -1 punt per error de càlcul.

P5. — La reproducció d'un insecte al llarg del temps segueix la funció $f(x) = e^{-x}(2x+1)$ sent $x \geq 0$ el temps en mesos i $f(x)$ el nombre d'insectes en milions.

(a) [**4 punts**] Quants de milions d'insectes hi havia en l'instant inicial? Cap a on tendeix la quantitat d'insectes al llarg dels anys? Interpreta els resultats.

Criteris: 1 punt pel càlcul de $f(0)$, 2 punts pel càlcul del límit i 1 punt per la interpretació.

(b) [**4 punts**] Quin és el màxim nombre d'insectes que hi arriba a haver? En quin instant de temps s'assoleix aquest valor?

Criteris: 2 punts per cada pregunta. -1 punt per càlculs mal fets.

(c) [**2 punts**] Hi ha algun moment en què la població supera els 2 milions d'insectes? Justifica la resposta.

Criteris: -2 punts si no està justificat.

P6. — [**10 punts**] Calcula la integral de la funció $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x - 6}{x^2 + x - 2}$.

Criteris: 3 punts si realitzan correctament la divisió polinòmica, 3 punts si realitzan correctament la separació de la fracció (A,B), 4 punts per les integrals immediates correctes, -1 punt per error de càlcul.

P7. — En una classe on tots els alumnes practiquen algun esport, el 60% dels alumnes juga a futbol o bàsquet i el 10% practica els dos. Per altra banda, se sap que hi ha un 60% d'alumnes que no juga a futbol.

(a) [**3 punts**] Sigui $F =$'juga a futbol' i sigui $B =$'juga a bàsquet', escriu, en termes d'unions, interseccions i complementaris d'aquests dos esdeveniments, les tres probabilitats que indica l'enunciat.

Criteris: 1 punts per esdeveniment.

(b) Calcula la probabilitat que, escollint a l'atzar un alumne de la classe,

(b.1) [**1 punt**] Jugui a futbol.

(b.2) [**2 punts**] Jugui a bàsquet.

(b.3) [**2 punts**] Jugui a bàsquet i no a futbol (és a dir, només jugui a bàsquet).

(b.4) [**2 punts**] No jugui ni a futbol ni a bàsquet.

Criteris: -1 punt per càlcul mal realitzat. En els tres darrers ítems, 1 punt per desglossar la fórmula i 1 punt pel resultat. Si el resultat no té sentit, es té un 0 de l'apartat directament.

P8. — (a) [**5 punts**] En un examen de tecnologia, quina és la probabilitat de treure una nota entre 5 i 7 si se sap que les notes segueixen una distribució normal de mitjana 6 i desviació típica 2?

Criteris: 2 punts pel plantejament, 1 punt per tipificar, 1 punt separar les probabilitats, 1 punt per la solució.

(b) [**5 punts**] En un examen de filosofia, el 35% dels alumnes presentats varen obtenir una nota major que 6, mentre que el 51% en varen obtenir una menor que 4. Suposant que les notes segueixen una distribució normal, determina quina és la seva mitjana μ i la seva desviació típica σ.

Criteris: 1.5 punts per cada probabilitat ben plantejada (un total de 3 punts), 1 punt per tipificar, 1 punt per resoldre el sistema i proporcionar la solució correcta.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0, 1)$.

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades. Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4.

Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic, o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

P1. — Sigui el sistema

$$\begin{cases} mx + y - z = 1 \\ 2x + my = 1 \\ x + mz = 0 \end{cases}.$$

(a) [**7 punts**] Discuteix el nombre de solucions que té el sistema segons el paràmetre m.

Solució. Sigui el sistema escrit en forma matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ on

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 2 & m & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tenim que

- Cas general:

$$\det(A) = m^3 + m - 2m = m(m^2 - 1) = 0 \text{ si i només si } m = 0,\ m = \pm 1. \to Rang(A) = 3.$$

- Si $m = 0$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \to Rang(A) = 2.$$

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to Rang(A|\mathbf{b}) = 3.$$

- Si $m = 1$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \to Rang(A) = 2.$$

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to Rang(A|\mathbf{b}) = 2.$$

- Si $m = -1$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \to Rang(A) = 2.$$

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \to Rang(A|\mathbf{b}) = 3.$$

Quadre solució:

si $m \neq 0$ i $m \neq \pm 1$	$Rang(A) = 3 = Rang(A\|\mathbf{b})$	Sistema comp. determinat	1 solució
si $m = 0$	$Rang(A) = 2 \neq 3 = Rang(A\|\mathbf{b})$	Sistema incompatible	0 solucions
si $m = 1$	$Rang(A) = 2 = Rang(A\|\mathbf{b})$	Sistema comp. indet.	∞ solucions
si $m = -1$	$Rang(A) = 2 \neq 3 = Rang(A\|\mathbf{b})$	Sistema incompatible	0 solucions

(b) **[3 punts]** Resol el sistema per al cas $m = 1$.

Solució. Com que el sistema és compatible indeterminat, sigui $z = t \in \mathbb{R}$. Aleshores,

$$\begin{cases} x + y = 1 + t \to x + 1 - 2x = 1 + t \to x = -t, \\ 2x + y = 1 \to y = 1 - 2x \to y = 1 + 2t. \end{cases}$$

Aleshores, $\mathbf{x} = (-t, 1 + 2t, t)$ amb $t \in \mathbb{R}$.

P2. — Sigui A una matriu invertible $n \times n$ amb coeficients reals tal que compleix la igualtat $A^2 + A = I$. Aleshores,

(a) **[3 punts]** Satisfà la matriu

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

les condicions de l'enunciat? És a dir, compleix M la igualtat de l'enunciat i, a més, és invertible?

Solució. Sí, ho compleix ($\det(M) \neq 0$, per tant, és invertible, i compleix que $M^2 + M = I$).

Tornant a considerar que A és una matriu qualsevol que satisfà les condicions de l'enunciat,

(b) **[3 punts]** Calcula la inversa de A.

Solució. $A(A + I) = I$ i, per tant, $A + I = A^{-1}$.

(c) **[4 punts]** Comprova que se satisfà la igualtat $A(B + A) - I = A(B - I)$, sent B una matriu quadrada qualsevol $n \times n$ amb coeficients reals.

Solució. $A(B + A) - I = AB + A^2 - I = AB + (I - A) - I = AB - A = A(B - I)$.

P3. — Siguin els punts $A = (1, 2, 0)$, $B = (-1, 0, 1)$, $C = (0, 0, 1)$ i $D = (3, 1, 2)$.

(a) **[4 punts]** Determina la recta r que passa per D i és perpendicular al pla que conté els punts A, B i C.

Solució. El pla que conté els punts A, B i C té per vectors directors $\vec{AB} = (-2, -2, 1)$ i $\vec{AC} = (-1, -2, 1)$. La recta r té per vector director el vector normal del pla, que és un vector perpendicular als dos vectors directors. I.e.

$$\vec{d_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (0, 1, 2).$$

Per tant, la recta és

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = 1 + t, \\ z = 2 + 2t. \end{cases}$$

(b) **[4 punts]** Determina si els punts A, B, C i D són coplanaris o no.

Solució. Els quatre punts seran coplanaris si els vectors $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ i $\vec{AD}$ són linealment independents. Tenim que

$$\vec{AB} = (-2,-2,1), \quad \vec{AC} = (-1,-2,1), \quad \vec{AD} = (2,-1,2),$$

Ara bé, com que

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 8+1-4+4-2-4 = 3 \neq 0,$$

tenim que els 4 punts NO són coplanaris.

(c) **[2 punts]** És D el punt de tall de la recta amb el pla de l'apartat (a)? Justifica la resposta.

Solució. No. Ja hem vist que no pertany al pla.

P4. — Sigui el pla $\pi : 3x+y+z=2$ i els punts $P=(0,1,1)$ i $Q=(2,-1,-3)$.

(a) **[2 punts]** Són P i Q punts del pla π? Justifica la resposta.

Solució. Sí, perquè verifiquen l'equació: $0+1+1=2$ i $6-1-3=2$.

(b) **[4 punts]** Calcula el punt S situat sobre la recta PQ que es troba a $3/4$ parts de P i a $1/4$ part de Q.

Solució. Si no ho saben fer directament, basta fer dues vegades el punt mitjà:

- punt mitjà de P i Q: $M=(1,0,-1)$.
- punt mitjà de M i Q: $S=(3/2,-1/2,-2)$.

(c) **[4 punts]** Determina l'equació implícita (també anomenada cartesiana) de la recta que passa per P i és perpendicular al pla π.

Solució. El vector director d'aquesta recta ha ser el vector normal del pla ($\vec{n}=(3,1,1)$). Per tant, l'equació contínua és

$$\frac{x}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}.$$

D'on tenim que l'equació implícita és

$$\begin{cases} x-3y+3=0, \\ y-z=0. \end{cases}$$

P5. — La reproducció d'un insecte al llarg del temps segueix la funció $f(x)=e^{-x}(2x+1)$ sent $x \geq 0$ el temps en mesos i $f(x)$ el nombre d'insectes en milions.

(a) **[4 punts]** Quants de milions d'insectes hi havia en l'instant inicial? Cap a on tendeix la quantitat d'insectes al llarg dels anys? Interpreta els resultats.

Solució.

– Inicialment hi ha $f(0)=1$ milió d'insectes.
– Tenim que $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}(2x+1)=0$ (per De L'Hôpital). Llavors la població d'insectes tendeix a extingir-se.

(b) **[4 punts]** Quin és el màxim nombre d'insectes que hi arriba a haver? En quin instant de temps s'assoleix aquest valor?

Solució.

- Cercam el màxim de la funció: $f'(x) = -e^{-x}(2x+1) + 2e^{-x} = e^{-x}(-2x+1) = 0$ quan $-2x+1=0$. És a dir, a $x = \frac{1}{2}$ mes.
- En aquest moment hi ha un total de $f(\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}}(2\frac{1}{2}+1) = 2e^{-\frac{1}{2}} = 1.213$ milions d'insectes.

(c) **[2 punts]** Hi ha algun moment en què la població supera els 2 milions d'insectes? Justifica la resposta.

Solució. No, perquè el màxim s'assoleix quan hi ha 1.213061319425267 milions d'insectes.

P6. — **[10 punts]** Calcula la integral de la funció $f(x) = \dfrac{x^4+2x-6}{x^2+x-2}$.

Solució.

$$\int \left(\frac{x^4+2x-6}{x^2+x-2}\right) dx = \int \left(x^2 - x + 3 + \frac{-3x}{x^2+x-2}\right) dx =$$

$$\int \left(x^2-x+3\right) dx - 3\int \left(\frac{x}{(x-1)(x+2)}\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x - 3\int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}\right) dx = (*)$$

Es troba que $A = 1/3$ i $B = 2/3$ i per tant,

$$(*) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x - 3\int \left(\frac{1}{3}\frac{1}{x-1} + \frac{2}{3}\frac{1}{x+2}\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x - (\ln|x-1| + 2\ln|x+2|) + C.$$

P7. — En una classe on tots els alumnes practiquen algun esport, el 60% dels alumnes juga a futbol o bàsquet i el 10% practica els dos. Per altra banda, se sap que hi ha un 60% d'alumnes que no juga a futbol.

(a) **[3 punts]** Sigui $F =$'juga a futbol' i sigui $B =$'juga a bàsquet', escriu, en termes d'unions, interseccions i complementaris d'aquests dos esdeveniments, les tres probabilitats que indica l'enunciat.

Solució. Sigui $F =$'juga a futbol' i sigui $B =$'juga a bàsquet'. L'enunciat ens diu que $P(F \cup B) = 0.6$, $P(F \cap B) = 0.1$, $P(\bar{F}) = 0.6$.

(b) Calcula la probabilitat que, escollint a l'atzar un alumne de la classe,

(b.1) **[1 punt]** Jugui a futbol.

(b.2) **[2 punts]** Jugui a bàsquet.

(b.3) **[2 punts]** Jugui a bàsquet i no a futbol (és a dir, només jugui a bàsquet).

(b.4) **[2 punts]** No jugui ni a futbol ni a bàsquet.

Solució. Tenim que

- $P(F) = 1 - P(\bar{F}) = 0.4$
- $P(B) = P(F \cup B) - P(F) + P(F \cap B) = 0.6 - 0.4 + 0.1 = 0.3$
- $P(B \cap \bar{F}) = P(B) - P(B \cap F) = 0.3 - 0.1 = 0.2$
- $P(\bar{F} \cap \bar{B}) = 1 - P(F \cup B) = 1 - 0.6 = 0.4$

P8. — (a) **[5 punts]** En un examen de tecnologia, quina és la probabilitat de treure una nota entre 5 i 7 si se sap que les notes segueixen una distribució normal de mitjana 6 i desviació típica 2?

Solució. Les dades segueixen una $N(6,2)$. Per tant,

$$p(5 < x < 7) = p\left(\frac{5-6}{2} < z < \frac{7-6}{2}\right) = p(-0.5 < z < 0.5) =$$

$$p(z < 0.5) - p(z < -0.5) = 2p(z < 0.5) - 1 = 2 \cdot 0.6915 - 1 = 0.383.$$

(b) **[5 punts]** En un examen de filosofia, el 35% dels alumnes presentats varen obtenir una nota major que 6, mentre que el 51% en varen obtenir una menor que 4. Suposant que les notes segueixen una distribució normal, determina quina és la seva mitjana μ i la seva desviació típica σ.

Solució. Les dades segueixen una $N(\mu,\sigma)$ i sabem que

$$p(x > 6) = p\left(z > \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = 1 - p\left(z < \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = 0.35 \to p\left(z < \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = 0.65$$

$$p(x < 4) = p\left(z < \frac{4-\mu}{\sigma}\right) = 0.51.$$

Així doncs, mirant a la taula tenim que

$$\frac{6-\mu}{\sigma} = 0.385, \qquad \frac{4-\mu}{\sigma} = 0.025.$$

Resolent el sistema tenim que

$$\mu = 3.86\hat{1}, \quad \sigma = 5.\hat{5}.$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0,1)$.

Prova d'accés a la Universitat (2008)

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 1

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades.

Durada: Una hora i mitja.

OPCIÓ A

1) Tres famílies se'n van a una gelateria. La primera família pren 2 gelats petits i 1 de gros; la segona família en pren 2 de petits, 1 de mitjà i 1 de gros; i la tercera família en pren 1 de petit i 2 de grossos. A la primera família li cobren 4.50 €, a la segona, 6.30 €, i a la tercera, 5.40 €. Es denoten per x, y, z les incògnites que representen respectivament el preu d'un gelat petit, d'un de mitjà, i d'un de gros.

a) Donau la matriu A que expressa el nombre de gelats petits, de mitjans, i de grossos que pren cada una de les tres famílies, de manera que

$$A \cdot X = B,$$

on $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 6.3 \\ 5.4 \end{pmatrix}$. *(0.5 punts)*

b) Calculau A^{-1}. *(1.5 punts)*

c) Resoleu l'equació matricial $A \cdot X = B$. *(0.5 punts)*

2) De tots els rectangles de perímetre 48 m, calculau les dimensions del que té la diagonal més petita. *(2.5 punts)*

3) Una urna A conté 5 bolles blanques i 3 de negres i una altra urna B en conté 3 de blanques i 4 de negres. S'elegeix una urna a l'atzar i se n'extreu una bolla.

a) Calculau la probabilitat que la bolla extreta sigui negra. *(1.5 punts)*

b) Suposant que la bolla extreta és blanca, calculau la probabilitat que l'urna elegida hagi estat la A. *(1 punt)*

4) Per estimar la proporció dels habitatges d'una determinada ciutat que tenen aire condicionat es vol fer servir una mostra aleatòria de mida n. Calculau el valor mínim de n perquè, amb un nivell de confiança del 97%, l'error en l'estimació sigui més petit que 0.05. (Com que es desconeix la proporció, s'ha de prendre el cas més desfavorable, que serà 0.5.) *(2.5 punts)*

OPCIÓ B

5) Donada la funció $f(x) = 2ax + b + \frac{36}{x}$, calculau a i b de manera que la gràfica de f passi pel punt $(3, 10)$ i tingui tangent horitzontal en aquest punt. *(2.5 punts)*

6) Per Nadal una botiga vol preparar dos tipus de lots, L_1 i L_2. Cada lot del tipus L_1 està format per 4 barres de torró, 2 ampolles de cava i 2 paquets de cafè, i cada lot del tipus L_2 està format per 2 barres de torró, dues ampolles de cava i 4 paquets de cafè. Amb cada lot del tipus L_1 s'obté un benefici de 4.50 €, i amb cada lot del tipus L_2, un de 3 €. La botiga disposa de 300 barres de torró, de 180 ampolles de cava i de 300 paquets de cafè. Quants lots de cada tipus s'han de preparar per tal d'obtenir un benefici màxim? *(2.5 punts)*

7) Determinau la funció $f(x)$, definida per $x > 0$, que verifica

$$f'(x) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{i} \quad f(1) = 4.$$

(2.5 punts)

8) Se suposa que el pes de les llimones d'una determinada varietat segueix una distribució normal de mitjana 250 g i desviació típica 24 g. Es pren una mostra a l'atzar de 64 d'aquestes llimones i se'n calcula la mitjana. Quina és la probabilitat que aquesta mitjana sigui menor que 244 g? *(2.5 punts)*

Prova d'accés a la Universitat (2008)

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Criteris específics de correcció

Model 1

Avaluau cada exercici o cada part d'exercici amb múltiples de quart de punt.

Aquests criteris no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un exercici, ni tan sols la millor.

Hi pot haver casos concrets en què sigui difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Aplicau-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Penalitzau els errors simples de càlcul amb 0, 0.25 o 0.5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb 0.75 o 1 punt. En qualsevol cas, l'avaluació final de cada exercici ha de ser ≥ 0 i, en els exercicis amb apartats, l'avaluació final de cada apartat també ha de ser ≥ 0.

OPCIÓ A

1) Tres famílies se'n van a una gelateria. La primera família pren 2 gelats petits i 1 de gros; la segona família en pren 2 de petits, 1 de mitjà i 1 de gros; i la tercera família en pren 1 de petit i 2 de grossos. A la primera família li cobren 4.50 €, a la segona, 6.30 €, i a la tercera, 5.40 €. Es denoten per x, y, z les incògnites que representen respectivament el preu d'un gelat petit, d'un de mitjà, i d'un de gros.

a) Donau la matriu A que expressa el nombre de gelats petits, de mitjans, i de grossos que pren cada una de les tres famílies, de manera que

$$A \cdot X = B,$$

on $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 6.3 \\ 5.4 \end{pmatrix}$. *(0.5 punts)*

b) Calculau A^{-1}. *(1.5 punts)*

c) Resoleu l'equació matricial $A \cdot X = B$. *(0.5 punts)*

Solució

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

[*Valoració: 0.5 punts*]

b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, fent $\begin{matrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ 2F_3 - F_1 \end{matrix}$ $\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, fent $\begin{matrix} 3F_1 - F_3 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix}$

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, fent $\begin{matrix} F_1 : 6 \\ F_2 \\ F_3 : 3 \end{matrix}$ $\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{6} & 0 & -\frac{2}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Aleshores $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

[*Valoració: 1.5 punts*]

c) $A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4.5 \\ 6.3 \\ 5.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \cdot 4.5 - \frac{1}{3} \cdot 5.4 \\ -1 \cdot 4.5 + 6.3 \\ -\frac{1}{3} \cdot 4.5 + \frac{2}{3} \cdot 5.4 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.8 \\ 2.1 \end{pmatrix}$

[*Valoració: 0.5 punts*]

2) De tots els rectangles de perímetre 48 m, calculau les dimensions del que té la diagonal més petita. *(2.5 punts)*

Solució

Hem de minimitzar la funció $f(x) = \sqrt{x^2 + (24 - x)^2}$.

[*Valoració d'aquesta primera part: 1 punt*]

$$f'(x) = \frac{4x - 48}{2\sqrt{x^2 + (24 - x)^2}} = \frac{2x - 24}{\sqrt{x^2 + (24 - x)^2}}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 24 = 0 \Rightarrow x = 12$.

[*Valoració d'aquesta segona part: 1 punt*]

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 24 > 0 \Leftrightarrow x > 12$. Aleshores per a $x < 12$, f és decreixent, i per a $x > 12$, és creixent. Per tant, en $x = 12$ f hi assoleix un mínim.

[*Valoració d'aquesta tercera part: 0.25 punts*]

Aleshores les dimensions del rectangle són $x = 12$, $24 - x = 24 - 12 = 12$; conseqüentment es tracta del quadrat de costat 12 m.

[*Valoració d'aquesta quarta part: 0.25 punts*]

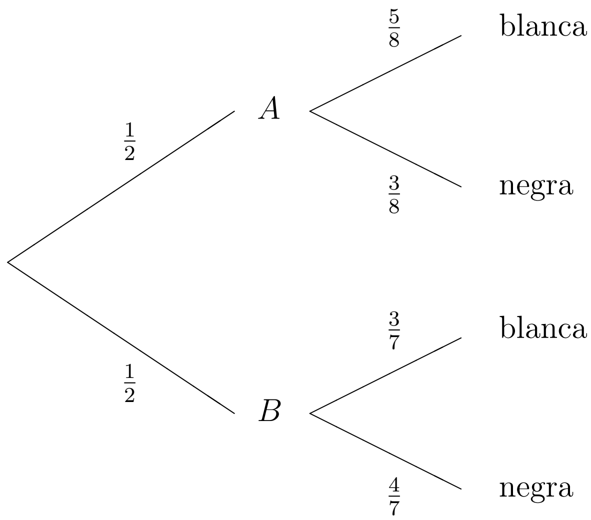
3) Una urna A conté 5 bolles blanques i 3 de negres i una altra urna B en conté 3 de blanques i 4 de negres. S'elegeix una urna a l'atzar i se n'extreu una bolla.

a) Calculau la probabilitat que la bolla extreta sigui negra. *(1.5 punts)*

b) Suposant que la bolla extreta és blanca, calculau la probabilitat que l'urna elegida hagi estat la A. *(1 punt)*

Solució

Emprarem un diagrama en arbre:



a)

$$P[\text{negra}] = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}+\frac{4}{7}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot 7+4\cdot 8}{8\cdot 7} = \frac{1}{2}\cdot\frac{21+32}{56} = \frac{53}{112} \approx 0.4732$$

[*Valoració: 1.5 punts*]

b)

$$P[A/\text{blanca}] = \frac{P[A]\cdot P[\text{blanca}/A]}{P[A]\cdot P[\text{blanca}/A]+P[B]\cdot P[\text{blanca}/B]} =$$

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{5}{8}+\frac{3}{7}} = \frac{\frac{5}{\cancel{8}}}{\frac{5\cdot 7+3\cdot 8}{\cancel{8}\cdot 7}} = \frac{5\cdot 7}{59} = \frac{35}{59} \approx 0.5932$$

[*Valoració: 1 punt*]

4) Per estimar la proporció dels habitatges d'una determinada ciutat que tenen aire condicionat es vol fer servir una mostra aleatòria de mida n. Calculau el valor mínim de n perquè, amb un nivell de confiança del 97%, l'error en l'estimació sigui més petit que 0.05. (Com que es desconeix la proporció, s'ha de prendre el cas més desfavorable, que serà 0.5.) *(2.5 punts)*

Solució

$1-\alpha = 0.97$, $\alpha = 0.03$, $\frac{\alpha}{2} = 0.015$. Aleshores $1-\frac{\alpha}{2} = 0.985$, i, observant la taula de la $N(0,1)$, li correspon un $z_{\alpha/2} = 2.17$

[*Valoració d'aquesta primera part: 0.5 punts*]

$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ és l'expressió de la fita de l'error.

Aleshores volem trobar el més petit enter n que satisfaci

$$2.17\sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} < 0.05$$

[*Valoració d'aquesta segona part: 1 punt*]

Operant, tenim:

$$2.17\frac{0.5}{\sqrt{n}} < 0.05, \quad \frac{2.17 \cdot 0.5}{0.05} < \sqrt{n},$$

$$n > \frac{2.17^2 \cdot 0.5^2}{0.05^2} = \frac{2.17^2 \cdot 0.25}{0.0025} = 2.17^2 \cdot 100 = 470.89$$

Aleshores el valor mínim de n és 471.

[*Valoració d'aquesta tercera part: 1 punt*]

OPCIÓ B

5) Donada la funció $f(x) = 2ax + b + \frac{36}{x}$, calculau a i b de manera que la gràfica de f passi pel punt $(3, 10)$ i tingui tangent horitzontal en aquest punt. *(2.5 punts)*

Solució

Ha de ser $f(3) = 10$; és a dir, $2a \cdot 3 + b + \frac{36}{3} = 10 \quad (\star)$

[*Valoració d'aquesta primera part: 0.5 punts*]

Per altra banda, que la gràfica de f tingui tangent horitzontal a $(3, 10)$ implica que $f'(3) = 0$

[*Valoració d'aquesta segona part: 0.5 punts*]

$$f'(x) = 2a - \frac{36}{x^2}$$

[*Valoració d'aquesta tercera part: 0.5 punts*]

Aleshores $f'(3) = 2a - \frac{36}{9}$, per tant, ha de ser $2a - 4 = 0 \;\Rightarrow\; a = 2$.

Substituint ara $a = 2$ a l'expressió $(\star)$ ens queda:

$12 + b + 12 = 10 \;\Rightarrow\; b = -14$.

[*Valoració d'aquesta quarta part: 1 punt*]

6) Per Nadal una botiga vol preparar dos tipus de lots, L_1 i L_2. Cada lot del tipus L_1 està format per 4 barres de torró, 2 ampolles de cava i 2 paquets de cafè, i cada lot del tipus L_2 està format per 2 barres de torró, dues ampolles de cava i 4 paquets de cafè. Amb cada lot del tipus L_1 s'obté un benefici de 4.50 €, i amb cada lot del tipus L_2, un de 3 €. La botiga disposa de 300 barres de torró, de 180 ampolles de cava i de 300 paquets de cafè. Quants lots de cada tipus s'han de preparar per tal d'obtenir un benefici màxim? *(2.5 punts)*

Solució

$x =$ nombre de lots del tipus L_1

$y =$ nombre de lots del tipus L_2

El benefici per maximitzar és $f(x, y) = 4.5x + 3y$

$$\text{Restriccions:} \left\{ \begin{array}{rl} x & \geq 0 \\ y & \geq 0 \\ 4x + 2y & \leq 300 \\ 2x + 2y & \leq 180 \\ 2x + 4y & \leq 300 \end{array} \right.$$

[*Valoració d'aquesta primera part: 1 punt*]

$4x + 2y = 300$, que equival a $2x + y = 150$, talla els eixos a $(0, 150)$ i $(75, 0)$.

$2x + 2y = 180$, que equival a $x + y = 90$, talla els eixos a $(0, 90)$ i $(90, 0)$.

$2x + 4y = 300$, que equival a $x + 2y = 150$, talla els eixos a $(0, 75)$ i $(150, 0)$.

Representam aquestes 3 rectes.

Intersecció de les rectes $2x + y = 150$ i $x + y = 90$:

$$\left\{ \begin{array}{r} 2x + y = 150 \\ x + y = 90 \end{array} \right.$$

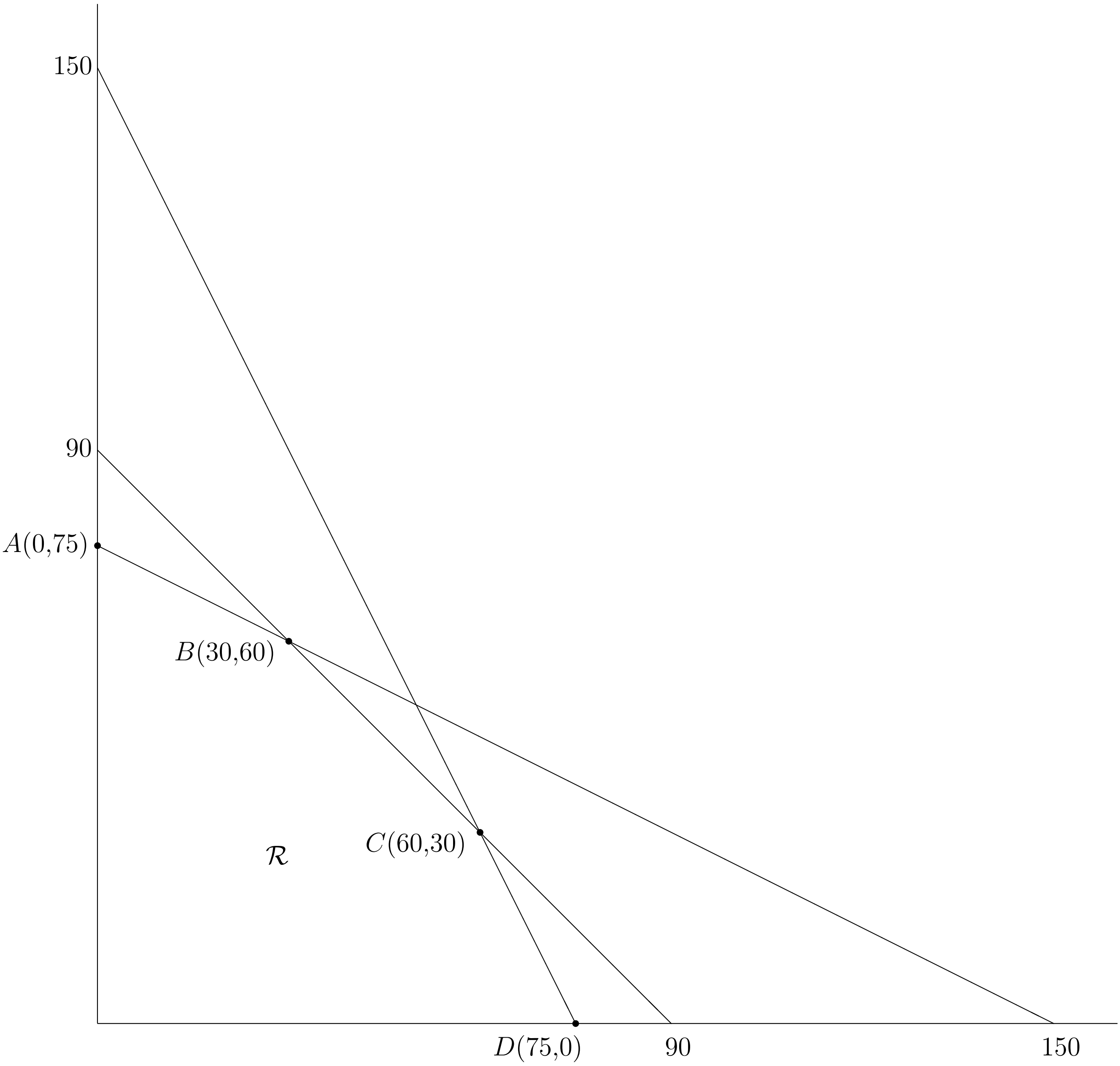
Restant de la primera equació la segona, tenim $x = 60$. Substituint aquest valor de x a la segona equació, dóna $y = 30$. Aleshores el punt d'intersecció és el $(60, 30)$.

Intersecció de les rectes $x + y = 90$ i $x + 2y = 150$:

$$\left\{ \begin{array}{r} x + y = 90 \\ x + 2y = 150 \end{array} \right.$$

Restant de la segona equació la primera, tenim $y = 60$. Substituint aquest valor de y a la segona equació, dóna $x = 30$. Aleshores el punt d'intersecció és el $(30, 60)$.

Per tant, la regió factible és la marcada amb $\mathcal{R}$ a la figura següent:



[*Valoració d'aquesta segona part: 1 punt*]

Per maximitzar la funció $f(x,y) = 4.5x + 3y$, avaluem-la als vèrtexs A, B, C i D:

$f(A) = f(0,75) = 3 \cdot 75 = 225$

$f(B) = f(30,60) = 4.5 \cdot 30 + 3 \cdot 60 = 315$

$f(C) = f(60,30) = 4.5 \cdot 60 + 3 \cdot 30 = 360$

$f(D) = f(75,0) = 4.5 \cdot 75 = 337.5$

Aleshores el vèrtex que fa màxima la funció és C. Conseqüentment, s'han de preparar 60 lots del tipus L_1 i 30 del tipus L_2.

[*Valoració d'aquesta tercera part: 0.5 punts*]

7) Determinau la funció $f(x)$, definida per $x > 0$, que verifica

$$f'(x) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{i} \quad f(1) = 4.$$

(2.5 punts)

Solució

$$f'(x) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 0 \ \Rightarrow \ f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$$

Aleshores

$$f(x) = \int \Big(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\Big)\mathrm{d}x$$

[*Valoració d'aquesta primera part: 1 punt*]

$$= \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - \ln x + C = -\frac{1}{x} - \ln x + C$$

[*Valoració d'aquesta segona part: 1 punt*]

Per altra banda, $f(1) = 4 \ \Rightarrow \ -1 - \ln 1 + C = 4 \ \Rightarrow \ C = 5$.

Conseqüentment, la funció és

$$f(x) = -\frac{1}{x} - \ln x + 5$$

[*Valoració d'aquesta tercera part: 0.5 punts*]

8) Se suposa que el pes de les llimones d'una determinada varietat segueix una distribució normal de mitjana 250 g i desviació típica 24 g. Es pren una mostra a l'atzar de 64 d'aquestes llimones i se'n calcula la mitjana. Quina és la probabilitat que aquesta mitjana sigui menor que 244 g? *(2.5 punts)*

Solució

Tenim $\mu = 250$ i $\sigma = 24$.

$\bar{x}$ és $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, que en el nostre cas és $N(250, \frac{24}{\sqrt{64}}) = N(250, 3)$

[*Valoració d'aquesta primera part: 0.5 punts*]

$$P[\bar{x} < 244] = P\left[z < \frac{244-250}{3}\right] = P[z < -2]$$

[*Valoració d'aquesta segona part: 1 punt*]

$$= 1 - P[z \leq 2] = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

[*Valoració d'aquesta tercera part: 1 punt*]

Prova d'accés a la Universitat (2008)

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 3

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades.

Durada: Una hora i mitja.

OPCIÓ A

1) Tres amics, en Joan, na Maria i en Pere, han anat a una cafeteria. En Joan ha gastat el triple que na Maria, i en Pere, la meitat que na Maria.

a) Amb aquestes dades, es pot saber la quantitat que ha gastat na Maria? *(1 punt)*

b) Si, a més a més, se sap que entre tots tres han gastat un total d'11.70 €, quina quantitat ha gastat cada un d'ells? *(1.5 punts)*

2) La funció de cost total de producció de x unitats d'un determinat producte és $C(x) = \frac{1}{5}x^2 + 6x + 245$. Es defineix la funció de cost mitjà per unitat com a $\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$. A quin nivell de producció serà mínim el cost mitjà per unitat? *(2.5 punts)*

3) Una urna A conté 3 bolles blanques i 6 de negres i una altra urna B en conté 2 de blanques i 1 de negra. S'extreu una bolla a l'atzar de l'urna A i es posa dins la B. Després s'extreu de l'urna B una bolla a l'atzar.

a) Calculau la probabilitat que la bolla extreta de l'urna B sigui negra. *(1.5 punts)*

b) Suposant que la bolla extreta de l'urna B és negra, calculau la probabilitat que la bolla extreta de l'urna A també hagi estat negra. *(1 punt)*

4) El pes mitjà d'una mostra presa a l'atzar de 196 magranes d'una determinada varietat és de 320 g i la desviació típica és de 35 g. Calculau l'interval de confiança aproximat per a la mitjana poblacional per a un nivell de confiança del 95%. *(2.5 punts)*

OPCIÓ B

5) Considerau la funció $f(x) = ax^3 + x^2 + bx + 7$. Determinau els valors dels paràmetres a i b perquè la funció tingui un extrem relatiu a $x = -1$ i un altre a $x = 3$. *(2.5 punts)*

6) Un pagès ha d'adobar una finca amb adob que contingui tres ingredients nutritius: a, b i c. Els mínims que necessita són 10 unitats de a, 18 de b i 16 de c. En el mercat venen sacs d'adob de dues marques, els continguts i preus dels quals es donen a la taula següent:

Marca	Unitats de a	Unitats de b	Unitats de c	Preu del sac
I	1	1	4	10 €
I I	1	3	1	9 €

a) Quants de sacs de la marca I i quants de sacs de la marca II ha de comprar el pagès per minimitzar els costs i satisfer els requeriments nutricionals? *(2 punts)*

b) Què li costaran en total? *(0.5 punts)*

7) Calculau l'àrea del recinte limitat per la corba $y = \frac{1}{x}$ i la recta $2x + y = 3$. *(2.5 punts)*

8) D'una mostra aleatòria de 525 habitants d'una determinada ciutat n'hi ha 84 que tenen motocicleta. Calculau l'interval de confiança aproximat per a la proporció poblacional per a un nivell de confiança del 97%. *(2.5 punts)*

Prova d'accés a la Universitat (2008)

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Criteris específics de correcció

Model 3

Avaluau cada exercici o cada part d'exercici amb múltiples de quart de punt.

Aquests criteris no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un exercici, ni tan sols la millor.

Hi pot haver casos concrets en què sigui difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Aplicau-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Penalitzau els errors simples de càlcul amb 0, 0.25 o 0.5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb 0.75 o 1 punt. En qualsevol cas, l'avaluació final de cada exercici ha de ser ≥ 0 i, en els exercicis amb apartats, l'avaluació final de cada apartat també ha de ser ≥ 0.

OPCIÓ A

1) Tres amics, en Joan, na Maria i en Pere, han anat a una cafeteria. En Joan ha gastat el triple que na Maria, i en Pere, la meitat que na Maria.

a) Amb aquestes dades, es pot saber la quantitat que ha gastat na Maria? *(1 punt)*

b) Si, a més a més, se sap que entre tots tres han gastat un total d'11.70 €, quina quantitat ha gastat cada un d'ells? *(1.5 punts)*

Solució

a)

x = quantitat que ha gastat en Joan

y = quantitat que ha gastat na Maria

z = quantitat que ha gastat en Pere

$$\left.\begin{array}{l} x = 3y \\ z = \frac{y}{2} \end{array}\right\}$$

[*Valoració d'aquesta primera part: 0.5 punts*]

Es tracta d'un sistema compatible indeterminat: Per exemple, $(3, 1, \frac{1}{2}), (6, 2, 1)$ en són solucions.

Aleshores, amb aquestes dades, no es pot saber la quantitat que ha gastat na Maria.

[*Valoració d'aquesta segona part: 0.5 punts*]

b)

$$\left.\begin{array}{rl} x = & 3y \\ z = & \frac{y}{2} \\ x + y + z = & 11.7 \end{array}\right\}$$

[*Valoració d'aquesta primera part: 0.5 punts*]

Tenim $3y + y + \frac{y}{2} = 11.7,\ \frac{9y}{2} = 11.7,\ y = 2.6\ \Rightarrow x = 3 \cdot 2.6 = 7.8,\ z = \frac{2.6}{2} = 1.3$

Aleshores:

En Joan ha gastat 7.80 €, na Maria 2.60 €, i en Pere 1.30 €.

[*Valoració d'aquesta segona part: 1 punt*]

2) La funció de cost total de producció de x unitats d'un determinat producte és $C(x) = \frac{1}{5}x^2 + 6x + 245$. Es defineix la funció de cost mitjà per unitat com a $\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$. A quin nivell de producció serà mínim el cost mitjà per unitat?

(2.5 punts)

Solució

S'ha de calcular el mínim de la funció $\overline{C}(x),\ x > 0$.

En el nostre cas tenim que $\overline{C}(x) = \frac{1}{5}x + 6 + \frac{245}{x}$

[*Valoració d'aquesta primera part: 0.5 punts*]

$\overline{C}'(x) = \frac{1}{5} - \frac{245}{x^2}$

[*Valoració d'aquesta segona part: 1 punt*]

$\overline{C}'(x) = 0\ \Rightarrow\ \frac{1}{5} = \frac{245}{x^2}\ \Rightarrow\ x^2 = 1225\ \Rightarrow\ x = 35$ (ja que $x > 0$).

[*Valoració d'aquesta tercera part: 0.5 punts*]

Vegem que a $x = 35$ la funció $\overline{C}(x)$ assoleix efectivament un mínim:

$\overline{C}''(x) = -\frac{-2x \cdot 245}{x^4} = \frac{490}{x^3}\ \Rightarrow\ \overline{C}''(35) > 0$

Per tant, el cost mitjà per unitat serà mínim a un nivell de producció igual a 35.

[*Valoració d'aquesta quarta part: 0.5 punts*]

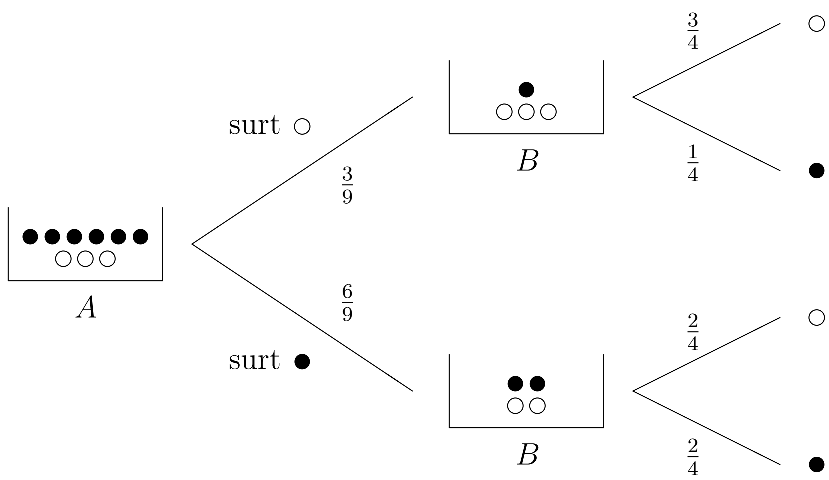
3) Una urna A conté 3 bolles blanques i 6 de negres i una altra urna B en conté 2 de blanques i 1 de negra. S'extreu una bolla a l'atzar de l'urna A i es posa dins la B. Després s'extreu de l'urna B una bolla a l'atzar.

a) Calculau la probabilitat que la bolla extreta de l'urna B sigui negra. *(1.5 punts)*

b) Suposant que la bolla extreta de l'urna B és negra, calculau la probabilitat que la bolla extreta de l'urna A també hagi estat negra. *(1 punt)*

Solució

Emprarem un diagrama en arbre:



a)

$$P[\text{bolla extreta } B \text{ negra}] = \frac{3}{9}\cdot\frac{1}{4}+\frac{6}{9}\cdot\frac{2}{4} = \frac{3+12}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} = 0.41\overline{6}$$

[*Valoració: 1.5 punts*]

b)

$$P[\text{bolla extreta } A \text{ negra/bolla extreta } B \text{ negra}] =$$

$$\frac{\frac{6}{9}\cdot\frac{2}{4}}{\frac{3}{9}\cdot\frac{1}{4}+\frac{6}{9}\cdot\frac{2}{4}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{12}} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0.8$$

[*Valoració: 1 punt*]

4) El pes mitjà d'una mostra presa a l'atzar de 196 magranes d'una determinada varietat és de 320 g i la desviació típica és de 35 g. Calculau l'interval de confiança aproximat per a la mitjana poblacional per a un nivell de confiança del 95%. *(2.5 punts)*

Solució

$1-\alpha = 0.95$, $\alpha = 0.05$, $\frac{\alpha}{2} = 0.025$. Aleshores $1-\frac{\alpha}{2} = 0.975$ i, observant la taula de la $N(0,1)$, li correspon un $z_{\alpha/2} = 1.96$

[*Valoració d'aquesta primera part: 0.5 punts*]

L'interval de confiança per a la mitjana poblacional és

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Com que no coneixem σ, la substituim per la desviació típica mostral s. Aleshores, en el nostre cas, tenim:

$$\left(320 - 1.96\frac{35}{\sqrt{196}},\ 320 + 1.96\frac{35}{\sqrt{196}}\right)$$

[*Valoració d'aquesta segona part: 1.5 punts*]

$$= (320 - 1.96 \cdot 2.5,\ 320 + 1.96 \cdot 2.5) = (320 - 4.9,\ 320 + 4.9) = (315.1,\ 324.9)$$

[*Valoració d'aquesta tercera part: 0.5 punts*]

OPCIÓ B

5) Considerau la funció $f(x) = ax^3 + x^2 + bx + 7$. Determinau els valors dels paràmetres a i b perquè la funció tingui un extrem relatiu a $x = -1$ i un altre a $x = 3$. *(2.5 punts)*

Solució

$f'(x) = 3ax^2 + 2x + b$

[*Valoració d'aquesta primera part: 0.5 punts*]

Ha de passar que $f'(-1) = 0$ i $f'(3) = 0$.

Aleshores tenim

$$\left.\begin{array}{rl} 3a(-1)^2 + 2(-1) + b & = 0 \\ 3a3^2 + 2 \cdot 3 + b & = 0 \end{array}\right\}$$

[*Valoració d'aquesta segona part: 1 punt*]

d'on resulta

$$\left.\begin{array}{rl} 3a - 2 + b & = 0 \\ 27a + 6 + b & = 0 \end{array}\right\}$$

De la 1a equació tenim $b = 2 - 3a$, que substituït a la 2a dóna:

$27a + 6 + 2 - 3a = 0;\ 24a = -8$. Per tant, $a = -\frac{1}{3}$.

Ara tenim $b = 2 - 3(-\frac{1}{3}) = 3$.

[*Valoració d'aquesta tercera part: 1 punt*]

6) Un pagès ha d'adobar una finca amb adob que contingui tres ingredients nutritius: a, b i c. Els mínims que necessita són 10 unitats de a, 18 de b i 16 de c. En el mercat venen sacs d'adob de dues marques, els continguts i preus dels quals es donen a la taula següent:

Marca	Unitats de a	Unitats de b	Unitats de c	Preu del sac
I	1	1	4	10 €
I I	1	3	1	9 €

a) Quants de sacs de la marca I i quants de sacs de la marca II ha de comprar el pagès per minimitzar els costs i satisfer els requeriments nutricionals? *(2 punts)*

b) Què li costaran en total? *(0.5 punts)*

Solució

a)

$x =$ nombre de sacs de la marca I

$y =$ nombre de sacs de la marca II

S'ha de minimitzar la funció $f(x, y) = 10x + 9y$ sotmesa a les restriccions:

$$\begin{cases} x & \geq 0 \\ y & \geq 0 \\ x + y & \geq 10 \\ x + 3y & \geq 18 \\ 4x + y & \geq 16 \end{cases}$$

[*Valoració d'aquesta primera part: 0.75 punts*]

$x + y = 10$ talla els eixos a $(0, 10)$ i $(10, 0)$.

$x + 3y = 18$ talla els eixos a $(0, 6)$ i $(18, 0)$.

$4x + y = 16$ talla els eixos a $(0, 16)$ i $(4, 0)$.

Representam aquestes 3 rectes.

Intersecció de les rectes $x + y = 10$ i $x + 3y = 18$:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x + 3y = 18 \end{cases}$$

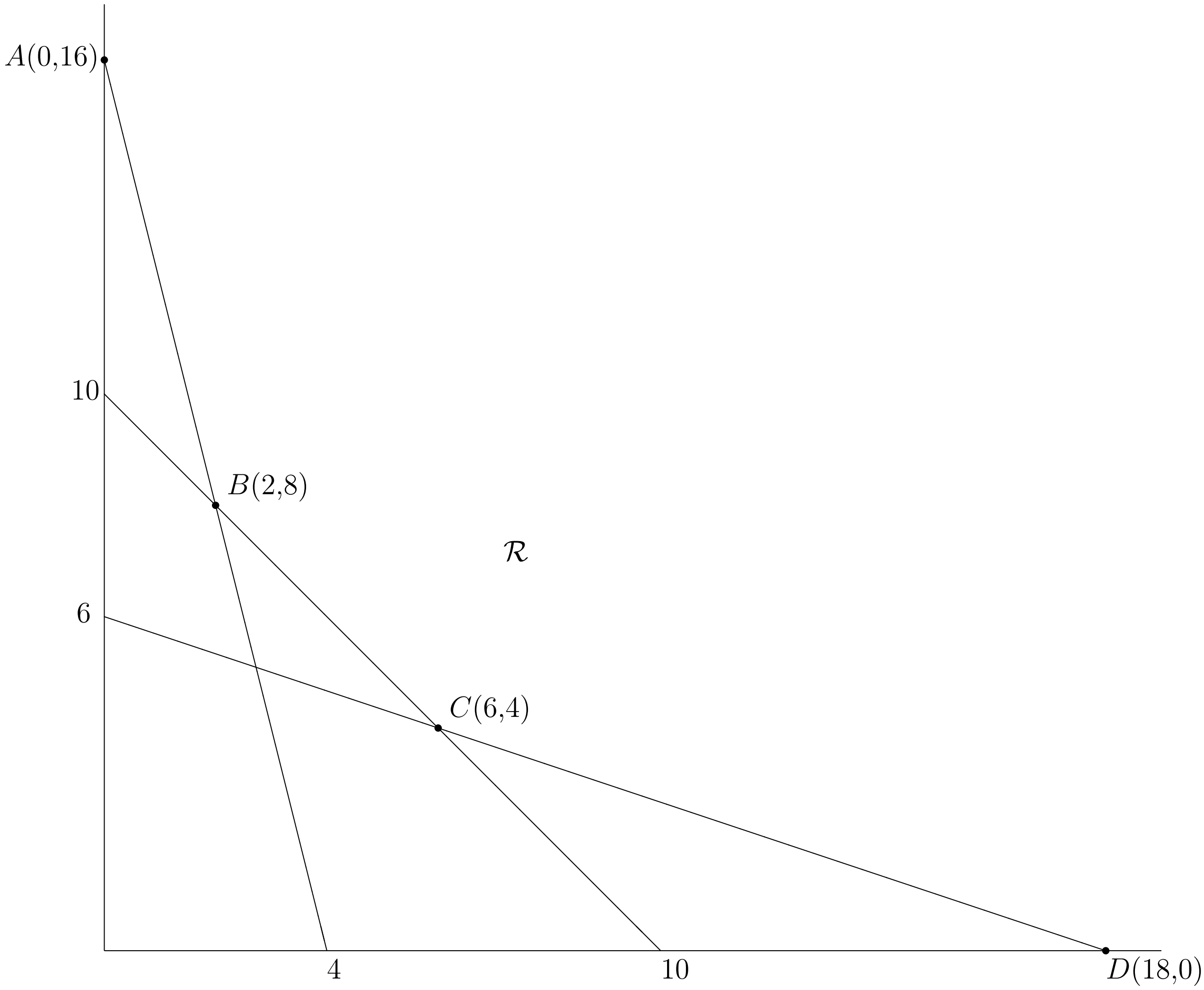
Restant de la 2a equació la 1a, tenim $2y = 8$; $y = 4$. Substituint aquest valor de y a la 1a equació, dóna $x = 6$. Aleshores el punt d'intersecció és el $(6, 4)$.

Intersecció de les rectes $x + y = 10$ i $4x + y = 16$:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 4x + y = 16 \end{cases}$$

Restant de la 2a equació la 1a, tenim $3x = 6$; $x = 2$. Substituint aquest valor de x a la 1a equació, dóna $y = 8$. Aleshores el punt d'intersecció és el $(2, 8)$.

Per tant, la regió factible és la marcada amb $\mathcal{R}$ a la figura següent:



[*Valoració d'aquesta segona part: 0.75 punts*]

Per minimitzar la funció $f(x, y) = 10x + 9y$, avaluem-la als vèrtexs A, B, C i D:

$f(A) = f(0, 16) = 9 \cdot 16 = 144$

$f(B) = f(2, 8) = 10 \cdot 2 + 9 \cdot 8 = 92$

$f(C) = f(6, 4) = 10 \cdot 6 + 9 \cdot 4 = 96$

$f(D) = f(18, 0) = 10 \cdot 18 = 180$

Aleshores el vèrtex que fa mínima la funció és B. Consegüentment, el pagès ha de comprar 2 sacs de la marca I i 8 de la marca II.

[*Valoració d'aquesta tercera part: 0.5 punts*]

b) En total li costaran 92 €.

[*Valoració: 0.5 punts*]

7) Calculau l'àrea del recinte limitat per la corba $y = \frac{1}{x}$ i la recta $2x + y = 3$.

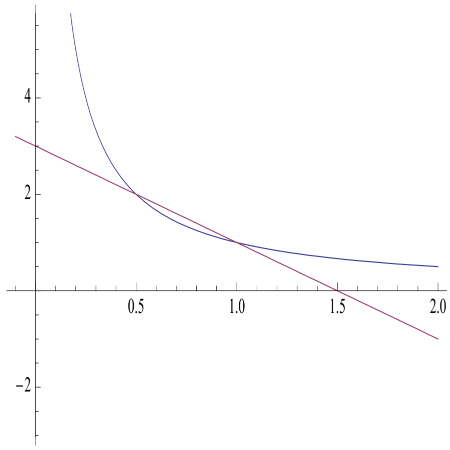
(2.5 punts)

Solució

Punts de tall de la corba $y = \frac{1}{x}$ i la recta $y = -2x + 3$:

$\frac{1}{x} = -2x + 3$; $1 = -2x^2 + 3x$; $2x^2 - 3x + 1 = 0$; $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4}$. Aleshores $x = \frac{1}{2}$ o $x = 1$. Per tant, els punts de tall són $(\frac{1}{2}, 2)$ i $(1, 1)$.

El recinte es pot veure a la figura



[*Valoració d'aquesta primera part: 1 punt*]

Aleshores l'àrea A ve donada per

$$A = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \Big(-2x + 3 - \frac{1}{x} \Big) \mathrm{d}x =$$

[*Valoració d'aquesta segona part: 0.5 punts*]

$$\Big[-2\frac{x^2}{2} + 3x - \ln x \Big]_{\frac{1}{2}}^{1} = \Big[3x - x^2 - \ln x \Big]_{\frac{1}{2}}^{1} = 3 - 1 - \ln 1 - \Big(\frac{3}{2} - \frac{1}{4} - \ln \frac{1}{2} \Big) = 2 - \frac{5}{4} + \ln \frac{1}{2} =$$

$$\frac{3}{4} - \ln 2 \approx 0.0568\ u^2$$

[*Valoració d'aquesta tercera part: 1 punt*]

8) D'una mostra aleatòria de 525 habitants d'una determinada ciutat n'hi ha 84 que tenen motocicleta. Calculau l'interval de confiança aproximat per a la proporció poblacional per a un nivell de confiança del 97%. *(2.5 punts)*

Solució

$1 - \alpha = 0.97$, $\alpha = 0.03$, $\frac{\alpha}{2} = 0.015$. Aleshores $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.985$ i, observant la taula de la $N(0, 1)$, li correspon un $z_{\alpha/2} = 2.17$

[*Valoració d'aquesta primera part: 0.5 punts*]

Tenim $\hat{p} = \frac{84}{525} = 0.16$.

[*Valoració d'aquesta segona part: 0.5 punts*]

L'interval de confiança aproximat és

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right),$$

que en el nostre cas queda

$$\left(0.16 - 2.17\sqrt{\frac{0.16 \cdot 0.84}{525}},\ 0.16 + 2.17\sqrt{\frac{0.16 \cdot 0.84}{525}}\right) =$$

[*Valoració d'aquesta tercera part: 1 punt*]

$(0.16 - 2.17 \cdot 0.016,\ 0.16 + 2.17 \cdot 0.016) = (0.12528,\ 0.19472)$.

[*Valoració d'aquesta quarta part: 0.5 punts*]

Prova d'accés a la Universitat (2009)

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 2

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades.

Durada: Una hora i mitja.

OPCIÓ A

1) Tres famílies se'n van a una cafeteria. La primera família pren 2 cafès, 1 tallat i 2 descafeïnats; la segona família pren 3 cafès i 2 descafeïnats; i la tercera família pren 1 cafè, 2 tallats i 2 descafeïnats. A la primera família li presenten una factura de 5.20 €, a la segona, una de 5 €, i a la tercera, una de 6.20 €. Hi ha qualque factura incorrecta? *(2.5 punts)*

2) Calculau el rectangle d'àrea màxima que té la base situada a l'eix d'abscisses i els altres dos vèrtexs, amb ordenada positiva, situats a la paràbola $y = 12 - x^2$. *(2.5 punts)*

3) Siguin A i B dos esdeveniments independents. La probabilitat que ocorri A és 0.4, i la probabilitat que ocorri B és 0.7.

a) Calculau la probabilitat que ocorri almenys un dels dos esdeveniments. *(1.5 punts)*

b) Calculau la probabilitat que ocorri l'esdeveniment A però no el B. *(1 punt)*

4) Se sap que el 12% dels habitants d'una determinada ciutat pateix sobrepès. Es pren una mostra a l'atzar de 66 habitants d'aquesta ciutat, quina és la probabilitat aproximada que almenys el 10% d'ells pateixi sobrepès? *(2.5 punts)*

OPCIÓ B

5) Considerau el sistema d'equacions lineals $\left.\begin{array}{l}\frac{2}{3}x - 4y - 4 = 0\\ x - \frac{9}{2}y - 3 = 0\end{array}\right\}$.

a) Expressau-lo en la forma matricial $A \cdot X = B$. *(0.5 punts)*

b) Calculau la matriu inversa de A. *(1.5 punts)*

c) Resoleu-lo. *(0.5 punts)*

6) Un llibreter compra llibres de dues editorials. L'editorial A ofereix un paquet de 5 novel·les de ciència ficció i 5 d'històriques per 60 €, i l'editorial B ofereix un paquet de 5 novel·les de ciència ficció i 10 d'històriques per 180 €. El llibreter vol comprar un mínim de 2500 novel·les de ciència ficció i un mínim de 3500 novel·les històriques. A més, per motius personals, el llibreter ha promès a l'editorial B que almenys el 25% del nombre total de paquets que comprarà seran de B.

a) Quants de paquets ha de comprar el llibreter de cada editorial per minimitzar el cost, satisfer els mínims i complir la promesa? *(2 punts)*

b) Què li costaran en total les novel·les? *(0.5 punts)*

7) La corba $y = a[4 - (x-3)^2]$, amb $a > 0$, limita amb l'eix d'abscisses un recinte de 32 unitats de superfície. Calculau el valor de a. *(2.5 punts)*

8) Es vol estimar la despesa diària mitjana en oferta complementària dels turistes, amb un error no superior a 2 €, emprant una mostra aleatòria de 64 turistes. Sabent que la desviació típica poblacional és de 8 €, quin serà el màxim nivell de confiança amb què es realitzarà l'estimació? *(2.5 punts)*

Prova d'accés a la Universitat (2009)

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Criteris específics de correcció

Model 2

Avaluau cada exercici o cada part d'exercici amb múltiples de quart de punt.

Aquests criteris no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un exercici, ni tan sols la millor.

Hi pot haver casos concrets en què sigui difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Aplicau-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Penalitzau els errors simples de càlcul amb 0, 0.25 o 0.5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb 0.75 o 1 punt. En qualsevol cas, l'avaluació final de cada exercici ha de ser ≥ 0 *i, en els exercicis amb apartats, l'avaluació final de cada apartat també ha de ser* ≥ 0.

OPCIÓ A

1) Tres famílies se'n van a una cafeteria. La primera família pren 2 cafès, 1 tallat i 2 descafeïnats; la segona família pren 3 cafès i 2 descafeïnats; i la tercera família pren 1 cafè, 2 tallats i 2 descafeïnats. A la primera família li presenten una factura de 5.20 €, a la segona, una de 5 €, i a la tercera, una de 6.20 €. Hi ha qualque factura incorrecta? *(2.5 punts)*

Solució

$x =$ preu d'un cafè

$y =$ preu d'un tallat

$z =$ preu d'un descafeïnat

Tenim el sistema següent:

$$\begin{cases} 2x + y + 2z &= 5.2 \\ 3x + 2z &= 5 \\ x + 2y + 2z &= 6.2 \end{cases}$$

[*Valoració d'aquesta primera part: 1 punt*]

Consideram la matriu ampliada del sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 2 & 5.2 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 6.2 \end{array}\right), \text{ fent } \begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 - 3F_1 \\ 2F_3 - F_1 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 2 & 5.2 \\ 0 & -3 & -2 & -5.6 \\ 0 & 3 & 2 & 7.2 \end{array}\right), \text{ fent } \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 2 & 5.2 \\ 0 & -3 & -2 & -5.6 \\ 0 & 0 & 0 & 1.6 \end{array}\right)$$

[*Valoració d'aquesta segona part: 1 punt*]

Per tant, queda el sistema

$$\begin{cases} 2x + y + 2z &= 5.2 \\ \quad -3y - 2z &= -5.6 \\ \qquad\quad 0z &= 1.6 \end{cases}$$

Sistema incompatible. No té solució.

Aleshores efectivament hi ha qualque factura incorrecta.

[*Valoració d'aquesta tercera part: 0.5 punts*]

2) Calculau el rectangle d'àrea màxima que té la base situada a l'eix d'abscisses i els altres dos vèrtexs, amb ordenada positiva, situats a la paràbola $y = 12 - x^2$.

(2.5 punts)

Solució

Diguem $(-x, 0)$ i $(x, 0)$ als vèrtexs de la base, sent $x > 0$. Els altres dos vèrtexs seran $(-x, 12 - x^2), (x, 12 - x^2)$.

Hem de maximitzar la funció $f(x) = 2x(12 - x^2) = 24x - 2x^3, \ x > 0$.

[*Valoració d'aquesta primera part: 1 punt*]

$f'(x) = 24 - 6x^2$

$f'(x) = 0 \ \Rightarrow \ 24 = 6x^2 \ \Rightarrow \ 4 = x^2 \ \Rightarrow \ x = 2$ (ja que $x > 0$).

[*Valoració d'aquesta segona part: 1 punt*]

$f''(x) = -12x$ i $f''(2) = -24 < 0$. Per tant, a $x = 2$ f hi assoleix un màxim.

[*Valoració d'aquesta tercera part: 0.25 punts*]

Aleshores el rectangle és el format pels vèrtexs $(-2, 0), (2, 0), (2, 8)$ i $(-2, 8)$.

[*Valoració d'aquesta quarta part: 0.25 punts*]

3) Siguin A i B dos esdeveniments independents. La probabilitat que ocorri A és 0.4, i la probabilitat que ocorri B és 0.7.

a) Calculau la probabilitat que ocorri almenys un dels dos esdeveniments. *(1.5 punts)*

b) Calculau la probabilitat que ocorri l'esdeveniment A però no el B. *(1 punt)*

Solució

a) $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = P[A] + P[B] - P[A] \cdot P[B]$ (l'última igualtat es verifica, ja que A i B són independents).

Aleshores $P[A \cup B] = 0.4 + 0.7 - 0.4 \cdot 0.7 = 0.82$.

[*Valoració: 1.5 punts*]

b) Com que A i B són independents, també ho són A i B^c, aleshores:

$P[A \cap B^c] = P[A] \cdot P[B^c] = P[A] \cdot (1 - P[B]) = 0.4 \cdot 0.3 = 0.12$.

[*Valoració: 1 punt*]

4) Se sap que el 12% dels habitants d'una determinada ciutat pateix sobrepès. Es pren una mostra a l'atzar de 66 habitants d'aquesta ciutat, quina és la probabilitat aproximada que almenys el 10% d'ells pateixi sobrepès?

(2.5 punts)

Solució

Si p és la proporció poblacional, per a mostres de grandària n, la distribució mostral de les proporcions s'aproxima a la normal

$$N\left(p,\ \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right).$$

En el nostre cas tenim $p = 0.12$ i $n = 66$, llavors queda

$$N\left(0.12,\ \sqrt{\frac{0.12 \cdot 0.88}{66}}\right) = N(0.12,\ \sqrt{0.0016}) = N(0.12,\ 0.04).$$

[*Valoració d'aquesta primera part: 1 punt*]

$$P[x \geq 0.1] = P\left[z \geq \frac{0.1 - 0.12}{0.04}\right] = P\left[z \geq \frac{-0.02}{0.04}\right] = P[z \geq -0.5]$$

[*Valoració d'aquesta segona part: 1 punt*]

$$= P[z \leq 0.5] = 0.6915.$$

[*Valoració d'aquesta tercera part: 0.5 punts*]

OPCIÓ B

5) Considerau el sistema d'equacions lineals $\left.\begin{array}{l} \frac{2}{3}x - 4y - 4 = 0 \\ x - \frac{9}{2}y - 3 = 0 \end{array}\right\}$.

a) Expressau-lo en la forma matricial $A \cdot X = B$. *(0.5 punts)*

b) Calculau la matriu inversa de A. *(1.5 punts)*

c) Resoleu-lo. *(0.5 punts)*

Solució

a) $\left.\begin{array}{l}\frac{2}{3}x - 4y = 4\\ x - \frac{9}{2}y = 3\end{array}\right\}$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -4 \\ 1 & -\frac{9}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

[*Valoració: 0.5 punts*]

b) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{9}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$, fent $\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - \frac{3}{2}F_1 \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -4 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$, fent $\begin{array}{c} F_1 + \frac{8}{3}F_2 \\ F_2 \end{array} \rightsquigarrow$ $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -3 & \frac{8}{3} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$, fent $\begin{array}{c} \frac{3}{2}F_1 \\ \frac{2}{3}F_2 \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{9}{2} & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Aleshores

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & 4 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

[*Valoració: 1.5 punts*]

c) $A \cdot X = B \;\Rightarrow\; X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & 4 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \cdot 4 + 4 \cdot 3 \\ -1 \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$

Aleshores la solució és $x = -6,\ y = -2$.

[*Valoració: 0.5 punts*]

6) Un llibreter compra llibres de dues editorials. L'editorial A ofereix un paquet de 5 novel·les de ciència ficció i 5 d'històriques per 60 €, i l'editorial B ofereix un paquet de 5 novel·les de ciència ficció i 10 d'històriques per 180 €. El llibreter vol comprar un mínim de 2500 novel·les de ciència ficció i un mínim de 3500 novel·les històriques. A més, per motius personals, el llibreter ha promès a l'editorial B que almenys el 25% del nombre total de paquets que comprarà seran de B.

a) Quants de paquets ha de comprar el llibreter de cada editorial per minimitzar el cost, satisfer els mínims i complir la promesa? *(2 punts)*

b) Què li costaran en total les novel·les? *(0.5 punts)*

Solució

a) Tenim

Editorial	Ciència ficció	Històrica	Preu del paquet
A	5	5	60 €
B	5	10	180 €

x = nombre de paquets de l'editorial A

y = nombre de paquets de l'editorial B

S'ha de minimitzar la funció $f(x, y) = 60x + 180y$ sotmesa a les restriccions:

$$\begin{cases} x & \geq 0 \\ y & \geq 0 \\ 5x+5y & \geq 2500 \\ 5x+10y & \geq 3500 \\ y & \geq 0.25(x+y) \end{cases}$$

Aquestes restriccions equivalen a les següents:

$$\begin{cases} x & \geq 0 \\ y & \geq 0 \\ x+y & \geq 500 \\ x+2y & \geq 700 \\ 3y & \geq x \end{cases}$$

[*Valoració d'aquesta primera part: 0.75 punts*]

$x+y=500$ talla els eixos a $(0,500)$ i $(500,0)$.

$x+2y=700$ talla els eixos a $(0,350)$ i $(700,0)$.

$3y=x$ talla els eixos a $(0,0)$.

Representam aquestes 3 rectes.

Intersecció de les rectes $x+y=500$ i $x+2y=700$:

$$\begin{cases} x+y=500 \\ x+2y=700 \end{cases}$$

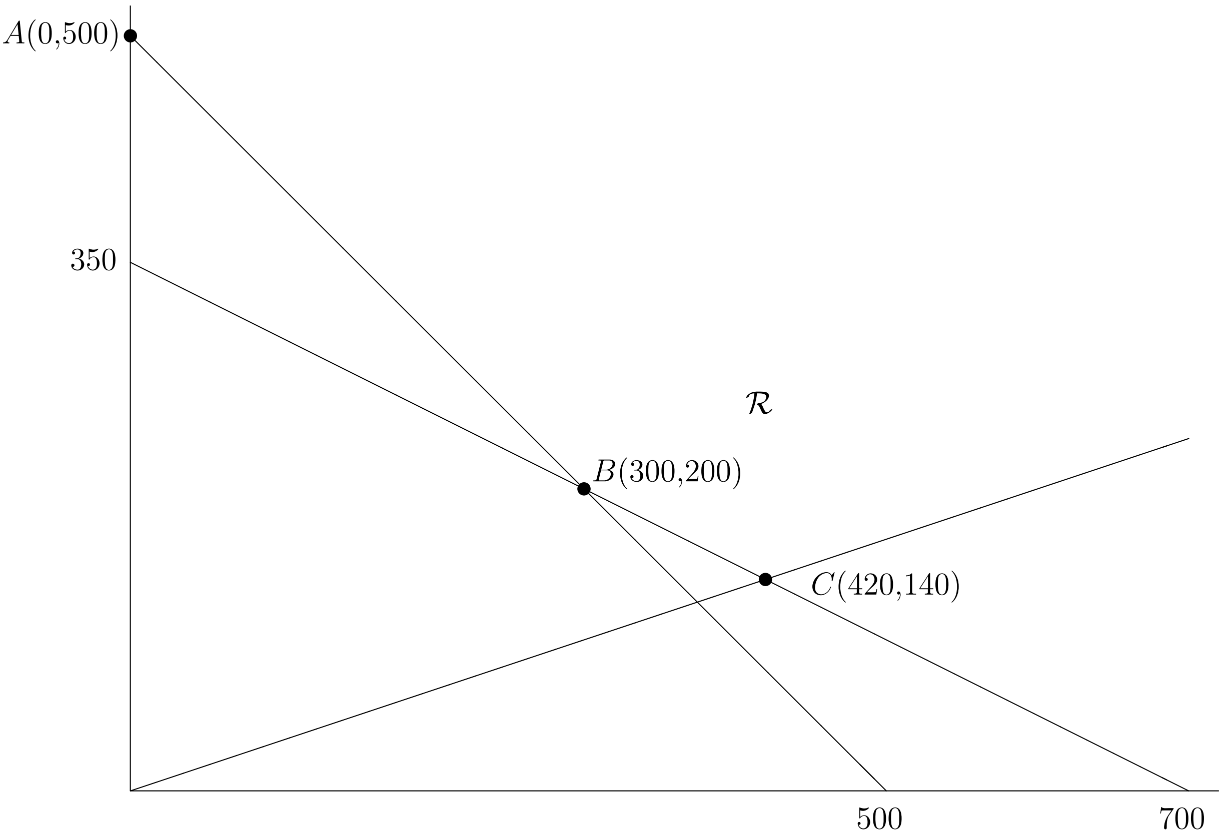
Restant de la 2a equació la 1a, tenim $y=200$. Substituint aquest valor de y a la 1a equació, dóna $x=300$. Aleshores el punt d'intersecció és el $(300,200)$.

Intersecció de les rectes $x+2y=700$ i $3y=x$:

$$\begin{cases} x+2y=700 \\ 3y=x \end{cases}$$

Tenim $3y+2y=700$, d'on $y=140$. Substituint aquest valor de y a la 2a equació, dóna $x=420$. Aleshores el punt d'intersecció és el $(420,140)$.

Per tant, la regió factible és la marcada amb $\mathcal{R}$ a la figura següent:



[*Valoració d'aquesta segona part: 0.75 punts*]

Per minimitzar la funció $f(x, y) = 60x + 180y$, avaluem-la als vèrtexs A, B i C:

$f(A) = f(0, 500) = 180 \cdot 500 = 90000$

$f(B) = f(300, 200) = 60 \cdot 300 + 180 \cdot 200 = 54000$

$f(C) = f(420, 140) = 60 \cdot 420 + 180 \cdot 140 = 50400$

Aleshores el vèrtex que fa mínima la funció és C. Conseqüentment, el llibreter ha de comprar 420 paquets de l'editorial A i 140 de l'editorial B.

[*Valoració d'aquesta tercera part: 0.5 punts*]

b) Li costaran en total 50400 €.

[*Valoració: 0.5 punts*]

7) La corba $y = a[4 - (x - 3)^2]$, amb $a > 0$, limita amb l'eix d'abscisses un recinte de 32 unitats de superfície. Calculau el valor de a. *(2.5 punts)*

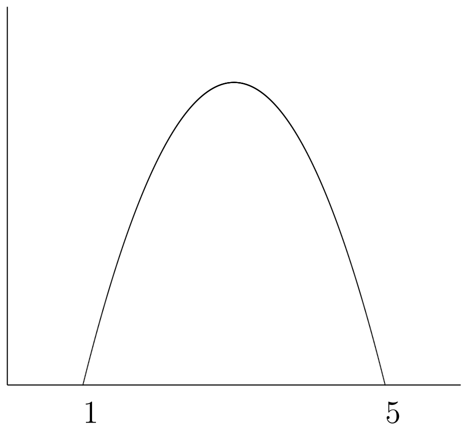
Solució

$y = a[4 - (x^2 - 6x + 9)] = a(-x^2 + 6x - 5)$

Per fer un esbós de la corba, que és una paràbola, calculam la seva intersecció amb l'eix d'abscisses:

$y = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 6x + 5 = 0$, d'on

$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}$. Llavors $x = 5$ o $x = 1$.



[*Valoració d'aquesta primera part: 0.5 punts*]

$$\int_1^5 a(-x^2+6x-5)\mathrm{d}x = a\Big[-\frac{x^3}{3}+3x^2-5x\Big]_1^5$$

[*Valoració d'aquesta segona part: 1 punt*]

$$= a\Big[-\frac{5^3}{3}+3\cdot 5^2-5\cdot 5-(-\frac{1}{3}+3-5)\Big] = a\Big[-\frac{125}{3}+75-25+\frac{1}{3}-3+5\Big] = a\Big[-\frac{124}{3}+52\Big]$$

$$= a\frac{-124+156}{3} = a\frac{32}{3}.$$

[*Valoració d'aquesta tercera part: 0.5 punts*]

Aleshores

$$32 = a\frac{32}{3} \;\Rightarrow\; a = 3.$$

[*Valoració d'aquesta quarta part: 0.5 punts*]

8) Es vol estimar la despesa diària mitjana en oferta complementària dels turistes, amb un error no superior a 2 €, emprant una mostra aleatòria de 64 turistes. Sabent que la desviació típica poblacional és de 8 €, quin serà el màxim nivell de confiança amb què es realitzarà l'estimació? *(2.5 punts)*

Solució

$E = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ és l'expressió de la fita de l'error.

En el nostre cas tenim $2 = z_{\alpha/2}\cdot\frac{8}{\sqrt{64}} = z_{\alpha/2}$.

[*Valoració d'aquesta primera part: 1 punt*]

Conegut $z_{\alpha/2}$, la corba normal ens donarà el valor de $\alpha/2$:

$P[z \le z_{\alpha/2}] = P[z \le 2] = 0.9772$

Aleshores $\alpha/2 = P[z > 2] = 1 - P[z \le 2] = 1 - 0.9772 = 0.0228$.

[*Valoració d'aquesta segona part: 1 punt*]

Per tant, $\alpha = 0.0456$ i $1 - \alpha = 0.9544$.

Consegüentment, el màxim nivell de confiança serà del 95.44 %

[*Valoració d'aquesta tercera part: 0.5 punts*]

Prova d'accés a la Universitat (2009)

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 3

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades.

Durada: Una hora i mitja.

OPCIÓ A

1) Calculau la matriu A que satisfà

$$(I + 2A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

on I és la matriu identitat (o unitat) 2×2. *(2.5 punts)*

2) El benefici en euros de la fabricació de x unitats diàries d'un determinat producte és $-12x^2 + 1512x - 11628$.

a) Calculau el nombre d'unitats diàries que s'han de fabricar d'aquest producte per tal d'obtenir un benefici màxim. *(2 punts)*

b) Quin és aquest benefici màxim? *(0.5 punts)*

3) En una determinada ciutat, el 20% dels habitants parla anglès, el 30% té estudis superiors, i el 15% parla anglès i té estudis superiors.

a) Calculau la probabilitat que, en elegir un habitant d'aquesta ciutat a l'atzar, ni parli anglès ni tingui estudis superiors. *(1.5 punts)*

b) En aquesta ciutat, són independents els esdeveniments "parlar anglès" i "tenir estudis superiors"? *(1 punt)*

4) D'una mostra aleatòria de 300 estudiants de batxillerat d'una ciutat n'hi ha 60 que van regularment amb bicicleta al seu centre escolar. A un nivell de significació de 0.05, hi ha suficient evidència per refutar l'afirmació que almenys el 25% dels estudiants de batxillerat de la ciutat va regularment amb bicicleta al seu centre escolar? *(2.5 punts)*

OPCIÓ B

5) Considerau el següent sistema d'equacions depenent del paràmetre m:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y - mz = 1 \end{cases}$$

a) Discutiu-lo. *(1.5 punts)*

b) Resoleu-lo per als valors de m que el fan compatible. *(1 punt)*

6) Dibuixau la regió determinada per les inequacions

$$x \geq 0,\ \ y \geq 0,\ \ x + y \geq 6,\ \ x + 5y \geq 10, 4x + y \geq 12$$

i minimitzau la funció $f(x, y) = 2x + 3y$ sotmesa a les restriccions donades per aquestes inequacions. *(2.5 punts)*

7) Calculau l'àrea del recinte limitat per la corba $y = x^3 + x^2 - 2x$ i l'eix d'abscisses. *(2.5 punts)*

8) La vida mitjana d'una mostra presa a l'atzar de 144 bombetes de baix consum d'un determinat tipus és de 10200 hores, i la desviació típica, de 180 hores. Calculau l'interval de confiança aproximat per a la mitjana poblacional per a un nivell de confiança del 97%. *(2.5 punts)*

Prova d'accés a la Universitat (2009)

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Criteris específics de correcció

Model 3

Avaluau cada exercici o cada part d'exercici amb múltiples de quart de punt.

Aquests criteris no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un exercici, ni tan sols la millor.

Hi pot haver casos concrets en què sigui difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Aplicau-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Penalitzau els errors simples de càlcul amb 0, 0.25 o 0.5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb 0.75 o 1 punt. En qualsevol cas, l'avaluació final de cada exercici ha de ser ≥ 0 i, en els exercicis amb apartats, l'avaluació final de cada apartat també ha de ser ≥ 0.

OPCIÓ A

1) Calculau la matriu A que satisfà

$$(I + 2A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

on I és la matriu identitat (o unitat) 2×2. *(2.5 punts)*

Solució

Sigui $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, de $(I + 2A)^{-1} = B$ tenim que $I + 2A = B^{-1}$ i per tant, $A = \frac{1}{2}(B^{-1} - I)$.

[*Valoració d'aquesta primera part: 1 punt*]

Calculam B^{-1}:

$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$

Aleshores $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

[*Valoració d'aquesta segona part: 1 punt*]

Ara tenim que $A = \frac{1}{2}(B^{-1} - I) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$.

[*Valoració d'aquesta tercera part: 0.5 punts*]

2) El benefici en euros de la fabricació de x unitats diàries d'un determinat producte és $-12x^2 + 1512x - 11628$.

a) Calculau el nombre d'unitats diàries que s'han de fabricar d'aquest producte per tal d'obtenir un benefici màxim. *(2 punts)*

b) Quin és aquest benefici màxim? *(0.5 punts)*

Solució

a) $B(x) = -12x^2 + 1512x - 11628$

$B'(x) = -24x + 1512$

[*Valoració d'aquesta primera part: 1 punt*]

$B'(x) = 0 \;\Rightarrow\; -24x + 1512 = 0 \;\Rightarrow\; x = 63$

[*Valoració d'aquesta segona part: 0.5 punts*]

Comprovam si a $x = 63$ la funció presenta un màxim:

$B''(x) = -24 \;\Rightarrow\; B''(63) < 0$

Aleshores a $x = 63$ hi tenim un màxim, la qual cosa ens diu que s'han de fabricar 63 unitats diàries d'aquest producte per tal d'obtenir un benefici màxim.

[*Valoració d'aquesta tercera part: 0.5 punts*]

b) $B(63) = -12 \cdot 63^2 + 1512 \cdot 63 - 11628 = 36000$ €

[*Valoració: 0.5 punts*]

3) En una determinada ciutat, el 20% dels habitants parla anglès, el 30% té estudis superiors, i el 15% parla anglès i té estudis superiors.

a) Calculau la probabilitat que, en elegir un habitant d'aquesta ciutat a l'atzar, ni parli anglès ni tingui estudis superiors. *(1.5 punts)*

b) En aquesta ciutat, són independents els esdeveniments "parlar anglès" i "tenir estudis superiors"? *(1 punt)*

Solució

a) A: parlar anglès, $\bar{A}$: no parlar anglès

S: tenir estudis superiors, $\bar{S}$: no tenir estudis superiors

Formam la taula de contingència, on en negreta posam les dades de l'enunciat:

	S	$\bar{S}$	total
A	**15 %**	5%	**20 %**
$\bar{A}$	15 %	65%	80 %
total	**30 %**	70 %	**100%**

$P[\bar{A} \text{ i } \bar{S}] = 0.65$ (65%)

[*Valoració: 1.5 punts*]

b) $P[A/S] = \frac{P[A \text{ i } S]}{P[S]} = \frac{0.15}{0.3} = 0.5$

$P[A] = 0.2$

Com que $P[A/S] \neq P[A]$, els esdeveniments "parlar anglès" i "tenir estudis superiors" no són independents en aquesta ciutat.

[*Valoració: 1 punt*]

4) D'una mostra aleatòria de 300 estudiants de batxillerat d'una ciutat n'hi ha 60 que van regularment amb bicicleta al seu centre escolar. A un nivell de significació de 0.05, hi ha suficient evidència per refutar l'afirmació que almenys el 25% dels estudiants de batxillerat de la ciutat va regularment amb bicicleta al seu centre escolar? *(2.5 punts)*

Solució

Es tracta d'un test d'hipòtesi unilateral per a la proporció.

$H_0 : p \geq 0.25$

$H_1 : p < 0.25$

[*Valoració d'aquesta primera part: 0.5 punts*]

$\alpha = 0.05$. Aleshores $1 - \alpha = 0.95$ i, observant la taula de la $N(0,1)$, li correspon un $z_\alpha = 1.645$.

[*Valoració d'aquesta segona part: 0.5 punts*]

Zona d'acceptació:

$$\hat{p} \geq p - z_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

En el nostre cas l'interval d'acceptació és

$[0.25 - 1.645\sqrt{\frac{0.25 \cdot 0.75}{300}}, \infty) = [0.25 - 1.645 \cdot 0.025, \infty) = [0.208875, \infty)$.

[*Valoració d'aquesta tercera part: 1 punt*]

Com que $\hat{p} = \frac{60}{300} = 0.2 \notin [0.208875, \infty)$, tenim que hi ha suficient evidència per refutar l'afirmació.

[*Valoració d'aquesta quarta part: 0.5 punts*]

OPCIÓ B

5) Considerau el següent sistema d'equacions depenent del paràmetre m:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=1 \\ -x+y-mz=1 \end{cases}$$

a) Discutiu-lo. *(1.5 punts)*

b) Resoleu-lo per als valors de m que el fan compatible. *(1 punt)*

Solució

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -m & 1 \end{pmatrix}$, fent $\begin{matrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1-m & 2 \end{pmatrix}$, fent $\begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{matrix}$

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-m & 2 \end{pmatrix}$.

- Si $1-m=0$, la tercera equació serà $0z=2$. Per tant, quan $m=1$ el sistema és incompatible.

- Si $m \neq 1$, el sistema és compatible determinat.

[*Valoració: 1.5 punts*]

b) El sistema queda

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ \quad -2y=0 \\ (1-m)z=2 \end{cases}$$

De la 2a equació tenim $y=0$. De la 3a, $z=\frac{2}{1-m}$. Substituint aquests valors a la 1a equació ens queda $x+\frac{2}{1-m}=1$, $x=1-\frac{2}{1-m}=\frac{m+1}{m-1}$.

Aleshores, la solució és: $(\frac{m+1}{m-1}, 0, \frac{2}{1-m})$.

[*Valoració: 1 punt*]

6) Dibuixau la regió determinada per les inequacions

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \geq 6,\ x+5y \geq 10, 4x+y \geq 12$$

i minimitzau la funció $f(x,y)=2x+3y$ sotmesa a les restriccions donades per aquestes inequacions. *(2.5 punts)*

Solució

Restriccions: $\begin{cases} x & \geq 0 \\ y & \geq 0 \\ x+y & \geq 6 \\ x+5y & \geq 10 \\ 4x+y & \geq 12 \end{cases}$

Funció per minimitzar: $f(x,y)=2x+3y$

Talls amb els eixos:

$x + y = 6$ talla els eixos a $(0, 6)$ i $(6, 0)$.

$x + 5y = 10$ talla els eixos a $(0, 2)$ i $(10, 0)$.

$4x + y = 12$ talla els eixos a $(0, 12)$ i $(3, 0)$.

Representam aquestes 3 rectes.

Intersecció de les rectes $x + y = 6$ i $x + 5y = 10$:

$$\left\{ \begin{aligned} x + y &= 6 \\ x + 5y &= 10 \end{aligned} \right.$$

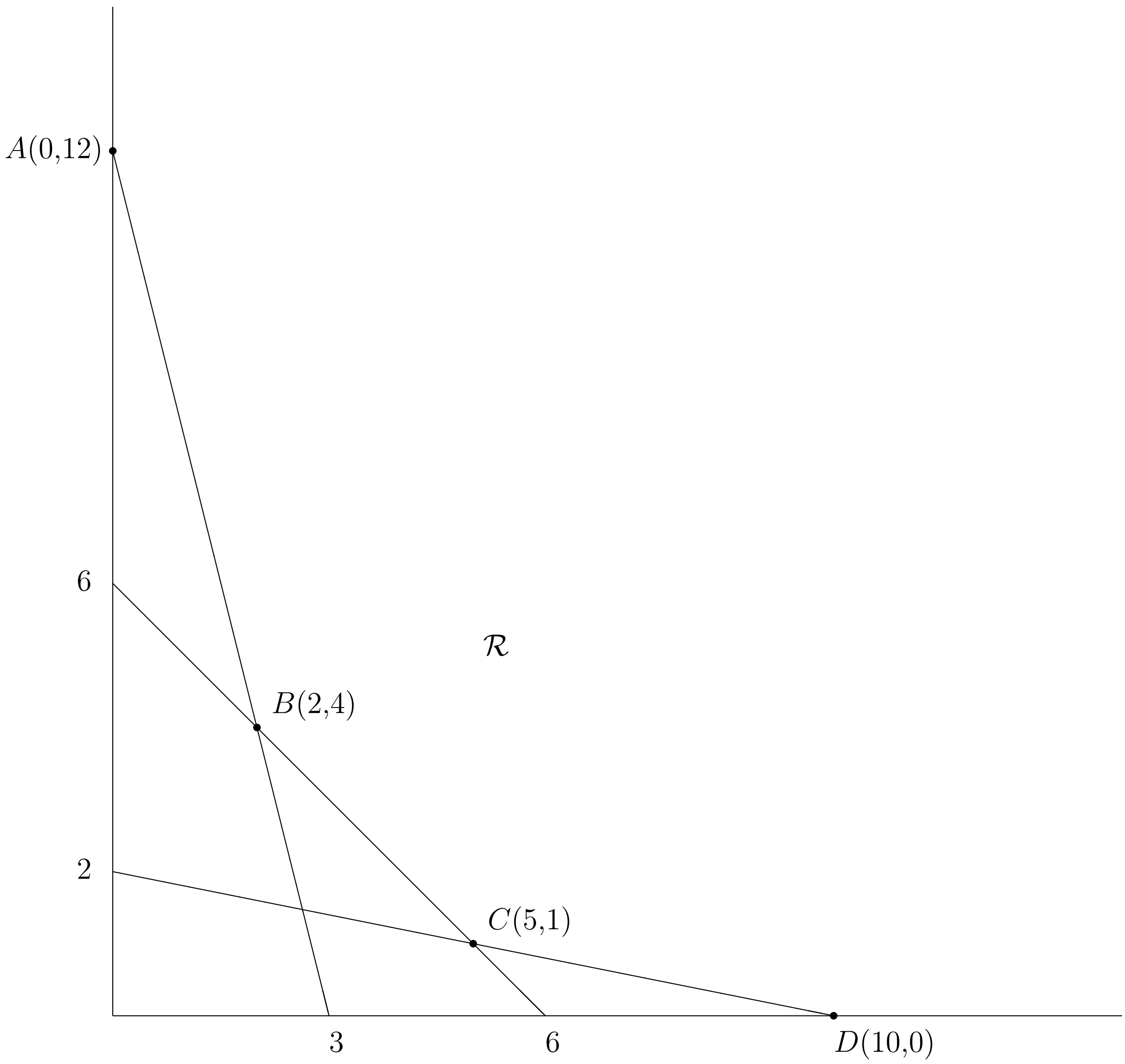
Restant de la segona equació la primera, tenim $4y = 4$; $y = 1$. Substituint aquest valor de y a la primera equació, dóna $x = 5$. Aleshores el punt d'intersecció és el $(5, 1)$.

Intersecció de les rectes $x + y = 6$ i $4x + y = 12$:

$$\left\{ \begin{aligned} x + y &= 6 \\ 4x + y &= 12 \end{aligned} \right.$$

Restant de la segona equació la primera, tenim $3x = 6$; $x = 2$. Substituint aquest valor de x a la primera equació, dóna $y = 4$. Aleshores el punt d'intersecció és el $(2, 4)$.

Per tant, la regió factible és la marcada amb $\mathcal{R}$ a la figura següent:



[*Valoració d'aquesta primera part: 2 punts*]

Per minimitzar la funció $f(x,y) = 2x + 3y$, avaluem-la als vèrtexs A, B, C i D:

$f(A) = f(0,12) = 3 \cdot 12 = 36$

$f(B) = f(2,4) = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 16$

$f(C) = f(5,1) = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 13$

$f(D) = f(10,0) = 2 \cdot 10 = 20$

Aleshores el vèrtex que fa mínima la funció és $C = (5,1)$ i $f(5,1) = 13$.

[*Valoració d'aquesta segona part: 0.5 punts*]

7) Calculau l'àrea del recinte limitat per la corba $y = x^3 + x^2 - 2x$ i l'eix d'abscisses.

(2.5 punts)

Solució

Talls de la corba $y = x^3 + x^2 - 2x$ amb l'eix d'abscisses:

$x^3 + x^2 - 2x = 0; \quad x(x^2 + x - 2) = 0; \quad x = 0 \;\text{ o }\; x^2 + x - 2 = 0.$

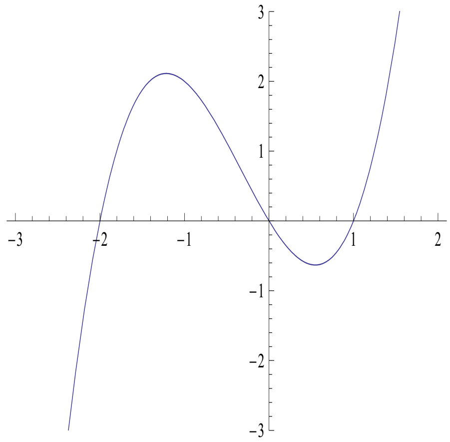
Resolem aquesta última equació:

$x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm3}{2}$. Aleshores $x = 1$ o $x = -2$.

Consegüentment, la corba talla l'eix d'abscisses quan $x = -2, 0, 1$.

A més, tenim que $\lim_{x\to\infty}(x^3 + x^2 - 2x) = \infty$ i $\lim_{x\to-\infty}(x^3 + x^2 - 2x) = -\infty$.

Amb aquesta informació podem fer un esbós de la corba que mostri el recinte del qual hem de calcular l'àrea.



El recinte està una part per sobre de l'eix d'abscisses (quan $-2 \le x \le 0$) i l'altra part per sota (quan $0 \le x \le 1$).

[*Valoració d'aquesta primera part: 1 punt*]

Aleshores l'àrea A ve donada per

$$A = \int_{-2}^{0}(x^3 + x^2 - 2x)\mathrm{d}x - \int_{0}^{1}(x^3 + x^2 - 2x)\mathrm{d}x =$$

[*Valoració d'aquesta segona part: 0.5 punts*]

$$\Big[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\Big]_{-2}^{0} - \Big[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\Big]_{0}^{1} =$$

$$-\Big(\frac{(-2)^4}{4} + \frac{(-2)^3}{3} - (-2)^2\Big) - \Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\Big) = -\Big(4 - \frac{8}{3} - 4\Big) - \Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\Big) =$$

$$\frac{8}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{32 - 3 - 4 + 12}{12} = \frac{37}{12} = 3.08\overline{3}\ u^2$$

[*Valoració d'aquesta tercera part: 1 punt*]

8) La vida mitjana d'una mostra presa a l'atzar de 144 bombetes de baix consum d'un determinat tipus és de 10200 hores, i la desviació típica, de 180 hores. Calculau l'interval de confiança aproximat per a la mitjana poblacional per a un nivell de confiança del 97%. *(2.5 punts)*

Solució

$1-\alpha = 0.97$, $\alpha = 0.03$, $\frac{\alpha}{2} = 0.015$. Aleshores $1-\frac{\alpha}{2} = 0.985$ i, observant la taula de la $N(0,1)$, li correspon un $z_{\alpha/2} = 2.17$

[*Valoració d'aquesta primera part: 0.5 punts*]

L'interval de confiança per a la mitjana poblacional és

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Com que no coneixem σ, la substituïm per la desviació típica mostral s. Aleshores, en el nostre cas, tenim:

$$\left(10200 - 2.17\frac{180}{\sqrt{144}},\ 10200 + 2.17\frac{180}{\sqrt{144}}\right)$$

[*Valoració d'aquesta segona part: 1.5 punts*]

$$= (10200 - 2.17 \cdot 15,\ 10200 + 2.17 \cdot 15) = (10200 - 32.55,\ 10200 + 32.55) = (10167.45,\ 10232.55)$$

[*Valoració d'aquesta tercera part: 0.5 punts*]

Prova d'accés a la Universitat (2010)

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials

Model 1

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.
Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.
Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Opció A

1. La suma de les tres xifres d'un determinat nombre és 13. La xifra de les centenes excedeix en 4 unitats la de les desenes. Si s'intercanvia la xifra de les unitats amb la de les centenes, el nombre augmenta en 495 unitats. De quin nombre es tracta? (10 punts)

2. Es vol construir una capsa rectangular sense tapa a la part superior i de base quadrada, amb 108 decímetres quadrats de material. Quines han de ser les dimensions de la capsa per tal d'obtenir-la de volum màxim? (10 punts)

3. Una urna *A* conté 3 bolles blanques i 2 de negres i una altra urna *B* en conté 4 de blanques i 1 de negra. S'elegeix una urna a l'atzar i se n'extreuen 2 bolles sense reemplaçament.
   a) Calculau la probabilitat que les dues bolles extretes siguin blanques. (6 punts)
   b) Suposant que les dues bolles extretes són blanques, calculau la probabilitat que l'urna elegida hagi estat la A. (4 punts)

4. En una conversa d'un bar d'una determinada població en Joan assegura que almenys el 20% dels habitants de la població porten ulleres graduades i en Pere li contesta que no ho creu. Aleshores en Pere decideix prendre una mostra aleatòria de 256 habitants de la població i resulta que 48 porten ulleres graduades. A un nivell de significació de 0.05 té en Pere suficient evidència per refutar l'afirmació d'en Joan? (10 punts)

Opció B

1. Considerau la funció $f(x) = x \ln \frac{x}{a}, a > 0$. Donau el valor de a perquè *f(x)* tingui un mínim relatiu a $x = 1$. (10 punts)

2. Un celler vol preparar dos tipus de lots, L_1 i L_2. Cada lot del tipus L_1 està format per 1 ampolla de vi negre, 2 de vi rosat i 1 de vi blanc, i cada lot del tipus L_2 està format per 2 ampolles de vi negre, 1 de vi rosat i 1 de vi blanc. Amb cada lot del tipus L_1 s'obté un benefici de 6 euros, i amb cada lot del tipus L_2, un de 4 euros. El celler disposa de 1000 ampolles de vi negre, 1000 de vi rosat i 600 de vi blanc. Quants lots de cada tipus s'han de preparar per tal d'obtenir un benefici màxim? (10 punts)

3. Considerau el següent sistema d'equacions depenent del paràmetre m

$$\begin{cases} 2x + y - z = -3, \\ x - 2y + 2z = 1, \\ 2x + y + mz = 5. \end{cases}$$

a) Discutiu-lo (5 punts)
b) Resoleu-lo per als valors de m que el fan compatible determinat. (4 punts)
c) Quant val la solució per a m=4? (1 punt)

4. Se suposa que la vida de les bombetes que fabrica una determinada empresa segueix una distribució normal de mitjana desconeguda i desviació típica 60 hores. Per estimar la vida mitjana es vol fer servir una mostra de mida n. Calculau el valor mínim de n per tal que, amb un nivell de confiança del 99%, l'error en l'estimació sigui menor que 10 hores. (10 punts)

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL N(0, 1)

$$F(z) = P(X \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9646	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

Prova d'accés a la Universitat (2010)

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials

Criteris específics de correcció

Model 1

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té igual valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes per aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Opció A

1.

- Plantejar correctament el sistema que cal resoldre: 6 punts.
- Solució correcta del sistema donant el nombre buscat: 4 punts.

2.

- Plantejar correctament la funció que cal minimitzar i posar-la com a funció d'una sola variable: 4 punts.
- Càlcul correcte de la derivada: 2 punts.
- Solució de l'equació V'=0: 1 punt.
- Comprovació del caràcter de màxim: 2 punts.
- Especificar les dimensions de cada costat: 1 punt.

3.

- Apartat a): 6 punts.
- Apartat b): 4 punts.

4.

- Establiments de les hipòtesis: 2 punts.
- Càlcul correcte del valor crític: 2 punts.
- Càlcul correcte de la zona d'acceptació: 4 punts.
- Verificació i discussió: 2 punts.

Opció B

1.

- Càlcul correcte de la derivada: 3 punts.
- Resoldre l'equació $f'(1)=0$ i càlcul correcte del valor de *a*: 4 punts.
- Comprovar que $x=1$ amb el valor trobat de *a* és un mínim: 3 punts.

2.

- Càlcul correcte de la regió factible, indicant-ne el vèrtex i proporcionant-ne un dibuix: 7 punts.
- Determinar la solució del problema especificant la seva relació amb el problema: 3 punts.

3.

- Discussió del sistema: 5 punts.
- Solució correcta en el cas compatible determinat: 4 punts.
- Solució correcta en el cas m=4: 1 punt.

4.

- Càlcul correcte del valor crític: 4 punts.
- Càlcul correcte del valor de *n*: 6 punts.

Prova d'accés a la Universitat (2010)

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials

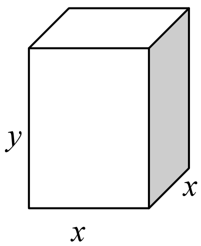
Solucions

Model 1

Opció A

1. El nombre és de la forma: $100x + 10y + z$.
   Per a trobar-lo hem de resoldre el sistema següent:
$$\begin{cases} x + y + z = 13, \\ x = y + 4, \\ 100z + 10y + x = 100x + 10y + z + 495. \end{cases}$$
   De la tercera equació tenim que: $99z - 99x = 495 \Rightarrow z - x = 5 \Rightarrow z = x + 5$.
   Substituint *z* en les altres dues equacions tenim que
$$\begin{cases} x + y + x + 5 = 13, \\ x = y + 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 8, \\ x = y + 4. \end{cases} \Rightarrow 2(y + 4) + y = 8 \Rightarrow y = 0, x = 0 + 4 = 4$$
   i $z = 4 + 5 = 9$.
   Per tant, el nombre demanat és 409.

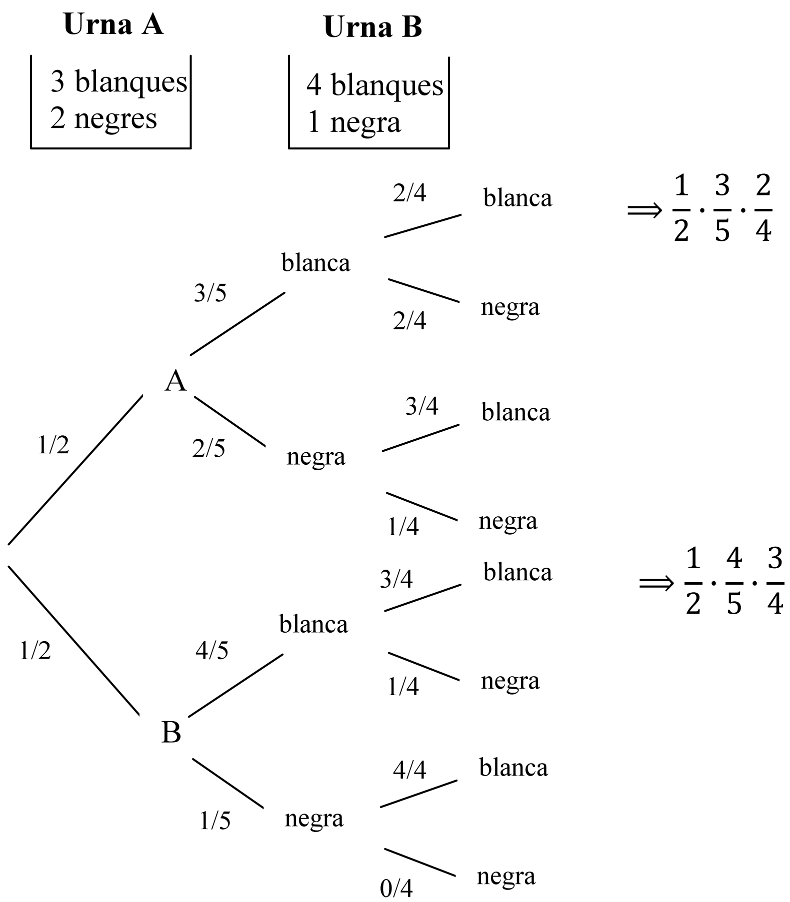
2. Hem de maximitzar la funció volum que ve donada per: $V = x^2 y$.
$$108 = x^2 + 4xy \Rightarrow 108 - x^2 = 4xy \Rightarrow y = \frac{108 - x^2}{4x}.$$



Substituint el valor de *y* en l'expressió del volum, hem de maximitzar la funció
$$V = \frac{108x - x^3}{4}.$$
   Aleshores s'ha de calcular el valor de *x* que fa màxima aquesta funció volum.
$$V' = \frac{108 - 3x^2}{4}; \; V' = 0 \Rightarrow 108 - 3x^2 = 0 \Rightarrow 108 = 3x^2 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm 6.$$
$$V'' = \frac{-6x}{4}; \; V''(6) = \frac{-36}{4} = -9 < 0 \Rightarrow màxim.$$
   Aleshores, $x = 6$, $y = \frac{108 - 36}{24} = 3$. Les dimensions són, per tant, $x = 6$ i $y = 3$.

3. a)

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{20}+\frac{6}{20}=\frac{9}{20}.$$



b)

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{\frac{3}{20}}{\frac{9}{20}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}.$$

4.

$$\begin{cases} H_0: & p \geq 0.2; \\ H_1: & p < 0.2. \end{cases}$$

α = 0.05, aleshores $z_\alpha = 1.645$. La nova proporció és $p' = \frac{48}{256} = 0.1875$.

La zona d'acceptació vindrà determinada per l'interval $\left(p_0 - z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot q_0}{n}}, +\infty\right)$

$$p_0 - z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot q_0}{n}} = 0.2 - 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.2 \cdot 0.8}{256}} = 0.2 - 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.16}{256}}$$
$$= 0.2 - 1.645 \cdot 0.025 = 0.2 - 0.041125 = 0.158875.$$

Així, la zona d'acceptació és $(0.158875, +\infty)$. Com que *p'* està dins la zona d'acceptació, en Pere no té suficients evidències per refutar l'afirmació d'en Joan.

Opció B

1.

$$f(x) = x\ln\frac{x}{a}, a > 0.$$

$$f'(x) = \ln\frac{x}{a} + \frac{1}{x}\cdot x = \ln\frac{x}{a} + 1.$$

Com que *f(x)* ha de tenir un mínim a $x = 1$ haurà de ser $f'(1) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \ln\frac{x}{a} + 1 = 0 \Longrightarrow \ln\frac{x}{a} = -1 \Longrightarrow e^{\ln\frac{x}{a}} = e^{-1} \Longrightarrow \frac{x}{a} = \frac{1}{e} \Longrightarrow x\cdot e = a.$$

Si $x = 1$, tenim que $1\cdot e = a \Longrightarrow a = e$.

Vegem que efectivament amb aquest valor de $a = e$ tenim un mínim per a x=1:

$$f''(x) = \frac{1}{x} \Longrightarrow f''(1) = 1 < 0, \text{per tant, a } x = 1 \text{ tenim un mínim.}$$

2. El benefici per maximitzar és la funció $F(x,y) = 6x + 4y$, on x representa el nombre de lots del tipus L_1 i y representa el nombre de lots del tipus L_2, i el conjunt de restriccions és:

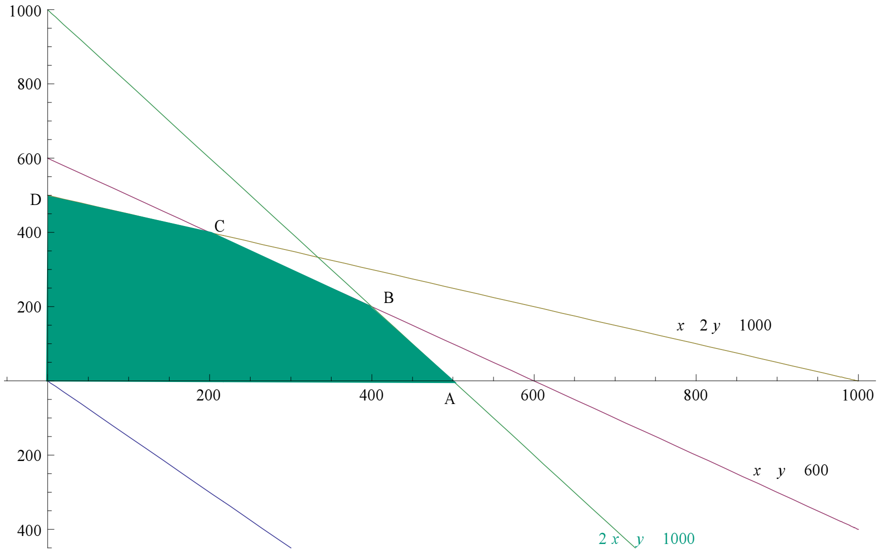
$$\begin{cases} x \geq 0, \qquad y \geq 0 \\ x + 2y \leq 1000 \\ 2x + y \leq 1000 \\ x + y \leq 600 \end{cases}$$

$x + 2y = 1000$ talla als eixos a (0,500), (1000,0).
$2x + y = 1000$ talla als eixos a (0,1000), (500,0).
$x + y = 600$ talla als eixos a (0,600), (600,0).
Calculem els punts de tall entre les diferents rectes:

$$\begin{cases} x + 2y = 1000, \\ 2x + y = 1000. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2(1000 - 2x) = 1000 \\ y = 1000 - 2x \end{cases} \Longrightarrow x = \frac{1000}{3}, y = \frac{1000}{3}.$$

$$\begin{cases} x + 2y = 1000, \\ x + y = 600. \end{cases} \Longrightarrow x = 200, y = 400 \Longrightarrow C = (200,400)$$

$$\begin{cases} 2x + y = 1000, \\ x + y = 600. \end{cases} \Longrightarrow x = 400, y = 200 \Longrightarrow B = (400,200)$$



Els punts que cal considerar per trobar el màxim són: A=(500,0), B=(400,200), C=(200,400), D=(0,500).

$$\begin{cases} F(\mathrm{A}) = F(500{,}0) = 6 \cdot 500 + 4 \cdot 0 = 3000 \\ F(\mathrm{B}) = F(400{,}200) = 6 \cdot 400 + 4 \cdot 200 = 3200 \\ F(\mathrm{C}) = F(200{,}400) = 6 \cdot 200 + 4 \cdot 400 = 2800 \\ F(\mathrm{D}) = F(0{,}500) = 6 \cdot 0 + 4 \cdot 500 = 2000 \end{cases}$$

El màxim es troba al punt B=(400,200) i, per tant, s'han de preparar 400 lots del tipus L_1 i 200 lots del tipus L_2.

3. a)

$$\begin{cases} 2x + y = -3 + z, \\ x + 2z = 1 + 2y, \\ 2x + y = 5 - mz. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - z = -3, \\ x - 2y + 2z = 1, \\ 2x + y + mz = 5. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & m & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[F1\leftrightarrow F2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & m & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{2F1-F2\to F2 \\ F3-2F1\to F3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & m-4 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F3+F2\to F3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & m+1 & 8 \end{array}\right)$$

Si $m + 1 = 0$, la darrera fila és $(0\ \ 0\ \ 0\ \ 8)$ i el sistema és incompatible, no té solució.
Si $m + 1 \neq 0$, el sistema és compatible determinat i té solució única.

b) Si $m + 1 \neq 0$, el sistema que ens ha quedat després d'aplicar Gauss és:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 1, \\ -5y + 5z = 5, \\ (m+1)z = 8. \end{cases}$$

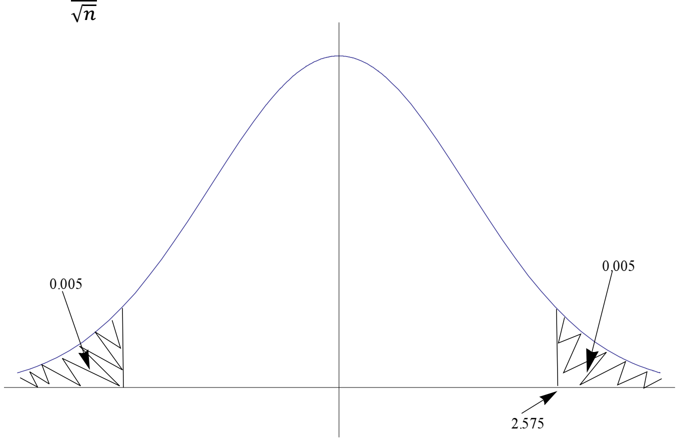
La solució d'aquest sistema és

$$(x, y, z) = \left(-1, \frac{7-m}{m+1}, \frac{8}{m+1}\right).$$

c) Si $m = 4$, la solució és

$$(x, y, z) = \left(-1, \frac{7-4}{4+1}, \frac{8}{4+1}\right) = \left(-1, \frac{3}{5}, \frac{8}{5}\right).$$

4. La vida de les bombetes es distribueix $N(\mu, 60)$. La vida mitjana $\bar{x}$ de les bombetes de mostra de mida n estretes de la població anterior es distribueix $N\left(\mu, \frac{60}{\sqrt{n}}\right)$. Aleshores $z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{60}{\sqrt{n}}}$ es distribueix $N(0,1)$.



1-0.005=0.995

$P(-2.575 < z < 2.575) = P\left(\bar{x} - 2.575 \cdot \frac{60}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + 2.575 \cdot \frac{60}{\sqrt{n}}\right) = 0.99 \Longrightarrow$

$2.575 \cdot \frac{60}{\sqrt{n}} = 10$ $(10\ hores\ \text{és}\ el\ màxim\ error\ d'estimació) \Longrightarrow n \geq 239$

(agafant 2.57 surt $n \geq 238$ i agafant 2.58 surt $n \geq 240$)

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials

Model 3

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.
Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.
Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Opció A

1. Considerau el sistema d'equacions

$$\begin{cases} x = 1, \\ -x + 2y + 3z = 2, \\ y + 2z = 3. \end{cases}$$

   a) Expressau-lo en forma matricial $A \cdot X = B$ on A és la matriu del sistema, X la matriu de les incògnites i B la matriu dels termes independents. (2 punts)
   b) Calculau la matriu inversa de A, A^{-1}. (5 punts)
   c) Resoleu l'equació matricial $A \cdot X = B$. (3 punts)

2. Certa persona disposa de 60.000 € com a màxim per repartir entre dos tipus d'inversió A i B, sabent que el rendiment de la inversió serà del 9% en l'opció A i del 12% en la B. En l'opció A desitja invertir entre 12.000 € i 42.000 €. A més, vol destinar a aquesta opció tants de diners, almenys, com a la B.
   a) Quines quantitats pot invertir en cadascuna de les opcions? Planteja el problema com un problema de programació lineal i representa gràficament el seu conjunt factible de solucions. (8 punts)
   b) Quina quantitat ha d'invertir en cadascuna per optimitzar el rendiment global? A quant ascendirà? (2 punts)

3. En una nit i el matí següent, la temperatura T (en graus centígrads) d'una certa regió varia amb el temps t segons la funció

$$T(t) = t^2 - 9t + 8, \quad 0 \leq t \leq 12.$$

   a) Quina temperatura hi havia a les 2 del matí? (1 punt)
   b) Quina va ser la temperatura màxima? (4 punts)
   c) Quin va ser l'interval de variació de la temperatura des de les 0 hores a les 12 hores? (3 punts)
   d) A quina hora hi va haver una temperatura de zero graus? (2 punts)

4. En una bossa hi tenim tres daus iguals, llevat del color de les cares. El dau D1 té quatre cares blanques i dues de vermelles, el dau D2 té dues cares blanques i quatre de vermelles, i el dau D3 té tres cares blanques i tres de vermelles. És extret a l'atzar un dels tres daus i llançat a l'aire. Sabent que la cara girada cap amunt ha estat blanca, quina és la probabilitat que el dau triat hagi estat D1? Quina la probabilitat que hagi estat triat D2? Quina la probabilitat que hagi estat triat D3? (10 punts)

Opció B

1. Les altures de tres nois que es diuen Marc, Pau i Navarro estan relacionades com segueix. Si l'altura d'en Marc augmenta el triple de la diferència de les altures d'en Pau i d'en Navarro, en Marc seria igual d'alt que en Navarro. Les altures dels tres sumen 515 centímetres. Vuit vegades l'altura d'en Pau equival a 9 vegades l'altura d'en Marc.
   a) Plantejau un sistema d'equacions per esbrinar l'altura d'en Marc, d'en Pau i d'en Navarro. (6 punts)
   b) Resoleu el sistema d'equacions i, per tant, el problema. (4 punts)

2. Dibuixau la regió determinada per les inequacions
   $x \geq 0, y \geq 0, 3x + 2y \leq 30, 3x + 4y \leq 48, 30x + 10y \leq 240.$ (8 punts)
   Maximitzau la funció $F(x, y) = x + y$, sotmesa a les restriccions donades per aquestes inequacions. (2 punts)

3. Es considera la funció logística donada per
$$S(x) = \frac{1200}{1 + 30 \cdot e^{-0.9x}}.$$
   Calculau, si és que existeixen:
   a) Les asímptotes horitzontals (4 punts)
   b) Els intervals de creixement i decreixement i els màxims i mínims. (6 punts)

4. La Regidoria de Joventut d'un ajuntament maneja la dada que l'edat a la qual els fills s'independitzen dels pares és una normal amb mitjana 29 anys i desviació típica 3 anys. Encara que la desviació típica no planteja dubtes, sí que se sospita que la mitjana ha descendit, sobretot per la política d'ajuda a l'ocupació que ha portat a terme l'Ajuntament. Així, d'un estudi recent sobre 100 joves que s'acaben d'independitzar, s'ha obtingut una mitjana de 28.1 anys d'edat. Amb un nivell de significació de l'1%, pot defensar-se que l'edat mitjana no ha disminuït, enfront de l'afirmació que sí que ho ha fet, com sembla que indiquen les dades? Plantejau el contrast o test d'hipòtesi i resoleu-lo. (10 punts)

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL *N*(0, 1)

$$F(z) = P(X \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9646	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

Prova d'accés a la Universitat (2010)

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials

Criteris específics de correcció

Model 3

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té igual valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes per aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Opció A

1.

a) Expressió en forma matricial amb indicació de les matrius: 2 punts.
b) Càlcul correcte de la matriu inversa: 5 punts.
c) Solució correcta de l'equació: 3 punts.

2.

a) Càlcul correcte de la regió factible, indicant-ne el vèrtex i proporcionant-ne un dibuix: 8 punts.
b) Determinar la solució del problema de programació lineal especificant la seva relació amb l'enunciat del problema: 2 punts.

3.

a) Càlcul de $T(2)$: 1 punt.
b) Determinació correcta dels extrems relatius de T mitjançant $T'=0$: 2 punts. Determinació correcta del màxim de T: 2 punts.
c) Determinació correcta de l'interval: 3 punts.
d) Solució correcta de l'equació $T(t)=0$ indicant la relació amb l'enunciat: 2 punts.

4.

- Especificació de les dades donades al problema com a probabilitats: 4 punts.
- Càlcul correcte de la probabilitat total: 3 punts.
- Càlcul correcte de les probabilitats demanades: 1 punt per cadascuna.

Opció B

1.

a) Plantejar correctament el sistema que cal resoldre: 6 punts.
b) Solució correcta del sistema i, per tant, del problema: 4 punts.

2.

c) Càlcul correcte de la regió factible, indicant-ne el vèrtex i proporcionant-ne un dibuix: 8 punts.
d) Determinar el mínim de la funció donada: 2 punts.

3.

a) Càlcul i determinació de les asímptotes horitzontals: 2 punts per asímptota.
b) Càlcul correcte de la derivada: 2 punts. Observar que *S'*(x)>0 en tot el domini i, per tant, creixent: 2 punts. Observar que no existeixen ni màxims ni mínims: 2 punts.

4.

- Establiments de les hipòtesis: 2 punts.
- Càlcul correcte del valor crític: 2 punts.
- Càlcul correcte de la zona d'acceptació: 4 punts.
- Verificació i discussió: 2 punts.

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials

Solucions

Model 3

Opció A

1. **a)** Hem d'expressar en forma matricial el sistema:

$$\begin{cases} x = 1, \\ -x + 2y + 3z = 2, \\ y + 2z = 3. \end{cases}$$

En forma matricial queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Sent

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

b) Per calcular la inversa de *A* utilitzarem el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F1+F2\to F2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[2F3-F2\to F3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F2-3F3\to F2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}F2\to F2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Per tant

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) Per resoldre el sistema matricial fem:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+4-9 \\ -1-2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. a) Els ingressos per maximitzar vénen donats per la funció F(x,y)=0.09x+0.12y, on x representa la quantitat per invertir en A i y representa la quantitat `per invertir en B, i el conjunt de restriccions és:

$$\begin{cases} x \geq 12000 \\ x \leq 42000 \\ x \geq y \\ x + y \leq 60000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Per representar gràficament el conjunt de solucions dibuixarem les rectes: x=12000, y=42000, y=x, x=0, y=0 i $x + y = 60000$, i els vèrtexs del conjunt, determinats per la intersecció de les diferents rectes.

El conjunt de les restriccions determina la regió factible. En aquest cas és un polígon convex de 5 costats. Calculem ara el seus vèrtexs mitjançant la intersecció de les dues rectes que determinen cada vèrtex.

Vèrtex A:

$$\begin{cases} x = 12000 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A = (12000{,}0)$$

Vèrtex B:

$$\begin{cases} x = 42000 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B = (42000{,}0)$$

Vèrtex C:

$$\begin{cases} x = 42000 \\ x + y = 60000 \end{cases} \Rightarrow C = (42000{,}18000)$$

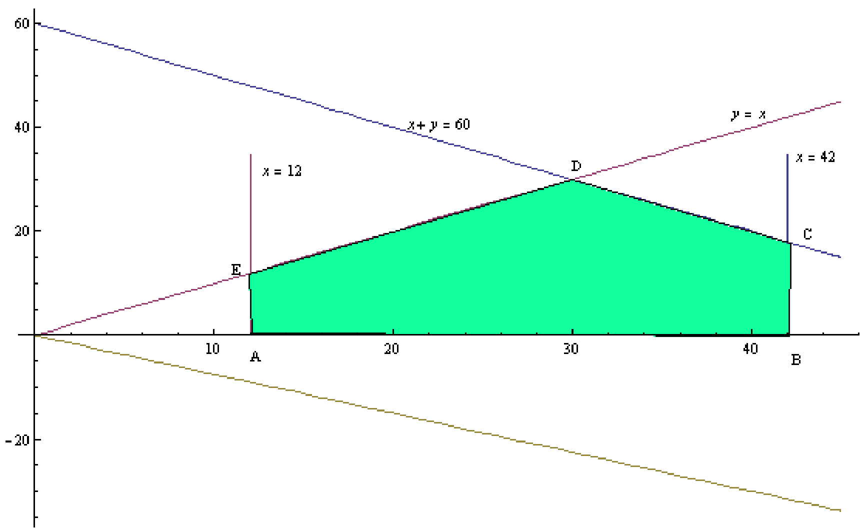
Vèrtex D:

$$\begin{cases} x + y = 60000 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow A = (30000{,}30000)$$

Vèrtex E:

$$\begin{cases} x = 12000 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow E = (12000{,}12000)$$

A la figura tenim la representació gràfica, els eixos en milers de euros.



El conjunt de solucions possibles serà el conjunt de solucions que es troben en l'interior o la frontera del recinte format per les parelles de nombres racionals amb dues xifres decimals com a màxim.

b) Per contestar la pregunta analitzem el valor que pren la funció per maximitzar F(x,y)=0.09x+0.12y en cadascun dels vèrtexs del polígon.

F(A)=F(12000,0)=1080 F(D)=F(30000,30000)=6300
F(B)=F(42000,0)=3780 F(E)=F(12000,12000)=2520
F(C)=F(42000,18000)=5940

La funció presenta un màxim en el vèrtex D=(30000,30000) el valor del qual és de 6.300 €. Per tant, haurà d'invertir 30.000 € en cadascun dels tipus d'inversió per optimitzar el rendiment global. D'aquesta manera, el rendiment ascendirà a 6.300 €.

3. **a)**

$$T(2) = 2^2 - 9 \cdot 2 + 8 = 4 - 18 + 8 = -6\,.$$

b) La temperatura màxima es calcula fent *T'*(t)=0.

$$T'(t) = 2t - 9 \Rightarrow t = \frac{9}{2} = 4.5$$

Com que $T''(t) = 2 > 0$, tenim que *t*=4.5 és un mínim, sent la funció sempre creixent. Per tant, la temperatura màxima s'aconsegueix a t=12, i és *T*(12)=44 °C.

c) A b) hem determinat que a *t*=4.5 es troba el mínim de temperatura, que és $T(4.5) = 4.5^2 - 9 \cdot 4.5 + 8 =$-12.25 °C. Recordem que, a més, el màxim de la temperatura era 44 °C, per tant, l'interval de variació de la temperatura és $[-12.25,44]$.

d) 0=$t^2 - 9t + 8 \Rightarrow t = 1,\ t = 8.$
Als 0 °C s'hi arriba a la 1 de la nit i a les 8 del matí.

4. Considerem els següents successos:
S1={ser triat D1}   S2={ser triat D2}   S3={ser triat D3}
S={cara blanca girada cap amunt}
Com que els tres daus són iguals, excepte pel color de les cares, de l'enunciat tenim les següents probabilitats

$$P(S1) = \frac{1}{3},\ P(S2) = \frac{1}{3}, P(S3) = \frac{1}{3}$$

$$P(S/S1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, P(S/S2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, P(S/S3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Ens demanen calcular les següents probabilitats

$$P(S1/S), \qquad P(S2/S),\ \ i \quad P(S3/S).$$

Sabem que

$$P(Si/S) = \frac{P(Si \cap S)}{P(S)} = \frac{P(Si) \cdot P(S/Si)}{P(S)},\ \ i = 1,2,3.$$

Per tant, hem de calcular *P*(*S*), que sabem que ve donada per:

$$P(S) = P(S1) \cdot P(S1/S) + P(S2) \cdot P(S2/S) + P(S3) \cdot P(S3/S)$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6}\right) = \frac{9}{18}.$$

Així:

$$P(S1/S) = \frac{P(S1) \cdot P(S/S1)}{P(S)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6}}{\frac{9}{18}} = \frac{4}{9},$$

$$P(S2/S) = \frac{P(S2) \cdot P(S/S2)}{P(S)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{6}}{\frac{9}{18}} = \frac{2}{9},$$

$$P(S3/S) = \frac{P(S3) \cdot P(S/S3)}{P(S)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{6}}{\frac{9}{18}} = \frac{3}{9}.$$

Opció B

1. **a)** Siguin *x* l'altura d'en Marc, *y* l'altura d'en Pau i *z* l'altura d'en Navarro. El sistema que hem de resoldre és el següent:

$$\begin{cases} x + 3(y - z) = z, \\ x + y + z = 515, \\ 8y = 9x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 4z = 0, \\ x + y + z = 515, \\ -9x + 8y = 0. \end{cases}$$

b) Per resoldre el sistema utilitzarem el mètode de substitució.

$$\begin{cases} x + 3y - 4z = 0, \\ x + y + z = 515, \\ -9x + 8y = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 4z = 0, \\ x + y + z = 515, \\ x = \frac{8}{9}y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{8}{9}y + 3y - 4z = 0, \\ \frac{8}{9}y + y + z = 515, \\ x = \frac{8}{9}y. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{35}{9}y - 4z = 0, \\ \frac{17}{9}y + z = 515, \\ x = \frac{8}{9}y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{35}{9}y - 4z = 0, \\ \frac{68}{9}y + 4z = 2060, \\ x = \frac{8}{9}y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{35}{9}y - 4z = 0, \\ \frac{103}{9}y = 2060, \\ x = \frac{8}{9}y. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{35}{9}y - 4z = 0, \\ y = \frac{2060 \cdot 9}{103} = 108, \\ x = \frac{8}{9}y. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = \frac{35}{9 \cdot 4}y, \\ y = \frac{2060 \cdot 9}{103} = 108, \\ x = \frac{8}{9}y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{35}{9 \cdot 4}108 = 175, \\ y = \frac{2060 \cdot 9}{103} = 108, \\ x = \frac{8}{9}y. \end{cases} \Rightarrow$$

L'altura d'en Marc és 160 cm.
L'altura d'en Pau és 180 cm.
L'altura d'en Navarro és 175 cm.

2. **a)** El conjunt de restriccions és:

$$\begin{cases} x \geq 0, \qquad y \geq 0 \\ 3x + 2y \leq 30 \\ 3x + 4y \leq 48 \\ 30x + 10y \leq 240 \end{cases}$$

Per dibuixar la regió representarem les rectes: $x = 0, y = 0, 3x + 2y = 30, 3x + 4y = 48, 30x + 10y = 240$.

$3x + 2y = 30$ talla els eixos a (0,15), (10,0).
$3x + 4y = 48$ talla els eixos a (0,12), (16,0).
$30x + 10y = 240$ talla els eixos a (0,24), (8,0).
Calculem els vèrtexs que són els punts de tall entre les diferents rectes:
Vèrtex A:
$A = (0,0)$.

Vèrtex B:

$$\begin{cases} 30x + 10y = 240, \\ \quad y = 0. \end{cases} \Longrightarrow B = (8{,}0).$$

Vèrtex C:

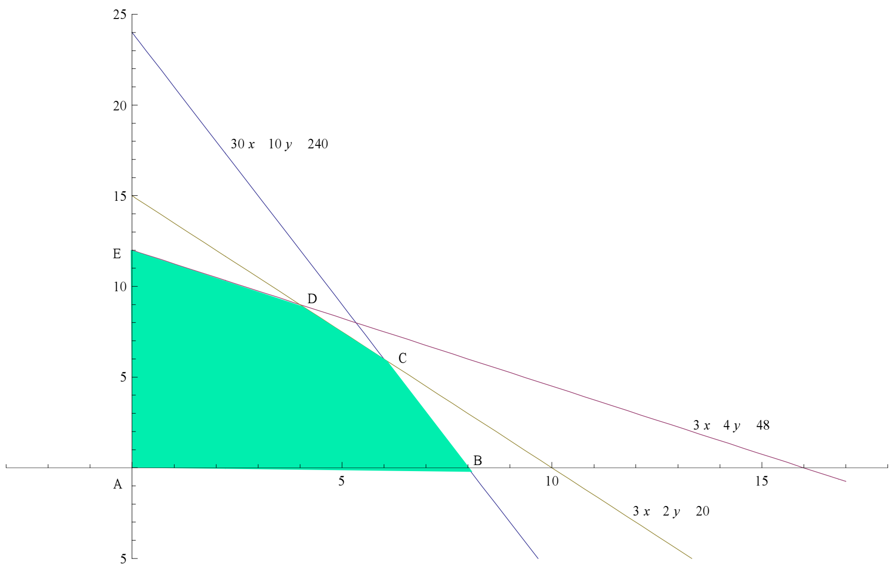
$$\begin{cases} 3x + 2y = 30, \\ 30x + 10y = 240. \end{cases} \Longrightarrow C = (6{,}6).$$

Vèrtex D:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 30, \\ 3x + 4y = 48. \end{cases} \Longrightarrow D = (4{,}9).$$

Vèrtex E:

$$\begin{cases} x = 0, \\ 3x + 4y = 48. \end{cases} \Longrightarrow D = (0{,}12).$$



b)
Els punts que cal considerar per trobar el màxim són: A=(0,0), B=(8,0), C=(6,6), D=(4,9),E=(0,12), la funció per maximitzar és F(x,y)=2x+3y.

$$\begin{cases} F(\mathrm{A}) = F(0{,}0) = 0 \\ F(\mathrm{B}) = F(8{,}0) = 8 \\ F(\mathrm{C}) = F(6{,}6) = 12 \\ F(\mathrm{D}) = F(4{,}9) = 13 \\ \mathrm{F(E) = F(0{,}12) = 12} \end{cases}$$

La funció té un màxim en el vèrtex D=(4,9) el valor del qual és 13.

3. **a)** Com que

$$\lim_{x\to-\infty} S(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1200}{1 + 30 \cdot e^{-0.9x}} = 0,$$

y=0 és una asímptota horitzontal de $S(x)$ cap a menys infinit. Per altra part,

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1200}{1 + 30 \cdot e^{-0.9x}} = 1200.$$

Aleshores *y*=1200 és una asímptota horitzontal de $S(x)$ cap a més infinit.

b) $S'(x) = \frac{-1200\cdot(-0.9\cdot30\cdot e^{-0.9x})}{(1+30\cdot e^{-0.9x})^2} = \frac{32400\cdot e^{-0.9x}}{(1+30\cdot e^{-0.9x})^2}$.

Observau que sempre *S*'(x)>0, ja que així són el numerador i el denominador i, a més, $S'(x) \neq 0$. En conseqüència, *S*(x) és creixent en tot el seu domini i no té ni màxim ni mínims.

4.

Les hipòtesis són: $\begin{cases} H_0\colon\ \mu \geq 29, \\ H_1\colon\ \mu < 29. \end{cases}$

El contrast d'hipòtesis és unilateral amb un nivell de significació $\alpha = 0.01$, al qual li correspon $z_\alpha = 2.33$.

Construïm ara la regió d'acceptació

$$\left(\mu - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty\right)$$

amb una grandària de la mostra *n*=100 i amb la desviació típica de 3.

$$z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}33 \cdot \frac{3}{\sqrt{100}} = 2{,}33 \cdot \frac{3}{10} = 0{,}699,$$

la regió d'acceptació és

$$(29 - 0{,}699, +\infty) = (28{,}301, +\infty)$$

La mitjana de les mostres és 28,1 i $28{,}1 \notin (28{,}301, +\infty)$ queda fora de la regió d'acceptació, rebutjam la hipòtesis nul·la, és a dir, no podem afirmar amb un nivell de confiança de l'1% que l'edat mitjana d'emancipació dels fills en la població considerada sigui més gran o igual que 29 anys; concloem, per tant, que ha disminuït.

(Nota: considerau que també es pot resoldre per interval de confiança.)

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials

Model 3

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.
Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.
Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Opció A

1. Considerau el sistema d'equacions en forma matricial $A \cdot X = 0$, on

$$A=\begin{pmatrix} m & -1 & 4 \\ 3 & m & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Determinau per a quins valors de *m* la matriu *A* no té inversa. (4 punts)
   b) Calculau, si és que és possible, la inversa de *A* quan $m = 0$. (4 punts)
   c) Determinau les solucions del sistema $A \cdot X = 0$ quan $m = 0$. (2 punts)

2. Un tren de mercaderies pot arrossegar com a màxim 27 vagons. En cert viatge transporta cotxes i motocicletes. Per a cotxes ha de dedicar un mínim de 12 vagons, i per a motocicletes, no menys que la meitat dels vagons dedicats a cotxes.
   Si els ingressos de la companyia ferroviària són de 540 euros per cada vagó de cotxes i de 360 euros per cada vagó de motos, com s'han de distribuir els vagons per obtenir el màxim ingrés? Quin és aquest ingrés? S'ha de plantejar el problema com un problema de programació lineal, representar gràficament el seu conjunt factible de solucions i resoldre'l.
   (10 punts)

3. Considerau la funció

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^3 - 2x^2 - 6x - 8}.$$

   a) Calculau $\lim_{x\to 4} f(x)$. (4 punts)
   b) Quant deu valer $f(4)$ perquè la funció *f*(*x*) sigui contínua a $x = 4$? (2 punts)
   c) Calculau $f'(x)$ en qualsevol punt $x \neq 4$ simplificant el resultat. (4 punts)

4. En una determinada universitat hi ha estudiants d'enginyeria, de ciències i de lletres. Acaben els estudis el 15% d'enginyeria, el 20% de ciències i el 35% dels estudiants de lletres. Se sap que el 20% estudia enginyeria, el 30% ciències i el 50% lletres.
   a) Especificau els percentatges donats com a probabilitats. (2 punts)
   Prenent un estudiant a l'atzar:
   b) Es demana la probabilitat que hagi acabat els estudis i sigui d'enginyeria. (4 punts)
   c) Ens diu que ha acabat els estudis. Es demana la probabilitat que sigui d'enginyeria. (4 punts)

Opció B

1. Una nació importa 21.000 vehicles mensuals de les marques X, Y, Z, al preu d'1,2, 1,5 i 2 milions d'euros respectivament. Si el total de la importació ascendeix a 33.200 milions, i de la marca X s'importa el 40% de la suma de les altres dues marques,
   a) Quants vehicles de cada marca entren al país? (7 punts)
   b) Quant costa cada unitat de cadascuna de les marques? (3 punts)

2. Les autoritats sanitàries d'una determinada comunitat autònoma planifiquen la contractació de personal sanitari per a la posada en marxa de punts d'atenció continuada (PAC). A la comunitat hi ha dues zones clarament diferenciades, que anomenarem A i B, i cadascuna necessita una dotació específica distinta. Cada PAC de la zona A requereix 3 metges i 3 infermers/es i una inversió de 30 milions d'euros. A la zona B, cada centre necessita 2 metges i 4 infermers/es i una inversió de 10 milions d'euros. Per portar a terme tal projecte es disposa d'un màxim de 30 metges, un màxim de 48 infermers/es i un màxim de 240 milions d'euros.
   a) Quin és el nombre màxim de PAC que poden posar-se en funcionament? Plantejau el problema com un problema de programació lineal i representau gràficament el seu conjunt factible de solucions. (8 punts)
   b) Quants en cada zona? (2 punts)

3. El nombre de persones ingressades a Son Dureta per la grip A després de t setmanes ve donat per la funció
$$P(t) = \frac{350\,t}{2t^2 - 3t + 8} \quad \text{con } t \geq 0.$$
   a) Calculau el màxim nombre de persones ingressades i la setmana en què té lloc. (6 punts)
   b) Després d'haver arribat al màxim, a partir de quina setmana el nombre d'ingressats és més petit que 25? (4 punts)

4. En una oposició en la qual participen milers de candidats es va fer un examen tipus test. La desviació típica de les qualificacions va ser de $\sigma = 10$. Si es tria una mostra de grandària 100, amb mitjana mostral de 71 punts, quin serà l'interval de confiança de la mitjana poblacional amb un nivell de confiança del 90%? (10 punts)

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(0, 1)$

$$F(z) = P(X \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9646	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

Prova d’accés a la Universitat (2011)

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials

Criteris específics de correcció

Model 3

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d’un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l’alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Opció A

1. a)

- Càlcul correcte del determinant: 2 punts.
- Solució correcta de l’equació de segon grau: 1 punt.
- Indicació de l’existència d’inversa quan *m* és diferent de -1 i -3: 1 punt.

b) Càlcul correcte de la matriu inversa: 4 punts.

c) Si es dóna la solució correcta sense cap explicació, 1 punt com a màxim.

2.

Plantejar correctament el problema de programació lineal associat a l’enunciat: 4 punts.
Dibuix correcte de la regió factible, indicant-ne el vèrtex: 4 punts.
Determinar la solució del problema de programació lineal especificant la seva relació amb l’enunciat del problema: 2 punts.

3.

- Càlcul correcte de $\lim_{x\to 4} f(x)$: 4 punts.
- Indicació correcta del valor de $f(4)$: 2 punts.
- Càlcul correcte i simplificat del valor de $f'(x)$: 4 punts. Si el resultat no es dóna simplificat: màxim 2 punts.

4.

a) Especificar correctament els percentatges donats com a probabilitats: 2 punts.
b) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 4 punts.
c) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 4 punts.

Opció B

1.

a) Plantejar correctament el sistema que s'ha de resoldre: 4 punts.
Resoldre correctament el sistema: 3 punts.

b) Donar el cost de cada unitat per marca: 1 punt per marca.

2.

a) Plantejar correctament el problema de programació lineal associat a l'enunciat: 4 punts.
Dibuix correcte de la regió factible, indicant-ne el vèrtex: 3 punts.
Determinació correcta del màxim: 1 punt.

b) Especificar el nombre de PAC en cada zona: 2 punts.

3.

a) Càlcul correcte de la derivada: 2 punts.
Solució correcta de l'equació $f'(x) = 0$: 2 punts.
Determinació correcta de la setmana en què s'arriba al màxim: 1 punt.
Determinació del nombre màxim d'ingressats: 1 punt.

b) Solució correcta de l'equació $25 = P(t)$ i determinació del valor de t: 3 punts.
Indicar que el nombre d'ingressats és més petit que 25 a partir de la 8a setmana: 1 punt. Si no es fa aquesta especificació, no es posa aquest punt.

4.

- Càlcul correcte del valor crític: 2 punts.
- Càlcul correcte de l'interval de confiança: 8 punts.

Nota: atès que en l'enunciat lliurat posava "un nivell de significació del 90%", si els càlculs s'han realitzat correctament i seguint els criteris prèviament establerts, s'ha de considerar la pregunta correctament contestada.

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials

Solucions

Model 3

Opció A

1.

a) Una matriu té inversa si el seu determinant és no nul, per tant, la matriu *A* no té inversa quan

$$\det(A) = 0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} m & -1 & 4 \\ 3 & m & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow m^2 + 4m + 3 = 0 \Longrightarrow m = -1, m = -3$$

Per a $m = -1, m = -3$ la matriu *A* no té inversa.

b) Se sap que

$$A^{-1} = ((-1)^{i+j} A_{ij})^T = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -1 & 4/3 & 4 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Com que el sistema associat $A \cdot X = 0$ és un sistema homogeni amb matriu invertible, la seva solució és la trivial $x = 0, y = 0, z = 0$.

2. Siguin

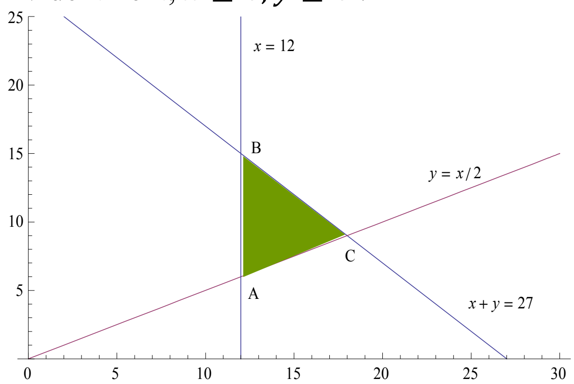
x = nombre de vagons dedicats a cotxes.

y =nombre de vagons dedicats a motocicletes.

S'ha de maximitzar els ingressos, per tant, la funció objectiu és: $F(x, y) = 540x + 360y$.

Les restriccions són:

- Com a màxim 27 vagons en total: $x + y \leq 27$.
- Cotxes, un mínim de 12: $x \geq 12$.
- Motocicletes no menys de la meitat dels vagons dedicats a cotxes: $y \geq \frac{x}{2} \Longrightarrow 2y - x \geq 0$.
- Evidentment, $x \geq 0, y \geq 0$.



Punts: $A = (12,6)$, $B = (12,15)$, $C = (18,9)$.

$F(A) = F(12,6) = 8.640$; $F(B) = F(12,15) = 11.880$; $F(C) = F(18,9) = 12.960$.

Els ingressos màxims són de 12.960 euros i s'obtenen amb 18 vagons de cotxes i 9 de motocicletes.

3. Es considera la funció
$$f(x) = \frac{x^2-16}{x^3-2x^2-6x-8}.$$
a) $\lim_{x\to 4} f(x) = \frac{4}{13}$.
b) $f(4)$ =4/13
c) $f'(x) = -\frac{x^2+8x+6}{(x^2+2x+2)^2} = -\frac{6+x(8+x)}{(2+x(2+x))^2}$.

4. Considerem els successos
I=alumne d'enginyeria, C=alumne de ciències, L=alumne de lletres.
A = finalitza els estudis.
a) P(I)=0.20, P(C)= 0.30 P(L)=0.50
P(A/I)=0.15, P(A/C)=0.20 , P(A/L)=0.35

b) P(A∩I)= P(I). P(A/I)= 0.03
c) Ens demanen P(I/A):
P(I/A)= P(A∩I)/P(A)= 0.03/0.265 ≈0.1132

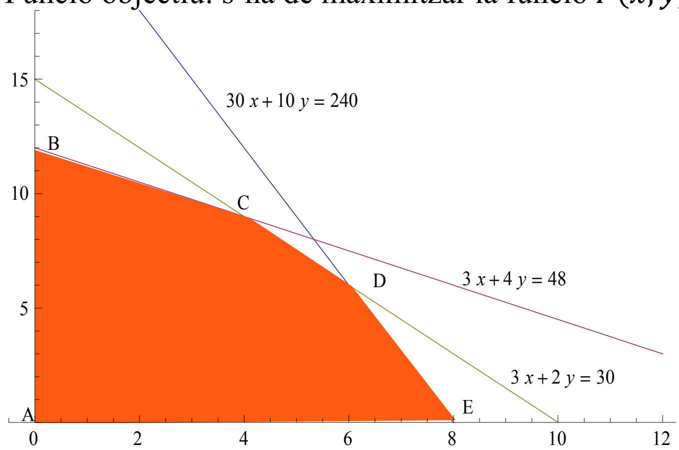
Opció B

1. **a)** Siguin *x, y* i *z* el nombre de vehicles de cada una de les marques, X, Y, Z, respectivament, que entren al país. De l'enunciat podem extraure que les equacions són les següents:
$$\begin{cases} x+y+z = 21.000 \\ 1{,}2\,x + 1{,}5\,y + 2\,z = 33.200 \\ x = 0{,}4\,(y+z) \end{cases}$$
Que es pot posar com a:
$$\begin{cases} x \quad + y + z = 21.000 \\ 1{,}2x + 1{,}5y + 2z = 33.200 \\ x - 0{,}4\,y - 0.4\,z = 0 \end{cases}$$
Sistema que resoldrem fent servir el mètode de Gauss:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21.000 \\ 1{,}2 & 1{,}5 & 2 & 33.200 \\ 1 & -0{,}4 & -0{,}4 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F2-1{,}2F1 \\ F3-F1}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21.000 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}8 & 8.000 \\ 0 & -1{,}4 & -1{,}4 & -21.000 \end{array}\right)$$
$$\underset{10F2;5F3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21.000 \\ 0 & 3 & 8 & 80.000 \\ 0 & 7 & 7 & 105.000 \end{array}\right) \underset{3F3-7F2}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21.000 \\ 0 & 3 & 8 & 80.000 \\ 0 & 0 & -35 & -245.000 \end{array}\right)$$
El sistema associat és
$$\begin{cases} x \; + y + \; z \; = 21.000 \\ \quad 3y + 8\,z = 80.000 \\ \quad -35\,z = -245.000 \end{cases}$$
Que ens proporciona les solucions següents:
$$z = \frac{-245.000}{-35} = 7.000,$$
$$y = \frac{80.000 - 8 \cdot 7.000}{3} = 8.000,$$
$$x = 21.000 - 7.000 - 8.000 = 6.000,$$
que es corresponen amb les quantitats de vehicles de cada marca que entren al país.

b) Cada vehicle de la marca X: 1.200.000 euros (1,2 milions d'euros).
Cada vehicle de la marca Y: 1.500.000 euros (1,5 milions d'euros).
Cada vehicle de la marca Z: 2.000.000 euros (2 milions d'euros).

2. Considerem:
x = nombre de centres a la zona A.
y = nombre de centres a la zona B.
Restriccions:
Metges: 3 per centre a la zona A, 2 per centre a la zona B, màxim, 30: $3x + 2y \leq 30$.
Infermeres: 3 per centre a la zona A, 4 per centre a la zona B, màxim, 48: $3x + 4y \leq 48$.
Cost: 30 milions per centre a la zona A, 10 milions per centre a la zona B, màxim de 240: $30x + 10y \leq 240$.
Evidentment: $x \geq 0, y \geq 0$.

Funció objectiu: s'ha de maximitzar la funció $F(x, y) = x + y$.



A=(0,0), B=(0,12), C=(4,9), D=(6,6), E=(8,0)

F(A)=0, F(B)=12, F(C)=13, F(D)=12, F(E)=8

El nombre màxim de centres que es pot posar en funcionament és de 13, i s'han de posar en funcionament 4 centres a la zona A i 9 a la zona B.

3.

$$P(t) = \frac{350\, t}{2t^2 - 3t + 8} \quad \text{con } t \geq 0.$$

a.

$P'(t) = -\frac{700(-4+t^2)}{(8+t(-3+2t))^2}$, $P'(t) = 0 \Longrightarrow t = -2, t = 2$.

	0		2		$+\infty$
$Signe\ f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	
			màxim		

A la segona setmana el nombre d'ingressats serà màxim i el nombre de persones ingressades serà:

$$P(2) = 70 .$$

b. Hem de resoldre l'equació:

$25 = \frac{350\, t}{2t^2-3t+8} \Longrightarrow t = 8, t = 1/2$.

Després del màxim, el nombre d'ingressats és menor que 25 a partir de la setmana 8.

4. Amb un nivell de confiança del 90% tenim que

$$\alpha=0.1\ ,\ z_{\alpha/2} = 1.645$$

Construïm ara la regió d'acceptació

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

amb una grandària de la mostra n = 100, mitjana mostral de 10 i amb la desviació típica de 10, que és:

$$(69.355, 72.645).$$

Prova d'accés a la Universitat (2011)

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials

Model 2

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.
Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.
Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Opció A

1. Considerau el següent sistema d'equacions depenent del paràmetre *m*:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 6, \\ x - y + 2z = 0, \\ 3x + 2y + mz = 5. \end{cases}$$

   a) Discutiu-lo. (6 punts)
   b) Resoleu-lo per als valors de *m* que el fan compatible determinat. (4 punts)

2. Un fabricant de maquinària de construcció llança una oferta especial en dos dels seus models petits de pales carregadores: ofereix el model A a un preu de 12.000 euros i el model B a 18.000 euros. L'oferta està limitada per les existències, que són 40 unitats del model A i 20 unitats del model B, i es volen vendre almenys tantes unitats del model A com del model B. Per altra banda, per cobrir les despeses de la campanya, els ingressos obtinguts amb aquesta han de ser, almenys, de 120.000 euros.
   a) Quantes unitats de cada model es podran vendre? Plantejau el problema com un problema de programació lineal i representau gràficament el seu conjunt factible de solucions. (8 punts)
   b) Quantes unitats s'hauran de vendre de cada model per maximitzar els ingressos? Quin és el seu import? (2 punts)

3. El cost de fabricació de *x* unitats d'un determinat producte ve donat per la funció

$$C(x) = \frac{1}{10}x^2 + 3x + 102{,}4$$

   en unitats monetàries. Es defineix la funció de cost mitjà per unitat com a $M(x) = \frac{C(x)}{x}$. Calculau el nivell de producció que minimitza el cost mitjà per unitat. Quin és aquest preu? (10 punts)

4. Estudis realitzats sobre les aigües dels pous d'una determinada regió han posat de manifest dues coses, d'una banda, que el 5% està infectat pel bacteri *Escherichia coli*. Per una altra, que l'anàlisi d'aigua aplicada, X, diagnostica com a infectat un 96% dels que ho estan en realitat i un 1% dels que no ho estan.
   Sabent que un pou d'aquesta regió triat a l'atzar ha estat diagnosticat com a infectat mitjançant l'anàlisi X, quina és la probabilitat que realment estigui infectat? I que no ho estigui? (10 punts)

Opció B

1. Un grup de persones es reuneixen per fer la ruta dels patis pel centre de la ciutat de Palma, i s'ajunten un total de 80 persones, entre homes, dones i nens. Comptant homes i dones junts, el seu nombre resulta que és el triple del nombre de nens. A més, si hi haguessin acudit dues dones més, el seu nombre igualaria el d'homes.
   a) Plantejau un sistema per esbrinar quants homes, dones i nens han anat a fer la ruta dels patis. (4 punts)
   b) Resoleu el sistema d'equacions i, per tant, el problema. (6 punts)

2. Dibuixau la regió determinada per les inequacions
   $x \geq 0, x + y \leq 50, y \geq 1, x \geq y, 4x + 8y \geq 120.$ (8 punts)
   Minimitzau la funció $F(x, y) = 2x + 3y$, sotmesa a les restriccions donades per aquestes inequacions. (2 punts)

3. Calculau *a* i *b* perquè la funció $f(x) = a \ln x + bx^2 + x$ tingui extrems relatius a $x = 1$ i a $x = 2$ (6 punts). Per a aquests valors de *a* i *b*, quin tipus d'extrem relatiu té la funció quan $x = 2$ i $x = 1$? (4 punts)

4. El salari mitjà corresponent a una mostra de 1.600 persones d'una determinada població és de 1.150 euros. Se sap que la desviació típica dels salaris en la població és de 150 euros. Es pot afirmar, amb un nivell de significació de l'1%, que el salari mitjà en aquesta població és de 1.250 euros? (10 punts)

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL *N*(0, 1)

$$F(z) = P(X \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9646	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials

Criteris específics de correcció

Model 2

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Opció A

1.

- Discussió correcta: 6 punts.
- Solució correcta del sistema donant la solució correcta: 4 punts.

2.

a) Càlcul correcte de la regió factible, indicant-ne el vèrtex i proporcionant un dibuix de la regió: 8 punts.
b) Determinar la solució del problema de programació lineal especificant la seva relació amb l'enunciat del problema: 2 punts.

3.

- Expressió correcta de $M(x)$: 1 punt.
- Càlcul correcte de la derivada: 3 punts.
- Solució de l'equació M' = 0: 2 punts.
- Comprovació del caràcter de l'extrem obtingut: 3 punts.
- Especificar el preu mínim: 1 punt.

4.

- Especificació de les dades donades al problema com a probabilitats: 3 punts.
- Càlcul correcte de la probabilitat total: 3 punts.
- Càlcul correcte de les probabilitats demanades: 2 punts per cadascuna.

Opció B

1.

a) Plantejar correctament el sistema que s'ha de resoldre: 4 punts.
b) Solució correcta del sistema i, per tant, del problema: 6 punts.

2.

a) Càlcul correcte de la regió factible, indicant-ne el vèrtex i proporcionant un dibuix de la regió: 8 punts.
b) Determinar el mínim de la funció donada: 2 punts.

3.

- Especificació correcta del sistema que s'ha de resoldre: 3 punts.
- Càlcul correcte de *a* i *b*: 2 punts.
- Especificació de la funció per als valors obtinguts: 1 punt.
- Estudi del tipus d'extrem relatiu: 4 punts.

4.

- Establiment de les hipòtesis: 2 punts.
- Càlcul correcte del valor crític: 2 punts.
- Càlcul correcte de la zona d'acceptació: 4 punts.
- Verificació i discussió: 2 punts.

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials

Solucions

Model 2

Opció A

1. **a)** Hem de discutir el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 6, \\ x - y + 2z = 0, \\ 3x + 2y + mz = 5. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}, \qquad \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & m & 5 \end{array}\right).$$

$$\det(A) = -3m - 2 \Rightarrow m = -2/3.$$

Si $m = -\frac{2}{3}$, aleshores $\det(A) = 0$ i, per tant, $\operatorname{rang}(A) < 3$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{rang}(A) = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{rang}(\bar{A}) = 3.$$

Com que $\operatorname{rang}(A) \neq \operatorname{rang}(\bar{A})$, el sistema és incompatible.

Si $m \neq -\frac{2}{3}$ $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\bar{A}) = 3$, que coincideix amb el nombre d'incògnites, i el sistema és compatible determinat.

b) Suposem que $m \neq -\frac{2}{3}$, aleshores:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & m \end{vmatrix}}{-3m-2} = \frac{6m+14}{3m+2}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & m \end{vmatrix}}{-3m-2} = \frac{6m-16}{3m+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{-3m-2} = \frac{-15}{3m+2}.$$

2. **a)** El benefici que s'ha de maximitzar es la funció F(x,y)=12000x+18000y, on x representa el nombre de cotxes del model A i y representa el nombre de cotxes del model B, i el conjunt de restriccions és:

$$\begin{cases} x \leq 40 \\ y \leq 20 \\ x \geq y \\ 12000x + 18000y \geq 120000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Per representar gràficament el conjunt de solucions dibuixarem les rectes: x=40, y=20, y=x, x=0, y=0 i $12000x + 18000y = 120000$, a més, els vèrtexs del conjunt, determinats per la intersecció de les diferents rectes.

El conjunt de les restriccions determina la regió factible. En aquest cas és un polígon convex de 5 costats. Calculem ara els seus vèrtexs mitjançant la intersecció de les dues rectes que determinen cadascun dels vèrtexs.

Vèrtex A:

$$\begin{cases} x = y \\ 12000x + 18000y = 120000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ 12x + 18y = 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ 12y + 18y = 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ y = \dfrac{120}{30} = 4. \end{cases} \Rightarrow A = (4,4)$$

Vèrtex B:

$$\begin{cases} y = 0 \\ 12x + 18y = 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 12x = 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 10 \end{cases} \Rightarrow B = (10,0)$$

Vèrtex C:

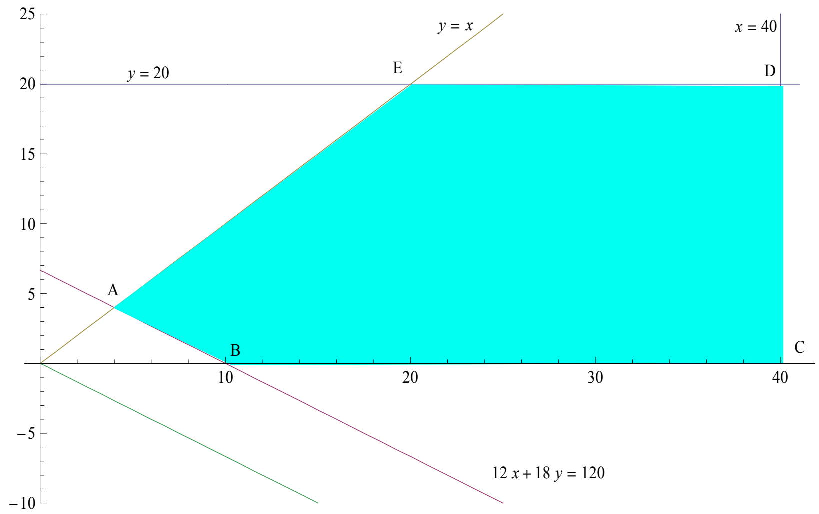
$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 40 \end{cases} \Rightarrow C = (40,0)$$

Vèrtex D:

$$\begin{cases} y = 20 \\ x = 40 \end{cases} \Rightarrow D = (40,20)$$

Vèrtex E:

$$\begin{cases} y = 20 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow E = (20,20)$$



El conjunt de solucions possibles serà el conjunt de solucions senceres que es troben a l'interior o frontera del recinte.

b) Calculem el valor que adopta la funció que s'ha de maximitzar F(x,y)=12000*x*+18000*y* en cadascun dels vèrtexs del polígon.

F(A)=F(4,4)=120.000 F(D)=F(40,20)=840.000
F(B)=F(10,0)=120.000 F(E)=F(20,20)=600.000
F(C)=F(40,0)=480.000

La funció presenta un màxim al vèrtex D=(40,20) el valor del qual és de 840.000 euros. Per tant, haurà de vendre 40 cotxes del model A i 20 cotxes del model B per maximitzar els seus ingressos, que, d'aquesta manera, ascendiran a 840.000 euros.

3. La funció de cost mitjà per unitat és

$$M(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{1}{10}x + 3 + \frac{102,4}{x}$$

El nostre objectiu és minimitzar *M(x,)* i per a això hem de calcular *M'(x)* i resoldre l'equació *M'(x)=0*.

$$M'(x) = \frac{1}{10} - \frac{102,4}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{10} = \frac{102,4}{x^2} \Rightarrow x^2 = 1024 \Rightarrow x = \sqrt{1024} = \pm 32.$$

La solució x=-32, no té sentit que la considerem, i agafam x=32.

$$M''(x) = \frac{204,8}{x^3} \Rightarrow M''(32) > 0 \Rightarrow Mínim\ en\ x = 32.$$

Substituint x=32 a *M(x)* obtenim el preu mínim, que és:

$$M(32) = \frac{1}{10}32 + 3 + \frac{102,4}{32} = 9.4\ u.m.$$

4. Considerem els successos següents:
D={ està infectat} $\overline{D}$ ={no està infectat} X={X diagnostica infectat}
Tenim de les dades proporcionades a l'enunciat que:

$$P(D) = 0.05,\ P(\overline{D}) = 0.95,\ P(X/D)=0.96,\ P(X/\overline{D})=0.01$$

Observau que ens demanen les probabilitats següents: *P(D/X) i* $P(\overline{D}/X)$. Aleshores, fent servir la fórmula de Bayes:

$$P(D/X) = \frac{P(D \cap X)}{P(X)} = \frac{P(D) \cdot P(X/D)}{P(X)}, P(\overline{D}/X) = \frac{P(\overline{D} \cap X)}{P(X)} = \frac{P(\overline{D}) \cdot P(X/\overline{D})}{P(X)}$$

Calculam les probabilitats necessàries:

$$P(D \cap X) = P(D) \cdot P(X/D) = 0.05 \cdot 0.96 = 0.0480,$$
$$P(\overline{D} \cap X) = P(\overline{D}) \cdot P(X/\overline{D}) = 0.95 \cdot 0.01 = 0.0095.$$

La probabilitat total:

$$P(X) = P(D) \cdot P(X/D) + P(\overline{D}) \cdot P(X/\overline{D}) = 0.0480 + 0.0095 = 0.0575.$$

Així,

$$P(D/X) = \frac{0.0480}{0.0575} \approx 0.835;\ P(\overline{D}/X) = \frac{0.0095}{0.0575} \approx 0.165.$$

Opció B

1. **a)** Siguin x el nombre d'homes, y el nombre de dones i z el nombre de nens. El sistema que hem de resoldre és el següent:

$$\begin{cases} x + y + x = 80, \\ x + y = 3z, \\ y + 2 = x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 80, \\ x + y - 3z = 0, \\ -x + y = -2. \end{cases}$$

b) Per resoldre el sistema utilitzarem el mètode de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F3+F1 \to F3]{F2-F1 \to F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & 0 & -4 & -80 \\ 0 & 2 & 1 & 78 \end{array}\right)$$

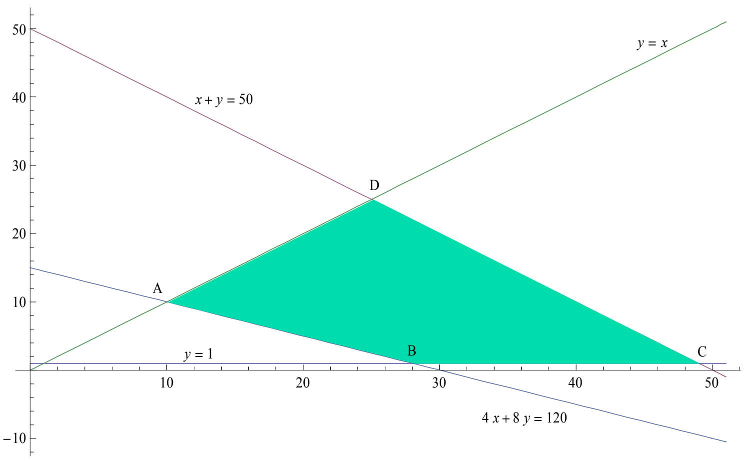
De la segona fila: $-4z = -80 \Rightarrow 4z = 80 \Rightarrow z = 20$.
De la tercera fila: $2y + z = 78 \Rightarrow 2y = 78 - z \Rightarrow 2y = 78 - 20 = 58 \Rightarrow y = 29$.
De la primera fila: $x + y + z = 80 \Rightarrow x + 29 + 20 = 80 \Rightarrow x + 49 = 80 \Rightarrow x = 31$.
Han acudit a l'excursió 31 homes, 29 dones i 20 nens.

a) El conjunt de restriccions és:

$$\begin{cases} x \geq 0, \qquad y \geq 1 \\ x + y \leq 50 \\ x \geq y \\ 4x + 8y \geq 120 \end{cases}$$

Per dibuixar la regió representarem les rectes: $x = 0, y = 1, x + y = 50, x = y, 4x + 8y = 120$.

$x + y = 50$ talla els eixos a (0,50), (50,0).
$4x + 8y = 120$ talla els eixos a (0,15), (30,0).
$x + y = 600$ talla els eixos a (0,600), (600,0).
Calculem els vèrtexs que són els punts de tall entre les diferents rectes:
Vèrtex A:
$$\begin{cases} 4x + 8y = 120, \\ y = x. \end{cases} \Longrightarrow A = (10,10).$$
Vèrtex B:
$$\begin{cases} 4x + 8y = 120, \\ y = 1. \end{cases} \Longrightarrow B = (28,1).$$
Vèrtex C:
$$\begin{cases} x + y = 50, \\ y = 1. \end{cases} \Longrightarrow C = (49,1).$$
Vèrtex D:
$$\begin{cases} x + y = 50, \\ y = x. \end{cases} \Longrightarrow C = (25,25).$$



b)
Els punts que cal considerar per calcular el màxim són: A=(10,10), B=(28,1), C=(49,1), D=(25,25), la funció que s'ha de minimitzar és F(x,y)=2x+3y.

$$\begin{cases} F(\mathrm{A}) = F(10,10) = 50 \\ F(\mathrm{B}) = F(28,1) = 59 \\ F(\mathrm{C}) = F(49,1) = 101 \\ F(\mathrm{D}) = F(25,25) = 125 \end{cases}$$

La funció té un mínim al vèrtex A=(10,10) el valor del qual és 50.

2. Les condicions que ha de satisfer la funció que ens donen són les següents:

- Que tingui extrem relatiu a $x = 2$ i a $x = 1$ vol dir que $f'(2) = 0$ i $f'(1) = 0$.

Per tant:

$$f'(x) = a \cdot \frac{1}{x} + 2bx + 1,$$
$$f'(1) = 0 \Rightarrow 0 = a + 2b + 1 \Rightarrow -1 = a + 2b$$
$$f'(2) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{a}{2} + 2 \cdot b \cdot 2 + 1 \Rightarrow -1 = \frac{a}{2} + 4b \Rightarrow -2 = a + 8b$$

Resolent el sistema d'equacions associat tenim que $a = -\frac{2}{3}$ i $b = -\frac{1}{6}$.

Per tant: $f(x) = -\frac{2}{3}\ln x - \frac{1}{6}x^2 + x$.

Per saber si a $x = 1$ i a $x = 2$ la funció té un màxim o un mínim, o bé estudiarem el signe de la segona derivada en aquest punt, o bé estudiarem la variació del signe de la primera derivada al voltant d'aquest punt. De la primera part sabem que

$$f'(x) = -\frac{2}{3}\frac{1}{x} - \frac{2}{6}x + 1$$

$$f''(x) = \frac{2}{3}\frac{1}{x^2} - \frac{1}{3} \Rightarrow$$
$$f''(2) = -\frac{1}{6} < 0 \Rightarrow m\grave{a}xim \text{ , i } f''(1) = \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow m\acute{\imath}nim\,.$$

4.

Les hipòtesis són: $\begin{cases} H_0: \ \mu = 1.250€, \\ H_1: \ \mu \neq 1.250€. \end{cases}$

El contrast d'hipòtesis és bilateral amb un nivell de significació $\alpha = 0.01$, al qual correspon $z_{\alpha/2} = 2.575$.

Construïm ara la regió d'acceptació

$$\left(\mu_0 - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu_0 + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

amb una grandària de la mostra n=1600 i amb la desviació típica de 150.

$$z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}575 \cdot \frac{150}{\sqrt{1600}} = 2{,}575 \cdot 3{,}75 = 9{,}656,$$

la regió d'acceptació és:

$$(1250 - 9{,}656{,}1250 + 9{,}656) = (1240{,}344, 1259{,}656)$$

El valor de $\bar{x}$ és de 1.150 euros i $1150 \notin (1240{,}344, 1259{,}656)$ queda fora de la regió d'acceptació, rebutjam la hipòtesi nul·la, és a dir, no podem afirmar que $\mu_0 = 1.250\ euros$.

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials

Model 3

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Opció A

1. **a)** Una mestressa de casa va adquirir en el mercat certes quantitats de patates, pomes i taronges a un preu de 0.60 €, 0.72 € i 0.91 € el quilo respectivament. L'import total de la compra va ser 7 € i el pes total 9 kg. A més, comprà 1 kg més de taronges que de pomes.
   a.1. Plantejau un sistema per determinar la quantitat comprada de cada producte. (3 punts)
   a.2. Resoleu el sistema. (3 punts)

   b) De les matrius $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix}$, quines són les que admeten inversa? (4 punts)

2. La funció $f(x) = x^3 + px^2 + q$ té un valor mínim relatiu igual a 7 en el punt d'abscissa x=3. Determinau els valors dels paràmetres p i q (6 punts). Té algun valor màxim relatiu? Quant val? (4 punts)

3. Tres màquines, M_1, M_2 i M_3, produeixen el 45%, 30% i 25% respectivament del total de peces produïdes en una fàbrica. Els percentatges de producció defectuosa d'aquestes màquines són del 3%, 4% i 5% respectivament.
   a) Dibuixau un diagrama en arbre que descrigui el procés i que presenti la informació proporcionada. (2 punts)
   b) Seleccionada una peça a l'atzar, calculau la probabilitat que sigui defectuosa. (3 punts)
   c) Agafada una peça a l'atzar, resulta defectuosa; calculau la probabilitat que hagi estat produïda per la màquina M_2. (2 punts)
   d) Quina màquina té la probabilitat més gran d'haver produït aquesta peça defectuosa? (3 punts)

4. Un fabricant d'automòbils ha realitzat un estudi de mercat en un determinat municipi prenent una mostra de 500 turismes, i ha trobat que 80 tenen un motor dièsel. Per a un nivell de confiança del 94%:
   a) Determinau l'interval de confiança de la proporció de turismes que té motor dièsel en aquest municipi. (7 punts)
   b) Quin és l'error màxim de la proporció? (3 punts)

Opció B

1. Considerau el següent sistema d'equacions depenent del paràmetre m

$$\begin{cases} x - y + z = 4, \\ mx + y - 3z = 8, \\ x + my + 7z = 8. \end{cases}$$

   a) Per a quins valors de m és el sistema compatible determinat? (4 punts)
   b) Si m=-9, té solució el sistema? (4 punts)
   c) Quina és la solució quan m=1? (2 punts)

2. a) Representau, determinant els seus vèrtexs, el conjunt de punts que satisfan simultàniament les desigualtats:
   $2x + y \leq 6,\quad 4x + y \leq 10, -x + y \leq 3, x \geq 0, y \geq 0.$ (6 punts)
   b) Determinau els punts de la regió de l'apartat a) en els quals la funció $F(x, y) = 4x + 2y - 7$ és màxima i aquells en què és mínima. (4 punts)

3. Siguin A i B dos successos tals que $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.7$ i $P(A \cap B) = 0.1$. Es demana calcular les probabilitats següents: $P(\bar{A})$ (1 punt), $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ (3 punts), $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ (2 punts), $P(A \cap \bar{B})$ (2 punts) i $P(A/A \cap B)$ (2 punts).

4. Es fa una enquesta sobre el nivell de coneixements generals dels estudiants de batxillerat de Palma. Per a això, s'ha triat una mostra aleatòria de 9 d'aquests estudiants, als quals s'ha realitzat un examen. Les qualificacions obtingudes han estat les següents:

7.8	6.5	5.4	7.1	5.0	8.3	5.6	6.6	6.2

   Se suposa que la variable aleatòria objecte d'estudi segueix una distribució normal de desviació típica 1. Determinau un interval de confiança al 98% per a la mitjana de les qualificacions a l'examen. (10 punts)

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL *N*(0, 1)

$$F(z) = P(X \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9646	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

Prova d'accés a la Universitat (2012)

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials

Criteris específics de correcció

Model 3

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Opció A

1. a)
- Plantejar correctament el sistema que s'ha de resoldre: 3 punts.
- Solució correcta del sistema donant els sous demanats: 3 punts.

Si el sistema plantejat no és correcte, i falta solament una de les equacions, però el sistema donat està correctament resolt: màxim 2 punts.

b) Indicació i justificació correcta que les matrius que admeten inversa són aquelles on $a \neq 2,\ i\ a \neq -1$: 4 punts. Si no es dóna cap explicació o bé no apareixen càlculs que justifiquin els valors donats màxim 2 punts.

2.
- Traducció correcta de les condicions a equacions i plantejar correctament el sistema que s'ha de resoldre: 3 punts.
- Solució correcta del sistema donant els valors demanats: 3 punts.
- Determinació i justificació de l'existència d'un màxim relatiu donant el seu valor: 4 punts. Si no es dóna el valor del màxim: 2 punts.

3.

a) Dibuix d'un diagrama en arbre que descrigui el procés i que presenti tota la informació proporcionada: 2 punts.
b) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 3 punts.
c) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 2 punts.
d) Càlcul correcte de cadascuna de les probabilitats que es necessiten: 1 punt per probabilitat. Determinar la màquina amb màxima probabilitat: 1 punt.

4.

a)

- Càlcul correcte del valor crític: 2 punts.
- Càlcul correcte de la proporció observada de la mostra p_r i q_r: 3 punts.
- Determinació correcta de l'interval de confiança: 2 punts.

b) Determinació correcta de l'error màxim: 3 punts.

Opció B

1.

a) Justificació i determinació correcta dels valors de *m*: 4 punts. Si el càlcul i justificació dels valors de *m* és correcte però la resposta final és incorrecta màxim 2 punts.

b) Determinació i justificació que el sistema és incompatible: 4 punts.

c) Solució correcta en el cas *k* = 1: 2 punts.

2.

a) Càlcul i dibuix correcte de la regió factible, indicant-ne els vèrtexs amb els càlculs pertinents: 6 punts. Si no apareix cap justificació de la regió donada màxim 3 punts.

b) Determinar el mínim de la funció donada: 1 punt. Determinar on s'arriba al màxim de la funció donada: 3 punts.

3. Càlcul correcte de les probabilitats demanades: la puntuació indicada a l'enunciat del problema: $P(\bar{A})$ (1 punt), $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ (3 punts), $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ (2 punts), $P(A \cap \bar{B})$ (2 punts) i $P(A/A \cap B)$ (2 punts).

4.

- Càlcul correcte del valor crític: 3 punts.
- Càlcul correcte de la mitjana de la mostra: 3 punts
- Càlcul correcte de l'interval de confiança: 4 punts.

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials

Solucions

Model 3

Opció A

1. **a)** Una mestressa de casa va adquirir en el mercat certes quantitats de patates, pomes i taronges a un preu de 0.60 €, 0.72 € i 0.91 € el quilo respectivament. L'import total de la compra va ser 7 € i el pes total 9 kg. A més, comprà 1 kg més de taronges que de pomes.
   a.1. Plantejau un sistema per determinar la quantitat comprada de cada producte. (3 punts)
   a.2. Resoleu el sistema. (3 punts)
   b) De les matrius $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix}$, quines són les que admeten inversa? (4 punts)

   Solució:
   a.1) Siguin *x*, *y*, *z* les quantitats (en kg) de patates, pomes i taronges, respectivament. El sistema d'equacions que ens resol el problema és:
   $$\begin{cases} x+y+z=9, \\ 0.60x+0.72y+0.91z=7, \\ y+1=z. \end{cases}$$
   a.2) La solució del sistema anterior és:
   $$x=2, y=3, z=4 .$$

   b) Una matriu *A* admet inversa si $\det(A) \neq 0$.
   $$det\begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix} = a(a-1)-2 = a^2-a-2,$$
   $$a^2-a-2=0 \Leftrightarrow a=2, a=-1.$$
   Les matrius donades admeten inversa si $a \neq 2,\ i\ a \neq -1$.

2. La funció $f(x)=x^3+px^2+q$ té un valor mínim relatiu igual a 7 en el punt d'abscissa *x*=3. Determinau els valors dels paràmetres *p* i *q* (6 punts). Té algun valor màxim relatiu? Quant val? (4 punts)

   Solució:

   La condició que la funció tingui un mínim de valor 7 a *x*=3 ens diu que $f(3)=7$ i, per tant, $27+9p+q=7$, a més, ha de ser $f'(3)=0$. Com que $f'(x)=3x^2+2px$, tenim que $27+6p=0$. Per tant, els valors de *p* i *q* s'obtenen resolent el sistema d'equacions:
   $$\begin{cases} 27+9p+q=7, \\ 27+6p=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9p+q=-20, \\ 27+6p=0. \end{cases} \Rightarrow \left\{p=-\frac{9}{2}, q=\frac{41}{2}\right\}.$$
   La funció demanada és:
   $$f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{41}{2}.$$
   El valor del mínim és $f(3)=7$. Per saber si té qualque màxim relatiu hem de resoldre l'equació $f'(x)=0$, $f'(x)=3x^2-9x=x(3x-9)$, així tenim que *x*=0 i *x*=3 són els punts crítics de la funció donada i, com que $f''(0)=-9<0$, tenim que a *x*=0 la funció té un màxim que val $f(0)=\frac{41}{2}$.

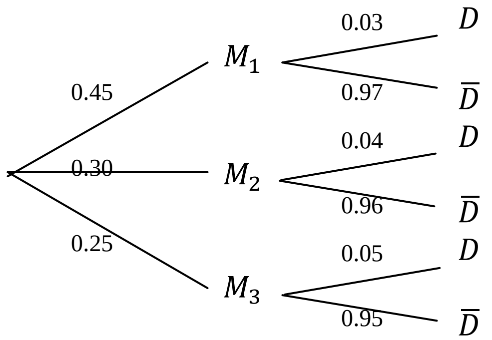
3. Tres màquines, M_1, M_2 i M_3, produeixen el 45%, 30% i 25% respectivament del total de peces produïdes en una fàbrica. Els percentatges de producció defectuosa d'aquestes màquines són del 3%, 4% i 5% respectivament.
   a) Dibuixau un diagrama en arbre que descrigui el procés i que presenti la informació proporcionada. (2 punts)
   b) Seleccionada una peça a l'atzar, calculau la probabilitat que sigui defectuosa. (3 punts)
   c) Agafada una peça a l'atzar, resulta defectuosa; calculau la probabilitat que hagi estat produïda per la màquina M_2. (2 punts)
   d) Quina màquina té la probabilitat més gran d'haver produït aquesta peça defectuosa? (3 punts))

Solució:

Considerem els successos següents:

$$D = \{\text{peça defectuosa}\},$$
$$\overline{D} = \{\text{peça no defectuosa}\}.$$

a) La informació proporcionada a l'enunciat es pot representar amb el següent diagrama en arbre:



b) Per calcular la probabilitat que la peça seleccionada sigui defectuosa, $P(D)$, farem ús del teorema de la probabilitat total

$$P(D) = \sum_{i=1}^{3} P(M_i) \cdot P(D/M_i) = 0.45 \cdot 0.03 + 0.3 \cdot 0.04 + 0.25 \cdot 0.05 = 0.038.$$

c) Ens demanen calcular $P(M_2/D)$. Pel teorema de Bayes

$$P(M_2/D) = \frac{P(M_2) \cdot P(D/M_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(M_i) \cdot P(D/M_i)} = \frac{0.3 \cdot 0.04}{0.038} = \frac{0.012}{0.038} = \frac{12}{38} \approx 0.316.$$

d) Hem de calcular $P(M_1/D)$ i $P(M_3/D)$ i comparar-les amb $P(M_2/D)$, calculada a l'apartat c).

$$P(M_1/D) = \frac{P(M_1) \cdot P(D/M_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(M_i) \cdot P(D/M_i)} = \frac{0.45 \cdot 0.03}{0.038} = \frac{0.0135}{0.038} = \frac{135}{380} \approx 0.355.$$

$$P(M_3/D) = \frac{P(M_3) \cdot P(D/M_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(M_i) \cdot P(D/M_i)} = \frac{0.25 \cdot 0.05}{0.038} = \frac{0.0125}{0.038} = \frac{125}{380} \approx 0.329.$$

Com que $\frac{120}{380} < \frac{125}{380} < \frac{135}{380}$, la màquina amb major probabilitat d'haver produït la peça defectuosa és M_1 .

4. Un fabricant d'automòbils ha realitzat un estudi de mercat en un determinat municipi prenent una mostra de 500 turismes, i ha trobat que 80 tenen un motor dièsel. Per a un nivell de confiança del 94%:
   a) Determinau l'interval de confiança de la proporció de turismes que té motor dièsel en aquest municipi. (7 punts)
   b) Quin és l'error màxim de la proporció? (3 punts)

Solució:

a) L'interval de confiança de la proporció ve donat per

$$IC = \left(p_r - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_r \cdot q_r}{n}} \ , \ p_r + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_r \cdot q_r}{n}} \right).$$

Per a un nivell de confiança del 94% li correspon

$$z_{\alpha/2} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{0.06}{2}\right) = \Phi^{-1}(1 - 0.03) = \Phi^{-1}(0.97) = 1.88 \,.$$

La proporció observada per a la mostra és: $p_r = \frac{80}{500} = 0.16$. D'on $q_r = 1 - \ p_r = 1 - 0.16 = 0.84$. Així:

$$z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_r \cdot q_r}{n}} = 1.88 \cdot \sqrt{\frac{0.16 \cdot 0.84}{500}} = 1.88 \cdot 0.0164 \approx 0.031 \,.$$

Substituint, l'interval demanat és

$$IC = (0.16 - 0.031, 0.16 + 0.031) = (0.129, 0.191).$$

b) L'error màxim és

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_r \cdot q_r}{n}} = 1.88 \cdot 0.0164 \approx 0.031 \,.$$

Opció B

1. Considerau el següent sistema d'equacions depenent del paràmetre *m*

$$\begin{cases} x - y + z = 4, \\ mx + y - 3z = 8, \\ x + my + 7z = 8. \end{cases}$$

a) Per a quins valors de *m* és el sistema compatible determinat? (4 punts)
b) Si *m*=-9, té solució el sistema? (4 punts)
c) Quina és la solució quan *m*=1? (2 punts)

Solució:

a) La matriu A associada al sistema és

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & 1 & -3 \\ 1 & m & 7 \end{pmatrix}$$

I el seu determinant és

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & 1 & -3 \\ 1 & m & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1+m & -3-m \\ 0 & m+1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m+1 & -3-m \\ m+1 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= 6 + 6m + (3+m)(m+1) = m^2 + 10m + 9,$$
$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow m = -1 \ i \ m = -9.$$

- Si $m \neq -1$ i $m \neq -9$, aleshores $rg(A) = 3 = rg(A')$ i el sistema és compatible determinat.

b) Considerem $m = -9$.

$$\begin{cases} x - y + z = 4, \\ -9x + y - 3z = 8, \\ x - 9y + 7z = 8. \end{cases}$$

El rang de la matriu del sistema és 2, ja que en aquest cas per l'apartat a) sabem que $\det(A) = 0$. Aleshores hem d'estudiar el rang de la matriu

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ -9 & 1 & -3 & 8 \\ 1 & -9 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 8 \\ -9 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -9 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ -9 & -2 & -7 \end{vmatrix} = -4\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} \neq 0.$$

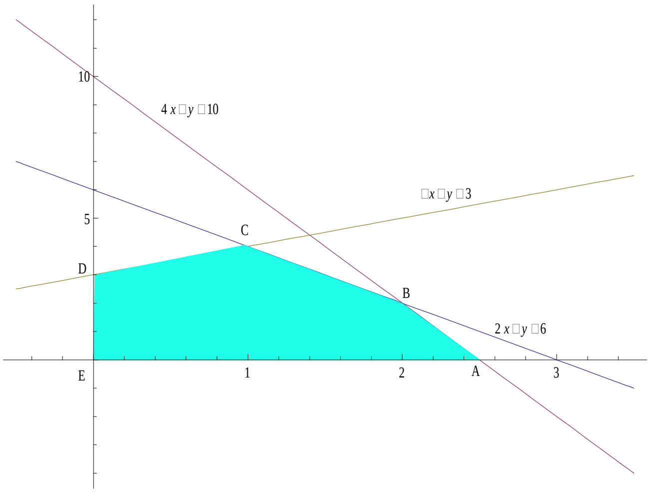
Per tant, rang($\bar{A}$) $\neq$ rang(A) i el sistema és incompatible.

c) $x = 6, y = 2, z = 0.$

2. a) Representau, determinant els seus vèrtexs, el conjunt de punts que satisfan simultàniament les desigualtats:
   $2x + y \le 6, \quad 4x + y \le 10, -x + y \le 3, x \ge 0, y \ge 0.$ (6 punts)
   b) Determinau els punts de la regió de l'apartat a) en els quals la funció $F(x, y) = 4x + 2y - 7$ és màxima i aquells en què és mínima. (4 punts)

   Solucions:

   a) La regió demanada és:



Calculem ara els seus vèrtexs mitjançant la intersecció de les dues rectes que determinen cadascun dels vèrtexs.

Vèrtex A:

$$\begin{cases} y = 0 \\ 4x + y = 10 \end{cases} \Rightarrow A = (5/2,0)\ .$$

Vèrtex B:

$$\begin{cases} 4x + y = 10 \\ 2x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow B = (2,2).$$

Vèrtex C:

$$\begin{cases} -x + y = 3 \\ 2x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow C = (1,4).$$

Vèrtex D:

$$\begin{cases} -x + y = 3 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow D = (0,3).$$

Vèrtex E: E=(0,0).

b) Al valor màxim s'hi arriba en els punts B i C i el seu valor és 5; a aquest valor s'hi arribarà en el segment ***BC***. Al valor mínim s'hi arriba en el punt E i el seu valor és -7.

5. Siguin A i B dos successos tals que $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.7$ i $P(A \cap B) = 0.1$. Es demana calcular les probabilitats següent: $P(\bar{A})$ (1 punt), $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ (3 punts), $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ (2 punts), $P(A \cap \bar{B})$ (2 punts) i $P(A/A \cap B)$ (2 punts).

Solucions:

$$P(\bar{A}) = 1 - \ P(A) = 1 - 0.3 = 0.7\ .$$
$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - \left(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\right) = 1 - 0.9 = 0.1\ .$$
$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.1 = 0.9\ .$$
$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.3 - 0.1 = 0.2\ .$$
$$P(A/A \cap B) = \frac{P(A \cap (A \cap B))}{P(A \cap B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B)} = 1.$$

4. Es fa una enquesta sobre el nivell de coneixements generals dels estudiants de batxillerat de Palma. Per a això, s'ha triat una mostra aleatòria de 9 d'aquests estudiants, als quals s'ha realitzat un examen. Les qualificacions obtingudes han estat les següents:

7.8	6.5	5.4	7.1	5.0	8.3	5.6	6.6	6.2

Se suposa que la variable aleatòria objecte d'estudi segueix una distribució normal de desviació típica 1. Determinau un interval de confiança al 98% per a la mitjana de les qualificacions a l'examen. (10 punts)

Solucions:

L'interval de confiança per a la mitjana ve donat per:

$$IC = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ , \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Per a un nivell de confiança del 98%:

$$1 - \alpha = 0.98 \Rightarrow\ \alpha = 1 - 0.98 = 0.02\ .$$
$$z_{\alpha/2} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{0.02}{2}\right) = \Phi^{-1}(0.9900) \approx 2.33\ .$$

Hem de determinar $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{7.8 + 6.5 + 5.4 + 7.1 + 5.0 + 8.3 + 5.6 + 6.6 + 6.2}{9} = 6.5\ .$$

Per tant:

$$IC = ,\left(6.5 - 0.33 \cdot \frac{1}{\sqrt{9}}, 6.5 + 0.33 \cdot \frac{1}{\sqrt{9}}\right) \approx (6.5 - 0.776, 6.5 + 0.776)$$
$$= (5.724, 7.276).$$

Prova d'accés a la Universitat (2012)

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials

Model 2

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.
Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Opció A

1. a) Un estudiant va obtenir, en un control que constava de 3 preguntes, un total de 8 punts. En la segona pregunta va treure dos punts més que en la primera i un punt menys que en la tercera.
   - a.1. Plantejau un sistema d'equacions per determinar la puntuació obtinguda en cadascuna de les preguntes. (3 punts)
   - a.2. Resoleu el sistema. (3 punts)

   b) Determinau els valors de *k* per als quals la matriu $\begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ k & k & k \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}$ no admet inversa (4 punts)

2. a) Representau, determinant els seus vèrtexs, el conjunt de punts que satisfan simultàniament les desigualtats:
   $x - 2y \geq -1, \quad 6x - y - 5 \leq 0, \quad 5y \geq -4x - 22.$ (6 punts)

   b) Determinau els punts de la regió de l'apartat a) en els quals la funció $F(x,y)=x+y$ és màxima i aquells en què és mínima. (4 punts)

3. Durant els trenta dies consecutius d'un mes les accions d'una determinada companyia han tingut unes cotitzacions donades per la funció $f(x) = 0.2x^2 - 8x + 100$, on *x* és el nombre de dies transcorreguts.
   a) Determinau els dies que les accions varen estar de baixa (baixant de preu) i els que varen estar en alça. (5 punts)
   b) Quin dia del mes arriben al valor màxim? I al valor mínim? Quins són aquests valors? (3 punts)
   c) Representau gràficament la funció indicant el seu domini de definició. (2 punts)

4. Els experts en temes electorals, basant-se en els resultats d'anteriors comicis, sostenen que, si se celebrassin en aquests moments eleccions generals, acudiria a votar com a màxim el 48% de l'electorat. No obstant això, en un sondeig electoral realitzat recentment amb una mostra de 1500 persones, 800 varen manifestar la seva intenció de votar. Contrastau amb un nivell de significació del 5% la hipòtesi establerta pels experts enfront del fet que el percentatge ha augmentat, com sembla que indiquen les dades, i explicau clarament a quina conclusió s'arriba. (10 punts)

Opció B

1. Considerau el següent sistema d'equacions depenent del paràmetre *a*

$$\begin{cases} x + ky + z = 1, \\ 2y + kz = 2, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

   a) Discutiu-lo. (5 punts)
   b) Resoleu-lo per als valors de *k* que el fan compatible indeterminat. (3 punts)
   c) Quant val la solució per a *k*=3? (2 punts)

2. Una empresa fabrica dos tipus de colònies, A i B. La primera conté un 15% d'extracte de gessamí, un 20% d'alcohol i la resta d'aigua, i la segona duu un 30% d'extracte de gessamí, un 15% d'alcohol i la resta d'aigua. Diàriament es disposa de 60 litres d'extracte de gessamí i 50 litres d'alcohol. Cada dia es poden produir com a màxim 150 litres de la colònia B. El preu de venda per litre de la colònia A és de 3 € i el de la B és de 12 €. Calculau els litres de cada tipus que poden produir-se diàriament perquè els ingressos siguin màxims. S'ha de plantejar el problema com un problema de programació lineal, representar gràficament el seu conjunt factible de solucions i resoldre'l. (10 punts)

3. Un estoig conté 15 bolígrafs de color vermell i 10 de color blau. Es demana:
   a) Si en triam un a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui de color vermell? I de color blau? (2 punts)
   b) Si n'extraiem dos, sense reemplaçament, quina és la probabilitat que ambdós siguin blaus? (4 punts)
   c) Si n'extraiem dos, sense reemplaçament, calcular la probabilitat que el primer sigui blau i el segon vermell. (4 punts)

4. En una enquesta es pregunta a 10.000 estudiants de batxillerat sobre el seu consum de refrescs setmanal, i es calcula una mitjana de 5 pots, amb una desviació típica de 2.
   a) Determinau l'interval de confiança per a la mitjana a un nivell del 95%. (5 punts)
   b) Si acceptam un error màxim de 0,25 pots per a la mitjana poblacional, i si volem un nivell de confiança del 95%, quantes persones és necessari entrevistar com a mínim? (5 punts)

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL *N*(0, 1)

$$F(z) = P(X \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9646	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

Prova d'accés a la Universitat (2012)

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials

Criteris específics de correcció

Model 2

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Opció A

1. a)
- Plantejar correctament el sistema que s'ha de resoldre: 3 punts.
- Solució correcta del sistema donant els sous demanats: 3 punts.

Si el sistema plantejat no és correcte, i falta solament una de les equacions, però el sistema donat està correctament resolt: màxim 2 punts.

b) Determinació correcta dels valors de *k* demanats: 4 punts. Si no es dóna cap explicació o bé no apareixen càlculs que justifiquin els valors donats de k: màxim 2 punts.

2. a) Càlcul i dibuix correcte de la regió factible, indicant-ne els vèrtexs amb els càlculs pertinents: 6 punts. Si no apareix cap justificació de la regió donada: màxim 3 punts.

b) Determinar el mínim de la funció donada: 2 punts. Determinar el màxim de la funció donada: 2 punts.

3.

a) Càlcul correcte de la derivada: 1 punt. Solució de l'equació $f'(x) = 0$: 1 punt. Determinació dels intervals de creixement i decreixement: 3 punts.

b) S'ha de donar un punt per pregunta, sempre que es justifiqui la resposta.

c) Dibuix correcte en l'interval adequat: 2 punts.

4.

- Establiments de les hipòtesis: 2 punts.
- Càlcul correcte del valor crític: 2 punts.
- Càlcul correcte de la zona d'acceptació: 4 punts.
- Explicació de la conclusió i discussió: 2 punts.

Opció B

1.

a) Discussió del sistema: 5 punts. Si la discussió no és correcta però s'han calculat i justificat correctament els valors de k: màxim 2 punts.
b) Solució correcta en el cas compatible indeterminat: 3 punts.
c) Solució correcta en el cas $k = 3$: 2 punts.

2.

- Plantejament correcte del problema de programació lineal: 3 punts.
- Càlcul correcte de la regió factible, indicant-ne els vèrtexs i proporcionant-ne un dibuix: 3 punts.
- Determinar els litres de cada tipus de colònia que poden produir-se per maximitzar els ingressos, amb explicació: 4 punts.

3. a) 1 punt per probabilitat demanada.

b) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 4 punts.
c) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 4 punts.

4. a)

- Càlcul correcte del valor crític: 2 punts.
- Càlcul correcte de l'interval de confiança: 3 punts.

b)

- Càlcul correcte del valor crític: 2 punts.
- Càlcul correcte de la grandària de la mostra: 3 punts.

Prova d'accés a la Universitat (2012)

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials

Solucions

Model 2

Opció A

1. **a)** Un estudiant va obtenir, en un control que constava de 3 preguntes, un total de 8 punts. En la segona pregunta va treure dos punts més que en la primera i un punt menys que en la tercera.
   - a.1. Plantejau un sistema d'equacions per determinar la puntuació obtinguda en cadascuna de les preguntes. (3 punts)
   - a.2. Resoleu el sistema. (3 punts)

   Solució:
   a.1. Siguin x, y, z les puntuacions de la primera, segona i tercera pregunta, respectivament. El sistema d'equacions que ens demanen és el següent:
   $$\begin{cases} x+y+z=8, \\ y=x+2, \\ y=z-1. \end{cases}$$
   a.2. De la segona equació tenim que $x=y-2$, i de la tercera $z=y+1$. Substituint a la primera tenim que
   $$(y-2)+y+(y+1)=8 \Longrightarrow 3y-1=8 \Longrightarrow 3y=9 \Longrightarrow y=3.$$
   Per tant: $x=y-2=3-2=1, z=y+1=3+1=4.$ Aleshores, la solució és
   $$x=1, \qquad y=3, \qquad z=4.$$

   b) Determinau els valors de *k* per als quals la matriu $\begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ k & k & k \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}$ no admet inversa

   (4 punts)

   Solució:

   La matriu donada no admet inversa si el seu determinant és nul. Aleshores:
   $$det\begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ k & k & k \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}=k^3-k^2-k^2=k^3-2k^2=k^2(k-2)=0 \Leftrightarrow k=0, k=2.$$
   Per tant, la matriu donada no admet inversa quan $k=0, k=2$.

2. a) Representau, determinant els seus vèrtexs, el conjunt de punts que satisfan simultàniament les desigualtats:
   $$x-2y \geq -1, \qquad 6x-y-5 \leq 0, \qquad 5y \geq -4x-22. \text{ (6 punts)}$$
   b) Determinau els punts de la regió de l'apartat a) en els quals la funció *F*(x,y)=x+y és màxima i aquells en què és mínima. (4 punts)

   Solució:
   a) Per dibuixar la regió representarem les rectes:
   $$x-2y=-1, \qquad 6x-y-5=0, \qquad 5y=-4x-22.$$

   Calculem els vèrtexs que són els punts de tall entre les diferents rectes:

Vèrtex A:

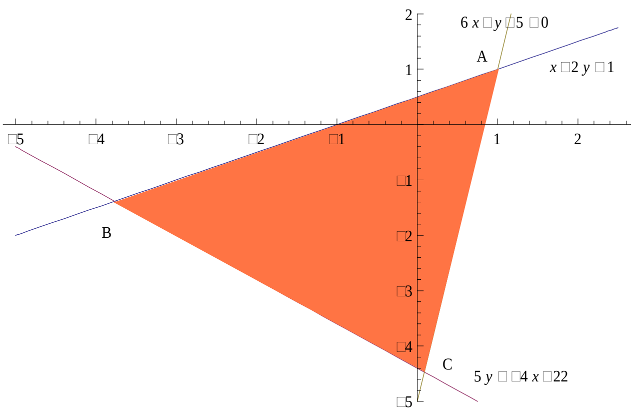
$$\begin{cases} x - 2y = -1, \\ 6x - y - 5 = 0. \end{cases} \Longrightarrow A = (1,1).$$

Vèrtex B:

$$\begin{cases} x - 2y = -1, \\ 5y = -4x - 22. \end{cases} \Longrightarrow B = \left(-\frac{49}{13}, -\frac{18}{13}\right).$$

Vèrtex C:

$$\begin{cases} 6x - y - 5 = 0, \\ 5y = -4x - 22. \end{cases} \Longrightarrow C = \left(\frac{3}{34}, -\frac{76}{17}\right).$$



b) Considerem la taula següent:

	x	y	$F(x,y) = x + y$
A	1	1	2
B	-49/13	-18/13	-67/13≈-5.154
C	3/34	-76/17	-149/34≈-4.382

El màxim s'agafa en el punt A i val 2.
El mínim s'agafa en el punt B i val -67/13.

3. Durant els trenta dies consecutius d'un mes les accions d'una determinada companyia han tingut unes cotitzacions donades per la funció $f(x) = 0.2x^2 - 8x + 100$, on x és el nombre de dies transcorreguts.
   a) Determinau els dies que les accions varen estar de baixa (baixant de preu) i els quals van estar en alça. (5 punts)
   b) Quin dia del mes arriben al valor màxim? I al valor mínim? Quins són aquests valors? (3 punts)
   c) Representau gràficament la funció indicant el seu domini de definició. (2 punts)

Solució:

a) En aquest apartat ens demanen els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x) = 0.2x^2 - 8x + 100$. Per tant, hem de calcular $f'(x)$ i resoldre l'equació $f'(x) = 0$.

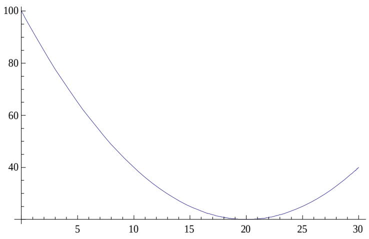
$$f'(x) = 0.4\,x - 8 \Longrightarrow 0.4x - 8 = 0 \Longrightarrow x = \frac{8}{0.4} = 20.$$

	0		20		30
Signe $f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		↘		↗	
			mínim		

Per tant entre el dia 0 i el 19 el valor de les accions baixa i entre el dia 21 i el 30 el valor de les accions creix.

b) Com es pot deduir del primer apartat, la funció pren el seu valor mínim quan *x*=20, i aquest valor és $f(20) = 20$.
El valor màxim de les accions es deu trobar necessàriament en un dels extrems de l'interval [0,30], i com que $f(0) = 100$ i $f(30) = 40$, el màxim val 100 i és troba al principi de l'interval.

c) La gràfica demanada és:



4. Els experts en temes electorals, basant-se en els resultats d'anteriors comicis, sostenen que, si se celebrassin en aquests moments eleccions generals, acudiria a votar com a màxim el 48% de l'electorat. No obstant això, en un sondeig electoral realitzat recentment amb una mostra de 1500 persones, 800 varen manifestar la seva intenció de votar. Contrastau amb un nivell de significació del 5% la hipòtesi establerta pels experts enfront del fet que el percentatge ha augmentat, com sembla que indiquen les dades, i explicau clarament a quina conclusió s'arriba. (10 punts)

Solució:

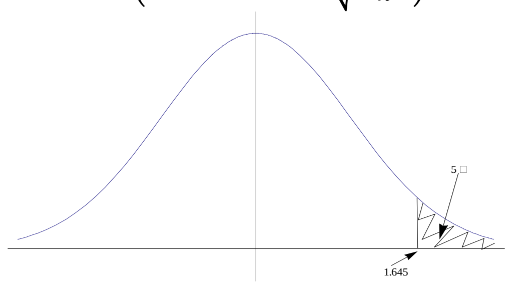
Formulem la hipòtesi nul·la i l'alternativa

$$\begin{cases} H_0: & p \leq 0.48; \\ H_1: & p > 0.48. \end{cases}$$

Per plantejar la hipòtesi nul·la ens basam en la informació prèvia. En la hipòtesi alternativa queda reflectit el fet que la mostra electoral ens diu que la situació ha canviat, amb una proporció major de votants $p = \frac{800}{1500} \approx 0.53 > 0.48$.
Som davant una prova de contrast unilateral amb un nivell de significació de $\alpha = 0.05$ i, per tant, $z_\alpha = 1.645$.

La zona d'acceptació vindrà determinada per l'interval $\left(-\infty, p_0 + z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot q_0}{n}}\right)$

$$\begin{cases} p_0 = 0.48, \\ q_0 = 1 - p_0 = 1 - 0.48 = 0.52, \\ n = 1500. \end{cases}$$



Per tant: $\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}} = \sqrt{\frac{0.48 \cdot 0.52}{1500}} = \sqrt{\frac{0.2496}{1500}} = \sqrt{0.0001664} \approx 0.013.$

$$p_0 + z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot q_0}{n}} = 0.48 + 1.645 \cdot 0.013 \approx 0.5014.$$

Així, la zona d'acceptació és $(-\infty, 0.5014)$.

La nova proporció (és a dir, l'observada) és $p = \frac{800}{1500} \approx 0.53$, com que la proporció per contrastar queda fora de la zona d'acceptació, rebutjam la hipòtesi nul·la H_0 i, amb una probabilitat d'equivocar-nos del 5%, afirmam que la tendència actual de votació s'ha invertit respecte a consultes electorals anteriors.

(Nota: Considerau que també es pot resoldre per interval de confiança.)

Opció B

1. Considerau el següent sistema d'equacions depenent del paràmetre *a*

$$\begin{cases} x + ky + z = 1, \\ 2y + kz = 2, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

a) Discutiu-lo. (5 punts)
b) Resoleu-lo per als valors de *k* que el fan compatible indeterminat. (3 punts)
c) Quant val la solució per a *k*=3? (2 punts)

Solució:

a) Considerem

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & 2 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 2 & k & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det(A) = k^2 - k = k(k-1), \det(A) = 0 \Leftrightarrow k = 0, k = 1.$$

Per tant, si $k \neq 0, k \neq 1$ tenim que $rang(A) = rang(\bar{A}) = 3 =$ nombre d'incògnites, aleshores el sistema és compatible determinat.

Si $k = 0$: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2.$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow rang(\bar{A}) = 3.$$

I, per tant, en aquest cas els sistema és incompatible.

Si $k = 1$: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2.$ I la matriu $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ té també $rang(\bar{A}) = 2$, per tant, el sistema és compatible indeterminat.

b) Hem de resoldre el sistema quan $k = 1$. Considerant les dues primeres equacions tenim que

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2y + z = 2. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = t - 1, \\ y = t, \\ z = 2 - 2t. \end{cases}$$

c) Si $k = 3$, el sistema és compatible determinat i la solució és

$$x = \frac{1}{3}, y = 0, z = \frac{2}{3}.$$

2. Una empresa fabrica dos tipus de colònies, A i B. La primera conté un 15% d'extracte de gessamí, un 20% d'alcohol i la resta d'aigua, i la segona duu un 30% d'extracte de gessamí, un 15% d'alcohol i la resta d'aigua. Diàriament es disposa de 60 litres d'extracte de gessamí i 50 litres d'alcohol. Cada dia es poden produir com a màxim 150 litres de la colònia B. El preu de venda per litre de la colònia A és de 3 € i el de la B és de 12 €. Calculau els litres de cada tipus que poden produir-se diàriament perquè els ingressos siguin màxims. S'ha de plantejar el problema com un problema de programació lineal, representar gràficament el seu conjunt factible de solucions i resoldre'l. (10 punts)

Solució:

Podem reunir les dades en la taula següent:

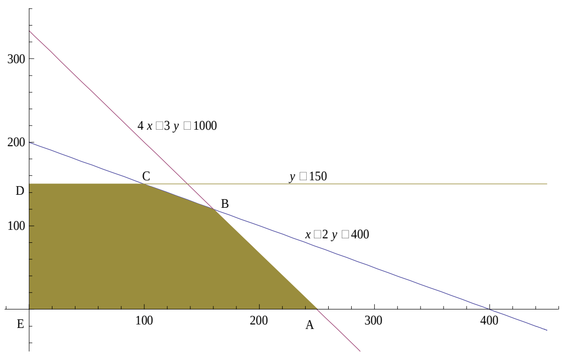
	A	B	
gessamí	15%	30%	60
alcohol	20%	15%	50
	3€	12€	

Màxim, 150 litres de colònia B. Els ingressos vénen donats per la funció $F(x,y) = 3x + 12y$, on x és el nombre de litres de la colònia A i y el nombre de litres de la colònia B.

Les condicions que s'han de satisfer són les següents:

$$\begin{cases} \frac{15}{100}x + \frac{30}{100}y \ \leq 60, \\ \frac{20}{100}x + \frac{15}{100}y \ \leq 50, \\ y \leq 150, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x + 30y \ \leq 6000, \\ 20x + 15y \ \leq 5000, \\ y \leq 150, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y \ \leq 400, \\ 4x + 3y \ \leq 1000, \\ y \leq 150, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

El conjunt factible de solucions es pot veure a la figura següent:



Calculem els vèrtexs, que són els punts de tall entre les diferents rectes:

Vèrtex A: A=(250,0).

Vèrtex D: D=(0,150).

Vèrtex E: E=(0,0).

Vèrtex C:

$$\begin{cases} y = 150, \\ x + 2y = 400. \end{cases} \Longrightarrow C = (100{,}150).$$

Vèrtex B:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 1000, \\ x + 2y = 400. \end{cases} \Longrightarrow B = (160{,}120).$$

Considerarem la taula següent per tal de calcular el màxim d'ingressos.

	x	y	$F(x,y) = 3x + 12y$
A	250	0	750

B	160	120	1920
C	100	150	2100
D	0	150	1800
E	0	0	0

El màxim d’ingressos s'agafa amb 100 unitats de tipus A i 150 unitats de tipus B, sent aquest de 2.100 €.

3. Un estoig conté 15 bolígrafs de color vermell i 10 de color blau. Es demana:
   a) Si en triam un a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui de color vermell? I de color blau? (2 punts)
   b) Si n’extraiem dos, sense reemplaçament, quina és la probabilitat que ambdós siguin blaus? (4 punts)
   c) Si n’extraiem dos, sense reemplaçament, calcular la probabilitat que el primer sigui blau i el segon vermell. (4 punts)

Solució:

Siguin V el succés “bolígraf de color vermell” i B el succés “bolígraf de color blau”

a)

P(V)= 15/25, P(B)=10/25.

b) Ens demanen calcular la probabilitat del succés B i B, llavors

P(B i B)=P(B). P(B/B) =$\frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} = \frac{3}{20}$.

c) Es demana la probabilitat del succés B i V

P (B i V) = $\frac{10}{25} \cdot \frac{15}{24} = \frac{1}{4}$.

4. En una enquesta es pregunta a 10.000 estudiants de batxillerat sobre el seu consum de refrescs setmanal, i es calcula una mitjana de 5 pots, amb una desviació típica de 2.
   a) Determinau l’interval de confiança per a la mitjana a un nivell del 95%. (5 punts)
   b) Si acceptam un error màxim de 0,25 pots per a la mitjana poblacional, i si volem un nivell de confiança del 95%, quantes persones és necessari entrevistar com a mínim? (5 punts)

Solució:

a) Per a un nivell de confiança del 95%

$$z_{\alpha/2} = 1.96$$

L’interval de confiança per a la mitjana ve donat per $(\bar{x} - z_{\alpha/2}\,\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\,\frac{s}{\sqrt{n}})$:

$$\left(5 - 1.96\,\frac{2}{\sqrt{10000}}, 5 + 1.96\,\frac{2}{\sqrt{10000}}\right) = (5 - 1.96 \cdot 0.02\,, 5 + 1.96 \cdot 0.02)$$
$$= (4.9608, 5.0392).$$

b) La mida mínima de la mostra ve donada per

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2.$$

Tenim que $E = 0.25$. A un nivell de confiança del 95% tenim que $z_{\alpha/2} = 1.96$, per tant,

$$n = \left(\frac{1.96 \cdot 2}{0.25}\right)^2 = 245{,}86$$

Per tant, la mida mínima de la mostra és 246, $n \geq 246$.

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials

Model 1

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul. Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1 (a) Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ calculau, si és possible, la seva matriu inversa, A^{-1}. (5 punts)

(b) Donades la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ i la matriu $B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 11 & 5 \end{pmatrix}$ resoleu l'equació matricial $X \cdot A = B$. (5 punts)

2 Una empresa d'automòbils té dues plantes, P1 i P2, de muntatge de vehicles en les quals produeix tres models, M1, M2 i M3. De la planta P1 surten setmanalment 10 unitats del model M1, 30 del M2 i 15 del M3; i de la planta P2, 20 unitats del model M1, 20 del M2 i 70 del M3 cada setmana. L'empresa necessita almenys 800 unitats del M1, almenys 1600 del M2 i almenys 1800 del M3. Si la despesa de manteniment de cada planta és de 36.000€, quantes setmanes ha de funcionar cada planta perquè el cost de producció sigui mínim? Quin és el cost mínim? S'ha de plantejar el problema com un problema de programació lineal, representar gràficament el seu conjunt factible de solucions determinant i dibuixant els seus vèrtexs, i resoldre'l. (10 punts)

3 La producció de certa hortalissa en un hivernacle, $I(x)$, en quilograms, depèn de la temperatura, x en graus centígrads, segons l'expressió

$$I(x) = (x+1)^2(32-x).$$

(a) Calculau quina és la temperatura òptima a mantenir a l'hivernacle. Raonau la resposta. (5 punts)

(b) Quina producció s'obtindrà amb aquesta temperatura òptima? (2 punts)

(c) Representau de forma aproximada la funció a l'interval $[-5, 25]$. (3 punts)

4 Donats dos successos, se sap que

$$p(A) = 0.6, \quad p(B) = 0.3, \quad p(A \cap B) = 0.2.$$

(a) Calculau $p(A/B)$ i $p(A/A \cap B)$. (4 punts)

(b) Calculau $p(A \cup B)$, $p(A \cap B/A \cup B)$ i $p(A/A \cup B)$. (6 punts)

OPCIÓ B

$\boxed{\textbf{1}}$ Considerau el següent sistema d'equacions en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & 2 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es demana:

(a) Discutir-lo en funció del paràmetre k. (5 punts)

(b) Resoldre'l, justificant si és o no possible, per a $k = 4$. (2 punts)

(c) Resoldre'l, justificant si és o no possible, per a $k = 1$. (3 punts)

$\boxed{\textbf{2}}$ (a) Representau gràficament, assenyalant els vèrtexs, així com l'equació que correspon a cadascuna de les rectes que la delimiten, i indicant si és una regió fitada del plànol o no, el conjunt de punts que satisfan les inequacions lineals següents: (6 punts)

$$x + y \geq 14, \quad (1)$$
$$2x + 3y \geq 36, \quad (2)$$
$$4x + y \geq 16, \quad (3)$$
$$x - 3y \leq 0. \quad (4)$$

(b) Donau un punt que no compleixi solament la inequació (2); un altre que compleixi només les restriccions (3) i (4); i un altre que no compleixi cap de les quatre restriccions. Comprovau algebraicament les condicions de cada punt. (4 punts)

$\boxed{\textbf{3}}$ En una determinada fàbrica d'automòbils, el 10% dels cotxes tenen defectes en el motor, el 8% tenen defectes en la carrosseria i el 4% tenen defectes en ambdós. Es demana:

(a) Expressar les dades proporcionades com a probabilitats. (3 punts)

(b) Quina és la probabilitat que un cotxe tingui almenys un defecte? (3 punts)

(c) I la probabilitat que un cotxe no sigui defectuós? (3 punts)

(d) Expressar i interpretar els resultats obtinguts en els apartats b) i c) en percentatge de cotxes. (1 punt)

$\boxed{\textbf{4}}$ Per a una mostra, de grandària 81, de les alumnes de segon de batxillerat es va obtenir una alçària mitjana de 167 cm. Per treballs estadístics anteriors se sap que la desviació típica de l'altura de la població de noies de segon de batxillerat és de 8 cm.

(a) Determinau l'interval de confiança per a l'alçària mitjana de la població a un nivell de confiança del 90%. (7 punts)

(b) Quin és l'error màxim que s'admet per a la mitjana poblacional en l'estimació realitzada? (3 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula 1: Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials

Model 1

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul. Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1 (a) Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ calculau, si és possible, la seva matriu inversa, A^{-1}. (5 punts)

(b) Donades la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ i la matriu $B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 11 & 5 \end{pmatrix}$ resoleu l'equació matricial $X \cdot A = B$. (5 punts)

SOLUCIÓ

(a) Com que $det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-0 = 1 \neq 0$, tenim que podem calcular la seva matriu inversa.
Sabent que $A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)} \left((-1)^{i+j} A_{i,j}\right)^t$, tenim que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Per resoldre l'equació $X \cdot A = B$, multiplicam per la dreta per A^{-1} (observau que per l'apartat a) sabem que existeix), aleshores $X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$, d'on $X = B \cdot A^{-1}$.
Així

$$X = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 11 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-4 & 7\cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 11-10 & 11 \cdot 0 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

2 Una empresa d'automòbils té dues plantes, P1 i P2, de muntatge de vehicles en les quals produeix tres models, M1, M2 i M3. De la planta P1 surten setmanalment 10 unitats del model M1, 30 del M2 i 15 del M3; i de la planta P2, 20 unitats del model M1, 20 del M2 i 70 del M3 cada setmana. L'empresa necessita almenys 800 unitats del M1, almenys 1600 del M2 i almenys 1800 del M3. Si la despesa de manteniment de cada planta és de 36.000€, quantes setmanes ha de funcionar cada planta perquè el cost de producció sigui mínim? Quin és el cost mínim? S'ha de plantejar el problema com un problema de programació lineal, representar gràficament el seu conjunt factible de solucions determinant i dibuixant els seus vèrtexs, i resoldre'l. (10 punts)

SOLUCIÓ

Definim les variables i disposam les dades en una taula: $x =$ "nombre de setmanes de treball de la planta P1", $y =$ "nombre de setmanes de treball de la planta P2".

	P1	P2	
M1	10	20	800 (almenys)
M2	30	20	1600 (almenys)
M3	15	70	1800 (almenys)

Les restriccions, per tant, vénen donades pel conjunt:

$$\begin{cases} 10x + 20y \geq 800, \\ 30x + 20y \geq 1600, \\ 15x + 70y \geq 1800, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

i la funció a optimitzar, que en aquest cas hem de minimitzar, és: $f(x, y) = 36.000x + 36.000y$.

Calculam els vèrtexs:

$$\begin{cases} 15x + 70y = 1800, \\ y = 0. \end{cases} \longrightarrow A = (120, 0); \quad \begin{cases} 15x + 70y = 1800, \\ 10x + 20y = 800. \end{cases} \longrightarrow B = (50, 15);$$

$$\begin{cases} 30x + 20y = 1600, \\ 10x + 20y = 800. \end{cases} \longrightarrow C = (40, 20); \quad \begin{cases} 30x + 20y = 1600, \\ x = 0. \end{cases} \longrightarrow D = (0, 80);$$

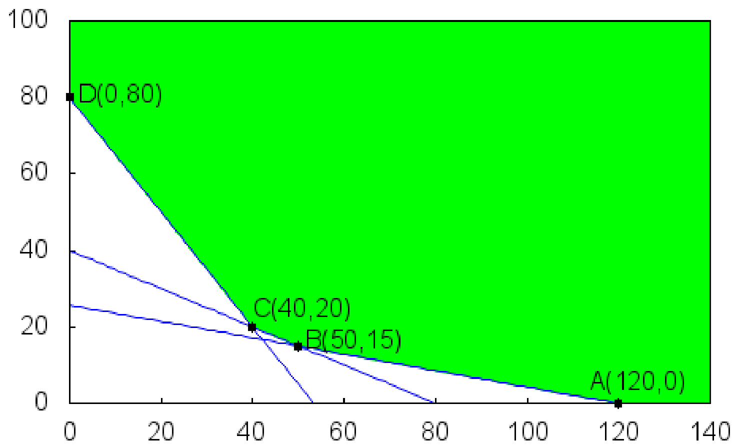


Figura 1: Dibuix de la regió factible associada al problema.

Substituïm en la funció a optimitzar i posam les dades en forma de taula:

	x	y	$f(x, y) = 36.000x + 36.000y$
A	120	0	4.320.000 €
B	50	15	2.340.000 €
C	40	20	2.160.000 €
D	0	80	2.880.000 €

El mínim cost de producció s'obté treballant 40 setmanes en la planta P1 i 20 setmanes en la planta P2, sent aquest cost mínim de 2.160.000 €.

3 La producció de certa hortalissa en un hivernacle, $I(x)$, en quilograms, depèn de la temperatura, x en graus centígrads, segons l'expressió

$$I(x) = (x+1)^2(32-x).$$

(a) Calculau quina és la temperatura òptima a mantenir a l'hivernacle. Raonau la resposta. (5 punts)

(b) Quina producció s'obtindrà amb aquesta temperatura òptima? (2 punts)

(c) Representau de forma aproximada la funció a l'interval $[-5, 25]$. (3 punts)

SOLUCIÓ

(a) Es tracta de determinar un valor de x per al qual la funció $I(x)$ arriba al màxim, per això farem ús de la primera derivada.

$$I(x) = (x+1)^2(32-x) = 32 + 63x + 30x^2 - x^3 \Rightarrow I'(x) = 63 + 60x - 3x^2$$

d'on

$$I'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 21.$$

$x = -1$ no té sentit, ja que en aquest cas les hortalisses es gelarien. Per tant, comprovarem si $x = 21$ és un màxim relatiu de la funció $I(x)$, fent servir la segona derivada. $I''(x) = 60 - 6x$ i $I''(21) = 60 - 126 = -66 < 0$, per tant, a $x = 21$ s'arriba al màxim de la funció $I(x)$, per tant, la temperatura òptima a mantenir a l'hivernacle és de 21°C.

(b) $I(21) = (21+1)^2(32-21) = 22^2 \cdot 11 = 5324$. La producció màxima d'hortalisses serà de 5324 kg.

(c) El gràfic demanat és

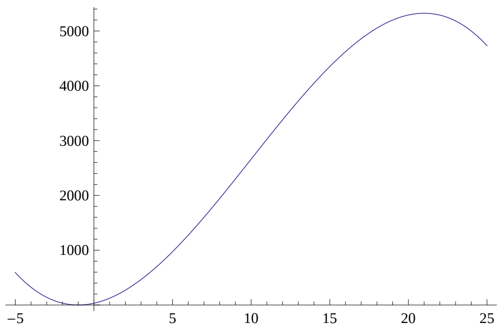


Figura 2: Dibuix de la funció $I(x)$ a l'interval $[-5, 25]$.

4 Donats dos successos, se sap que

$$p(A) = 0.6, \quad p(B) = 0.3, \quad p(A \cap B) = 0.2.$$

(a) Calculau $p(A/B)$ i $p(A/A \cap B)$. (4 punts)

(b) Calculau $p(A \cup B)$, $p(A \cap B/A \cup B)$ i $p(A/A \cup B)$. (6 punts)

SOLUCIÓ

(a)

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0.2}{0.3} = \frac{2}{3}.$$
$$p(A/A \cap B) = \frac{p(A \cap (A \cap B))}{p(A \cap B)} = \frac{p(A \cap B)}{p(A \cap B)} = 1.$$

(b)

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0.6 + 0.3 - 0.2 = 0.7,$$
$$p(A \cap B/A \cup B) = \frac{p((A \cap B) \cap (A \cup B))}{p(A \cup B)} = \frac{p(A \cap B)}{p(A \cup B)} = \frac{0.2}{0.7} = \frac{2}{7},$$
$$p(A/A \cup B) = \frac{p(A \cap (A \cup B))}{p(A \cup B)} = \frac{p(A)}{p(A \cup B)} = \frac{0.6}{0.7} = \frac{6}{7}.$$

OPCIÓ B

$\boxed{1}$ Considerau el següent sistema d'equacions en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & 2 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es demana:

(a) Discutir-lo en funció del paràmetre k. (5 punts)

(b) Resoldre'l, justificant si és o no possible, per a $k = 4$. (2 punts)

(c) Resoldre'l, justificant si és o no possible, per a $k = 1$. (3 punts)

SOLUCIÓ

(a) Consideram les matrius del sistema i l'ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & 2 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 2 & k & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aleshores

$$det(A) = k^2 - k = k(k-1) = 0 \Longrightarrow k = 0,\ k = 1.$$

Per tant, si $k \neq 0$ i $k \neq 1$, tenim que $rg(A) = rg(A^*) = 3$ nombre d'incògnites, d'aquí el sistema és compatible determinat.

Si $k = 0$. Com que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \ \Rightarrow \ rg(A) = 2,$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \ \Rightarrow \ rg(A^*) = 3,$$

en aquest cas, el sistema és incompatible.

Si $k = 1$. Com que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \;\Rightarrow\; rg(A) = 2,$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; rg(A^*) = 2,$$

el sistema és compatible indeterminat.

(b) Si $k = 4$, per l'apartat (a) tenim que el sistema és compatible determinat. Per tant, hem de resoldre el sistema d'equacions

$$\left\{ \begin{aligned} x + 4y + z &= 1, \\ 2y + 4z &= 2, \\ x + y + x &= 1. \end{aligned} \right. \;\Longrightarrow\; x = \frac{1}{2}, y = 0, z = \frac{1}{2}.$$

(c) Si $k = 1$ el sistema és compatible indeterminat. Resolem el sistema d'equacions associat al menor que hem considerat no nul a l'apartat anterior

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

$$\left\{ \begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ 2y + z &= 2 \end{aligned} \right. \;\Longrightarrow\; x = t - 1, y = t, z = 2 - 2t, \text{ o bé } x = \frac{-t}{2}, y = 1 - \frac{t}{2}, z = t.$$

$\boxed{2}$ (a) Representau gràficament, assenyalant els vèrtexs, així com l'equació que correspon a cadascuna de les rectes que la delimiten, i indicant si és una regió fitada del plànol o no, el conjunt de punts que satisfan les inequacions lineals següents: (6 punts)

$$x + y \geq 14, \quad (1)$$
$$2x + 3y \geq 36, \quad (2)$$
$$4x + y \geq 16, \quad (3)$$
$$x - 3y \leq 0. \quad (4)$$

(b) Donau un punt que no compleixi solament la inequació (2); un altre que compleixi només les restriccions (3) i (4); i un altre que no compleixi cap de les quatre restriccions. Comprovau algebraicament les condicions de cada punt. (4 punts)

SOLUCIÓ

(a)

A la figura es pot veure que la regió és oberta i no fitada.

(b) El punt $P = (10, 5)$ satisfà totes les inequacions excepte la (2).

El punt $Q = (4, 4)$ compleix (3) i (4) però no (1) i (2). El punt $R = (2, 0)$ no compleix cap de les restriccions.

Gràficament es pot veure a la figura que les afirmacions anteriors són evidents. Per fer-ho algebraicament és suficient substituir en les inequacions.

$\boxed{3}$ En una determinada fàbrica d'automòbils, el 10% dels cotxes tenen defectes en el motor, el 8% tenen defectes en la carrosseria i el 4% tenen defectes en ambdós. Es demana:

(a) Expressar les dades proporcionades com a probabilitats. (3 punts)

(b) Quina és la probabilitat que un cotxe tingui almenys un defecte? (3 punts)

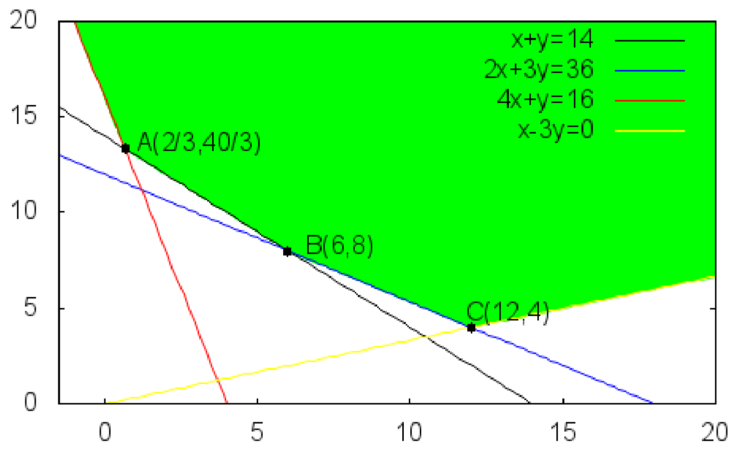


Figura 3: Dibuix de la regió.

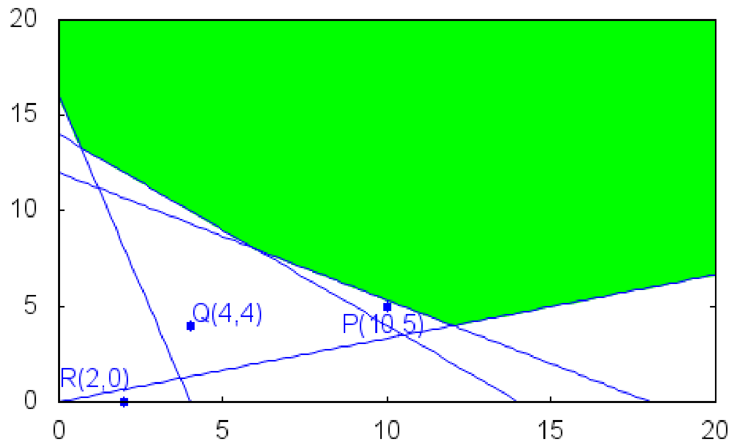


Figura 4: Dibuix de la regió.

(c) I la probabilitat que un cotxe no sigui defectuós? (3 punts)

(d) Expressar i interpretar els resultats obtinguts en els apartats b) i c) en percentatge de cotxes. (1 punt)

SOLUCIÓ

Considerem els següents successos:

$$A = \{\text{el cotxe té defecte en el motor}\}.$$
$$B = \{\text{el cotxe té defecte en la carrosseria}\}.$$

(a) De l'enunciat tenim que

$$p(A) = \frac{10}{100} = 0.1, \quad p(B) = \frac{8}{100} = 0.08, \quad p(A \cap B) = \frac{4}{100} = 0.04,$$

(b) En aquest apartat ens demanen la probabilitat de $A \cup B$:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0.1 + 0.08 - 0.04 = 0.14 = \frac{14}{100}.$$

(c) Ens demanen calcular $p(\overline{A \cup B}) = p((A \cup B)^c)$:

$$p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0.14 = 0.86 = \frac{86}{100}.$$

(d) L'apartat b) ens diu que almenys el 14% dels cotxes tenen almenys un defecte. L'apartat c) ens diu que el 86% dels cotxes no.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Per a una mostra, de grandària 81, de les alumnes de segon de batxillerat es va obtenir una alçària mitjana de 167 cm. Per treballs estadístics anteriors se sap que la desviació típica de l'altura de la població de noies de segon de batxillerat és de 8 cm.

(a) Determinau l'interval de confiança per a l'alçària mitjana de la població a un nivell de confiança del 90%. (7 punts)

(b) Quin és l'error màxim que s'admet per a la mitjana poblacional en l'estimació realitzada? (3 punts)

SOLUCIÓ

(a) L'interval de confiança per a la mitjana ve donat per

$$IC = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

on $\bar{x} = 167$, $\sigma = 8$ i $n = 81$. Així,

$$IC = \left(167 - z_{\alpha/2}\frac{8}{\sqrt{81}}, 167 + z_{\alpha/2}\frac{8}{\sqrt{81}}\right) = \left(167 - z_{\alpha/2}\frac{8}{9}, 167 + z_{\alpha/2}\frac{8}{9}\right).$$

Per a un nivell de confiança del 90%:

$$1 - \alpha = 0.90 \;\Rightarrow\; \alpha = 1 - 0.9 = 0.1.$$

$$z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \phi^{-1}\left(1 - \frac{0.1}{2}\right) = \phi^{-1}(0.9500) = 1.645.$$

D'on

$$IC = \left(167 - 1.645\frac{8}{9}, 167 + 1.645\frac{8}{9}\right) = (167 - 1.46\widehat{2}, 167 + 1.46\widehat{6})$$

$$IC = (165.537\widehat{8}, 168.46\widehat{2})$$

(b)

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; E = 1.645\frac{8}{9} = 1.46\widehat{2} \approx 1.46.$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula 1: Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials

Model 2

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul. Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1 (a) Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ calculau, si és possible, la seva matriu inversa, A^{-1}. (4 punts)

(b) Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ calculau la matriu M perquè es compleixi l'equació matricial $A \cdot M = 2I$, on I és la matriu identitat $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (6 punts)

2 (a) Representau gràficament, assenyalant els vèrtexs, així com l'equació que correspon a cadascuna de les rectes que la delimiten, i indicant si és una regió fitada del plànol o no, el conjunt de punts que satisfan les inequacions lineals següents: (5 punts)

$$\begin{aligned} x + 2y &\le 12, \quad (1) \\ 2x + y &\ge 4, \quad (2) \\ x - 2y &\le 6, \quad (3) \\ x - y &\ge 0, \quad (4) \\ x &\le 8. \quad (5) \end{aligned}$$

(b) Indicau la posició dels punts $P = (1, 2)$ i $Q = (5, 1)$ en relació amb la regió determinada a l'apartat a). En cas que el punt sigui exterior indicau, comprovant-ho algebraicament, quina o quines de les inequacions no compleix. (3 punts)

(c) Per a la regió representada a l'apartat a) determinau en quins punts agafa el valor màxim la funció $g(x, y) = 2x - 3y$. (2 punts)

3 El rendiment (mesurat de 0 a 10) d'un producte en funció del temps d'ús (x en anys) ve donat per la funció següent

$$R(x) = 7.5 + \frac{5x}{1 + x^2}, \quad x \ge 0.$$

(a) Hi ha intervals de temps que el rendiment creix? I que decreix? Quins són? (6 punts)

(b) En quin punt s'arriba al rendiment màxim? Quant val? (2 punts)

(c) Per molt que passi el temps, pot arribar a ser el rendiment inferior al que el producte tenia quan era nou? (2 punts)

4 En una classe infantil hi ha 6 nines i 10 nins. Si s'escull 3 alumnes a l'atzar, calculau la probabilitat de:

(a) Seleccionar 3 nins. (2 punts)

(b) Seleccionar 1 nin i 2 nines. (3 punts)

(c) Seleccionar 2 nins i 1 nina. (2 punts)

(d) Seleccionar, almenys, 1 nin. (3 punts)

OPCIÓ B

1 Considerau el següent sistema d'equacions en forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ k & 1 & -3 \\ 1 & k & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Es demana:

(a) Per a quins valors del paràmetre k és el sistema compatible determinat? (5 punts)

(b) Té solució el sistema quan $k = -9$? Explicau-ho. (3 punts)

(c) Resoldre'l, justificant si és o no possible, per a $k = 0$. (2 punts)

2 Una empresa té dos centres de producció, C1 i C2, en els quals fabrica tres tipus d'articles, A1, A2 i A3. Aquesta empresa ha de fabricar diàriament un mínim de 360 unitats de l'article A1, 320 de l'A2 i 180 de l'A3. La producció, per hora, en cada centre ve donada en la taula següent:

Producció	**A1**	**A2**	**A3**
A C1	25	30	10
A C2	30	20	18

Si cada hora de funcionament costa 480 € a C1 i 600 € a C2; quantes hores ha de funcionar cada centre perquè produint, almenys, el nombre mínim necessari d'unitats indicades de cada article, es redueixin al mínim els costs de producció? Quin és el cost mínim? S'ha de plantejar el problema com un problema de programació lineal, representar gràficament el seu conjunt factible de solucions, determinant i dibuixant el seus vèrtexs, i resoldre'l. (10 punts)

3 El perímetre toràcic dels individus adults (homes) d'una determinada població es distribueix segons una llei normal de mitjana 90 i desviació típica 6, en cm.

(a) Com es distribueixen les mitjanes de les mostres de grandària 81 extretes d'aquesta població? (2 punts)

(b) Quina és la probabilitat que una d'aquestes mitjanes sigui més gran que 88? (4 punts)

(c) I que sigui més gran que 91 cm? (4 punts)

4 En una certa població, un 20% dels treballadors treballa en l'agricultura, un 25% en la indústria i la resta en el sector serveis. Un 63% dels que treballen en l'agricultura són més grans de 45 anys, sent aquest percentatge del 38% i el 44% en els altres dos sectors, respectivament.

(a) Seleccionat un treballador a l'atzar, quina probabilitat hi ha que tingui menys de 45 anys? (6 punts)

(b) Si sabem que un treballador és més jove de 45 anys, quina probabilitat hi ha que procedeixi de cadascun dels sectors, industrial i serveis? (4 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula 2: Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

CRITERIS OPCIÓ B

$\boxed{1}$ (a) Estudi i càlcul correcte dels valors de k demanats: 5 punts (2 punts el càlcul del determinant, 1 punt la resolució de l'equació de segon grau, 2 punts per indicar i justificar els valors que fan el sistema compatible determinat).

(b) Justificar que en aquest cas el sistema és incompatible i no té solució: 3 punts.

(c) Indicar que és possible resoldre el sistema: 1 punt. Solució correcta i justificada del sistema: 1 punt.

$\boxed{2}$ **Primera part**: determinació del problema i de la regió factible.

Plantejament correcte del problema de programació lineal (és a dir, determinació correcta de les inequacions que determinen el problema): 3 punts. Si falta una de les equacions, incloent les trivials: màxim 1 punt.

Càlcul correcte de la regió factible, en concordança amb les equacions determinades prèviament, indicant-ne els vèrtexs i proporcionant-ne un dibuix: 3 punts. Si hi ha error en algun dels vèrtexs, però els altres estan ben calculats: màxim 2 punts.

En qualsevol cas, si,no apareixen explicacions i càlculs donant suport al dibuix i la determinació dels vèrtexs: 0 punts.

Segona part: determinació de l'extrem de la funció.

Establiment de la funció a optimitzar: 1 punt.

Càlcul i indicació de les hores de funcionament de cada centre: 2 punts.

Indicació del cost mínim: 1 punt.

Sense càlculs o explicacions que donin suport a les afirmacions, però la funció és correcta: 1 punt.

$\boxed{3}$ (a) Indicar que segueix una distribució $N(90, 6/9)$: 2 punts.

(b) Justificació i càlcul correcte de la probabilitat demanada: 4 punts.

(c) Justificació i càlcul correcte de la probabilitat demanada: 4 punts.

$\boxed{4}$ (a) Expressió dels percentatges com a probabilitats: 1 punt. Càlcul de les probabilitats condicionades necessàries: 3 punts (1 per probabilitat). Calcular la probabilitat demanada: 2 punts.

(b) Càlcul correcte de les probabilitats demanades: 2 punts per probabilitat.

Prova d'accés a la Universitat (2013)

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials

Criteris específics de correcció

Model 2

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

CRITERIS OPCIÓ A

1
- (a) Justificació que la matriu donada té inversa i es pot calcular: 2 punts. Càlcul correcte de la matriu inversa amb càlculs que la justifiquen: 2 punts (sense cap càlcul o explicació: 0 punts).
- (b) Resolució correcta de l'equació matricial, per qualsevol mètode, i amb càlculs i explicacions que justifiquin la solució donada: 6 punts. Sense explicacions però amb càlculs correctes: 3 punts. Qualsevol altra situació: 0 punts.

2
- (a) Dibuix i solució correcta amb justificacions i seguint les indicacions de l'enunciat: 5 punts. Si falta qualque indicació de recta o de vèrtex, cal restar mig punt per recta i/o vèrtex. Nota mínima: 0 punts. Si hi ha error en el càlcul d'algun dels vèrtexs, però els altres estan ben calculats: màxim 3 punts.
- (b) Solució correcta de l'apartat: 3 punts, un punt per qüestió.
- (c) Determinació correcta del màxim de la funció: 2 punts.

3
- (a) Càlcul correcte de la derivada simplificada: 2 punts. Resolució correcta de l'equació $R'(x) = 0$: 1 punt. Discriminació amb justificació de la solució $x = -1$: 1 punt. Estudi justificat del creixement i decreixement: 2 punts.
- (b) Indicació que el màxim es troba a $x = 1$: 1 punt. Càlcul del valor màxim: 1 punt.
- (c) Justificació i resposta correcta a la pregunta: 2 punts.

4
- (a) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 2 punts.
- (b) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 3 punts.
- (c) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 2 punts.
- (d) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 3 punts.

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials

Model 2

Conteste de manera clara y razonada una de les dos opciones propuestas. Se dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene al dividir el total entre 4. Se valorarán la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) utilizado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Podéis utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizará el uso de las que traigan información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1 *a*) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & b \end{pmatrix}$ determinar, los valores de a y b de manera que la matriz A verifique que $A^2 = A$. (4 puntos)

b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ calcular la matriz X para que se cumpla la ecuación matricial $A \cdot X - 2 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donde I es la matriz identidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (6 puntos)

2 Un agricultor estima que el cuidado de cada m^2 de plantado de lechugas requiere semanalmente 45 minutos, mientras que el de col exige 50. Dispone de un terreno de $40m^2$ de extensión que puede dedicar totalmente o parcialmente al cultivo de las dos verduras, pero quiere plantar al menos 3m^2 más de col que de lechugas. El m^2 de lechugas le reporta un beneficio de 3€, mientras que el de col le proporciona 4€, planificando obtener al menos un beneficio de 60€. ¿Cuanta extensión le interesa plantar de cada verdura si su objetivo es que el tiempo dedicado al cuidado del cultivo sea mínimo? Se ha de plantear el problema como un problema de programación lineal, representar gráficamente su conjunto factible de soluciones determinando y dibujando sus vértices, y resolverlo. (10 puntos)

3 *a*) Calcular el máximo y el mínimo absoluto de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ en el intervalo $[1, 4]$. (6 puntos)

b) Estudiar la continuidad en el intervalo $[0, 4]$ de la función (4 puntos)

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3, & 0 \le x < 1, \\ x^3 - 6x^2 + 9x + 1, & 1 \le x \le 4. \end{cases}$$

4 En cierto curso de segundo de bachillerato de un IES el 72,5 % de los alumnos aprobaron Matemáticas. De los alumnos que aprobaron Matemáticas, el 70 % aprobó también Biología. Por otra parte el 33,3 % de los que no aprobaron Matemáticas, aprobaron Biología.

a) Expresar los datos proporcionados como probabilidades y dar un árbol que represente los datos. (3 puntos)

b) ¿Qué porcentaje consiguió aprobar ambas asignaturas a la vez? (2 puntos)

c) ¿Cuál fue el porcentaje de aprobados en la asignatura de Biología? (3 puntos)

d) Si un estudiante no aprobó Biología, ¿qué probabilidad hay que aprobara Matemáticas? (2 puntos)

OPCIÓN B

$\boxed{1}$ Una multinacional tiene tres delegaciones, una en Palma, otra en Ciudadela y la última en Ibiza. El número total de altos ejecutivos de las tres delegaciones asciende a 31. Para que el número de altos ejecutivos de la delegación de Ciudadela fuese igual al de Palma tendrían que trasladarse 3 de Palma a Ciudadela. Además, el número de la de Palma excede en 1 a la suma de las destinadas en las otras dos delegaciones. ¿Cuántos altos ejecutivos están destinados a cada delegación? (10 puntos)

$\boxed{2}$ En un almacén se guardan bidones de aceite de girasol y de oliva. Para atender a los clientes se ha de tener almacenado un mínimo de 20 bidones de aceite de girasol y 40 de aceite de oliva y, además, el número de bidones de aceite de oliva no debe de ser inferior a la mitad del número de bidones de aceite de girasol. La capacidad total del almacén es de 150 bidones. Sabiendo que el gasto de almacenaje de un bidón de aceite de oliva es de 1€ y de uno de girasol de 50 céntimos. ¿Cuántos bidones de cada tipo habrá que almacenar para que el gasto sea mínimo? ¿Y para que el gasto sea máximo?. Se ha de plantear el problema como un problema de programación lineal, representar gráficamente su conjunto factible de soluciones determinando y dibujando sus vértices, y resolverlo. (10 puntos)

$\boxed{3}$ Considerar dos sucesos, A y B. Si se conocen las probabilidades

$$p(A) = 0{,}84, \quad p(B) = 0{,}5, \quad p(A^c \cup B^c) = 0{,}58.$$

(donde A^c es el suceso complementario d'A). Entonces:

a) ¿Son independientes los sucesos A i B? (5 puntos)

b) Calcular la probabilidad de que se cumplan B y A^c. (5 puntos)

$\boxed{4}$ El cociente intelectual de unos universitarios se distribuye normalmente con una media de 100 y una desviación típica de 10.

a) Se elige una persona al azar. Busca la probabilidad de que su cociente intelectual se encuentre entre 98 y 103. (4 puntos)

b) Se elige una muestra de veinticinco personas al azar. Busca la probabilidad de que la media de sus cocientes intelectuales se encuentre entre 98 y 103. (6 puntos)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Cuadro 2: Tabla de la distribución normal $N(0,1)$.

Prova d'accés a la Universitat (2014)

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials

Criteris específics de correcció

Model 2

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

CRITERIS OPCIÓ A

1 (a) Càlcul correcte de $A \cdot A$: 2 punts. Expressió i solució correcta de les equacions obtingudes a partir de $A^2 = A$: 2 punts (sense cap càlcul o explicació: 0 punts).

(b) Resolució correcta de l'equació matricial, per qualsevol mètode, i amb càlculs i explicacions que justifiquin la solució donada: 6 punts. Sense explicacions però amb càlculs correctes: 3 punts. Qualsevol altra situació: 0 punts.

2 **Primera part**: determinació del problema i de la regió factible.

Plantejament correcte del problema de programació lineal (és a dir, determinació correcta de les inequacions que determinen el problema): 3 punts. Si falta una de les equacions, incloent les trivials: màxim 1 punt.

Càlcul correcte de la regió factible, en concordança amb les equacions determinades prèviament, indicant-ne els vèrtexs i proporcionant-ne un dibuix: 3 punts. Si hi ha error en algun dels vèrtexs, però els altres estan ben calculats: màxim 2 punts.

En qualsevol cas, si no apareixen explicacions i càlculs donant suport al dibuix i la determinació dels vèrtexs: 0 punts.

Segona part: determinació de l'extrem de la funció.

Establiment de la funció a optimitzar: 1 punt.

Càlcul i indicació dels m^2 necessaris: 2 punts.

Indicació del temps mínim dedicat al cultiu: 1 punt.

Sense càlculs o explicacions que donin suport a les afirmacions, però la funció és correcta: 1 punt.

$\boxed{3}$ (a) Càlcul correcte de la derivada: 2 punts.
Resolució correcta de l'equació $f'(x) = 0$: 1 punt.
Justificació que $x = 3$ és un màxim: 1 punt.
Indicació correcta dels extrems absoluts: 2 punts.

(b) Càlcul del límit per l'esquerra: 1 punt.
Càlcul del límit per la dreta: 1 punt.
Indicar que els límits coincideixen amb $f(1)$ i que, per tant, la funció és contínua a $x = 1$: 1 punt.
Indicar que és contínua a tot l'interval: 1 punt.

$\boxed{4}$ (a) Resposta correcta: 3 punts. Si tan sols indica percentatges: 0 punts.

(b) Càlcul correcte de la probabilitat demanada i indicació del percentatge: 2 punts.

(c) Càlcul correcte de la probabilitat demanada i indicació del percentatge: 3 punts.

(d) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 2 punts.

CRITERIS OPCIÓ B

$\boxed{1}$ Plantejar correctament el sistema que s'ha de resoldre: 4 punts.

Solució correcta del sistema: 4 punts.

Indicar que hi ha: 16 executius a Palma, 10 a Ciutadella i 5 a Eivissa: 2 punts.

Qualsevol altra situació: 0 punts.

$\boxed{2}$ **Primera part**: determinació del problema i de la regió factible.

Plantejament correcte del problema de programació lineal (és a dir, determinació correcta de les inequacions que determinen el problema): 3 punts. Si falta una de les equacions, incloent les trivials: màxim 1 punt.

Càlcul correcte de la regió factible, en concordança amb les equacions determinades prèviament, indicant-ne els vèrtexs i proporcionant-ne un dibuix: 3 punts. Si hi ha error en algun dels vèrtexs, però els altres estan ben calculats: màxim 2 punts.

En qualsevol cas, si no apareixen explicacions i càlculs donant suport al dibuix i la determinació dels vèrtexs: 0 punts.

Segona part: determinació de l'extrem de la funció.

Establiment de la funció a optimitzar: 1 punt.

Estudi dels valors que agafa la funció als vèrtexs: 1 punt.

Càlcul i indicació dels bidons necessaris per agafar la despesa màxima: 1 punt.

Càlcul i indicació dels bidons necessaris per agafar la despesa mínima: 1 punt.

Sense càlculs o explicacions que donin suport a les afirmacions, però la funció és correcta: 1 punt.

$\boxed{3}$ (a) Càlcul correcte de la probabilitat $p(A \cap B)$: 3 punts. Càlcul correcte de $p(A) \cdot p(B)$: 1 punt. Indicar que són iguals i, per tant, successos independents: 1 punt.

(b) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 5 punts.

$\boxed{4}$ (a) Càlcul correcte i justificat de la probabilitat demanada: 4 punts.

(b) Indicar que les mitjanes segueixen una $N(100, 2)$: 2 punts.
Càlcul correcte i justificat de la probabilitat demanada: 4 punts.

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials

Model 2

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul. Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1 (a) Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & b \end{pmatrix}$, determinau els valors de a i b de manera que la matriu A verifiqui $A^2 = A$. (4 punts)

(b) Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, calculau la matriu X perquè es compleixi l'equació matricial $A \cdot X - 2 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on I és la matriu identitat $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (6 punts)

SOLUCIÓ

(a)

$$\begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-a & 2a+ab \\ -2-b & -a+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & b \end{pmatrix}.$$

D'on s'obté que

$$\begin{cases} 4-a=2, \\ 2a+ab=a, \\ -2-b=-1, \\ -a+b^2=b, \end{cases} \implies a=2,\ b=-1.$$

(b) Resoldre l'equació $A \cdot X - 2 \cdot I = 0$ és el mateix que resoldre l'equació $A \cdot X = 2 \cdot I$, per a això multiplicam per l'esquerra per A^{-1}, aleshores $A^{-1} \cdot A \cdot X = 2 \cdot A^{-1} \cdot I$, d'on $X = 2 \cdot A^{-1} \cdot I = 2 \cdot A^{-1}$.

Sabent que $A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)}\left((-1)^{i+j}A_{i,j}\right)^t$, tenim que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Així,

$$X = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2 Un agricultor estima que la cura de cada m^2 de plantació d'enciam requereix setmanalment 45 minuts, mentre que la de col n'exigeix 50. Disposa d'un terreny de 40 m^2 d'extensió que pot dedicar totalment o parcialment al cultiu de les dues verdures, però vol plantar almenys 3 m^2 més de col que d'enciam. El m^2 d'enciam li reporta un benefici de 3 €, mentre que el de col li proporciona 4 €, i planifica obtenir almenys un benefici de 60 €. Quanta extensió li interessa plantar de cada verdura si el seu objectiu és que el temps dedicat a la cura del cultiu sigui mínim? S'ha de plantejar el problema com un problema de programació lineal, representar gràficament el seu conjunt factible de solucions determinant i dibuixant els seus vèrtexs, i resoldre'l. (10 punts)

SOLUCIÓ

(a) Considerem les variables següents:

$$x ='' \text{ m}^2 \text{ d'enciam}'',$$
$$y ='' \text{ m}^2 \text{ de col}''.$$

Les restriccions del problema són:

$$\begin{cases} x + y \leq 40, \\ y \geq x + 3, \\ 3x + 4y \geq 60, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

El nostre objectiu és optimitzar el temps dedicat a la cura del cultiu, així que la funció objectiu és: $F(x, y) = 45x + 50y$.

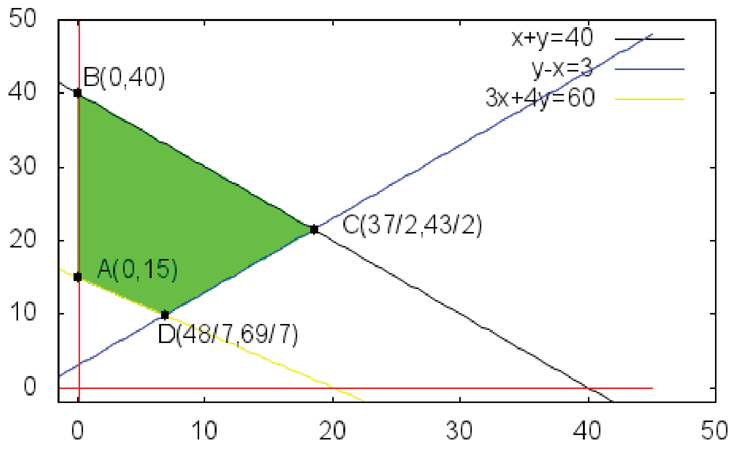


Figura 5: Dibuix de la regió.

Els punts de tall són: $A = (0, 15)$, $B = (0, 40)$, $C = (37/2, 43/2)$ i $D = (48/7, 69/7)$. A la figura es pot veure la regió, tancada i fitada.

	x	y	$F(x, y) = 45x + 50y$
A	0	15	750
B	0	40	2000
C	$\frac{37}{2}$	$\frac{43}{2}$	$\frac{3815}{2} = 1907.5$
D	$\frac{48}{7}$	$\frac{69}{7}$	$\frac{5610}{7} \approx 801.43$

La funció presenta un mínim al vèrtex $A = (0, 15)$, amb valor 750. Per tant, l'agricultor no haurà de plantar enciams i plantarà, en canvi, 15 m^2 de cols. En aquestes condicions, el temps dedicat al cultiu serà mínim i ascendirà a 750 minuts.

3 (a) Calculau el màxim i el mínim absolut de la funció $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ en l'interval $[1, 4]$. (6 punts)

(b) Estudiau la continuïtat en l'interval $[0, 4]$ de la funció (4 punts)

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & 0 \le x < 1, \\ x^3 - 6x^2 + 9x + 1, & 1 \le x \le 4. \end{cases}$$

SOLUCIÓ

(a) Per trobar els possibles màxims i mínims absoluts d'una funció $f(x)$ hem de resoldre l'equació $f'(x) = 0$ i després comparar els valors de la funció en aquests punts amb el valor de la funció als extrems de l'interval.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \Longrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Longrightarrow x = 3,\ x = 1.$$

Estudiem el signe de la segona derivada, $f''(x) = 6x - 12$, per saber si és un màxim o un mínim.

$$f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 6 > 0 \Longrightarrow \text{Mínim.}$$

Avaluem la funció en aquests punts, $f(3) = 1$, i comparem amb $f(1)$ i $f(4)$: $f(4) = 5$ i $f(1) = 5$. Per tant, el valor màxim absolut és 5 i s'agafa a $x = 4$ i $x = 1$, el valor mínim absolut és 1 i s'agafa a $x = 3$.

(b) L'únic punt problemàtic és $x = 1$, en tots els altres la funció és contínua.

$$\begin{aligned} &f(1) = 5, \\ &f_-(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} (2x + 3) = 2 \cdot 1 + 3 = 5, \\ &f_+(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} (x^3 - 6x^2 + 9x + 1) = 1 - 6 + 9 + 1 = 5, \end{aligned}$$

per tant, com que $f(1) = f_-(1) = f_+(1)$, la funció és contínua en tot l'interval donat.

4 En cert curs de segon de batxillerat d'un IES el 72,5% dels alumnes varen aprovar Matemàtiques. Dels alumnes que varen aprovar Matemàtiques, el 70% va aprovar també Biologia. D'altra banda, el 33,3% dels que no varen aprovar Matemàtiques, varen aprovar Biologia.

(a) Expressau les dades proporcionades com a probabilitats i donau un arbre que representi les dades. (3 punts)

(b) Quin percentatge va aconseguir aprovar ambdues assignatures alhora? (2 punts)

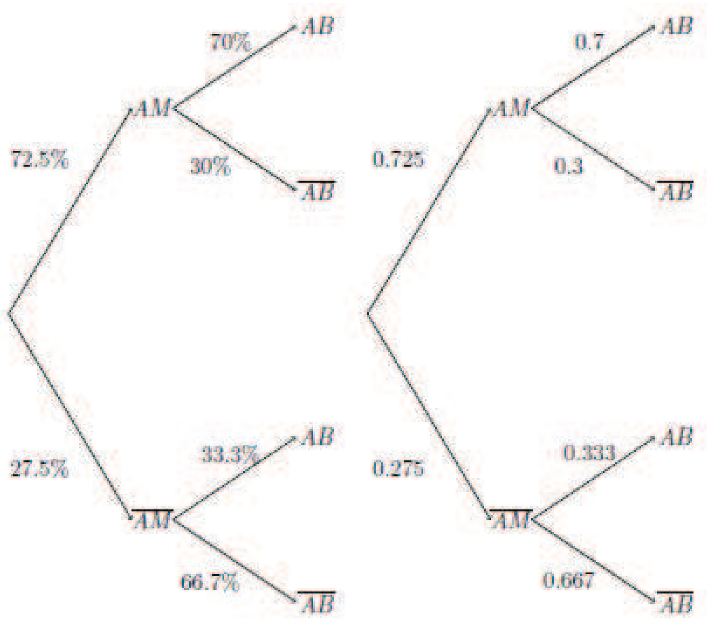
(c) Quin va ser el percentatge d'aprovats a l'assignatura de Biologia? (3 punts)

(d) Si un estudiant no va aprovar Biologia, quina probabilitat hi ha que aprovàs Matemàtiques? (2 punts)

SOLUCIÓ

(a) Fixem en primer lloc els successos:

$$\begin{aligned}
AM &=\text{" aprovar matemàtiques"},\\
\overline{AM} &=\text{" no aprovar matemàtiques"},\\
AB &=\text{" aprovar bologia"},\\
\overline{AB} &=\text{" no aprovar bologia"}.
\end{aligned}$$



(b)

$$p(AM \cap AB) = p(AM) \cdot p(AB/AM) = 0.725 \cdot 0.7 = 0.5075.$$

Un 50.75% aconsegueixen aprovar les dues assignatures.

(c)

$$\begin{aligned}
p(AB) &= P(AM) \cdot p(AB/AM) + p(\overline{AM} \cdot) p(AB/\overline{AM})\\
&= 0.725 \cdot 0.7 + 0.275 \cdot 0.333 = 0.599075.
\end{aligned}$$

Un 59.91% aconsegueixen aprovar Biologia.

(d)

$$p(AM/\overline{AB}) = \frac{p(AM) \cdot p(\overline{AB}/AM)}{p(\overline{AB})} = \frac{0.725 \cdot 0.3}{1 - 0.599075} = \frac{0.2175}{0.400925} \approx 0.5425.$$

OPCIÓ B

$\boxed{1}$ Una multinacional té tres delegacions, una a Palma, una altra a Ciutadella i l'última a Eivissa. El nombre total d'alts executius de les tres delegacions ascendeix a 31. Perquè el nombre d'alts executius de la delegació de Ciutadella fos igual al de Palma haurien de traslladar-se 3 executius de Palma a Ciutadella. A més, el nombre de la de Palma excedeix en 1 la suma dels destinats a les altres dues delegacions. Quants alts executius estan destinats a cada delegació? (10 punts)

SOLUCIÓ
Siguin:

$$x = \text{Nombre d'executius a Palma},$$
$$y = \text{Nombre d'executius a Ciutadella},$$
$$z = \text{Nombre d'executius a Eivissa}.$$

El sistema d'equacions que ens permet resoldre el problema és:

$$\begin{cases} x+y+z=31, \\ x-3=y+3, \\ x-1=y+z. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=31, \\ x-y=6, \\ x-y-z=1. \end{cases} \Longrightarrow x=16,\ y=10,\ z=5.$$

Hi ha 16 executius a Palma, 10 a Ciutadella i 5 a Eivissa.

$\boxed{2}$ En un magatzem es guarden bidons d'oli de gira-sol i d'oliva. Per atendre els clients s'ha de tenir emmagatzemat un mínim de 20 bidons d'oli de gira-sol i 40 d'oli d'oliva i, a més, el nombre de bidons d'oli d'oliva no ha de ser inferior a la meitat del nombre de bidons d'oli de gira-sol. La capacitat total del magatzem és de 150 bidons. Sabent que la despesa d'emmagatzematge d'un bidó d'oli d'oliva és d'1 euro i la d'un gira-sol, de 50 cèntims. Quants bidons de cada tipus caldrà emmagatzemar perquè la despesa sigui mínima? I perquè la despesa sigui màxima? S'ha de plantejar el problema com un problema de programació lineal, representar gràficament el seu conjunt factible de solucions, determinant i dibuixant els seus vèrtexs, i resoldre'l. (10 punts)

SOLUCIÓ
Considerem les variables següents:

$$x ='' \text{ nombre de bidons d'oli de gira-sol}'',$$
$$y ='' \text{ nombre de bidons d'oli d'oliva}''.$$

Les restriccions del problema són:

$$\begin{cases} x+y \leq 150, \\ y \geq \frac{x}{2}, \\ x \geq 20, \\ y \geq 40. \end{cases}$$

El nostre objectiu és optimitzar les despeses, la funció objectiu és: $F(x,y) = 100x + 50y$ (1 euro=100 cèntims).

Els punts de tall són: $A = (20,40)$, $B = (80,40)$, $C = (100,50)$ i $D = (20,130)$.

A la figura es pot veure la regió, tancada i fitada.

	x	y	$F(x,y) = 100x + 50y$
A	20	40	5000
B	80	40	8000
C	100	50	10000
D	20	130	14000

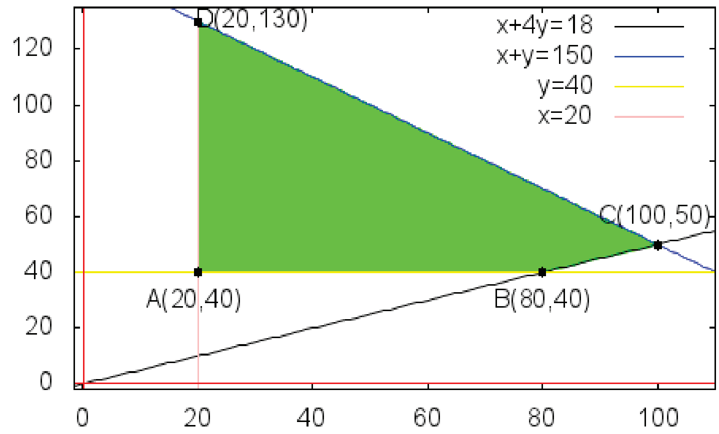


Figura 6: Dibuix de la regió factible associada al problema.

Per tant, la despesa mínima s'assoleix al punt $A = (20, 40)$, 20 bidons d'oli de gira-sol i 40 bidons d'oli d'oliva i és de 50 €. La despesa màxima s'assoleix al punt $D = (20, 130)$ amb 20 bidons d'oli de gira-sol i 130 d'oli d'oliva, i és de 140 €.

3 Considerau dos successos, A i B. Si es coneixen les probabilitats

$$p(A) = 0.84, \quad p(B) = 0.5, \quad p(A^c \cup B^c) = 0.58$$

(on A^c és el succés complementari d'A). Aleshores:

(a) Son independents els successos A i B? (5 punts)

(b) Calculau la probabilitat que es compleixin B i A^c. (5 punts)

SOLUCIÓ

(a) Dos successos, A i B, són independents si

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B).$$

Calculem cada un d'aquests termes:

$$p(A) \cdot p(B) = 0.84 \cdot 0.5 = 0.42.$$

Ara, com que $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$, tenim

$$0.58 = p(A^c \cup B^c) = p((A \cap B)^c) = 1 - p(A \cap B) \Rightarrow p(A \cap B) = 1 - 0.58 = 0.42.$$

Per tant, els successos són independents.

(b) Que es compleixin B i A^c vol dir calcular la probabilitat del succés $B \cap A^c$.

$$p(B) = p(A \cap B) + p(A^c \cap B) \implies p(A^c \cap B) = p(B) - p(A \cap B),$$

per tant,

$$p(A^c \cap B) = 0.5 - 0.42 = 0.08.$$

4 El quocient intel·lectual d'uns alumnes universitaris es distribueix normalment amb una mitjana de 100 i una desviació típica de 10.

(a) Es tria una persona a l'atzar. Calculau la probabilitat que el seu quocient intel·lectual es trobi entre 98 i 103. (4 punts)

(b) Es tria una mostra de vint-i-cinc persones a l'atzar. Trobau la probabilitat que la mitjana dels seus quocients intel·lectuals es trobi entre 98 i 103. (6 punts)

SOLUCIÓ

(a) Sigui x la variable aleatòria "quocient intel·lectual" que segueix una distribució $N(100, 10)$, aleshores per trobar la probabilitat demanada hem de tipificar les variables, per tant:

$$\begin{aligned} p(98 < x < 103) &= p\left(\frac{98-100}{10} < z < \frac{103-100}{10}\right) = p\,(-0.2 < z < 0.3) \\ &= p(z < 0.3) - p(z \leq -0.2) = p(z < 0.3) - (1 - p(z < 0.2)) \\ &= p(z < 0.3) + p(z < 0.2) - 1 \\ &= \phi(0.3) + \phi(0.2) - 1 = 0.6179 + 0.5793 - 1 = 0.1972. \end{aligned}$$

(b) Les mitjanes $\overline{x}$ segueixen una distribució $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(100, \frac{10}{\sqrt{5}}) = N(100, 2)$. Per tant:

$$\begin{aligned} p(98 < \overline{x} < 103) &= p\left(\frac{98-100}{2} < z < \frac{103-100}{2}\right) = p\,(-1 < z < 1.5) \\ &= \phi(1.5) + \phi(1) - 1 = 0.9332 + 0.8413 - 1 = 0.7745. \end{aligned}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula 1: Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

Prova d'accés a la Universitat (2014)

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials

Model 3

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul. Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1 Considerau el sistema d'equacions donat per

$$\begin{cases} kx + y - z = 1, \\ x - ky + z = 4, \\ x + y + kz = 0, \end{cases}$$

(a) Discutiu el sistema en funció del paràmetre k. (6 punts)

(b) Resoleu-lo quan $k = 1$. (4 punts)

2 (a) Representau gràficament el conjunt de punts que satisfan les inequacions lineals següents:

$$\begin{aligned} x + 4y &\geq 18, && (1) \\ 3x - 2y &\leq 12, && (2) \\ -x - y &\leq -6, && (3) \\ x \geq 0,\ y &\geq 0. && (4) \end{aligned}$$

Assenyalau damunt la gràfica els vèrtexs amb les seves coordenades, així com l'equació que correspon a cadascuna de les rectes que la delimiten. Indicau si és o no una regió fitada del pla. (5 punts)

(b) Indicau la posició dels punts $P = (2, 2)$ i $Q = (5, 10)$ en relació amb la regió determinada a l'apartat a). En cas que el punt sigui exterior indicau, comprovant-ho algebraicament, quina o quines de les inequacions no compleix. (3 punts)

(c) Per a la regió representada a l'apartat a) determinau en quins punts agafa el valor mínim la funció $h(x, y) = 2x + 8y$. (2 punts)

3 Hi ha un fons d'inversió la rendibilitat del qual, en funció de la quantitat invertida en euros, ve donada per la funció $R(x) = \begin{cases} -0.0001x^2 + 0.5x & \text{Si } 0 < x \leq 4000, \\ 400 & \text{Si } x \geq 4000. \end{cases}$

Es demana.

(a) Quina rendibilitat s'obté en invertir 3000 euros? (2 punts)

(b) Quina quantitat x convé invertir per obtenir la màxima rendibilitat? (6 punts)

(c) Quina és aquesta màxima rendibilitat? (2 punts)

$\boxed{4}$ Una parella per celebrar el seu 25 aniversari planeja passar un cap de setmana gastronòmic triant a l'atzar una de les tres ciutats del País Basc: B, SS, V. No obstant això, es pronostica temps plujós durant aquests dies. En concret, les probabilitats de pluja durant el cap de setmana considerat són de 3/5, 2/7 i 1/4 a B, SS i V, respectivament.

(a) Proporcionau el diagrama en arbre associat al problema. (2 punts)

(b) Quina és la probabilitat que no plogui durant el cap de setmana? (3 punts)

(c) Quina és la probabilitat que la ciutat escollida sigui SS i no plogui durant la visita? (2 punts)

(d) La parella ha tingut un cap de setmana plujós. Quina és la probabilitat que hagi estat a la ciutat B? (3 punts)

OPCIÓ B

$\boxed{1}$ La suma de les edats de tres germans d'edats diferents és de 37 anys. La suma de l'edat del gran més el doble de l'edat del mitjà més el triple de l'edat del petit és de 69 anys. L'edat del germà mitjà excedeix en 2 l'edat del petit. Calcula les edats dels tres germans. Planteja un sistema d'equacions que permeti calcular les edats i resol-lo.

(10 punts)

$\boxed{2}$ Una fàbrica de mobles produeix dos tipus de butaques S1 i S2. La fàbrica té dues seccions: ebenisteria i tapisseria. Fer una butaca del tipus S1 requereix 1 hora de treball a la secció d'ebenisteria i 2 hores a la de tapisseria. Una butaca del tipus S2 necessita 3 hores d'ebenisteria i 1 de tapisseria. El personal d'ebenisteria subministra un màxim de 90 hores de treball, en tapisseria es disposa d'un màxim de 80 hores. Els beneficis per la venda de cada butaca de S1 i de cada butaca de S2 són de 36 euros i 18 euros, respectivament. Quantes butaques de cada tipus cal produir per maximitzar els beneficis? (10 punts)

$\boxed{3}$ Segons un estudi sobre evolució de la població d'una determinada espècie protegida, es pot establir que el nombre d'individus d'aquesta espècie, durant els propers anys, ve determinada per la funció $f(t) = \frac{50t+500}{t+1}$, on t és el nombre d'anys transcorreguts.

(a) Calculau la població actual i la prevista per d'aquí a nou anys. (2 punts)

(b) Determinau els períodes de temps en què la població augmentarà i els períodes en què disminuirà. (6 punts)

(c) Estudiau si, segons la funció donada, la població tendirà a estabilitzar-se en algun valor i, en cas afirmatiu, determinau aquest valor. (2 punts)

$\boxed{4}$ Una família que fa un viatge en cotxe des de Cartagena per la Comunitat Valenciana té un 50% de possibilitats de visitar la ciutat de València, un 40% de visitar Peníscola i un 30% de visitar ambdues ciutats. Es demana

(a) La probabilitat que visiti almenys una de les dues ciutats. (2 punts)

(b) La probabilitat que visiti València però no visiti Peníscola. (3 punts)

(c) La probabilitat que visiti únicament una de les dues ciutats. (3 punts)

(d) La probabilitat que visiti Peníscola, sabent que ha visitat València. (2 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula 1: Taula de la distribució normal $N(0, 1)$.

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials

Criteris específics de correcció

Model 3

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

CRITERIS OPCIÓ A

1 (a) Càlcul correcte del determinant i solució de l'equació $det(A) = 0$: 2 punts.
Discussió correcta quan $k \neq 0$: 2 punts.
Discussió correcta quan $k = 0$: 2 punts.

(b) Solució correcta amb càlculs: 4 punts. Si tan sols s'indica la solució: 0 punts.

2 (a) Dibuix i solució correcta amb justificacions i seguint les indicacions de l'enunciat: 5 punts. Si falta qualque indicació de recta o de vèrtex, cal restar mig punt per recta i/o vèrtex. Nota mínima: 0 punts. Si hi ha error en el càlcul d'algun dels vèrtexs, però els altres estan ben calculats: màxim 3 punts.

(b) Solució correcta de l'apartat: 3 punts, 1.5 punts per qüestió.

(c) Determinació correcta del màxim de la funció: 2 punts.

3 (a) Càlcul de $R(3000)$: 1 punt. Indicar que la rendibilitat serà de 600 euros: 1 punt.

(b) Càlcul correcte i expressió de la derivada: 2 punts. Resolució correcta de l'equació $R'(x) = 0$: 2 punts. Estudi justificat del caràcter de màxim: 2 punts.

(c) Indicació de la rendibilitat màxima: 2 punts.

4 (a) Arbre correcte: 2 punts.

(b) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 3 punts.

(c) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 2 punts.

(d) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 2 punts.

(e) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 3 punts.

CRITERIS OPCIÓ B

$\boxed{\textbf{1}}$ Plantejar correctament el sistema que s'ha de resoldre: 4 punts.

Solució correcta del sistema: 4 punts.

Indicar que les edats són: 15, 12 i 10 anys: 2 punts.

Qualsevol altra situació: 0 punts.

$\boxed{\textbf{2}}$ **Primera part**: determinació del problema i de la regió factible.

Plantejament correcte del problema de programació lineal (és a dir, determinació correcta de les inequacions que determinen el problema): 3 punts. Si falta una de les equacions, incloent les trivials: màxim 1 punt.

Càlcul correcte de la regió factible, en concordança amb les equacions determinades prèviament, indicant-ne els vèrtexs i proporcionant-ne un dibuix: 3 punts. Si hi ha error en algun dels vèrtexs, però els altres estan ben calculats: màxim 2 punts.

En qualsevol cas, si no apareixen explicacions i càlculs donant suport al dibuix i la determinació dels vèrtexs: 0 punts.

Segona part: determinació de l'extrem de la funció.

Establiment de la funció a optimitzar: 1 punt.

Càlcul i indicació de les butaques que maximitzen la funció: 2 punts.

Indicació del benefici màxim: 1 punt.

Sense càlculs o explicacions que donin suport a les afirmacions, però la funció és correcta: 1 punt.

$\boxed{\textbf{3}}$

(a) Càlcul $f(0)$: 1 punt. Càlcul de $f(9)$: 1 punt.

(b) Càlcul correcte i simplificar la derivada: 2 punts. Indicar que $f'(x) < 0$: 2 punts. Indicació que sempre és decreixent la funció: 2 punts.

(c) Càlcul correcte del límit: 1 punt. Indicar que la funció s'estabilitza en 50 individus: 1 punt.

$\boxed{\textbf{4}}$

(a) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 2 punts.

(b) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 3 punts.

(c) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 3 punts.

(d) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 2 punts.

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials

Model 3

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul. Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1 Considerau el sistema d'equacions donat per

$$\begin{cases} kx + y - z = 1, \\ x - ky + z = 4, \\ x + y + kz = 0, \end{cases}$$

(a) Discutiu el sistema en funció del paràmetre k. (6 punts)

(b) Resoleu-lo quan $k = 1$. (4 punts)

SOLUCIÓ

(a) Consideram les matrius del sistema i l'ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}, \qquad A^* = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -k & 1 & 4 \\ 1 & 1 & k & 0 \end{pmatrix}.$$

Aleshores

$$det(A) = -k^3 - 3k = -k(k^2+3) = 0 \Longrightarrow k = 0.$$

Per tant, si $k \neq 0$, tenim que $rg(A) = rg(A^*) = 3$ nombre d'incògnites, d'aquí el sistema és compatible determinat.

Si $k = 0$. Com que

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \;\Rightarrow\; rg(A) = 2,$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \;\Rightarrow\; rg(A^*) = 3,$$

en aquest cas, el sistema és incompatible.

(b) El sistema ens queda

$$\begin{cases} x + y - z = 1, \\ x - y + z = 4, \\ x + y + z = 0, \end{cases}$$

De l'apartat a) sabem que el determinant del sistema $\Delta = -4$. Així

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-10}{-4} = \frac{5}{2}, \quad y = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{8}{-4} = -2,$$

$$z = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}.$$

$\boxed{2}$ (a) Representau gràficament el conjunt de punts que satisfan les inequacions lineals següents:

$$\begin{aligned} x + 4y &\geq 18, && (1) \\ 3x - 2y &\leq 12, && (2) \\ -x - y &\leq -6, && (3) \\ x \geq 0,\ y &\geq 0. && (4) \end{aligned}$$

Assenyalau damunt la gràfica els vèrtexs amb les seves coordenades, així com l'equació que correspon a cadascuna de les rectes que la delimiten. Indicau si és o no una regió fitada del pla. (5 punts)

(b) Indicau la posició dels punts $P = (2,2)$ i $Q = (5,10)$ en relació amb la regió determinada a l'apartat a). En cas que el punt sigui exterior indicau, comprovant-ho algebraicament, quina o quines de les inequacions no compleix. (3 punts)

(c) Per a la regió representada a l'apartat a) determinau en quins punts agafa el valor mínim la funció $h(x,y) = 2x + 8y$. (2 punts)

SOLUCIÓ

(a)

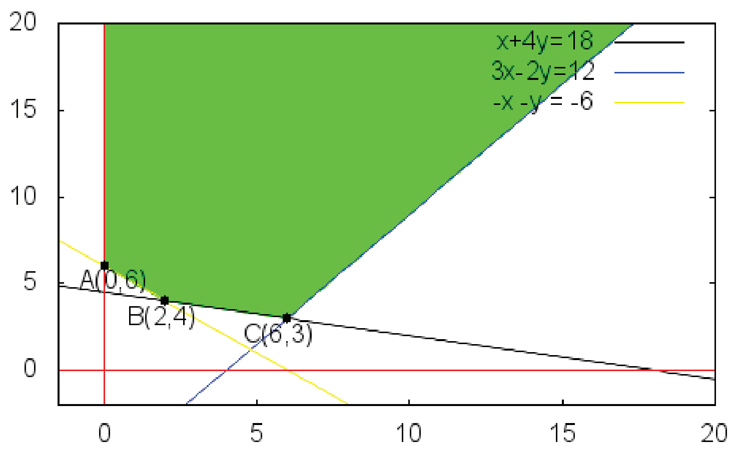


Figura 7: Dibuix de la regió.

A la figura es pot veure que la regió és no fitada.

(b) El punt $Q = (5,10)$ pertany a la regió i el punt $P = (2,2)$ és exterior a la regió. Gràficament es pot veure a la figura que les afirmacions anteriors són evidents. Per fer-ho algebraicament és suficient substituir en les inequacions.

El punt P tan sols satisfà les condicions $x \geq 0$, $y \geq 0$ i la condició (2).

(c)

	x	y	$h(x,y) = 2x + 8y$
A	0	6	48
B	2	4	36
C	6	3	36

El mínim de la funció h s'agafa als punts B i C, i val 36. Per tant, en tots els punts del segment BC la funció agafa el valor mínim i la solució és múltiple.

3 Hi ha un fons d'inversió la rendibilitat del qual, en funció de la quantitat invertida en euros, ve donada per la funció $R(x) = \begin{cases} -0.0001x^2 + 0.5x & \text{Si } 0 < x \leq 4000, \\ 400 & \text{Si } x \geq 4000. \end{cases}$

Es demana.

(a) Quina rendibilitat s'obté en invertir 3000 euros? (2 punts)

(b) Quina quantitat x convé invertir per obtenir la màxima rendibilitat? (6 punts)

(c) Quina és aquesta màxima rendibilitat? (2 punts)

SOLUCIÓ

(a) Si volem invertir 3000 euros hem de calcular $R(3000)$ per obtenir la rendibilitat.

$$R(3000) = -0.0001 \cdot 3000^2 + 0.5 \cdot 3000 = 600.$$

La rendibilitat serà de 600 euros.

(b) Per calcular la màxima rendibilitat hem de calcular $R'(x)$.

$$R'(x) = \begin{cases} -0.0002 \cdot x + 0.5 & \text{Si } 0 < x < 4000, \\ 0 & \text{Si } x > 4000. \end{cases}$$

Hem de resoldre l'equació $R'(x) = 0$, per tant, $-0.0002 \cdot x + 0.5 = 0$, d'on $x = \frac{0.5}{0.0002} = 2500$ euros.

Com que $R''(x) = -0.0002 < 0$, a $x = 2500$ euros s'agafa el màxim de la rendibilitat.

(c) La rendibilitat màxima serà

$$R(2500) = -0.0001 \cdot 2500^2 + 0.5 \cdot 2500 = 625 \text{ euros}.$$

4 Una parella per celebrar el seu 25 aniversari planeja passar un cap de setmana gastronòmic triant a l'atzar una de les tres ciutats del País Basc: B, SS, V. No obstant això, es pronostica temps plujós durant aquests dies. En concret, les probabilitats de pluja durant el cap de setmana considerat són de 3/5, 2/7 i 1/4 a B, SS i V, respectivament.

(a) Proporcionau el diagrama en arbre associat al problema. (2 punts)

(b) Quina és la probabilitat que no plogui durant el cap de setmana? (3 punts)

(c) Quina és la probabilitat que la ciutat escollida sigui SS i no plogui durant la visita? (2 punts)

(d) La parella ha tingut un cap de setmana plujós. Quina és la probabilitat que hagi estat a la ciutat B? (3 punts)

SOLUCIÓ

Definim en primer lloc els esdeveniments que intervenen en el problema.

$B =''$ Triar la ciutat de Bilbao''
$SS =''$ Triar la ciutat de Sant Sebastià''
$V =''$ Triar la ciutat de Vitòria''

$LL =''$ Cap de setmana plujós''
$\overline{LL} =''$ Cap de setmana no plujós''

(a) El diagrama en arbre és el següent:

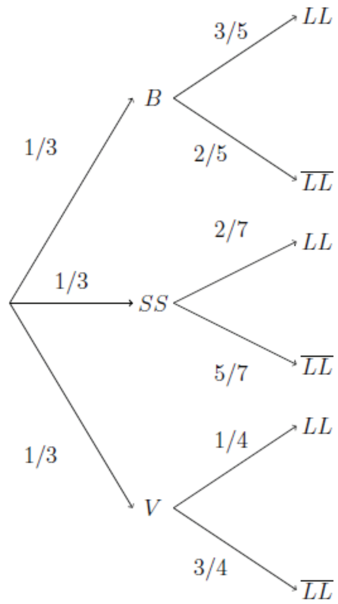


Figura 8: Arbre.

(b) Tenim que

$$\begin{aligned} p(\overline{LL}) &= p(B)\cdot p(\overline{LL}/B) + p(SS)\cdot p(\overline{LL}/SS) + p(V)\cdot p(\overline{LL}/V) \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{2}{15} + \frac{5}{21} + \frac{3}{12} = \frac{87}{140} \approx 0.6214. \end{aligned}$$

(c)

$$p(SS \cap \overline{LL}) = p(SS)\cdot p(\overline{LL}/SS) = \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7} = \frac{5}{21} \approx 0.2381$$

(d) Ens demanen $p(B/LL)$ i per calcular-la hem d'obtenir $p(LL)$.

$$p(LL) = 1 - p(\overline{LL}) = 1 - \frac{87}{140} = \frac{140-87}{140} = \frac{53}{140}$$

Per tant:

$$p(B/LL) = \frac{p(B \cap LL)}{p(LL)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{53}{140}} = \frac{84}{159} \approx 0.53.$$

OPCIÓ B

$\boxed{1}$ La suma de les edats de tres germans d'edats diferents és de 37 anys. La suma de l'edat del gran més el doble de l'edat del mitjà més el triple de l'edat del petit és de 69 anys. L'edat del germà mitjà excedeix en 2 l'edat del petit. Calcula les edats dels tres germans. Planteja un sistema d'equacions que permeti calcular les edats i resol-lo.

(10 punts)

SOLUCIÓ
Siguin:

$$x = '' \text{ Edat del gran}''$$
$$y = '' \text{ Edat del mitjà}''$$
$$z = '' \text{ Edat del petit}''$$

Aleshores, el sistema que ens permet calcular les edats és:

$$\begin{cases} x + y + z = 37, \\ x + 2y + 3z = 69, \\ y = z + 2, \end{cases}$$

d'on $x = 15$, $y = 12$ i $z = 10$.

$\boxed{2}$ Una fàbrica de mobles produeix dos tipus de butaques S1 i S2. La fàbrica té dues seccions: ebenisteria i tapisseria. Fer una butaca del tipus S1 requereix 1 hora de treball a la secció d'ebenisteria i 2 hores a la de tapisseria. Una butaca del tipus S2 necessita 3 hores d'ebenisteria i 1 de tapisseria. El personal d'ebenisteria subministra un màxim de 90 hores de treball, en tapisseria es disposa d'un màxim de 80 hores. Els beneficis per la venda de cada butaca de S1 i de cada butaca de S2 són de 36 euros i 18 euros, respectivament. Quantes butaques de cada tipus cal produir per maximitzar els beneficis? (10 punts)

SOLUCIÓ
Siguin

$$x = '' \text{ Butaques de tipus S1}''$$
$$y = '' \text{ Butaques de tipus S2}''$$

Les dades del problema es podem resumir a la següent taula.

Temps (hores)	Ebenisteria	Tapisseria
S1	1	2
S2	3	1
Disponible	90	80

Com que hem de maximitzar els beneficis, la funció objectiu és:

$$F(x, y) = 36x + 18y.$$

les restriccions del problema són:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + 3y \leq 90, \\ 2x + y \leq 80. \end{cases}$$

La regió la podem veure a la figura següent.

Els punts de tall són: $A = (0, 0)$, $B = (40, 0)$, $C = (30, 20)$ i $D = (0, 30)$.

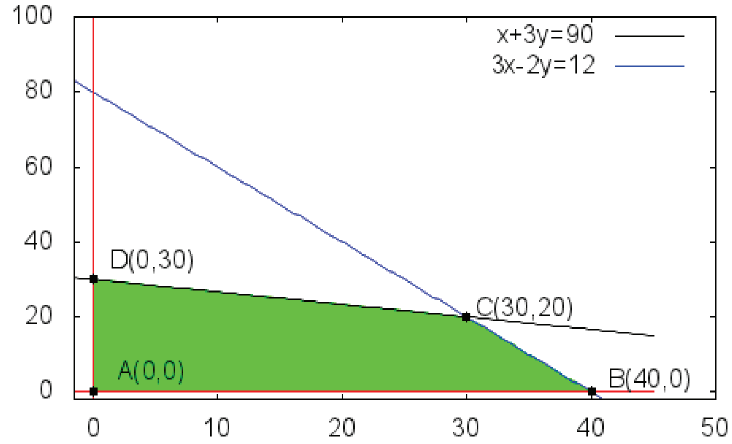


Figura 9: Dibuix de la regió.

	x	y	$F(x,y) = 36x + 18y$
A	0	0	0
B	40	0	1440
C	30	20	1440
D	0	30	540

El màxim s'assoleix als punts B i C, per tant, qualsevol punt amb coordenades senceres al segment que uneix B amb C pot ser solució del nostre problema. El benefici màxim serà de 1440 euros.

3 Segons un estudi sobre evolució de la població d'una determinada espècie protegida, es pot establir que el nombre d'individus d'aquesta espècie, durant els propers anys, ve determinada per la funció $f(t) = \frac{50t+500}{t+1}$, on t és el nombre d'anys transcorreguts.

(a) Calculau la població actual i la prevista per d'aquí a nou anys. (2 punts)

(b) Determinau els períodes de temps en què la població augmentarà i els períodes en què disminuirà. (6 punts)

(c) Estudiau si, segons la funció donada, la població tendirà a estabilitzar-se en algun valor i, en cas afirmatiu, determinau aquest valor. (2 punts)

SOLUCIÓ

(a)

La població actual: $f(0) = 500.$

La població d'aquí a nou anys: $f(9) = \dfrac{50 \cdot 9 + 500}{9 + 1} = 95.$

(b) Per determinar l'augment o el decreixement de la població, calculem $f'(t)$.

$$f'(t) = \frac{50(t+1) - (50t+500)}{(t+1)^2} = \frac{-450}{(t+1)^2} < 0.$$

Per tant, la població disminueix sempre.

(c) Per estudiar si la població s'estabilitza amb el temps calculem $\lim_{t\to+\infty} f(t)$.

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{50t+500}{t+1} = 50.$$

La població tendeix a estabilitzar-se en 50 individus.

$\boxed{4}$ Una família que fa un viatge en cotxe des de Cartagena per la Comunitat Valenciana té un 50% de possibilitats de visitar la ciutat de València, un 40% de visitar Peníscola i un 30% de visitar ambdues ciutats. Es demana

(a) La probabilitat que visiti almenys una de les dues ciutats. (2 punts)

(b) La probabilitat que visiti València però no visiti Peníscola. (3 punts)

(c) La probabilitat que visiti únicament una de les dues ciutats. (3 punts)

(d) La probabilitat que visiti Peníscola, sabent que ha visitat València. (2 punts)

SOLUCIÓ

Siguin els successos

$$V = \{\text{visitar València}\}, \quad P = \{\text{visitar Peníscola}\}.$$

Aleshores:

$$p(V) = \frac{5}{10}, \quad p(P) = \frac{4}{10}, \quad p(V\cap P) = \frac{3}{10}.$$

(a) Ens demanen $p(P\cup V)$

$$p(P\cup V) = p(V) + p(P) - p(V\cap P) = \frac{5}{10} + \frac{4}{10} - \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = 0.6.$$

(b) Ens demanen $p(\text{visitar València però no visitar Peníscola}) = p(V\cap\overline{P})$, per tant,

$$p(V\cap\overline{P}) = p(V) - p(V\cap P) = \frac{5}{10} - \frac{3}{10} = \frac{2}{10} = 0.2.$$

(c) Ens demanen: $p(V\cap\overline{P}) + p(\overline{V}\cap P)$

$$p(\overline{V}\cap P) = p(P) - p(V\cap P) = \frac{4}{10} - \frac{3}{10} = \frac{1}{10} = 0.1,$$

per tant, $p(V\cap\overline{P}) + p(\overline{V}\cap P) = 0.2 + 0.1 = 0.3.$

(d)

$$p(P/V) = \frac{p(P\cap V)}{p(V)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{5}{10}} = \frac{3}{5} = 0.6.$$

Universitat de les Illes Balears | Prova d'accés a la Universitat | Convocatòria 2015

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 3

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Tres ciclistes, C_1, C_2 i C_3, surten a entrenar-se. Per cada quilòmetre que recorre C_1, C_2 recorre 2 quilòmetres i C_3 recorre les tres quartes parts del que recorre C_2. Al final, la suma de les distàncies recorregudes pels tres ciclistes és de 180 quilòmetres. Quants quilòmetres recorre cada un? (6 punts)

b) Determinau les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 4 \end{pmatrix}$ tals que $A + A^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; on A^t és la matriu transposada de A. (4 punts)

2. *a*) Representau gràficament el conjunt de punts que satisfan les inequacions lineals següents:

$$\begin{aligned} 2x + y &\leq 6, && (1) \\ 4x + y &\leq 10, && (2) \\ -x + y &\leq 3, && (3) \\ x &\geq 0. && (4) \\ y &\geq 0. && (5) \end{aligned}$$

Indicau si és o no una regió fitada del pla. Assenyalau damunt la gràfica els vèrtexs amb les seves coordenades, així com l'equació que correspon a cadascuna de les rectes que la delimiten. (6 punts)

b) Calculau el màxim de la funció

$$f(x, y) = 4x + 2y - 3,$$

en el recinte anterior i indicau on s'aconsegueix. (4 punts)

3. El preu d'un article, que ha estat els últims 6 anys al mercat, en funció del temps t (en anys) ha seguit la següent funció

$$f(t) = \begin{cases} 3t^2 + 4 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ -2t + 20 & \text{si } 2 < t \leq 6 \end{cases}$$

a) Representau la funció preu en els últims 6 anys. És contínua aquesta funció? És derivable? (4 punts)

b) Estudiau quan ha estat creixent i quan decreixent el preu de l'article. (2 punts)

c) Quin va ser el preu màxim que va aconseguir l'article? Quin és el preu actual? (2 punts)

d) Representau la funció derivada. (2 punts)

4. En una capsa hi ha guardats 20 rellotges, dels quals n'hi ha 15 que funcionen correctament.

a) Representau la situació del problema, quan s'extreuen dos rellotges a l'atzar sense reemplaçament, mitjançant un diagrama en arbre. (3 punts)

b) Si s'extreu un rellotge a l'atzar, quina és la probabilitat que funcioni bé? (1 punt)

c) Si s'extreuen dos rellotges a l'atzar, sense reemplaçament, quina és la probabilitat que tots dos funcionin bé? (3 punts)

d) Si s'extreuen dos rellotges a l'atzar successivament, sense reemplaçament, i el primer no funciona correctament, quina és la probabilitat que el segon tampoc no hi funcioni? (3 punts)

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 3

OPCIÓ B

1. a) Determinau tres nombres, A, B i C, tals que la seva suma sigui 210, la meitat de la suma del primer i de l'últim més la quarta part de l'altre sigui 95, i la mitjana dels dos últims sigui 80. (6 punts)

b) Determinau la forma de les matrius $A = \begin{pmatrix} -a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ perquè no admetin inversa. Escriviu algun exemple particular d'aquestes matrius. (4 punts)

2. a) Representau gràficament el conjunt de punts que satisfan les inequacions lineals següents:

$$x + y \geq 2, \qquad (1)$$
$$x - y \leq 0, \qquad (2)$$
$$y \leq 4, \qquad (3)$$
$$x \geq 0. \qquad (4)$$

Indicau si és o no una regió fitada del pla. Assenyalau damunt la gràfica els vèrtexs amb les seves coordenades, així com l'equació que correspon a cadascuna de les rectes que la delimiten. (5 punts)

b) Calculau el màxim i el mínim de la funció

$$f(x, y) = x + y,$$

en el recinte anterior i indicau on s'aconsegueixen. (4 punts)

c) Pertany el punt $(1/3, 4/3)$ al recinte anterior? Justificau la resposta. (1 punt)

3. Els beneficis (en milers d'euros) per la venda d'un producte en funció de la inversió realitzada en promoció (en milers d'euros) vénen donats per:

$$B(x) = \begin{cases} 5x + 15, & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ -(x-3)^2 + 30, & \text{si } 3 < x \leq 8 \end{cases}$$

a) És contínua aquesta funció? És derivable? Representau-la gràficament. (4 punts)

b) Quan creix i quan decreix la funció benefici? (2 punts)

c) Quan s'obtenen els beneficis mínim i màxim? (2 punts)

d) Representau la funció derivada. (2 punts)

4. a) L'antiguitat dels avions comercials segueix una distribució normal amb una desviació típica de 8,28 anys. S'agafa una mostra de 40 avions i l'antiguitat mitjana és de 13,41 anys. Obteniu un interval de confiança del 90% per a l'antiguitat mitjana. (6 punts)

b) Quina grandària mínima haurà de tenir la mostra per obtenir un interval de confiança al 95% amb la mateixa amplitud que l'anterior? (4 punts)

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 3

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula 3: Taula de la distribució normal $N(0, 1)$.

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 3. Criteris específics de correcció

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

OPCIÓ A

1. *a*) Plantejar correctament el sistema que s'ha de resoldre: 3 punts.
Solució correcta del sistema: 2 punts.
Indicar la distància que recorre cadascun dels ciclistes: 1 punt.
Qualsevol altra situació: 0 punts.

b) Càlcul correcte de A^t: 1 punt. Càlcul correcte de $A + A^t$: 1 punt. Solució correcta de l'equació: 2 punts.
Qualsevol altra situació: 0 punts.

2. *a*) Dibuix i solució correcta amb justificacions i seguint les indicacions de l'enunciat: 6 punts. Si falta qualque indicació de recta o de vèrtex, cal restar mig punt per recta i/o vèrtex. Nota mínima: 0 punts. Si hi ha error en el càlcul d'algun dels vèrtexs, però els altres estan ben calculats: màxim 3 punts.

b) Càlcul del valor de la funció en els extrems de la regió: 2 punts.
Determinació correcta que el màxim de la funció es troba en el segment CD: 2 punts.
Si s'indica que el màxim s'agafa en els punts C i D però no en el segment: 1 punt.

3. a) Representació gràfica: 2 punts. Justificació de la continuïtat per qualsevol mètode: 1 punt. Justificació de la no derivabilitat per qualsevol mètode: 1 punt. Sense cap justificació: 0 punts.

b) Justificació correcta del creixement: 1 punt per interval.

c) Justificació correcta del preu màxim: 1 punt. Càlcul del preu actual: 1 punt.

d) Representació correcta de la funció derivada: 2 punts. Si no s'exclouen els vèrtexs: 1 punt.

4. a) Representació adequada en arbre amb indicació de probabilitats: 3 punts.

b) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 1 punt.

c) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 3 punts.

d) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 3 punts.

OPCIÓ B

1. *a*) Plantejar correctament el sistema que s'ha de resoldre: 3 punts.
Solució correcta del sistema: 3 punts.

Qualsevol altra situació: 0 punts.

b) Càlcul correcte de $det(A)$: 1 punt. Solució correcta de l'equació: 2 punts. Indicació d'un exemple o més: 1 punt.
Qualsevol altra situació: 0 punts.

2. a) Dibuix i solució correcta amb justificacions i seguint les indicacions de l'enunciat: 5 punts. Si falta qualque indicació de recta o de vèrtex, cal restar mig punt per recta i/o vèrtex. Nota mínima: 0 punts. Si hi ha errors en el càlcul d'algun dels vèrtexs, però els altres estan ben calculats: màxim 2 punts.

b) Càlcul del valor de la funció en els extrems de la regió: 2 punts.
Determinació correcta que el màxim de la funció es troba en el segment AB: 2 punts.
Si s'indica que el màxim s'agafa en els punts A i B però no en el segment: 1 punt.

c) Justificació correcta que el punt donat és exterior a la regió: 1 punt.

3. a) Representació gràfica: 2 punts. Justificació de la continuïtat per qualsevol mètode: 1 punt. Justificació de la no derivabilitat per qualsevol mètode: 1 punt. Sense cap justificació: 0 punts.

b) Justificació correcta del creixement: 1 punt per interval.

c) Justificació correcta del benefici màxim: 1 punt. Justificació correcta del benefici mínim: 1 punt.

d) Representació correcta de la funció derivada: 2 punts. Si no s'exclouen els vèrtexs: 1 punt.

4. a) Justificació i càlcul correcte del valor crític: 3 punts. Sense justificació i càlculs del valor crític: màxim 1 punt.
Justificació i càlcul correcte de l'interval de confiança: 3 punts. Si tan sols apareix directament l'interval: màxim 1 punt.

b) Justificació i càlcul correcte del valor crític: 2 punts. Sense justificació i càlculs del valor crític: màxim 1 punt.
Càlcul correcte de la grandària mostral mínima: 2 punts.

Si s'agafa 1.64 o 1.65 en lloc de $\frac{1.64+1.65}{2}$, considerar el problema ben resolt i puntuau-lo seguint les indicacions anteriors.

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 3. Solucions

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Tres ciclistes, C_1, C_2 i C_3, surten a entrenar-se. Per cada quilòmetre que recorre C_1, C_2 recorre 2 quilòmetres i C_3 recorre les tres quartes parts del que recorre C_2. Al final, la suma de les distàncies recorregudes pels tres ciclistes és de 180 quilòmetres. Quants quilòmetres recorre cada un? (6 punts)

b) Determinau les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 4 \end{pmatrix}$ tals que $A + A^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; on A^t és la matriu transposada de A. (4 punts)

Solució. *a*) El sistema d'equacions que ens permet resoldre el problema és el següent:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 180, \\ C_2 = 2 \cdot C_1, \\ C_3 = \frac{3}{4} \cdot C_2. \end{cases}$$

La solució és: $C_1 = 40$, $C_2 = 80$ i $C_3 = 60$.

b) Com que $A = \begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 4 \end{pmatrix}$ tenim que $A^t = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & 4 \end{pmatrix}$. Així:

$$A + A^t = \begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & b+a \\ a+b & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix},$$

d'on tenim que $a = -b$ i les matrius demanades tenen la forma:

$$\begin{pmatrix} 2 & b \\ -b & 4 \end{pmatrix}.$$

2. *a*) Representau gràficament el conjunt de punts que satisfan les inequacions lineals següents:

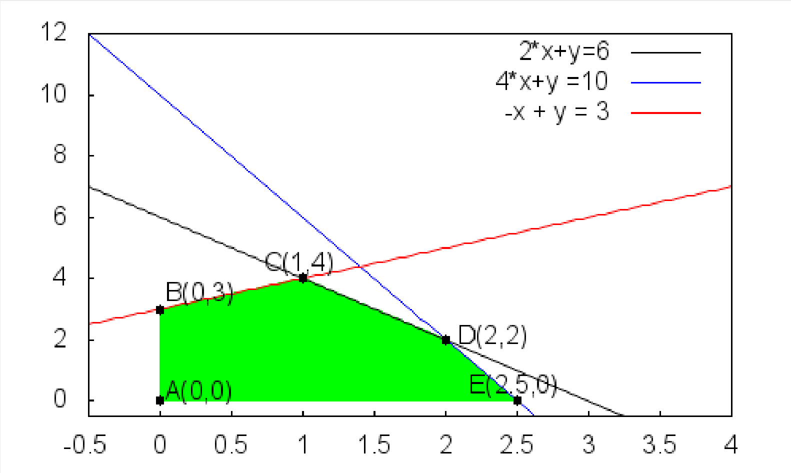
$$\begin{aligned} 2x + y &\le 6, && (1) \\ 4x + y &\le 10, && (2) \\ -x + y &\le 3, && (3) \\ x &\ge 0. && (4) \\ y &\ge 0. && (5) \end{aligned}$$

Indicau si és o no una regió fitada del pla. Assenyalau damunt la gràfica els vèrtexs amb les seves coordenades, així com l'equació que correspon a cadascuna de les rectes que la delimiten. (6 punts) *b*) Calculau el màxim de la funció

$$f(x, y) = 4x + 2y - 3,$$

en el recinte anterior i indicau on s'aconsegueix. (4 punts)

Solució. *a*)



A la figura es pot veure que la regió és tancada i fitada.
Els vèrtexs són els punts: $A = (0, 0)$, $B = (0, 3)$, $C = (1, 4)$, $D = (2, 2)$ i $E = (\frac{5}{2}, 0) = (2.5, 0)$.

b)

	x	y	$f(x, y) = 4x + 2y - 3$
A	0	0	-3
B	0	3	3
C	1	4	9
D	2	2	9
E	2.5	0	7

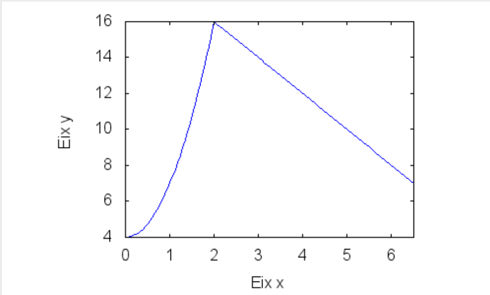
El màxim de $f(x, y)$ en el recinte és 9 i s'aconsegueix en tots els punts del segment $\overline{CD}$.

3. El preu d'un article, que ha estat els últims 6 anys al mercat, en funció del temps t (en anys) ha seguit la següent funció

$$f(t) = \begin{cases} 3t^2 + 4 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ -2t + 20 & \text{si } 2 < t \leq 6 \end{cases}$$

a) Representau la funció preu en els últims 6 anys. És contínua aquesta funció? És derivable? (4 punts)
b) Estudiau quan ha estat creixent i quan decreixent el preu de l'article. (2 punts)
c) Quin va ser el preu màxim que va aconseguir l'article? Quin és el preu actual? (2 punts)
d) Representau la funció derivada. (2 punts)

Solució. a)



Podem veure a la gràfica que la funció és contínua en el seu domini, i com la funció no és derivable en el mateix domini, ja que a $x = 2$ la funció presenta un pic i en aquests pics la funció no és derivable. D'una altra forma:

$$f(2-) = 16 = f(2+) = f(2) \implies f \text{ és contínua.}$$
$$f'(2-) = 12 \neq f'(2+) = -2 \implies f \text{ no és derivable a } x = 2.$$

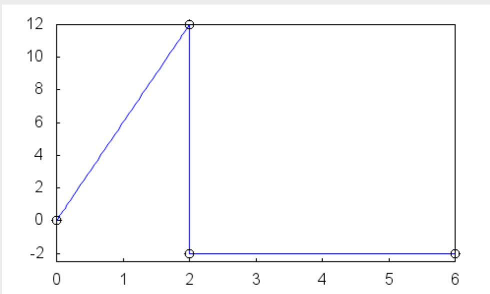
b) La funció derivada de $f(t)$ ve donada per:

$$f'(t) = \begin{cases} 6t & \text{si } 0 < t < 2 \\ -2 & \text{si } 2 < t < 6 \end{cases}$$

Si $0 < t < 2$, $f'(t) = 6t > 0$, per tant, la funció és creixent.
Si $2 < t < 6$, $f'(t) = -2 < 0$, per tant, la funció és decreixent.

c) El preu màxim s'aconsegueix a $x = 2$ (vegeu la figura) i ve donat per $f(2) = 16$, 16 euros.
El preu actual ve donat per $f(6) = -2 \cdot 6 + 20 = -12 + 20 = 8$, 8 euros.

d) L'expressió de la funció derivada està escrita a l'apartat b), la seva gràfica és:



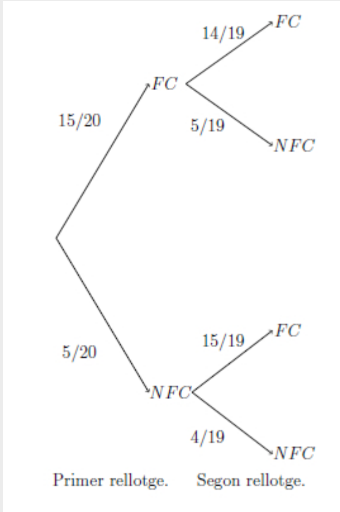
4. En una capsa hi ha guardats 20 rellotges, dels quals n'hi ha 15 que funcionen correctament.

a) Representau la situació del problema, quan s'extreuen dos rellotges a l'atzar sense reemplaçament, mitjançant un diagrama en arbre. (3 punts)
b) Si s'extreu un rellotge a l'atzar, quina és la probabilitat que funcioni bé? (1 punt)
c) Si s'extreuen dos rellotges a l'atzar, sense reemplaçament, quina és la probabilitat que tots dos funcionin bé? (3 punts)
d) Si s'extreuen dos rellotges a l'atzar successivament, sense reemplaçament, i el primer no funciona correctament, quina és la probabilitat que el segon tampoc no hi funcioni?

(3 punts)

Solució. a)

"FC" Funciona correctament, probabilitat $15/20$,
"NFC" No funciona correctament, probabilitat $5/20$,



b) Aleshores de l'enunciat tenim que:

$$p(FC) = \frac{15}{20}.$$

c)

$$p(2FC) = p(1erFC) \cdot p(2onFC/1erFC) = \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} = \frac{21}{38} \approx 0.5526.$$

d)

$$p(2onNFC/1erNFC) = \frac{4}{19} \approx 0.2105.$$

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 3. Solucions

OPCIÓ B

1. a) Determinau tres nombres, A, B i C, tals que la seva suma sigui 210, la meitat de la suma del primer i de l'últim més la quarta part de l'altre sigui 95, i la mitjana dels dos últims sigui 80. (6 punts)

b) Determinau la forma de les matrius $A = \begin{pmatrix} -a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ perquè no admetin inversa. Escriviu algun exemple particular d'aquestes matrius. (4 punts)

Solució. *a*) El sistema d'equacions que ens permet resoldre el problema és el següent:

$$\begin{cases} A + B + C = 210, \\ \frac{A+C}{2} + \frac{1}{4}B = 95, \\ \frac{B+C}{2} = 80. \end{cases}$$

La solució és: $A = 50$, $B = 40$ i $C = 120$.

b) Com que $A = \begin{pmatrix} -a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ tenim que:

$$det(A) = \begin{vmatrix} -a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = -a^2 + b^2 = 0 \Longrightarrow b^2 = a^2 \Longrightarrow b = \pm a.$$

Per tant, les matrius són de la forma

$$\begin{pmatrix} -a & a \\ -a & a \end{pmatrix}, \text{ o } \begin{pmatrix} -a & -a \\ a & a \end{pmatrix}.$$

Dos exemples:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} -7 & -7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

2. a) Representau gràficament el conjunt de punts que satisfan les inequacions lineals següents:

$$x + y \geq 2, \qquad (1)$$
$$x - y \leq 0, \qquad (2)$$
$$y \leq 4, \qquad (3)$$
$$x \geq 0. \qquad (4)$$

Indicau si és o no una regió fitada del pla. Assenyalau damunt la gràfica els vèrtexs amb les seves coordenades, així com l'equació que correspon a cadascuna de les rectes que la delimiten. (5 punts)

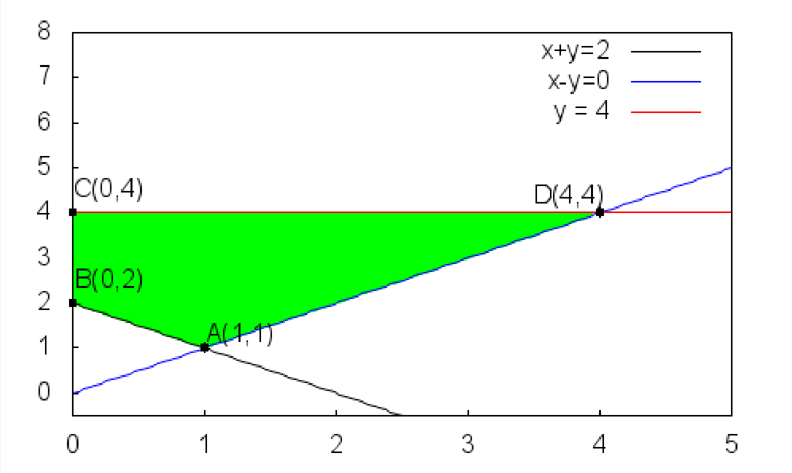
b) Calculau el màxim i el mínim de la funció

$$f(x, y) = x + y,$$

en el recinte anterior i indicau on s'aconsegueixen. (4 punts)

c) Pertany el punt $(1/3, 4/3)$ al recinte anterior? Justificau la resposta. (1 punt)

Solució. *a*)



A la figura es pot veure que la regió és tancada i fitada.
Els vèrtexs són els punts: $A = (1, 1)$, $B = (0, 2)$, $C = (0, 4)$ i $D = (4, 4)$.

b)

	x	y	$f(x, y) = x + y$
A	1	1	2
B	0	2	2
C	0	4	4
D	4	4	8

El màxim de $f(x, y)$ en el recinte és 8 i s'aconsegueix al punt $D = (4, 4)$. El mínim de $f(x, y)$ en el recinte és 2 i s'aconsegueix en tots els punts del segment $\overline{AB}$.

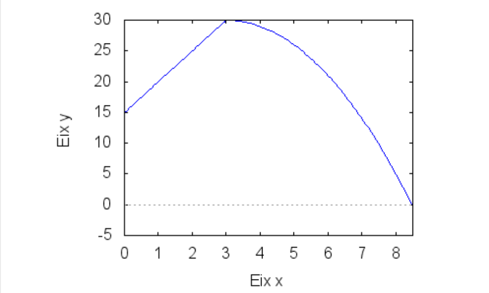
c) El punt $(1/3, 4/3)$ no pertany al recinte, ja que no satisfà la condició (1): $1/3+4/3 = 5/3 < 2$.

3. Els beneficis (en milers d'euros) per la venda d'un producte en funció de la inversió realitzada en promoció (en milers d'euros) vénen donats per:

$$B(x) = \begin{cases} 5x + 15, & \text{si } 0 \le x \le 3 \\ -(x-3)^2 + 30, & \text{si } 3 < x \le 8 \end{cases}$$

a) És contínua aquesta funció? És derivable? Representau-la gràficament. (4 punts)
b) Quan creix i quan decreix la funció benefici? (2 punts)
c) Quan s'obtenen els beneficis mínim i màxim? (2 punts)
d) Representau la funció derivada. (2 punts)

Solució. a)



Podem veure a la gràfica que la funció és contínua en el seu domini, i com la funció no és derivable en el mateix domini, ja que a $x = 3$ la funció presenta un pic i en aquests pics la funció no és derivable:

$$B'(3-) = 5, \; B'(3+) = 0 \text{ i } \; B'(3-) \neq B'(3+).$$

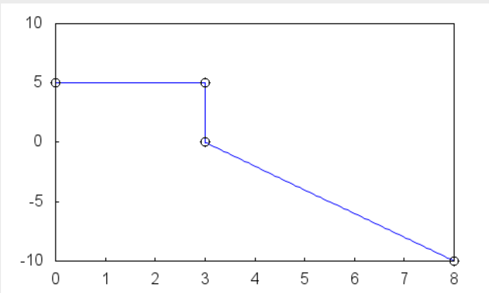
b) La funció derivada de $B(x)$ ve donada per:

$$B'(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } 0 < x < 3, \\ -2(x-3) & \text{si } 3 < x < 8. \end{cases}$$

Si $0 < x < 3$, $B'(x) = 5 > 0$, per tant, la funció és creixent.
Si $3 < x < 8$, $B'(x) = -2(x-3) < 0$, per tant, la funció és decreixent.

c) El benefici màxim s'aconsegueix quan es realitza una inversió de 3.000 en promoció (vegeu la figura) i ve donat per $B(3) = 30$, 30.000 euros.
El benefici mínim s'aconsegueix amb una inversió de 8.000 euros en promoció (vegeu la figura) i ve donat per $B(8) = 5$, 5.000 euros.

d) L'expressió de la funció derivada està escrita a l'apartat b), la seva gràfica és:



4. a) L'antiguitat dels avions comercials segueix una distribució normal amb una desviació típica de 8,28 anys. S'agafa una mostra de 40 avions i l'antiguitat mitjana és de 13,41 anys. Obteniu un interval de confiança del 90% per a l'antiguitat mitjana. (6 punts)

b) Quina grandària mínima haurà de tenir la mostra per obtenir un interval de confiança al 95% amb la mateixa amplitud que l'anterior? (4 punts)

Solució. a) L'interval de confiança per a la mitjana ve donat per

$$IC = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

on $\bar{x} = 13.41$, $\sigma = 8.28$ i $n = 40$. Així,

$$IC = \left(13.41 - z_{\alpha/2}\frac{8.28}{\sqrt{40}}, 13.41 + z_{\alpha/2}\frac{8.28}{\sqrt{40}}\right).$$

Per a un nivell de confiança del 90%:

$$1 - \alpha = 0.90 \;\Rightarrow\; \alpha = 1 - 0.9 = 0.1.$$

$$z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \phi^{-1}\left(1 - \frac{0.1}{2}\right) = \phi^{-1}(0.95) = \frac{1,64 + 1,65}{2} = 1.645.$$

D'on

$$IC = \left(13.41 - 1.645\frac{8.28}{\sqrt{40}}, 13.41 + 1.645\frac{8.28}{\sqrt{40}}\right) = (11.26\,,\,15.56),$$

$$IC = (11.26\,,\,15.56).$$

b) A un nivell de confiança del 95%:

$$1 - \alpha = 0.95 \;\Rightarrow\; \alpha = 1 - 0.95 = 0.05.$$

$$z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \phi^{-1}\left(1 - \frac{0.05}{2}\right) = \phi^{-1}(0.975) = 1.96.$$

Com que l'amplitud de l'interval ha de ser la mateixa tenim que:

$$1.645\frac{8.28}{\sqrt{40}} = 1.96\frac{8.28}{\sqrt{n}}$$

d'on:

$$\sqrt{n} = \frac{1.96}{1.645}\sqrt{40} \approx 7.54 \Longrightarrow n \geq 56.85.$$

La grandària mínima de la mostra ha de ser 57.

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 3. Solucions

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula 3: Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 1

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Comprovau si la inversa de la matriu $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ coincideix amb la seva transposada? (4 punts)

b) Determinau, en els casos en què sigui possible, les solucions del sistema d'equacions

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & k/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(6 punts)

2. *a*) Representau gràficament el conjunt de punts que satisfan les inequacions lineals següents:

$$\begin{aligned} 2x + 5y &\leq 50, && (1) \\ 3x + 5y &\leq 55, && (2) \\ 5x + 2y &\leq 60, && (3) \\ x + y &\leq 18, && (4) \\ x \geq 0,\ y &\geq 0. && (5) \end{aligned}$$

Indicau si és o no una regió fitada del pla. Assenyalau damunt la gràfica els vèrtexs amb les seves coordenades, així com l'equació que correspon a cadascuna de les rectes que la delimiten. (5 punts)

b) Indicau la posició dels punts $P = (5, 5)$ i $Q = (12, 12)$ en relació amb la regió determinada a l'apartat a). En cas que el punt sigui exterior indicau, comprovant-ho algebraicament, quina o quines de les inequacions no compleix. (3 punts)

c) Per a la regió representada a l'apartat a) determinau en quins punts agafa el valor màxim la funció $h(x, y) = 400x + 500y + 1000$. (2 punts)

3. El nombre d'individus, en milions, d'una població, ve donat per la funció:

$$P(t) = \frac{15 + t^2}{(t + 1)^2},$$

on t es mesura en anys transcorreguts des de $t = 0$. Calculau:

1. La població inicial i la població al cap de 3 anys. (2 punts)

2. L'any en què s'aconseguirà la mínima població. Quina serà la grandària d'aquesta població? (6 punts)
3. Quina serà la grandària de la població a llarg termini? (2 punts)

4.

L'alçada mitjana dels joves de 20 anys d'un poble segueix una distribució normal de mitjana 174 cm i desviació típica 10 cm. Es tria una mostra aleatòria simple de 144 joves. Sigui $\bar{x}$ la mitjana mostral de les alçades observades.

a) Quines són la mitjana i la variància de la variable aleatòria $\bar{x}$? (4 punts)

b) Quina és la probabilitat que l'alçada mitjana de la mostra estigui compresa entre 173 cm i 175 cm? (6 punts)

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 1

OPCIÓ B

1. *a*) En una ebenisteria produeixen cadires, taules i armaris a raó d'un total de 350 peces/mes. Les hores de mà d'obra invertides són 2 hores per cadira, 3 hores per taula i 5 hores per armari, i s'utilitza 1 planxa de fusta per cadira, 2 planxes per taula i 3 planxes per armari. Si es disposa d'un total de 1.050 hores i de 625 planxes de fusta al mes, quantes unitats de cada moble poden fabricar en aquest temps? (7 punts)

b) Determinau el valor de a que fa que la matriu següent no tingui inversa: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & a \end{pmatrix}$ (3 punts)

2. *a*) Representau gràficament el conjunt de punts que satisfan les inequacions lineals següents:

$$\begin{aligned} x + y &\leq 14, & (1)\\ 2x + 3y &\leq 36, & (2)\\ 4x + y &\geq 16, & (3)\\ x - 3y &\leq 0. & (4) \end{aligned}$$

Indicau si és o no una regió fitada del pla. Assenyalau damunt la gràfica els vèrtexs amb les seves coordenades, així com l'equació que correspon a cadascuna de les rectes que la delimiten. (6 punts)

b) Quines restriccions satisfan els punts $P = (0, 5)$, $Q = (5, 15)$ i $R = (0, 15)$? (4 punts)

3.

Considerau la següent funció $f(x) = \dfrac{-4x}{1 + x^2}$. Es demana:

a) Calculau la derivada de $f(x)$. (2 punts)

b) Resoleu l'equació $f'(x) = 0$. (1 punt)

c) Determinau els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x)$. (2 punts)

d) Determinau els punts màxims i mínims de la funció $f(x)$. (1 punt)

e) Calculau $f''(x)$ i resoleu l'equació $f''(x) = 0$. Contestau si poden existir o no punts d'inflexió. (4 punts)

4. Un fabricant garanteix que la durada mitjana del seu producte A és de 1.200 hores amb una desviació típica de 55 hores. Per comprovar el que diu el fabricant respecte a la durada, s'ha realitzat una prova amb 81 unitats del producte i s'ha obtingut una durada mitjana de 1.191 hores. Podem acceptar que la durada mitjana del producte A és exactament la que diu el fabricant amb un nivell de significació del 8%? (10 punts)

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula 1: Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 1. Criteris específics de correcció

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

OPCIÓ A

1. *a*) Expressió correcta de la matriu transposada: 1 punt. Càlcul correcte del producte de la matriu per la seva trasposta: 2 punts. Indicació que aquest producte és igual a la matriu identitat: 1 punt (sense cap càlcul o explicació: 0 punts).
Una altra possibilitat: Càlcul de la matriu inversa: 2 punts. Indicació que coincideix amb la transposada: 2 punts.

b) Càlcul correcte del determinant: 1 punt. Resolució correcta de l'equació det(A)=0: 1 punt. Solució per a k distint de 2 i -1: 2 punts (si no indiquen que el sistema és homogeni: 1 punt; sense justificació 0 punts). Solució per a $k = 2$: 1 punt (sense justificació: 0 punts). Solució per a $k = -1$: 1 punt (sense justificació: 0 punts)

2. *a*) Dibuix i solució correcta amb justificacions i seguint les indicacions de l'enunciat: 5 punts. Si falta qualque indicació de recta o de vèrtex, cal restar mig punt per recta i/o vèrtex. Nota mínima: 0 punts. Si hi ha error en el càlcul d'algun dels vèrtexs, però els altres estan ben calculats: màxim 3 punts.

b) Solució correcta de l'apartat: 3 punts, 1.5 punts per punt.

c) Determinació correcta del màxim de la funció: 2 punts.

3. *a*) Càlcul correcte del valor de $P(0)$: 1 punt. Càlcul correcte del valor de $P(3)$: 1 punt. Una altra situació 0 punts.

b) Càlcul correcte de la derivada: 1 punt. Solució correcta de l'equació $P'(x) = 0$: 1 punt. Justificació correcta que el punt és un màxim: 2 punts. Determinació i indicació de l'any en què s'arriba al mínim: 2 punts (sense indicació de quantitat mínima d'individus: 1 punt).

c) Càlcul correcte del mínim quan $t \to +\infty$: 2 punts.

4. *a*) Indicació correcta de la mitjana: 1 punt. Indicació correcta de la variància: 2 punts. Indicar que les mitjanes segueixen una normal N(174,5/6): 1 punt.

b) Tipificació correcta: 2 punts. Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 4 punts. Si el càlcul no està plenament justificat, màxim 2 punts.

OPCIÓ B

1. *a*) Plantejar correctament el sistema que s'ha de resoldre: 4 punts.

Solució correcta del sistema: 2 punts.
Indicar que s'han de fabricar: 150 cadires, 125 taules i 75 armaris: 1 punt.
Qualsevol altra situació: 0 punts.

b) Càlcul correcte del determinant: 2 punts. Indicació del valor correcte de a: 1 punt. Qualsevol altra situació: 0 punts.

2. *a*) Dibuix i solució correcta amb justificacions i seguint les indicacions de l'enunciat: 6 punts. Si falta qualque indicació de recta o de vèrtex, cal restar mig punt per recta i/o vèrtex. Nota mínima: 0 punts. Si hi ha error en el càlcul d'algun dels vèrtexs, però els altres estan ben calculats: màxim 3 punts.

b) Solució correcta de l'apartat: 4 punts. Sense cap justificació algebraica i indicació d'inequacions no satisfetes: màxim 1 punt.
En aquest apartat no és suficient amb el dibuix dels punts al gràfic, s'han d'indicar les inequacions no satisfetes.

3. *a*) Càlcul correcte i simplificar la derivada: 2 punts.

b) Solució correcta de l'equació: 1 punt.

c) Estudi del creixement i decreixement amb indicació dels intervals: 2 punts.

d) Indicar que al màxim s'hi arriba a $x = -1$: 0.5 punts, i al mínim amb $x = 1$: 0.5 punts.

e) Càlcul correcte de $f''(x)$: 2 punts. Solució de l'equació $f''(x) = 0$: 1 punt. Indicar que com que l'equació $f''(x) = 0$ té solucions, llavors poden existir punts d'inflexió, o que poden existir com a màxim 3 punts d'inflexió: 1 punt.
Si no s'indica que es justifica que poden existir punts d'inflexió o com a màxim tres punts d'inflexió: màxim 2 punts.

4. Establiment de les hipòtesis, contrast bilateral: 2 punts. (Una altra situació: 0 punts.)

Justificació i càlcul correcte del valor crític: 3 punts. Sense justificació i càlculs del valor crític: màxim 1 punt.

Justificació i càlcul correcte de l'interval de confiança: 3 punts. Si tan sols apareix directament l'interval: màxim 1 punt.

Indicació amb justificació que podem acceptar l'afirmació del fabricant: 2 punts.

Si s'agafa 1.75 o 1.76 en lloc de $\frac{1.75+1.76}{2}$, cal considerar el problema ben resolt i puntuar-ho seguint les indicacions anteriors.

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 2

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Discutiu per a quins valors de m el sistema següent té solució: (7 punts)

$$\left.\begin{aligned} x+my+z &= \ \ 1, \\ 3x+2y+z &= -1, \\ mx+y-z &= -1. \end{aligned}\right\}$$

b) Resoleu-lo, si és possible, quan $m=1$. (3 punts)

2. La funció $f(x)=x^3+ax^2+bx$ té un extrem relatiu a $x=2$ i un punt d'inflexió a $x=3$. Calculau els valors de a i b (8 punts), i determinau si aquest extrem és un màxim o un mínim relatiu de f (2 punts).

3. Contestau els apartats següents:

a) Si la probabilitat de la intersecció de dos successos independents és 0.2 i la de la seva unió és 0.7, quina és la probabilitat de cadascun dels successos? (5 punts)

b) En un experiment se sap que $p(A)=0.6$, $p(B)=0.3$ i $p(A|B)=0.1$. Calculau $p(A\cup B)$. (5 punts)

4. Se suposa que la quantitat d'aigua (en litres) recollida cada dia en una estació meteorològica es pot aproximar per una variable aleatòria amb distribució normal de desviació típica $\sigma=2$. Es tria una mostra aleatòria simple i s'obtenen les següents quantitats d'aigua recollides cada dia en litres:

8.8; 3.8; 6.5; 3.6; 5.5; 7.5; 3.5; 8.9; 7.9; 4

a) Determinau un interval de confiança per a la quantitat mitjana d'aigua recollida cada dia a l'estació, amb un nivell de confiança del 95%. (5 punts)

b) Calculau la grandària mostral mínima necessària perquè en estimar la mitjana d'aigua recollida cada dia a l'estació meteorològica mitjançant la mitjana d'aquesta mostra, l'amplitud de l'interval de confiança sigui inferior a un litre, amb un nivell de confiança del 98%. (5 punts)

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 2

OPCIÓ B

1. a) Siguin $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ y+x & 7 & 7 \end{pmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & x+y & 1 \\ 3 & x+y+z & x+y+z \end{pmatrix}$ dues matrius d'ordre 2×3, on x, y, z denoten tres nombres reals per determinar.

a.1) Determinau els valors de x, y, z de manera que $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. (5 punts)

a.2) És possible el càlcul $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$? Raonau la resposta. (2 punts)

b) Donau un exemple de cadascuna de les matrius següents: una matriu identitat, una matriu simètrica, i una matriu diagonal que no sigui la matriu unitat. (3 punts)

2. Es vol organitzar un pont aeri entre les illes de Mallorca i Menorca, amb places suficients de passatge i càrrega, per a transportar com a mínim 1600 persones i 96 tones d'equipatge i mercaderies. Per fer això es disposa de dos tipus d'avions, 11 de tipus A i 8 de tipus B. La contractació d'un avió de tipus A costa 4000 € i pot transportar 200 persones i 6 tones d'equipatge i mercaderies; els avions de tipus B costen 1000 € cadascun i i podem transportar 100 persones i 15 tones. Quants avions de cada tipus han de utilitzar-se perquè el cost sigui mínim? (10 punts)

S'ha de plantejar el problema com un problema de programació lineal, dibuixant la regió factible de solucions i determinant i dibuixant els seus vèrtexs.

3. El benefici net, en milers d'euros, obtingut per la venda de x unitats d'un article ve donat per la funció

$$B(x) = -x^2 + 9x - 16.$$

Quina és la funció que determina el benefici net unitari? (2 punts) Calculau el nombre d'unitats de l'article que s'han de vendre per obtenir un benefici net per unitat màxim (7 punts). Determinau aquest benefici net màxim per unitat (1 punt).

4. Una empresa dedicada a l'elaboració de productes derivats del blat de moro té una determinada màquina que envasa els grans de blat de moro en bosses que segueixen una distribució normal amb $\mu = 250\,g$ i $\sigma = 25\,g$. Les bosses s'empaqueten en capses (paquets) de 200 unitats.

a) Determinau la distribució de les mitjanes de les mostres. (2 punts)

b) Calculau la probabilitat que la mitjana dels pesos de les bosses d'un paquet sigui més petita que $245\,g$. (3 punts)

c) Calculau la probabilitat que una capsa de 200 bosses pesi més de $51\,kg$. (5 punts)

Si es necessita als càlculs aproximau $\sqrt{2} \approx 1.4142$.

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula 2: Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 2. Criteris específics de correcció

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

OPCIÓ A

1. *a*) Càlcul del $\det(\mathbf{A})$, 2 punts. Discussió, 5 punts. Donau 1 punt per discussió quan $m \neq 0, -1$. Donau 2 punts per discussió quan $m = 0$. Donau 2 punts per discussió quan $m = -1$.
Si l'alumne s'equivoca en el càlcul del $\det(\mathbf{A})$ o en la resolució de l'equació $\det(\mathbf{A}) = 0$, i tota la resta està bé, donau 3 punts com a màxim dels 7 possibles. Si s'equivoca en les dues coses ($\det(\mathbf{A})$ i equació), 0 punts.

b) Resolució per a $m = 1$, 3 punts (1 punt per incògnita).

2.
- Expressió correcta de cadascuna de les dues condicions com una equació: 4 punts (2 punts per condició).
- Càlcul correcte dels valors de a i b: 2 punts.
- Expressió correcta de la funció $f(x)$: 2 punts.
- Determinació del caràcter de l'extrem: 2 punts.

3. *a*) Expressió correcta del sistema d'equacions que ens permetrà calcular les probabilitats demanades: 2 punts. Solució del sistema d'equacions: 2 punts. Indicació de les dues possibles solucions: 1 punt.

b) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 5 punts, 3 punts per calcular $p(A \cap B)$ i 2 punts per trobar $p(A \cup B)$.

4. *a*) Càlcul correcte de $\overline{x}$: 1 punt.
Càlcul correcte i justificat del valor crític: 2 punts. Sense justificació 1 punt.
Càlcul correcte de l'interval de confiança: 2 punts.

b) Expressió de l'amplitud de l'interval: 1 punt.
Càlcul correcte i justificat del nou valor crític: 2 punts. Sense justificació 1 punt.
Càlcul correcte i justificat de la grandària mostral mínima: 2 punts. Sense justificació 1 punt.
Si en lloc de considerar l'amplitud de l'interval, es considera l'error, màxim 3 punts dels 5 possibles.

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 2. Criteris específics de correcció

OPCIÓ B

1. a.1) Expressió del sistema d'equacions que s'ha de resoldre: 2 punts.
Solució i expressió correcta de la solució del sistema: 3 punts.

a.2) Justificació correcta que no es pot fer el producte: 2 punts. Sense justificació 0 punts.

b) 1 punt per cada tipus de matriu.

2. Plantejament correcte del problema de programació lineal (és a dir, determinació correcta de les inequacions que determinen el problema): 3 punts. Si falta una de les equacions, incloent les trivials: màxim 1 punt.

Càlcul correcte de la regió factible, en concordança amb les equacions determinades prèviament, indicant-ne els vèrtexs i proporcionant-ne un dibuix: 3 punts. Si hi ha error en algun dels vèrtexs, però els altres estan ben calculats: màxim 1 punt.

En qualsevol cas, si no apareixen explicacions i càlculs donant suport al dibuix i la determinació dels vèrtexs: 0 punts.

Determinació de la funció objectiu: 1 punt.

Estudi correcte del nombre d'avions de cada tipus: 2 punts (0.5 punts per vèrtex).

Indicació que s'han d'utilitzar 4 avions de tipus A i 8 avions de tipus B i que el cost mínim es de 24000 €: 1 punt.

3.
- Calcular l'expressió del benefici net unitari, 2 punts.
- Càlcul de la derivada del benefici unitari $B'_u(x)$, 3 punts.
- Solució de l'equació $B'_u(x) = 0$, 1 punt.
- Comprovació i determinació del màxim, 2 punts.
- Indicar que s'han de vendre 4 unitats del producte per obtenir el benefici màxim, 1 punt.
- Indicar que el benefici màxim són 1000 €, 1 punt.

Si l'alumne s'equivoca en qualque càlcul anterior però tota la resta és correcta, màxim 6 punts dels 10 possibles. Si hi ha 2 errors, 0 punts.

4. *a*) Tipificació correcta de les mitjanes mostrals: 2 punts.

b) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 3 punts.

c) Tipificació correcta de $\sum x_i$: 2 punts.
Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 3 punts.

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 2. Solucions

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Discutiu per a quins valors de m el sistema següent té solució: (7 punts)

$$\left.\begin{array}{r} x+my+z= & 1, \\ 3x+2y+z= & -1, \\ mx+y-z= & -1. \end{array}\right\}$$

b) Resoleu-lo, si és possible, quan $m=1$. (3 punts)

Solució. *a*) La matriu del sistema és:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ m & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Estudiem quan el determinant del sistema anterior s'anul·la. El determinant de la matriu anterior val:

$$m^2+m.$$

El determinant serà nul per a $m=0$ i $m=-1$.

Si $m\neq 0$ i $m\neq -1$, el rang de la matriu del sistema serà 3, el mateix que el rang de la matriu ampliada i el nombre d'incògnites. Per tant, el sistema serà compatible determinat.

Si $m=0$, la matriu del sistema i la matriu ampliada seran:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},\quad \overline{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

El rang del sistema serà 2, ja que, per exemple, el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\neq 0$, és diferent de zero. El rang de la matriu ampliada serà 3, ja que, per exemple, el menor següent és nul:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=2\neq 0.$$

Per tant, es tractaria d'un sistema incompatible.

Si $m = -1$, la matriu del sistema i la matriu ampliada seran:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

El rang del sistema serà 2, ja que, per exemple, el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, és diferent de zero. El rang de la matriu ampliada serà 2, ja que tots els menors d'ordre 3×3 són nuls. Per tant, es tractaria d'un sistema compatible indeterminat.

b) Hem de resoldre el sistema en cas que $m = 1$, en aquest cas el sistema és compatible i determinat.

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ 3x + 2y + z &= -1, \\ x + y - z &= -1. \end{aligned}\right\}$$

Les solucions són: $x = -2$, $y = 2$, $z = 1$.

2. La funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ té un extrem relatiu a $x = 2$ i un punt d'inflexió a $x = 3$. Calculau els valors de a i b (8 punts), i determinau si aquest extrem és un màxim o un mínim relatiu de f (2 punts).

Solució. Calculem en primer lloc la primera i segona derivada de f.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + ax^2 + bx, \\ f'(x) &= 3x^2 + 2ax + b, \\ f''(x) &= 6x + 2a. \end{aligned}$$

Extrem relatiu a $x = 2$: $f'(2) = 0$, per tant, $12 + 4a + b = 0$.

Punt d'inflexió a $x = 3$: $f''(3) = 0$, per tant, $18 + 2a = 0$.

$$\begin{cases} 12 + 4a + b = 0, \\ 18 + 2a = 0, \end{cases} \implies a = -9,\ b = 24.$$

Per tant, la nostra funció és: $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$.

Per determinar si el nostre extrem és màxim o mínim, calculam la segona derivada en aquest punt $f''(2) = 12 - 18 < 0$, aleshores a $x = 2$ la funció té un màxim.

3. Contestau els apartats següents:

a) Si la probabilitat de la intersecció de dos successos independents és 0.2 i la de la seva unió és 0.7, quina és la probabilitat de cadascun dels successos? (5 punts)

b) En un experiment se sap que $p(A) = 0.6$, $p(B) = 0.3$ i $p(A|B) = 0.1$. Calculau $p(A \cup B)$. (5 punts)

Solució. *a*) Siguin A i B els dos successos. Com que són independents, hem de resoldre, per calcular les seves probabilitats, el sistema següent:

$$\begin{cases} p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B), \\ p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B), \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0.2=p(A)\cdot p(B), \\ 0.7=p(A)+p(B)-0.2, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 0.2=p(A)\cdot p(B), \\ 0.9=p(A)+p(B), \end{cases}$$

De la segona equació $p(A)=0.9-p(B)$, substituint a la primera obtenim:

$$0.2=p(B)(0.9-p(B)) \Longrightarrow (p(B))^2-0.9p(B)+0.2=0 \Longrightarrow p(B)=0.5, \text{ i } p(B)=0.4.$$

Si $p(B)=0.5$ tenim que $p(A)=0.4$. Si $p(B)=0.4$, tenim que $p(A)=0.5$.

b)
$$p(A|B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)} \Longrightarrow 0.1=\frac{p(A\cap B)}{0.3} \Longrightarrow p(A\cap B)=0.03.$$

Per tant,

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=0.6+0.3-0.03=0.87.$$

4. Se suposa que la quantitat d'aigua (en litres) recollida cada dia en una estació meteorològica es pot aproximar per una variable aleatòria amb distribució normal de desviació típica $\sigma=2$. Es tria una mostra aleatòria simple i s'obtenen les següents quantitats d'aigua recollides cada dia en litres:

8.8; 3.8; 6.5; 3.6; 5.5; 7.5; 3.5; 8.9; 7.9; 4

a) Determinau un interval de confiança per a la quantitat mitjana d'aigua recollida cada dia a l'estació, amb un nivell de confiança del 95%. (5 punts)

b) Calculau la grandària mostral mínima necessària perquè en estimar la mitjana d'aigua recollida cada dia a l'estació meteorològica mitjançant la mitjana d'aquesta mostra, l'amplitud de l'interval de confiança sigui inferior a un litre, amb un nivell de confiança del 98%. (5 punts)

Solució. *a*) Tenim que

$$8.8+3.8+6.5+3.6+5.5+7.5+3.5+8.9+7.9+4=60,$$

per tant, $\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}=\frac{60}{10}=6$. Amb un nivell de confiança del 95% tenim que

$$1-\alpha=0.95 \Longrightarrow \alpha=0.05 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96.$$

Un interval de confiança per a la mitjana amb un nivell de confiança $(1-\alpha)\cdot 100\%$ és

$$\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

on $n = 10$, $\overline{x} = 6$, $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ i $\sigma = 2$. L'interval de confiança demanat és:

$$(6 - 1.96\frac{2}{\sqrt{10}}, 6 + 1.96\frac{2}{\sqrt{10}}) \approx (6 - 1.2396, 6 + 1.2396) = (4.7604, 7.2396).$$

b) Nivell de confiança del 98% $\longrightarrow 1-\alpha = 0.98 \longrightarrow \alpha = 0.02$. Per tant, $\alpha/2 = 0.01$, $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.01}$.

$$\phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = \phi(z_{0.01}) = 1 - 0.01 = 0.99 \iff z_{0.01} = \frac{2.32 + 2.33}{2} = 2.325.$$

L'amplitud de l'interval de confiança és

$$\text{amplitud} = 2 \cdot \text{Error} = 2 \cdot z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot 2.325\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 1$$

d'on $2 \cdot 2.325 \cdot 2 \leq \sqrt{n}$ i, per tant, $n \geq 86.49$. Així, la grandària mostral mínima serà $n = 87$.

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 2. Solucions

OPCIÓ B

1. a) Siguin $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ y+x & 7 & 7 \end{pmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & x+y & 1 \\ 3 & x+y+z & x+y+z \end{pmatrix}$ dues matrius d'ordre 2×3, on x, y, z denoten tres nombres reals per determinar.

a.1) Determinau els valors de x, y, z de manera que $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. (5 punts)

a.2) És possible el càlcul $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$? Raonau la resposta. (2 punts)

b) Donau un exemple de cadascuna de les matrius següents: una matriu identitat, una matriu simètrica, i una matriu diagonal que no sigui la matriu unitat. (3 punts)

Solució. a.1) $\mathbf{A} = \mathbf{B} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ y+x & 7 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & x+y & 1 \\ 3 & x+y+z & x+y+z \end{pmatrix}$.

Per tal que les dues matrius siguin iguals, s'ha de satisfer el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} y+x=3, \\ x+y+z=7. \end{cases}$$

Que és un sistema compatible indeterminat, amb solucions $z=4$, $x=3-t$ i $y=t$. Per tant, per a tot $t \in \mathbb{R}$, si agafam $x=3-t$, $y=t$, $z=4$ les dues matrius són iguals.

a.2) Les dues matrius no es podem multiplicar, ja que el nombre de columnes de la primera no coincideix amb el nombre de files de la segona.

b) Una matriu identitat: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Una matriu simètrica: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Un matriu diagonal no identitat: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Es vol organitzar un pont aeri entre les illes de Mallorca i Menorca, amb places suficients de passatge i càrrega, per a transportar com a mínim 1600 persones i 96 tones d'equipatge i mercaderies. Per fer això es disposa de dos tipus d'avions, 11 de tipus A i 8 de tipus B. La contractació d'un avió de tipus A costa 4000 € i pot transportar 200 persones i 6 tones d'equipatge i mercaderies; els avions de tipus B costen 1000 € cadascun i i podem transportar 100 persones i 15 tones. Quants avions de cada tipus han de utilitzar-se perquè el cost sigui mínim? (10 punts)

S'ha de plantejar el problema com un problema de programació lineal, dibuixant la regió factible de solucions i determinant i dibuixant els seus vèrtexs.

Solució. Siguin: "x el nombre d'avions de tipus A" i "y el nombre d'avions de tipus B".

Les dades proporcionades per l'enunciat les podem trobar resumides a la taula següent:

	Tipus A	Tipus B	Mínim
Persones	200	100	1600
Equipatge	6	15	96
Cost	4000	1000	

Les restriccions associades al problema són:

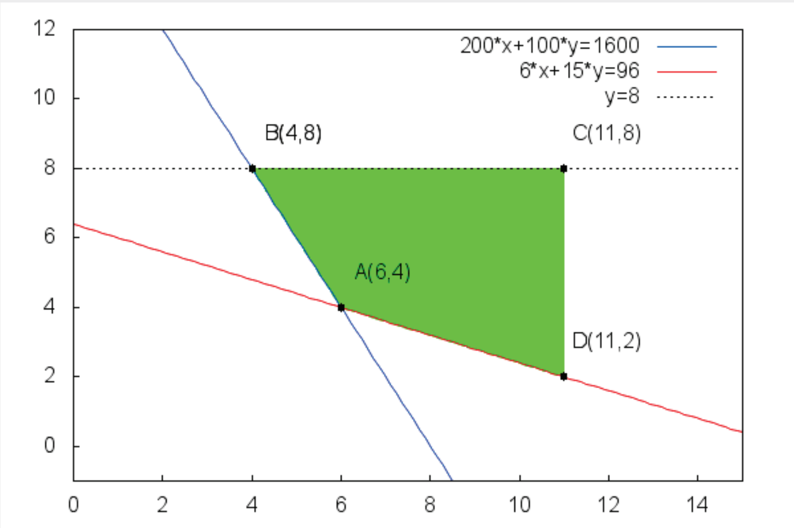
$$\begin{cases} 200x + 100y \geq 1600, \\ 6x + 15y \geq 96, \\ x \leq 11, \\ x \geq 0, \\ y \leq 8, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Calculem els punts de tall, que seran els vèrtexs de la nostra regió factible.

$$\begin{cases} 200x + 100y = 1600, \\ 6x + 15y = 96, \end{cases} \Longrightarrow A = (6, 4). \qquad \begin{cases} 200x + 100y = 1600, \\ y = 8, \end{cases} \Longrightarrow B = (4, 8).$$

$$\begin{cases} 6x + 15y = 96, \\ x = 11, \end{cases} \Longrightarrow D = (11, 2). \qquad C = (11, 8).$$

A la figura es pot veure la regió factible associada al problema amb els vèrtexs assenyalats.



El nostre objectiu és minimitzar el cost, i la funció objectiu és $F(x, y) = 4000x + 1000y$.

	x	y	$F(x,y) = 4000x + 1000y$
A	6	4	28000
B	4	8	24000
C	11	8	52000
D	11	2	46000

Per minimitzar el cost han d'utilitzar-se 4 avions del tipus A i 8 avions del tipus B.

3. El benefici net, en milers d'euros, obtingut per la venda de x unitats d'un article ve donat per la funció

$$B(x) = -x^2 + 9x - 16.$$

Quina és la funció que determina el benefici net unitari? (2 punts) Calculau el nombre d'unitats de l'article que s'han de vendre per obtenir un benefici net per unitat màxim (7 punts). Determinau aquest benefici net màxim per unitat (1 punt).

Solució. La funció que determina el benefici net unitari és:

$$B_u(x) = \frac{B(x)}{x} = \frac{-x^2 + 9x - 16}{x} = -x + 9 - \frac{16}{x}.$$

Per calcular el benefici net per unitat màxim hem de trobar la primera i segona derivada de $B_u(x)$, resoldre l'equació $B_u'(x) = 0$ i estudiar amb la segona derivada quina de les solucions és el màxim.

$$B_u'(x) = -1 + \frac{16}{x^2} = \frac{-x^2 + 16}{x^2}, \quad B_u'(x) = 0 \iff x = \pm 4.$$

Ara si escrivim $B_u'(x) = -1 + 16 \cdot x^{-2}$, tenim que $B_u''(x) = -32 \cdot x^{-3}$, $B_u''(-4) > 0$ i és un mínim, i $B_u''(4) < 0$ i és un màxim. Per tant, el benefici net màxim per unitat s'obté per la venda de 4 unitats del producte.

El benefici net màxim unitari serà:

$$B_u(4) = \frac{-4^2 + 9 \cdot 4 - 16}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

El benefici net màxim seran 1000 €, per unitat.

4. Una empresa dedicada a l'elaboració de productes derivats del blat de moro té una determinada màquina que envasa els grans de blat de moro en bosses que segueixen una distribució normal amb $\mu = 250\,g$ i $\sigma = 25\,g$. Les bosses s'empaqueten en capses (paquets) de 200 unitats.

a) Determinau la distribució de les mitjanes de les mostres. (2 punts)

b) Calculau la probabilitat que la mitjana dels pesos de les bosses d'un paquet sigui més petita que $245\,g$. (3 punts)

c) Calculau la probabilitat que una capsa de 200 bosses pesi més de $51\,kg$. (5 punts)

Si es necessita als càlculs aproximau $\sqrt{2} \approx 1.4142$.

Solució. *a*) La totalitat de les bosses de la màquina esmentada és una població amb $\mu = 250\,g$ i $\sigma = 25\,g$.

Cada capsa és una mostra de 200 individus de la població. Les mitjanes mostrals, $\overline{x}$, dels pesos de les bosses d'una capsa segueixen una distribució $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{25}{\sqrt{200}} = \frac{25}{10 \cdot \sqrt{2}} = \frac{2.5}{\sqrt{2}} \approx \frac{2.5}{1.4142} \approx 1.7678.$$

Per tant,

$$\overline{x} \sim N\left(250, 1.7678\right).$$

b)

$$p(\overline{x} < 245) = p\left(z < \frac{245 - 250}{1.7678}\right) \approx p(z < -2.83) = p(z > 2.83) = 1 - \phi(2.83)$$
$$= 1 - 0.9977 = 0.0023.$$

c) $\sum_{i=1}^{200} x_i = \sum_{i=1}^{200} 250 = 200 \cdot 250 = 50000.$

$\sum_{i=1}^{200} x_i$ segueix una distribució $N\left(n \cdot \mu, \sigma \cdot \sqrt{n}\right) = N(50000, 25\sqrt{200}) = N(50000, 353.55)$.

$$p\left(\sum_{i=1}^{200} x_i > 51000\right) = p\left(z > \frac{51000 - 50000}{353.55}\right) \approx p(z > 2.83)$$
$$= 1 - \phi(2.83) = 1 - 0.9977 = 0.0023.$$

Podem dir, per tant, que poc més de 2 capses de cada 1000 pesaran més de $51\,kg$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula 2: Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 1

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Donades les matrius

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ i } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

resoleu l'equació matricial $\mathbf{A}\,\mathbf{X} + \mathbf{B}^t = \mathbf{B}$, on $\mathbf{X}$ és una matriu quadrada d'ordre 2 i $\mathbf{B}^t$ és la transposada de la matriu $\mathbf{B}$. (6 punts)

b) Donau un exemple de les matrius següents: (4 punts)

i) Una matriu fila amb tres columnes.
ii) Una matriu columna amb tres files.
iii) Una matriu de dimensions 3×2.
iv) Una matriu simètrica de dimensions 3×3.

2. Per a fabricar dos tipus de cables, A i B, que es vendran a 150 € i 100 € l'hectòmetre, respectivament, s'utilitzen 18 kg de plàstic i 3 kg de coure per a cada hectòmetre del tipus A i 6 kg de plàstic i 12 kg de coure per a cada hectòmetre del tipus B. Dues vegades el cable fabricat del tipus B no pot ser més gran que tres vegades el cable fabricat del tipus A. A més, solament tenim 348 kg de plàstic i 168 kg de coure. Determinau la longitud, en hectòmetres, de cada tipus de cable perquè la quantitat de diners obtinguda en la venda sigui màxima. (9 punts) Quina és aquesta quantitat màxima? (1 punt)

S'ha de plantejar el problema com un problema de programació lineal, dibuixant la regió factible de solucions i determinant i dibuixant els seus vèrtexs.

3. La cotització de les accions d'una determinada societat anònima, suposant que la borsa funciona tots els dies d'un mes de 30 dies, respon a la funció següent:

$$C(x) = x^3 - 45x^2 + 243x + 30000,$$

sent x el nombre de dies. Es demana:

a) Quina és la cotització de partida de les accions de la societat? (1 punt)

b) Determinau els períodes de creixement i decreixement de les cotitzacions durant aquest mes. (5 punts)

c) Determinau els dies en què s'aconsegueixen les cotitzacions màxima i mínima. (3 punts) *d*) Quines són les cotitzacions màxima i mínima? (1 punt)

4. Un estudiant fa dues proves en un mateix dia. La probabilitat que aprovi la primera prova és de 0.6; la probabilitat que aprovi la segona és de 0.8, i la probabilitat que aprovi ambdues és de 0.5.

a) Quina és la probabilitat que aprovi almenys una prova? (2 punts)

b) Quina és la probabilitat que no aprovi cap prova? (3 punts)

c) Són "aprovar la primera prova" i "aprovar la segona prova" successos independents? (1 punt)

d) Quina és la probabilitat que aprovi la segona prova en cas de no haver superat la primera? (4 punts)

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 1

OPCIÓ B

1. Considerau la matriu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}.$$

a) Determinau per a quins valors del paràmetre m existeix A^{-1}. (3 punts)
b) Calculau $\mathbf{A}^{-1}$ per a $m = 2$. (4 punts)
c) Resoleu, per a $m = 2$, el sistema (3 punts)

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. D'un problema de programació lineal es dedueixen les restriccions següents:

$$4x + 3y \geq 12, \;\; y \leq 30, \;\; x \leq \frac{10 + y}{2}, \;\; x \geq 0, \;\; y \geq 0.$$

a) Representau gràficament la regió factible del problema i calculau els vèrtexs. (6 punts)
b) Maximitzau en aquesta regió factible la funció objectiu $F(x, y) = x + 3y$. (3 punts)
c) Pertany el punt $(11, 10)$ a la regió factible? (1 punt)

3. Considerau la funció $f(x) = (x^2 + a)e^{ax}$, sent a un paràmetre real.

a) Raonau i determinau quin és el domini de la funció $f(x)$. (1 punt)
b) Determinau el valor de a perquè la gràfica de la funció $f(x)$ passi pel punt $(0, 4)$. (2 punts)
c) Per a $a = -2$ determinau els intervals de creixement i de decreixement de $f(x)$. Existeixen màxims i mínims relatius de $f(x)$? En cas afirmatiu, digueu on els aconsegueix i quins valors tenen. (7 punts)

4. *a*) Per a estudiar el consum de llet, en litres, per persona al mes, s'ha triat una mostra de 150 persones amb un consum mitjà de 22 litres per persona i mes. Si aquest consum segueix una distribució normal la desviació típica de la qual és 6, determinau un interval de confiança per al consum mitjà per persona i mes amb un nivell de confiança del 96%. (5 punts)
b) Es vol estimar el consum mitjà de llet, en litres, per persona al mes. Si aquest consum segueix una distribució normal amb desviació típica 6, quina és la grandària mostral mínima que es necessita per a estimar el consum mitjà amb un error menor d'1 litre i amb un nivell de confiança del 90%? (5 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula 1: Taula de la distribució normal $N(0, 1)$.

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 1. Criteris específics de correcció

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

OPCIÓ A

1. *a*) Expressió correcta de la matriu transposada: 1 punt. Càlcul correcte del producte $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}$: 1 punt. Càlcul de la matriu inversa de $\mathbf{A}$: 2 punts. Càlcul correcte del producte $\mathbf{A}^{-1}$ per la matriu corresponent i de la matriu $\mathbf{X}$: 2 punts.
Una altra possibilitat: Càlcul correcte del producte $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}$: 1 punt. Expressió correcta del sistema d'equacions associat al problema: 3 punts. Solució correcta del sistema d'equacions: 2 punts.

b) Un punt per exemple correcte.

2. Plantejament correcte del problema de programació lineal (és a dir, determinació correcta de les inequacions que determinen el problema): 3 punts. Si falta una de les equacions, incloent les trivials: màxim 1 punt

Càlcul correcte de la regió factible, en concordança amb les equacions determinades prèviament, indicant-ne els vèrtexs i proporcionant-ne un dibuix: 3 punts. Si hi ha error en algun dels vèrtexs, però els altres estan ben calculats: màxim 1 punt.

En qualsevol cas, si no apareixen explicacions i càlculs donant suport al dibuix i la determinació dels vèrtexs: 0 punts.

Determinació correcta de la funció objectiu: 1 punt.

Estudi correcte del nombre d'hectòmetres de cada tipus de cable: 2 punts (0.5 punts per vèrtex).

Indicació que s'han d'utilitzar 6 hm de cable de tipus A i 10 hm de tipus B i que la quantitat màxima és de 3400 €: 1 punt.

3. *a*) Càlcul correcte del valor de $C(0)$: 1 punt.

b) Càlcul correcte de la derivada: 1 punt. Solució correcta de l'equació $C'(x) = 0$: 1 punt. Determinació amb justificació dels intervals de creixement i decreixement: 3 punts (1 punt per interval. Sense cap justificació màxim 1 punt).

c) Justificació correcta que els punts són màxims i mínims: 2 punts (1 punt per extrem). Indicació dels dies en què s'aconsegueix el màxim i el mínim: 1 punt (0.5 punts per extrem).

d) Indicació de les cotitzacions màxima i mínima: 1 punt (0.5 punts per cotització).

4. *a*) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 2 punts.
b) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 3 punts.
c) Indicació amb justificació que els successos són independents: 1 punt. Sense justificació 0 punts.
d) Càlcul de la probabilitat $p(B \cap \overline{A})$: 2 punts. Càlcul de la probabilitat $p(B|\overline{A})$: 2 punts.

OPCIÓ B

1. *a*) Càlcul correcte del determinant: 1 punt. Resolució correcta de l'equació $det(\mathbf{A}) = 0$: 1 punt. Indicació dels valors de m per als quals existeix inversa: 1 punt.
b) Càlcul correcte de $\mathbf{A}^{-1}$: 4 punts.
c) Solució del sistema: 3 punts, 1 punt per incògnita.

2. *a*) Dibuix i solució correcta amb justificacions i seguint les indicacions de l'enunciat: 6 punts. Si falta qualque indicació de recta o de vèrtex, cal restar mig punt per recta i/o vèrtex. Nota mínima: 0 punts. Si hi ha error en el càlcul d'algun dels vèrtexs, però els altres estan ben calculats: màxim 3 punts.
b) Solució correcta de l'apartat: 3 punts.
c) Justificació correcta que el punt no pertany a la regió factible: 1 punt.

3. *a*) Càlcul correcte del domini de la funció: 1 punt.
b) Determinació correcta del valor de a: 2 punts.
c) Càlcul correcte de la derivada: 2 punts. Solució correcta de l'equació $f'(x) = 0$: 1 punt. Determinació amb justificació dels intervals de creixement i decreixement: 3 punts (1 punt per interval. Sense cap justificació: màxim 1 punt). Determinació i indicació dels extrems: 1 punt (0.5 punts per extrem).

4. *a*) Justificació i càlcul correcte del valor crític: 2 punts. Sense justificació i càlculs del valor crític: màxim 1 punt.
Justificació i càlcul correcte de l'interval de confiança: 3 punts. Si tan sols apareix directament l'interval: màxim 1 punt.
Si s'agafa 2.05 o 2.06 en lloc de $\frac{2.05+2.06}{2}$, cal considerar l'apartat ben resolt i puntuar-lo seguint les indicacions anteriors.
b) Expressió de l'error: 1 punt.
Justificació i càlcul correcte del nou valor crític: 2 punts. Sense justificació i càlculs del valor crític: màxim 1 punt.
Justificació i càlcul correcte de la grandària mostral mínima: 2 punts.

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 1. Solucions

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Donades les matrius

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ i } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

resoleu l'equació matricial $\mathbf{A}\,\mathbf{X} + \mathbf{B}^t = \mathbf{B}$, on $\mathbf{X}$ és una matriu quadrada d'ordre 2 i $\mathbf{B}^t$ és la transposada de la matriu $\mathbf{B}$. (6 punts)

b) Donau un exemple de les matrius següents: (4 punts)

i) Una matriu fila amb tres columnes.
ii) Una matriu columna amb tres files.
iii) Una matriu de dimensions 3×2.
iv) Una matriu simètrica de dimensions 3×3.

Solució. *a*) Sigui $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, aleshores l'equació que hem de resoldre és:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'on

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

d'aquí obtenim que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

b) Un exemple de matriu fila amb tres columnes: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Un exemple de matriu columna amb tres files: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Un exemple d'una matriu de dimensions 3×2: $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -6 & 2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$.

Un exemple d'una matriu simètrica d'ordre 3×3: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Per a fabricar dos tipus de cables, A i B, que es vendran a 150 € i 100 € l'hectòmetre, respectivament, s'utilitzen 18 kg de plàstic i 3 kg de coure per a cada hectòmetre del tipus A i 6 kg de plàstic i 12 kg de coure per a cada hectòmetre del tipus B. Dues vegades el cable fabricat del tipus B no pot ser més gran que tres vegades el cable fabricat del tipus A. A més, solament tenim 348 kg de plàstic i 168 kg de coure. Determinau la longitud, en hectòmetres, de cada tipus de cable perquè la quantitat de diners obtinguda en la venda sigui màxima. (9 punts) Quina és aquesta quantitat màxima? (1 punt)

S'ha de plantejar el problema com un problema de programació lineal, dibuixant la regió factible de solucions i determinant i dibuixant els seus vèrtexs.

Solució. Siguin: "x els hectòmetres necessaris del cable tipus A" i "y els hectòmetres necessaris del cable tipus B".

Les dades proporcionades per l'enunciat estan resumides a la taula següent:

	Tipus A	Tipus B	Total
Plàstic	18	6	348
Coure	3	12	168
Preu	150	100	

Les restriccions associades al problema són:

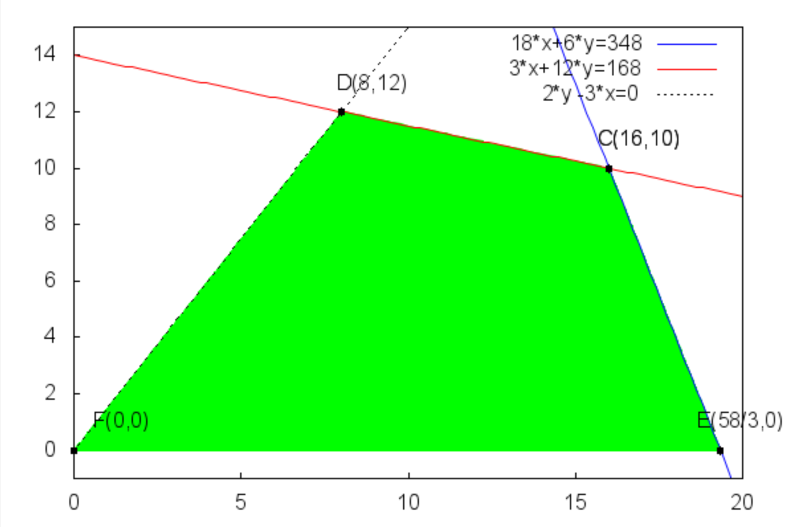
$$\begin{cases} 18x + 6y \leq 348, \\ 3x + 12y \leq 168, \\ 2y \leq 3x, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Calculem els punts de tall, que seran els vèrtexs de la nostra regió factible.

$$\begin{cases} 18x + 6y = 348, \\ 3x + 12y = 168, \end{cases} \Longrightarrow C = (16, 10). \quad \begin{cases} 3x + 12y = 168, \\ 2y - 3x = 0, \end{cases} \Longrightarrow D = (8, 12).$$

$$\begin{cases} 18x + 6y = 348, \\ y = 0, \end{cases} \Longrightarrow E = (\frac{58}{3}, 0). \quad F = (0, 0).$$

A la figura es pot veure la regió factible associada al problema amb els vèrtexs assenyalats.



El nostre objectiu és maximitzar el guany, i la nostra funció objectiu és: $F(x, y) = 150x + 100y$.

	x	y	$F(x, y) = 150x + 100y$
C	16	10	3400
D	8	12	2400
E	$\frac{58}{3}$	0	2900
F	0	0	0

La quantitat de diners obtinguda en la venda és màxima quan es fabriquen 16 hectòmetres de cable del tipus A i 10 hectòmetres de cable del tipus B. La quantitat màxima obtinguda és de 3400 euros.

3. La cotització de les accions d'una determinada societat anònima, suposant que la borsa funciona tots els dies d'un mes de 30 dies, respon a la funció següent:

$$C(x) = x^3 - 45x^2 + 243x + 30000,$$

sent x el nombre de dies. Es demana:

a) Quina és la cotització de partida de les accions de la societat? (1 punt)

b) Determinau els períodes de creixement i decreixement de les cotitzacions durant aquest mes. (5 punts)

c) Determinau els dies en què s'aconsegueixen les cotitzacions màxima i mínima. (3 punts)

d) Quines són les cotitzacions màxima i mínima? (1 punt)

Solució. *a*) $C(0) = 30.000$ €. La cotització de partida és de 30.000 €.

b) Per calcular els extrems relatius, primer fem la derivada:

$$C'(x) := 3x^2 - 90x + 243$$

Si igualam la derivada a zero, ens sortiran els candidats a extrems relatius:

$$C'(x) = 0 \ \Rightarrow x = 3, \text{ i } \ x = 27.$$

Fem la taula següent per estudiar el creixement i el decreixement:

x	0		3		27		30
$C'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$C(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Per tant, la funció serà creixent als intervals $(0, 3)$ i $(27, 30)$, i decreixent a l'interval $(3, 27)$.

c) El màxim de la cotització s'aconseguix el tercer dia, i el mínim, el dia 27.

d) La cotització màxima és de 30.351 €, i la mínima és de 23.439 €.

4. Un estudiant fa dues proves en un mateix dia. La probabilitat que aprovi la primera prova és de 0.6; la probabilitat que aprovi la segona és de 0.8, i la probabilitat que aprovi ambdues és de 0.5.

a) Quina és la probabilitat que aprovi almenys una prova? (2 punts)

b) Quina és la probabilitat que no aprovi cap prova? (3 punts)

c) Són "aprovar la primera prova" i "aprovar la segona prova" successos independents? (1 punt)

d) Quina és la probabilitat que aprovi la segona prova en cas de no haver superat la primera? (4 punts)

Solució. Posem:

A: "aprovar la primera prova",

B: "aprovar la segona prova".

Aleshores

a)

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0.6 + 0.8 - 0.5 = 0.9.$$

b)

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0.9 = 0.1.$$

c) Com que

$$p(A) \cdot p(B) = 0.8 \cdot 0.6 = 0.48 \neq p(A \cap B) = 0.5,$$

tenim que els successos no són independents.
D'una altra manera:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0.5}{0.8} = 0.625,$$

i és clar que $p(A) \neq p(A|B)$, A i B no són independents.

d) Ens demanen la probabilitat $p(B|\overline{A}) = \dfrac{p(B \cap \overline{A})}{p(\overline{A})}$.

Calculem primer $p(B \cap \overline{A})$.

$$B = (A \cap B) \cup (B \cap \overline{A}) \implies p(B) = p(A \cap B) + p(B \cap \overline{A}),$$

per tant:

$$p(B \cap \overline{A}) = p(B) - p(A \cap B) = 0.8 - 0.5 = 0.3.$$

Finalment:

$$p(B|\overline{A}) = \frac{0.3}{1 - 0.6} = \frac{0.3}{0.4} = 0.75.$$

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 1. Solucions

OPCIÓ B

1. Considerau la matriu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}.$$

a) Determinau per a quins valors del paràmetre m existeix A^{-1}. (3 punts)
b) Calculau $\mathbf{A}^{-1}$ per a $m = 2$. (4 punts)
c) Resoleu, per a $m = 2$, el sistema (3 punts)

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Solució. *a*)

$$det(\mathbf{A}) = -m^2 + m + 1 = 0 \iff m = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}, m = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Existeix $\mathbf{A}^{-1}$ per a tot nombre real m diferent de $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

b) Si $m = 2$ tenim que $det(\mathbf{A}) = -1$ i $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. D'on

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

c)

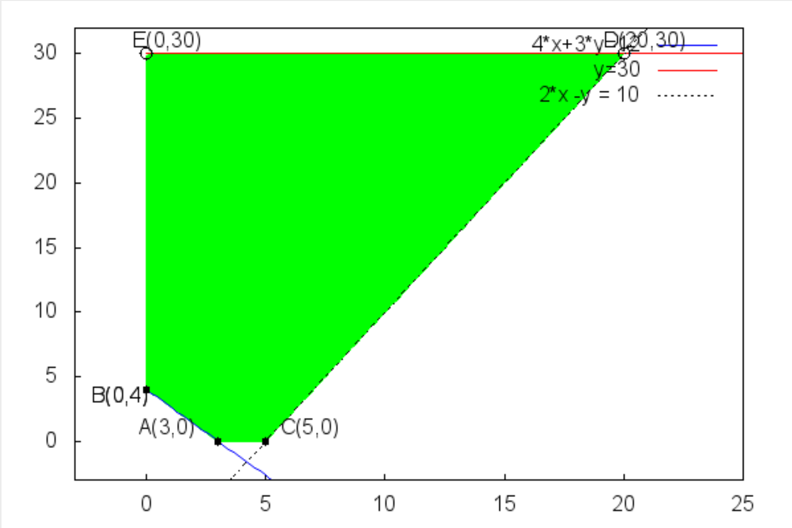
$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

2. D'un problema de programació lineal es dedueixen les restriccions següents:

$$4x + 3y \geq 12,\ y \leq 30,\ x \leq \frac{10+y}{2},\ x \geq 0,\ y \geq 0.$$

a) Representau gràficament la regió factible del problema i calculau els vèrtexs. (6 punts)
b) Maximitzau en aquesta regió factible la funció objectiu $F(x, y) = x + 3y$. (3 punts)
c) Pertany el punt $(11, 10)$ a la regió factible? (1 punt)

Solució. *a*) La regió factible es pot veure a la figura següent.



Calculem els vèrtexs.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 12, \\ y = 0, \end{cases} \Longrightarrow A = (3, 0). \qquad \begin{cases} 4x + 3y = 12, \\ x = 0, \end{cases} \Longrightarrow B = (0, 4).$$

$$\begin{cases} 2x - y = 10, \\ y = 0, \end{cases} \Longrightarrow C = (5, 0). \qquad \begin{cases} 2x - y = 10, \\ y = 30, \end{cases} \Longrightarrow D = (20, 30).$$

$E = (0, 30)$.

b)

	x	y	$F(x, y) = x + 3y$
A	3	0	3
B	0	4	12
C	5	0	5
D	20	30	110
E	0	30	90

El màxim s'aconsegueix en el punt $D = (20, 30)$.

c) Considerem el punt donat $(11, 10)$. Vegem quines de les restriccions satisfà i quines no satisfà.
Com es pot veure, la restricció $x \leq \frac{10+y}{2} \equiv 2x - y \leq 10$ no la satisfà ja que $2 \cdot 11 - 10 = 12 > 10$. Per tant és un punt exterior a la regió factible.

3. Considerau la funció $f(x) = (x^2 + a)e^{ax}$, sent a un paràmetre real.

a) Raonau i determinau quin és el domini de la funció $f(x)$. (1 punt)

b) Determinau el valor de a perquè la gràfica de la funció $f(x)$ passi pel punt $(0, 4)$. (2 punts)

c) Per a $a = -2$ determinau els intervals de creixement i de decreixement de $f(x)$. Existeixen màxims i mínims relatius de $f(x)$? En cas afirmatiu, digueu on els aconsegueix i quins valors tenen. (7 punts)

Solució. a) El factor $x^2 + a$ és un polinomi i està definit per a tot nombre real $x \in \mathbb{R}$. L'altre factor e^{ax} és una exponencial i també està definit per a tot nombre real $x \in \mathbb{R}$. Per tant $f(x) = (x^2 + a)e^{ax}$ està definida per a tot nombre real $x \in \mathbb{R}$, el seu domini és el conjunt $\mathbb{R}$.

b) S'ha de satisfer que $f(0) = 4$, d'on $(0^2 + a) \cdot e^{a \cdot 0} = 4$, per tant $a = 4$.

c) Com que $a = -2$, tenim que en aquest cas $f(x) = (x^2 - 2)e^{-2x}$.
Per calcular els extrem relatius, primer fem la derivada:

$$f'(x) := 2 \cdot x \cdot e^{-2 \cdot x} - 2 \cdot \left(x^2 - 2\right) \cdot e^{-2 \cdot x} = (4 + 2x - 2x^2) \cdot e^{-2 \cdot x}.$$

Si igualam la derivada a zero, ens sortiran els candidats a extrems relatius:

$$f'(x) = 0 \iff 4 + 2x - 2x^2 = 0 \iff x = 2, \text{ i } x = -1.$$

Facem la taula següent per estudiar el creixement i el decreixement:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Per tant, la funció serà decreixent en els intervals $(-\infty, -1)$ i $(2, +\infty)$, i creixent en l'interval $(-1, 2)$.
El mínim s'aconsegueix al punt $(-1, f(-1)) = (-1, -e^2)$, i el màxim al punt $(2, f(2)) = (2, 2e^{-4})$.

4. a) Per a estudiar el consum de llet, en litres, per persona al mes, s'ha triat una mostra de 150 persones amb un consum mitjà de 22 litres per persona i mes. Si aquest consum segueix una distribució normal la desviació típica de la qual és 6, determinau un interval de confiança per al consum mitjà per persona i mes amb un nivell de confiança del 96%. (5 punts)

b) Es vol estimar el consum mitjà de llet, en litres, per persona al mes. Si aquest consum segueix una distribució normal amb desviació típica 6, quina és la grandària mostral mínima que es necessita per a estimar el consum mitjà amb un error menor d'1 litre i amb un nivell de confiança del 90%? (5 punts)

Solució. a) Un interval de confiança per a la mitjana amb un nivell de confiança $1 - \alpha$ és

$$\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

on $n = 150$, $\overline{x} = 22$ i $\sigma = 6$.
Trobem el valor crític $z_{\frac{\alpha}{2}}$ i busquem el seu valor a la taula $N(0,1)$ donada amb els

enunciats.

$$1-\alpha=0.96, \implies \alpha=1-0.96=0.04 \implies z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.02}.$$

$$\phi(z_{\frac{\alpha}{2}})=\phi(z_{0.02})=1-0.02=0.98 \implies z_{\frac{\alpha}{2}}=\phi^{-1}(0.98)=\frac{2.05+2.06}{2}=2.055.$$

Per tant:

$$\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=(22-2.055\cdot\frac{6}{\sqrt{150}},22+2.055\cdot\frac{6}{\sqrt{150}})$$
$$\approx(22-1.0067,22+1.0067)=(20.9933,23.0067).$$

b) Sabem que l'error és

$$E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}.$$

Trobam el nou valor crític.

$$1-\alpha=0.90, \implies \alpha=1-0.90=0.1 \implies z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.05}.$$

$$\phi(z_{\frac{\alpha}{2}})=\phi(z_{0.05})=1-0.05=0.95 \implies z_{\frac{\alpha}{2}}=\phi^{-1}(0.95)=\frac{1.64+1.65}{2}=1.645.$$

Per tant:

$$\sqrt{n}=\frac{1.645\cdot 6}{1}\approx 9.87 \iff n\approx(9.87)^2\approx 97.4169 \implies n\geq 98.$$

La grandària mostral mínima que es necessita és de 98 consumidors.

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 1. Solucions

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula 1: Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

Model 2

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. Un comerciant ven tres tipus de rellotges, A, B i C. Els rellotges de tipus A els ven a 300 €; els de tipus B, a 600 €, i els de tipus C, a 200 €. En un mes determinat va vendre 200 rellotges en total. Si la quantitat dels que va vendre aquest mes de tipus B va ser igual als que va vendre de tipus A i tipus C conjuntament, calculau quants rellotges va vendre de cada tipus si la recaptació d'aquest mes va ser de 89.000€. (10 punts)

2. Una empresa de compra/venda d'automòbils ha comprovat que els últims 10 anys els seus beneficis/pèrdues s'ajusten a la funció

$$F(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3,\ 0 \leq t \leq 10$$

en milers d'euros. Es demana:

a) En quins anys es produeixen els valors màxims i mínims d'aquesta funció? (5 punts)
b) Determinau els períodes de creixement i decreixement. (3 punts)
c) Quins són els seus beneficis màxims? Quin resultat va obtenir l'empresa l'últim any de l'estudi? (2 punts)

3. Siguin A i B dos successos tals que $p(A \cup B) = 0.9$, $p(A^c) = 0.4$, on A^c denota el succés complementari del succés A, i $P(A \cap B) = 0.2$. Calculau les probabilitats següents:
$p(B)$ (3 punts), $p(A/B)$ (2 punts), $p(A \cap B^c)$ (3 punts) i $p(A^c \cup B^c)$ (2 punts).

4. A partir d'una mostra de 100 individus, s'ha realitzat una estimació de la proporció mitjançant l'interval de confiança $(0.17, 0.25)$. Quin és el nivell de confiança amb el qual s'ha realitzat l'estimació? (10 punts)

Model 2

OPCIÓ B

1. Es considera el següent sistema d'equacions dependent del paràmetre real k:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x - ky - z = 0, \\ 2x + y - z = 1. \end{cases}$$

Es demana:

a) Determinau els valors de k per als quals el sistema és compatible determinat. (6 punts)

b) Resoleu el sistema quan $k = 2$. (4 punts)

2. Calculau l'àrea de la figura plana limitada per la recta $y = 2x$ i la corba $y = x^2 - 3$ (6 punts). Dibuixau el recinte limitat per ambdues corbes (4 punts).

3. Considerau la funció

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ (x+a)^2, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Es demana:

a) Per a quins valors de a la funció és contínua a $x = 1$? (6 punts)

b) Per al valor de a que fa contínua la funció f en tot el seu domini, calculau les derivades de f en els punts $x = 0$ i $x = 3$. Com és el creixement i decreixement de la funció en aquests punts? (4 punts)

4. Un estoig conté 17 llapis de color vermell i 13 de color blau.

a) Si en triam un a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui vermell? (2 punts)

b) Si n'extraiem dos a l'atzar, sense reemplaçament, quina és la probabilitat que tots dos siguin de color blau? (4 punts)

c) Si en triam dos a l'atzar, sense reemplaçament, calculau la probabilitat que el primer sigui blau i el segon sigui vermell. (4 punts)

Model 2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula 2: Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

Model 2. Solucions

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. Un comerciant ven tres tipus de rellotges, A, B i C. Els rellotges de tipus A els ven a 300 €; els de tipus B, a 600 €, i els de tipus C, a 200 €. En un mes determinat va vendre 200 rellotges en total. Si la quantitat dels que va vendre aquest mes de tipus B va ser igual als que va vendre de tipus A i tipus C conjuntament, calculau quants rellotges va vendre de cada tipus si la recaptació d'aquest mes va ser de 89.000€. (10 punts)

Solució. Siguin:

$$\begin{aligned} x &= \text{nombre de rellotges de tipus } A, \\ y &= \text{nombre de rellotges de tipus } B, \\ z &= \text{nombre de rellotges de tipus } C. \end{aligned}$$

L'enunciat del problema es correspon amb el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 200, \\ 300x + 600y + 200z = 89000, \\ y = x + z. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2z = 200, \\ 900x + 800z = 89000. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2z = 200, \\ 9x + 8z = 890. \end{cases}$$

D'on: $x = 90$, $y = 100$ i $z = 10$.

S'han venut, per tant: 90 rellotges de tipus A, 100 rellotges de tipus B i 10 rellotges de tipus C.

2. Una empresa de compra/venda d'automòbils ha comprovat que els últims 10 anys els seus beneficis/pèrdues s'ajusten a la funció

$$F(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3, \; 0 \le t \le 10$$

en milers d'euros. Es demana:

a) En quins anys es produeixen els valors màxims i mínims d'aquesta funció? (5 punts)
b) Determinau els períodes de creixement i decreixement. (3 punts)
c) Quins són els seus beneficis màxims? Quin resultat va obtenir l'empresa l'últim any de l'estudi? (2 punts)

Model 2. Solucions

Solució. *a*) El màxim i mínim absolut de la funció $F(t)$ es troben en els extrems relatius o en els extrems de l'interval $[0, 10]$.

$$F'(t) = 3t^2 - 36t + 81, \; F'(t) = 0 \;\Rightarrow\; t = 3, t = 9.$$

Tenim que,

$$\begin{aligned} F''(t) = 6t - 36 \;&\Rightarrow\; F''(3) = -18 < 0 \;\Rightarrow\; \text{màxim relatiu,} \\ &\Rightarrow\; F''(9) = 18 > 0 \;\Rightarrow\; \text{mínim relatiu.} \end{aligned}$$

$$F(0) = -3, \; F(10) = 7, \; F(3) = 105, \; F(9) = -3.$$

El valor màxim s'aconsegueix als tres anys de començar l'estudi.
El valor mínim de l'estudi es dóna a l'inici de l'estudi ($t = 0$) i al cap de 9 anys.

b) De l'apartat anterior ja coneixem els possibles intervals de creixement i decreixement: $(0, 3)$, $(3, 9)$ i $(9, 10)$. Per tant, com que

$$F'(1) = 48 > 0, \; F'(4) = -15 < 0, \; F'(9.5) = 9.75 > 0.$$

Fem la taula següent per estudiar el creixement i el decreixement:

x	0		3		9		10
$F'(t)$		$+$		$-$		$+$	
$F(t)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Per tant, la funció serà creixent als intervals $(0, 3)$ i $(9, 10)$, i decreixent a l'interval $(3, 9)$.

c) Els beneficis màxims són de 105.000 €, ja que

$$F(3) = 105 \;\Rightarrow\; 105.000€$$

Com que $F(10) = 7$, els beneficis l'últim any de l'estudi són de 7.000 €.

3. Siguin A i B dos successos tals que $p(A \cup B) = 0.9$, $p(A^c) = 0.4$, on A^c denota el succés complementari del succés A, i $P(A \cap B) = 0.2$. Calculau les probabilitats següents: $p(B)$ (3 punts), $p(A/B)$ (2 punts), $p(A \cap B^c)$ (3 punts) i $p(A^c \cup B^c)$ (2 punts).

Solució.

$p(B)$:

$$\begin{aligned} 0.9 = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) &= 1 - p(A^c) + p(B) - p(A \cap B) \\ &= 1 - 0.4 + p(B) - 0.2 = 0.4 + p(B) \;\Rightarrow\; p(B) = 0.5. \end{aligned}$$

a) $p(A/B)$:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0.2}{0.5} = 0.4.$$

Model 2. Solucions

b) $p(A \cap B^c)$:

$$p(A \cap B^c) = p(A) - p(A \cap B) = 1 - p(A^c) - p(A \cap B) = 1 - 0.4 - 0.2 = 0.4.$$

c) $p(A^c \cup B^c)$:

$$p(A^c \cup B^c) = p((A \cap B)^c) = 1 - p(A \cap B) = 1 - 0.2 = 0.8.$$

4. A partir d'una mostra de 100 individus, s'ha realitzat una estimació de la proporció mitjançant l'interval de confiança $(0.17, 0.25)$. Quin és el nivell de confiança amb el qual s'ha realitzat l'estimació? (10 punts)

Solució. Un interval de confiança per a la proporció amb un nivell de confiança $(1-\alpha)\cdot 100\%$ és

$$I = \left(p - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\right), \quad q = 1 - p.$$

El punt mitjà d'aquest interval és precisament p:

$$p = \frac{0.17 + 0.25}{2} = \frac{0.42}{2} = 0.21 \Rightarrow q = 1 - 0.21 = 0.79.$$

Per altra part, l'error:

$$E = \frac{longitud(I)}{2} = \frac{0.25 - 0.17}{2} = \frac{0.08}{2} = 0.04.$$

Per tant:

$$z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sqrt{0.21 \cdot 0.79}}{\sqrt{100}} = 0.04 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 0.98.$$

Així:

$$p(z > z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow p(z > 0.98) = 1 - \phi(0.98) = 0.1635,$$
$$\frac{\alpha}{2} = 0.1635 \Rightarrow \alpha = 0.3270 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.6730.$$

L'estimació de la proporció mitjançant l'interval $(0.17, 0.25)$ s'ha realitzat amb un nivell de confiança del 67,30%.

Model 2. Solucions

OPCIÓ B

1. Es considera el següent sistema d'equacions dependent del paràmetre real k:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x - ky - z = 0, \\ 2x + y - z = 1. \end{cases}$$

Es demana:

a) Determinau els valors de k per als quals el sistema és compatible determinat. (6 punts)

b) Resoleu el sistema quan $k = 2$. (4 punts)

Solució. *a*) La matriu del sistema és:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -k & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \ \det(A) = 4k + 4.$$

El sistema serà compatible determinat sempre que $4k + 4 \neq 0$, és a dir, $k \neq -1$.

b) Hem de resoldre el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x - 2y - z = 0, \\ 2x + y - z = 1. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{4}, z = -\frac{1}{4}.$$

2. Calculau l'àrea de la figura plana limitada per la recta $y = 2x$ i la corba $y = x^2 - 3$ (6 punts). Dibuixau el recinte limitat per ambdues corbes (4 punts).

Solució. Calculem els punts de tall entre ambdues corbes:

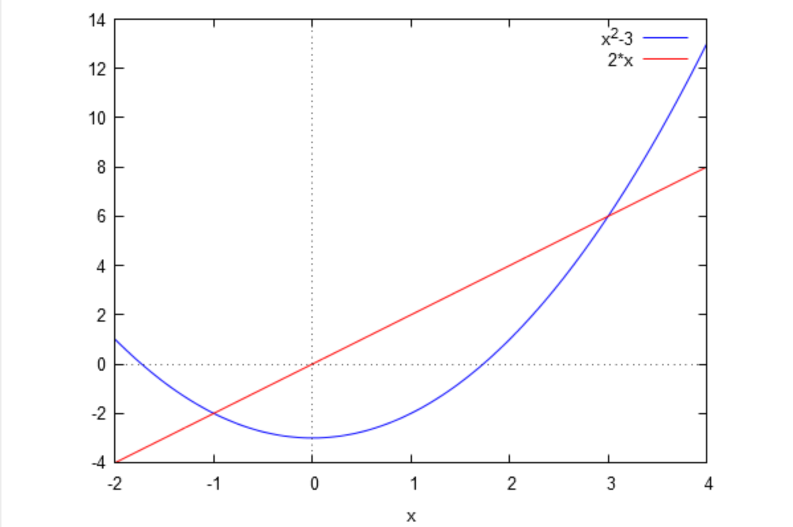
$$x^2 - 3 = 2x \ \Rightarrow \ x^2 - 2x - 3 = 0 \ \Rightarrow \ x = 3, \ x = -1.$$

Aleshores, l'àrea demanada serà:

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{3} (2x - (x^2 - 3))dx = \int_{-1}^{3} (2x - x^2 + 3)dx = 2\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 3x\Big|_{x=-1}^{x=3} = \frac{32}{3}u^2.$$

A la figura es pot veure la regió associada al problema.

Model 2. Solucions



3. Considerau la funció

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ (x+a)^2, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Es demana:

a) Per a quins valors de a la funció és contínua a $x = 1$? (6 punts)

b) Per al valor de a que fa contínua la funció f en tot el seu domini, calculau les derivades de f en els punts $x = 0$ i $x = 3$. Com és el creixement i decreixement de la funció en aquests punts? (4 punts)

Solució. *a*) La funció $f(x)$ serà contínua a $x = 1$ sempre que:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1).$$

Per tant:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} e^{x-1} = e^0 = 1, \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} (x+a)^2 = (1+a)^2. \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (1+a)^2 = 1.$$

D'on $a^2 + 2a + 1 = 1$, i per tant, $a = 0$ o $a = -2$.

b)

$$\begin{array}{rl} x = 0 \in [-1, 1) & \Rightarrow f'(x) = e^{x-1}, \\ & \quad f'(0) = e^{-1} > 0. \\ x = 3 \in [1, +\infty) & \Rightarrow f'(x) = 2(x+a), \\ & \quad \text{Si } a = 0,\ f'(3) = 2(3+0) = 6 > 0. \\ & \quad \text{Si } a = -2,\ f'(3) = 2(3-2) = 2 > 0. \end{array}$$

Model 2. Solucions

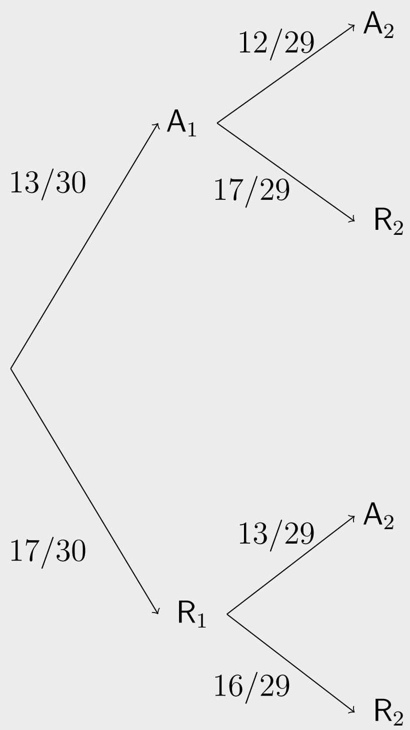
Com que les derivades són positives en tots dos punts, la funció és creixent.

4. Un estoig conté 17 llapis de color vermell i 13 de color blau.

a) Si en triam un a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui vermell? (2 punts)
b) Si n'extraiem dos a l'atzar, sense reemplaçament, quina és la probabilitat que tots dos siguin de color blau? (4 punts)
c) Si en triam dos a l'atzar, sense reemplaçament, calculau la probabilitat que el primer sigui blau i el segon sigui vermell. (4 punts)

Solució. Tenim: $17 + 13 = 30$ llapis en total. Considerem els successos següents:

$$A = \text{llapis de color blau},$$
$$B1 = \text{llapis de color vermell}.$$



a) $p(R) = \frac{17}{30}$.

b)
$$p(A_1 \cap A_2) = p(A_1)p(A_2/A_1) = \frac{13}{30}\frac{12}{29} = \frac{26}{145}.$$

c)
$$p(A_1 \cap R_2) = p(A_1)p(R_2/A_1) = \frac{13}{30}\frac{17}{29} = \frac{221}{870}.$$

Model 2. Solucions

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula 2: Taula de la distribució normal $N(0, 1)$.

Model 1

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. Considerau les matrius següents:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Es demana:

a) Calculau $\mathbf{A}^2 - \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^t$, on $\mathbf{C}^t$ és la transposada de la matriu $\mathbf{C}$. (5 punts)
b) Resoleu l'equació matricial $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$. (5 punts)

2. Un estudi sobre la presència de CO_2 en l'atmosfera d'una ciutat indica que el nivell de contaminació ve donat per la funció

$$C(t) = -0.2t^2 + 4t + 25, \ 0 \leq t \leq 25,$$

(t= anys transcorreguts des de l'any 2000). Es demana:

a) En quin any s'aconseguirà un màxim en el nivell de contaminació? (4 punts)
b) En quin any s'assolirà el nivell de contaminació zero? (2 punts)
c) Quan $t = 17$ el nivell de contaminació serà creixent o decreixent? (4 punts)

3. Siguin A i B dos successos que tenen probabilitats 0.4 i 0.6 respectivament. Se sap que, donat B, la probabilitat que ocorri A és 0.3. Es demana:

a) Quina és la probabilitat que ocorrin tots dos successos a la vegada? (2 punts)
b) Quina és la probabilitat que ocorri qualsevol dels dos successos? (3 punts)
c) Quina és la probabilitat que no ocorri cap dels dos successos? (5 punts)

4. En una certa entitat bancària, el 40 % dels crèdits concedits són per a habitatge, el 50 % es destinen a empreses, i el 10 % són per a consum. Se sap, a més, que dels crèdits concedits a habitatge, el 15 % resulten impagats; dels crèdits concedits a empreses, són impagats el 20 %; i dels crèdits concedits al consum, resulten impagats el 15 %.

a) Calculau la probabilitat que un cert crèdit triat a l'atzar sigui pagat. (6 punts)
b) Quina és la probabilitat que un crèdit triat a l'atzar s'hagi destinat a consum, sabent que s'ha pagat? (4 punts)

Model 1

OPCIÓ B

1. Un grup d'estudiants finança el seu viatge de final de curs amb la venda de participacions de loteria per import d'1, 2 i 5 euros. Han recaptat un total de 620 € i han venut el doble de participacions d'1 € que de 5 €. Si han venut un total de 280 participacions, calculau el nombre de participacions que han venut de cada import. (10 punts)

2. Una fàbrica de paper vol liquidar fins a 88 kg de paper reciclat i fins a 148 kg de paper normal. Per a això fa dos tipus de lots, A i B. Els lots de tipus A estan formats per 1 kg de paper reciclat i 3 kg de paper normal, i els lots de tipus B, per 2 kg de paper de cada classe. El preu de venda de cada lot de tipus A és d'1.1€i el de cada lot de tipus B és d'1.5€. Quants lots de tipus A i B ha de vendre per maximitzar els seus ingressos? A quant ascendeixen aquests ingressos màxims? (10 punts)

S'ha de plantejar el problema com un problema de programació lineal, dibuixant la regió factible de solucions i determinant i dibuixant els seus vèrtexs.

3. En una certa població el consum d'aigua (en m^3) en funció de les hores del dia, ve donat per

$$C(t) = \begin{cases} \frac{17}{9}t, & \text{si } 0 \le t < 9, \\ \alpha t^2 + \beta t - 172, & \text{si } 9 \le t < 20, \\ 168 - 7t, & \text{si } 20 \le t < 24. \end{cases}$$

Sabent que la funció és contínua a l'interval $(0, 20)$, i que a les 15 hores s'aconsegueix el màxim consum d'aigua, determinau α i β.

4. Se sap que el pes dels jugadors de la lliga de futbol professional es distribueix segons una normal de desviació típica de 6 kg. Per estudiar el pes mitjà dels jugadors, s'extreu una mostra de grandària 8, i s'obtenen els resultats següents:

63.7; 48; 43.5; 65; 82; 70.3; 56.5; 50.

a) Calculau un interval de confiança a un nivell de significació del 10 % per al pes mitjà dels jugadors. (6 punts)

b) De quina grandària ha de ser la mostra perquè amb el mateix nivell de significació l'error comès en l'estimació no excedeixi 1.2 kg? (4 punts)

Model 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula 1: Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

Model 1. Criteris específics de correcció

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

OPCIÓ A

1. *a*) Expressió correcta de la matriu transposada: 1 punt. Càlcul correcte del producte $\mathbf{C}\cdot\mathbf{B^t}$: 1 punt. Càlcul correcte de $\mathbf{A}^2$: 1 punt. Càlcul correcte de l'expressió final: 2 punts. Si hi ha un error en qualcun dels productes, màxim 3 punts. Si hi ha més d'un error: 0 punts.

b) Indicar que resoldre l'equació $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}+\mathbf{B}=\mathbf{C}$ és equivalent a calcular $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{C}-\mathbf{B})$: 1 punt. Càlcul correcte de $\mathbf{C}-\mathbf{B}$: 1 punt. Càlcul de la matriu inversa de $\mathbf{A}$: 2 punts. Càlcul correcte del producte $\mathbf{A}^{-1}$ per la matriu corresponent i de la matriu $\mathbf{X}$: 1 punt. Si hi ha qualque error: 0 punts.
Una altra possibilitat: Càlcul correcte del producte $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}$: 1 punt. Expressió correcta del sistema d'equacions associat al problema: 2 punts. Solució correcta del sistema d'equacions: 2 punts. Si hi ha qualque error: 0 punts.

2. *a*) Càlcul correcte de la derivada de $C(t)$: 1 punt. Resolució correcta de l'equació $C'(t)=0$: 1 punt. Determinació que a $t=10$ hi ha un màxim: 1 punt. Indicar que el màxim s'assoleix l'any 2010: 1 punt.

b) Resolució correcta de l'equació $C(t)=0$: 1 punt. Indicar que el nivell de contaminació zero s'assoleix l'any 2025: 1 punt.

c) Calcular $C'(17)$: 2 punts. Indicar que com que $C'(17)<0$, per tant, el nivell de contaminació és decreixent: 2 punts.

3. *a*) Indicar que ens demanen la probabilitat de $A\cap B$: 1 punt. Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 1 punt.

b) Indicar que ens demanen la probabilitat de $A\cup B$: 1 punt. Expressió correcta de la fórmula de $p(A\cup B)$: 1 punt. Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 1 punt.

c) Indicar que ens demanen la probabilitat de $A^c\cap B^c$: 2 punts. Expressió correcta de $p(A^c\cap B^c)$: 1 punt. Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 2 punts.

4. *a*) Expressió correcta de totes les probabilitats necessàries per resoldre el problema: 4 punts.
Càlcul correcte de la probabilitat total demanada: 2 punts.

b) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 4 punts.

Model 1. Criteris específics de correcció

OPCIÓ B

1. Interpretació correcta de l'enunciat com a equacions lineals: 4 punts. Si la traducció a equacions no és correcta: 0 punts. Solució correcta del sistema d'equacions plantejat: 6 punts. Qualsevol altra situació: 0 punts.

2. Interpretació correcta de l'enunciat com un problema de programació lineal: 3 punts. Qualsevol altra situació: 0 punts.

Determinació correcta de la funció objectiu: 1 punt.

Dibuix correcte de la regió factible: 4 punts. Si falta qualque indicació de recta o de vèrtex, cal restar mig punt per recta i/o vèrtex. Nota mínima: 0 punts. Si hi ha error en el càlcul d'algun dels vèrtexs, però els altres estan ben calculats: màxim 3 punts. Si hi ha més d'un error: 0 punts.

Indicar que el màxim s'aconsegueix amb 30 lots de tipus A i 29 lots de tipus B: 1 punt.

Indicar que els ingressos màxims ascendeixen a 76.5 €: 1 punt.

3. Indicar que la condició de continuïtat a $t = 9$ consisteix en la igualtat dels límits laterals: 2 punts.

Establir correctament l'equació que implica: 2 punts.

Indicar que la segona es tradueix que $C'(15) = 0$: 2 punts. Donar l'equació que implica: 1 punt.

Solució correcta del sistema d'equacions: 2 punts. Assenyalar que els valors són $\alpha = -1$ i $\beta = 30$: 1 punt.

4.
a) Justificació i càlcul correcte del valor crític: 2 punts. Sense justificació i càlculs del valor crític: màxim 1 punt.
Càlcul correcte de $\bar{x}$: 1 punt.
Justificació i càlcul correcte de l'interval de confiança: 3 punts. Si tan sols apareix directament l'interval: màxim 1 punt.

b) Expressió de l'error: 1 punt.
Justificació i càlcul correcte de la grandària mostral mínima: 2 punts.
Indicar que com a mínim s'ha de prendre una grandària mostral de 69: 1 punt.

Model 1. Solucions

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. Considerau les matrius següents:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Es demana:

a) Calculau $\mathbf{A}^2 - \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^t$, on $\mathbf{C}^t$ és la transposada de la matriu $\mathbf{C}$. (5 punts)
b) Resoleu l'equació matricial $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$. (5 punts)

Solució. *a*) Tenim que

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-5 & -10+15 \\ 2-3 & -5+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 & -3-5 \\ 0+2 & 0+5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Finalment:

$$\mathbf{A}^2 - \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^t = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 13 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Sabem que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} = \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{C} - \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Model 1. Solucions

Per tant, hem de trobar la matriu inversa de $\mathbf{A}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -5 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 6 & -10 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

D'on:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -11 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

2. Un estudi sobre la presència de CO_2 en l'atmosfera d'una ciutat indica que el nivell de contaminació ve donat per la funció

$$C(t) = -0.2t^2 + 4t + 25, \ 0 \le t \le 25,$$

(t= anys transcorreguts des de l'any 2000). Es demana:

a) En quin any s'aconseguirà un màxim en el nivell de contaminació? (4 punts)
b) En quin any s'assolirà el nivell de contaminació zero? (2 punts)
c) Quan $t = 17$ el nivell de contaminació serà creixent o decreixent? (4 punts)

Solució. *a*) Per trobar el valor màxim derivam i igualam a zero:

$$C'(t) = -0.4t + 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{4}{0.4} = 10 \text{ anys des del 2000.}$$

El màxim nivell de contaminació s'aconseguirà l'any 2010.

b) $-0.2t^2 + 4t + 25 = 0$, aleshores $t = -5$ i $t = 25$. El nivell de contaminació 0 s'aconseguirà en 25 anys des de l'any 2000, és a dir, l'any 2025.

c) $C'(t) = -0.4t + 4$, per tant, $C'(17) = -2.8 < 0$, per tant, l'any 2017 el nivell de contaminació serà decreixent.

3. Siguin A i B dos successos que tenen probabilitats 0.4 i 0.6 respectivament. Se sap que, donat B, la probabilitat que ocorri A és 0.3. Es demana:

a) Quina és la probabilitat que ocorrin tots dos successos a la vegada? (2 punts)
b) Quina és la probabilitat que ocorri qualsevol dels dos successos? (3 punts)
c) Quina és la probabilitat que no ocorri cap dels dos successos? (5 punts)

Solució.

$$p(A) = 0.4, \ p(B) = 0.6, \ p(A/B) = 0.3.$$

a) $p(A \cap B) = p(A/B)p(B) = 0.3 \cdot 0.6 = 0.18.$
b) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0.4 + 0.6 - 0.18 = 0.82.$
c) $p(A^c \cap B^c) = p((A \cup B)^c) = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0.82 = 0.18.$

Model 1. Solucions

4. En una certa entitat bancària, el 40 % dels crèdits concedits són per a habitatge, el 50 % es destinen a empreses, i el 10 % són per a consum. Se sap, a més, que dels crèdits concedits a habitatge, el 15 % resulten impagats; dels crèdits concedits a empreses, són impagats el 20 %; i dels crèdits concedits al consum, resulten impagats el 15 %.

a) Calculau la probabilitat que un cert crèdit triat a l'atzar sigui pagat. (6 punts)

b) Quina és la probabilitat que un crèdit triat a l'atzar s'hagi destinat a consum, sabent que s'ha pagat? (4 punts)

Solució. Considerem els successos següents:

$$V = \text{crèdit d'habitatge},\ E = \text{crèdit d'empreses},\ C = \text{crèdit de consum},$$
$$I = \text{crèdit impagat},\ P = \text{crèdit pagat}.$$

Tenim que:

$$p(V) = 0.4,\ p(E) = 0.5,\ p(C) = 0.1,$$
$$p(I/V) = 0.15,\ p(I/E) = 0.2,\ p(I/C) = 0.15,$$
$$p(P/V) = 0.85,\ p(P/E) = 0.8,\ p(P/C) = 0.85.$$

a)

$$\begin{aligned} p(P) &= p(V)p(P/V) + p(E)p(P/E) + p(C)p(P/C) = 0.4 \cdot 0.85 + 0.5 \cdot 0.8 + 0.1 \cdot 0.85 \\ &= 0.34 + 0.40 + 0.085 = 0.825. \end{aligned}$$

b)

$$p(C/P) = \frac{p(C) \cdot p(P/C)}{p(P)} = \frac{0.1 \cdot 0.85}{0.825} = \frac{0.085}{0.825} = 0.1030.$$

Model 1. Solucions

OPCIÓ B

1. Un grup d'estudiants finança el seu viatge de final de curs amb la venda de participacions de loteria per import d'1, 2 i 5 euros. Han recaptat un total de 620 € i han venut el doble de participacions d'1 € que de 5 €. Si han venut un total de 280 participacions, calculau el nombre de participacions que han venut de cada import. (10 punts)

Solució. Siguin:

$$\begin{aligned} x &= \text{nombre de participacions d'1 €}, \\ y &= \text{nombre de participacions de 2 €}, \\ z &= \text{nombre de participacions de 5 €}. \end{aligned}$$

L'enunciat del problema es correspon amb el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x+y+z=280, \\ x=2z, \\ x+2y+5z=620. \end{cases}$$

Substituint la segona equació en les altres dues:

$$\begin{cases} y+3z=280, \\ 2y+7z=620. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad z=620-560=60.$$

Aleshores,

$$\begin{aligned} x &= 2\cdot 60 = 120, \\ y &= 280-120-60=100. \end{aligned}$$

Per tant, han venut 120 participacions d'1 €, 100 participacions de 2 € i 60 participacions de 5 €.

2. Una fàbrica de paper vol liquidar fins a 88 kg de paper reciclat i fins a 148 kg de paper normal. Per a això fa dos tipus de lots, A i B. Els lots de tipus A estan formats per 1 kg de paper reciclat i 3 kg de paper normal, i els lots de tipus B, per 2 kg de paper de cada classe. El preu de venda de cada lot de tipus A és d'1.1 €i el de cada lot de tipus B és d'1.5 €. Quants lots de tipus A i B ha de vendre per maximitzar els seus ingressos? A quant ascendeixen aquests ingressos màxims? (10 punts)

S'ha de plantejar el problema com un problema de programació lineal, dibuixant la regió factible de solucions i determinant i dibuixant els seus vèrtexs.

Solució. Les dades proporcionades per l'enunciat estan resumides a la taula següent:

Model 1. Solucions

	Lots de tipus A	Lots de tipus B	Disponible
Paper reciclat	1 kg	2 kg	88 kg
Paper normal	3 kg	2 kg	148 kg
Preu de venda	1.1 €	1.5 €	

Siguin:

$$x = \text{nombre de lots de tipus } A,$$
$$y = \text{nombre de lots de tipus } B.$$

Les restriccions associades al problema són:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 88, \\ 3x + 2y \leq 148, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

La funció objectiu és: $F(x, y) = 1.1x + 1.5y$.

a) Calculem els punts de tall, que seran els vèrtexs de la nostra regió factible.

$$\begin{cases} x + 2y = 88, \\ 3x + 2y = 148, \end{cases} \implies B = (30, 29).$$

Punts de tall amb els eixos:

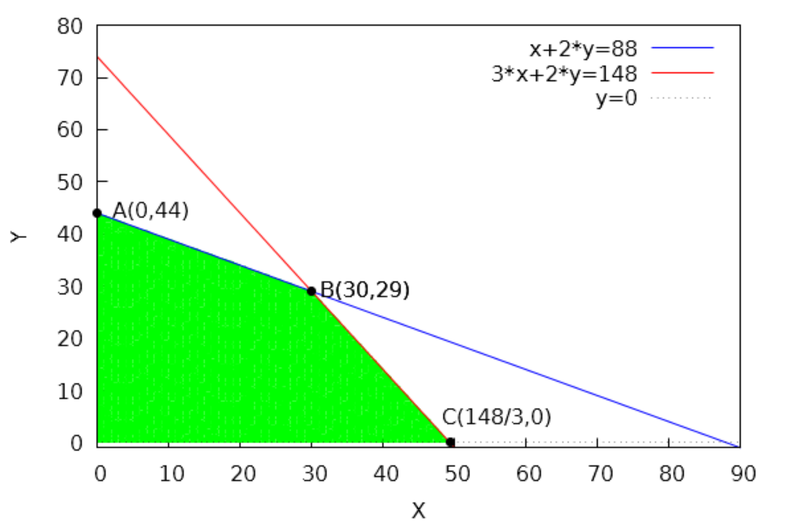
$x + 2y = 88 \implies A = (0, 44),\ (88, 0) \qquad 3x + 2y = 148 \implies C = (148/3, 0),\ (0, 74).$

Els vèrtexs de la nostra regió seran:

$$(0, 0),\ A = (0, 44),\ B = (30, 29),\ C = (148/3, 0)$$

La regió factible es pot veure a la figura següent.

Model 1. Solucions



b) El nostre objectiu és maximitzar els ingressos, i la nostra funció objectiu és: $F(x,y) = 1.1x + 1.5y$.

	x	y	$F(x,y) = 1.1x + 1.5y.$
A	0	44	66
B	30	29	76.5
C	148/3	0	67,77
	0	0	0

Els ingressos són màxims amb 30 lots de tipus A i amb 29 lots de tipus B. Els ingressos màxims ascendeixen a 76.5 €.

3. En una certa població el consum d'aigua (en m^3) en funció de les hores del dia, ve donat per

$$C(t) = \begin{cases} \frac{17}{9}t, & \text{si } 0 \leq t < 9, \\ \alpha t^2 + \beta t - 172, & \text{si } 9 \leq t < 20, \\ 168 - 7t, & \text{si } 20 \leq t < 24. \end{cases}$$

Sabent que la funció és contínua a l'interval $(0, 20)$, i que a les 15 hores s'aconsegueix el màxim consum d'aigua, determinau α i β.

Solució. Si $C(t)$ és contínua a $t = 9$, aleshores

$$C(9) = \lim_{t \to 9^-} C(t) = \lim_{t \to 9^+} C(t),$$

Dada que ens proporcionarà la primera de les condicions:

$$\lim_{t \to 9^-} C(t) = \lim_{t \to 9} \frac{17}{9}t = 17,$$
$$\lim_{t \to 9^+} C(t) = \lim_{t \to 9} \alpha t^2 + \beta t - 172 = 81\alpha + 9\beta - 172,$$

d'on

$$81\alpha + 9\beta - 172 = 17.$$

La segona condició ens diu que $C'(15) = 0$:

$$C'(t) = 2\alpha t + \beta, \text{ i com que } C'(15) = 0 \Rightarrow 30\alpha + \beta = 0.$$

Aleshores:

$$\begin{cases} 81\alpha + 9\beta - 172 = 17, \\ 30\alpha + \beta = 0. \end{cases} \Rightarrow \alpha = -1, \beta = 30.$$

4. Se sap que el pes dels jugadors de la lliga de futbol professional es distribueix segons una normal de desviació típica de 6 kg. Per estudiar el pes mitjà dels jugadors, s'extreu una mostra de grandària 8, i s'obtenen els resultats següents:

63.7; 48; 43.5; 65; 82; 70.3; 56.5; 50.

a) Calculau un interval de confiança a un nivell de significació del 10 % per al pes mitjà dels jugadors. (6 punts)

b) De quina grandària ha de ser la mostra perquè amb el mateix nivell de significació l'error comès en l'estimació no excedeixi 1.2 kg? (4 punts)

Solució. *a*) Un interval de confiança per a la mitjana de la població amb un nivell de significació α (nivell de confiança $1-\alpha$) és

$$\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

on $n = 8$, $\overline{x}$ s'ha de calcular i $\sigma = 6$.

Calculem el valor crític $z_{\frac{\alpha}{2}}$ i busquem el seu valor a la taula $N(0,1)$ donada amb els enunciats.

$$\alpha = 0.96, \implies \frac{\alpha}{2} = 0.05 \implies z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.05}.$$

$$\phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = \phi(z_{0.05}) = 1 - 0.05 = 0.95 \implies z_{\frac{\alpha}{2}} = \phi^{-1}(0.95) = 1.65.$$

Sabem que:

$$\overline{x} = \frac{63,7 + 48 + 43,5 + 65 + 82 + 70,3 + 56,5 + 50}{8} = 59,87.$$

Per tant:

$$\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (59,87 - 1.65 \cdot \frac{6}{\sqrt{8}}, 59,87 + 1.65 \cdot \frac{6}{\sqrt{8}})$$

$$\approx (59,87 - 3,500, 58,87 + 3,500) = (56.37, 63.37).$$

b) Sabem que l'error és

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}.$$

Com que ha de ser $E \leq 1,2$, podem suposar $E = 1,2$.
Per tant:

$$\sqrt{n} = \frac{1.65 \cdot 6}{1,2} \iff n \approx \left(\frac{1.65 \cdot 6}{1,2}\right)^2 \approx 68,0625 \implies n \geq 69.$$

La grandària mostral mínima que es necessita és de 69 jugadors.

Model 1. Solucions

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula 1: Taula de la distribució normal $N(0, 1)$.

Model 3

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. Calculau una matriu X que satisfaci: (6 punts)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculau, si és possible, la matriu inversa de $\mathbf{X}$. (4 punts)

2. El rendiment dels treballadors d'una fàbrica (valorat en una escala de 0 a 100), durant una jornada de 8 hores, ve donat per la funció:

$$r(t) = \begin{cases} -10t^2 + 60t, & \text{si } 0 \leq t < 4, \\ 80, & \text{si } 4 \leq t < 6, \\ 170 - 15t, & \text{si } 6 \leq t \leq 8, \end{cases}$$

on t és el temps en hores.

a) Determinau els intervals de creixement i decreixement. Quin és el rendiment màxim? (6 punts)

b) En quins instants de la jornada laboral el rendiment se situa a la meitat de l'escala? (4 punts)

3. Una urna conté 6 boles vermelles i 2 de negres. Es disposa, a més, d'una baralla espanyola[1] de 48 cartes i d'una baralla de pòquer (o baralla francesa)[2] de 52 cartes. S'extreu una bola a l'atzar. Si és vermella, s'extreu a l'atzar una carta de la baralla espanyola. Si és negra s'extreu a l'atzar una carta de la baralla de pòquer.

a) Calculau la probabilitat que la carta extreta sigui figura. (6 punts)

b) Si la carta extreta ha estat figura, quina és la probabilitat que la bola extreta sigui vermella? (4 punts)

[1] la baralla espanyola té 48 naips, repartits entre quatre pals: ors, copes, espases i bastos. La baralla de 48 cartes està numerada de l'1 (as) al 9, sent les figures el 10 (sota), l'11 (cavall) i el 12 (rei)

[2] la baralla francesa consta de 52 cartes distribuïdes entre 4 pals (cors, diamants, piques i trèvols), i numerades de l'1 (o as) al 10, seguides per les figures, que porten la J (de la veu anglesa *jack* o patge), la Q (de *queen* o reina) i la K (de *king* o rei).

Model 3

4. Al llarg de les diferents proves d'accés a la Universitat (PAU) s'ha observat que la distribució de les qualificacions de l'assignatura MACSII segueix una llei normal de mitjana 5.3 punts i desviació típica 0.8.

a) Quina és la probabilitat que una mostra de 49 alumnes tingui una mitjana superior a 5.7? (5 punts)

b) Quina és la probabilitat que un alumne escollit a l'atzar suspengui l'assignatura MACSII, entenent per suspendre obtenir una qualificació menor que 5 punts? (5 punts)

Model 3

OPCIÓ B

1. L'administrador de la comunitat de veïns vol saber què cobra a l'hora un electricista, un lampista i un paleta. Per a això, sap que:

- Al 4t B, l'electricista hi va estar 1 hora i el paleta 2 hores, i varen haver de pagar 78 € de mà d'obra.
- Al 3r A, varen pagar 85 € per les 2 hores que hi va ser el lampista i l'hora que hi va ser el paleta.
- Al 1r A, casa meva, hi va ser 1 hora el lampista, 1 hora l'electricista i 3 hores el paleta, i ens varen cobrar 133 €.

Quant cobra per hora cada professional? (10 punts)

2. Dos grups diferents, G_1 i G_2, de la mateixa empresa poden dur a terme un projecte de jardineria. Es tracta d'enjardinar tres zones: A, B i C. A la taula següent es recull el nombre d'unitats que pot enjardinar cada grup durant una setmana:

	Zona A	**Zona** B	**Zona** C
Grup G_1	4	10	7
Grup G_2	10	5	7

Han d'enjardinar un mínim de 40 unitats a la zona A, 50 unitats a la zona B i 49 unitats a la zona C, i el cost setmanal s'estima en 3.300 € per al grup G_1 i en 4.000 € per al grup G_2.

Quantes setmanes haurà de treballar cada grup per acabar el projecte amb el cost mínim? (10 punts)

S'ha de plantejar el problema com un problema de programació lineal, dibuixant la regió factible de solucions i determinant i dibuixant els seus vèrtexs.

3. Considerau la funció

$$h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

a) Calculau una primitiva d'aquesta funció. (4 punts)

b) Calculau la següent integral definida: (6 punts)

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x + e^{-x}}{2}\, dx,$$

i comprovau que el seu valor és $\frac{3}{4}$.

4. Un restaurant té contractats dos cambrers, en Joan i na Catalina, per atendre el servei de menjador. Na Catalina posa el servei el 70% dels dies i es confon en col·locar els coberts el 5% dels dies que posa el servei. En Joan, per contra, col·loca malament alguna peça el 25% dels dies que posa el servei.

Model 3

a) Aquest matí, l'encarregat del restaurant passa revista al servei: quina és la probabilitat que trobi algun servei mal col·locat? (6 punts)

b) Per desgràcia, l'encarregat va trobar uns coberts mal col·locats i desitja conèixer la probabilitat que hagi estat en Joan. (4 punts)

Model 3

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula 3: Taula de la distribució normal $N(0, 1)$.

Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 3

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gráfica o programable, però no s'autoritzará l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. Calculau una matriu X que satisfaci: (6 punts)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculau, si és possible, la matriu inversa de X. (4 punts)

2. El rendiment dels treballadors d'una fábrica (valorat en una escala de 0 a 100), durant una jornada de 8 hores, ve donat per la funció:

$$r(t) = \begin{cases} -10t^2 + 60t, & si\ 0 \le t \le 4, \\ 80, & si\ 4 \le t < 6, \\ 170 - 15t, & si\ 6 \le t \le 8 \end{cases}$$

on *t* és el temps en hores.

a) Determinau els intervals de creixement i decreixement. Quin és el rendiment máxim? (6 punts)

b) En quins instants de la jornada laboral el rendiment se situa a la meitat de l'escala? (4 punts)

3. Una urna conté 6 boles vermelles i 2 de negres. Es disposa, a més, d'una baralla espanyola[1] de 48 cartes i d'una baralla de póquer (o baralla francesa)[2] de 52 cartes. S'extreu una bola a l'atzar. Si és vermella, s'extreu a l'atzar una carta de la baralla espanyola. Si és negra s'extreu a l'atzar una carta de la baralla de póquer.

a) Calculau la probabilitat que la carta extreta sigui figura. (6 punts)

b) Si la carta extreta ha estat figura, quina és la probabilitat que la bola extreta sigui vermella? (4 punts)

[1]la baralla espanyola té 48 naips, repartits entre quatre pals: ors, copes, espases i bastos. La baralla de 48 cartes está numerada de l'1 (as) al 9, sent les figures el 10 (sota), l'11 (cavall) i el 12 (rei)

[2]la baralla francesa consta de 52 cartes distribuïdes entre 4 pals (cors, diamants, piques i trévols), i numerades de l'1 (o as) al 10, seguides per les figures, que porten la J (de la veu anglesa jack o patge), la Q (de queen o reina) i la K (de king o rei).

4. Al llarg de les diferents proves d'accés a la Universitat (PAU) s'ha observat que la distribució de les qualificacions de l'assignatura MACSII segueix una llei normal de mitjana 5.3 punts i desviació típica 0.8.

a) Quina és la probabilitat que una mostra de 49 alumnes tingui una mitjana superior a 5.7? (5 punts)

b) Quina és la probabilitat que un alumne escollit a l'atzar suspengui l'assignatura MACSII, entenent per suspendre obtenir una qualificació menor que 5 punts? (5 punts)

Model 3

OPCIÓ B

1. L'administrador de la comunitat de veïns vol saber qué cobra a l'hora un electricista, un lampista i un paleta. Per a això, sap que:

- Al 4t B, l'electricista hi va estar 1 hora i el paleta 2 hores, i varen haver de pagar 78 € de má d'obra.
- Al 3r A, varen pagar 85 € per les 2 hores que hi va ser el lampista i l'hora que hi va ser el paleta.
- Al 1r A, casa meva, hi va ser 1 hora el lampista, 1 hora l'electricista i 3 hores el paleta, i ens varen cobrar 133 €.

Quant cobra per hora cada professional? (10 punts)

2. Dos grups diferents, G_1 i G_2, de la mateixa empresa poden dur a terme un projecte de jardineria. Es tracta d'enjardinar tres zones: A, B i C. A la taula següent es recull el nombre d'unitats que pot enjardinar cada grup durant una setmana:

	Zona A	Zona B	Zona C
Grup G1	4	10	7
Grup G2	10	5	7

Han d'enjardinar un mínim de 40 unitats a la zona A, 50 unitats a la zona B i 49 unitats a la zona C, i el cost setmanal s'estima en 3.300 e per al grup G_1 i en 4.000 e per al grup G_2.
Quantes setmanes haurá de treballar cada grup per acabar el projecte amb el cost mínim?

(10 punts)

S'ha de plantejar el problema com un problema de programació lineal, dibuixant la regió factible de solucions i determinant i dibuixant els seus vértexs.

3. Considerau la funció

$$h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

a) Calculau una primitiva d'aquesta funció. (4 punts)

b) Calculau la següent integral definida: (6 punts)

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx$$

i comprovau que el seu valor és $\frac{3}{4}$.

4. Un restaurant té contractats dos cambrers, en Joan i na Catalina, per atendre el servei de menjador. Na Catalina posa el servei el 70% dels dies i es confon en col·locar els coberts el 5% dels dies que posa el servei. En Joan, per contra, col·loca malament alguna peça el 25% dels dies que posa el servei.

a) Aquest matí, l'encarregat del restaurant passa revista al servei: quina és la probabilitat que trobi algun servei mal col·locat? (6 punts)

b) Per desgràcia, l'encarregat va trobar uns coberts mal col·locats i desitja conéixer la probabilitat que hagi estat en Joan. (4 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal N(0, 1)

SOLUCIONES

OPCIÓ A

1. Determinar una matriz X que verifique: (6 puntos)

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\9&3&-3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&0\\3&4&5\end{pmatrix}$$

Calcular, si es posible, la matriz inversa de X. (4 puntos)

Vemos si la matriz $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ tiene inversa.

$\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{vmatrix}=6\neq 0$ Entonces tiene inversa.

Despejamos la matriz X.

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\9&3&-3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&0\\3&4&5\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3&2&1\\4&6&0\\15&11&7\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&2&1\\4&6&0\\15&11&7\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}^{-1}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}^{T}}{\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{vmatrix}}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}}{6}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}2&0\\0&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&0\\0&3\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&2\\0&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&0\\0&3\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\0&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}0&0\\2&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/3\end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la expresión inicial tenemos:

$$X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&2&1\\4&6&0\\15&11&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2&1\\4&6&0\\15&11&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&1\\2&3&0\\5&11/3&7/3\end{pmatrix}$$

2. El rendimiento de los trabajadores de una fábrica (valorado en una escala de 0 a 100), durante una jornada de 8 horas, viene dado por la función:

$$r(t)=\begin{cases}-10t^2+60t, & si\ 0\le t\le 4,\\ 80, & si\ 4\le t<6,\\ 170-15t, & si\ 6\le t\le 8\end{cases}$$

donde t es el tiempo en horas.

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento. ¿Cuál es el rendimiento máximo? (6 puntos)

b) ¿En qué instantes de la jornada laboral el rendimiento se sitúa en la mitad de la escala? (4 puntos)

a) La función es continua en cada trozo pues son funciones polinómicas y en los cambios de definición también es continua.
En $t = 4$ y en $t = 6$ se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} r(4)=-160+240=80\\ \lim\limits_{x\to 4^-} r(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}-10t^2+60t=80\\ \lim\limits_{x\to 4^+} r(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}80=80\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 4^-} r(x)=\lim\limits_{x\to 4^-} r(x)=r(4)=80$$

$$\left.\begin{array}{l} r(6)=170-90=80\\ \lim\limits_{x\to 6^-} r(x)=\lim\limits_{x\to 6^-}80=80\\ \lim\limits_{x\to 6^+} r(x)=\lim\limits_{x\to 6^+}170-15t=80\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 6^-} r(x)=\lim\limits_{x\to 6^-} r(x)=r(6)=80$$

La función es continua y es un trozo de parábola, un trozo de recta horizontal y otro trozo de recta oblicua.

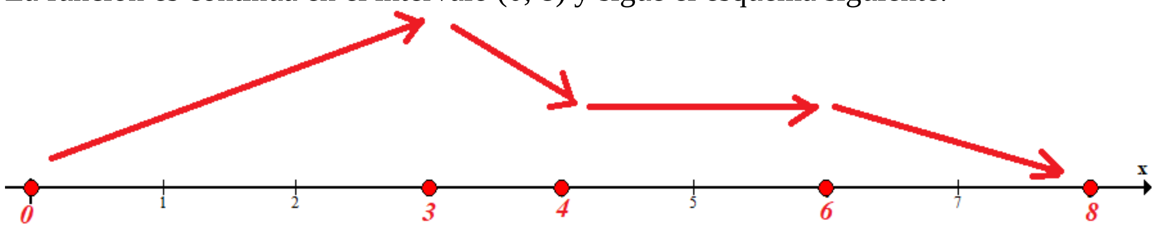
Utilizamos la derivada de la función para ver su crecimiento y decrecimiento.

$$r(t)=\begin{cases}-10t^2+60t, & si\ 0\le t\le 4,\\ 80, & si\ 4\le t<6,\\ 170-15t, & si\ 6\le t\le 8\end{cases}\Rightarrow r\,'(t)=\begin{cases}-20t+60, & si\ 0<t<4,\\ 0, & si\ 4<t<6,\\ -15, & si\ 6<t<8\end{cases}$$

En el intervalo (0, 4) la derivada se anula cuando $-20t + 60 = 0 \rightarrow t = 3$. Vemos como evoluciona el signo de la derivada antes y después de $t = 3$.
En (0, 3) tomamos $t = 2$ y la derivada vale –40 + 60 = 20 > 0. La función crece en (0, 3).
En (3, 4) tomamos $t = 3.5$ y la derivada vale –70+60 = –10 < 0. La función decrece en (3, 4).

En el intervalo (4, 6) la derivada es siempre cero. La función es constante en (4, 6).
En el intervalo (6, 8) la derivada no se anula y la derivada siempre es negativa. La función es decreciente en (6, 8).

La función es continua en el intervalo (0, 8) y sigue el esquema siguiente.



La función crece en el intervalo (0, 3), decrece en el intervalo $(3,4)\cup(6,8)$ y es constante en el intervalo (4, 6).
El rendimiento máximo se alcanza en *t = 3*.
Como *r(3) = –90 + 180 = 90*. El rendimiento máximo es de 90.

b) ¿En que momento *r(t) = 50*? ¿Para que valor de *t* se cumple *r(t) = 50*?
Como en el intervalo de 4 a 6 siempre vale 80 ahi no se produce esa igualdad. Igualamos a 50 la función en los dos intervalos donde el rendimiento varía.

$$\left.\begin{array}{r} r(t)=50 \\ r(t)=\begin{cases} -10t^2+60t, & si\ 0\le t\le 4, \\ 80, & si\ 4\le t<6, \\ 170-15t, & si\ 6\le t\le 8 \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} -10t^2+60t=50 \Rightarrow -10t^2+60t-50=0 \Rightarrow \\ \Rightarrow t^2-6t+5=0 \Rightarrow t=\dfrac{6\pm\sqrt{(-6)^2-20}}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow t=\dfrac{6\pm 4}{2}=\begin{cases} \dfrac{6+4}{2}=5\notin[0,4] \\ \dfrac{6-4}{2}=1\in[0,4]\Rightarrow \boxed{t=1} \end{cases} \\ o \\ 170-15t=50 \Rightarrow -15t=-120 \Rightarrow \boxed{t=\dfrac{120}{15}=8} \end{cases}$$

El rendimiento es 50 para *t = 1* y para *t = 8*.

3. Una urna contiene 6 bolas rojas y 2 negras. Se dispone además de una baraja española[1] de 48 cartas y de una baraja de póquer (o baraja francesa)[2] de 52 cartas. Se extrae una bola al azar. Si es roja, se extrae al azar una carta de la baraja española. Si es negra se extrae al azar una carta de la baraja de póquer.

a) Calcular la probabilidad que la carta extraída sea figura. (6 puntos)

b) Si la carta extraída ha sido figura, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea roja? (4 puntos)

[1]la baraja española tiene 48 cartas, repartidas entre cuatro palos: oros, copas, espadas y bastos. La baraja de 48 cartas está numerada del 1 (as) al 9, siendo las figuras el 10 (sota), el 11 (caballo) y el 12 (rey)

[2]la baraja francesa consta de 52 cartas distribuidas entre 4 palos (corazones, diamantes, picas y tréboles), y numeradas del 1 (o as) al 10, seguidas por las figuras, que llevan la J (de la voz inglesa jack o paje), la Q (de queen o reina) y la K (de king o rey).

Al extraer una carta de una baraja española la probabilidad de sacar figura es:

$$P\left(\text{Sacar figura/Baraja española}\right)=\frac{\text{N° casos favorables}}{\text{N° casos posibles}}=$$

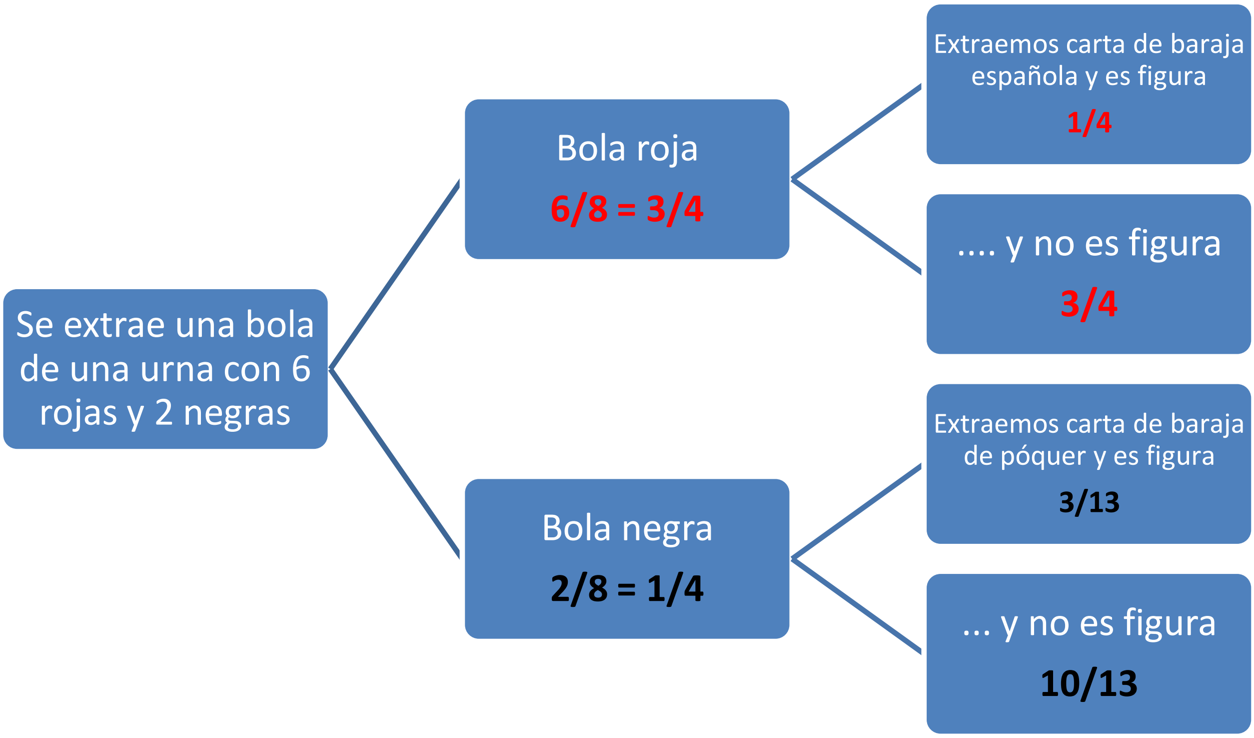
$$=\frac{\text{N° de jotas, caballos y reyes}}{\text{N° total de cartas}}=\frac{4+4+4}{48}=\frac{1}{4}$$

Al extraer una carta de una baraja de póquer la probabilidad de sacar figura es:

$$P\left(\text{Sacar figura/Baraja de póquer}\right)=\frac{\text{N° casos favorables}}{\text{N° casos posibles}}=$$

$$=\frac{\text{N° de J, Q y K}}{\text{N° total de cartas}}=\frac{4+4+4}{52}=\frac{3}{13}$$

Realizamos un diagrama de árbol.



a)

$$P(\text{Sacar figura}) = P(\text{Sacar bola roja y carta con figura}) + P(\text{Sacar bola negra y carta con figura}) =$$

$$= P(\text{Sacar bola roja})P(\text{Sacar figura/Baraja española}) +$$

$$+P(\text{Sacar bola negra})P(\text{Sacar figura/Baraja de póquer}) =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{13} = \boxed{\frac{51}{208} = 0.245}$$

b) Es una probabilidad a posteriori.

$$P(\text{Roja / Ha salido figura}) = \frac{P(\text{Roja} \cap \text{Ha salido figura})}{P(\text{Sacar figura})} = \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}}{51/208} = \frac{3/16}{51/208} = \boxed{\frac{13}{17} = 0.765}$$

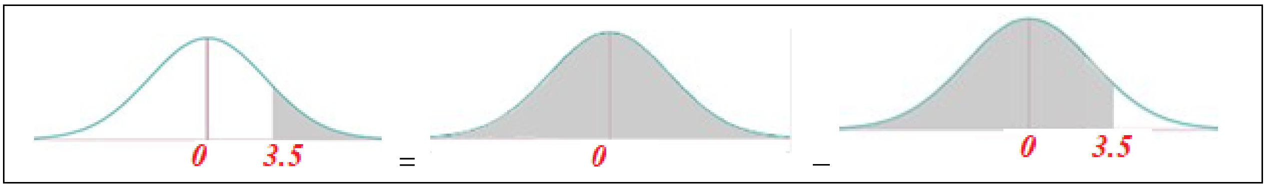
4. A lo largo de las diferentes pruebas de acceso a la Universidad (PAUs) se ha observado que la distribución de las calificaciones de la asignatura MACSII sigue una ley normal de media 5.3 puntos y desviación típica 0.8.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra de 49 alumnos tenga una media superior a 5.7? (5 puntos)
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno escogido al azar suspenda la asignatura MACSII, entendiendo por suspender obtener una calificación menor que 5 puntos? (5 puntos)

Si X = Calificación de un alumno en MACSII en la PAU. $X = N(5.3,\ 0.8)$

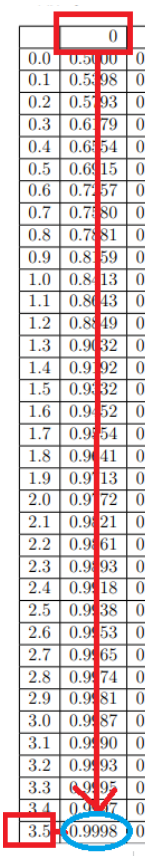
Tomamos una muestra de 49 alumnos. Las medias muestrales siguen una ley normal de media la misma que la distribución de las notas y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.8}{\sqrt{49}} = \frac{0.8}{7} = \frac{4}{35}$

$$\overline{X_{49}} = N\left(5.3,\ \frac{4}{35}\right)$$

a) $P\left(\overline{X_{49}} > 5.7\right) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{\overline{X_{49}} - \mu}{\sigma} > \frac{5.7-5.3}{4/35}\right) = P(Z > 3.5) = \ldots$



$\ldots = 1 - P(Z \le 3.5) = \{\text{Miramos en la tabla de la N}(0,1)\} = 1 - 0.9998 = \boxed{0.0002}$

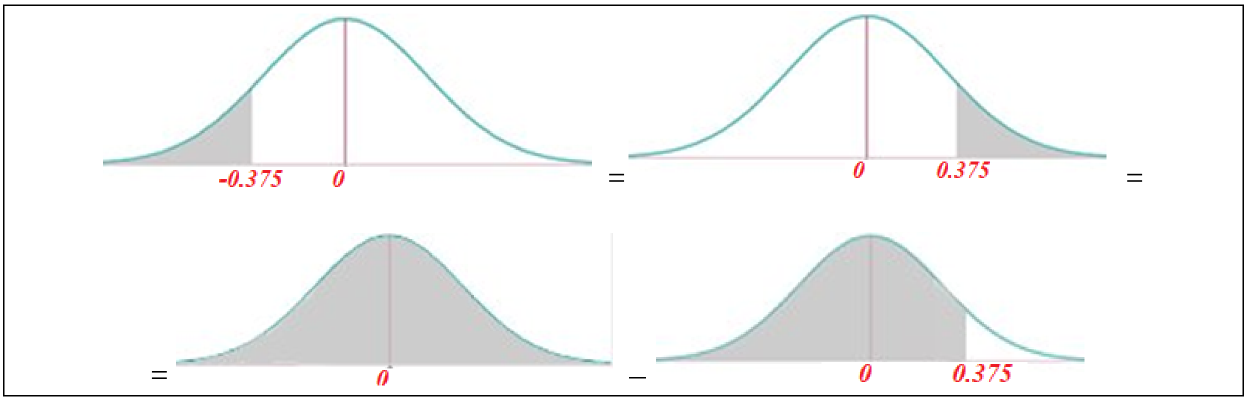


b) Como volvemos a plantearnos la probabilidad de que un alumno….
Entonces ya no hablamos de distribución de medias sino de la variable X = Calificación de un alumno en MACSII en la PAU que sigue una distribución normal $X = N(5.3,\ 0.8)$.

Nos piden calcular $P(\text{Suspender}) = P(X < 5)$.

$$P(\text{Suspender}) = P(X < 5) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{5-5.3}{0.8}\right) =$$

$$= P(Z < -0.375) = \ldots$$



$\ldots = P(Z > 0.375) = 1 - P(Z < 0.375) = \{\text{Miramos en la tabla de la N(0, 1) redondeando a 0.38}\} =$

$= 1 - 0.6480 = \boxed{0.3520}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6

OPCIÓN B

1. El administrador de la comunidad de vecinos quiere saber que cobra a la hora un electricista, un fontanero y un albañil. Para ello, sabe que:

- En el cuarto B, el electricista estuvo 1 hora y el albañil 2 horas, y cobraron 78 € de mano de obra.
- En el tercero A, pagaron 85 € por las 2 horas del fontanero y 1 hora del albañil.
- En el primero A, mi casa, por 1 hora del fontanero, 1 hora del electricista y 3 horas del albañil se han pagado 133 €.

¿Cuánto cobra por hora cada profesional? (10 puntos)

Llamo "e" al dinero que cobra un electricista por hora, "f" a lo que gana un fontanero por hora y "a" a lo que cobra un albañil por hora de trabajo.

- En el cuarto B, el electricista estuvo 1 hora y el albañil 2 horas, y cobraron 78 € de mano de obra. → $e+2a=78$
- En el tercero A, pagaron 85 € por las 2 horas del fontanero y 1 hora del albañil. → $2f+a=85$
- En el primero A, mi casa, por 1 hora del fontanero, 1 hora del electricista y 3 horas del albañil se han pagado 133 €. → $f+e+3a=133$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema y resolvemos.

$$\left.\begin{array}{r} e+2a=78 \\ 2f+a=85 \\ f+e+3a=133 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} e=78-2a \\ 2f+a=85 \\ f+e+3a=133 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2f+a=85 \\ f+78-2a+3a=133 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2f+a=85 \\ a+f=55 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2f+a=85 \\ a=55-f \end{array}\right\} \Rightarrow 2f+55-f=85 \Rightarrow \boxed{f=30} \Rightarrow \boxed{a=55-30=25} \Rightarrow \boxed{e=78-50=28}$$

El electricista gana 28 € por hora de trabajo, el fontanero 30 € y el albañil 25 €.

2. Dos grupos diferentes, G_1 y G_2, de la misma empresa pueden realizar un proyecto de jardinería. Se trata de ajardinar tres zonas: A, B y C. En la tabla siguiente se recoge el número de unidades que puede ajardinar cada grupo durante una semana:

	Zona A	Zona B	Zona C
Grupo G1	4	10	7
Grupo G2	10	5	7

Hay que ajardinar un mínimo de 40 unidades en la zona A, 50 unidades en la zona B y 49 unidades en la zona C, y el coste semanal se estima en 3.300 € para el grupo G_1 y en 4.000 € para el grupo G_2. ¿Cuántas semanas habrán de trabajar cada grupo para acabar el proyecto con un coste mínimo?

(10 puntos)

Se ha de plantear el problema como un problema de programación lineal, dibujando la región factible de soluciones y determinando y dibujando sus vértices.

Llamo "x" = número de semanas que debe trabajar el grupo 1 e "y" = número de semanas que debe trabajar el grupo 2.

El número de unidades que se ajardinan en esas semanas aparecen en la tabla siguiente.

	Zona A	Zona B	Zona C	Coste
Semanas G1 (x)	4x	10x	7x	3300x
Semanas G2 (y)	10y	5y	7y	4000y
TOTALES	4x + 10y	10x + 5y	7x + 7y	3300x + 4000y

Expresamos las restricciones en inecuaciones.

"*Hay que ajardinar un mínimo de 40 unidades en la zona A, 50 unidades en la zona B y 49 unidades en la zona C*" → $4x+10y \geq 40; \quad 10x+5y \geq 50; \quad 7x+7y \geq 49$

Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0; \quad y \geq 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 4x+10y \geq 40 \\ 10x+5y \geq 50 \\ 7x+7y \geq 49 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+5y \geq 20 \\ 2x+y \geq 10 \\ x+y \geq 7 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array}\right\}$$

La función objetivo es el coste: $C(x,y) = 3300x + 4000y$ y deseamos minimizarlo.

Para dibujar la región factible dibujo primero las rectas que la delimitan.

$2x+5y=20$

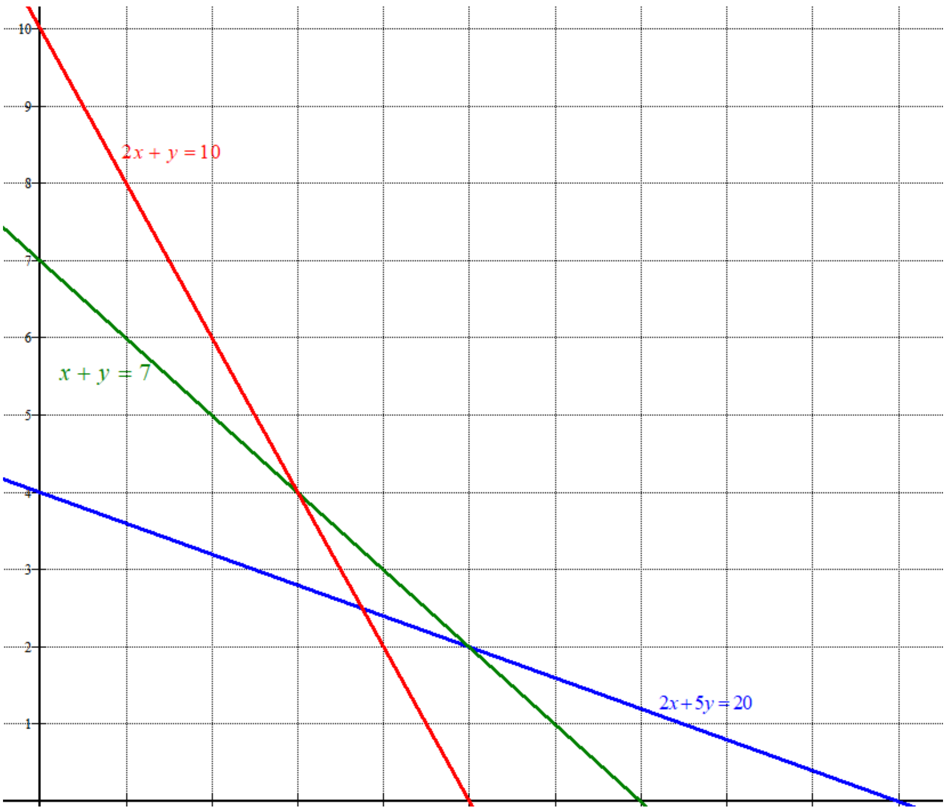
x	$y=\dfrac{20-2x}{5}$
0	4
5	2
10	0

$2x+y=10$

x	$y=10-2x$
3	4
5	0
0	10

$x+y=7$

x	$y=7-x$
0	7
3	4
5	2



$x\geq 0;\quad y\geq 0$ Primer cuadrante

Como las restricciones son una región del primer cuadrante que cumple las inecuaciones:

$$4x+10y\geq 40;\quad 10x+5y\geq 50;\quad 7x+7y\geq 49$$

La región factible está situada por encima de las rectas roja, verde y azul y dentro del primer cuadrante. La coloreo de rosa en la siguiente imagen.

Para determinar el coste mínimo y como se consigue valoro la función coste $C(x,y) = 3300x + 4000y$ en cada uno de los vértices de la región factible.

A(0, 10) → $C(0,10) = 0 + 40000 = 40000$

B(3, 4) → $C(3,4) = 9900 + 16000 = 25900$

C(5, 2) → $C(5,2) = 16500 + 8000 = 24500$

D(10, 0) → $C(10,0) = 33000$

El mínimo coste es de 24500 € y se produce en el punto C(5, 2) que significa que deben trabajar 5 semanas el grupo G_1 y 2 semanas el grupo G_2.

3. Considerar la función

$$h(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

a) Calcular una primitiva de esta función. (4 puntos)

b) Calcular la siguiente integral definida: (6 puntos)

$$\int_0^{\ln 2}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx$$

y comprobar que su valor es $\frac{3}{4}$.

a)

$$\int h(x)dx=\int\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int e^x+e^{-x}dx\right)=\frac{1}{2}\int e^x dx+\frac{1}{2}\int e^{-x}dx=\boxed{\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}+K}$$

Donde $K\in\mathbb{R}$

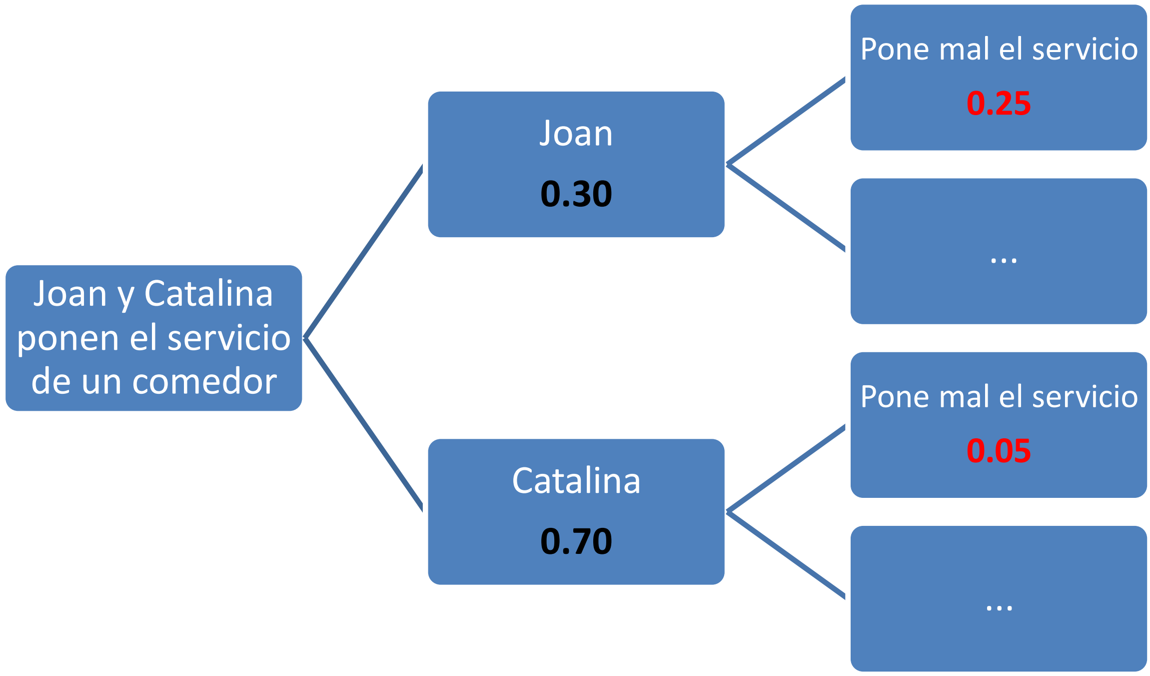
b)

$$\int_0^{\ln 2}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx=\left[\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}\right]_0^{\ln 2}=\left[\frac{1}{2}e^{\ln 2}-\frac{1}{2}e^{-\ln 2}\right]-\left[\frac{1}{2}e^0-\frac{1}{2}e^{-0}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1-\frac{1}{4}=\boxed{\frac{3}{4}}$$

4. Un restaurante tiene contratados dos camareros, Joan y Catalina, para atender el servicio de comedor. Catalina pone el servicio el 70% de los días y se confunde al colocar los cubiertos el 5% de los días que pone el servicio. Joan, por contra, coloca mal alguna pieza el 25% de los días que pone el servicio.
a) Esta mañana, el encargado del restaurante pasa revista al servicio: ¿Cuál es la probabilidad de que encuentre algún servicio mal colocado? (6 puntos)
b) Por desgracia, el encargado encuentra unos cubiertos mal colocados y desea conocer la probabilidad de que haya sido Joan. (4 puntos)

Realizamos un diagrama de árbol.



a)

$$P(\text{Pone mal el servicio}) = P(\text{Joan pone el servicio})P(\text{Pone mal el servicio / Joan}) +$$
$$+P(\text{Catalina pone el servicio})P(\text{Pone mal el servicio / Catalina}) =$$
$$= 0.3 \cdot 0.25 + 0.7 \cdot 0.05 = 0.075 + 0.035 = \boxed{0.110}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplico el teorema de Bayes.

$$P(\text{Joan / Mal puesto el servicio}) = \frac{P(\text{Joan} \cap \text{Mal puesto el servicio})}{P(\text{Está mal puesto el servicio})} =$$

$$= \frac{P(\text{Joan})P(\text{Mal puesto el servicio / Joan})}{P(\text{Está mal puesto el servicio})} = \frac{0.3 \cdot 0.25}{0.110} = \frac{75}{110} = \boxed{\frac{15}{22} = 0.682}$$

Model 1

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. Considerau les matrius següents:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

on k és un paràmetre real.

a) Calculau $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, i determinau en funció dels valors reals de k si la matriu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ té inversa. (4 punts)
b) Estudiau el mateix que a l'apartat a) però ara amb la matriu $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. (4 punts)
c) Per a $k = -2$ calculau la matriu inversa de $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. (2 punts)

2. Els beneficis (en milers d'euros) per la venda d'un producte en funció de la inversió realitzada en promoció (en milers d'euros) venen donats per:

$$B(x) = \begin{cases} 5x + 15, & \text{si } 0 \leq x \leq 3, \\ -(x-3)^2 + 30, & \text{si } 3 < x \leq 8. \end{cases}$$

a) És contínua la funció $B(x)$? (3 punts)
b) És derivable? Donau el conjunt on és derivable la funció. (2 punts)
c) Feu un dibuix de la funció en el seu domini. (3 punts)
d) Determinau-ne el benefici màxim i el benefici mínim. (1 punt)
e) Determinau els intervals de creixement i decreixement dels beneficis. (1 punt)

3. Un dau està carregat de manera que la probabilitat d'obtenir un 6 és de $\frac{1}{2}$ i les probabilitats d'obtenir cadascuna de les altres cares són iguals a p. Es llança aquest dau, calculau la probabilitat de cadascun dels successos següents:

a) S'obté un dos. (4 punts)
b) No s'obté un tres. (2 punts)
c) S'obté un nombre parell. (2 punts)
d) S'obté un nombre imparell. (2 punts)

4. En una fàbrica de piles se sap que la desviació típica de la durada d'un determinat tipus de pila és de 80 hores.

Model 1

a) Si $\alpha = 0.2$ (nivell de significació), i en una mostra de 50 d'aquestes piles la durada mitjana és de 500 hores, determinau l'interval de confiança per a la durada mitjana poblacional. (5 punts)

b) Si la durada d'aquest tipus de pila seguís una normal de mitjana 500 hores i desviació típica 80 hores, quina seria la probabilitat que la durada mitjana de 9 piles fos major que 520 hores? (5 punts)

Model 1

OPCIÓ B

1. El preu de l'estada diària en un hotel és de 50 € per persona. Els infants paguen el 50% d'aquest preu, i els jubilats paguen el 60% d'aquest preu. Determinau el nombre de persones que no són ni infants ni jubilats, el nombre d'infants i el de jubilats que hi havia un dia a l'hotel si se sap que: hi havia 200 persones, el nombre de jubilats era igual al 25% del nombre d'infants i varen recaptar un total de 5.680 € per l'estada de tots.
(10 punts)

2. Considerau la funció $f(x, y) = x - y$.

a) Representau el conjunt de punts del pla definit per:

$$A = \{(x, y) \,:\, 3x + y \geq 15,\ y - x \leq -5,\ 2x + 3y \leq 60,\ y \geq 0\}$$

i calculau el valor màxim de $f(x, y)$ a A. Es podria eliminar alguna de les desigualtats que defineixen el conjunt A de manera que encara fos el mateix conjunt? (5 punts)

b) Digau si la funció $f(x, y)$ assoleix el valor màxim en el conjunt: (5 punts)

$$B = \{(x, y) \,:\, 3x + y \leq 15,\ x - y \geq 5,\ x \geq 0\}$$

3. Considerau la funció

$$h(x) = x^2 e^{x^3}.$$

a) Calculau una primitiva d'aquesta funció. (4 punts)

b) Calculau la següent integral definida: (6 punts)

$$\int_{\sqrt[3]{\ln 2}}^{\sqrt[3]{\ln 3}} x^2 e^{x^3}\, dx,$$

i comprovau que el seu valor és $\frac{1}{3}$.

4. En una universitat en la qual no hi ha més que estudiants d'enginyeria, de ciències i de lletres, acaben la carrera el 5% d'enginyeria, el 10% de ciències i el 20% de lletres. Se sap que el 20% estudien enginyeria, el 30%, ciències i el 50%, lletres. Pres un estudiant a l'atzar, es demana:

a) Probabilitat que hagi acabat la carrera i sigui d'enginyeria. (6 punts)

b) Ens diu que ha acabat la carrera, probabilitat que sigui d'enginyeria. (4 punts)

Model 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula 1: Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

Model 1. Criteris específics de correcció

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

OPCIÓ A

1. *a*) Càlcul correcte de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$: 2 punts.
Càlcul correcte del $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$: 1 punt.
Indicar que la matriu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ no té mai inversa: 1 punt.

b) Càlcul correcte de $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$: 2 punts.
Càlcul correcte del $\det(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})$: 1 punt.
Indicar que la matriu $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ té inversa per a qualsevol nombre real k, ja que el seu determinant no s'anul·la mai: 1 punt.

c) Càlcul correcte de la matriu inversa de $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ quan $k = -2$: 2 punts.
Qualsevol altra situació no prevista prèviament: 0 punts.
Si no apareixen càlculs que avalin els resultats: 0 punts.

2. *a*) Estudi correcte de la continuïtat seguint la solució del problema: 3 punts. Si falta qualque detall o justificació, màxim: 1.5 punts.

b) Indicar que no és derivable en $x = 3$ amb justificació: 1 punt. Indicar que la funció és derivable a $(0, 3) \cup (3, 8)$: 1 punt.

c) Si la gràfica que es mostra és correcta i apareixen indicacions de la manera com s'ha obtingut: 3 punts. S'ha de notar clarament que la segona part de la funció $B(x)$ és una paràbola, en cas contrari, màxim: 1.5 punts.

d) Indicació correcta dels extrems absoluts amb justificació: 0.5 punts per extrem.

e) Indicació correcta dels intervals de creixement i decreixement amb justificació: 0.5 punts per interval.

3. *a*) Determinació correcta de p: 2 punts.
Indicar la probabilitat del succés: 2 punts.

b) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 2 punts.

c) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 2 punts.

d) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 2 punts.

4. *a*) Justificació i càlcul correcte del valor crític: 2 punts. Sense justificació i càlculs del valor crític: màxim: 1 punt.
Justificació i càlcul correcte de l'interval de confiança: 3 punts. Si tan sols apareix directament l'interval: màxim: 1 punt.

Model 1. Criteris específics de correcció

b) Indicar que les mostres de grandària 9 es distribueixen seguint la normal indicada a les solucions: 2 punts.
Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 3 punts.

OPCIÓ B

1. Interpretació correcta de l'enunciat com a equacions lineals: 4 punts. Si la traducció a equacions no és correcta: 0 punts. Solució correcta del sistema d'equacions plantejat: 6 punts. Qualsevol altra situació: 0 punts.

2. *a*) Dibuix correcte del conjunt A: 3 punts. Si falta qualque indicació de recta o de vèrtex, cal restar mig punt per recta i/o vèrtex. Nota mínima: 0 punts. Si hi ha error en el càlcul d'algun dels vèrtexs, però els altres estan ben calculats: màxim 2 punts. Si hi ha més d'un error: 0 punts.
Indicar que el màxim s'aconsegueix al punt $(30, 0)$: 1 punt.
Indicar que podem eliminar la inequació $3x + y \geq 15$: 1 punt.

b) Dibuix correcte del conjunt A: 3 punts. Si falta qualque indicació de recta o de vèrtex, cal restar mig punt per recta i/o vèrtex. Nota mínima: 0 punts. Si hi ha error en el càlcul d'algun dels vèrtexs, però els altres estan ben calculats: màxim: 2 punts. Si hi ha més d'un error: 0 punts.
Indicar i justificar que la funció no aconsegueix el màxim: 2 punts.

3. *a*) Càlcul correcte de la primitiva: 4 punts. Si no apareix la constant d'integració: 3 punts. Qualsevol altra situació 0 punts.

b) Aplicació correcta de la regla de Barrow, expressant la integral definida com a $F(\sqrt[3]{\ln 3}) - F(\sqrt[3]{\ln 2})$, sent F la funció primitiva: 3 punts.
Comprovar i justificar correctament que el valor de la integral és $1/3$: 3 punts. Qualsevol altra situació: 0 punts.

4. *a*) Traducció i interpretació correcta de les dades proporcionades en termes de successos i probabilitats: 3 punts. Si ho fan de forma correcta amb un diagrama en arbre posant totes les probabilitats: també 3 punts. Si apareixen percentatges: 3 punts.
Identificació correcta del succés del qual s'ha de trobar la probabilitat: 1 punt.
Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 2 punts.

b) Identificació correcta del succés del qual s'ha de trobar la probabilitat: 1 punt.
Càlcul correcte de la probabilitat que un estudiant acabi la carrera: 2 punts.
Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 1 punt.

Model 1. Solucions

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. Considerau les matrius següents:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

on k és un paràmetre real.

a) Calculau $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, i determinau en funció dels valors reals de k si la matriu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ té inversa. (4 punts)

b) Estudiau el mateix que a l'apartat a) però ara amb la matriu $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. (4 punts)

c) Per a $k = -2$ calculau la matriu inversa de $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. (2 punts)

Solució. *a*) Tenim que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 3 \cdot k & k & 2 \cdot k - 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aleshores, com que

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = 0$$

tenim que el rang de la matriu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ és menor que 3 i aquesta matriu no té mai inversa.

b) En aquest cas, tenim que

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$$

Per tant,

$$\det(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = k \cdot (k+2) + 3 = k^2 + 2k + 3$$

que no s'anul·la si k és real. Així, la matriu $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ té inversa per a tot k real.

c) Quan k=-2, tenim que

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Model 1. Solucions

D'on, $\det(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}) = 3$ i la seva inversa serà:

$$(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

2. Els beneficis (en milers d'euros) per la venda d'un producte en funció de la inversió realitzada en promoció (en milers d'euros) venen donats per:

$$B(x) = \begin{cases} 5x+15, & \text{si } 0 \le x \le 3, \\ -(x-3)^2+30, & \text{si } 3 < x \le 8. \end{cases}$$

a) És contínua la funció $B(x)$? (3 punts)
b) És derivable? Donau el conjunt on és derivable la funció. (2 punts)
c) Feu un dibuix de la funció en el seu domini. (3 punts)
d) Determinau-ne el benefici màxim i el benefici mínim. (1 punt)
e) Determinau els intervals de creixement i decreixement dels beneficis. (1 punt)

Solució. *a*) Si $0 < x < 3$: $B(x) = 5x+15$, funció polinòmica; per tant, contínua a $(0,3)$.
Si $3 < x < 8$: $B(x) = -(x-3)^2+30$, funció polinòmica; per tant, contínua a $(3,8)$.

$$B(x) = \begin{cases} 5x+15, & \text{si } 0 \le x \le 3, \\ -(x-3)^2+30, & \text{si } 3 < x \le 8. \end{cases}$$

Perquè la funció sigui contínua a $x=3$, els límits laterals han de ser iguals i han de coincidir amb $f(3) = 30$.

$$\left.\begin{array}{l} B(3-) = \lim\limits_{x\to 3^-}(5x+15) = 30, \\ B(3+) = \lim\limits_{x\to 3^-}(-(x-3)^2+30) = 30, \end{array}\right\} \Rightarrow B(3-) = B(3+) = B(3)$$

$$\Rightarrow B(x) \text{ és contínua a } x = 3.$$

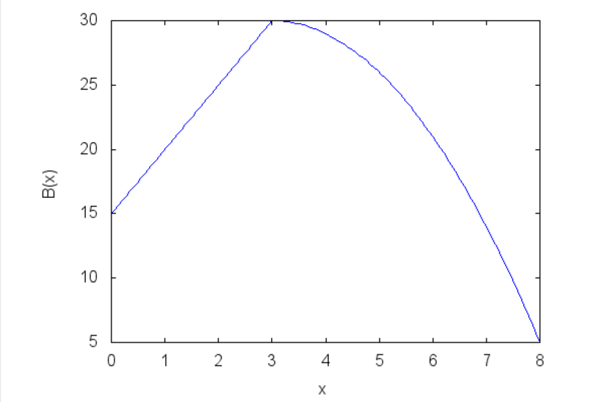
b) Derivant la funció $B(x)$ tenim que:

$$B'(x) = \begin{cases} 5, & \text{si } 0 < x < 3, \\ -2(x-3), & \text{si } 3 < x < 8. \end{cases}$$

Com que les derivades laterals no són iguals, ja que $B'(3-) = 5$ i $B'(3+) = 0$, $B(x)$ no és derivable a $x = 3$.
La funció $B(x)$ és derivable a $(0,3)\cup(3,8)$.

c) La gràfica de la funció en el seu domini és:

Model 1. Solucions



d) Com es pot veure a la gràfica de la funció, el benefici màxim s'aconsegueix quan $x = 3$, i va ser de 30.000 €. El benefici mínim s'aconsegueix al final del període de venda del producte, quan $x = 8$, i és de 5.000 €.

e) Els beneficis creixen a l'interval $(0, 3)$ i decreixen a l'interval $(3, 8)$.

3. Un dau està carregat de manera que la probabilitat d'obtenir un 6 és de $\frac{1}{2}$ i les probabilitats d'obtenir cadascuna de les altres cares són iguals a p. Es llança aquest dau, calculau la probabilitat de cadascun dels successos següents:

a) S'obté un dos. (4 punts)
b) No s'obté un tres. (2 punts)
c) S'obté un nombre parell. (2 punts)
d) S'obté un nombre imparell. (2 punts)

Solució. *a*) Se sap que

$$p(6) = \frac{1}{2},\ p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p,$$

on el nombre representa el succés associat a la mateixa cara.

$$\sum_{i=1}^{6} p(i) = 1 \ \Rightarrow\ \frac{1}{2} + 5p = 1 \ \Rightarrow\ 5p = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ p = \frac{1}{10}.$$

Per tant,

$$p(2) = \frac{1}{10}.$$

b)

$$p(\bar{3}) = 1 - p(3) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}.$$

c)

$$p(\text{parell}) = p(2) + p(4) + p(6) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{2}{10} + \frac{5}{10} = \frac{7}{10}.$$

Model 1. Solucions

d)

$$p(\text{imparell}) = 1 - p(\text{parell}) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}.$$

4. En una fàbrica de piles se sap que la desviació típica de la durada d'un determinat tipus de pila és de 80 hores.

a) Si $\alpha = 0.2$ (nivell de significació), i en una mostra de 50 d'aquestes piles la durada mitjana és de 500 hores, determinau l'interval de confiança per a la durada mitjana poblacional. (5 punts)

b) Si la durada d'aquest tipus de pila seguís una normal de mitjana 500 hores i desviació típica 80 hores, quina seria la probabilitat que la durada mitjana de 9 piles fos major que 520 hores? (5 punts)

Solució. *a*) Un interval de confiança per a la mitjana de la població amb un nivell de significació α (nivell de confiança $1-\alpha$) és

$$\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

on $n = 50$, $\overline{x} = 500$ i $\sigma = 80$.

Calculem el valor crític $z_{\frac{\alpha}{2}}$ i busquem el seu valor a la taula $N(0,1)$ donada amb els enunciats.

$$\alpha = 0.2, \implies \frac{\alpha}{2} = 0.1 \implies z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.1}.$$

$$\phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = \phi(z_{0.1}) = 1 - 0.1 = 0.90 \implies z_{\frac{\alpha}{2}} = \phi^{-1}(0.90) = \frac{1.28 + 1.29}{2} = 1.285.$$

En aquest cas l'interval de confiança demanat és:

$$\begin{aligned}\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= (500 - 1.285 \cdot \frac{80}{\sqrt{50}}, 500 + 1.285 \cdot \frac{80}{\sqrt{50}}) \\ &\approx (500 - 14.54, 500 + 14.54) = (485.46, 514.54).\end{aligned}$$

b) Si la durada d'aquestes piles es distribueix segons $N(500, 80)$, la durada mitjana de les mostres de grandària 9 es distribueix

$$\overline{x} \sim N(500, \frac{80}{\sqrt{9}}) \approx N(500, 26.67).$$

Per tant,

$$\begin{aligned}p(\overline{x} > 520) &= p\left(z > \frac{520 - 500}{26.67}\right) = p(z > 0.75) = 1 - p(z < 0.75) = 1 - 0.7734 \\ &= 0.2266.\end{aligned}$$

Model 1. Solucions

OPCIÓ B

1. El preu de l'estada diària en un hotel és de 50 € per persona. Els infants paguen el 50% d'aquest preu, i els jubilats paguen el 60% d'aquest preu. Determinau el nombre de persones que no són ni infants ni jubilats, el nombre d'infants i el de jubilats que hi havia un dia a l'hotel si se sap que: hi havia 200 persones, el nombre de jubilats era igual al 25% del nombre d'infants i varen recaptar un total de 5.680 € per l'estada de tots.

(10 punts)

Solució. Siguin:

$$x = \text{nombre de persones que no són ni infants ni jubilats.}$$
$$y = \text{nombre de persones que són infants.}$$
$$z = \text{nombre de persones que són jubilats.}$$

L'enunciat del problema es correspon amb el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x+y+z=200, \\ z=0.25y, \\ 50x+25y+30z=5680. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=200, \\ 0.25y-z=0, \\ 50x+25y+30z=5680. \end{cases} \Rightarrow x=20,\ y=144,\ z=36.$$

Per tant, hi havia 20 persones que no eren ni infants ni jubilats, 144 infants i 36 jubilats.

2. Considerau la funció $f(x,y)=x-y$.

a) Representau el conjunt de punts del pla definit per:

$$A=\{(x,y)\ :\ 3x+y\geq 15,\ y-x\leq -5,\ 2x+3y\leq 60,\ y\geq 0\}$$

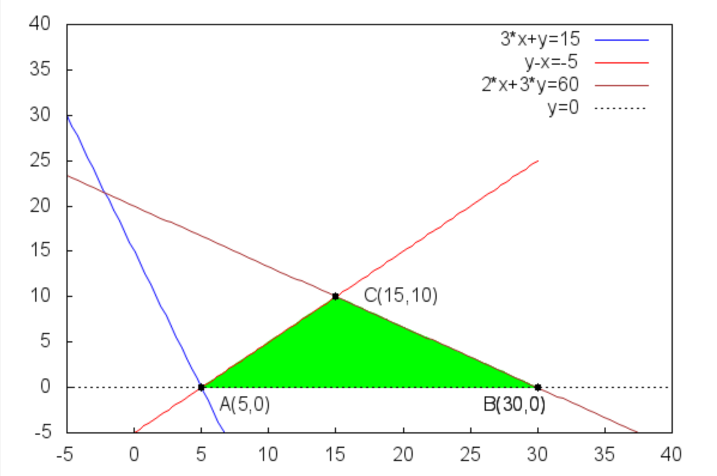
i calculau el valor màxim de $f(x,y)$ a A. Es podria eliminar alguna de les desigualtats que defineixen el conjunt A de manera que encara fos el mateix conjunt? (5 punts)

b) Digau si la funció $f(x,y)$ assoleix el valor màxim en el conjunt: (5 punts)

$$B=\{(x,y)\ :\ 3x+y\leq 15,\ x-y\geq 5,\ x\geq 0\}$$

Solució. *a*) El conjunt A es pot veure a la figura següent:

Model 1. Solucions

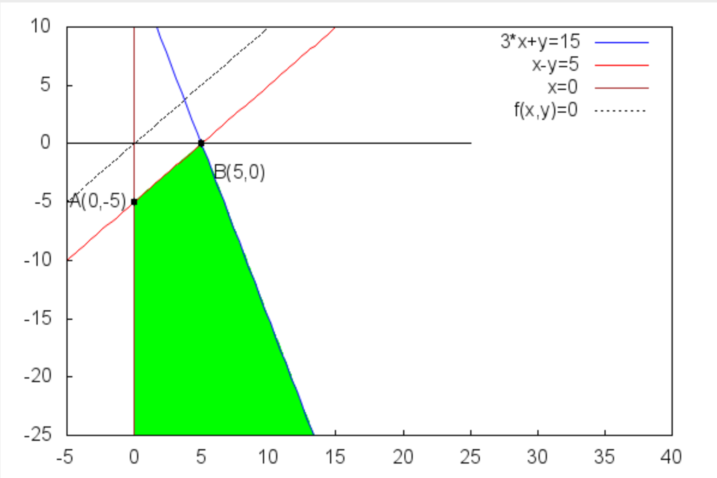


El conjunt A està fitat i té com a vèrtexs els punts:

$$A = (5, 0),\ B = (30, 0),\ C = (15, 10).$$

La funció $f(x, y) = x - y$ aconsegueix el màxim en algun dels vèrtexs. Com que $f(A) = 5 = f(C)$ i $f(B) = 30$, el màxim s'aconsegueix a B i val 30.
Com es pot veure a la figura, podem eliminar la inequació $3x + y \geq 15$, de manera que continuarem tenint el mateix conjunt.

b) El conjunt B es pot veure a la figura següent:



El conjunt B no està fitat i té per vèrtexs els punts:

$$A = (0, -5),\ B = (5, 0)$$

Si traçam paral·leles a la funció objectiu que passin per aquests vèrtexs, comprovam que la recta $x - y = 5$ passa per A i B, i obtenim en aquests vèrtexs el valor mínim. Per tant, la funció objectiu no aconsegueix el màxim en el conjunt B.

Model 1. Solucions

3. Considerau la funció
$$h(x) = x^2 e^{x^3}.$$

a) Calculau una primitiva d'aquesta funció. (4 punts)

b) Calculau la següent integral definida: (6 punts)
$$\int_{\sqrt[3]{\ln 2}}^{\sqrt[3]{\ln 3}} x^2 e^{x^3}\, dx,$$
i comprovau que el seu valor és $\frac{1}{3}$.

Solució. *a*) Observau que si $f(x) = x^3$, aleshores $f'(x) = 3x^2$. Per tant:
$$\int x^2 e^{x^3}\, dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 e^{x^3}\, dx = \frac{1}{3}e^{x^3} + C.$$

b)
$$\int_{\sqrt[3]{\ln 2}}^{\sqrt[3]{\ln 3}} x^2 e^{x^3}\, dx = \frac{1}{3}e^{x^3}\Big|_{x=\sqrt[3]{\ln 2}}^{x=\sqrt[3]{\ln 3}} = \frac{1}{3}e^{(\sqrt[3]{\ln 3})^3} - \frac{1}{3}e^{(\sqrt[3]{\ln 2})^3} = \frac{1}{3}e^{\ln 3} - \frac{1}{3}e^{\ln 2}$$
$$= \frac{1}{3}\cdot 3 - \frac{1}{3}\cdot 2 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

4. En una universitat en la qual no hi ha més que estudiants d'enginyeria, de ciències i de lletres, acaben la carrera el 5% d'enginyeria, el 10% de ciències i el 20% de lletres. Se sap que el 20% estudien enginyeria, el 30%, ciències i el 50%, lletres. Pres un estudiant a l'atzar, es demana:

a) Probabilitat que hagi acabat la carrera i sigui d'enginyeria. (6 punts)

b) Ens diu que ha acabat la carrera, probabilitat que sigui d'enginyeria. (4 punts)

Solució. Considerem els successos següents:
$$I = \text{"estudiant d'enginyeria"},$$
$$C = \text{"estudiant de ciències"},$$
$$L = \text{"estudiant de lletres"},$$
$$F = \text{"finalitza la carrera"}.$$
$$p(I) = 0.2,\ p(C) = 0.3,\ p(L) = 0.5,$$
$$p(F/I) = 0.05,\ p(F/C) = 0.1,\ p(F/L) = 0.2.$$

a)
$$p(F \cap I) = p(I)\cdot p(F/I) = 0.2 \cdot 0.05 = 0.01.$$

b)
$$p(I/F) = \frac{p(I \cap F)}{p(F)} = \frac{0.01}{p(F)}.$$

Model 1. Solucions

Calculem la probabilitat que un estudiant acabi la carrera:

$$p(F) = p(I) \cdot p(F/I) + p(C) \cdot p(F/C) + p(L) \cdot p(F/L) = 0.2 \cdot 0.05 + 0.3 \cdot 0.1 + 0.5 \cdot 0.2 = 0.14.$$

Per tant:

$$p(I/F) = \frac{p(I \cap F)}{p(F)} = \frac{0.01}{0.14} = 0.0714.$$

Model 1. Solucions

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula 1: Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

Model 1

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. Considerau la matriu següent:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & x+2 & x^2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Es demana:

a) Resoleu l'equació $|A| = 0$. ($|A|$ és el determinant de la matriu A.) (3 punts)
b) Si $x = 0$, té inversa la matriu A? Per què? (2 punts)
c) Si $x = 2$, té inversa la matriu A? Per què? En cas afirmatiu, resoleu l'equació $A \cdot Z = I$; on I és la matriu identitat 3×3. (5 punts)

2. El nombre de vehicles que ha passat cert dia pel peatge d'una autopista ve donat per la funció:

$$N(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 2, & \text{si } 0 \leq t \leq 9, \\ 10 - \left(\frac{t-15}{3}\right)^2, & \text{si } 9 < t \leq 24, \end{cases}$$

on N indica el nombre de vehicles i t el temps transcorregut en hores des de les 0:00 h.

a) És contínua la funció $N(t)$? (3 punts)
b) Entre quines hores va augmentar el nombre de vehicles que passava pel peatge? En quines hores disminueix? (5 punts)
c) A quina hora va passar el major nombre de vehicles? Quin va ser aquest nombre? (2 punts)

3. Tenim un dau correcte i dues urnes amb bolles descrites a continuació:

Urna I: 1 bolla negra, 3 bolles vermelles i 6 bolles verdes.
Urna II: 2 bolles negres, 6 bolles vermelles i 2 bolles verdes.

Tiram el dau. Si surt 1 o 2, anam a l'urna I. Si surt 3, 4, 5 o 6, acudim a l'urna II. Extreim a l'atzar una bolla de l'urna corresponent.

Model 1

a) Donau un diagrama en arbre que representi l'experiment amb totes les probabilitats. (3 punts)

b) Calculau les probabilitats següents: (4 punts)

i) $p(\{3, 4, 5, 6\}$ i $\{$bolla vermella$\})$.
ii) $p(\{$bolla verda$\}/\{1\})$.
iii) $p(\{$bolla vermella$\}/\{5\})$.
iv) $p(\{2\}$ i $\{$bolla verda$\})$.

c) Calculau la probabilitat que la bolla extreta hagi estat vermella i que hagi estat negra. Quina és la probabilitat que la bolla extreta hagi estat verda? Quant val la suma de les tres probabilitats? Justifica la resposta. (3 punts)

4. Resoleu els apartats següents:

a) El pes dels habitants d'una ciutat té una mitjana de 67 kg i una desviació típica de 5 kg. Quina és la probabilitat que la mitjana del pes de 100 persones superi els 68.5 kg? I que sigui menor que 68 kg?. (5 punts)

b) En un hospital s'ha pres la temperatura a una mostra de 64 pacients, per a estimar la temperatura mitjana dels malalts. La mitjana de la mostra ha estat de 37,1 °C, i la desviació típica de la població, d'1,04 °C. Calcula un interval de confiança per a la mitjana poblacional amb un nivell de confiança del 99%. Interpreta el resultat en l'entorn del problema. (5 punts)

Model 1

OPCIÓ B

1. Una empresa d'autobusos té tres línies: A, B i C. Dilluns varen sortir 5 autobusos a la línia A, 3 a la B i 4 a la C. Dimarts varen sortir 2 autobusos a la línia A, 1 a la B i 4 a la C. Dimecres varen sortir 1 autobús a la línia A, 3 a la B i 5 a la C.

a) Representau les dades en forma de matriu. (2 punts)
b) Té inversa la matriu construïda a l'apartat a)? En cas negatiu, justificau la resposta. En cas positiu, calculau la seva inversa. (4 punts)
c) Si D és la matriu construïda a l'apartat a), resoleu, si és possible, el sistema d'equacions: (4 punts)

$$D \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 \\ -33 \\ -33 \end{pmatrix}.$$

2. Una empresa es dedica a elaborar lots de productes que es venen als supermercats. En aquest moment estan empaquetant dos lots diferents. El lot de tipus A té 1 formatge i 2 botelles de vi, i el transport costa 0,90 €. El lot de tipus B té 3 formatges i 1 botella de vi, i costa 1,50 € transportar-lo. L'empresa disposa de 200 formatges i 100 botelles de vi, i han d'elaborar, almenys, 10 lots del tipus A i 25 del tipus B.

Quants lots de cada classe han d'elaborar perquè les despeses en transport siguin mínimes?

S'ha de plantejar el problema com un problema de programació lineal, dibuixant la regió factible de solucions i determinant i dibuixant els seus vèrtexs. (10 punts)

3. El nombre de visitants a un museu s'obté mitjançant la funció

$$V(t) = \frac{300t}{t^3 + 2}$$

on t és l'hora des de l'obertura del museu. Suposem que l'hora d'obertura del museu són les 9:00 hores del matí.

a) Quan creix i decreix el nombre de visitants del museu? (4 punts)
b) Quan rep el museu el nombre més gran de visitants? Quin és aquest nombre? (2 punts)
c) En quin valor de t es produeix un punt d'inflexió de $V(t)$? (4 punts)

4. Tenim dues urnes descrites a continuació:

Urna I: 2 bolles negres, 1 bolla vermella i 3 bolles verdes.
Urna II: 1 bolla negra, 2 bolles vermelles i 1 bolla verda.

L'experiment consisteix a extraure una bolla a l'atzar de l'urna I, introduir-la en l'urna II, remoure i extraure, finalment, una bolla a l'atzar de l'urna II.

Model 1

a) Donau un diagrama en arbre que representi l'experiment amb les probabilitats associades.
(3 punts)

b) Calculau la probabilitat que la segona bolla extreta sigui (3 punts)
b.1) vermella. b.2) negra. b.3) verda.

c) Sabent que la segona bolla ha esta negra, quina és la probabilitat que la primera també ho fos? (2 punts)

d) Quina és la probabilitat que la primera fos vermella sent vermella la segona?
(2 punts)

Model 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula 1: Taula de la distribució normal $N(0, 1)$.

Model 1. Criteris específics de correcció

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

OPCIÓ A

1. *a*) Càlcul correcte del determinant: 2 punts.
Solució de l'equació associada: 1 punt.

b) Dir que no té inversa amb explicació correcta: 2 punts. Si només diu que té inversa sense cap explicació: 0 punts.

c) Dir que la matriu té inversa quan $x = 2$ perquè el seu determinant és no nul: 1 punt.
Indicar que resoldre l'equació $A \cdot Z = I$ és equivalent a $Z = A^{-1} \cdot I$ i que, per tant, hem de calcular la matriu inversa de A: 1 punt.
Càlcul correcte de la matriu inversa de A: 3 punts.

2. *a*) Estudi correcte de la continuïtat: 3 punts. Si falta qualque detall o justificació: màxim 1.5 punts.

b) Indicar que sí que és derivable a $t = 9$ amb justificació: 1 punt.
Càlcul correcte de les derivades: 1 punt, 0.5 punts per interval.
Indicar i justificar els intervals correctes de creixement i decreixement: 3 punts. Si no s'indiquen correctament els intervals de creixement i decreixement: màxim 2 punts.

c) Indicar que el major nombre de vehicles passa a les 15 hores: 1 punt.
Dir que aquest nombre de vehicles va ser 10: 1 punt.
Si tan sols apareix $N(15) = 10$, sense cap explicació i indicació: 0 punts.

3. *a*) Dibuix de l'arbre correcte amb totes les probabilitats: 3 punts. Si falta qualque probabilitat: màxim 2 punts. Si falten més de dues probabilitats: 0 punts.

b) 1 punt per cada una de les probabilitats demanades.

c) Càlcul correcte de cadascuna de les tres probabilitats: 0.75 punts per probabilitat.
Indicar i justificar que la suma de les tres probabilitats val 1: 0.75 punts.

4. *a*) Indicar i justificar que el pes de 100 persones es distribueix seguint la normal indicada a les solucions: 2 punts. Si no es justifica per què se segueix aquesta distribució: màxim 1 punt.
Càlcul correcte de les probabilitats demanades: 1.5 punts per probabilitat.

b) Justificació i càlcul correcte del valor crític: 2 punts. Sense justificació i càlculs del valor crític: màxim 1 punt.
Justificació i càlcul correcte de l'interval de confiança: 2 punts. Si tan sols apareix

directament l'interval: màxim 1 punt. Interpretació: 1 punt.

OPCIÓ B

1. *a*) Construcció correcta de la matriu representant les dades proporcionats: 2 punts.
b) Indicar i justificar que la matriu té inversa: 1 punt.
Càlcul correcte de la matriu inversa: 3 punts.
Si directament fan el càlcul correcte de la matriu inversa, sense justificar la seva existència: màxim 3 punts.
c) Indicar que el sistema té solució perquè el determinat de la matriu és no nul: 1 punt.
Resoldre correctament el sistema d'equacions: 3 punts.

2. Interpretació correcta de l'enunciat com un problema de programació lineal: 3 punts. Qualsevol altra situació: 0 punts.

Determinació correcta de la funció objectiu: 1 punt.

Dibuix correcte de la regió factible: 3 punts. Si falta qualque indicació de recta o de vèrtex, cal restar mig punt per recta i/o vèrtex. Nota mínima: 0 punts. Si hi ha error en el càlcul d'algun dels vèrtexs, però els altres estan ben calculats: màxim 3 punts. Si hi ha més d'un error: 0 punts.

Indicar els punts que s'han de considerar: 1 punt.

Indicar que el mínim s'aconsegueix en el punt adequat: 1 punt.

Indicar quant són les despeses mínimes: 1 punt.

3. *a*) Càlcul correcte de la derivada: 1 punt.
Estudi correcte del creixement i decreixement: 2 punts.
Indicar explícitament que durant la primera hora creix el nombre de visitants, i que decreix en el reste de hores: 1 punt.
b) Indicar que el nombre més gran de visitants el rep el museu quan fa una hora que l'han obert: 1 punt.
Indicar que el nombre més gran de visitants és de 100: 1 punt.
Si només apareix $V(1) = 100$: 0 punts.
c) Càlcul correcte de la segona derivada: 2 punts.
Solució de l'equació $V''(t) = 0$: 1 punt.
Indicació del punt d'inflexió: 1 punt.

4. *a*) Dibuix de l'arbre correcte amb totes les probabilitats: 3 punts. Si falta qualcuna de les probabilitats: màxim 2 punts. Si falten més de dues probabilitats: 0 punts.
b) 1 punt per cada una de les probabilitats demanades.
c) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 2 punts.
d) Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 2 punts.

Model 1. Solucions

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. Considerau la matriu següent:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & x+2 & x^2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Es demana:

a) Resoleu l'equació $|A| = 0$. ($|A|$ és el determinant de la matriu A.) (3 punts)
b) Si $x = 0$, té inversa la matriu A? Per què? (2 punts)
c) Si $x = 2$, té inversa la matriu A? Per què? En cas afirmatiu, resoleu l'equació $A \cdot Z = I$; on I és la matriu identitat 3×3. (5 punts)

Solució. *a*) Hem de calcular el determinant de la matriu A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & x+2 & x^2 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -4x^2 - 8x = x(-4x-8) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = -2.$$

Les solucions de l'equació $|A| = 0$ són $x = 0$ i $x = -2$.

b) Si $x = 0$, tenim de l'apartat anterior que $|A| = 0$ i, per tant, la matriu no té inversa en aquest cas.

c) Si $x = 2$, tenim que $|A| = -32 \neq 0$, i en aquest cas la matriu A té inversa.
Si $A \cdot Z = I$, aleshores $Z = A^{-1} \cdot I = A^{-1}$. Per resoldre l'equació donada hem de trobar la matriu inversa de A.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

2. El nombre de vehicles que ha passat cert dia pel peatge d'una autopista ve donat per la funció:

$$N(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 2, & \text{si } 0 \le t \le 9, \\ 10 - \left(\frac{t-15}{3}\right)^2, & \text{si } 9 < t \le 24, \end{cases}$$

on N indica el nombre de vehicles i t el temps transcorregut en hores des de les 0:00 h.

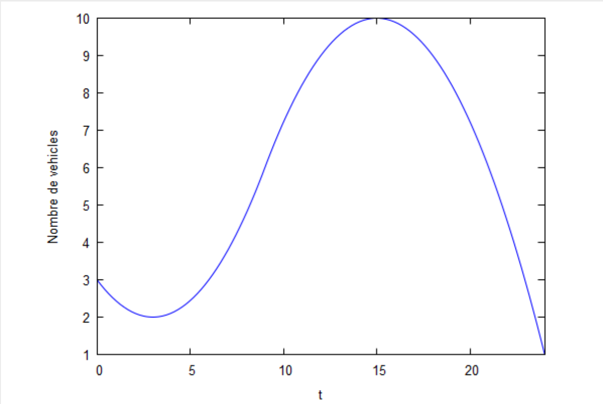
Model 1. Solucions

a) És contínua la funció $N(t)$? (3 punts)

b) Entre quines hores va augmentar el nombre de vehicles que passava pel peatge? En quines hores disminueix? (5 punts)

c) A quina hora va passar el major nombre de vehicles? Quin va ser aquest nombre? (2 punts)

Solució. *a*) La gràfica de la funció en el seu domini és:



Si $0 < t < 9$: $N(t) = \left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 2$, funció polinòmica; per tant, contínua a $(0, 9)$.
Si $9 < t < 24$: $N(t) = 10 - \left(\frac{t-15}{3}\right)^2$, funció polinòmica; per tant, contínua a $(9, 24)$.
Perquè la funció sigui contínua a $t = 9$, els límits laterals han de ser iguals i han de coincidir amb $N(9) = 6$.

$$\left.\begin{array}{l} N(9-) = \lim\limits_{t\to 9^-} \left(\left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 2\right) = 6, \\ N(9+) = \lim\limits_{x\to 9^+} \left(10 - \left(\frac{t-15}{3}\right)^2\right) = 6, \end{array}\right\} \Rightarrow N(9-) = N(9+) = N(9)$$

$$\Rightarrow N(t) \text{ és contínua a } t = 9.$$

b) Derivant la funció $N(t)$ tenim que:

$$N'(t) = \begin{cases} \frac{2}{9}(t-3), & \text{si } 0 < t \le 9, \\ -\frac{2}{9}(t-15), & \text{si } 9 \le t < 24. \end{cases}$$

ja que $N'(9) = \frac{4}{3}$. Observau que les derivades laterals són iguals, ja que $N'_-(9) = \frac{4}{3}$ i $N'_+(9) = \frac{4}{3}$.
Per tant:

$$\text{si } 0 < t < 9 : \ N'(t) = 0 \text{ si, i només si, } t = 3,$$
$$\text{si } 9 < t < 24 : \ N'(t) = 0 \text{ si, i només si, } t = 15.$$

Aleshores:

Model 1. Solucions

t	0	3	9	15	24
$N'(t)$	-	+	+	-	
$N(t)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	

Per tant, en els intervals d'hores $(0, 3)$ i $(15, 24)$ el nombre de vehicles disminueix. A l'interval $(3, 15)$ hores el nombre de vehicles augmenta.

c) El major nombre de vehicles va passar a les 15 hores, i aquest nombre és $N(15) = 10$ vehicles.

3. Tenim un dau correcte i dues urnes amb bolles descrites a continuació:

Urna I: 1 bolla negra, 3 bolles vermelles i 6 bolles verdes.
Urna II: 2 bolles negres, 6 bolles vermelles i 2 bolles verdes.

Tiram el dau. Si surt 1 o 2, anam a l'urna I. Si surt 3, 4, 5 o 6, acudim a l'urna II. Extreim a l'atzar una bolla de l'urna corresponent.

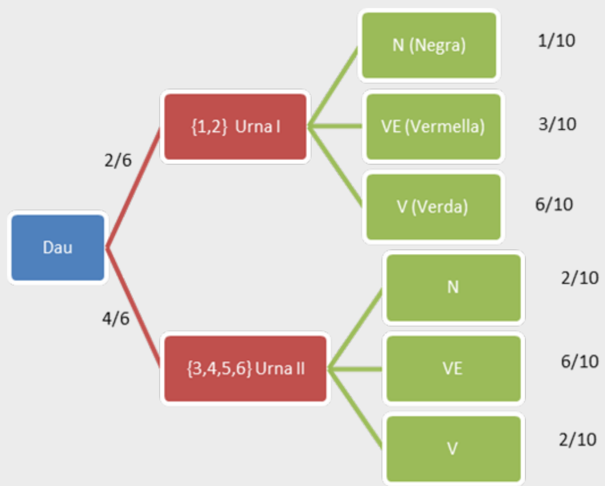
a) Donau un diagrama en arbre que representi l'experiment amb totes les probabilitats. (3 punts)

b) Calculau les probabilitats següents: (4 punts)

i) $p(\{3, 4, 5, 6\}$ i $\{\text{bolla vermella}\})$.
ii) $p(\{\text{bolla verda}\}/\{1\})$.
iii) $p(\{\text{bolla vermella}\}/\{5\})$.
iv) $p(\{2\}$ i $\{\text{bolla verda}\})$.

c) Calculau la probabilitat que la bolla extreta hagi estat vermella i que hagi estat negra. Quina és la probabilitat que la bolla extreta hagi estat verda? Quant val la suma de les tres probabilitats? Justifica la resposta. (3 punts)

Solució. *a*) L'arbre és:



Model 1. Solucions

b)

$$p(\{3,4,5,6\} \text{ i } \{\text{bolla vermella}\}) = \frac{4}{6}\cdot\frac{6}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$
$$p(\{\text{bolla verda}\}/\{1\}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$
$$p(\{\text{bolla vermella}\}/\{5\}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$
$$p(\{2\} \text{ i } \{\text{bolla verda}\} = \frac{1}{6}\cdot\frac{6}{10} = \frac{1}{10}.$$

c)

$$p(\{\text{bolla vermella}\}) = \frac{2}{6}\cdot\frac{3}{10} + \frac{4}{6}\cdot\frac{6}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$
$$p(\{\text{bolla negra}\}) = \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{10} + \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{10} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}.$$
$$p(\{\text{bolla verda}\}) = \frac{2}{6}\cdot\frac{6}{10} + \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{10} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}.$$

Finalment:

$$p(\{\text{bolla vermella}\}) + p(\{\text{bolla negra}\}) + p(\{\text{bolla verda}\}) = \frac{30}{60} + \frac{10}{60} + \frac{20}{60} = 1.$$

4. Resoleu els apartats següents:

a) El pes dels habitants d'una ciutat té una mitjana de 67 kg i una desviació típica de 5 kg. Quina és la probabilitat que la mitjana del pes de 100 persones superi els 68.5 kg? I que sigui menor que 68 kg?. (5 punts)

b) En un hospital s'ha pres la temperatura a una mostra de 64 pacients, per a estimar la temperatura mitjana dels malalts. La mitjana de la mostra ha estat de 37,1 °C, i la desviació típica de la població, d'1,04 °C. Calcula un interval de confiança per a la mitjana poblacional amb un nivell de confiança del 99%. Interpreta el resultat en l'entorn del problema. (5 punts)

Solució. *a*) Com que la grandària de la mostra $n = 100$ és gran, podem dir que

$$\overline{x} \equiv N\left(67, \frac{5}{\sqrt{100}}\right) = N(67, 0.5).$$

Per tant:

$$p(\overline{x} > 68,5) = p\left(\frac{\overline{x}-67}{0.5} > \frac{68.5-67}{0.5}\right) = p(Z > 3) = 1 - p(Z \le 3)$$
$$= 1 - 0.9987 = 0.0013.$$
$$p(\overline{x} < 68) = p\left(\frac{\overline{x}-67}{0.5} < \frac{68-67}{0.5}\right) = p(Z < 2) = 0.9772.$$

Model 1. Solucions

b) Un interval de confiança per a la mitjana de la població amb un nivell de confiança $1-\alpha$ és
$$\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$
Calculem el valor crític $z_{\frac{\alpha}{2}}$ i cerquem el seu valor a la taula $N(0,1)$ donada amb els enunciats. El nivell de confiança és del 99%.
$$1-\alpha = 0.99 \implies \alpha = 0.01 \implies \frac{\alpha}{2} = 0.005 \implies z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.005}.$$
$$\phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = \phi(z_{0.005}) = 1-0.005 = 0.995 \implies z_{\frac{\alpha}{2}} = \phi^{-1}(0.995) = \frac{2.57+2.58}{2} = 2.575.$$
En aquest cas l'interval de confiança demanat és:
$$\begin{aligned}\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= (37.1 - 2.575\cdot\frac{1.04}{\sqrt{64}}, 37.1 + 2.575\cdot\frac{1.04}{\sqrt{64}})\\ &= (37.1 - 2.575\cdot\frac{1.04}{8}, 37.1 + 2.575\cdot\frac{1.04}{8}) \approx (36.765, 37.435).\end{aligned}$$
La interpretació de l'interval de confiança és la següent: si calculam N intervals de confiança per a la mitjana poblacional al 99% de confiança fent servir la metodologia anterior i n'escollim un a l'atzar, hi ha una probabilitat de 0.99 que contingui el valor de la mitjana poblacional.

Model 1. Solucions

OPCIÓ B

1. Una empresa d'autobusos té tres línies: A, B i C. Dilluns varen sortir 5 autobusos a la línia A, 3 a la B i 4 a la C. Dimarts varen sortir 2 autobusos a la línia A, 1 a la B i 4 a la C. Dimecres varen sortir 1 autobús a la línia A, 3 a la B i 5 a la C.

a) Representau les dades en forma de matriu. (2 punts)
b) Té inversa la matriu construïda a l'apartat a)? En cas negatiu, justificau la resposta. En cas positiu, calculau la seva inversa. (4 punts)
c) Si D és la matriu construïda a l'apartat a), resoleu, si és possible, el sistema d'equacions: (4 punts)

$$D \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 \\ -33 \\ -33 \end{pmatrix}.$$

Solució. *a*) Tenim que:

Línies

Autobusos		A	B	C
	Dillus	5	3	4
	Dimarts	2	1	4
	Dimecres	1	3	5

$$\Longrightarrow \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

b) Tenim que

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -33 \neq 0.$$

Això ens permet afirmar que la matriu D té inversa.
Així:

$$D^{-1} = \frac{1}{-33} \begin{pmatrix} 7 & -6 & 5 \\ -3 & 21 & -12 \\ 8 & -12 & -1 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} 7 & 3 & -8 \\ 6 & -21 & 12 \\ -5 & 12 & 1 \end{pmatrix}.$$

c)

$$D \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 \\ -33 \\ -33 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = D^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -33 \\ -33 \\ -33 \end{pmatrix} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} 7 & 3 & -8 \\ 6 & -21 & 12 \\ -5 & 12 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -33 \\ -33 \\ -33 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -7-3+8 \\ -6+21-12 \\ 5-12-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

2. Una empresa es dedica a elaborar lots de productes que es venen als supermercats. En aquest moment estan empaquetant dos lots diferents. El lot de tipus A té 1 formatge i 2 botelles de vi, i el transport costa 0,90 €. El lot de tipus B té 3 formatges i 1 botella de vi, i costa 1,50 € transportar-lo. L'empresa disposa de 200 formatges i 100 botelles de vi, i han d'elaborar, almenys, 10 lots del tipus A i 25 del tipus B.

Model 1. Solucions

Quants lots de cada classe han d'elaborar perquè les despeses en transport siguin mínimes?

S'ha de plantejar el problema com un problema de programació lineal, dibuixant la regió factible de solucions i determinant i dibuixant els seus vèrtexs. (10 punts)

Solució. Siguin:

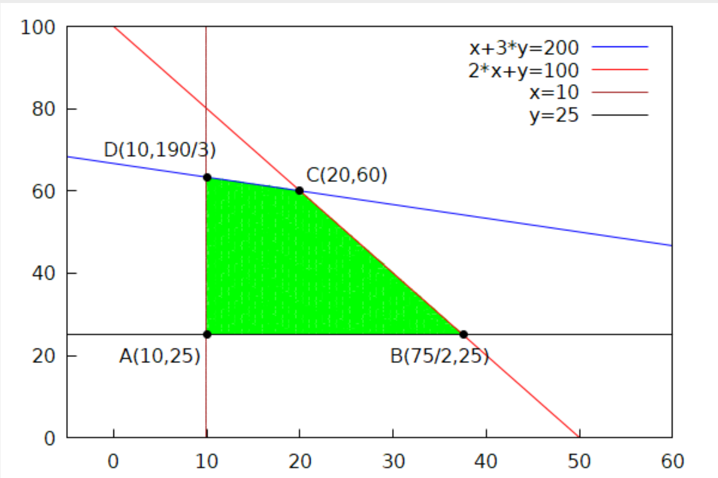
$$x \rightarrow \text{"nombre de lots de tipus } A\text{"},$$
$$y \rightarrow \text{"nombre de lots de tipus } B\text{"}.$$

	Lots de tipus A	**Lots de tipus B**	**Total**	
Formatges	1	3	200	$\rightarrow x + 3y \leq 200,$
Ampolles de vi	2	1	100	$\rightarrow 2x + y \leq 100,$
Cost del transport (€)	0.90	1.50		$f(x,y) = 0.90x + 1.50y,$

i, a més, $x \geq 10$, $y \geq 25$, sent la funció objectiu $f(x,y) = 0.90x + 1.50y$.

La regió factible està fitada amb vèrtexs

$$A = (10,25),\ B = (75/2,25),\ C = (20,60),\ D = (10,190/3).$$



$$f(10,25) = 46.5,\ f(75/2,25) = 71.25,\ f(20,60) = 108,\ f(10,190/3) = 104.$$

Observant els anteriors valors, tenim que el mínim s'aconsegueix a $A = (10,25)$. És a dir, les despeses del transport seran mínimes elaborant 10 lots de tipus A i 25 lots de tipus B; aquestes despeses seran un total de 46.5 €.

Model 1. Solucions

3. El nombre de visitants a un museu s'obté mitjançant la funció

$$V(t) = \frac{300t}{t^3 + 2}$$

on t és l'hora des de l'obertura del museu. Suposem que l'hora d'obertura del museu són les 9:00 hores del matí.

a) Quan creix i decreix el nombre de visitants del museu? (4 punts)
b) Quan rep el museu el nombre més gran de visitants? Quin és aquest nombre? (2 punts)
c) En quin valor de t es produeix un punt d'inflexió de $V(t)$? (4 punts)

Solució. *a*) Derivant la funció $V(t)$ obtenim

$$V'(t) = \frac{600 - 600t^3}{t^6 + 4t^3 + 4} = \frac{600 - 600t^3}{(t^3 + 2)^2}.$$

S'observa que $Vi(t) = 0$ si, i només si, $t = 1$. Per tant:

t	0	1	Tancament
$V'(t)$	$+$	-	
$V(t)$	$\nearrow$	$\searrow$	

A l'interval $(0, 1)$ creix el nombre de visitants i a l'interval $(1, \text{Tancament})$ decreix el nombre de visitants. És a dir, durant la primera hora creix el nombre de visitants del museu i aquest nombre decreix la reste d'hores d'obertura.

b) El nombre més gran de visitants el rep quan fa una hora que l'han obert i aquest nombre és

$$V(1) = \frac{300}{1 - 2} = 100.$$

100 visitants és el nombre màxim.

c) Tenim que

$$V''(t) = \frac{1800t^5 - 7200t^2}{t^9 + 6t^6 + 12t^3 + 8}.$$

$V''(t) = 0$ si, i només si, $1800t^5 - 7200t^2 = 0$ si, i només si, $t^2(1800t^3 - 7200t) = 0$ si, i només si, $t = 0$, $t = \sqrt[3]{4} \approx 1.5874$.
Per tant, $V(t)$ té un punt d'inflexió quan $t = \sqrt[3]{4} \approx 1.5874$.

4. Tenim dues urnes descrites a continuació:

Urna I: 2 bolles negres, 1 bolla vermella i 3 bolles verdes.
Urna II: 1 bolla negra, 2 bolles vermelles i 1 bolla verda.

L'experiment consisteix a extraure una bolla a l'atzar de l'urna I, introduir-la en l'urna II, remoure i extraure, finalment, una bolla a l'atzar de l'urna II.

Model 1. Solucions

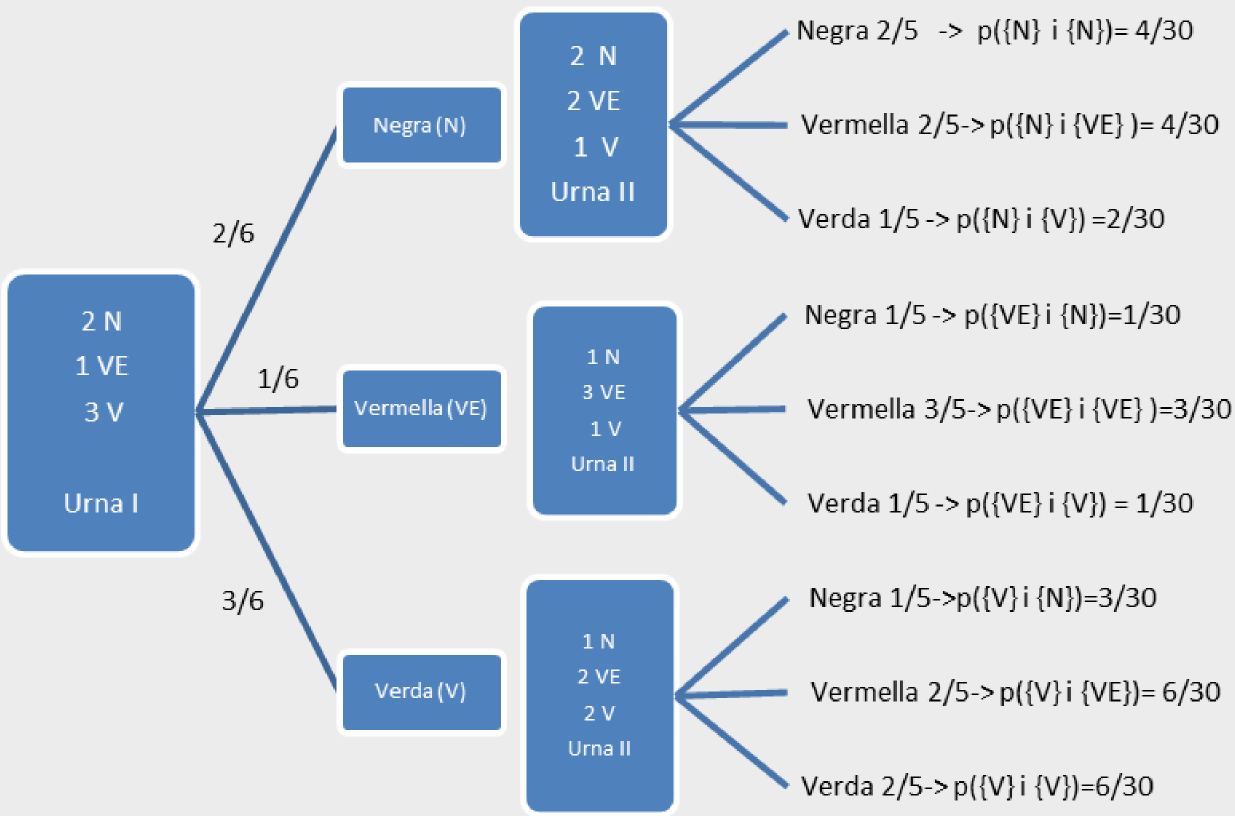
a) Donau un diagrama en arbre que representi l'experiment amb les probabilitats associades. (3 punts)

b) Calculau la probabilitat que la segona bolla extreta sigui (3 punts)
b.1) vermella. b.2) negra. b.3) verda.

c) Sabent que la segona bolla ha esta negra, quina és la probabilitat que la primera també ho fos? (2 punts)

d) Quina és la probabilitat que la primera fos vermella sent vermella la segona? (2 punts)

Solució. *a*)



b)

b.1) $p(\{\text{2a bolla vermella}\}) = \frac{4}{30} + \frac{3}{30} + \frac{6}{30} = \frac{13}{30}$.

b.2) $p(\{\text{2a bolla negra}\}) = \frac{4}{30} + \frac{1}{30} + \frac{3}{30} = \frac{8}{30}$.

b.3) $p(\{\text{2a bolla verda}\}) = \frac{2}{30} + \frac{1}{30} + \frac{6}{30} = \frac{9}{30}$.

c)

$$p(\text{1a N}/\text{2a N}) = \frac{p(\{\text{N}\} \text{ i } \{\text{N}\})}{p(\text{2a N})} = \frac{\frac{4}{30}}{\frac{8}{30}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

d)

$$p(\text{1a VE}/\text{2a VE}) = \frac{p(\{\text{VE}\} \text{ i } \{\text{VE}\})}{p(\text{2a VE})} = \frac{\frac{3}{30}}{\frac{13}{30}} = \frac{3}{13}.$$

Model 1. Solucions

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula 1: Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

Model 2

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Donades $\mathbf{A}$, una matriu quadrada invertible qualsevol, i $\mathbf{A}^{-1}$ la seva inversa; quina matriu s'ha d'obtenir en calcular $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}$ i $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}$? Descriviu/indicau com és aquesta matriu. (1 punt)

b) Considerau la matriu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix}$$

i) Calculau els valors de x per als quals se satisfà que (5 punts)

$$\mathbf{A}^2 = 2\cdot\mathbf{A}.$$

ii) Per a $x=-1$, calculau $\mathbf{A}^{-1}$. Comprovau el resultat calculant $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}$. (4 punts)

2. Un article de consum va estar a la venda durant 8 anys, i el seu preu $P(t)$ (en milers d'euros) va variar amb el temps t (en anys) que portava al mercat segons la funció:

$$P(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 40, & 0 \le t \le 6, \\ -\frac{113}{14}t^2 + \frac{3826}{7}, & 6 < t \le 8. \end{cases}$$

a) Quin va ser el preu de sortida del producte? (1 punt)

b) És contínua la funció? És derivable? Donau els conjunts de continuïtat i derivabilitat. (4 punts)

c) Determinau els intervals de creixement i decreixement del preu del producte. (3 punts)

d) Esbrinau en quin moment es varen assolir els preus màxim i mínim i quins varen ser aquests preus. (2 punts)

3. En una màquina s'han fabricat 100 peces, de les quals 15 han presentat algun defecte.

a) Calculau la proporció de peces que no són defectuoses. (2 punts)

b) Calculau la probabilitat que, si examinam dues peces a l'atzar, ambdues resultin defectuoses. (5 punts)

c) Si provam dues peces a l'atzar i la primera és defectuosa, quina és la probabilitat que la segona no ho sigui? (3 punts)

Model 2

4. El 70% dels alumnes de batxillerat tenen mòbil.

a) Si un centre té 1.400 alumnes de batxillerat, quants s'espera que tinguin mòbil? (1 punt)

b) Quina és la probabilitat que, en una mostra aleatòria amb repetició de 150 alumnes de batxillerat, n'hi hagi més de 100 amb telèfon mòbil? (5 punts)

c) Quina és la probabilitat que, en una mostra aleatòria amb repetició de 200 alumnes de batxillerat, n'hi hagi 140 o menys amb telèfon mòbil? (4 punts)

Model 2

OPCIÓ B

1. Un institut té tres partides pressupostàries: llibres, material d'oficina i mobles. El pressupost per a mobles d'aquest institut és cinc vegades la suma del de llibres més el del material d'oficina. El pressupost per a llibres és el triple del de material d'oficina. La suma del pressupost per a mobles i material d'oficina és 7 vegades el pressupost de llibres.

a) Amb aquestes dades, podem saber els diners destinats a cada partida pressupostària? (7 punts)

b) Determinau les quantitats si per a llibres hi ha 2100 €. (3 punts)

2. KSE és una empresa que fabrica dos models de guants: un model normal i un model de luxe. L'empresa té disponibles 900 hores de temps al departament de producció, 300 hores al departament d'acabat i 100 hores al departament d'empaquetat. Les hores necessàries de cada departament per parell de guants i els beneficis, en €, es donen a la taula següent:

	Producció	**Acabat**	**Empaquetat**	**Beneficis**
Normal	1	1/2	1/8	4
De luxe	3/2	1/3	1/4	8

Quants parells de cada model han de fabricar per maximitzar el benefici? Quin és aquest benefici? (10 punts)

S'ha de plantejar el problema com un problema de programació lineal, dibuixant la regió factible de solucions i determinant i dibuixant els seus vèrtexs.

3. Dibuixau l'àrea tancada entre els gràfics de les funcions següents: $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = x + 1$ (4 punts). Calculau l'àrea del recinte anterior (6 punts).

4. Una empresa té dues fàbriques, en la primera són dones el 60% dels treballadors i en la segona són homes el 55% dels treballadors. Es tria a l'atzar un treballador de cada fàbrica per pertànyer al comitè d'empresa. Suposam que el fet de pertànyer a una fàbrica és independent de pertànyer a l'altra.

a) Calculau la probabilitat dels esdeveniments següents: (6 punts)

$A =$ "Tots dos són homes".
$B =$ "Solament un és dona".
$C =$ "Tots dos són dones".

b) Raonau si el succés contrari de l'esdeveniment C és l'A, el B, l'$A \cap B$, l'$A \cup B$ o algun altre esdeveniment, i calculau-ne la probabilitat. (4 punts)

Model 2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula 2: Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

Model 2. Criteris específics de correcció

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més dun apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per lalumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

OPCIÓ A

1. *a*) Indicar que $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = I = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}$ on I és la matriu identitat: 1 punt.

b) En aquest apartat:

i) Càlcul correcte de $\mathbf{A}^2$: 2 punts.
Establir que la identitat $\mathbf{A}^2 = 2\mathbf{A}$ és equivalent a resoldre l'equació $x^2+2x=0$: 2 punts.
Indicar que la identitat se satisfà quan $x=0$ i $x=-2$: 1 punt

ii) Càlcul correcte de la matriu inversa de $\mathbf{A}$ quan $x=-1$: 2 punts.
Comprovar correctament que $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = I$: 2 punts.

2. *a*) Proporcionar el preu de sortida correcte: 1 punt.

b) Estudi correcte de la continuïtat i derivabilitat: 4 punts. Si no es donen els conjunts de continuïtat i derivabilitat: màxim 3 punts.

c) Determinació i justificació correcta dels intervals de creixement i decreixement: 3 punts. Sense cap justificació: 0 punts.

d) Indicació correcta dels extrems: 1 punt per extrem.

3. *a*) Càlcul correcte de la proporció: 2 punts.

b) Traducció de l'enunciat a probabilitats i, si és necessari, proporcionar el diagrama en arbre: 2 punts.
Identificació de l'esdeveniment del qual cal calcular la probabilitat: 1 punt.
Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 2 punts.

c) Identificació del succés del qual cal calcular la probabilitat: 1 punt.
Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 2 punts.

4. *a*) Càlcul correcte del nombre d'alumnes amb mòbil: 1 punt.

b) Comprovar que podem aproximar la binomial per la normal: 1 punt.
Determinació correcta d'aquesta normal: 1 punt.
Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 3 punts.

c) Determinació correcta de la normal que aproxima a la binomial: 1 punt.
Càlcul correcte de la probabilitat demanada: 3 punts.

Model 2. Criteris específics de correcció

OPCIÓ B

1. *a*) Interpretació correcta de l'enunciat com a equacions lineals: 4 punts. Si la traducció a equacions no és correcta: 0 punts. Estudiar que el sistema és compatible indeterminat: 2 punts. Indicar que no podem saber quant s'ha destinat a cada compra: 1 punt. Qualsevol altra situació: 0 punts.

b) Solució correcta del sistema quan per a llibres hi ha 2100 €: 3 punts. Qualsevol altra situació: 0 punts.

2. Interpretació correcta de l'enunciat com un problema de programació lineal: 3 punts. Qualsevol altra situació: 0 punts.

Determinació correcta de la funció objectiu: 1 punt.

Dibuix correcte de la regió factible: 3 punts. Si falta qualque indicació de recta o de vèrtex, cal restar mig punt per recta i/o vèrtex. Nota mínima: 0 punts. Si hi ha error en el càlcul d'algun dels vèrtexs, però els altres estan ben calculats: màxim 3 punts. Si hi ha més d'un error: 0 punts.

Indicar que el màxim s'aconsegueix en el segment de recta: 1 punt. Indicar els punts que s'han de considerar: 1 punt.

Indicar que els beneficis màxims ascendeixen a 3200 €: 1 punt.

3. Dibuix correcte de la regió: 4 punts.

Càlcul correcte dels punts de tall: 1 punt.

Expressió correcta de l'àrea demanada: 2 punts.

Càlcul correcte de la primitiva: 1 punt. Càlcul correcte de la integral definida: 1 punt. Resultat correcte de l'àrea demanada: 1 punt.

4. *a*) Traducció correcta de les dades a probabilitats: 2 punts.
Càlcul correcte de la probabilitat $p(A)$: 1 punt.
Càlcul correcte de la probabilitat $p(B)$: 2 punts.
Càlcul correcte de la probabilitat $p(C)$: 1 punt.

b) Determinació i justificació del succés contrari del succés C: 3 punts.
Càlcul correcte de la probabilitat $p(\bar{C})$: 1 punt.

Model 2. Solucions

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no sautoritzarà lús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Donades $\mathbf{A}$, una matriu quadrada invertible qualsevol, i $\mathbf{A}^{-1}$ la seva inversa; quina matriu s'ha d'obtenir en calcular $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}$ i $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}$? Descriviu/indicau com és aquesta matriu. (1 punt)

b) Considerau la matriu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix}$$

i) Calculau els valors de x per als quals se satisfà que (5 punts)

$$\mathbf{A}^2 = 2\cdot\mathbf{A}.$$

ii) Per a $x=-1$, calculau $\mathbf{A}^{-1}$. Comprovau el resultat calculant $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}$. (4 punts)

Solució. *a*) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = I = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}$, on I és la matriu identitat (una matriu diagonal amb 1 a la diagonal principal i tots els altres elements nuls).

b)

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & x\cdot(x+2)+2\cdot x \\ 0 & (x+2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & x^2+4x \\ 0 & (x+2)^2 \end{pmatrix}.$$

Així:

$$\mathbf{A}^2 = 2\cdot\mathbf{A} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & x^2+4x \\ 0 & (x+2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2\cdot x \\ 0 & 2\cdot(x+2) \end{pmatrix}$$

d'on s'ha de resoldre l'equació següent:

$$x^2+2x=0 \Rightarrow x=0,\ x=-2.$$

La identitat se satisfà quan $x=0$ i $x=-2$.

c) Si $x=-1$ tenim $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $\det(\mathbf{A})=2$. Pe tant, tenim que:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Model 2. Solucions

Finalment, tenim que:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

2. Un article de consum va estar a la venda durant 8 anys, i el seu preu $P(t)$ (en milers d'euros) va variar amb el temps t (en anys) que portava al mercat segons la funció:

$$P(t)=\begin{cases}\frac{1}{3}t^3+4t^2+40, & 0\leq t\leq 6,\\ -\frac{113}{14}t^2+\frac{3826}{7}, & 6<t\leq 8.\end{cases}$$

a) Quin va ser el preu de sortida del producte? (1 punt)
b) És contínua la funció? És derivable? Donau els conjunts de continuïtat i derivabilitat. (4 punts)
c) Determinau els intervals de creixement i decreixement del preu del producte. (3 punts)
d) Esbrinau en quin moment es varen assolir els preus màxim i mínim i quins varen ser aquests preus. (2 punts)

Solució. *a*) El preu de sortida del producte va ser de 40.000 €, ja que:

$$P(0)=40.$$

b) A $t=6$ la funció és contínua, perquè es compleix que:

$$P(6)=P(6-)=\lim_{t\to 6-}\frac{1}{3}t^3+4t^2+40=256.$$
$$P(6+)=\lim_{t\to 6+}-\frac{113}{14}t^2+\frac{3826}{7}=256,$$

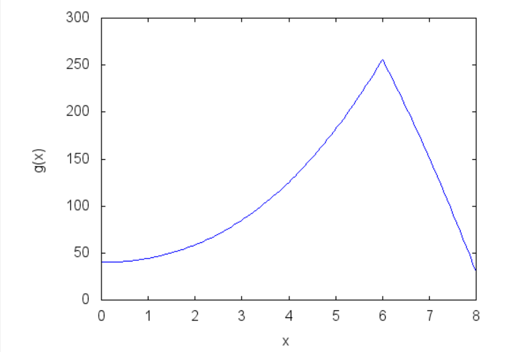
i $P(6)=P(6-)=P(6+)$.
Per tant, la funció és contínua a $(0,8)$.
A més:

$$P'(t)=\begin{cases}t^2+8t, & 0<t<6,\\ -\frac{113}{7}t, & 6<t<8,\end{cases}$$

i com que $P'(6-)=84\neq P'(6+)=-\frac{678}{7}$ la funció no és derivable a $t=6$.
Per tant, la funció és derivable a $(0,6)\cup(6,8)$.

c) Com que $P'(t)=t^2+8t>0$ quan $0<t<6$, $P(t)$ és creixent en l'interval $(0,6)$.
A més, com que $P'(t)=-\frac{113}{14}t<0$ quan $6<t<8$, tenim que $P(t)$ és decreixent a l'interval $(6,8)$.

Model 2. Solucions



d)

$$P(0) = 40, \ P(8) = 30, \ P(6) = 256.$$

El preu mínim es va aconseguir al final de la venda del producte, i va ser de 30.000 €; el preu màxim es va aconseguir quan feia 6 anys que es venia el producte, i va ser de 256.000 €.

3. En una màquina s'han fabricat 100 peces, de les quals 15 han presentat algun defecte.

a) Calculau la proporció de peces que no són defectuoses. (2 punts)
b) Calculau la probabilitat que, si examinam dues peces a l'atzar, ambdues resultin defectuoses. (5 punts)
c) Si provam dues peces a l'atzar i la primera és defectuosa, quina és la probabilitat que la segona no ho sigui? (3 punts)

Solució. Siguin els successos:

$$D = \text{"peça defectuosa"}, \ \bar{D} = \text{"peça no defectuosa"}.$$

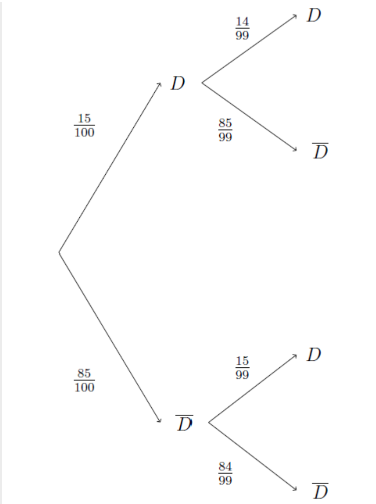
a) Si 15 peces són defectuoses, les 85 restants no ho són, així:

$$p(D) = \frac{15}{100} = 0.15, \text{ i } p(\bar{D}) = \frac{85}{100} = 0.85.$$

La proporció demanada és 0.85.

b)

Model 2. Solucions



$$p(D \cap D) = p(D) \cdot p(D/D) = \frac{15}{100} \cdot \frac{14}{99} = \frac{210}{9900} = \frac{7}{330}.$$

c)

$$p(\bar{D}_2/D_1) = \frac{85}{99}.$$

4. El 70% dels alumnes de batxillerat tenen mòbil.

a) Si un centre té 1.400 alumnes de batxillerat, quants s'espera que tinguin mòbil? (1 punt)

b) Quina és la probabilitat que, en una mostra aleatòria amb repetició de 150 alumnes de batxillerat, n'hi hagi més de 100 amb telèfon mòbil? (5 punts)

c) Quina és la probabilitat que, en una mostra aleatòria de 200 alumnes de batxillerat, n'hi hagi 140 o menys amb telèfon mòbil? (4 punts)

Solució. *a*)

$$1400 \cdot \frac{70}{100} = 980$$

alumnes s'espera que tinguin telèfon mòbil.

b) La distribució $x =$"nombre d'alumnes dels 150 amb telèfon mòbil" és una binomial $B(150, 0.7)$, amb $150 \cdot 0.7 > 5$ i $150 \cdot 0.3 > 5$, per tant la podem aproximar per una normal $N(np, \sqrt{np(1-p)})$.

$$x' \sim N(np, \sqrt{np(1-p)}) = N(150 \cdot 0.7, \sqrt{150 \cdot 0.7 \cdot 0.3}) = N(105, 5.6).$$

Aplicant la correcció per continuïtat:

$$p(x > 100) = p(x' \geq 100.5) = p(z > \frac{100.5 - 105}{5.6}) = p(z > -0.8)$$
$$= p(z < 0.8) = \phi(0.8) = 0.7881.$$

Model 2. Solucions

c)

$$x \sim B(200, 0.7) \Rightarrow x' \sim N(140, 6.48).$$

Per tant:

$$p(x \leq 140) = p(x' \leq 140.5) = p(z \leq \frac{140.5 - 140}{6.48}) = p(z \leq 0.08)$$
$$= \phi(0.08) = 0.5319.$$

Model 2. Solucions

OPCIÓ B

1. Un institut té tres partides pressupostàries: llibres, material d'oficina i mobles. El pressupost per a mobles d'aquest institut és cinc vegades la suma del de llibres més el del material d'oficina. El pressupost per a llibres és el triple del de material d'oficina. La suma del pressupost per a mobles i material d'oficina és 7 vegades el pressupost de llibres.

a) Amb aquestes dades, podem saber els diners destinats a cada partida pressupostària? (7 punts)

b) Determinau les quantitats si per a llibres hi ha 2100 €. (3 punts)

Solució. *a*) Siguin:

$$x = \text{pressupost per a mobles.}$$
$$y = \text{pressupost per a llibres.}$$
$$z = \text{pressupost per a material d'oficina.}$$

L'enunciat del problema es correspon amb el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x = 5(y+z), \\ y = 3z, \\ x + z = 7y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 5y - 5z = 0, \\ y - 3z = 0, \\ x - 7y + z = 0. \end{cases}$$

Tenim que el determinant de la matriu del sistema val:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -7 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

i

$$det \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Per tant, rang(A) $= 2$ i és un sistema compatible indeterminat, per la qual cosa no podem saber quant han destinat a cada compra.

b) Si $y = 2.100$, aleshores $z = 700$, i per tant, $x = 5(2.100 + 700) = 5 \cdot 2800 = 14.000$. Per a mobles destinen 14.000 €, i per a material d'oficina, 700 €.

2. KSE és una empresa que fabrica dos models de guants: un model normal i un model de luxe. L'empresa té disponibles 900 hores de temps al departament de producció, 300 hores al departament d'acabat i 100 hores al departament d'empaquetat. Les hores necessàries de cada departament per parell de guants i els beneficis, en €, es donen a la taula següent:

	Producció	Acabat	Empaquetat	Beneficis
Normal	1	1/2	1/8	4
De luxe	3/2	1/3	1/4	8

Model 2. Solucions

Quants parells de cada model han de fabricar per maximitzar el benefici? Quin és aquest benefici? (10 punts)

S'ha de plantejar el problema com un problema de programació lineal, dibuixant la regió factible de solucions i determinant i dibuixant els seus vèrtexs.

Solució. Siguin:

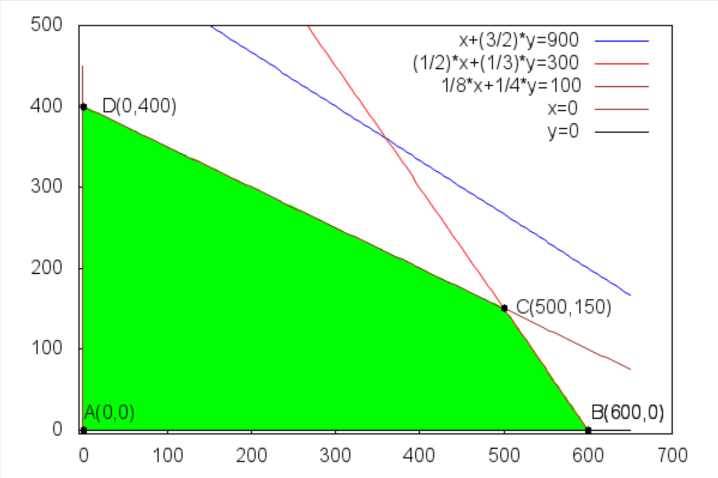
$$x \rightarrow \text{“nombre de parells de guants del model normal”},$$
$$y \rightarrow \text{“nombre de parells de guants del model de luxe”}.$$

	Model Normal	Model luxe	Hores	
Dep. Producció	1	3/2	900	$\rightarrow x + \frac{3}{2}y \leq 900,$
Dep. Acabat	1/2	1/3	300	$\rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y \leq 300,$
Dep. Empaquetat	1/8	1/4	100	$\rightarrow \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}y \leq 100,$
Beneficis (€)	4	8		$\rightarrow f(x,y) = 4x + 8y,$

i, a més, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

La regió factible està fitada amb vèrtexs

$$A = (0,0),\ B = (600,0),\ C = (500,150),\ D = (0,400).$$



$$f(0,0) = 0,\ f(600,0) = 2400,\ f(500,150) = 3200,\ f(0,400) = 3200.$$

Si traçam paral·leles a la funció objectiu, tenim que el màxim s'aconsegueix en el segment DC. Com que són parells de guants, només hem de considerar els punts que tinguin coordenades enteres de la forma $(x, \frac{800-x}{2})$, amb $0 \leq x \leq 500$ i x un nombre parell.

El benefici màxim és de 3.200 €.

3. Dibuixau l'àrea tancada entre els gràfics de les funcions següents: $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) =$

Model 2. Solucions

$x + 1$ (4 punts). Calculau l'àrea del recinte anterior (6 punts).

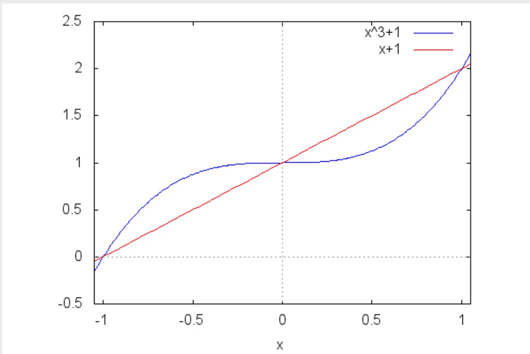
Solució. Calculem els punts de tall entre ambdues corbes:

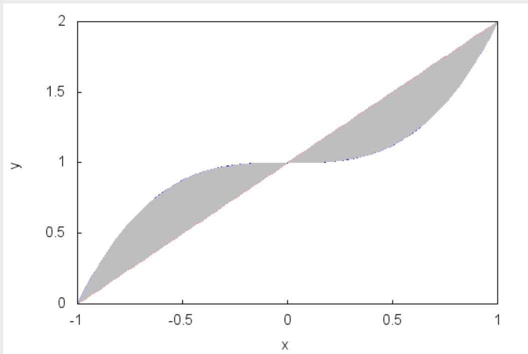
$$x^3 + 1 = x + 1 \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x = -1, x = 0, x = 1.$$

Aleshores, l'àrea demanada serà:

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)dx = \left.\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right|_{x=-1}^{x=0} + \left.\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right|_{x=0}^{x=1}$$
$$= \frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{4}u^2 = \frac{1}{2}u^2.$$

A la figura es pot veure la regió associada al problema.





4. Una empresa té dues fàbriques, en la primera són dones el 60% dels treballadors i en la segona són homes el 55% dels treballadors. Es tria a l'atzar un treballador de cada fàbrica per pertànyer al comitè d'empresa. Suposam que el fet de pertànyer a una fàbrica és independent de pertànyer a l'altra.

a) Calculau la probabilitat dels esdeveniments següents: (6 punts)

$$A = \text{“Tots dos són homes”}.$$
$$B = \text{“Solament un és dona”}.$$
$$C = \text{“Tots dos són dones”}.$$

b) Raonau si el succés contrari de l'esdeveniment C és l'A, el B, l'$A \cap B$, l'$A \cup B$ o algun altre esdeveniment, i calculau-ne la probabilitat. (4 punts)

Solució. *a*) Siguin F_1 i F_2 la primera i la segona fàbrica respectivament. Siguin M i H els esdeveniments ser dona i ser home respectivament. De les dades de l'enunciat tenim que:

$$p(M/F_1) = 0.6,\ p(H/F_1) = 0.4,$$
$$p(M/F_2) = 0.45,\ p(H/F_2) = 0.55,$$

Model 2. Solucions

Aleshores:

$$p(A) = p(H/F_1) \cdot p(H/F_2) = 0.4 \cdot 0.55 = 0.22.$$

$$p(B) = p(H/F_1) \cdot p(M/F_2) + p(M/F_1) \cdot p(H/F_2) = 0.4 \cdot 0.45 + 0.6 \cdot 0.55 = 0.51.$$

$$p(C) = p(M/F_1) \cdot p(M/F_2) = 0.6 \cdot 0.45 = 0.27.$$

b) L'esdeveniment contrari de l'esdeveniment "tots dos són dones" és el succés "algun és home" i aquest és el succés que se satisfà quan "els dos són homes" o quan "un és home i l'altre dona", és a dir, quan tenim l'esdeveniment $A \cup B$, per tant:

$$p(A \cup B) = 1 - p(C) = 1 - 0.27 = 0.73.$$

Model 2. Solucions

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula 2: Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 2

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre totes les proposades en les opcions A i B conjuntament. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1 Donat el sistema següent:

$$x + (a+1)y = 1$$

$$ax + 2y = -2$$

a) Discutiu el sistema en funció del paràmetre a. (6 punts)

b) Resoleu-lo per a $a = -2$. (4 punts)

2 En una empresa es poden produir fins a 500 taules cada mes. La funció de costs en relació amb el nombre q de taules produïdes és

$$C(q) = q^3/50 + 8q + 40$$

Si q és el nombre de taules produïdes, el cost mitjà de cada taula s'expressa mitjançant la funció

$$Q(q) = C(q)/q$$

a) Caculau el cost mitjà de cada taula, si l'empresa en produeix 5. I si en produeix 20? (3 punts)

b) Determinau quantes taules cal produir perquè el cost mitjà sigui mínim. Justificau que es tracta efectivament d'un mínim i calculau aquest cost mitjà. (7 punts)

3 Donades les funcions $f(x) = -x^2 + 5$ i $g(x) = x^2 - a$, on $a \in R$.

a) Trobau tots els possibles valors de a perquè $f(x)$ i $g(x)$ s'intersequin. (3 punts)

b) Per a $a = 3$, dibuixau el recinte tancat entre els gràfics de $f(x)$ i $g(x)$, identificant els punts d'intersecció. (3 punts)

c) Per a $a = 3$, calculau l'àrea d'aquest recinte interior. (4 punts)

4 En una mostra aleatòria de 256 individus s'ha obtingut una edat mitjana de 17.4 anys. Se sap que la desviació típica de la població normal de la qual procedeix aquesta mostra és de 2 anys.

a) Obteniu un interval de confiança al 95 % per a l'edat mitjana de la població. (5 punts)

b) Quina ha de ser la mida mínima de la mostra que s'ha de prendre perquè en estimar l'edat mitjana amb un nivell de confiança del 99%, l'error comès sigui inferior a 0.5 anys? (5 punts)

Model 2

OPCIÓ B

1 Un trajecte de 600 km s'ha de fer combinant taxi, ferrocarril i autobús. El cost del taxi és de 0.5 euros/km; el del ferrocarril, de 0.2 euros/km, i el de l'autobús, de 0.1 euros/km. El recorregut ens ha costat 150 euros, i se sap que s'han fet el doble de quilòmetres amb ferrocarril que amb taxi i autobús junts. Determinau les distàncies que s'han recorregut amb cada mitjà de transport. (10 punts)

2 Un pastisser disposa de 150 kg de farina, 22 kg de sucre i 26 kg de mantega per fer dos tipus de pastissos, A i B. Per fer una fornada de pastissos del tipus A es necessiten 3 kg de farina, 1 kg de sucre i 1 kg de mantega, mentre que per fer una fornada de pastissos del tipus B es necessiten 6 kg de farina, 0.5 kg de sucre i 1 kg de mantega. Se sap que el benefici que s'obté en vendre una fornada del tipus A és de 20 euros i, de 30 euros en vendre una fornada del tipus B.

a) Plantejau la maximització del benefici del pastisser com un problema de programació lineal. (4 punts)

b) Dibuixau la regió factible per a la solució, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten. (4 punts)

c) Determinau quantes fornades de cada tipus ha de fer i vendre el pastisser per maximitzar els seus beneficis. Determinau també aquest benefici màxim. (2 punts)

3 Considerem una funció $f(x)$ tal que la seva primera derivada és $f'(x) = x^3 + bx + 4$, en què b és un paràmetre real.

a) Determinau el valor de b perquè $f(x)$ tingui un extrem relatiu a $x = -1$ i raonau si es tracta d'un màxim o d'un mínim. (4 punts)

b) Suposant que $b = 1$, trobau una primitiva de $f'(x)$, i.e, $\int f'(x)\,dx$. (3 punts)

c) Utilitzau la primitiva anterior per trobar $f(x)$ per $b = 1$ sabent que $f(2) = -1$. (3 punts)

4 Una tafona rep caixes d'olives de dues productores, A i B, que conreen dues varietats, picual i arbequina. El 40% de les olives prové de la productora A, d'aquestes el 60 % és de la varietat picual. De les que provenen de la productora B, el 30 % és de la varietat arbequina. Es tria una caixa d'olives a l'atzar.

a) Interpretau les dades proporcionades en termes de successos, probabilitats i probabilitats condicionades. (2 punts)

b) Quina és la probabilitat que sigui de la varietat picual? (4 punts)

c) Si se sap que és de la varietat picual, quina és la probabilitat que provingui de la productora A? (4 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 2

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre todes les proposades en les opcions, A i B, conjuntament. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gráfica o programable, però no s'autoritzará l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1 Donat el sistema següent:

$$x+(a+1)y=1$$
$$ax+2y=-2$$

a) Discutiu el sistema en funció del parámetre a. (6 punts)

b) Resoleu-lo per a $a=-2$. (4 punts)

2 En una empresa es poden produir fins a 500 taules cada mes. La funció de costs en relació amb el nombre *q* de taules produïdes és

$$C(q)=q^3/50+8q+40$$

Si q és el nombre de taules produïdes, el cost mitjá de cada taula s'expressa mitjançant la funció

$$Q(q)=C(q)/q$$

a) Caculau el cost mitjá de cada taula, si l'empresa en produeix 5. I si en produeix 20? (3 punts)

b) Determinau quantes taules cal produir perqué el cost mitjá sigui mínim. Justificau que es tracta
efectivament d'un mínim i calculau aquest cost mitjá. (7 punts)

3 Donades les funcions $f(x)=-x^2+5 \quad i \quad g(x)=x^2-a, \quad on\ a\in\mathbb{R}$.

a) Trobau tots els possibles valors de *a* perqué *f(x)* i *g(x)* s'intersequin. (3 punts)

b) Per a $a=3$, dibuixau el recinte tancat entre els gràfics de *f(x)* i *g(x)*, identificant els punts d'intersecció. (3 punts)

c) Per a $a=3$, calculau l'área d'aquest recinte interior. (4 punts)

4 En una mostra aleatória de 256 individus s'ha obtingut una edat mitjana de 17.4 anys. Se sap que la desviació típica de la població normal de la qual procedeix aquesta mostra és de 2 anys.

a) Obteniu un interval de confiança al 95 % per a l'edat mitjana de la població. (5 punts)

b) Quina ha de ser la mida mínima de la mostra que s'ha de prendre perqué en estimar l'edat mitjana amb un nivell de confiança del 99%, l'error comés sigui inferior a 0.5 anys? (5 punts)

Model 2

OPCIÓ B

1 Un trajecte de 600 km s'ha de fer combinant taxi, ferrocarril i autobús. El cost del taxi és de 0.5 euros/km; el del ferrocarril, de 0.2 euros/km, i el de l'autobús, de 0.1 euros/km. El recorregut ens ha costat 150 euros, i se sap que s'han fet el doble de quilómetres amb ferrocarril que amb taxi i autobús junts. Determinau les distáncies que s'han recorregut amb cada mitjá de transport.

(10 punts)

2 Un pastisser disposa de 150 kg de farina, 22 kg de sucre i 26 kg de mantega per fer dos tipus de pastissos, A i B. Per fer una fornada de pastissos del tipus A es necessiten 3 kg de farina, 1 kg de sucre i 1 kg de mantega, mentre que per fer una fornada de pastissos del tipus B es necessiten 6 kg de farina, 0.5 kg de sucre i 1 kg de mantega. Se sap que el benefici que s'obté en vendre una fornada del tipus A és de 20 euros i, de 30 euros en vendre una fornada del tipus B.

a) Plantejau la maximització del benefici del pastisser com un problema de programació lineal. (4 punts)

b) Dibuixau la regió factible per a la solució, indicant les rectes i vértexs que la delimiten. (4 punts)

c) Determinau quantes fornades de cada tipus ha de fer i vendre el pastisser per maximitzar els seus beneficis. Determinau també aquest benefici máxim. (2 punts)

3 Considerem una funció *f(x)* tal que la seva primera derivada és $f'(x)=x^3+bx+4$, en qué *b* és un parámetre real.

a) Determinau el valor de *b* perqué *f(x)* tingui un extrem relatiu a $x=-1$ i raonau si es tracta d'un máxim o d'un mínim. (4 punts)

b) Suposant que *b = 1*, trobau una primitiva de $f'(x)$, i.e, $\int f'(x)dx$. (3 punts)

c) Utilitzau la primitiva anterior per trobar *f(x)* per *b = 1* sabent que $f(2)=-1$. (3 punts)

4 Una tafona rep caixes d'olives de dues productores, A i B, que conreen dues varietats, picual i arbequina. El 40% de les olives prové de la productora A, d'aquestes el 60 % és de la varietat picual. De les que provenen de la productora B, el 30 % és de la varietat arbequina. Es tria una caixa d'olives a l'atzar.

a) Interpretau les dades proporcionades en termes de successos, probabilitats i probabilitats condicionades. (2 punts)

b) Quina és la probabilitat que sigui de la varietat picual? (4 punts)

c) Si se sap que és de la varietat picual, quina és la probabilitat que provingui de la productora A? (4 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal N(0, 1)

SOLUCIONES

OPCIÓ A

1 Donat el sistema següent:

$$x+(a+1)y=1$$
$$ax+2y=-2$$

a) Discutiu el sistema en funció del paràmetre a. (6 punts)
b) Resoleu-lo per a $a=-2$. (4 punts)

a) Despejamos en el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x+(a+1)y=1 \\ ax+2y=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1-(a+1)y \\ ax+2y=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow a\big(1-(a+1)y\big)+2y=-2 \Rightarrow a-a^2y-ay+2y=-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(-a^2-a+2\right)y=-2-a$$

Para poder despejar la "y" debe ser $-a^2-a+2\neq 0$

Veamos cuando es cero → $-a^2-a+2=0 \Rightarrow a=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{-2}=\begin{cases}\dfrac{1+3}{-2}=-2=a \\ \dfrac{1-3}{-2}=1=a\end{cases}$

Distinguimos tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $a\neq -2 \ y \ a\neq 1$

En este caso $-a^2-a+2\neq 0$ y se puede despejar de la ecuación:

$$\left(-a^2-a+2\right)y=-2-a \Rightarrow y=\frac{-2-a}{-a^2-a+2}.$$

El sistema es **compatible determinado**.

CASO 2. $a=1$.

En este caso $-a^2-a+2=0$ y la última ecuación queda:

$$\left.\begin{array}{l} \left(-a^2-a+2\right)y=-2-a \\ a=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=-3 \text{ Igualdad imposible.}$$

El sistema es **incompatible**.

CASO 3. $a=-2$

En este caso $-a^2-a+2=0$ y la última ecuación queda

$$\left.\begin{array}{l} \left(-a^2-a+2\right)y=-2-a \\ a=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=0 \text{ Desaparece una ecuación.}$$

El sistema es **compatible indeterminado**.

b) Para $a=-2$ el sistema queda:

$$\left.\begin{array}{l} x-y=1 \\ -2x+2y=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=1 \\ x-y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x-y=1 \Rightarrow x=1+y$$

Las soluciones son $\boxed{x=1+t; \quad y=t \qquad t\in\mathbb{R}}$

2 En una empresa es poden produir fins a 500 taules cada mes. La funció de costs en relació amb el nombre *q* de taules produïdes és

$$C(q)=q^3/50+8q+40$$

Si q és el nombre de taules produïdes, el cost mitjá de cada taula s'expressa mitjançant la funció

$$Q(q)=C(q)/q$$

a) Caculau el cost mitjá de cada taula, si l'empresa en produeix 5. I si en produeix 20? (3 punts)
b) Determinau quantes taules cal produir perqué el cost mitjá sigui mínim. Justificau que es tracta efectivament d'un mínim i calculau aquest cost mitjá. (7 punts)

a) El coste medio de una mesa es:

$$Q(q)=\frac{C(q)}{q}=\frac{\frac{q^3}{50}+8q+40}{q}=\frac{q^3}{50q}+\frac{8q}{q}+\frac{40}{q}=\frac{q^2}{50}+8+\frac{40}{q}$$

Si se producen 5 mesas el coste medio de cada mesa es

$$Q(5)=\frac{5^2}{50}+8+\frac{40}{5}=0.5+8+8=16.5$$

Si se producen 20 mesas el coste medio de cada mesa es

$$Q(20)=\frac{20^2}{50}+8+\frac{40}{20}=8+8+2=18$$

b) Para determinar el mínimo derivamos la función coste medio.

$$Q(q)=\frac{q^2}{50}+8+\frac{40}{q}=\frac{1}{50}q^2+8+40q^{-1}\Rightarrow Q'(q)=\frac{1}{50}2q+0-40q^{-2}=\frac{q}{25}-\frac{40}{q^2}$$

Igualamos a cero, en busca de los puntos críticos.

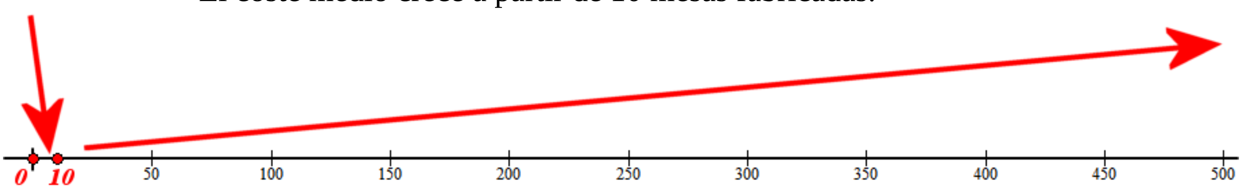
$$Q'(q)=0\Rightarrow\frac{q}{25}-\frac{40}{q^2}=0\Rightarrow\frac{q}{25}=\frac{40}{q^2}\Rightarrow q^3=1000\Rightarrow q=\sqrt[3]{1000}=10$$

Como se pueden producir de 0 a 500 mesas al mes, el punto crítico q = 10 divide el dominio en dos intervalos, veamos si la función crece o decrece en cada intervalo.

- En $(0,10)$ tomamos *q = 5* y la derivada vale $Q'(5)=\frac{5}{25}-\frac{40}{5^2}=-\frac{7}{5}<0$.

  El coste medio decrece entre 0 y 10 mesas fabricadas.
- En $(10,500)$ tomamos *q = 20* y la derivada vale $Q'(20)=\frac{20}{25}-\frac{40}{20^2}=\frac{7}{10}>0$.

  El coste medio crece a partir de 10 mesas fabricadas.



Por lo que la función coste medio tiene un mínimo en *q = 10*.

El coste medio mínimo es de $Q(10)=\frac{10^2}{50}+8+\frac{40}{10}=2+8+4=14$

3 Donades les funcions $f(x)=-x^2+5$ i $g(x)=x^2-a,$ $on\ a\in\mathbb{R}$.
a) Trobau tots els possibles valors de *a* perqué *f(x)* i *g(x)* s'intersequin. (3 punts)
b) Per a $a=3$, dibuixau el recinte tancat entre els gráfics de *f(x)* i *g(x)*, identificant els punts d'intersecció. (3 punts)
c) Per a $a=3$, calculau l'área d'aquest recinte interior. (4 punts)

a) Planteamos el sistema formado por las dos funciones en busca de sus puntos de intersección.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=-x^2+5 \\ g(x)=x^2-a \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=g(x)\Rightarrow -x^2+5=x^2-a\Rightarrow 5+a=2x^2\Rightarrow x^2=\frac{5+a}{2}$$

Para que tengan punto de intersección debe de poder terminar de despejarse en la igualdad anterior, pero eso solo es posible si $\frac{5+a}{2}\geq 0\Rightarrow 5+a\geq 0\Rightarrow a\geq -5$

Las funciones tienen punto o puntos de intersección cuando $a\geq -5$

b) Si $a=3$ las funciones son $f(x)=-x^2+5$ y $g(x)=x^2-3$.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow -x^2+5=x^2-3\Rightarrow x^2=\frac{8}{2}=4\Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2$$

Como $f(2)=-2^2+5=1$ y $f(-2)=-(-2)^2+5=1$

Se cortan en los puntos P(–2, 1) y Q(2, 1).

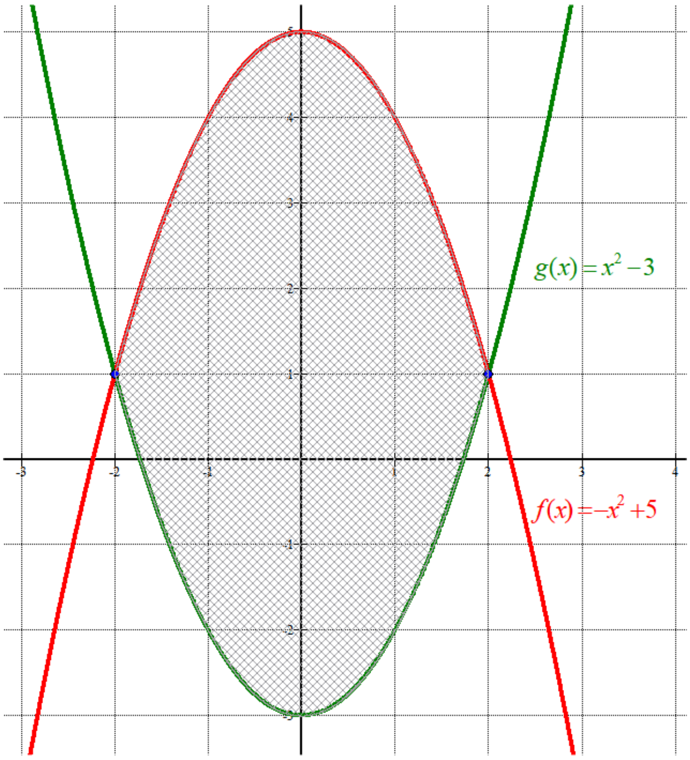
Dibujamos las dos parábolas y el recinto limitado por ellas utilizando una tabla de valores.

$f(x)=-x^2+5$

x	$y=-x^2+5$
–2	1
–1	4
0	5
1	4
2	1

$g(x)=x^2-3$

x	$y=x^2-3$
–2	1
–1	–2
0	–3
1	–2
2	1



c) Mirando el dibujo el área del recinto tiene entre 21 y 22 u². La calculamos con integrales.

$$\int_{-2}^{2}-x^2+5-\left(x^2-3\right)dx=\int_{-2}^{2}-2x^2+8dx=\left[-2\frac{x^3}{3}+8x\right]_{-2}^{2}=\left[-2\frac{2^3}{3}+16\right]-\left[-2\frac{(-2)^3}{3}-16\right]=$$

$$=-\frac{16}{3}+16-\frac{16}{3}+16=\boxed{\frac{64}{3}=21.33\,u^2}$$

4 En una mostra aleatória de 256 individus s'ha obtingut una edat mitjana de 17.4 anys. Se sap que la desviació típica de la població normal de la qual procedeix aquesta mostra és de 2 anys.
a) Obteniu un interval de confiança al 95 % per a l'edat mitjana de la població. (5 punts)
b) Quina ha de ser la mida mínima de la mostra que s'ha de prendre perqué en estimar l'edat mitjana amb un nivell de confiança del 99%, l'error comés sigui inferior a 0.5 anys? (5 punts)

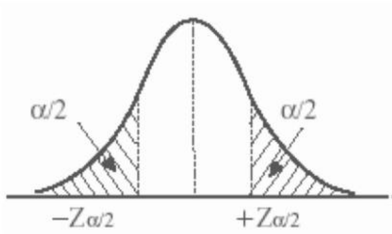
X = Edad de un individuo

X = N(μ, 2)

Una muestra de n = 256 individuos da una media muestral de $\bar{x} = 17.4$.

a) Con un nivel de confianza del 95% tenemos

$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,96}$



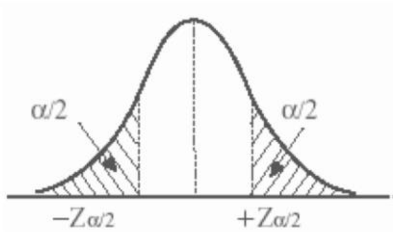
$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{256}} = 0.245$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(17.4 - 0.245, 17.4 + 0.245\right) = \left(17.155, 17.645\right)$$

b) Con un nivel de confianza del 99% tenemos

$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0'005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2,575}$



Si el error debe ser menor de 0.5 años.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} = 0.5 \Rightarrow 2.575 \cdot 2 = 0.5\sqrt{n} \Rightarrow n = \left(\frac{2.575 \cdot 2}{0.5}\right)^2 = 106.09$$

El tamaño mínimo de la muestra para que el error de la edad media sea inferior a 0.5 años con una confianza del 99% es de 107 individuos.

Model 2 **OPCIÓ B**

1 Un trajecte de 600 km s'ha de fer combinant taxi, ferrocarril i autobús. El cost del taxi és de 0.5 euros/km; el del ferrocarril, de 0.2 euros/km, i el de l'autobús, de 0.1 euros/km. El recorregut ens ha costat 150 euros, i se sap que s'han fet el doble de quilómetres amb ferrocarril que amb taxi i autobús junts. Determinau les distáncies que s'han recorregut amb cada mitjá de transport.
(10 punts)

Llamamos "x" a los kilómetros hechos en taxi, "y" a los kilómetros en ferrocarril y "z" a los kilómetros hechos en autobús.

"*El trayecto es de 600 km*" → $x+y+z=600$

"*El trayecto ha costado 150 €, a razón de 0.5 €/km el taxi, 0.2 €/km el ferrocarril y 0.1 €/km el autobús*" → $0.5x+0.2y+0.1z=150$

"*Ha hecho el doble de kms en ferrocarril que en taxi y autobús juntos*" → $y=2(x+z)$

Juntamos estas tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=600 \\ 0.5x+0.2y+0.1z=150 \\ y=2(x+z) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=600 \\ 5x+2y+z=1500 \\ y=2x+2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=600 \\ 5x+2y+z=1500 \\ -2x+y-2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rrrcl} \multicolumn{5}{l}{\text{Ecuación } 2^{\text{a}} - 5 \cdot \text{Ecuación } 1^{\text{a}}} \\ 5x & +2y & +z & = & 1500 \\ -5x & -5y & -5z & = & -3000 \\ \hline & -3y & -4z & = & -1500 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^{\text{a}} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} \multicolumn{5}{l}{\text{Ecuación } 3^{\text{a}} + 2 \cdot \text{Ecuación } 1^{\text{a}}} \\ -2x & +y & -2z & = & 0 \\ 2x & +2y & +2z & = & 1200 \\ \hline & 3y & & = & 1200 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=600 \\ -3y-4z=-1500 \\ 3y=1200 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=600 \\ -3y-4z=-1500 \\ \boxed{y=400} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+400+z=600 \\ -1200-4z=-1500 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+z=200 \\ -4z=-300 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+z=200 \\ \boxed{z=75} \end{array}\right\} \Rightarrow x+75=200 \Rightarrow \boxed{x=125}$$

El trayecto lo ha dividido en 125 kilómetros en taxi, 400 en ferrocarril y 75 en autobús.

2 Un pastisser disposa de 150 kg de farina, 22 kg de sucre i 26 kg de mantega per fer dos tipus de pastissos, A i B. Per fer una fornada de pastissos del tipus A es necessiten 3 kg de farina, 1 kg de sucre i 1 kg de mantega, mentre que per fer una fornada de pastissos del tipus B es necessiten 6 kg de farina, 0.5 kg de sucre i 1 kg de mantega. Se sap que el benefici que s'obté en vendre una fornada del tipus A és de 20 euros i, de 30 euros en vendre una fornada del tipus B.

a) Plantejau la maximització del benefici del pastisser com un problema de programació lineal. (4 punts)

b) Dibuixau la regió factible per a la solució, indicant les rectes i vértexs que la delimiten. (4 punts)

c) Determinau quantes fornades de cada tipus ha de fer i vendre el pastisser per maximitzar els seus beneficis. Determinau també aquest benefici máxim. (2 punts)

a) Llamemos "x" al número de hornadas de pasteles A, "y" al número de hornadas de pasteles B.

Nos ayudamos de una tabla para situar el problema.

	Kgs de harina	Kgs de azúcar	Kgs de manteca	Beneficio
Nº hornadas A (x)	3x	x	x	20x
Nº hornadas B (y)	6y	0.5y	y	30y
TOTALES	$3x+6y$	$x+0.5y$	$x+y$	$20x+30y$

La función objetivo que deseamos maximizar es la función beneficio $B(x,y)=20x+30y$.

Las restricciones son:

"*El pastelero solo dispone de 150 kg de harina*" → $3x+6y\leq 150$

"*El pastelero solo dispone de 22 kg de azúcar*" → $x+0.5y\leq 22$

"*El pastelero solo dispone de 26 kg de manteca*" → $x+y\leq 26$

Las cantidades de hornadas son positivas y enteras → $x\geq 0; \quad y\geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 3x+6y\leq 150 \\ x+0.5y\leq 22 \\ x+y\leq 26 \\ x\geq 0; \quad y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y\leq 50 \\ 2x+y\leq 44 \\ x+y\leq 26 \\ x\geq 0; \quad y\geq 0 \end{array}\right\}$$

b) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x+2y=50$

x	$y=\frac{50-x}{2}$
0	25
50	0

$2x+y=44$

x	$y=44-2x$
0	44
22	0

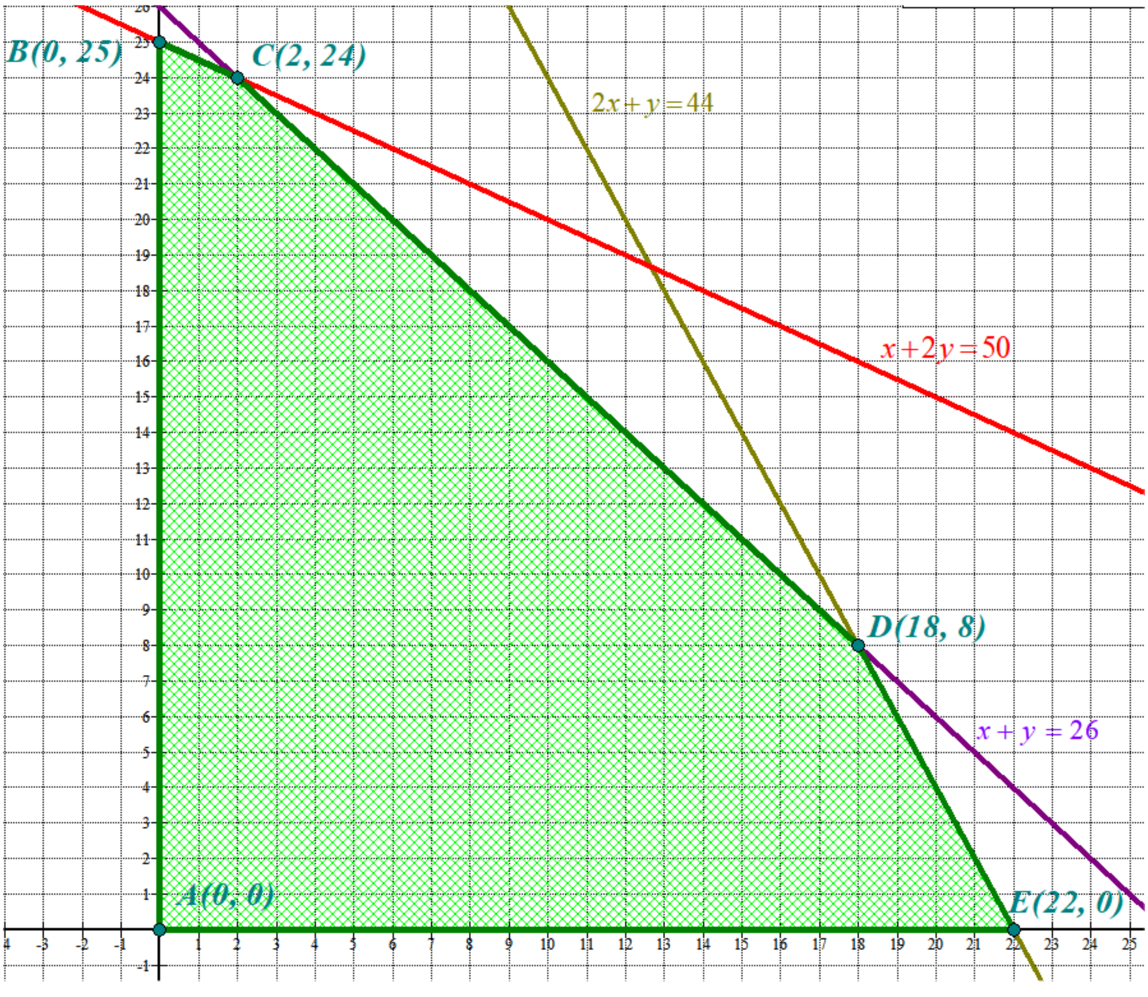
$x+y=26$

x	$y=26-x$
0	26
26	0

$\boxed{x\geq 0; \quad y\geq 0}$ El primer cuadrante

Veamos si el punto P(10, 10) cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 10+20 \leq 50 \\ 20+10 \leq 44 \\ 10+10 \leq 26 \\ 10 \geq 0; \quad 10 \geq 0 \end{array}\right\}$$ Se cumplen todas. La región factible es la zona rayada del dibujo.



c) Los vértices se obtienen resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes.

$$\left.\begin{array}{l} x+2y=50 \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=50 \Rightarrow y=25 \rightarrow \boxed{B(0,25)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+2y=50 \\ x+y=26 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y=50 \\ -x-y=-26 \end{array}\right\}$$

$$y=24 \Rightarrow x+24=26 \Rightarrow x=2 \rightarrow \boxed{C(2,24)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=26 \\ 2x+y=44 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x-y=-26 \\ 2x+y=44 \end{array}\right\}$$

$$x \quad =18 \Rightarrow 18+y=26 \Rightarrow y=8 \rightarrow \boxed{D(18,8)}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y=44 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x=44 \Rightarrow x=22 \rightarrow \boxed{E(22,0)}$$

Valoramos la función beneficio en cada vértice en busca del máximo.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$
B(0, 25) → $B(0,25)=0+750=750$ €
C(2, 24) → $B(2,24)=40+720=764$ €
D(18, 8) → $B(18,8)=360+240=600$ €
E(22, 0) → $B(22,0)=440+0=440$ €

El máximo beneficio está en el vértice C(2, 24).

Se obtiene un máximo beneficio de 764 € con 2 hornadas del pastel A y 24 del pastel B.

3 Considerem una funció *f(x)* tal que la seva primera derivada és $f'(x) = x^3 + bx + 4$, en qué *b* és un parámetre real.
a) Determinau el valor de *b* perqué *f(x)* tingui un extrem relatiu a $x = -1$ i raonau si es tracta d'un máxim o d'un mínim. (4 punts)
b) Suposant que *b = 1*, trobau una primitiva de $f'(x)$, i.e, $\int f'(x)dx$. (3 punts)
c) Utilitzau la primitiva anterior per trobar *f(x)* per *b = 1* sabent que $f(2) = -1$. (3 punts)

a) Si la función presenta un extremo relativo en $x = -1$ la derivada se anula en dicho valor.

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow (-1)^3 + b(-1) + 4 = 0 \Rightarrow -b = -3 \Rightarrow \boxed{b = 3}$$

Para *b = 3* la derivada queda $f'(x) = x^3 + 3x + 4$.

Calculamos la derivada segunda y comprobamos el signo de la misma en $x = -1$.

$$f'(x) = x^3 + 3x + 4 \Rightarrow f''(x) = 3x^2 + 3$$
$$f''(-1) = 3(-1)^2 + 3 = 6 > 0$$

La función presenta un mínimo relativo en $x = -1$

b) Si *b = 1* la derivada queda $f'(x) = x^3 + x + 4$. Calculamos la función haciendo la integral de la derivada, quedando pendiente de un parámetro, por lo que la función no es única.

$$f(x) = \int f'(x)\,\mathrm{dx} = \int x^3 + x + 4dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 4x + C$$

Una primitiva de $f'(x)$ se obtiene dándole a C el valor 0 → $\boxed{f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 4x}$

c) Si le añadimos la condición de que $f(2) = -1$ podemos determinar el valor de C.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 4x + C \\ f(2) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow -1 = f(2) = \frac{2^4}{4} + \frac{2^2}{2} + 8 + C \Rightarrow -1 = 4 + 2 + 8 + C \Rightarrow \boxed{C = -15}$$

La función es $\boxed{f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 4x - 15}$

4 Una tafona rep caixes d'olives de dues productores, A i B, que conreen dues varietats, picual i arbequina. El 40% de les olives prové de la productora A, d'aquestes el 60 % és de la varietat picual. De les que provenen de la productora B, el 30 % és de la varietat arbequina. Es tria una caixa d'olives a l'atzar.

a) Interpretau les dades proporcionades en termes de successos, probabilitats i probabilitats condicionades. (2 punts)

b) Quina és la probabilitat que sigui de la varietat picual? (4 punts)

c) Si se sap que és de la varietat picual, quina és la probabilitat que provingui de la productora A? (4 punts)

a) Llamemos A = la caja de olivas procede de la productora A

B = La caja de olivas procede de la productora B

C = La oliva es de la variedad picual

Q = La oliva es de la variedad arbequina

Las probabilidades que nos proporciona el enunciado son:

P(A) = 0.4; P(B) = 0.6

P(C/A) = 0.6; P(Q/A) = 0.4

P(Q/B) = 0.3; P(C/B) = 0.7

b) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(C) = P(A) \cdot P(C/A) + P(B) \cdot P(C/B) = 0.4 \cdot 0.6 + 0.6 \cdot 0.7 = 0.24 + 0.42 = \boxed{0.66}$$

c) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{A}/\text{C}) = \frac{P(\text{A} \cap \text{C})}{P(C)} = \frac{P(\text{A}) \cdot P(\text{C/A})}{P(C)} = \frac{0.4 \cdot 0.6}{0.66} = \frac{24}{66} = \frac{4}{11} = \boxed{0.3636}$$

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 3

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre todes les proposades en les opcions, A i B, conjuntament. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gráfica o programable, però no s'autoritzará l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1 En Bernat va quedar ahir amb uns amics en un bar i van prendre 4 cerveses, 3 panets i 5 cafés amb llet. Tot plegat els va costar 19,50 euros. Dies enrere, havia anat al mateix bar amb el seu cosí Martí, i per 2 cerveses, 1 panet i 2 cafés amb llet havien pagat 8,10 euros. En aquest bar totes les cerveses valen el mateix i tots els panets tenen el mateix preu.

a) Identificau les variables i interpretau l'enunciat com un conjunt d'equacions lineals. (2 punts)

b) Avui en Bernat hi ha tornat amb uns altres amics i han pres 2 cerveses, 2 panets i 3 cafés amb llet. Combinau les equacions de l'apartat a) per deduir quant han pagat en total. (3 punts)

c) Si 1 cervesa, 1 panet i 1 café amb llet costen 5,10 euros, quant valen la cervesa, el panet i el café amb llet separadament? (5 punts)

2 D´una funció $y = f(x)$ sabem que la seva derivada és $f\,'(x) = 2x^3 - 18x$.

a) Determinau els intervals de creixement i de decreixement de la funció $y = f(x)$. (5 punts)

b) Determinau les abscisses dels seus extrems relatius i classificau-los. (5 punts)

3 Siguin A i B dos successos tals que $p(A \cup B) = 0.8$, $p(A^c) = 0.5$, on A^c denota el succés complementari del succés A, i $P(A \cap B) = 0.3$.

a) Calculau les probabilitats p(B) i p(A/B). (5 punts)

b) Calculau les probabilitats $p(A \cap B^c)$ i $p(A^c \cup B^c)$. (4 punts)

c) Són A i B successos independents? Justficau la vostra resposta. (1 punt)

4 En una població una variable aleatòria segueix una llei normal amb desviació típica 8. S'ha elegit, a l'atzar, una mostra de mida 100 i la seva mitjana ha estat 67.

a) Calculau l'interval de confiança del 93 %, per a la mitjana de la població. (5 punts)

b) Quina ha de ser la mida mínima de la mostra que s'ha de prendre per estimar, amb un nivell de confiança del 99%, la mitjana de la població amb un error no superior a 2? (5 punts)

Model 3

OPCIÓ B

1 Donades les matrius $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

a) Calculau A^2, A^3. (2 punts)

b) Proposau una fórmula per a A^n i utilizau-la per calcular A^{14}. (4 punts)

c) Resoleu l´equació matricial $A\cdot X+\frac{1}{5}B^t\cdot B=2A$, on B^t denota la matriu transposada de B. (4 punts)

2 Un taller de joieria disposa de 150 grams de plata i de 180 hores de feina per produir dos models d'anells. Per fer un anell del model A calen 6 grams de plata i 3 hores de feina, mentre que per fer-ne un del model B calen 2 grams de plata i 6 hores de feina. Els anells dels models A i B proporcionen, respectivament, 35 i 55 euros de benefici per unitat.

a) Plantejau la maximització del benefici de la joieria com un problema de programació lineal. (4 punts)

b) Dibuixau la regió factible per a la solució, indicant les rectes i vértexs que la delimiten. (4 punts)

c) Sabent que es vendá tota la producció, determinau quants anells de cada model cal produir per obtenir el máxim benefici i indicau quin és aquest benefici. (2 punts)

3 Els beneficis setmanals d'una empresa expressats en euros, quan fabrica i ven x objectes, s'ajusten a la funció

$$B(x)=-0,75x^2+75x-1200;\ en\ que\ 20\le x\le 80\ .$$

a) Calcular el benefici que obté en fabricar i vendre 20 objectes. (2 punts)

b) Cercau el nombre d'objectes que ha de fabricar i vendre per obtenir el benefici máxim, així com aquest benefici máxim. (4 punts)

c) El benefici mitjá per x objectes és $M(x)=B(x)/x$. Digau quants objectes ha de fabricar i vendre perquè el benefici mitjá sigui máxim, i quin és aquest benefici. (4 punts)

4 En una població, el tant per cent de persones que miren un cert programa de televisió ès del 40%. Se sap que el 60% de les persones que el miren tenen estudis superiors i que el 30% de les persones que no el miren no tenen estudis superiors.

a) Interpreta les dades proporcionades en termes de successos, probabilitats i probabilitats condicionades. (2 punts)

b) Quina és la probabilitat que una persona tengui estudis superiors? (4 punts)

c) Cercau la probabilitat que una persona que tengui estudis superiors, miri el citat programa. (4 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal N(0, 1)

SOLUCIONES

OPCIÓ A

1 En Bernat va quedar ahir amb uns amics en un bar i van prendre 4 cerveses, 3 panets i 5 cafés amb llet. Tot plegat els va costar 19,50 euros. Dies enrere, havia anat al mateix bar amb el seu cosí Martí, i per 2 cerveses, 1 panet i 2 cafés amb llet havien pagat 8,10 euros. En aquest bar totes les cerveses valen el mateix i tots els panets tenen el mateix preu.
a) Identificau les variables i interpretau l'enunciat com un conjunt d'equacions lineals. (2 punts)
b) Avui en Bernat hi ha tornat amb uns altres amics i han pres 2 cerveses, 2 panets i 3 cafés amb llet. Combinau les equacions de l'apartat a) per deduir quant han pagat en total. (3 punts)
c) Si 1 cervesa, 1 panet i 1 café amb llet costen 5,10 euros, quant valen la cervesa, el panet i el café amb llet separadament? (5 punts)

a) Llamemos "x" al precio de una cerveza, "y" al precio de un panecillo y "z" al precio de un café con leche.

"*4 cerveses, 3 panets i 5 cafés amb llet. Tot plegat els va costar 19,50 euros*" → $4x+3y+5z=19,5$

"*Per 2 cerveses, 1 panet i 2 cafés amb llet havien pagat 8,10 euros*" → $2x+y+2z=8,1$

El sistema de ecuaciones quedaría:

$$\left.\begin{array}{l}4x+3y+5z=19,5\\2x+y+2z=8,1\end{array}\right\}$$

b)

"*Han pres 2 cerveses, 2 panets i 3 cafés amb llet y han pagado k euros*" → $2x+2y+3z=k$

Comprobemos si es posible determinar el valor de *k*, resolviendo el nuevo sistema que se forma juntando esta ecuación con el sistema del apartado a).

$$\left.\begin{array}{l}4x+3y+5z=19,5\\2x+y+2z=8,1\\2x+2y+3z=k\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 2ª}\\ \begin{array}{ccccl}2x & +2y & +3z & = & k\\-2x & -y & -2z & = & -8,1\\\hline & y & +z & = & k-8,1\rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª}\end{array}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 1ª} - 2\cdot\text{Ecuación 2ª}\\ \begin{array}{ccccl}4x & +3y & +5z & = & 19,5\\-4x & -2y & -4z & = & -16,2\\\hline & y & +z & = & 3,3\rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª}\end{array}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}4x+3y+5z=19,5\\y+z=3,3\\y+z=k-8,1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 2ª}\\ \begin{array}{cccl}y & +z & = & k-8,1\\-y & -z & = & -3,3\\\hline & 0 & = & k-11,4\rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª}\end{array}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}4x+3y+5z=19,5\\y+z=3,3\\0=k-11,4\end{array}\right\}$$

Al ser una situación real el problema debe tener solución y para que el sistema tenga solución la tercera ecuación debe ser cierta, por lo que $0=k-11,4\Rightarrow\boxed{k=11,4}$.

Debe pagar 11,4 euros por las 2 cervezas, los 2 panecillos y los 3 cafés con leche.

c) "*Si 1 cervesa, 1 panet i 1 café amb llet costen 5,10 euros*" → $x+y+z=5{,}1$

Añadimos esta ecuación al sistema del apartado a) y resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=5{,}1 \\ 4x+3y+5z=19{,}5 \\ 2x+y+2z=8{,}1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^{\text{a}} - 4\cdot\text{Ecuación 1}^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrl} 4x & +3y & +5z & =19{,}5 \\ -4x & -4y & -4z & =-20{,}4 \\ \hline & -y & +z & =-0{,}9 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación 2}^{\text{a}} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^{\text{a}} - 2\cdot\text{Ecuación 1}^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrl} 2x & +y & +2z & =8{,}1 \\ -2x & -2y & -2z & =-10{,}2 \\ \hline & -y & & =-2{,}1 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación 3}^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=5{,}1 \\ -y+z=-0{,}9 \\ -y=-2{,}1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=5{,}1 \\ -y+z=-0{,}9 \\ \boxed{y=2{,}1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2{,}1+z=5{,}1 \\ -2{,}1+z=-0{,}9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x+z=3 \\ \boxed{z=1{,}2} \end{array}\right\} \Rightarrow x+1{,}2=3 \Rightarrow \boxed{x=1{,}8}$$

Cada cerveza cuesta 1,8 euros, cada panecillo cuesta 2,1 y un café con leche 1,2 euros.

2 D´una funció $y = f(x)$ sabem que la seva derivada és $f'(x) = 2x^3 - 18x$.
a) Determinau els intervals de creixement i de decreixement de la funció *y = f(x)*. (5 punts)
b) Determinau les abscisses dels seus extrems relatius i classificau-los. (5 punts)

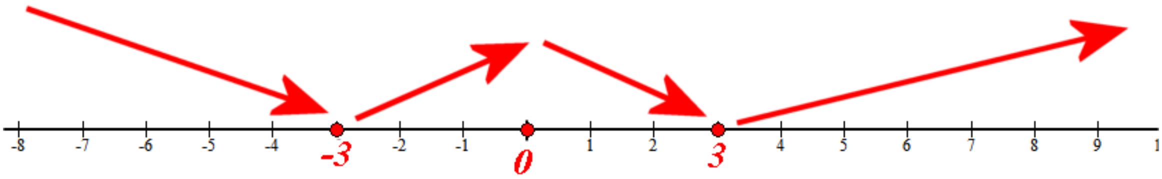
a) Igualamos a cero la derivada, en busca de sus puntos críticos.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 18x = 0 \Rightarrow 2x\left(x^2 - 9\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3 \end{cases}$$

La función tiene tres puntos críticos: $x = -3$, $x = 0$ y $x = 3$.

Estudiamos como cambia el signo de la derivada antes, entre y después de ellos.

- En $(-\infty, -3)$ tomamos $x = -4$ y la derivada vale $f'(-4) = 2(-4)^3 - 18(-4) = -56 < 0$. La función decrece en $(-\infty, -3)$.
- En $(-3, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = 2(-1)^3 - 18(-1) = 16 > 0$. La función crece en $(-3, 0)$.
- En $(0, 3)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 2 - 18 = -16 < 0$. La función decrece en $(0, 3)$.
- En $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = 2(4)^3 - 18(4) = 56 > 0$. La función crece en $(3, +\infty)$.



La función *f(x)* decrece en $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$ y crece en $(-3, 0) \cup (3, +\infty)$

b) A partir del esquema de crecimiento y decrecimiento del apartado anterior tenemos que la función *f(x)* presenta tres extremos relativos.

Tiene dos mínimos relativos: en $x = -3$ y en $x = 3$. Y tiene un máximo relativo en $x = 0$.

3 Siguin A i B dos successos tals que p(A∪B) = 0.8, p(A^c) = 0.5, on A^c denota el succés complementari del succés A, i P(A ∩ B) = 0.3.
a) Calculau les probabilitats p(B) i p(A/B). (5 punts)
b) Calculau les probabilitats p(A ∩ B^c) i p(A^c ∪ B^c). (4 punts)
c) Són A i B successos independents? Justficau la vostra resposta. (1 punt)

a)

$$P(A)=1-P\left(A^C\right)=1-0.5=0.5$$

$$\left.\begin{array}{r} P(A)=0.5 \\ P(A\cup B)=0.8 \\ P(A\cap B)=0.3 \\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \end{array}\right\} \Rightarrow 0.8=0.5+P(B)-0.3 \Rightarrow \boxed{P(B)=0.6}$$

$$p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{0.3}{0.6}=\boxed{0.5}$$

b)

$$P\left(A\cap B^C\right)=P(A)-P(A\cap B)=0.5-0.3=\boxed{0.2}$$

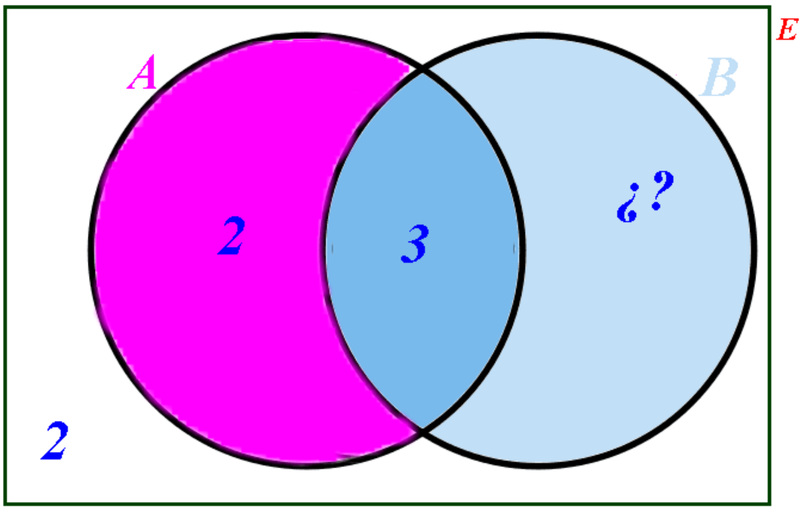
$$P\left(A^C\cup B^C\right)=P\left((A\cap B)^C\right)=1-P(A\cap B)=1-0.3=\boxed{0.7}$$

c) Para que sean independientes debe cumplirse que $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=0.3 \\ P(A)P(B)=0.5\cdot 0.6=0.3 \end{array}\right\} \text{Son iguales y por tanto son sucesos independientes.}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Establecemos que el suceso E son 10 sucesos elementales. Por lo que A∪B tendrá 8 elementos y fuera de la unión estarán los 2 restantes.
En A ∩ B habrán 3 elementos.
Como en A^c hay 5 elementos en el suceso A habrán otros 5. Repartidos 3 en la intersección con B y 2 fuera de ella.
Completamos el diagrama de Venn siguiente:



En la parte azul claro que no conocemos ($B \cap A^C$) tendremos los 3 elementos que faltan para sumar 10.

Si le damos lenguaje matemático a este diagrama, tendremos la respuesta a cada una de las preguntas del ejercicio.

a) $p(B) = \frac{3+3}{10} = 0.6$

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{3}{6} = 0.5$$

b) $P(A \cap B^C) = \frac{2}{10} = 0.2$

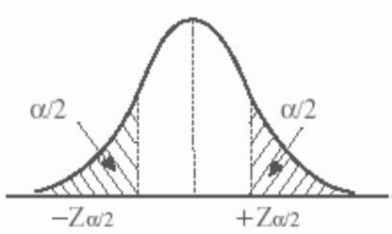
$$P(A^C \cup B^C) = P\left((A \cap B)^C\right) = \frac{10-3}{10} = 0.7$$

c) $\left.\begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.3 \\ P(A)P(B) = 0.5 \cdot 0.6 = 0.3 \end{array}\right\}$ Si son independientes.

4 En una població una variable aleatòria segueix una llei normal amb desviació típica 8. S'ha elegit, a l'atzar, una mostra de mida 100 i la seva mitjana ha estat 67.
a) Calculau l'interval de confiança del 93 %, per a la mitjana de la població. (5 punts)
b) Quina ha de ser la mida mínima de la mostra que s'ha de prendre per estimar, amb un nivell de confiança del 99%, la mitjana de la població amb un error no superior a 2? (5 punts)

a) X = N(**μ**, 8)
n = 100 $\bar{x} = 67$

Con un nivel de confianza del 93%
$1 - \alpha = 0{,}93 \rightarrow \alpha = 0{,}07 \rightarrow \alpha/2 = 0'035 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}965 \rightarrow z_{\alpha/2}$ **= 1,81**



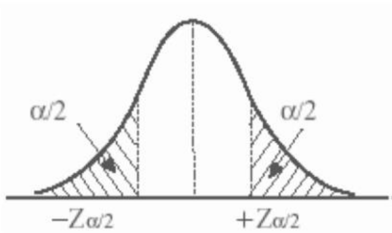
$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.81 \cdot \frac{8}{\sqrt{100}} = 1.448$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(67 - 1.448, 67 + 1.448\right) = \left(65.552, 68.448\right)$$

a)
X = N(**μ**, 8)

Con un nivel de confianza del 99%
$1 - \alpha = 0{,}99 \rightarrow \alpha = 0{,}01 \rightarrow \alpha/2 = 0'005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}995 \rightarrow z_{\alpha/2}$ **= 2,575**



Queremos encontrar un tamaño mínimo de la muestra para que el error sea menor de 2.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{8}{\sqrt{n}} = 2 \Rightarrow \frac{2.575 \cdot 8}{2} = \sqrt{n} \Rightarrow n = \left(10.3\right)^2 = 106.09$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 107 elementos.

Model 3

OPCIÓ B

1 Donades les matrius $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

a) Calculau A^2, A^3. (2 punts)

b) Proposau una fórmula per a A^n i utilizau-la per calcular A^{14}. (4 punts)

c) Resoleu l´equació matricial $A\cdot X+\frac{1}{5}B^t\cdot B=2A$, on B^t denota la matriu transposada de B.

(4 punts)

a) $A=A^1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0 & 0+0\\ 1+1 & 0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0 & 0+0\\ 2+1 & 0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

b) $A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ n & 1\end{pmatrix}\rightarrow A^{14}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 14 & 1\end{pmatrix}$

c) $A\cdot X+\frac{1}{5}B^t\cdot B=2A$

$$A\cdot X=2A-\frac{1}{5}B^t\cdot B\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=2A^{-1}\cdot A-\frac{1}{5}A^{-1}\cdot B^t\cdot B\Rightarrow X=2I_2-\frac{1}{5}A^{-1}\cdot B^t\cdot B$$

Hemos supuesto que la matriz A tiene inversa, lo comprobamos y la calculamos para terminar de obtener la matriz X.

$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$. La matriz A tiene inversa.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Sustituimos en la expresión obtenida anteriormente:

$$X=2I_2-\frac{1}{5}A^{-1}\cdot B^t\cdot B\Rightarrow X=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1+0 & 2+0\\ -1+0 & -2+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1+4 & 0+2\\ -1-2 & 0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 2\\ -3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2/5\\ -3/5 & -1/5\end{pmatrix}$$

$$X=\boxed{\begin{pmatrix}1 & -2/5\\ 3/5 & 11/5\end{pmatrix}}$$

2 Un taller de joieria disposa de 150 grams de plata i de 180 hores de feina per produir dos models d'anells. Per fer un anell del model A calen 6 grams de plata i 3 hores de feina, mentre que per fer-ne un del model B calen 2 grams de plata i 6 hores de feina. Els anells dels models A i B proporcionen, respectivament, 35 i 55 euros de benefici per unitat.
a) Plantejau la maximització del benefici de la joieria com un problema de programació lineal. (4 punts)
b) Dibuixau la regió factible per a la solució, indicant les rectes i vértexs que la delimiten. (4 punts)
c) Sabent que es vendá tota la producció, determinau quants anells de cada model cal produir per obtenir el máxim benefici i indicau quin és aquest benefici. (2 punts)

Llamamos "x" al número de anillos modelo A e "y" al número de anillos modelo B.
Hacemos una tabla con los datos del problema.

	Gramos de plata	Horas de trabajo	Beneficio
Nº anillos modelo A (x)	6x	3x	35x
Nº anillos modelo B (y)	2y	6y	55y
TOTAL	$6x+2y$	$3x+6y$	$35x+55y$

a) La función objetivo es el beneficio $B(x,y)=35x+55y$, que deseamos maximizarlo.

Las restricciones son:

"*Disponemos de 150 gramos de plata*" → $6x+2y\le 150$

"*Disponemos de 180 horas de trabajo*" → $3x+6y\le 180$

El número de anillos debe ser positivo → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r}6x+2y\le 150\\3x+6y\le 180\\x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}3x+y\le 75\\x+2y\le 60\\x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}$$

b) Empezamos dibujando las rectas asociadas a las inecuaciones del sistema.

$3x+y=75$

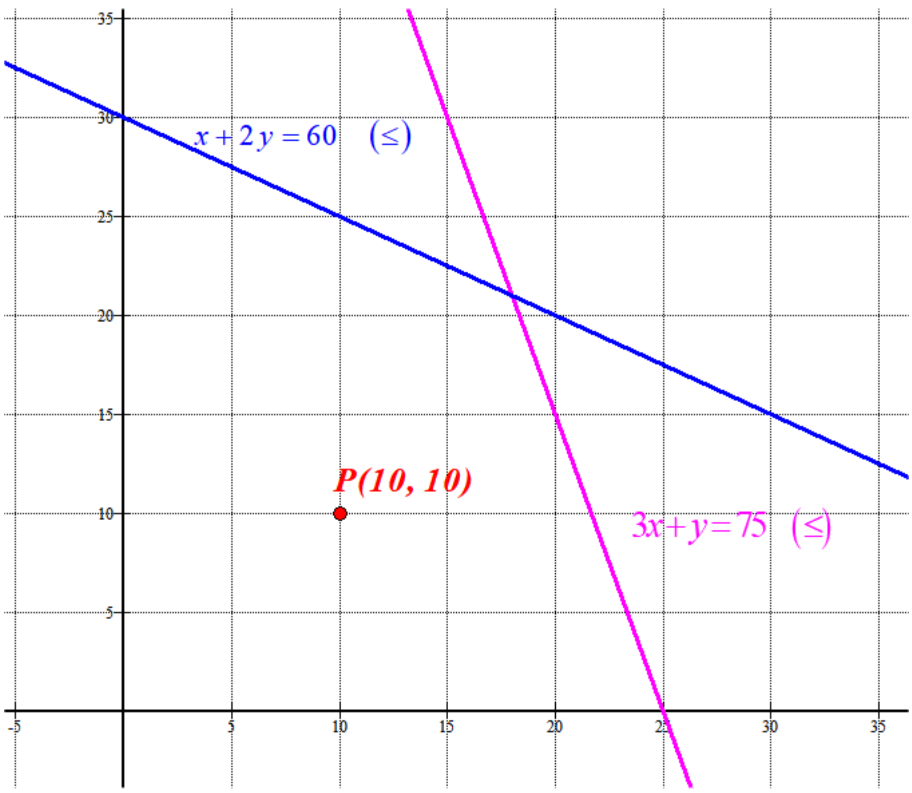
x	$y=75-3x$
0	75
25	0

$x+2y=60$

x	$y=\frac{60-x}{2}$
0	30
60	0

$x\ge 0;\ y\ge 0$

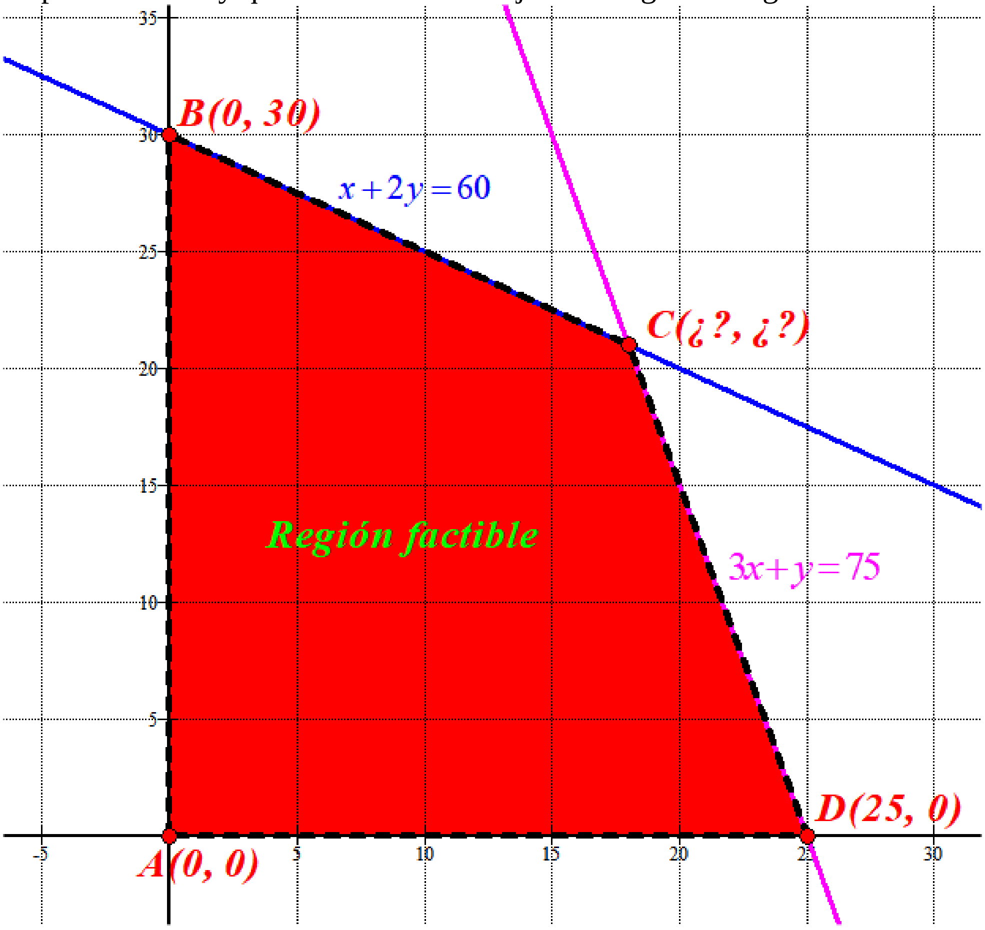
Primer cuadrante



Compruebo si el punto P(10, 10) cumple las restricciones

$$\left.\begin{array}{l} 30+10\le 75 \\ 10+20\le 60 \\ 10\ge 0; 10\ge 0 \end{array}\right\} \text{Se cumplen todas}$$

La región factible es la región del primer cuadrante a la que pertenece el punto P(10, 10) y delimitada por las rectas y que coloreamos de rojo en la siguiente figura.



Nos falta determinar las coordenadas del vértice C que podemos obtener resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+y=75 \\ x+2y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+y=75 \\ x=60-2y \end{array}\right\} \Rightarrow 3(60-2y)+y=75 \Rightarrow 180-6y+y=75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5y=-105 \Rightarrow \boxed{y=\frac{-105}{-5}=21} \Rightarrow \boxed{x=60-42=18} \Rightarrow \boxed{C(18,21)}$$

Valoramos la función $B(x,y)=35x+55y$ en cada uno de los vértices.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(0, 30) → $B(0,30)=1650$

C(18, 21) → $B(18,21)=1785$

D(25, 0) → $B(25,0)=875$

El beneficio máximo se obtiene en el vértice C(18, 21).

El beneficio máximo es de 1785 € y se obtiene fabricando 18 anillos modelo A y 21 anillos modelo B.

3 Els beneficis setmanals d'una empresa expressats en euros, quan fabrica i ven x objectes, s'ajusten a la funció

$$B(x) = -0,75x^2 + 75x - 1200; \text{ } en \text{ } que \text{ } 20 \le x \le 80 \text{ }.$$

a) Calcular el benefici que obté en fabricar i vendre 20 objectes. (2 punts)
b) Cercau el nombre d'objectes que ha de fabricar i vendre per obtenir el benefici máxim, així com aquest benefici máxim. (4 punts)
c) El benefici mitjá per x objectes és $M(x) = B(x)/x$. Digau quants objectes ha de fabricar i vendre perquè el benefici mitjá sigui máxim, i quin és aquest benefici. (4 punts)

a) $B(20) = -0,75 \cdot 20^2 + 75 \cdot 20 - 1200 = 0$. El beneficio es de 0 €.

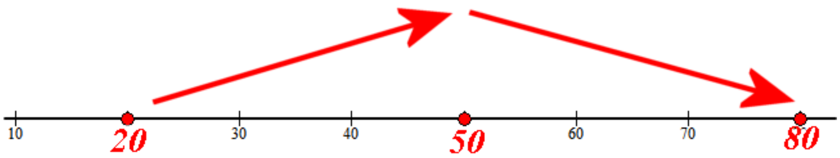
b) Utilizamos la derivada para obtener el número de objetos que da un beneficio máximo.

$$B(x) = -0,75x^2 + 75x - 1200 \Rightarrow B'(x) = -1,5x + 75$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -1,5x + 75 = 0 \Rightarrow x = \frac{75}{1,5} = 50$$

El valor crítico es *x = 50*. Veamos cómo evoluciona la función antes y después de este valor.

- En $[20,50)$ tomamos *x = 30* y la derivada vale $B'(30) = 30 > 0$. La función crece en $[20,50)$.
- En $(50,80]$ tomamos *x = 60* y la derivada vale $B'(60) = -15 < 0$. La función decrece en $(50,80]$.



Con la fabricación y venta de 50 objetos se produce un máximo relativo de la función beneficio de $B(50) = -0,75 \cdot 50^2 + 75 \cdot 50 - 1200 = 675$ €.

c) $M(x) = B(x)/x = \dfrac{-0,75x^2 + 75x - 1200}{x} = -0,75x + 75 - \dfrac{1200}{x}$

$$M'(x) = -0,75 + \frac{1200}{x^2}$$

$$M'(x) = 0 \Rightarrow -0,75 + \frac{1200}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{1200}{x^2} = 0,75 \Rightarrow x^2 = \frac{1200}{0,75} = 1600 \Rightarrow x = \sqrt{1600} = 40$$

En *x = 40* hay un punto crítico, sustituimos en la derivada segunda y vemos si es un máximo o mínimo de la función *M(x)*.

$$M'(x) = -0,75 + \frac{1200}{x^2} = -0,75 + 1200x^{-2} \Rightarrow M''(x) = -2400x^{-3} = \frac{-2400}{x^3}$$

$$M''(40) = \frac{-2400}{40^3} < 0$$

La función *M(x)* tiene un máximo relativo en *x = 40*. Este valor máximo es de

$$M(40) = B(40)/40 = -0,75 \cdot 40 + 75 - \frac{1200}{40} = 15 \text{ €}$$

Fabricando y vendiendo 40 objetos se obtiene un beneficio medio máximo de 15 € / objeto.

4 En una població, el tant per cent de persones que miren un cert programa de televisió ès del 40%. Se sap que el 60% de les persones que el miren tenen estudis superiors i que el 30% de les persones que no el miren no tenen estudis superiors.
a) Interpreta les dades proporcionades en termes de successos, probabilitats i probabilitats condicionades. (2 punts)
b) Quina és la probabilitat que una persona tengui estudis superiors? (4 punts)
c) Cercau la probabilitat que una persona que tengui estudis superiors, miri el citat programa. (4 punts)

a) Demos nombre a los sucesos que aparecen en este experimento aleatorio.
A = Una persona de cierta población mira cierto programa de televisión.
A^C = Una persona de cierta población NO mira cierto programa de televisión.

B = Una persona de cierta población tiene estudios superiores.
B^C = Una persona de cierta población NO tiene estudios superiores.

B / A = Una persona de las que miran el programa tiene estudios superiores.
B^C / A^C = Una persona de las que no miran no tiene estudios superiores.

Las probabilidades proporcionadas se expresan de la siguiente manera:

"*El tant per cent de persones que miren un cert programa de televisió ès del 40%*" → $P(A) = 0.4$.

"*El 60% de les persones que el miren tenen estudis superiors*" → $P(B/A) = 0.6$.

"*El 30% de les persones que no el miren no tenen estudis superiors*" → $P\left(B^C / A^C\right) = 0.3$.

b)

$$P(B) = P(A \cap B) + P\left(A^C \cap B\right) = P(A)P(B/A) + P\left(A^C\right)P\left(B/A^C\right) =$$

$$= P(A)P(B/A) + (1 - P(A))\left(1 - P\left(B^C / A^C\right)\right) =$$

$$= 0.4 \cdot 0.6 + (1 - 0.4)(1 - 0.3) = 0.24 + 0.42 = \boxed{0.66}$$

c) $$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B/A)}{P(B)} = \frac{0.4 \cdot 0.6}{0.66} = \boxed{\frac{4}{11} = 0.364}$$

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 3

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre todes les proposades en les opcions, A i B, conjuntament. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gráfica o programable, però no s'autoritzará l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1 En Bernat va quedar ahir amb uns amics en un bar i van prendre 4 cerveses, 3 panets i 5 cafés amb llet. Tot plegat els va costar 19,50 euros. Dies enrere, havia anat al mateix bar amb el seu cosí Martí, i per 2 cerveses, 1 panet i 2 cafés amb llet havien pagat 8,10 euros. En aquest bar totes les cerveses valen el mateix i tots els panets tenen el mateix preu.

a) Identificau les variables i interpretau l'enunciat com un conjunt d'equacions lineals. (2 punts)

b) Avui en Bernat hi ha tornat amb uns altres amics i han pres 2 cerveses, 2 panets i 3 cafés amb llet. Combinau les equacions de l'apartat a) per deduir quant han pagat en total. (3 punts)

c) Si 1 cervesa, 1 panet i 1 café amb llet costen 5,10 euros, quant valen la cervesa, el panet i el café amb llet separadament? (5 punts)

2 D´una funció $y = f(x)$ sabem que la seva derivada és $f'(x) = 2x^3 - 18x$.

a) Determinau els intervals de creixement i de decreixement de la funció $y = f(x)$. (5 punts)

b) Determinau les abscisses dels seus extrems relatius i classificau-los. (5 punts)

3 Siguin A i B dos successos tals que $p(A \cup B) = 0.8$, $p(A^c) = 0.5$, on A^c denota el succés complementari del succés A, i $P(A \cap B) = 0.3$.

a) Calculau les probabilitats p(B) i p(A/B). (5 punts)

b) Calculau les probabilitats $p(A \cap B^c)$ i $p(A^c \cup B^c)$. (4 punts)

c) Són A i B successos independents? Justficau la vostra resposta. (1 punt)

4 En una població una variable aleatòria segueix una llei normal amb desviació típica 8. S'ha elegit, a l'atzar, una mostra de mida 100 i la seva mitjana ha estat 67.

a) Calculau l'interval de confiança del 93 %, per a la mitjana de la població. (5 punts)

b) Quina ha de ser la mida mínima de la mostra que s'ha de prendre per estimar, amb un nivell de confiança del 99%, la mitjana de la població amb un error no superior a 2? (5 punts)

Model 3

OPCIÓ B

1 Donades les matrius $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

a) Calculau A^2, A^3. (2 punts)
b) Proposau una fórmula per a A^n i utilizau-la per calcular A^{14}. (4 punts)
c) Resoleu l´equació matricial $A\cdot X+\frac{1}{5}B^t\cdot B=2A$, on B^t denota la matriu transposada de B. (4 punts)

2 Un taller de joieria disposa de 150 grams de plata i de 180 hores de feina per produir dos models d'anells. Per fer un anell del model A calen 6 grams de plata i 3 hores de feina, mentre que per fer-ne un del model B calen 2 grams de plata i 6 hores de feina. Els anells dels models A i B proporcionen, respectivament, 35 i 55 euros de benefici per unitat.

a) Plantejau la maximització del benefici de la joieria com un problema de programació lineal. (4 punts)
b) Dibuixau la regió factible per a la solució, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten. (4 punts)
c) Sabent que es vendá tota la producció, determinau quants anells de cada model cal produir per obtenir el máxim benefici i indicau quin és aquest benefici. (2 punts)

3 Els beneficis setmanals d'una empresa expressats en euros, quan fabrica i ven x objectes, s'ajusten a la funció

$$B(x)=-0,75x^2+75x-1200;\ \textit{en que}\ 20\le x\le 80\ .$$

a) Calcular el benefici que obté en fabricar i vendre 20 objectes. (2 punts)
b) Cercau el nombre d'objectes que ha de fabricar i vendre per obtenir el benefici màxim, així com aquest benefici máxim. (4 punts)
c) El benefici mitjá per x objectes és $M(x)=B(x)/x$. Digau quants objectes ha de fabricar i vendre perquè el benefici mitjá sigui máxim, i quin és aquest benefici. (4 punts)

4 En una població, el tant per cent de persones que miren un cert programa de televisió ès del 40%. Se sap que el 60% de les persones que el miren tenen estudis superiors i que el 30% de les persones que no el miren no tenen estudis superiors.

a) Interpreta les dades proporcionades en termes de successos, probabilitats i probabilitats condicionades. (2 punts)
b) Quina és la probabilitat que una persona tengui estudis superiors? (4 punts)
c) Cercau la probabilitat que una persona que tengui estudis superiors, miri el citat programa. (4 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal N(0, 1)

SOLUCIONES

OPCIÓ A

1 En Bernat va quedar ahir amb uns amics en un bar i van prendre 4 cerveses, 3 panets i 5 cafés amb llet. Tot plegat els va costar 19,50 euros. Dies enrere, havia anat al mateix bar amb el seu cosí Martí, i per 2 cerveses, 1 panet i 2 cafés amb llet havien pagat 8,10 euros. En aquest bar totes les cerveses valen el mateix i tots els panets tenen el mateix preu.
a) Identificau les variables i interpretau l'enunciat com un conjunt d'equacions lineals. (2 punts)
b) Avui en Bernat hi ha tornat amb uns altres amics i han pres 2 cerveses, 2 panets i 3 cafés amb llet. Combinau les equacions de l'apartat a) per deduir quant han pagat en total. (3 punts)
c) Si 1 cervesa, 1 panet i 1 café amb llet costen 5,10 euros, quant valen la cervesa, el panet i el café amb llet separadament? (5 punts)

a) Llamemos “x” al precio de una cerveza, “y” al precio de un panecillo y “z” al precio de un café con leche.

“*4 cerveses, 3 panets i 5 cafés amb llet. Tot plegat els va costar 19,50 euros*” → $4x+3y+5z=19,5$

“*Per 2 cerveses, 1 panet i 2 cafés amb llet havien pagat 8,10 euros*” → $2x+y+2z=8,1$

El sistema de ecuaciones quedaría:

$$\left.\begin{array}{l} 4x+3y+5z=19,5 \\ 2x+y+2z=8,1 \end{array}\right\}$$

b)

“*Han pres 2 cerveses, 2 panets i 3 cafés amb llet y han pagado k euros*” → $2x+2y+3z=k$

Comprobemos si es posible determinar el valor de *k*, resolviendo el nuevo sistema que se forma juntando esta ecuación con el sistema del apartado a).

$$\left.\begin{array}{l} 4x+3y+5z=19,5 \\ 2x+y+2z=8,1 \\ 2x+2y+3z=k \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{rrrl} 2x & +2y & +3z & =k \\ -2x & -y & -2z & =-8,1 \\ \hline & y & +z & =k-8,1 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 1ª} - 2\cdot\text{Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{rrrl} 4x & +3y & +5z & =19,5 \\ -4x & -2y & -4z & =-16,2 \\ \hline & y & +z & =3,3 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x+3y+5z=19,5 \\ y+z=3,3 \\ y+z=k-8,1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{rrrl} y & +z & = & k-8,1 \\ -y & -z & = & -3,3 \\ \hline & 0 & = & k-11,4 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x+3y+5z=19,5 \\ y+z=3,3 \\ 0=k-11,4 \end{array}\right\}$$

Al ser una situación real el problema debe tener solución y para que el sistema tenga solución la tercera ecuación debe ser cierta, por lo que $0=k-11,4 \Rightarrow \boxed{k=11,4}$.

Debe pagar 11,4 euros por las 2 cervezas, los 2 panecillos y los 3 cafés con leche.

c) "*Si 1 cervesa, 1 panet i 1 café amb llet costen 5,10 euros*" → $x+y+z=5{,}1$

Añadimos esta ecuación al sistema del apartado a) y resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=5{,}1 \\ 4x+3y+5z=19{,}5 \\ 2x+y+2z=8{,}1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} - 4\cdot\text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrl} 4x & +3y & +5z & =19{,}5 \\ -4x & -4y & -4z & =-20{,}4 \\ \hline & -y & +z & =-0{,}9 \end{array} \to \text{Nueva ecuación } 2^{\text{a}} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} - 2\cdot\text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrl} 2x & +y & +2z & =8{,}1 \\ -2x & -2y & -2z & =-10{,}2 \\ \hline & -y & & =-2{,}1 \end{array} \to \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=5{,}1 \\ -y+z=-0{,}9 \\ -y=-2{,}1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=5{,}1 \\ -y+z=-0{,}9 \\ \boxed{y=2{,}1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2{,}1+z=5{,}1 \\ -2{,}1+z=-0{,}9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+z=3 \\ \boxed{z=1{,}2} \end{array}\right\} \Rightarrow x+1{,}2=3 \Rightarrow \boxed{x=1{,}8}$$

Cada cerveza cuesta 1,8 euros, cada panecillo cuesta 2,1 y un café con leche 1,2 euros.

2 D´una funció $y = f(x)$ sabem que la seva derivada és $f'(x) = 2x^3 - 18x$.
a) Determinau els intervals de creixement i de decreixement de la funció *y = f(x)*. (5 punts)
b) Determinau les abscisses dels seus extrems relatius i classificau-los. (5 punts)

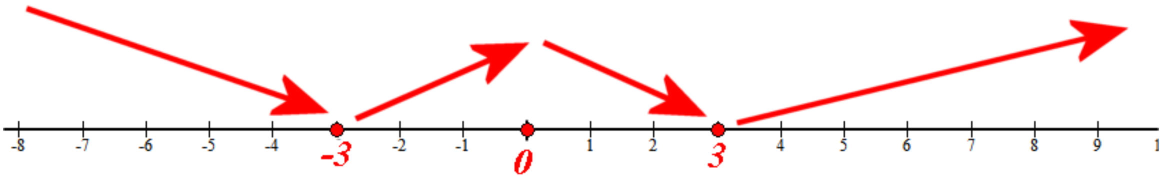
a) Igualamos a cero la derivada, en busca de sus puntos críticos.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 18x = 0 \Rightarrow 2x\left(x^2 - 9\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3 \end{cases}$$

La función tiene tres puntos críticos: $x = -3$, $x = 0$ y $x = 3$.

Estudiamos como cambia el signo de la derivada antes, entre y después de ellos.

- En $(-\infty, -3)$ tomamos $x = -4$ y la derivada vale $f'(-4) = 2(-4)^3 - 18(-4) = -56 < 0$. La función decrece en $(-\infty, -3)$.
- En $(-3, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = 2(-1)^3 - 18(-1) = 16 > 0$. La función crece en $(-3, 0)$.
- En $(0, 3)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 2 - 18 = -16 < 0$. La función decrece en $(0, 3)$.
- En $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = 2(4)^3 - 18(4) = 56 > 0$. La función crece en $(3, +\infty)$.



La función *f(x)* decrece en $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$ y crece en $(-3, 0) \cup (3, +\infty)$

b) A partir del esquema de crecimiento y decrecimiento del apartado anterior tenemos que la función *f(x)* presenta tres extremos relativos.

Tiene dos mínimos relativos: en $x = -3$ y en $x = 3$. Y tiene un máximo relativo en $x = 0$.

3 Siguin A i B dos successos tals que p(A∪B) = 0.8, p(A^c) = 0.5, on A^c denota el succés complementari del succés A, i P(A ∩ B) = 0.3.
a) Calculau les probabilitats p(B) i p(A/B). (5 punts)
b) Calculau les probabilitats p(A ∩ B^c) i p(A^c ∪ B^c). (4 punts)
c) Són A i B successos independents? Justficau la vostra resposta. (1 punt)

a)

$$P(A)=1-P(A^C)=1-0.5=0.5$$

$$\left.\begin{array}{r} P(A)=0.5 \\ P(A\cup B)=0.8 \\ P(A\cap B)=0.3 \\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \end{array}\right\} \Rightarrow 0.8=0.5+P(B)-0.3 \Rightarrow \boxed{P(B)=0.6}$$

$$p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{0.3}{0.6}=\boxed{0.5}$$

b)

$$P(A\cap B^C)=P(A)-P(A\cap B)=0.5-0.3=\boxed{0.2}$$

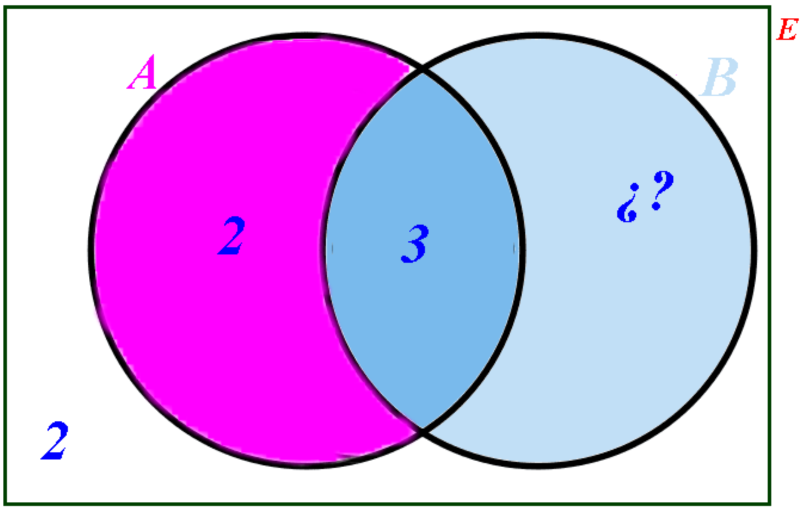
$$P(A^C\cup B^C)=P\left((A\cap B)^C\right)=1-P(A\cap B)=1-0.3=\boxed{0.7}$$

c) Para que sean independientes debe cumplirse que $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=0.3 \\ P(A)P(B)=0.5\cdot 0.6=0.3 \end{array}\right\} \text{Son iguales y por tanto son sucesos independientes.}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Establecemos que el suceso E son 10 sucesos elementales. Por lo que A∪B tendrá 8 elementos y fuera de la unión estarán los 2 restantes.
En A ∩ B habrán 3 elementos.
Como en A^c hay 5 elementos en el suceso A habrán otros 5. Repartidos 3 en la intersección con B y 2 fuera de ella.
Completamos el diagrama de Venn siguiente:



En la parte azul claro que no conocemos ($B \cap A^C$) tendremos los 3 elementos que faltan para sumar 10.
Si le damos lenguaje matemático a este diagrama, tendremos la respuesta a cada una de las preguntas del ejercicio.

a) $p(B) = \frac{3+3}{10} = 0.6$

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{3}{6} = 0.5$$

b) $P(A \cap B^C) = \frac{2}{10} = 0.2$

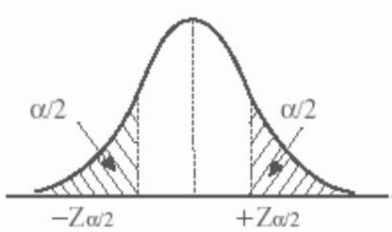
$$P(A^C \cup B^C) = P\left((A \cap B)^C\right) = \frac{10-3}{10} = 0.7$$

c) $\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.3 \\ P(A)P(B) = 0.5 \cdot 0.6 = 0.3 \end{array} \right\}$ Si son independientes.

4 En una població una variable aleatòria segueix una llei normal amb desviació típica 8. S'ha elegit, a l'atzar, una mostra de mida 100 i la seva mitjana ha estat 67.
a) Calculau l'interval de confiança del 93 %, per a la mitjana de la població. (5 punts)
b) Quina ha de ser la mida mínima de la mostra que s'ha de prendre per estimar, amb un nivell de confiança del 99%, la mitjana de la població amb un error no superior a 2? (5 punts)

a) X = N(**μ**, 8)
n = 100 $\bar{x} = 67$

Con un nivel de confianza del 93%
$1 - \alpha = 0{,}93 \rightarrow \alpha = 0{,}07 \rightarrow \alpha/2 = 0'035 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}965 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}81}$



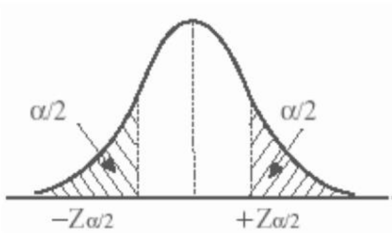
$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.81 \cdot \frac{8}{\sqrt{100}} = 1.448$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(67 - 1.448, 67 + 1.448\right) = \left(65.552, 68.448\right)$$

a)
X = N(**μ**, 8)

Con un nivel de confianza del 99%
$1 - \alpha = 0{,}99 \rightarrow \alpha = 0{,}01 \rightarrow \alpha/2 = 0'005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}575}$



Queremos encontrar un tamaño mínimo de la muestra para que el error sea menor de 2.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{8}{\sqrt{n}} = 2 \Rightarrow \frac{2.575 \cdot 8}{2} = \sqrt{n} \Rightarrow n = \left(10.3\right)^2 = 106.09$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 107 elementos.

Model 3

OPCIÓ B

1 Donades les matrius $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

a) Calculau A^2, A^3. (2 punts)

b) Proposau una fórmula per a A^n i utilizau-la per calcular A^{14}. (4 punts)

c) Resoleu l´equació matricial $A\cdot X+\frac{1}{5}B^t\cdot B=2A$, on B^t denota la matriu transposada de B.

(4 punts)

a) $A=A^1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0 & 0+0\\ 1+1 & 0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0 & 0+0\\ 2+1 & 0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

b) $A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ n & 1\end{pmatrix}\rightarrow A^{14}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 14 & 1\end{pmatrix}$

c) $A\cdot X+\frac{1}{5}B^t\cdot B=2A$

$$A\cdot X=2A-\frac{1}{5}B^t\cdot B\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=2A^{-1}\cdot A-\frac{1}{5}A^{-1}\cdot B^t\cdot B\Rightarrow X=2I_2-\frac{1}{5}A^{-1}\cdot B^t\cdot B$$

Hemos supuesto que la matriz A tiene inversa, lo comprobamos y la calculamos para terminar de obtener la matriz X.

$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$. La matriz A tiene inversa.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Sustituimos en la expresión obtenida anteriormente:

$$X=2I_2-\frac{1}{5}A^{-1}\cdot B^t\cdot B\Rightarrow X=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1+0 & 2+0\\ -1+0 & -2+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1+4 & 0+2\\ -1-2 & 0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 2\\ -3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2/5\\ -3/5 & -1/5\end{pmatrix}$$

$$X=\boxed{\begin{pmatrix}1 & -2/5\\ 3/5 & 11/5\end{pmatrix}}$$

2 Un taller de joieria disposa de 150 grams de plata i de 180 hores de feina per produir dos models d'anells. Per fer un anell del model A calen 6 grams de plata i 3 hores de feina, mentre que per fer-ne un del model B calen 2 grams de plata i 6 hores de feina. Els anells dels models A i B proporcionen, respectivament, 35 i 55 euros de benefici per unitat.
a) Plantejau la maximització del benefici de la joieria com un problema de programació lineal. (4 punts)
b) Dibuixau la regió factible per a la solució, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten. (4 punts)
c) Sabent que es vendá tota la producció, determinau quants anells de cada model cal produir per obtenir el máxim benefici i indicau quin és aquest benefici. (2 punts)

Llamamos "x" al número de anillos modelo A e "y" al número de anillos modelo B.
Hacemos una tabla con los datos del problema.

	Gramos de plata	Horas de trabajo	Beneficio
Nº anillos modelo A (x)	6x	3x	35x
Nº anillos modelo B (y)	2y	6y	55y
TOTAL	$6x+2y$	$3x+6y$	$35x+55y$

a) La función objetivo es el beneficio $B(x,y)=35x+55y$, que deseamos maximizarlo.

Las restricciones son:

"*Disponemos de 150 gramos de plata*" → $6x+2y\leq 150$

"*Disponemos de 180 horas de trabajo*" → $3x+6y\leq 180$

El número de anillos debe ser positivo → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 6x+2y\leq 150 \\ 3x+6y\leq 180 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+y\leq 75 \\ x+2y\leq 60 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

b) Empezamos dibujando las rectas asociadas a las inecuaciones del sistema.

$3x+y=75$

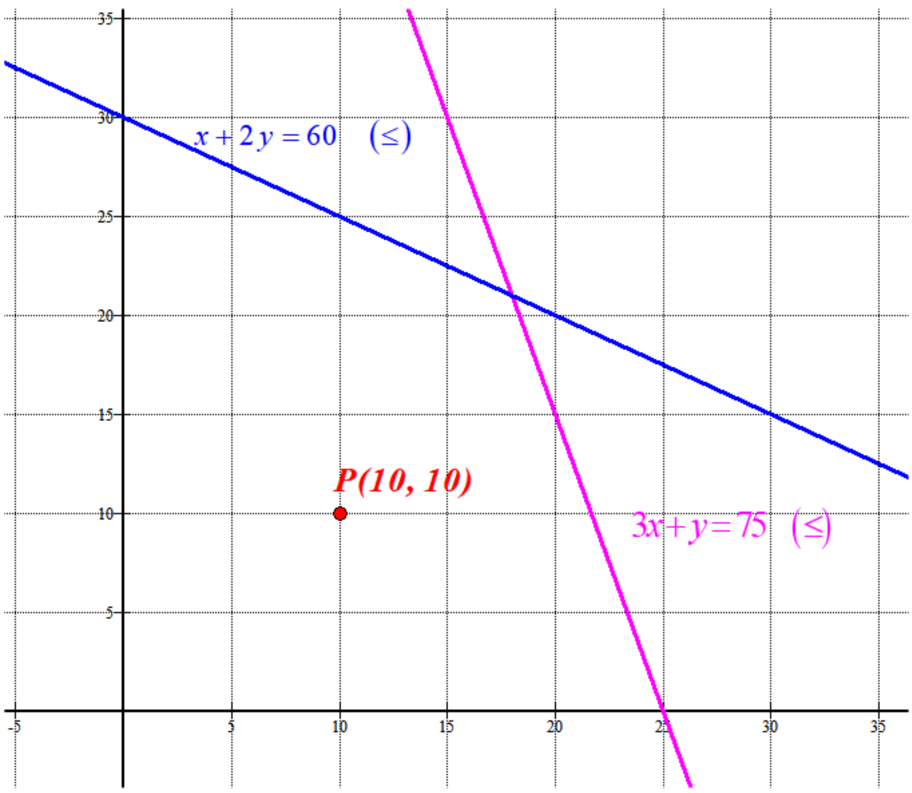
x	$y=75-3x$
0	75
25	0

$x+2y=60$

x	$y=\dfrac{60-x}{2}$
0	30
60	0

$x\geq 0;\ y\geq 0$

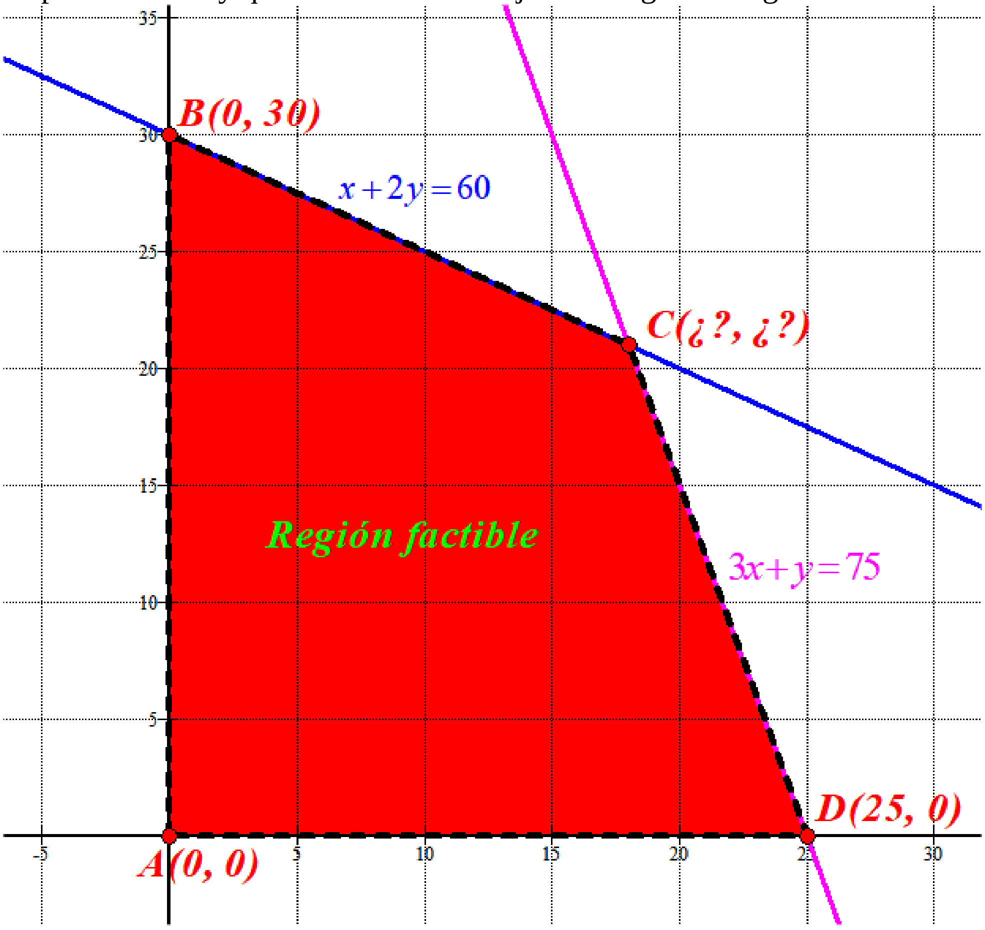
Primer cuadrante



Compruebo si el punto P(10, 10) cumple las restricciones

$$\left.\begin{array}{l} 30+10 \leq 75 \\ 10+20 \leq 60 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array}\right\} \text{Se cumplen todas}$$

La región factible es la región del primer cuadrante a la que pertenece el punto P(10, 10) y delimitada por las rectas y que coloreamos de rojo en la siguiente figura.



Nos falta determinar las coordenadas del vértice C que podemos obtener resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+y=75 \\ x+2y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+y=75 \\ x=60-2y \end{array}\right\} \Rightarrow 3(60-2y)+y=75 \Rightarrow 180-6y+y=75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5y=-105 \Rightarrow \boxed{y=\frac{-105}{-5}=21} \Rightarrow \boxed{x=60-42=18} \Rightarrow \boxed{C(18,21)}$$

Valoramos la función $B(x,y)=35x+55y$ en cada uno de los vértices.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(0, 30) → $B(0,30)=1650$

C(18, 21) → $B(18,21)=1785$

D(25, 0) → $B(25,0)=875$

El beneficio máximo se obtiene en el vértice C(18, 21).

El beneficio máximo es de 1785 € y se obtiene fabricando 18 anillos modelo A y 21 anillos modelo B.

3 Els beneficis setmanals d'una empresa expressats en euros, quan fabrica i ven x objectes, s'ajusten a la funció

$$B(x) = -0,75x^2 + 75x - 1200; \text{ en que } 20 \le x \le 80 .$$

a) Calcular el benefici que obté en fabricar i vendre 20 objectes. (2 punts)
b) Cercau el nombre d'objectes que ha de fabricar i vendre per obtenir el benefici máxim, així com aquest benefici máxim. (4 punts)
c) El benefici mitjá per x objectes és $M(x) = B(x)/x$. Digau quants objectes ha de fabricar i vendre perquè el benefici mitjá sigui máxim, i quin és aquest benefici. (4 punts)

a) $B(20) = -0,75 \cdot 20^2 + 75 \cdot 20 - 1200 = 0$. El beneficio es de 0 €.

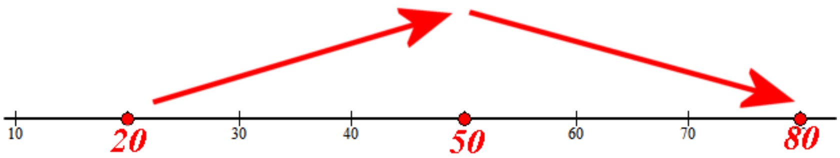
b) Utilizamos la derivada para obtener el número de objetos que da un beneficio máximo.

$$B(x) = -0,75x^2 + 75x - 1200 \Rightarrow B'(x) = -1,5x + 75$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -1,5x + 75 = 0 \Rightarrow x = \frac{75}{1,5} = 50$$

El valor crítico es *x = 50*. Veamos cómo evoluciona la función antes y después de este valor.

- En $[20,50)$ tomamos *x = 30* y la derivada vale $B'(30) = 30 > 0$. La función crece en $[20,50)$.
- En $[50,80)$ tomamos *x = 60* y la derivada vale $B'(60) = -15 < 0$. La función decrece en $[50,80)$.



Con la fabricación y venta de 50 objetos se produce un máximo relativo de la función beneficio de $B(50) = -0,75 \cdot 50^2 + 75 \cdot 50 - 1200 = 675$ €.

c) $M(x) = B(x)/x = \dfrac{-0,75x^2 + 75x - 1200}{x} = -0,75x + 75 - \dfrac{1200}{x}$

$$M'(x) = -0,75 + \frac{1200}{x^2}$$

$$M'(x) = 0 \Rightarrow -0,75 + \frac{1200}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{1200}{x^2} = 0,75 \Rightarrow x^2 = \frac{1200}{0,75} = 1600 \Rightarrow x = \sqrt{1600} = 40$$

En *x = 40* hay un punto crítico, sustituimos en la derivada segunda y vemos si es un máximo o mínimo de la función *M(x)*.

$$M'(x) = -0,75 + \frac{1200}{x^2} = -0,75 + 1200x^{-2} \Rightarrow M''(x) = -2400x^{-3} = \frac{-2400}{x^3}$$

$$M''(40) = \frac{-2400}{40^3} < 0$$

La función *M(x)* tiene un máximo relativo en *x = 40*. Este valor máximo es de

$$M(40) = B(40)/40 = -0,75 \cdot 40 + 75 - \frac{1200}{40} = 15 \text{ €}$$

Fabricando y vendiendo 40 objetos se obtiene un beneficio medio máximo de 15 € / objeto.

4 En una població, el tant per cent de persones que miren un cert programa de televisió ès del 40%. Se sap que el 60% de les persones que el miren tenen estudis superiors i que el 30% de les persones que no el miren no tenen estudis superiors.
a) Interpreta les dades proporcionades en termes de successos, probabilitats i probabilitats condicionades. (2 punts)
b) Quina és la probabilitat que una persona tengui estudis superiors? (4 punts)
c) Cercau la probabilitat que una persona que tengui estudis superiors, miri el citat programa. (4 punts)

a) Demos nombre a los sucesos que aparecen en este experimento aleatorio.
A = Una persona de cierta población mira cierto programa de televisión.
A^C = Una persona de cierta población NO mira cierto programa de televisión.

B = Una persona de cierta población tiene estudios superiores.
B^C = Una persona de cierta población NO tiene estudios superiores.

B / A = Una persona de las que miran el programa tiene estudios superiores.
B^C / A^C = Una persona de las que no miran no tiene estudios superiores.

Las probabilidades proporcionadas se expresan de la siguiente manera:

"*El tant per cent de persones que miren un cert programa de televisió ès del 40%*" → $P(A)=0.4$.

"*El 60% de les persones que el miren tenen estudis superiors*" → $P(B/A)=0.6$.

"*El 30% de les persones que no el miren no tenen estudis superiors*" → $P(B^C/A^C)=0.3$.

b)

$$P(B)=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)=P(A)P(B/A)+P(A^C)P(B/A^C)=$$
$$=P(A)P(B/A)+(1-P(A))(1-P(B^C/A^C))=$$
$$=0.4\cdot 0.6+(1-0.4)(1-0.3)=0.24+0.42=\boxed{0.66}$$

c) $$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B/A)}{P(B)}=\frac{0.4\cdot 0.6}{0.66}=\boxed{\frac{4}{11}=0.364}$$

Model III

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades. Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul. Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

1 Donat el sistema d'equacions en funció del paràmetre a:

$$x + y + z = 5$$

$$5x + ay - z = 11$$

$$3x - y + az = 2.$$

a) Discutiu per a quins valors de a el sistema té solució i quantes en té en cada cas. (6 punts)

b) Trobau la solució del sistema per $a = 2$. (4 punts)

2 Un ajuntament concedeix llicències per a la construcció d'una urbanització de, com a màxim, 120 habitatges, de dos tipus, A i B. Per això l'empresa constructora disposa d'un capital màxim de 15 milions d'euros, essent el cost de construcció de l'habitatge de tipus A de 100000 euros i el de tipus B de 300000 euros. El benefici obtingut per la venda d'un habitatge de tipus A és de 20000 euros i per la venda d'un de tipus B és de 40000 euros.

a) Plantejau la maximització del benefici de la companyia com un problema de programació lineal. (4 punts)

b) Dibuixau la regió factible per a la solució, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten. (4 punts)

c) Calculau el nombre d'habitatges de cada tipus que s'han de construir per tal d'obtenir un benefici màxim. Determinau també aquest benefici màxim. (2 punts)

3 Considerau les següents matrius:

$$M = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3k \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ k & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Raonau si és possible calcular els productes $M \cdot N$ i M^2. En el cas que ho sigui, calculau-los. (2 punts)

b) Estudiau per a quins valors de k és $M \cdot N$ invertible. (3 punts)

c) Calculau la inversa de $M \cdot N$ per a $k = 1$. (2 punts)

d) Per a $k = 1$, trobau la matriu X que compleix $(M \cdot N) \cdot X = B$, on $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(3 punts)

4 Donada la funció $f(x) = ax^3 + bx^2 + x$, definida per a tot $x \in \mathbb{R}$.

a) Trobau a i b sabent que $f(x)$ té un punt crític en el punt $x = 1$ i la seva gràfica passa pel punt $(3, 0)$. (5 punts)

b) Estudiau el creixement i decreixement de $f(x)$ per $a = 3$ i $b = 3$. (5 punts)

5 El benefici $B(x)$, en euros, que obté una empresa per la venda de x unitats d'un determinat producte es representa per la funció:

$$B(x) = -x^2 + 300x - 16100 \quad \text{per a} \quad x \geq 0.$$

a) Calculau el benefici de vendre'n 110 unitats. (1 punt)

b) Representau gràficament la funció. (3 punts)

c) Quantes unitats ha de vendre per tal que el benefici sigui màxim? Quin és aquest benefici màxim? (3 punts)

d) Quantes unitats ha de vendre per tenir un benefici igual a 3900 euros? I per tenir un benefici superior a 3900 euros? (3 punts)

6 Considerem la funció a trossos següent

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ e^{ax} + 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Calculau els valors de a perquè f sigui contínua i derivable. (5 punts)

b) Per a $a = 4$ calculau l'àrea compresa entre la gràfica de $f(x)$ i les rectes $x = 1$, $x = 2$ i $y = 0$. (5 punts)

7 El pes de les persones d'un col·legi major segueix una llei normal de mitjana 70 kg i desviació típica 15 kg. Si escollim a l'atzar una persona del col·legi, calculau la probabilitat dels següents esdeveniments:

a) El seu pes sigui superior a 80 kg. (3 punts)

b) El seu pes sigui inferior a 50 kg. (3 punts)

c) Pesi entre 60 i 120 kg. (4 punts)

8 De dos esdeveniments d'un mateix espai mostral se sap que

$$p(A \cap B) = 0.1 \quad p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.6 \quad P(A/B) = 0.5,$$

$\overline{A}$ i $\overline{B}$ denoten els esdeveniments complementaris de A i B respectivament.

a) Calculau $p(B)$. (3 punts)

b) Calculau $p(A \cup B)$. (3 punts)

c) Són els esdeveniments A i B independents? Raonau la resposta. (4 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model III

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades. Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemátic o no matemátic, segons orrespongui. Es valoraran negativament els errors de cálcul. Es permet utilitzar calculadora científica básica. No es permet l'ús de calculadores gráfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

1 Donat el sistema d'equacions en funció del parámetre a:

$$x+y+z=5$$
$$5x+ay-z=11$$
$$3x-y+az=2.$$

a) Discutiu per a quins valors de *a* el sistema té solució i quantes en té en cada cas. (6 punts)
b) Trobau la solució del sistema per *a = 2.* (4 punts)

2 Un ajuntament concedeix llicéncies per a la construcció d'una urbanització de, com a máxim, 120 habitatges, de dos tipus, A i B. Per això l'empresa constructora disposa d'un capital máxim de 15 milions d'euros, essent el cost de construcció de l'habitatge de tipus A de 100000 euros i el de tipus B de 300000 euros. El benefici obtingut per la venda d'un habitatge de tipus A és de 20000 euros i per la venda d'un de tipus B és de 40000 euros.
a) Plantejau la maximització del benefici de la companyia com un problema de programació lineal. (4 punts)
b) Dibuixau la regió factible per a la solució, indicant les rectes i vértexs que la delimiten. (4 punts)
c) Calculau el nombre d'habitatges de cada tipus que s'han de construir per tal d'obtenir un benefici máxim. Determinau també aquest benefici máxim. (2 punts)

3 Considerau les següents matrius:

$$M=\begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3k \end{pmatrix}, \quad N=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ k & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Raonau si és possible calcular els productes M · N i M^2. En el cas que ho sigui, calculau-los. (2 punts)
b) Estudiau per a quins valors de k és M · N invertible. (3 punts)
c) Calculau la inversa de M · N per a *k = 1.* (2 punts)
d) Per a *k = 1*, trobau la matriu X que compleix $(M\cdot N)\cdot X=B$, on $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4 Donada la funció $f(x)=ax^3+bx^2+x$, definida per a tot $x\in\mathbb{R}$.
a) Trobau *a* i *b* sabent que *f(x)* té un punt crític en el punt *x = 1* i la seva gráfica passa pel punt (3, 0). (5 punts)
b) Estudiau el creixement i decreixement de *f(x)* per *a = 3* i *b = 3*. (5 punts)

5 El benefici B(x), en euros, que obté una empresa per la venda de x unitats d'un determinat producte es representa per la funció:

$$B(x) = -x^2 + 300x - 16100 \quad \text{per a } x \geq 0 .$$

a) Calculau el benefici de vendrén 110 unitats. (1 punt)

b) Representau gráficament la funció. (3 punts)

c) Quantes unitats ha de vendre per tal que el benefici sigui máxim? Quin és aquest benefici máxim? (3 punts)

d) Quantes unitats ha de vendre per tenir un benefici igual a 3900 euros? I per tenir un benefici superior a 3900 euros? (3 punts)

6 Considerem la funció a trossos següent

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & si \quad x < 0 \\ e^{ax} + 1 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Calculau els valors de a perqué *f* sigui contínua i derivable. (5 punts)

b) Per a $a = 4$ calculau l'área compresa entre la gráfica de $f(x)$ i les rectes $x = 1$, $x = 2$ i $y = 0$. (5 punts)

7 El pes de les persones d'un col·legi major segueix una llei normal de mitjana 70 kg i desviació típica 15 kg. Si escollim a l'atzar una persona del col·legi, calculau la probabilitat dels següents esdeveniments:

a) El seu pes sigui superior a 80 kg. (3 punts)

b) El seu pes sigui inferior a 50 kg. (3 punts)

c) Pesi entre 60 i 120 kg. (4 punts)

8 De dos esdeveniments d'un mateix espai mostral se sap que

$$p(A \cap B) = 0.1 \quad p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.6 \qquad P(A / B) = 0.5 ,$$

$\overline{A}$ i $\overline{B}$ denoten els esdeveniments complementaris de A i B respectivament.

a) Calculau p(B). (3 punts)

b) Calculau $p(A \cup B)$. (3 punts)

c) Són els esdeveniments A i B independents? Raonau la resposta. (4 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal N(0, 1)

SOLUCIONES

1 Donat el sistema d'equacions en funció del parámetre a:

$$x+y+z=5$$
$$5x+ay-z=11$$
$$3x-y+az=2.$$

a) Discutiu per a quins valors de *a* el sistema té solució i quantes en té en cada cas. (6 punts)
b) Trobau la solució del sistema per *a = 2*. (4 punts)

a)

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 5 & a & -1\\ 3 & -1 & a\end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 5\\ 5 & a & -1 & 11\\ 3 & -1 & a & 2\end{pmatrix}$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 5 & a & -1\\ 3 & -1 & a\end{vmatrix}=a^2-3-5-3a-5a-1=a^2-8a-9$$

$$|A|=0\Rightarrow a^2-8a-9=0\Rightarrow a=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4(-9)}}{2}=\frac{8\pm10}{2}=\begin{cases}\frac{8-10}{2}=-1\\ \frac{8+10}{2}=9\end{cases}$$

Analizamos tres situaciones distintas.

CASO 1. $a\neq-1\ y\ a\neq9$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución.

CASO 2. $a=-1$

La matriz A tiene determinante nulo y su rango no es 3.

La matriz A queda $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 5 & -1 & -1\\ 3 & -1 & -1\end{pmatrix}$. Se observa que la columna 2ª y 3ª son iguales. La matriz A tiene rango 2 pues el menor que resulta de quitar la fila 1ª y columna 3ª tiene determinante no nulo → $\begin{vmatrix}5 & -1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-5+3=-2\neq0$.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 5\\ 5 & -1 & -1 & 11\\ 3 & -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, Comprobamos si tiene rango 3, tomando el menor que resulta de quitar la columna 2ª (= columna 3ª).

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & 11 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2+33-25+15-10+11 = -37+59 = 22 \neq 0$$

El rango de A/B es 3 y el rango de A es 2. Al ser distintos el sistema no tiene solución.

CASO 3. $a=9$

La matriz A tiene determinante nulo y su rango no es 3.

La matriz A queda $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 9 & -1 \\ 3 & -1 & 9 \end{pmatrix}$. La matriz A tiene rango 2 pues el menor que resulta de quitar la fila y columna 3ª tiene determinante no nulo → $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 9-5=4\neq 0$.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & 9 & -1 & 11 \\ 3 & -1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$, Comprobamos si tiene rango 3, tomando el menor que resulta de quitar la columna 1ª.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 9 & -1 & 11 \\ -1 & 9 & 2 \end{vmatrix} = -2-11+405-5-18-99 = 270 \neq 0$$

El rango de A/B es 3 y el rango de A es 2. Al ser distintos el sistema no tiene solución.

Resumiendo: Si $a\neq -1$ *y* $a\neq 9$ el sistema tiene una única solución, si $a=9$ o $a=-1$ el sistema no tiene solución.

b) Para *a = 2* estamos en el caso 1 y el sistema tiene una única solución.

La determinamos usando el método de Cramer.

Para *a = 2* la matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

con determinante $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4-3-5-6-10-1 = 4-25 = -21$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 11 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{20-2-11-4-22-5}{-21} = \frac{8}{7}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 5 & 1\\5 & 11 & -1\\3 & 2 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\5 & 2 & -1\\3 & -1 & 2\end{vmatrix}}=\frac{22-15+10-33-50+2}{-21}=\frac{64}{21}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 5\\5 & 2 & 11\\3 & -1 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\5 & 2 & -1\\3 & -1 & 2\end{vmatrix}}=\frac{4+33-25-30-10+11}{-21}=\frac{17}{21}$$

La solución es $x=\frac{8}{7};\ y=\frac{64}{21};\ z=\frac{17}{21}$

2 Un ajuntament concedeix llicéncies per a la construcció d'una urbanització de, com a máxim, 120 habitatges, de dos tipus, A i B. Per això l'empresa constructora disposa d'un capital màxim de 15 milions d'euros, essent el cost de construcció de l'habitatge de tipus A de 100000 euros i el de tipus B de 300000 euros. El benefici obtingut per la venda d'un habitatge de tipus A és de 20000 euros i per la venda d'un de tipus B és de 40000 euros.
a) Plantejau la maximització del benefici de la companyia com un problema de programació lineal. (4 punts)
b) Dibuixau la regió factible per a la solució, indicant les rectes i vértexs que la delimiten. (4 punts)
c) Calculau el nombre d'habitatges de cada tipus que s'han de construir per tal d'obtenir un benefici màxim. Determinau també aquest benefici màxim. (2 punts)

a) Llamamos x = número de viviendas tipo A e y = número de viviendas tipo B.

La función a maximizar es el beneficio que dado que se obtiene un beneficio de 20000 € por cada vivienda tipo A y 40000 € por cada vivienda tipo B su expresión será:

$$B(x,y) = 20000x + 40000y$$

Esta función está sometida a restricciones que establecemos como un sistema de inecuaciones.

"*La urbanización a construir tendrá como máximo de 120 viviendas*" → $x + y \le 120$
"*El coste de construir una vivienda tipo A es de 100000 € y 300000 € la de tipo B y la empresa solo dispone de 15000000 €*" → $100000x + 300000y \le 15000000 \Rightarrow x + 3y \le 150$
El número de viviendas debe ser positivo → $x \ge 0; \ \ y \ge 0$

Reunimos todas estas inecuaciones en un sistema cuya solución es una región del plano que llamamos región factible.

$$\left. \begin{array}{l} x + y \le 120 \\ x + 3y \le 150 \\ x \ge 0; \ \ y \ge 0 \end{array} \right\}$$

b) Empezamos dibujando la región factible y para ello primero dibujamos las rectas que delimitan dicha región.

$x + y = 120$

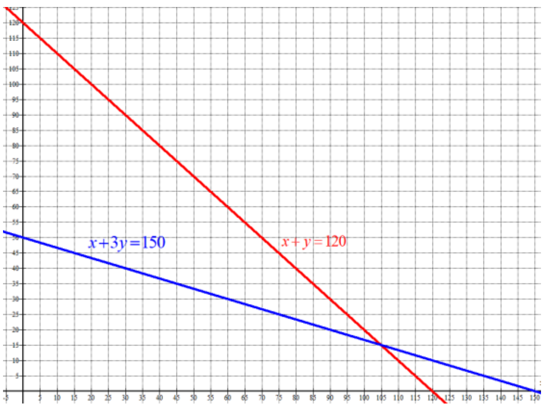
x	$y = 120 - x$
0	120
105	15
120	0

$x + 3y = 150$

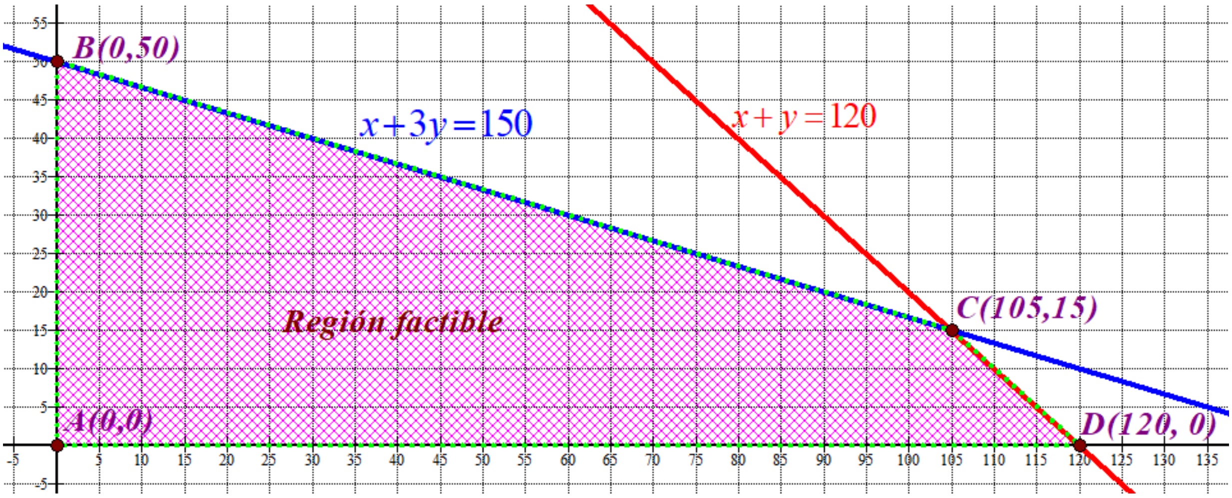
x	$y = \frac{150 - x}{3}$
0	50
105	15
150	0

$x \ge 0; \ \ y \ge 0$

Primer cuadrante



La región factible es la región del primer cuadrante que cumple las inecuaciones $\left.\begin{array}{l} x+y\leq 120 \\ x+3y\leq 150 \\ x\geq 0;\ \ y\geq 0 \end{array}\right\}$, por lo tanto es la región del primer cuadrante por debajo de las rectas azul y roja. La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.



Las coordenadas del punto C se obtienen de resolver el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=120 \\ x+3y=150 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=120-y \\ x=150-3y \end{array}\right\} \Rightarrow 120-y=150-3y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y=30 \Rightarrow y=15 \Rightarrow x=120-15=105 \Rightarrow C(105,15)$$

c) Para obtener el máximo beneficio valoramos la función $B(x,y)=20000x+40000y$ en cada uno de los vértices.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(0, 50) → $B(0,50)=0+2000000=2000.000$

C(105, 15) → $B(105,15)=2.100.000+600.000=2.700.000$

D(120, 0) → $B(120,0)=2.400.000+0=2.400.000$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice C(105, 15). Significa que construyendo 105 viviendas del tipo A y 15 del tipo B se consiguen unos beneficios máximos de 2.700.000 €.

3 Considerau les següents matrius:

$$M=\begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3k \end{pmatrix}, \quad N=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ k & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Raonau si és possible calcular els productes M · N i M^2. En el cas que ho sigui, calculau-los. (2 punts)
b) Estudiau per a quins valors de k és M · N invertible. (3 punts)
c) Calculau la inversa de M · N per a $k = 1$. (2 punts)
d) Per a $k = 1$, trobau la matriu X que compleix $(M\cdot N)\cdot X = B$, on $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a)

$$\underset{2\times\boxed{3\cdot 3}\times 2}{M\cdot N} \longrightarrow \underset{2\times 2}{= Otra\ matriz}$$

Si es posible pues el número de columnas de M es igual al número de filas de N y se obtiene una matriz cuadrada de orden 2.

$$M^2 = \underset{2\times\boxed{3\cdot 2}\times 3}{M\cdot M}$$

No es posible pues la matriz M no es cuadrada y no coinciden su número de filas con el número de columnas.

Calculamos $M\cdot N$.

$$M\cdot N=\begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ k & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0+k+0 & 2k-1+0 \\ 0-k-6k & 4+1+9k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & 2k-1 \\ -7k & 9k+5 \end{pmatrix}$$

b)

Para que $M\cdot N$ sea invertible su determinante debe ser no nulo.
Averiguamos cuando se anula.

$$|M\cdot N|=\begin{vmatrix} k & 2k-1 \\ -7k & 9k+5 \end{vmatrix}=k(9k+5)+7k(2k-1)=9k^2+5k+14k^2-7k=23k^2-2k$$

$$|M\cdot N|=0 \Rightarrow 23k^2-2k=0 \Rightarrow k(23k-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{k=0} \\ o \\ 23k-2=0 \rightarrow \boxed{k=\dfrac{2}{23}} \end{cases}$$

Para los valores $k=\frac{2}{23}$ o $k=0$ no existe la inversa de $M\cdot N$.

Existe la inversa para cualquier valor de $k\neq\frac{2}{23}$ y $k\neq 0$

c) Para $k = 1$ la matriz $M \cdot N$ queda $M \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 14 \end{pmatrix}$. Calculamos su inversa.

$$(M \cdot N)^{-1} = \frac{Adj\left((M \cdot N)^T\right)}{|M \cdot N|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 14 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 14 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 14 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}}{21} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/21 \\ 1/3 & 1/21 \end{pmatrix}$$

d) Para $k = 1$ la matriz $M \cdot N$ tiene inversa → $(M \cdot N)^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/21 \\ 1/3 & 1/21 \end{pmatrix}$

Lo utilizamos para despejar en la ecuación matricial.

$$(M \cdot N) \cdot X = B \Rightarrow X = (M \cdot N)^{-1} B$$

$$X = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/21 \\ 1/3 & 1/21 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/21 \\ 2/3 & 1/21 \end{pmatrix}$$

4 Donada la funció $f(x)=ax^3+bx^2+x$, definida per a tot $x\in\mathbb{R}$.
a) Trobau *a* i *b* sabent que *f(x)* té un punt crític en el punt *x = 1* i la seva gràfica passa pel punt (3, 0). (5 punts)
b) Estudiau el creixement i decreixement de *f(x)* per *a = 3* i *b = 3*. (5 punts)

a) Si la función tiene un punto crítico en *x = 1* significa que *f ´(1) = 0*.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=ax^3+bx^2+x \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+1 \\ f'(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=3a\cdot 1^2+2b\cdot 1+1 \Rightarrow \boxed{0=3a+2b+1}$$

Además pasa por el punto (3, 0) que significa que *f(3) = 0*.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=ax^3+bx^2+x \\ f(3)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=a\cdot 3^3+b\cdot 3^2+3 \Rightarrow 27a+9b+3=0 \Rightarrow \boxed{9a+3b+1=0}$$

Resolvemos el sistema que forman las dos ecuaciones obtenidas.

$$\left.\begin{array}{r} 3a+2b+1=0 \\ 9a+3b+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -9a-6b-3=0 \\ 9a+3b+1=0 \end{array}\right\}$$

$$-3b-2=0 \Rightarrow -3b=2 \Rightarrow \boxed{b=-\frac{2}{3}} \Rightarrow 3a+2\left(-\frac{2}{3}\right)+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3a-\frac{4}{3}+1=0 \Rightarrow 9a-4+3=0 \Rightarrow 9a=1 \Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{9}}$$

Los valores buscados son $a=\frac{1}{9}$ y $b=-\frac{2}{3}$

b) Para *a = b = 3* la función queda $f(x)=3x^3+3x^2+x$.
Vemos como cambia el signo de la derivada.

$$f(x)=3x^3+3x^2+x \Rightarrow f'(x)=9x^2+6x+1$$

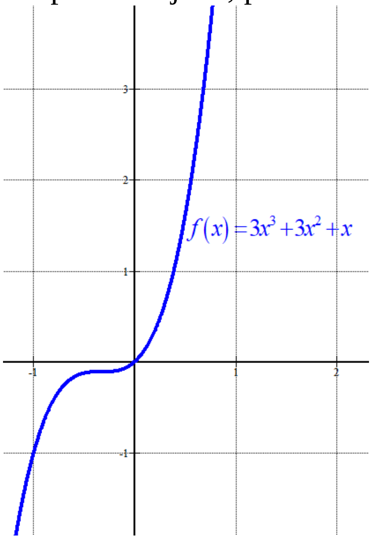
$$f'(x)=0 \Rightarrow 9x^2+6x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot 9\cdot 1}}{18}=\frac{-6}{18}=-\frac{1}{3}$$

Estudiamos que pasa antes y después de $x=-\frac{1}{3}$.

- En $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$ tomo *x = –5* y la derivada vale $f'(-5)=9(-5)^2+6(-5)+1=196>0$.
  La función crece en $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$
- En $\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$ tomo *x =0* y la derivada vale $f'(0)=1>0$. La función crece en $\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$

La función crece en todo momento. Es creciente en $\mathbb{R}$.

No pide dibujarla, pero lo hago para comprobar la bondad de la solución.



En $x = 0$ hay un punto de inflexión.

5 El benefici B(x), en euros, que obté una empresa per la venda de x unitats d'un determinat producte es representa per la funció:

$$B(x) = -x^2 + 300x - 16100 \quad per\ a\ x \geq 0 .$$

a) Calculau el benefici de vendrén 110 unitats. (1 punt)
b) Representau gráficament la funció. (3 punts)
c) Quantes unitats ha de vendre per tal que el benefici sigui máxim? Quin és aquest benefici máxim? (3 punts)
d) Quantes unitats ha de vendre per tenir un benefici igual a 3900 euros? I per tenir un benefici superior a 3900 euros? (3 punts)

a) Nos piden B(110).

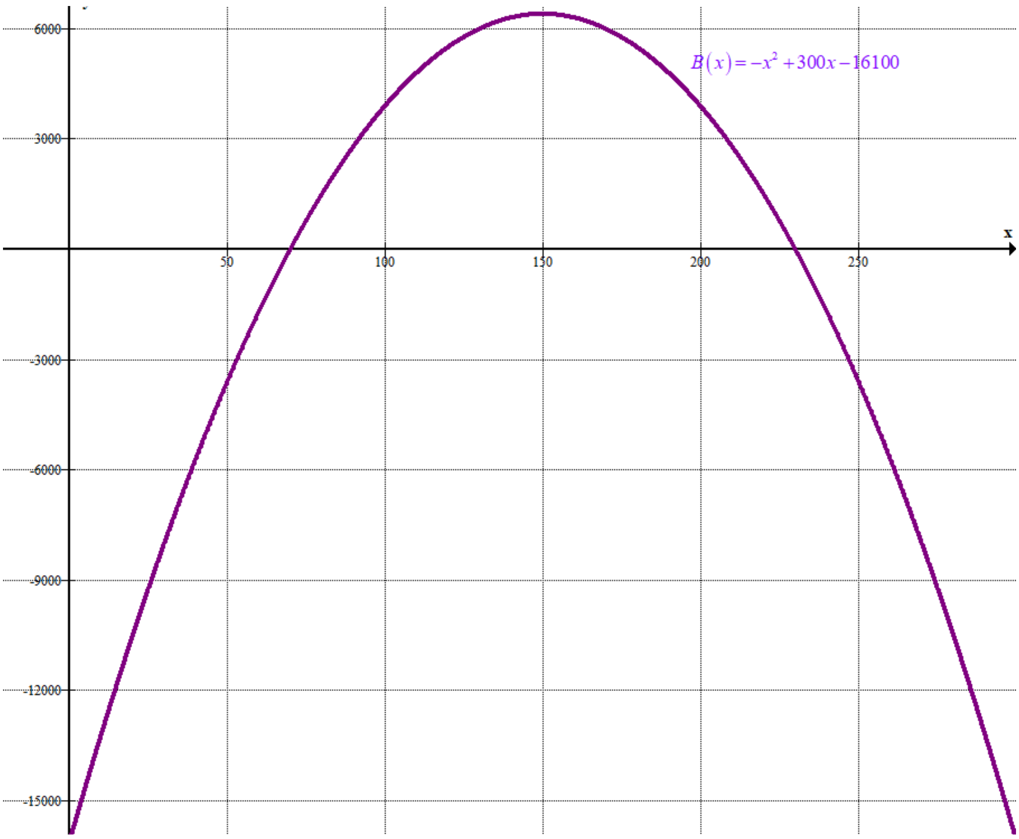
$$B(110) = -110^2 + 300 \cdot 110 - 16100 = \boxed{4800\ €}$$

b) Es una parábola, obtenemos el vértice y una tabla de valores.

$$B(x) = -x^2 + 300x - 16100 \Rightarrow B'(x) = -2x + 300$$
$$B'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 300 = 0 \Rightarrow 2x = 300 \Rightarrow x = 150$$

El vértice está en $x = 150$.

x	$y = -x^2 + 300x - 16100$
0	-16100
100	3900
150	6400
200	3900
300	-16100



c) El beneficio máximo se aprecia en la gráfica de la función que se produce en el vértice de la parábola. Está situada en *x = 150*.
Con la venta de 150 unidades se obtiene un beneficio máximo de 6400 €.

$$B(150) = -150^2 + 300 \cdot 150 - 16100 = \boxed{6400\text{ €}}$$

d) ¿Cuál es el valor de x para que B(x) = 3900?

$$B(x) = 3900 \Rightarrow -x^2 + 300x - 16100 = 3900 \Rightarrow -x^2 + 300x - 20000 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-300 \pm \sqrt{300^2 - 4(-1)(-20000)}}{-2} = \frac{-300 \pm 100}{-2} = \begin{cases} \dfrac{-300-100}{-2} = 200 \\ \dfrac{-300+100}{-2} = 100 \end{cases}$$

Un beneficio de 3900 euros se consigue con 100 unidades y con 200 unidades.
Un beneficio superior a 3900 € se consigue con la producción entre 100 y 200 unidades, atendiendo a la información que nos ofrece la gráfica

6 Considerem la funció a trossos següent

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & si \quad x<0 \\ e^{ax}+1 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

a) Calculau els valors de a perqué *f* sigui contínua i derivable. (5 punts)
b) Per a $a = 4$ calculau l'área compresa entre la gráfica de *f(x)* i les rectes $x = 1$, $x = 2$ i $y = 0$. (5 punts)

a) Para que sea continua en $x = 0$ debe de cumplirse:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x^2-3x+2=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{ax}+1=e^0+1=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$$

Es continua, independientemente del valor de *a*.

La derivada de la función en $\mathbb{R}-\{0\}$ es $f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & si \quad x<0 \\ ae^{ax} & si \quad x>0 \end{cases}$

Para que sea derivable en $x = 0$ deben ser iguales las derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=2\cdot 0-3=-3 \\ f'(0^+)=a\cdot e^{a\cdot 0}=a \\ f'(0^-)=f'(0^+) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{-3=a}$$

Para que sea derivable en $x = 0$ debe ser $a = -3$.

b) Para $a = 4$ la función es $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & si \quad x<0 \\ e^{4x}+1 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$.

Cuando $x\in[1,2]$ la función es $f(x)=e^{4x}+1$.
Buscamos los puntos de corte de la función y la recta $y = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=e^{4x}+1 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow e^{4x}+1=0 \Rightarrow e^{4x}=-1$$ ¡No es posible!

La función exponencial nunca se anula.

El área del recinto es la integral definida entre 1 y 2 de $f(x)=e^{4x}+1$.

$$Área=\int_1^2 e^{4x}+1dx=\left[\frac{e^{4x}}{4}+x\right]_1^2=\left[\frac{e^{4\cdot 2}}{4}+2\right]-\left[\frac{e^4}{4}+1\right]=\frac{e^8}{4}-\frac{e^4}{4}+1=\boxed{\frac{e^8-e^4}{4}+1\simeq 732.58\,u^2}$$

7 El pes de les persones d'un col·legi major segueix una llei normal de mitjana 70 kg i desviació típica 15 kg. Si escollim a l'atzar una persona del col·legi, calculau la probabilitat dels següents esdeveniments:
a) El seu pes sigui superior a 80 kg. (3 punts)
b) El seu pes sigui inferior a 50 kg. (3 punts)
c) Pesi entre 60 i 120 kg. (4 punts)

X = Peso de una persona de un colegio mayor.
X = N(70, 15)

a)

$$P(X>80)=\{Tipificamos\}=P\left(Z>\frac{80-70}{15}\right)=P(Z>0.67)=1-P(Z\le 0.67)=$$

$$=\{\text{Buscamos en la tabla N(0,1)}\}=1-0.7486=\boxed{0.2514}$$

b)

$$P(X<50)=\{Tipificamos\}=P\left(Z<\frac{50-70}{15}\right)=P(Z<-1.33)=P(Z\ge 1.33)=$$

$$1-P(Z<1.33)=\{\text{Buscamos en la tabla N(0,1)}\}=1-0.9082=\boxed{0.0918}$$

c)

$$P(60<X<120)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{60-70}{15}<Z<\frac{120-70}{15}\right)=P(-0.67<Z<3.33)=$$

$$=P(Z<3.33)-P(Z<-0.67)=P(Z<3.33)-P(Z>0.67)=P(Z<3.33)-\left[1-P(Z\le 0.67)\right]=$$

$$=\{\text{Buscamos en la tabla N(0,1)}\}=0.9996-[1-0.7486]=\boxed{0.7482}$$

8 De dos esdeveniments d'un mateix espai mostral se sap que

$$p(A\cap B)=0.1 \quad p\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=0.6 \qquad P(A/B)=0.5,$$

$\overline{A}$ i $\overline{B}$ denoten els esdeveniments complementaris de A i B respectivament.

a) Calculau p(B). (3 punts)

b) Calculau $p(A\cup B)$. (3 punts)

c) Són els esdeveniments A i B independents? Raonau la resposta. (4 punts)

a) Como $P(A/B)=0.5$ entonces:

$$\left.\begin{array}{l} P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \\ P(A/B)=0.5 \\ P(A\cap B)=0.1 \end{array}\right\} \Rightarrow 0.5=\frac{0.1}{P(B)} \Rightarrow \boxed{P(B)=\frac{0.1}{0.5}=0.2}$$

b)

$$\left.\begin{array}{r} P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B) \\ P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=0.6 \end{array}\right\} \Rightarrow 0.6=1-P(A\cup B) \Rightarrow \boxed{P(A\cup B)=0.4}$$

c) Nos falta conocer el valor de P(A).

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow 0.4=P(A)+0.2-0.1 \Rightarrow P(A)=0.4-0.1=0.3$$

Para que sean independientes debe cumplirse que $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.
Calculamos el valor de cada miembro de la igualdad y vemos si son iguales.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=0.1 \\ P(A)P(B)=0.2\cdot 0.3=0.06 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$$

Los sucesos *A* y *B* son dependientes.

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model I

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades. Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemátic o no matemátic, segons orrespongui. Es valoraran negativament els errors de cálcul. Es permet utilitzar calculadora científica básica. No es permet l'ús de calculadores gráfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

1 El vaixell de Dénia a Eivissa porta automóbils i camions a la bodega. Cada camió ocupa quatre places d'automóbil. La superfície total de la bodega permet situar-hi fins a 200 automóbils. Cada automóvil pesa 1000 kg, i cada camió, 9000 kg. El pes total permés per a la cárrega és de 300 000 kg. La companyia cobra 50 euros per cada automóbil i 300 euros per cada camió.

a) Plantejau la maximització del benefici de la companyia com un problema de programació lineal. (4 punts)

b) Dibuixau la regió factible per a la solució, indicant les rectes i vértexs que la delimiten. (4 punts)

c) Calculau el nombre de cotxes i camions que s'han de carregar per tal d'obtenir un benefici máxim. Determinau també aquest benefici máxim. (2 punts)

2 Donades les matrius de la forma $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

a) Calculau A^2. (2 punts)

b) Trobau a, b, c tals que $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (8 punts)

3 En una botiga de fruita hem comprat pomes a 0.5 euros cadascuna, alvocats a 1 euro i pinyes a 1.5 euros la peça. En arribar a la caixa ens adonam que portam 70 peces de fruita, el cost total de les quals és de 68 euros. També observam que si les pomes que portam fossin alvocats i els alvocats fossin pomes, la compra ens sortiria 4 euros més barata.

a) Identificau les variables i interpretau l'enunciat com un conjunt d'equacions lineals. (5 punts)

b) Determinau el nombre de peces de cada fruita que hem comprat. (5 punts)

4 Considereu la funció definida a trossos següent

$$f(x)=\begin{cases} -4x+a & si \quad x\le -2 \\ x^2-5 & si \quad -2<x<1 \\ -7x+3 & si \quad x\ge 1 \end{cases}$$

a) Calculau els valors de *a* perqué *f(x)* sigui conínua. (3 punts)

b) És *f(x)* derivable per *a = 1*? (3 punts)

b) Per $a = 0$, determinau els intervals de creixement i decreixement de $f(x)$. (4 punts)

5 El nombre d'individus, en milions, d'una població ve determinat per la funció

$$P(t)=\frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1},$$

on $t \geq 0$ mesura el nombre d'anys transcorreguts.

a) Quina és la població inicial ($t = 0$) i la població després de 5 anys? (2 punts)

b) A partir de quin moment la població será inferior a un milió d'individus? (4 punts)

c) Amb el pas dels anys, cap a quin valor tendirá el nombre d'individus de la població? (4 punts)

6 Considerem la funció $f(x)=\frac{3}{x}+8$

a) Trobau els punts de la gráfica en els quals la recta tangent és paral·lela a la recta $3x+4y+5=0$. (4 punts)

b) Calculau les equacions de les rectes tangents als punts trobats a l'apartat anterior. (2 punts)

c) Calculau l'área compresa entre la gráfica de la funció $f(x)$ i les rectes $x = 2$, $x = 4$ i $y = 0$. (4 punts)

7 En una mostra aleatória de 256 individus s'ha obtingut una edat mitjana de 17.4 anys. Se sap que la desviació típica de la població normal de la qual procedeix aquesta mostra és de 2 anys.

a) Calculau un interval de confiança del 95% per estimar l'edat mitjana de la població. (5 punts)

b) Calculau la mida mínima de la mostra que s'ha de prendre perqué en estimar l'edat mitjana d'aquesta població amb un nivell de confiança del 92%, l'error com és sigui inferior a 0.5 anys.

(5 punts)

8 En una determinada població resideixen 5000 persones en el centre i 10000 a la periféria. Se sap que el 95% dels residents en el centre i que el 20% dels que viuen a la periféria opina que l'ajuntament hauria de restringir l'accés de vehicles privats al centre urbá. Es tria a l'atzar un resident de la població.

a) Quina és la probabilitat que estigui a favor de restringir l'accés de vehicles privats al centre de la ciutat? (3 punts)

b) Quina és la probabilitat que resideixi en el centre i estigui a favor de la restricció d'accés?

(3 punts)

c) Si la persona triada opina que s'hauria de restringir l'accés, quina és la probabilitat que resideixi en el centre de la ciutat? (4 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal N(0, 1)

SOLUCIONES

1 El vaixell de Dénia a Eivissa porta automóbils i camions a la bodega. Cada camió ocupa quatre places d'automóbil. La superfície total de la bodega permet situar-hi fins a 200 automóbils. Cada automóvil pesa 1000 kg, i cada camió, 9000 kg. El pes total permés per a la cárrega és de 300 000 kg. La companyia cobra 50 euros per cada automóbil i 300 euros per cada camió.

a) Plantejau la maximització del benefici de la companyia com un problema de programació lineal. (4 punts)

b) Dibuixau la regió factible per a la solució, indicant les rectes i vértexs que la delimiten. (4 punts)

c) Calculau el nombre de cotxes i camions que s'han de carregar per tal d'obtenir un benefici máxim. Determinau també aquest benefici máxim. (2 punts)

a) Llamamos "x" al número de automóviles e "y" al número de camiones.
La función objetivo es el ingreso que viene dada por $I(x,y)=50x+300y$.

Las restricciones son:

"*Cada camió ocupa quatre places d'automóbil. La superfície total de la bodega permet situar-hi fins a 200 automóbils*" → $4y+x\leq 200$

"*Cada automóvil pesa 1000 kg, i cada camió, 9000 kg. El pes total permés per a la cárrega és de 300 000 kg*" → $1000x+9000y\leq 300000$

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ \ y\geq 0$

Reunimos todas las inecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} 4y+x\leq 200 \\ 1000x+9000y\leq 300000 \\ x\geq 0;\ \ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+4y\leq 200 \\ x+9y\leq 300 \\ x\geq 0;\ \ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

b) Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones y que delimitan la región factible.

$x+4y=200$

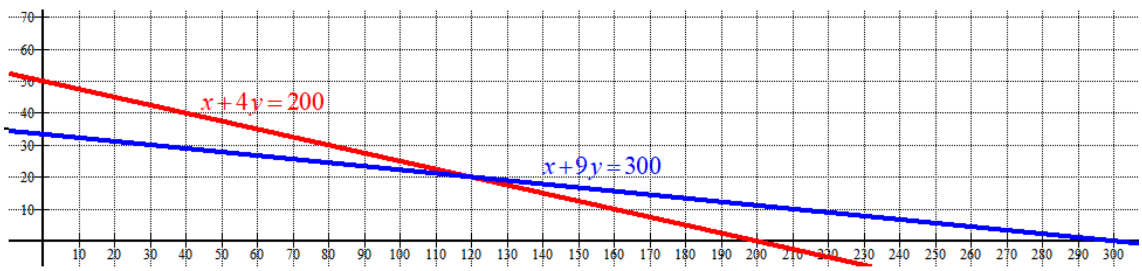
x	$y=\frac{200-x}{4}$
120	20
200	0

$x+9y=300$

x	$y=\frac{300-x}{9}$
0	300 / 9
120	20

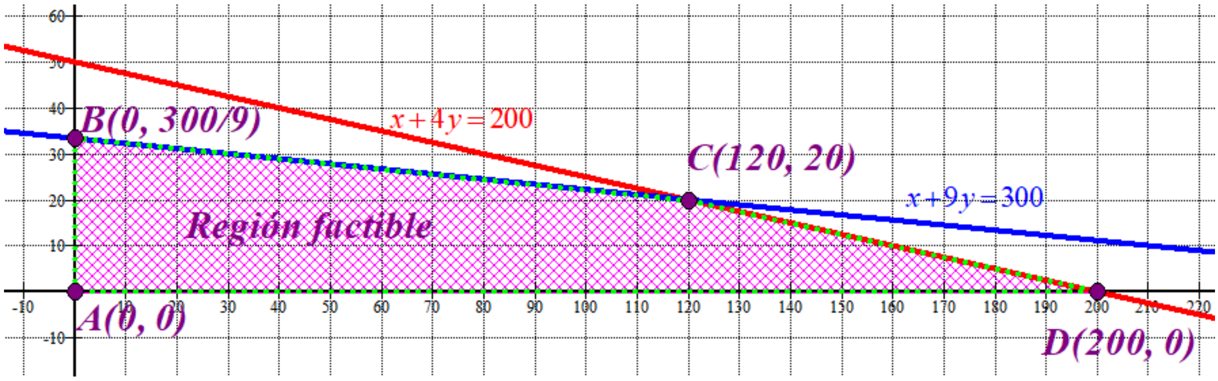
$x\geq 0;\ \ y\geq 0$

Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{ll} x+4y\leq 200 & \rightarrow \text{por debajo} \\ x+9y\leq 300 & \rightarrow \text{por debajo} \\ x\geq 0;\ \ y\geq 0 & \rightarrow \text{primer cuadrante} \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y azul.

Coloreamos de rosa dicha región.



Las coordenadas de los vértices son A(0, 0), B(0, 300/9), C(120, 20) y D(200, 0).

c) Valoramos la función beneficio $I(x,y)=50x+300y$ en cada uno de los vértices de la región factible.

A(0, 0) → $I(0,0)=0$

B(0, 300/9) → $I\left(0,\dfrac{300}{9}\right)=300\dfrac{300}{9}=10000$

C(120, 20) → $I(120,20)=6000+6000=12000$

D(200, 0) → $I(200,0)=10000$

El beneficio máximo se obtiene con 120 coches y 20 camiones. Dicho beneficio máximo es de 12000 €.

2 Donades les matrius de la forma $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

a) Calculau A^2. (2 punts)

b) Trobau a, b, c tals que $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (8 punts)

a)

$$A^2=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^2=\begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a^2=1 \\ b^2=1 \\ c^2=1 \\ a+b=0 \\ b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\sqrt{1}=\pm 1 \\ b=\sqrt{1}=\pm 1 \\ c=\sqrt{1}=\pm 1 \\ a=-b \\ c=-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1 \rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ c=-1 \end{cases} \\ o \\ b=-1 \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ c=1 \end{cases} \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

1ª. $a = -1$, $b = 1$ y $c = -1$.

2ª. $a = 1$, $b = -1$ y $c = 1$.

3 En una botiga de fruita hem comprat pomes a 0.5 euros cadascuna, alvocats a 1 euro i pinyes a 1.5 euros la peça. En arribar a la caixa ens adonam que portam 70 peces de fruita, el cost total de les quals és de 68 euros. També observam que si les pomes que portam fossin alvocats i els alvocats fossin pomes, la compra ens sortiria 4 euros més barata.

a) Identificau les variables i interpretau l'enunciat com un conjunt d'equacions lineals. (5 punts)

b) Determinau el nombre de peces de cada fruita que hem comprat. (5 punts)

a) Llamamos "x" el número de manzanas, "y" al número de aguacates y "z" al número de piñas.

"*En arribar a la caixa ens adonam que portam 70 peces de fruita*" → $x+y+z=70$

"*Pomes a 0.5 euros cadascuna, alvocats a 1 euro i pinyes a 1.5 euros la peça. El cost total de les quals és de 68 euros*" → $0.5x+y+1.5z=68$

"*Si les pomes que portam fossin alvocats i els alvocats fossin pomes, la compra ens sortiria 4 euros més barata*" → $0.5y+x+1.5z=68-4$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=70 \\ 0.5x+y+1.5z=68 \\ 0.5y+x+1.5z=68-4 \end{array}\right\}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=70 \\ 0.5x+y+1.5z=68 \\ 0.5y+x+1.5z=68-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Multiplico por 2} \\ \text{la 2ª y 3ª ecuación} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=70 \\ x+2y+3z=136 \\ y+2x+3z=128 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=70 \\ x+2y+3z=136 \\ 2x+y+3z=128 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{Ecuación 2ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{cccc} x & +2y & +3z & =136 \\ -x & -y & -z & =-70 \\ \hline 0 & y & +2z & =66 \end{array} \\ \text{Nueva Ecuación 2ª} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{c} \text{Ecuación 3ª} - 2\cdot\text{Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{cccc} 2x & +y & +3z & =128 \\ -2x & -2y & -2z & =-140 \\ \hline 0 & -y & +z & =-12 \end{array} \\ \text{Nueva Ecuación 3ª} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=70 \\ y+2z=66 \\ -y+z=-12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{Ecuación 3ª + Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{cccc} -y & +z & = & -12 \\ y & +2z & = & 66 \\ \hline 0 & 3z & = & 54 \end{array} \\ \text{Nueva Ecuación 3ª} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=70 \\ y+2z=66 \\ 3z=54 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=70 \\ y+2z=66 \\ \boxed{z=\frac{54}{3}=18} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+18=70 \\ y+36=66 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x+y=70-18 \\ \boxed{y=66-36=30} \end{array}\right\} \Rightarrow x+30=52 \Rightarrow \boxed{x=22}$$

Se han comprado 22 manzanas, 30 aguacates y 18 piñas.

4 Considereu la funció definida a trossos següent

$$f(x)=\begin{cases}-4x+a & si\ \ x\leq -2\\ x^2-5 & si\ \ -2<x<1\\ -7x+3 & si\ \ x\geq 1\end{cases}$$

a) Calculau els valors de *a* perqué *f(x)* sigui conínua. (3 punts)
b) És *f(x)* derivable per *a = 1*? (3 punts)
b) Per *a = 0*, determinau els intervals de creixement i decreixement de *f(x)*. (4 punts)

a) Para que la función sea continua en *x = –2* debe cumplirse:

$$\left.\begin{array}{l} f(-2)=-4(-2)+a=8+a\\ \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-} -4x+a=8+a\\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} x^2-5=(-2)^2-5=-1\\ \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=f(-2)\end{array}\right\}\Rightarrow 8+a=-1\Rightarrow \boxed{a=-9}$$

Para que la función sea continua en *x = –2* debe ser *a = –9.*

¿La función es continua en *x = 1*?

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=-7(1)+3=-4\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2-5=1-5=-4\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} -7x+3=-4\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=-4$$

La función es continua en *x = 1.*

b) Para *a = 1* la función no es continua en *x = –2*, por lo que tampoco es derivable en *x = –2.*

Es derivable en cada tramo de definición pues son polinomios.

$$f(x)=\begin{cases}-4x+1 & si\ \ x\leq -2\\ x^2-5 & si\ \ -2<x<1\\ -7x+3 & si\ \ x\geq 1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-4 & si\ \ x<-2\\ 2x & si\ \ -2<x<1\\ -7 & si\ \ x>1\end{cases}$$

Comprobamos si es derivable en *x = 1*. Sabemos que es continua, vemos si coinciden sus derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 2x=2\\ f'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} -7=-7\end{array}\right\}\Rightarrow f'(1^-)=2\neq -7=f'(1^+)$$

La función no es derivable en *x = 1.*

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{-2,1\}$

c) Para $a = 0$ la función es $f(x)=\begin{cases} -4x & si \ \ x\leq -2 \\ x^2-5 & si \ \ -2<x<1 \\ -7x+3 & si \ \ x\geq 1 \end{cases}$

Analizamos el crecimiento y decrecimiento por tramos.

En $(-\infty,-2)$ la función es una recta $f(x)=-4x$ con derivada $f\,'(x)=-4<0$ por lo que siempre es decreciente en $(-\infty,-2)$.
En $(-2,1)$ la función es una parábola $f(x)=x^2-5$, hallamos su derivada y la igualamos a cero para encontrar su punto crítico.

$$f\,'(x)=2x$$
$$f\,'(x)=0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0$$

Dividimos el intervalo $(-2,1)$ en dos partes: antes de 0 y después de 0.
En $(-2,0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f\,'(-1)=-2<0$. La función decrece en $(-2,0)$.
En $(0,1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f\,'(0.5)=1>0$. La función crece en $(0,1)$.

En $(1,+\infty)$ la función es una recta $f(x)=-7x+3$ con derivada $f\,'(x)=-7<0$ por lo que siempre es decreciente en $(1,+\infty)$.

Resumiendo: La función decrece en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(1,+\infty)$ y crece en $(0,1)$.

Como en $x = -2$ la función se acerca por la izquierda decreciendo y alcanzando el valor 8 y en $x = -2$ la función vale $(-2)^2-5=-1$ que es menor que 8, entonces también decrece en $x=-2$.

Resumiendo: La función decrece en $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ y crece en $(0,1)$.

5 El nombre d'individus, en milions, d'una població ve determinat per la funció

$$P(t)=\frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1},$$

on $t \geq 0$ mesura el nombre d'anys transcorreguts.

a) Quina és la població inicial ($t = 0$) i la població desprès de 5 anys? (2 punts)

b) A partir de quin moment la població será inferior a un milió d'individus? (4 punts)

c) Amb el pas dels anys, cap a quin valor tendirá el nombre d'individus de la població? (4 punts)

a) $P(0)=\frac{2+0+0^2}{0^2+0+1}=2$.

La población inicial es de dos millones de individuos.

$P(5)=\frac{2+5+5^2}{5^2+10+1}=\frac{32}{36}\simeq 0.888888$.

A los 5 años la población es aproximadamente de 888.888 individuos.

b) $P(t)<1 \Rightarrow \frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1}<1 \Rightarrow \left.\begin{cases} t^2+2t+1>0 \\ siendo\ t \geq 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow 2+t+t^2<t^2+2t+1 \Rightarrow 1<t$

A partir del año 1.

Lo comprobamos → $P(1)=\frac{2+1+1^2}{1^2+2+1}=1$; $P(2)=\frac{2+2+2^2}{2^2+4+1}=\frac{8}{9}\simeq 0.888888$

c) Calculamos el límite de la función cuando t tiende a $+\infty$.

$$\lim_{t\to+\infty} P(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{2}{t^2}+\frac{t}{t^2}+\frac{t^2}{t^2}}{\frac{t^2}{t^2}+\frac{2t}{t^2}+\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t}+1}{1+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}+1}{1+\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}}=\frac{1}{1}=1$$

La población tiende a ser un millón de individuos con el paso de los años.

6 Considerem la funció $f(x)=\frac{3}{x}+8$

a) Trobau els punts de la gràfica en els quals la recta tangent és paral·lela a la recta $3x+4y+5=0$. (4 punts)

b) Calculau les equacions de les rectes tangents als punts trobats a l'apartat anterior. (2 punts)

c) Calculau l'àrea compresa entre la gràfica de la funció *f(x)* i les rectes $x=2$, $x=4$ i $y=0$. (4 punts)

a) Averiguamos la pendiente de la recta $3x+4y+5=0$.

$$3x+4y+5=0 \Rightarrow 4y=-3x-5 \Rightarrow y=-\frac{3}{4}x-\frac{5}{4} \Rightarrow \boxed{y'=-\frac{3}{4}}$$

La recta tiene pendiente $-\frac{3}{4}$. Averiguamos cuando la recta tangente a la gráfica de la función tiene esa pendiente, es decir, cuando la derivada de la función vale $-\frac{3}{4}$

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\frac{3}{x}+8 \Rightarrow f'(x)=-\frac{3}{x^2} \\ f'(x)=-\frac{3}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{3}{x^2}=-\frac{3}{4} \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{4}=\pm 2}$$

Como $f(-2)=\frac{3}{-2}+8=6.5$ uno de los puntos tiene coordenadas (–2, 6.5).

Como $f(2)=\frac{3}{2}+8=9.5$ otro de los puntos tiene coordenadas (2, 9.5).

b) La ecuación de la recta tangente en $x = -2$ es $y-f(-2)=f'(-2)\left(x-(-2)\right)$.

$$\left.\begin{array}{r} y-f(-2)=f'(-2)\left(x-(-2)\right) \\ f(-2)=6.5 \\ f'(-2)=-\frac{3}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow y-6.5=-\frac{3}{4}(x+2) \Rightarrow y=-\frac{3}{4}x+6.5-\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{y=-\frac{3}{4}x+5}$$

La ecuación de la recta tangente en $x = 2$ es $y-f(2)=f'(2)(x-2)$.

$$\left.\begin{array}{r} y-f(2)=f'(2)(x-2) \\ f(2)=9.5 \\ f'(2)=-\frac{3}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow y-9.5=-\frac{3}{4}(x-2) \Rightarrow y=-\frac{3}{4}x+9.5+\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{y=-\frac{3}{4}x+11}$$

c) Comprobamos si la función corta a la recta $y = 0$ entre $x = 2$ y $x = 4$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{3}{x}+8 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{x}+8=0 \Rightarrow \frac{3}{x}=-8 \Rightarrow x=-\frac{3}{8}$$

Este valor no está comprendido entre *x = 2* y *x = 4* por lo que el área de la región pedida es la integral definida entre *x = 2* y *x = 4* de la función $f(x)=\dfrac{3}{x}+8$.

$$Área=\int_2^4 f(x)dx=\int_2^4 \frac{3}{x}+8dx=\Big[3\ln|x|+8x\Big]_2^4=$$

$$=\Big[3\ln|4|+32\Big]-\Big[3\ln|2|+16\Big]=3\ln|4|-3\ln|2|+16\approx \boxed{18.08\,u^2}$$

7 En una mostra aleatória de 256 individus s'ha obtingut una edat mitjana de 17.4 anys. Se sap que la desviació típica de la població normal de la qual procedeix aquesta mostra és de 2 anys.

a) Calculau un interval de confiança del 95% per estimar l'edat mitjana de la població. (5 punts)

b) Calculau la mida mínima de la mostra que s'ha de prendre perqué en estimar l'edat mitjana d'aquesta població amb un nivell de confiança del 92%, l'error com és sigui inferior a 0.5 anys.

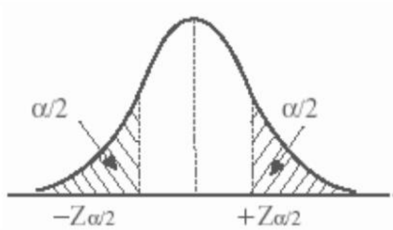
(5 punts)

a) $X = N(\mu, 2)$

$\bar{x} = 17.4$ n = 256

Con un nivel de confianza del 95 %

$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$



	0	1	2	3	4	5	6
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	[illegible]
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	[illegible]
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	[illegible]
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	[illegible]
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	[illegible]
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	[illegible]
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	[illegible]
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	[illegible]
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	[illegible]
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	[illegible]
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	[illegible]
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	[illegible]
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	[illegible]
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	[illegible]
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	[illegible]
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	[illegible]
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	[illegible]
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	[illegible]
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	[illegible]
1.9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9750
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{256}} = 0.245$$

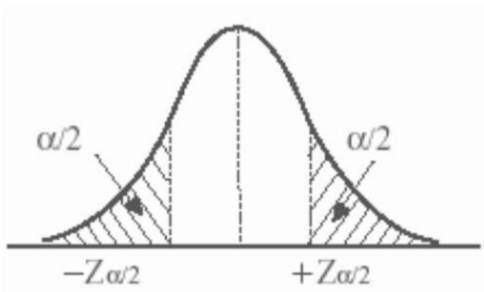
El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = (17.4 - 0.245, 17.4 + 0.245) = (17.155, 17.645)$$

A. ¿n?

Con un nivel de confianza del 92 %

$1 - \alpha = 0{,}92 \rightarrow \alpha = 0{,}08 \rightarrow \alpha/2 = 0'04 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}96 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.75}$



	0	1	2	3	4	5
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	[illegible]
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	[illegible]
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	[illegible]
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	[illegible]
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	[illegible]
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	[illegible]
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	[illegible]
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	[illegible]
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	[illegible]
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	[illegible]
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	[illegible]
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	[illegible]
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	[illegible]
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	[illegible]
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	[illegible]
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	[illegible]
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	[illegible]
1.7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9599
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678

El error debe ser 0.5.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.5 = 1.75 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{0.5}{1.75} = \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2 \cdot 1.75}{0.5} \Rightarrow n = \left(\frac{2 \cdot 1.75}{0.5}\right)^2 = 49$$

Como *n* debe ser entero y superior al "*n*" hallado el tamaño mínimo es de 50 individuos.

8 En una determinada població resideixen 5000 persones en el centre i 10000 a la periféria. Se sap que el 95% dels residents en el centre i que el 20% dels que viuen a la periféria opina que l'ajuntament hauria de restringir l'accés de vehicles privats al centre urbá. Es tria a l'atzar un resident de la població.

a) Quina és la probabilitat que estigui a favor de restringir l'accés de vehicles privats al centre de la ciutat? (3 punts)

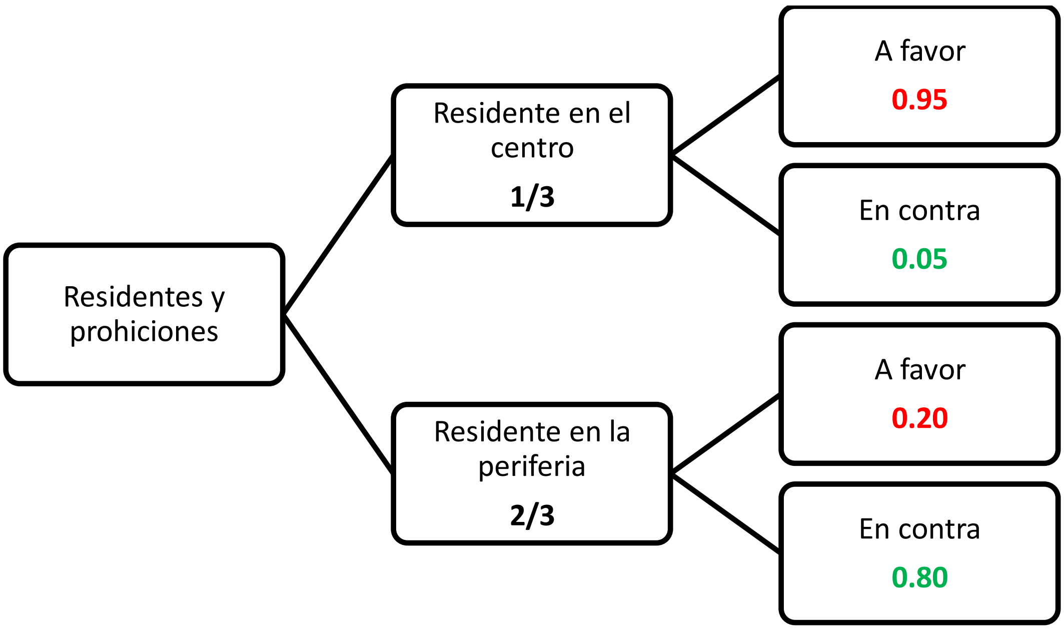
b) Quina és la probabilitat que resideixi en el centre i estigui a favor de la restricció d'accés?

(3 punts)

c) Si la persona triada opina que s'hauria de restringir l'accés, quina és la probabilitat que resideixi en el centre de la ciutat? (4 punts)

Llamamos A = Residente en el centro, B = Residente en la periferia.
C = Favorable a prohibir el acceso al centro con vehículo privado.

$$P(A)=\frac{5000}{15000}=\frac{1}{3},\ P(B)=\frac{10000}{15000}=\frac{2}{3}$$



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(C)=P(A)P(C/A)+P(B)P(C/B)=\frac{1}{3}\cdot 0.95+\frac{2}{3}\cdot 0.20=\boxed{\frac{9}{20}=0.45}$$

b) $P(A\cap C)=P(A)P(C/A)=\frac{1}{3}\cdot 0.95=\boxed{\frac{19}{60}\simeq 0.317}$

c) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{19}{60}}{\frac{9}{20}}=\boxed{\frac{19}{27}\simeq 0.704}$$

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model I

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades. Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemátic o no matemátic, segons orrespongui. Es valoraran negativament els errors de cálcul. Es permet utilitzar calculadora científica básica. No es permet l'ús de calculadores gráfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

1 El vaixell de Dénia a Eivissa porta automóbils i camions a la bodega. Cada camió ocupa quatre places d'automóbil. La superfície total de la bodega permet situar-hi fins a 200 automóbils. Cada automóvil pesa 1000 kg, i cada camió, 9000 kg. El pes total permés per a la cárrega és de 300 000 kg. La companyia cobra 50 euros per cada automóbil i 300 euros per cada camió.

a) Plantejau la maximització del benefici de la companyia com un problema de programació lineal. (4 punts)

b) Dibuixau la regió factible per a la solució, indicant les rectes i vértexs que la delimiten. (4 punts)

c) Calculau el nombre de cotxes i camions que s'han de carregar per tal d'obtenir un benefici máxim. Determinau també aquest benefici máxim. (2 punts)

2 Donades les matrius de la forma $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

a) Calculau A^2. (2 punts)

b) Trobau a, b, c tals que $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (8 punts)

3 En una botiga de fruita hem comprat pomes a 0.5 euros cadascuna, alvocats a 1 euro i pinyes a 1.5 euros la peça. En arribar a la caixa ens adonam que portam 70 peces de fruita, el cost total de les quals és de 68 euros. També observam que si les pomes que portam fossin alvocats i els alvocats fossin pomes, la compra ens sortiria 4 euros més barata.

a) Identificau les variables i interpretau l'enunciat com un conjunt d'equacions lineals. (5 punts)

b) Determinau el nombre de peces de cada fruita que hem comprat. (5 punts)

4 Considereu la funció definida a trossos següent

$$f(x)=\begin{cases} -4x+a & si \;\; x\le -2 \\ x^2-5 & si \;\; -2<x<1 \\ -7x+3 & si \;\; x\ge 1 \end{cases}$$

a) Calculau els valors de *a* perqué *f(x)* sigui conínua. (3 punts)

b) És *f(x)* derivable per *a = 1*? (3 punts)

b) Per *a = 0*, determinau els intervals de creixement i decreixement de *f(x)*. (4 punts)

5 El nombre d'individus, en milions, d'una població ve determinat per la funció

$$P(t)=\frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1},$$

on $t \geq 0$ mesura el nombre d'anys transcorreguts.

a) Quina és la població inicial (*t = 0*) i la població després de 5 anys? (2 punts)

b) A partir de quin moment la població será inferior a un milió d'individus? (4 punts)

c) Amb el pas dels anys, cap a quin valor tendirá el nombre d'individus de la població? (4 punts)

6 Considerem la funció $f(x)=\frac{3}{x}+8$

a) Trobau els punts de la gráfica en els quals la recta tangent és paral·lela a la recta $3x+4y+5=0$. (4 punts)

b) Calculau les equacions de les rectes tangents als punts trobats a l'apartat anterior. (2 punts)

c) Calculau l'área compresa entre la gráfica de la funció *f(x)* i les rectes *x = 2*, *x = 4* i *y = 0*. (4 punts)

7 En una mostra aleatória de 256 individus s'ha obtingut una edat mitjana de 17.4 anys. Se sap que la desviació típica de la població normal de la qual procedeix aquesta mostra és de 2 anys.

a) Calculau un interval de confiança del 95% per estimar l'edat mitjana de la població. (5 punts)

b) Calculau la mida mínima de la mostra que s'ha de prendre perqué en estimar l'edat mitjana d'aquesta població amb un nivell de confiança del 92%, l'error com és sigui inferior a 0.5 anys.

(5 punts)

8 En una determinada població resideixen 5000 persones en el centre i 10000 a la periféria. Se sap que el 95% dels residents en el centre i que el 20% dels que viuen a la periféria opina que l'ajuntament hauria de restringir l'accés de vehicles privats al centre urbá. Es tria a l'atzar un resident de la població.

a) Quina és la probabilitat que estigui a favor de restringir l'accés de vehicles privats al centre de la ciutat? (3 punts)

b) Quina és la probabilitat que resideixi en el centre i estigui a favor de la restricció d'accés?

(3 punts)

c) Si la persona triada opina que s'hauria de restringir l'accés, quina és la probabilitat que resideixi en el centre de la ciutat? (4 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal N(0, 1)

SOLUCIONES

1 El vaixell de Dénia a Eivissa porta automóbils i camions a la bodega. Cada camió ocupa quatre places d'automóbil. La superfície total de la bodega permet situar-hi fins a 200 automóbils. Cada automóvil pesa 1000 kg, i cada camió, 9000 kg. El pes total permés per a la cárrega és de 300 000 kg. La companyia cobra 50 euros per cada automóbil i 300 euros per cada camió.

a) Plantejau la maximització del benefici de la companyia com un problema de programació lineal. (4 punts)

b) Dibuixau la regió factible per a la solució, indicant les rectes i vértexs que la delimiten. (4 punts)

c) Calculau el nombre de cotxes i camions que s'han de carregar per tal d'obtenir un benefici máxim. Determinau també aquest benefici máxim. (2 punts)

a) Llamamos "x" al número de automóviles e "y" al número de camiones.
La función objetivo es el ingreso que viene dada por $I(x,y)=50x+300y$.

Las restricciones son:

"*Cada camió ocupa quatre places d'automóbil. La superfície total de la bodega permet situar-hi fins a 200 automóbils*" → $4y+x\le 200$

"*Cada automóvil pesa 1000 kg, i cada camió, 9000 kg. El pes total permés per a la cárrega és de 300 000 kg*" → $1000x+9000y\le 300000$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ \ y\ge 0$

Reunimos todas las inecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} 4y+x\le 200 \\ 1000x+9000y\le 300000 \\ x\ge 0;\ \ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+4y\le 200 \\ x+9y\le 300 \\ x\ge 0;\ \ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

b) Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones y que delimitan la región factible.

$x+4y=200$

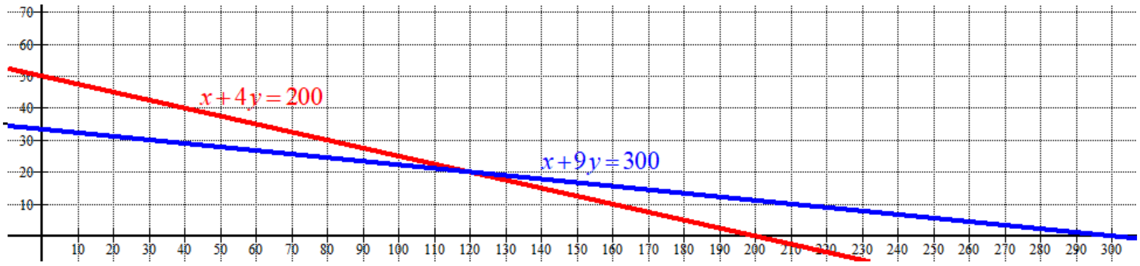
x	$y=\dfrac{200-x}{4}$
120	20
200	0

$x+9y=300$

x	$y=\dfrac{300-x}{9}$
0	300/9
120	20

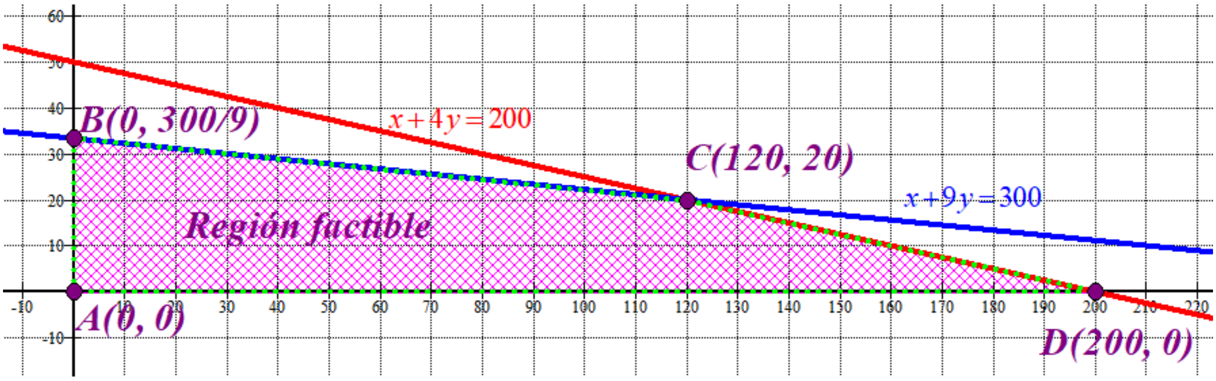
$x\ge 0;\ \ y\ge 0$

Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{ll} x+4y\le 200 & \to \text{por debajo} \\ x+9y\le 300 & \to \text{por debajo} \\ x\ge 0;\ \ y\ge 0 & \to \text{primer cuadrante} \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y azul.

Coloreamos de rosa dicha región.



Las coordenadas de los vértices son A(0, 0), B(0, 300/9), C(120, 20) y D(200, 0).

c) Valoramos la función beneficio $I(x,y)=50x+300y$ en cada uno de los vértices de la región factible.

A(0, 0) → $I(0,0)=0$

B(0, 300/9) → $I\left(0,\frac{300}{9}\right)=300\frac{300}{9}=10000$

C(120, 20) → $I(120,20)=6000+6000=12000$

D(200, 0) → $I(200,0)=10000$

El beneficio máximo se obtiene con 120 coches y 20 camiones. Dicho beneficio máximo es de 12000 €.

2 Donades les matrius de la forma $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

a) Calculau A^2. (2 punts)

b) Trobau a, b, c tals que $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (8 punts)

a)

$$A^2=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^2=\begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a^2=1 \\ b^2=1 \\ c^2=1 \\ a+b=0 \\ b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\sqrt{1}=\pm 1 \\ b=\sqrt{1}=\pm 1 \\ c=\sqrt{1}=\pm 1 \\ a=-b \\ c=-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1 \rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ c=-1 \end{cases} \\ o \\ b=-1 \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ c=1 \end{cases} \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

1ª. $a=-1$, $b=1$ y $c=-1$.

2ª. $a=1$, $b=-1$ y $c=1$.

3 En una botiga de fruita hem comprat pomes a 0.5 euros cadascuna, alvocats a 1 euro i pinyes a 1.5 euros la peça. En arribar a la caixa ens adonam que portam 70 peces de fruita, el cost total de les quals és de 68 euros. També observam que si les pomes que portam fossin alvocats i els alvocats fossin pomes, la compra ens sortiria 4 euros més barata.
a) Identificau les variables i interpretau l'enunciat com un conjunt d'equacions lineals. (5 punts)
b) Determinau el nombre de peces de cada fruita que hem comprat. (5 punts)

a) Llamamos "x" el número de manzanas, "y" al número de aguacates y "z" al número de piñas.

"*En arribar a la caixa ens adonam que portam 70 peces de fruita*" → $x+y+z=70$

"*Pomes a 0.5 euros cadascuna, alvocats a 1 euro i pinyes a 1.5 euros la peça. El cost total de les quals és de 68 euros*" → $0.5x+y+1.5z=68$

"*Si les pomes que portam fossin alvocats i els alvocats fossin pomes, la compra ens sortiria 4 euros més barata*" → $0.5y+x+1.5z=68-4$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=70 \\ 0.5x+y+1.5z=68 \\ 0.5y+x+1.5z=68-4 \end{array}\right\}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=70 \\ 0.5x+y+1.5z=68 \\ 0.5y+x+1.5z=68-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Multiplico por 2} \\ \text{la 2}^{\text{a}}\text{ y 3}^{\text{a}}\text{ ecuación} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=70 \\ x+2y+3z=136 \\ y+2x+3z=128 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=70 \\ x+2y+3z=136 \\ 2x+y+3z=128 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\text{Ecuación 2}^{\text{a}} - \text{Ecuación 1}^{\text{a}}} \\ x & +2y & +3z & =136 \\ -x & -y & -z & =-70 \\ \hline 0 & y & +2z & =66 \\ \multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Ecuación 2}^{\text{a}}} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\text{Ecuación 3}^{\text{a}} - 2\cdot\text{Ecuación 1}^{\text{a}}} \\ 2x & +y & +3z & =128 \\ -2x & -2y & -2z & =-140 \\ \hline 0 & -y & +z & =-12 \\ \multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Ecuación 3}^{\text{a}}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=70 \\ y+2z=66 \\ -y+z=-12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\text{Ecuación 3}^{\text{a}} + \text{Ecuación 2}^{\text{a}}} \\ -y & +z & = & -12 \\ y & +2z & = & 66 \\ \hline 0 & 3z & = & 54 \\ \multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Ecuación 3}^{\text{a}}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=70 \\ y+2z=66 \\ 3z=54 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=70 \\ y+2z=66 \\ \boxed{z=\frac{54}{3}=18} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+18=70 \\ y+36=66 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=70-18 \\ \boxed{y=66-36=30} \end{array}\right\} \Rightarrow x+30=52 \Rightarrow \boxed{x=22}$$

Se han comprado 22 manzanas, 30 aguacates y 18 piñas.

4 Considereu la funció definida a trossos següent

$$f(x)=\begin{cases}-4x+a & si \ \ x\leq -2\\ x^2-5 & si \ \ -2<x<1\\ -7x+3 & si \ \ x\geq 1\end{cases}$$

a) Calculau els valors de *a* perqué *f(x)* sigui conínua. (3 punts)
b) És *f(x)* derivable per *a = 1*? (3 punts)
b) Per *a = 0*, determinau els intervals de creixement i decreixement de *f(x)*. (4 punts)

a) Para que la función sea continua en *x = –2* debe cumplirse:

$$\left.\begin{array}{l} f(-2)=-4(-2)+a=8+a\\ \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-} -4x+a=8+a\\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} x^2-5=(-2)^2-5=-1\\ \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=f(-2)\end{array}\right\}\Rightarrow 8+a=-1\Rightarrow \boxed{a=-9}$$

Para que la función sea continua en *x = –2* debe ser *a = –9.*

¿La función es continua en *x = 1*?

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=-7(1)+3=-4\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2-5=1-5=-4\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} -7x+3=-4\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=-4$$

La función es continua en *x = 1.*

b) Para *a = 1* la función no es continua en *x = –2*, por lo que tampoco es derivable en *x = –2.*

Es derivable en cada tramo de definición pues son polinomios.

$$f(x)=\begin{cases}-4x+1 & si \ \ x\leq -2\\ x^2-5 & si \ \ -2<x<1\\ -7x+3 & si \ \ x\geq 1\end{cases}\Rightarrow f\,'(x)=\begin{cases}-4 & si \ \ x<-2\\ 2x & si \ \ -2<x<1\\ -7 & si \ \ x>1\end{cases}$$

Comprobamos si es derivable en *x = 1*. Sabemos que es continua, vemos si coinciden sus derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-} f\,'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 2x=2\\ f\,'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+} f\,'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} -7=-7\end{array}\right\}\Rightarrow f\,'(1^-)=2\neq -7=f\,'(1^+)$$

La función no es derivable en *x = 1.*

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{-2,1\}$

c) Para $a = 0$ la función es $f(x)=\begin{cases} -4x & si \;\; x \le -2 \\ x^2-5 & si \;\; -2<x<1 \\ -7x+3 & si \;\; x \ge 1 \end{cases}$

Analizamos el crecimiento y decrecimiento por tramos.

En $(-\infty,-2)$ la función es una recta $f(x)=-4x$ con derivada $f'(x)=-4<0$ por lo que siempre es decreciente en $(-\infty,-2)$.

En $(-2,1)$ la función es una parábola $f(x)=x^2-5$, hallamos su derivada y la igualamos a cero para encontrar su punto crítico.

$$f'(x)=2x$$
$$f'(x)=0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0$$

Dividimos el intervalo $(-2,1)$ en dos partes: antes de 0 y después de 0.

En $(-2,0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1)=-2<0$. La función decrece en $(-2,0)$.

En $(0,1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5)=1>0$. La función crece en $(0,1)$.

En $(1,+\infty)$ la función es una recta $f(x)=-7x+3$ con derivada $f'(x)=-7<0$ por lo que siempre es decreciente en $(1,+\infty)$.

Resumiendo: La función decrece en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(1,+\infty)$ y crece en $(0,1)$.

Como en $x = -2$ la función se acerca por la izquierda decreciendo y alcanzando el valor 8 y en $x = -2$ la función vale $(-2)^2-5=-1$ que es menor que 8, entonces también decrece en $x=-2$.

Resumiendo: La función decrece en $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ y crece en $(0,1)$.

5 El nombre d'individus, en milions, d'una població ve determinat per la funció

$$P(t)=\frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1},$$

on $t\geq 0$ mesura el nombre d'anys transcorreguts.

a) Quina és la població inicial (*t = 0*) i la població després de 5 anys? (2 punts)

b) A partir de quin moment la població será inferior a un milió d'individus? (4 punts)

c) Amb el pas dels anys, cap a quin valor tendirá el nombre d'individus de la població? (4 punts)

a) $P(0)=\frac{2+0+0^2}{0^2+0+1}=2$.

La población inicial es de dos millones de individuos.

$$P(5)=\frac{2+5+5^2}{5^2+10+1}=\frac{32}{36}\simeq 0.888888.$$

A los 5 años la población es aproximadamente de 888.888 individuos.

b) $P(t)<1\Rightarrow\frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1}<1\Rightarrow\left\{\begin{matrix}t^2+2t+1>0\\ siendo\ t\geq 0\end{matrix}\right\}\Rightarrow 2+t+t^2<t^2+2t+1\Rightarrow 1<t$

A partir del año 1.

Lo compruebamos → $P(1)=\frac{2+1+1^2}{1^2+2+1}=1;\quad P(2)=\frac{2+2+2^2}{2^2+4+1}=\frac{8}{9}\simeq 0.888888$

c) Calculamos el límite de la función cuando *t* tiende a +∞.

$$\lim_{t\to+\infty}P(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{2}{t^2}+\frac{t}{t^2}+\frac{t^2}{t^2}}{\frac{t^2}{t^2}+\frac{2t}{t^2}+\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t}+1}{1+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}+1}{1+\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}}=\frac{1}{1}=1$$

La población tiende a ser un millón de individuos con el paso de los años.

6 Considerem la funció $f(x)=\frac{3}{x}+8$

a) Trobau els punts de la gràfica en els quals la recta tangent és paral·lela a la recta $3x+4y+5=0$. (4 punts)

b) Calculau les equacions de les rectes tangents als punts trobats a l'apartat anterior. (2 punts)

c) Calculau l'àrea compresa entre la gràfica de la funció *f(x)* i les rectes $x=2$, $x=4$ i $y=0$. (4 punts)

a) Averiguamos la pendiente de la recta $3x+4y+5=0$.

$$3x+4y+5=0 \Rightarrow 4y=-3x-5 \Rightarrow y=-\frac{3}{4}x-\frac{5}{4} \Rightarrow \boxed{y'=-\frac{3}{4}}$$

La recta tiene pendiente $-\frac{3}{4}$. Averiguamos cuando la recta tangente a la gráfica de la función tiene esa pendiente, es decir, cuando la derivada de la función vale $-\frac{3}{4}$

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\frac{3}{x}+8 \Rightarrow f'(x)=-\frac{3}{x^2} \\ f'(x)=-\frac{3}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{3}{x^2}=-\frac{3}{4} \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{4}=\pm 2}$$

Como $f(-2)=\frac{3}{-2}+8=6.5$ uno de los puntos tiene coordenadas (–2, 6.5).

Como $f(2)=\frac{3}{2}+8=9.5$ otro de los puntos tiene coordenadas (2, 9.5).

b) La ecuación de la recta tangente en *x = –2* es $y-f(-2)=f'(-2)(x-(-2))$.

$$\left.\begin{array}{r} y-f(-2)=f'(-2)(x-(-2)) \\ f(-2)=6.5 \\ f'(-2)=-\frac{3}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow y-6.5=-\frac{3}{4}(x+2) \Rightarrow y=-\frac{3}{4}x+6.5-\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{y=-\frac{3}{4}x+5}$$

La ecuación de la recta tangente en *x = 2* es $y-f(2)=f'(2)(x-2)$.

$$\left.\begin{array}{r} y-f(2)=f'(2)(x-2) \\ f(2)=9.5 \\ f'(2)=-\frac{3}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow y-9.5=-\frac{3}{4}(x-2) \Rightarrow y=-\frac{3}{4}x+9.5+\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{y=-\frac{3}{4}x+11}$$

c) Comprobamos si la función corta a la recta *y = 0* entre *x = 2* y *x = 4*.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{3}{x}+8 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{x}+8=0 \Rightarrow \frac{3}{x}=-8 \Rightarrow x=-\frac{3}{8}$$

Este valor no está comprendido entre *x = 2* y *x = 4* por lo que el área de la región pedida es la integral definida entre *x = 2* y *x = 4* de la función $f(x)=\dfrac{3}{x}+8$.

$$\acute{A}rea=\int_2^4 f(x)dx=\int_2^4 \frac{3}{x}+8dx=\Big[3\ln|x|+8x\Big]_2^4=$$

$$=\Big[3\ln|4|+32\Big]-\Big[3\ln|2|+16\Big]=3\ln|4|-3\ln|2|+16\approx \boxed{18.08\,u^2}$$

7 En una mostra aleatória de 256 individus s'ha obtingut una edat mitjana de 17.4 anys. Se sap que la desviació típica de la població normal de la qual procedeix aquesta mostra és de 2 anys.

a) Calculau un interval de confiança del 95% per estimar l'edat mitjana de la població. (5 punts)

b) Calculau la mida mínima de la mostra que s'ha de prendre perqué en estimar l'edat mitjana d'aquesta població amb un nivell de confiança del 92%, l'error com és sigui inferior a 0.5 anys.

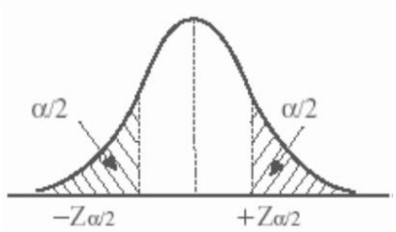
(5 punts)

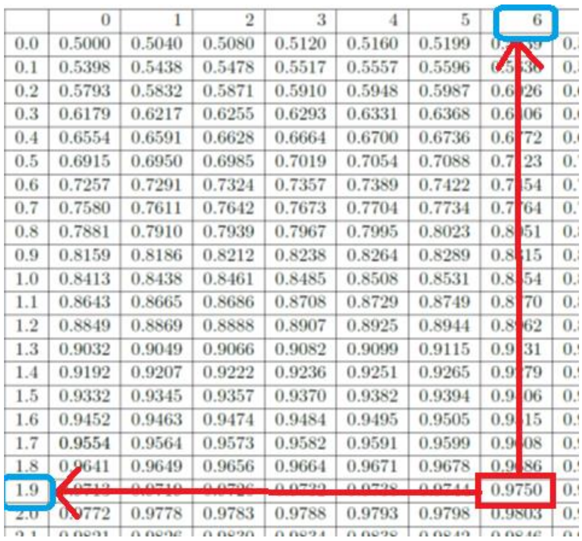
a) $X = N(\mu, 2)$

$\bar{x} = 17.4$ $n = 256$

Con un nivel de confianza del 95 %

$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,96}$





	0	1	2	3	4	5	6
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	[illegible]
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	[illegible]
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	[illegible]
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	[illegible]
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	[illegible]
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	[illegible]
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	[illegible]
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	[illegible]
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	[illegible]
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	[illegible]
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	[illegible]
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	[illegible]
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	[illegible]
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	[illegible]
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	[illegible]
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	[illegible]
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	[illegible]
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	[illegible]
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	[illegible]
1.9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9750
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{256}} = 0.245$$

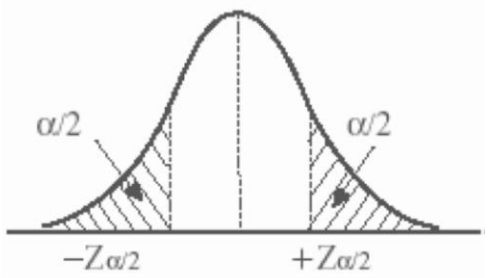
El intervalo de confianza es:

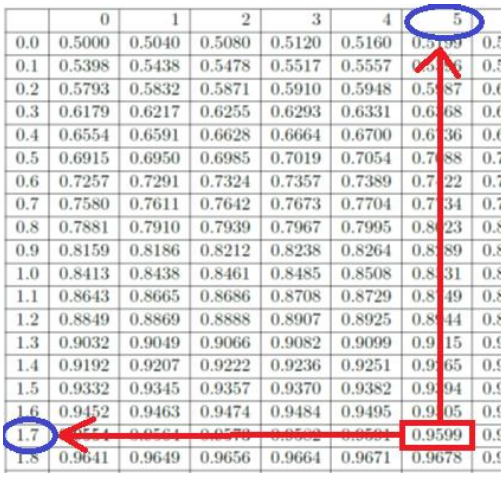
$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(17.4 - 0.245, 17.4 + 0.245\right) = \left(17.155, 17.645\right)$$

A. ¿n?

Con un nivel de confianza del 92 %

$1 - \alpha = 0,92 \rightarrow \alpha = 0,08 \rightarrow \alpha/2 = 0'04 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,96 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.75}$





	0	1	2	3	4	5
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	[illegible]
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	[illegible]
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	[illegible]
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	[illegible]
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	[illegible]
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	[illegible]
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	[illegible]
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	[illegible]
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	[illegible]
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	[illegible]
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	[illegible]
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	[illegible]
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	[illegible]
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	[illegible]
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	[illegible]
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	[illegible]
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	[illegible]
1.7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9599
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678

El error debe ser 0.5.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.5 = 1.75 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{0.5}{1.75} = \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2 \cdot 1.75}{0.5} \Rightarrow n = \left(\frac{2 \cdot 1.75}{0.5} \right)^2 = 49$$

Como n debe ser entero y superior al "n" hallado el tamaño mínimo es de 50 individuos.

8 En una determinada població resideixen 5000 persones en el centre i 10000 a la periféria. Se sap que el 95% dels residents en el centre i que el 20% dels que viuen a la periféria opina que l'ajuntament hauria de restringir l'accés de vehicles privats al centre urbá. Es tria a l'atzar un resident de la població.

a) Quina és la probabilitat que estigui a favor de restringir l'accés de vehicles privats al centre de la ciutat? (3 punts)

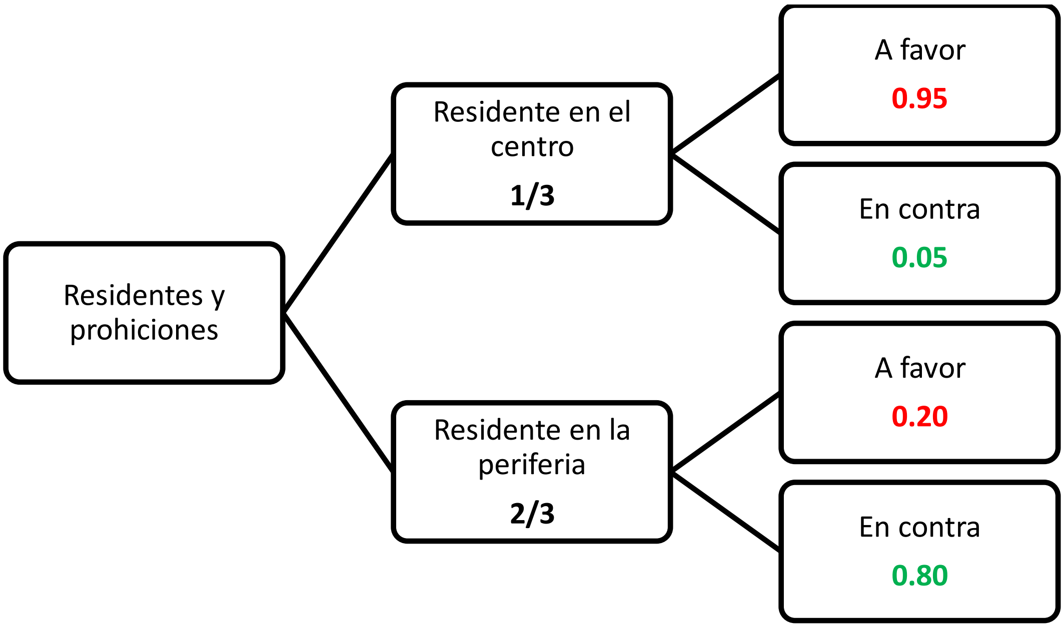
b) Quina és la probabilitat que resideixi en el centre i estigui a favor de la restricció d'accés?

(3 punts)

c) Si la persona triada opina que s'hauria de restringir l'accés, quina és la probabilitat que resideixi en el centre de la ciutat? (4 punts)

Llamamos A = Residente en el centro, B = Residente en la periferia.
C = Favorable a prohibir el acceso al centro con vehículo privado.

$$P(A)=\frac{5000}{15000}=\frac{1}{3},\; P(B)=\frac{10000}{15000}=\frac{2}{3}$$



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(C)=P(A)P(C/A)+P(B)P(C/B)=\frac{1}{3}\cdot 0.95+\frac{2}{3}\cdot 0.20=\boxed{\frac{9}{20}=0.45}$$

b) $P(A\cap C)=P(A)P(C/A)=\frac{1}{3}\cdot 0.95=\boxed{\frac{19}{60}\simeq 0.317}$

c) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{19}{60}}{\frac{9}{20}}=\boxed{\frac{19}{27}\simeq 0.704}$$

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Prova de batxillerat per a l'accés a la Universitat (PBAU)

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Versió en català

Instruccions generals:

- No podeu llegir l'enunciat fins que el professor no us autoritzi.
- No us podeu moure del lloc per demanar dubtes sobre l'examen, sinó que heu de fer-ho des del vostre lloc.
- Durant l'examen no està permès emprar telèfon mòbil (l'haureu de tenir apagat dins la bossa), rellotge ni qualsevol altre dispositiu electrònic.
- Recordau aferrar l'etiqueta identificadora al full de respostes als llocs indicats.
- Recordau que durant l'examen no està permès passar cap tipus de material a una altra persona.
- Si acabau la prova abans que expiri el temps assignat, heu d'aixecar el braç per esperar instruccions.

Model 3

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades. Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul. Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

1 Fa un any una societat de capital de risc va invertir 100000 euros en accions de tres empreses, que anomenarem A, B i C. Ara, les accions de l'empresa A han augmentat de valor en un 50 %, les de l'empresa B han augmentat en un 10 % i, en canvi, les de l'empresa C han perdut un 15 % del seu valor. Si la societat ara vengués totes les accions obtindria 102000 euros. Sabem que va invertir en les accions de l'empresa C el mateix que en les altres dues juntes.

a) Identificau les variables i interpretau l'enunciat com un conjunt d'equacions lineals. (5 punts)

b) Calculau la quantitat de doblers que la societat va invertir en accions de cada empresa. (5 punts)

2 En un taller es fabriquen dos tipus de bosses. Per fer una bossa del primer model es necessiten 0.9 m^2 de cuir i 8 hores de feina. Per al segon model es necessiten 1.2 m^2 de cuir i 4 hores de feina. Per fer aquests dos tipus de bosses el taller disposa de 60 m^2 de cuir i pot dedicar-hi un màxim de 400 hores de feina. El taller cobra 30 euros per una bossa del primer model i 25 per una del segon.

a) Plantejau la maximització del benefici de la companyia com un problema de programació lineal. (4 punts)

b) Dibuixau la regió factible per a la solució, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten. (4 punts)

c) Calculau el nombre de bosses de cada tipus que s'han de fabricar per tal d'obtenir un benefici màxim. Determinau també aquest benefici màxim. (2 punts)

3 Donat el següent sistema d'equacions

$$\begin{array}{rrrl} x & -ay & +2z & =0 \\ ax & -4y & -4z & =0 \\ 4x & +3y & -2z & =0 \end{array}$$

depenent del paràmetre a.

a) Discutiu per a quins valors de a el sistema té solució i quantes en té en cada cas. (6 punts)

b) Trobau la solució en el cas que $a = -2$. (4 punts)

4 Considerau la funció a trossos següent

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^3 + ax + 2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Calculau els valors de a perquè $f(x)$ sigui contínua i derivable. (5 punts)

b) Per a $a = 4$ calculau l'àrea compresa entre la gràfica de $f(x)$ i les rectes $x = 0$, $x = 1$ i $y = 0$. (5 punts)

5 La despesa mensual en euros en loteria d'un treballador ve determinada pel seu salari mitjançant la funció

$$f(x) = \frac{100x}{b + x^2},$$

en què $x \geq 0$ representa el salari en milers d'euros i $b > 0$ és un paràmetre.

a) Trobau el valor de b per al qual el màxim de la despesa s'obté amb un salari de 2 mil euros. (3 punts)

b) Per a $b = 9$, determinau el salari per al qual la despesa és màxima. A quant ascendeix aquesta despesa? (4 punts)

c) Per a $b = 9$, per a quins salaris la despesa mensual és superior a 10 euros? (3 punts)

6 Si el preu de l'entrada d'un cinema és de 8 euros, hi van 500 persones. El propietari sap per experiència que per cada augment d'1.5 euros en el preu de l'entrada hi van 30 espectadors menys. Trobau:

a) La funció que determina el nombre d'espectadors en funció del preu de l'entrada. (3 punts)

b) La funció que determina els ingressos del cinema en funció del preu de l'entrada. (2 punts)

c) El preu de l'entrada perquè els ingressos del propietari siguin màxims. (3 punts)

d) El nombre d'espectadors que aniran al cinema quan el preu sigui el que correspon als ingressos màxims i aquests ingressos màxims. (2 punts)

7 La producció en quilograms de taronges per taronger a Sóller segueix una distribució normal de desviació típica 2 i mitjana desconeguda.

a) Calculau la mida mínima de la mostra que s'ha de prendre perquè, en estimar la mitjana poblacional amb un nivell de confiança del 94 %, l'error comès sigui inferior a 1.5 kg. (5 punts)

b) Si s'agafa una mostra aleatòria de 10 tarongers, amb produccions en quilograms:

30 25 4 70 45 60 21 32 9 47

Calculau un interval de confiança del 97 % per estimar la producció mitjana de taronges per arbre. (5 punts)

8 En una certa empresa d'exportació, el 62.5% dels empleats parla anglès. D'altra banda, entre els empleats que parlen anglès, el 80% parla també alemany. Entre els empleats que no parlen anglès, només la tercera part sí que parla alemany.

a) Quin percentatge d'empleats parla les dues llengües? (4 punts)

b) Quin percentatge d'empleats parla alemany? (3 punts)

c) Si un empleat no parla alemany, quina és la probabilitat que parli anglès? (3 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Modelo 3

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4. Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

1 Hace un año una sociedad de capital riesgo invirtió 100000 euros en acciones de tres empresas, que llamaremos A, B y C. Ahora, las acciones de la empresa A han aumentado de valor en un 50 %, las de la empresa B han aumentado en un 10 % y, en cambio, las de la empresa C han perdido un 15 % de su valor. Si la sociedad ahora vendiera todas las acciones obtendría 102000 euros. Sabemos que invirtió en las acciones de la empresa C lo mismo que en las otras dos juntas.

a) Identifique las variables e interprete el enunciado mediante un conjunto de ecuaciones lineales. (5 puntos)

b) Calcule la cantidad de dinero que la sociedad invirtió en acciones de cada empresa. (5 puntos)

2 En un taller se fabrican dos tipos de bolsas. Para hacer una bolsa del primer modelo se necesitan 0.9 m^2 de cuero y 8 horas de trabajo. Para el segundo modelo necesitan 1.2 m^2 de cuero y 4 horas de trabajo. Para hacer estos dos tipos de bolsas el taller dispone de 60 m^2 de cuero y puede dedicar un máximo de 400 horas de trabajo. El taller cobra 30 euros por una bolsa del primer modelo y 25 por una del segundo.

a) Plantee la maximización del beneficio de la compañía como un problema de programación lineal. (4 puntos)

b) Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 puntos)

c) Calcule el número de bolsas de cada tipo que se tienen que fabricar para obtener un beneficio máximo. Determine también este beneficio máximo.

3 Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x-ay+2z&=0\\ ax-4y-4z&=0\\ 4x+3y-2z&=0 \end{aligned}\right\}$$

en función del parámetro *a*.

a) Discuta para qué valores de *a* el sistema tiene solución y cuántas tiene en cada caso. (6 puntos)

b) Encuentre la solución para $a = -2$. (4 puntos)

4 Consideremos la función a trozos siguiente

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & si \quad x<0 \\ x^3+ax+2 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

a) Calcule los valores de *a* para que *f(x)* sea continua y derivable. (5 puntos)

b) Para $a = 4$ calcule el área comprendida entre la gráfica de *f(x)* y las rectas $x = 0$, $x = 1$ e $y = 0$. (5 puntos)

5 El gasto mensual en euros en lotería de un trabajador viene determinado por su salario mediante la función:

$$f(x)=\frac{100x}{b+x^2},$$

en la que $x \geq 0$ representa el salario en miles de euros y $b > 0$ es un parámetro.

a) Encuentre el valor de b para el cual el máximo del gasto se obtiene con un salario mensual de 2 mil euros. (3 puntos)

b) Para $b = 9$, determine el salario para que el gasto sea máximo. ¿A cuánto asciende este gasto? (4 puntos)

c) Para $b = 9$, ¿para qué salarios el gasto mensual es superior a 10 euros? (3 puntos)

6 Si el precio de la entrada de un cine es de 8 euros, van 500 personas. El propietario sabe por experiencia que por cada aumento de 1.5 euros en el precio de la entrada van 30 espectadores menos. Encuentre:

a) La función que determina el número de espectadores en función del precio de la entrada. (3 puntos)

b) La función que determina los ingresos del cine en función del precio de la entrada. (2 puntos)

c) El precio de la entrada para que los ingresos del propietario sean máximos. (3 puntos)

d) El número de espectadores que irán al cine cuando el precio sea el que corresponde a los ingresos máximos y estos ingresos máximos. (2 puntos)

7 La producción en kilogramos de naranjas por naranjo en Sóller sigue una distribución normal de desviación típica 2 y media desconocida.

a) Calcule el tamaño de la muestra que se debe tomar para que al estimar la media poblacional con un nivel de confianza del 94 %, el error cometido sea inferior a 1.5 kg. (5 puntos)

b) Si se toma una muestra aleatoria de 10 naranjos, con producciones en kilogramos:

30 25 4 70 45 60 21 32 9 47

Calcule el intervalo de confianza del 97 % para estimar la producción media de naranjas por árbol. . (5 puntos)

8 En cierta empresa de exportación, el 62.5 % de los empleados hablan inglés. Por otra parte, entre los empleados que hablan inglés, el 80 % habla también alemán. Entre los empleados que no hablan inglés, sólo la tercera parte sí habla alemán

a) ¿Qué porcentaje de empleados habla las dos lenguas? (4 puntos)

b) ¿Qué porcentaje de empleados habla alemán? (3 puntos)

c) Si un empleado no habla alemán, ¿cuál es la probabilidad que hable inglés? (3 puntos)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal N(0, 1)

SOLUCIONES

1 Hace un año una sociedad de capital riesgo invirtió 100000 euros en acciones de tres empresas, que llamaremos A, B y C. Ahora, las acciones de la empresa A han aumentado de valor en un 50 %, las de la empresa B han aumentado en un 10 % y, en cambio, las de la empresa C han perdido un 15 % de su valor. Si la sociedad ahora vendiera todas las acciones obtendría 102000 euros. Sabemos que invirtió en las acciones de la empresa C lo mismo que en las otras dos juntas.
a) Identifique las variables e interprete el enunciado mediante un conjunto de ecuaciones lineales. (5 puntos)
b) Calcule la cantidad de dinero que la sociedad invirtió en acciones de cada empresa. (5 puntos)

a) Llamamos a = Dinero (en miles de euros) invertido en la empresa A, b = Dinero (en miles de euros) invertido en la empresa B y c = Dinero (en miles de euros) invertido en la empresa C.

"*Una sociedad de capital riesgo invirtió 100000 euros en acciones de tres empresas*" → $a+b+c=100$

"Las acciones de A valen ahora un 150 %, las de B un 110 % y las de C un 85 %. Si la sociedad ahora vendiera todas las acciones obtendría 102000 euros" → $1.50a+1.10b+0.85c=102$

"Sabemos que invirtió en las acciones de la empresa C lo mismo que en las otras dos juntas" → $c=a+b$.

Juntamos las tres ecuaciones y nos queda un sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=100 \\ 1.50a+1.10b+0.85c=102 \\ c=a+b \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=100 \\ 1.50a+1.10b+0.85c=102 \\ c=a+b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b+a+b=100 \\ 1.50a+1.10b+0.85(a+b)=102 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2a+2b=100 \\ 1.50a+1.10b+0.85a+0.85b=102 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=50 \\ 2.35a+1.95b=102 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=50-a \\ 2.35a+1.95b=102 \end{array}\right\} \Rightarrow 2.35a+1.95(50-a)=102 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2.35a+97.5-1.95a=102 \Rightarrow 0.4a=4.5 \Rightarrow \boxed{a=11.25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b=50-11.25=38.75} \Rightarrow \boxed{c=11.25+38.75=50}$$

Se han invertido 11250 € en acciones de A, 38750 € en acciones de B y 50000 € en acciones de C.

2 En un taller se fabrican dos tipos de bolsas. Para hacer una bolsa del primer modelo se necesitan 0.9 m^2 de cuero y 8 horas de trabajo. Para el segundo modelo necesitan 1.2 m^2 de cuero y 4 horas de trabajo. Para hacer estos dos tipos de bolsas el taller dispone de 60 m^2 de cuero y puede dedicar un máximo de 400 horas de trabajo. El taller cobra 30 euros por una bolsa del primer modelo y 25 por una del segundo.
a) Plantee la maximización del beneficio de la compañía como un problema de programación lineal. (4 puntos)
b) Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 puntos)
c) Calcule el número de bolsas de cada tipo que se tienen que fabricar para obtener un beneficio máximo. Determine también este beneficio máximo.

a) Llamamos x = número de bolsas del primer modelo, y = número de bolsas del segundo modelo.

Realizamos una tabla.

	m^2 de cuero	Horas de trabajo	Beneficio
Nº bolsas de primer modelo (x)	**0.9x**	**8x**	**30x**
Nº bolsas de segundo modelo (y)	**1.2y**	**4y**	**25y**
TOTAL	$0.9x+1.2y$	$8x+4y$	$30x+25y$

La función a maximizar es el beneficio que viene dado por la expresión:

$$B(x,y)=30x+25y$$

Las restricciones son:

"*Para hacer estos dos tipos de bolsas el taller dispone de 60 m^2 de cuero*" → $0.9x+1.2y\le 60$

"*Para hacer estos dos tipos de bolsas el taller puede dedicar un máximo de 400 horas de trabajo*" → $8x+4y\le 400$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos las restricciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l}0.9x+1.2y\le 60\\ 8x+4y\le 400\\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}9x+12y\le 600\\ 2x+y\le 100\\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x+4y\le 200\\ 2x+y\le 100\\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}$$

b) Empezamos dibujando las rectas que delimitan la región factible.

$3x+4y=200$

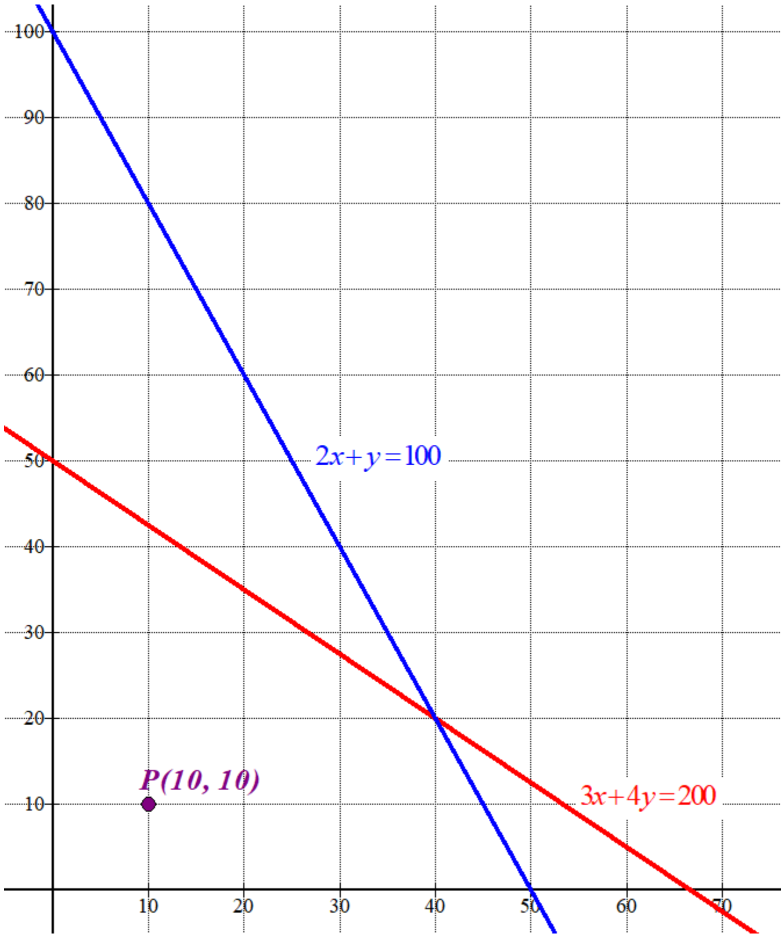
x	$y=\dfrac{200-3x}{4}$
0	120
40	20
60	5

$2x+y=100$

x	$y=100-2x$
0	100
40	20
50	0

$x\ge 0;\ \ y\ge 0$

Primer cuadrante

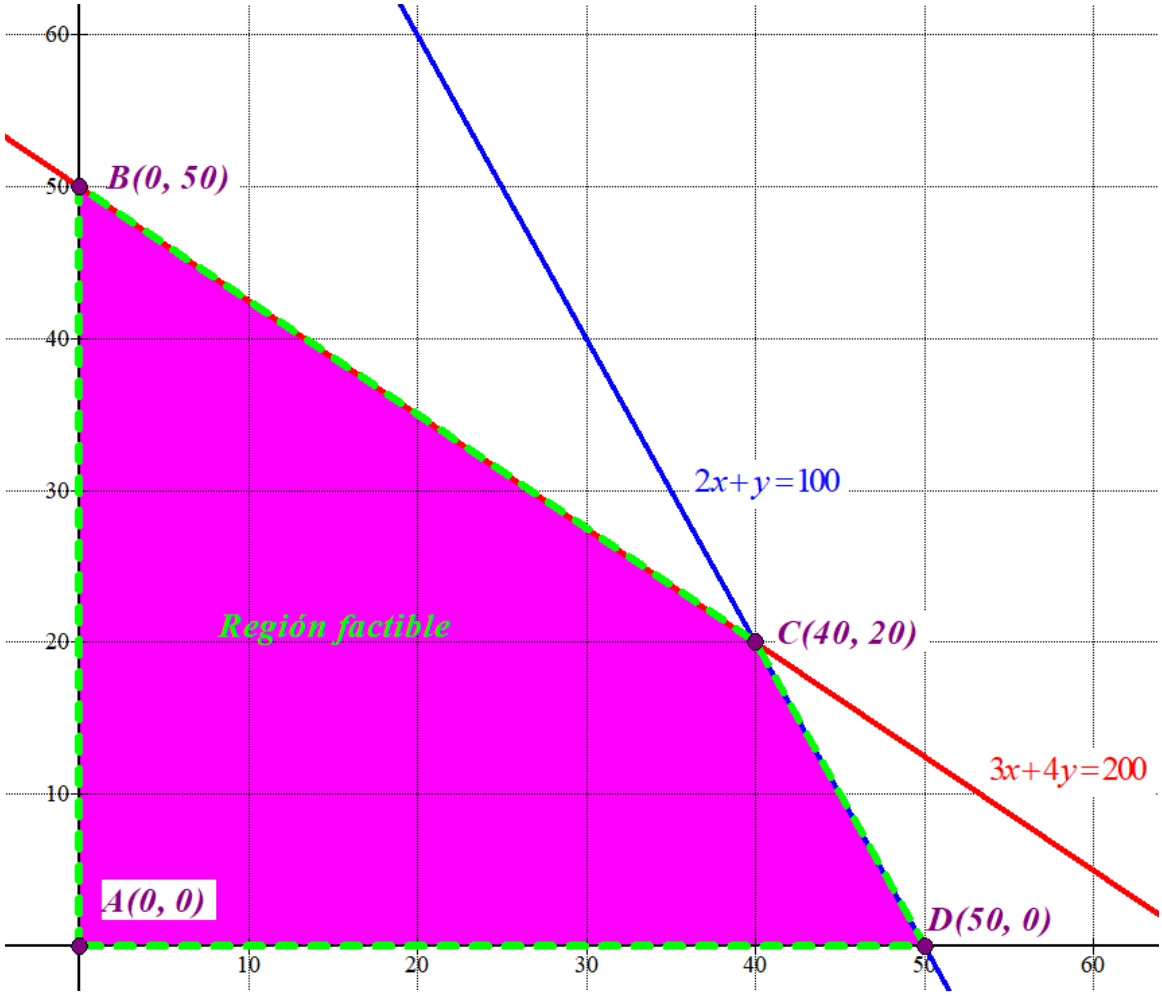


La región factible es la región del primer cuadrante que cumple las inecuaciones $\left.\begin{array}{l} 3x+4y\le 200 \\ 2x+y\le 100 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$, por lo tanto, es la región del primer cuadrante por debajo de las rectas azul y roja.

Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 30+40\le 200 \\ 20+10\le 100 \\ 10\ge 0;\ 10\ge 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



c) Para obtener el máximo beneficio valoramos la función $B(x,y)=30x+25y$ en cada uno de los vértices.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(0, 50) → $B(0,50)=0+1250=1250$

C(40, 20) → $B(40,20)=1200+500=$ 1700 ¡Máximo!

D(50, 0) → $B(50,0)=1500+0=1500$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice C(40, 20). Significa que fabricando 40 bolsas del primer tipo y 20 del segundo se consiguen unos beneficios máximos de 1700 €.

3 Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} x-ay+2z=0 \\ ax-4y-4z=0 \\ 4x+3y-2z=0 \end{array}\right\}$$

en función del parámetro *a*.

a) Discuta para qué valores de *a* el sistema tiene solución y cuántas tiene en cada caso. (6 puntos)

b) Encuentre la solución para *a* = –2. (4 puntos)

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & -a & 2 \\ a & -4 & -4 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -a & 2 \\ a & -4 & -4 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}=8+16a+6a+32-2a^2+12=-2a^2+22a+52$$

$$|A|=0 \Rightarrow -2a^2+22a+52=0 \Rightarrow a^2-11a-26=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{11\pm\sqrt{(-11)^2-4(-26)}}{2}=\frac{11\pm 15}{2}=\begin{cases} \dfrac{11+15}{2}=13=a \\ \dfrac{11-15}{2}=-2=a \end{cases}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a\neq 13$ y $a\neq -2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B e igual que el número de incógnitas (3).

El sistema tiene una única solución.

CASO 2. $a=13$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Utilizamos el método de Gauss para estudiar el rango de A y de A/B.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & -13 & 2 & 0 \\ 13 & -4 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila 2}^{\text{a}} - 13\cdot\text{Fila 1}^{\text{a}} \\ \begin{array}{cccc} 13 & -4 & -4 & 0 \\ -13 & +169 & -26 & 0 \\ \hline 0 & 165 & -30 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila 2}^{\text{a}} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Fila 3}^{\text{a}} - 4\cdot\text{Fila 1}^{\text{a}} \\ \begin{array}{cccc} 4 & 3 & -2 & 0 \\ -4 & 52 & -8 & 0 \\ \hline 0 & 55 & -10 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -13 & 2 & 0 \\ 0 & 165 & -30 & 0 \\ 0 & 55 & -10 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 3 \cdot \text{Fila } 3^a \\ 0 \quad 165 \quad -30 \quad 0 \\ 0 \quad -165 \quad +30 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -13 & 2 & 0 \\ 0 & 165 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el rango de A/B y es menor que el número de incógnitas (3).
El sistema tiene infinitas soluciones.

CASO 3. $a=-2$
En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Utilizamos el método de Gauss para estudiar el rango de A y de A/B.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ -2 \quad -4 \quad -4 \quad 0 \\ +2 \quad +4 \quad +4 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 4 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 4 \quad 3 \quad -2 \quad 0 \\ -4 \quad -8 \quad -8 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -5 \quad -10 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\text{Intercambiamos Fila } 2^a \text{ y Fila } 3^a\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el rango de A/B y es menor que el número de incógnitas (3).
El sistema tiene infinitas soluciones.

b) Para $a = -2$ el sistema tiene infinitas soluciones (CASO 3).
Resolvemos el sistema partiendo del sistema equivalente obtenido por Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} x+2y+2z=0 \\ -5y-10z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} x+2y+2z=0 \\ y+2z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} x+2y+2z=0 \\ y=-2z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-4z+2z=0 \Rightarrow x=2z \Rightarrow \boxed{Solución: \begin{cases} x=2t \\ y=-2t, t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}}$$

4 Consideremos la función a trozos siguiente

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & si \quad x<0 \\ x^3+ax+2 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

a) Calcule los valores de *a* para que *f(x)* sea continua y derivable. (5 puntos)
b) Para *a* = *4* calcule el área comprendida entre la gráfica de *f(x)* y las rectas *x* = *0*, *x* = *1* e *y* = *0*. (5 puntos)

a) Basta comprobar que es continua en *x* = *0*.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x^2-3x+2=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^3+ax+2=2 \\ f(0)=0^3+a\cdot 0+2=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=2$$

La función es continua independientemente del valor de "a".

La derivada en $\mathbb{R}-\{0\}$ es:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & si \quad x<0 \\ 3x^2+a & si \quad x>0 \end{cases}$$

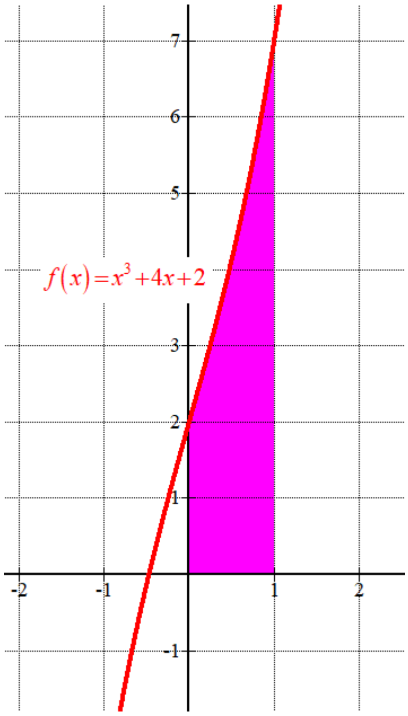
Para que sea derivable en *x* = *0* debe cumplirse que las derivadas laterales coincidan.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2x-3=-3 \\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 3x^2+a=a \\ f'(0^-)=f'(0^+) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a=-3}$$

Para que la función sea continua y derivable debe ser *a* = *–3*.

b) Para *a* = *4* la función es $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & si \quad x<0 \\ x^3+4x+2 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$.

Como el área está comprendida entre las rectas *x* = *0*, *x* = *1* la función es $f(x)=x^3+4x+2$.



$$Área=\int_0^1 x^3+4x+2\,dx=\left[\frac{x^4}{4}+2x^2+2x\right]_0^1=$$

$$=\left[\frac{1^4}{4}+2\cdot 1^2+2\cdot 1\right]-\left[\frac{0^4}{4}+2\cdot 0^2+2\cdot 0\right]$$

$$\boxed{Área=\frac{1}{4}+2+2=\frac{17}{4}=4.25u^2}$$

5 El gasto mensual en euros en lotería de un trabajador viene determinado por su salario mediante la función:

$$f(x)=\frac{100x}{b+x^2},$$

en la que $x \geq 0$ representa el salario en miles de euros y $b > 0$ es un parámetro.
a) Encuentre el valor de b para el cual el máximo del gasto se obtiene con un salario mensual de 2 mil euros. (3 puntos)
b) Para $b = 9$, determine el salario para que el gasto sea máximo. ¿A cuánto asciende este gasto? (4 puntos)
c) Para $b = 9$, ¿para qué salarios el gasto mensual es superior a 10 euros? (3 puntos)

a) En $x = 2$ hay un máximo. La derivada se anula para $x = 2$.

$$f'(x)=\frac{100\left(b+x^2\right)-(2x)100x}{\left(b+x^2\right)^2}=\frac{100b+100x^2-200x^2}{\left(b+x^2\right)^2}=\frac{100b-100x^2}{\left(b+x^2\right)^2}$$

$$f'(2)=0 \Rightarrow \frac{100b-100\cdot 2^2}{\left(b+2^2\right)^2}=0 \Rightarrow 100b-400=0 \Rightarrow 100b=400 \Rightarrow \boxed{b=4}$$

Comprobamos que para $b = 4$ la derivada es positiva antes de $x = 2$ y negativa después.

- En el intervalo $[0,2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=\frac{400-100\cdot 1^2}{\left(4+1^2\right)^2}=12>0$. La función crece en $[0,2)$.
- En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3)=\frac{400-100\cdot 3^2}{\left(4+3^2\right)^2}=-\frac{500}{169}<0$. La función decrece en $(2,+\infty)$.

En $x = 2$ hay un máximo de la función $f(x)=\frac{100x}{4+x^2}$

b) Para $b = 9$ la función queda $f(x)=\frac{100x}{9+x^2}$.

$$f'(x)=\frac{100\left(9+x^2\right)-(2x)100x}{\left(9+x^2\right)^2}=\frac{900+100x^2-200x^2}{\left(9+x^2\right)^2}=\frac{900-100x^2}{\left(9+x^2\right)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{900-100x^2}{\left(9+x^2\right)^2}=0 \Rightarrow 900-100x^2=0 \Rightarrow 100x^2=900 \Rightarrow x^2=\frac{900}{100}=9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\sqrt{9}=\pm 3}$$

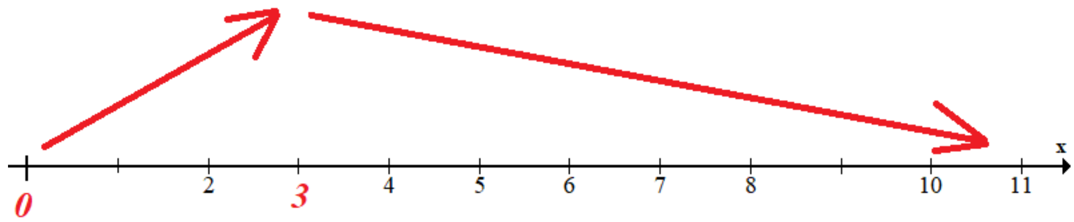
Solo nos interesa el valor positivo ($x = 3$). Estudiamos el signo de la derivada entre 0 y 3, y después de 3.

- En el intervalo $[0,3)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{900-100\cdot 1^2}{(9+1^2)^2} = 8 > 0$.

  La función crece en $[0,3)$.
- En el intervalo $(3,+\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale

  $f'(4) = \frac{900-100\cdot 4^2}{(9+4^2)^2} = -\frac{28}{25} < 0$. La función decrece en $(3,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



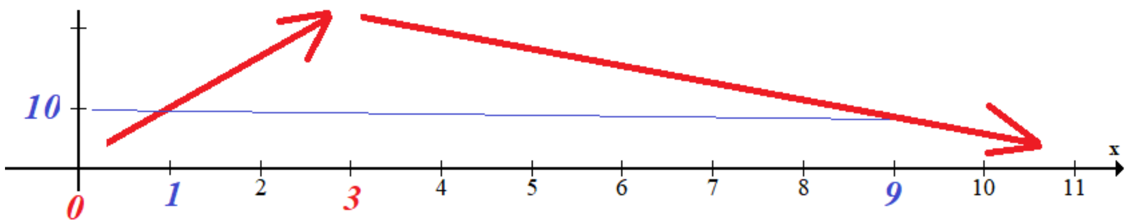
En $x = 3$ hay un máximo de la función $f(x) = \frac{100x}{9+x^2}$.

Como $f(3) = \frac{300}{9+3^2} = \frac{50}{3} \simeq 16.67$ tenemos que el gasto máximo es de 16.67 € y se produce con un salario de 3000 € mensuales.

c) Para $b = 9$ la función queda $f(x) = \frac{100x}{9+x^2}$.

$$f(x) = 10 \Rightarrow \frac{100x}{9+x^2} = 10 \Rightarrow \frac{10x}{9+x^2} = 1 \Rightarrow 10x = 9 + x^2 \Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 36}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{10+8}{2} = 9 = x \\ \frac{10-8}{2} = 1 = x \end{cases}$$



El gasto es de 10 € con un salario de 1000 o de 9000 €. Y entre 1000 y 9000 € el gasto es superior a 10 € como se aprecia en el esquema superior.

6 Si el precio de la entrada de un cine es de 8 euros, van 500 personas. El propietario sabe por experiencia que por cada aumento de 1.5 euros en el precio de la entrada van 30 espectadores menos. Encuentre:

a) La función que determina el número de espectadores en función del precio de la entrada. (3 puntos)

b) La función que determina los ingresos del cine en función del precio de la entrada. (2 puntos)

c) El precio de la entrada para que los ingresos del propietario sean máximos. (3 puntos)

d) El número de espectadores que irán al cine cuando el precio sea el que corresponde a los ingresos máximos y estos ingresos máximos. (2 puntos)

a) Llamamos *x* al precio de la entrada y *f(x)* al número de espectadores. El número de espectadores depende del precio de la entrada.

Sabemos que *f(8) = 500* y que si cuesta 9.5 euros hay 500 –30 = 470 espectadores.

La función es lineal y su expresión es $f(x)=mx+n$.

$$\left.\begin{array}{l} f(8)=500=8m+n \\ f(9.5)=470=9.5m+n \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 500=8m+n \\ -470=-9.5m-n \end{array}\right\}$$

$$30=-1.5m$$

$$\Rightarrow m=\frac{30}{-1.5}=-20 \Rightarrow 500=-160+n \Rightarrow n=660 \Rightarrow \boxed{f(x)=-20x+660}$$

b) Los ingresos *I(x)* es el producto del número de entradas (*f(x)*) y el precio de la entrada (*x*).

$$I(x)=x\cdot f(x)=x(-20x+660)$$

$$\boxed{I(x)=-20x^2+660x}$$

c) Derivamos e igualamos a cero la función ingresos.

$$I'(x)=-40x+660$$

$$I'(x)=0 \Rightarrow -40x+660=0 \Rightarrow \boxed{x=\frac{660}{40}=16.5}$$

Sustituimos *x = 16.5* en la segunda derivada

$$I''(x)=-40 \Rightarrow I''(16.5)=-40<0$$

La función ingresos presenta un máximo en *x = 16.5*.

Los ingresos son máximos con un precio de la entrada de 16.5 €.

d) Para *x = 16.5* tenemos ingresos máximos por valor de $I(16.5)=-20\cdot 16.5^2+660\cdot 16.5=\boxed{5445\text{ €}}$.

El número de espectadores para *x = 16.5* es de $f(16.5)=-20\cdot 16.5+660=\boxed{330}$.

7 La producción en kilogramos de naranjas por naranjo en Sóller sigue una distribución normal de desviación típica 2 y media desconocida.
a) Calcule el tamaño de la muestra que se debe tomar para que al estimar la media poblacional con un nivel de confianza del 94 %, el error cometido sea inferior a 1.5 kg. (5 puntos)
b) Si se toma una muestra aleatoria de 10 naranjos, con producciones en kilogramos:

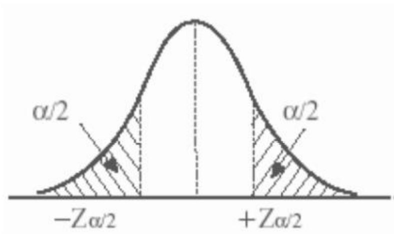
30 25 4 70 45 60 21 32 9 47

Calcule el intervalo de confianza del 97 % para estimar la producción media de naranjas por árbol.
. (5 puntos)

X = Producción de naranjas por naranjo (en kilogramos).
X = N(**μ**, 2)

a) Con un nivel de confianza del 94 %

$$1 - \alpha = 0{,}94 \rightarrow \alpha = 0{,}06 \rightarrow \alpha/2 = 0'03 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}97 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.88}$$



	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	[illegible]
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	[illegible]
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	[illegible]
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	[illegible]
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	[illegible]
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	[illegible]
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	[illegible]
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	[illegible]
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	[illegible]
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	[illegible]
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	[illegible]
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	[illegible]
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	[illegible]
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	[illegible]
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	[illegible]
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	[illegible]
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	[illegible]
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	[illegible]
1.8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812

Igualamos el error a 1.5 kilogramos.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.5 = 1.88 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.5\sqrt{n} = 1.88 \cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.88 \cdot 2}{1.5} \Rightarrow n = \left(\frac{1.88 \cdot 2}{1.5}\right)^2 = 6.2834$$

Como n debe ser entero y superior al "n" hallado el tamaño mínimo de la muestra es de 7 naranjos.

b) Tamaño de muestra = n = 10. $\bar{x} = \frac{30+25+4+70+45+60+21+32+9+47}{10} = 34.3\,kg$

Con un nivel de confianza del 97%

1 – α = 0,97 → α = 0,03 → α /2 = 0’015 →1 – α /2 = 0,985 → $z_{\alpha/2}$ **= 2,17**

	0	1	2	3	4	5	6	7	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.531
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.571
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.610
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.648
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.684
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.719
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.751
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.782
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.810
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.836
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.859
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.881
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.899
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.916
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.930
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.942
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.953
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.962
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.969
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.976
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.981
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.985

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}} \simeq 1.372\,kg$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(34.3 - 1.372,\ 34.3 + 1.372\right) = \left(32.928,\ 35.672\right)$$

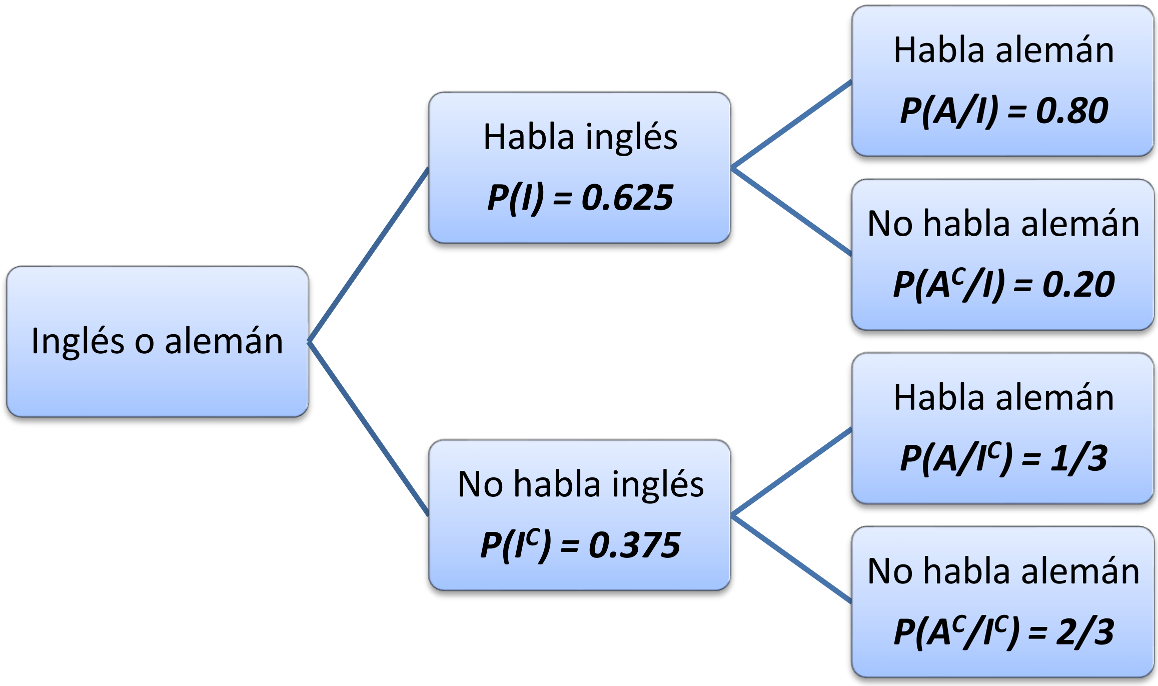
8 En cierta empresa de exportación, el 62.5 % de los empleados hablan inglés. Por otra parte, entre los empleados que hablan inglés, el 80 % habla también alemán. Entre los empleados que no hablan inglés, sólo la tercera parte sí habla alemán

a) ¿Qué porcentaje de empleados habla las dos lenguas? (4 puntos)

b) ¿Qué porcentaje de empleados habla alemán? (3 puntos)

c) Si un empleado no habla alemán, ¿cuál es la probabilidad que hable inglés? (3 puntos)

Realizamos un diagrama de árbol.



Hemos llamado I = Hablar inglés, A = Hablar alemán.

a) $P(I \cap A) = P(I)P(A/I) = 0.625 \cdot 0.8 = \boxed{0.5}$

Hablan los dos idiomas el 50 % de los empleados.

b) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(A) = P(I)P(A/I) + P(I^C)P(A/I^C) = 0.625 \cdot 0.8 + 0.375 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{8} = 0.625$$

El 62.5 % de los empleados habla alemán.

c) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(I/A^C) = \frac{P(I \cap A^C)}{P(A^C)} = \frac{P(I)P(A^C/I)}{1-P(A)} = \frac{0.625 \cdot 0.2}{1-0.625} = \boxed{\frac{1}{3} \simeq 0.333}$$

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Modelo 1

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4. Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

1 Dado el sistema siguiente:

$$\begin{aligned} 3x+2y+z&=1 \\ -mx+2y+z&=2 \end{aligned}$$

dependiente del parámetro *m*.

a) Discuta para qué valores de *m* el sistema tiene solución y cuántas tiene en cada caso. (5 puntos)

b) Encuentre la solución para *m = 2*. (5 puntos)

2 Dadas las matrices

$$X=\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad Y=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & k \end{pmatrix}$$

a) Encuentre los valores de *k* para los cuáles Y es invertible. (3 puntos)

b) Encuentre la inversa de Y para *k = 1*. (3 puntos)

c) Determine los valores de *m* y *n* para los que la matriz X satisface

$$X^2-4X+n\,Id=0,$$

Donde Id denota la matriz identidad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y 0 la matriz nula $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. (4 puntos)

3 El dueño de una tienda de chucherías dispone de 10 paquetes de pipas, 30 chicles y 18 bombones. Decide que para su mejor venta confeccionará dos tipos de paquetes: el tipo A estará formado por un paquete de pipas, dos chicles y dos bombones y se venderá a 1´5 euros. El tipo B estará formado por un paquete de pipas, cuatro chicles y un bombón y se venderá a 2 euros.

a) Plantee la maximización del beneficio de la tienda como un problema de programación lineal. (4 puntos)

b) Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 puntos)

c) Calcule el número de paquetes de tipo A y B que se tienen que confeccionar y vender para obtener un beneficio máximo. Determine también este beneficio máximo. (2 puntos)

4 Dada la función $f(x)=-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+3}$

a) Encuentre su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento. (5 puntos)

b) Encuentre una primitiva de *f(x)*. (3 puntos)

c) Calcule el área comprendida entre la gráfica de la función *f(x)* y las rectas *x = 4, x = 7* e *y = 0*. (2 puntos)

5 Una academia de inglés cobra una cuota de 50 euros mensuales y cuenta con 200 estudiantes. Un estudio de mercado afirma que por cada 2 euros que sube (o baja) la cuota se pierden (o se ganan) 10 estudiantes.

a) Escriba el número de estudiantes de la academia en función del precio de la cuota. (3 puntos)
b) ¿Para qué valor de la cuota la academia se quedaría sin estudiantes? (2 puntos)
c) Determine en qué precio se debe fijar la cuota para obtener un ingreso mensual máximo. ¿Cuál sería ese ingreso y cuántos estudiantes tendría la academia? (5 puntos)

6 La evolución de la población de un Estado, en millones de habitantes, se puede aproximar mediante la función

$$P(t)=\frac{20t}{4+t^2}+40,\ \ t\geq 0$$

donde t es el tiempo en años.

a) Calcule la población actual (para $t = 0$) (2 puntos)
b) Determine el límite de $P(t)$ cuando t tiende a infinito. (3 puntos)
c) Determine al cabo de cuántos años la población será máxima y el número de habitantes que la función predice para este máximo. (5 puntos)

7 En una universidad se ha observado que la distribución de las calificaciones de Física en los estudios de Ingeniería Informática sigue una ley normal de media $\mu = 5.1$ puntos y desviación típica $\sigma = 1.6$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar obtenga una nota inferior a 4 puntos? (3 puntos)
b) ¿Cuál es la probabilidad que una muestra de 64 alumnos tenga una media superior a 5.9? (4 puntos)
c) Si en un aula hay 50 alumnos, ¿cuántos alumnos se puede esperar que tengan una nota superior a 4 puntos? (3 puntos)

8 Sean A y B dos sucesos tales que

$$p(B/A)=0.9 \qquad p(A/B)=0.2 \qquad p(A)=0.1$$

a) Calcule $p(A\cap B)$ y $p(B)$. (5 puntos)
b) ¿Son A y B sucesos independientes? Justifique la respuesta. (2 puntos)
c) Calcule $p(A\cap \overline{B})$, donde $\overline{B}$ denota el suceso complementario de B. (3 puntos)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal N(0, 1)

SOLUCIONES

1 Dado el sistema siguiente:

$$\begin{aligned} 3x+2y+z&=1 \\ -mx+2y+z&=2 \end{aligned}$$

dependiente del parámetro *m*.

a) Discuta para qué valores de *m* el sistema tiene solución y cuántas tiene en cada caso. (5 puntos)

b) Encuentre la solución para *m = 2*. (5 puntos)

Obtenemos un sistema equivalente más sencillo de estudiar.

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y+z=1 \\ -mx+2y+z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2y+z+3x=1 \\ 2y+z-mx=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} 2y+z+3x & =1 \\ -2y-z+mx & =-2 \end{array}\right\} \quad \overline{(3+m)x=-1}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2y+z+\quad 3x=1 \\ (3+m)x=-1 \end{array}\right\}$$

Se plantean dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

- Si $3+m=0 \rightarrow m=-3$ entonces el sistema queda $\left.\begin{array}{r} 2y+z+3x=1 \\ 0=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ ¡Imposible!

  Si $m=-3$ el sistema es incompatible (sin solución).

- Si $3+m\neq 0 \rightarrow m\neq -3$ entonces el sistema se puede resolver, pues queda:

$$\left.\begin{array}{r} 2y+z+\quad 3x=1 \\ (3+m)x=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \{3+m\neq 0\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2y+z+\quad 3x=1 \\ \boxed{x=\dfrac{-1}{3+m}} \end{array}\right\} \Rightarrow 2y+z+3\frac{-1}{3+m}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y+z=1+\frac{3}{3+m} \Rightarrow 2y+z=\frac{3+m+3}{3+m} \Rightarrow \boxed{z=\frac{6+m}{3+m}-2y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Solución:} \begin{cases} x=\dfrac{-1}{3+m} \\ y=t \\ z=\dfrac{6+m}{3+m}-2t \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

a) El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) cuando $m\neq -3$

b) Si $m=2$ el sistema tiene infinitas soluciones, Sustituimos en las soluciones obtenidas anteriormente para $m\neq -3$.

$$\text{Solución:}\begin{cases} x = \dfrac{-1}{3+2} = -\dfrac{1}{5} \\ y = t \\ z = \dfrac{6+2}{3+2} - 2t = \dfrac{8}{5} - 2t \end{cases}$$

Las infinitas soluciones son: $x = -\dfrac{1}{5};\ \ y = t;\ \ z = \dfrac{8}{5} - 2t;\ \ t \in \mathbb{R}$

2 Dadas las matrices

$$X=\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad Y=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & k \end{pmatrix}$$

a) Encuentre los valores de k para los cuáles Y es invertible. (3 puntos)
b) Encuentre la inversa de Y para $k = 1$. (3 puntos)
c) Determine los valores de m y n para los que la matriz X satisface

$$X^2-4X+n\,Id=0,$$

Donde Id denota la matriz identidad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y 0 la matriz nula $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. (4 puntos)

a) La matriz Y es invertible si su determinante es no nulo.

$$\left.\begin{array}{r} |Y|=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix}=-k-4 \\ |Y|=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -k-4=0 \Rightarrow \boxed{k=-4}$$

La matriz Y es invertible si $k \neq -4$.

b) Si $k = 1$ la matriz Y es invertible.

$$|Y|=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1-4=-5\neq 0.$$

$$Y^{-1}=\frac{Adj\left(Y^T\right)}{|Y|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{-5}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Y^{-1}=\begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}}$$

c) Sustituimos en la ecuación matricial los valores de las matrices y resolvemos.

$$X^2-4X+n\,Id=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}-4\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}+n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4m & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} m^2-4m+n & 0 \\ 0 & -3+n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^2-4m+n=0 \\ -3+n=0 \to \boxed{n=3} \end{cases} \Rightarrow m^2-4m+3=0 \Rightarrow m=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-12}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases} \frac{4+2}{2}=\boxed{3=m} \\ \frac{4-2}{2}=\boxed{1=m} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $m = n = 3$ o $m = 1$ y $n = 3$.

3 El dueño de una tienda de chucherías dispone de 10 paquetes de pipas, 30 chicles y 18 bombones. Decide que para su mejor venta confeccionará dos tipos de paquetes: el tipo A estará formado por un paquete de pipas, dos chicles y dos bombones y se venderá a 1´5 euros. El tipo B estará formado por un paquete de pipas, cuatro chicles y un bombón y se venderá a 2 euros.
a) Plantee la maximización del beneficio de la tienda como un problema de programación lineal. (4 puntos)
b) Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 puntos)
c) Calcule el número de paquetes de tipo A y B que se tienen que confeccionar y vender para obtener un beneficio máximo. Determine también este beneficio máximo. (2 puntos)

a) Llamamos x = número de paquetes del tipo A, y = número de paquetes del tipo B.

Realizamos una tabla.

	Paquetes de pipas	chicles	Bombones	Beneficio
Nº paquetes tipo A (x)	**x**	**2x**	**2x**	**1.5x**
Nº paquetes tipo B (y)	**y**	**4y**	**y**	**2y**
TOTAL	$x+y$	$2x+4y$	$2x+y$	$1.5x+2y$

La función a maximizar es el beneficio que viene dado por la expresión:

$$B(x,y)=1.5x+2y$$

Las restricciones son:

"*dispone de 10 paquetes de pipas, 30 chicles y 18 bombones*" → $x+y\le 10;\ 2x+4y\le 30;\ 2x+y\le 18$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos las restricciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\le 10 \\ 2x+4y\le 30 \\ 2x+y\le 18 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y\le 10 \\ x+2y\le 15 \\ 2x+y\le 18 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

b) Empezamos dibujando las rectas que delimitan la región factible.

$x+y=10$

x	$y=10-x$
0	10
5	5
8	2

$x+2y=15$

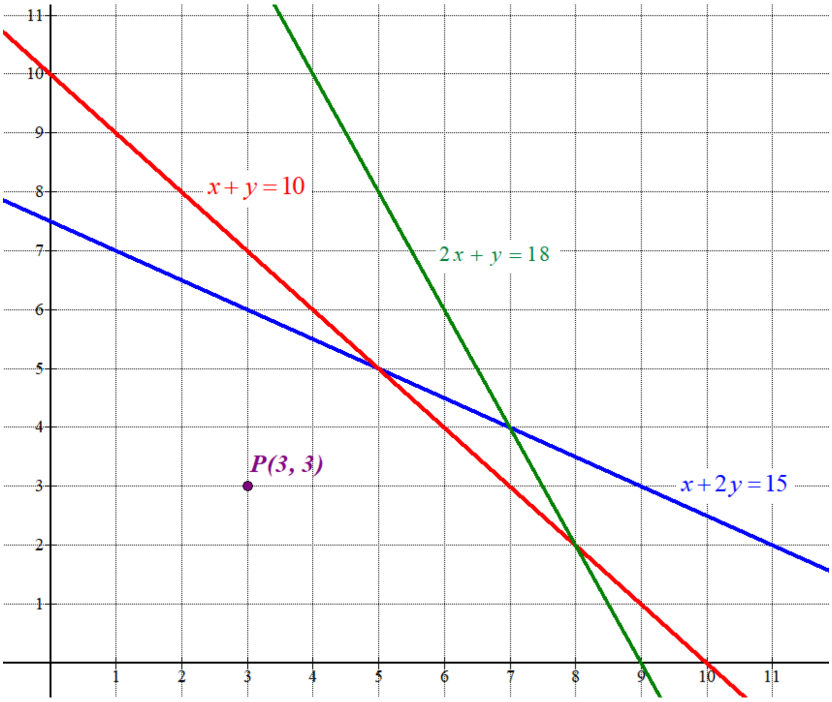
x	$y=\dfrac{15-x}{2}$
0	7.5
5	5
15	0

$2x+y=18$

x	$y=18-2x$
0	18
7	4
8	2

$x\ge 0;\ y\ge 0$

Primer cuadrante

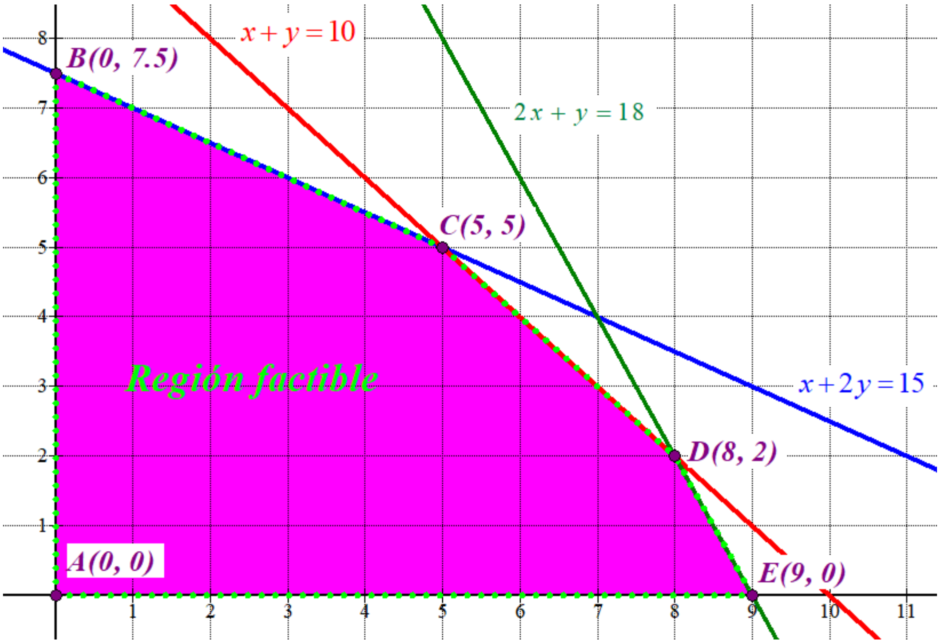


La región factible es la región del primer cuadrante que cumple las inecuaciones $\left.\begin{array}{l} x+y\leq 10 \\ x+2y\leq 15 \\ 2x+y\leq 18 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$, por lo tanto, es la región del primer cuadrante por debajo de las rectas azul, verde y roja.

Comprobamos que el punto P(3, 3) perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 3+3\leq 10 \\ 3+6\leq 15 \\ 6+3\leq 18 \\ 3\geq 0;\ 3\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



c) Para obtener el máximo beneficio valoramos la función $B(x,y)=1.5x+2y$ en cada uno de los vértices.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$
B(0, 7.5) → $B(0,7.5)=0+15=15$
C(5, 5) → $B(5,5)=7.5+10=17.5$ ¡Máximo!
D(8, 2) → $B(8,2)=12+4=16$
E(9, 0) → $B(9,0)=13.5+0=13.5$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice C(5, 5). Significa que confeccionando y vendiendo 5 paquetes de cada tipo se consiguen unos beneficios máximos de 17.5 €.

4 Dada la función $f(x)=-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}$

a) Encuentre su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento. (5 puntos)

b) Encuentre una primitiva de *f(x)*. (3 puntos)

c) Calcule el área comprendida entre la gráfica de la función *f(x)* y las rectas *x = 4, x = 7* e *y = 0.* (2 puntos)

a) El dominio son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

Dominio $f(x)=\mathbb{R}-\{-3,1\}$

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento utilizamos la derivada.

$$f(x)=-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}=\frac{-(x+3)+x-1}{(x-1)(x+3)}=\frac{-x-3+x-1}{x^2+3x-x-3}=\frac{-4}{x^2+2x-3}$$

$$f'(x)=\frac{0-(-4)(2x+2)}{\left(x^2+2x-3\right)^2}=\frac{8x+8}{\left(x^2+2x-3\right)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{8x+8}{\left(x^2+2x-3\right)^2}=0\Rightarrow 8x+8=0\Rightarrow 8x=-8\Rightarrow\boxed{x=-1}$$

Tenemos un punto crítico. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x=-3$, $x=-1$ y $x=1$.

En el intervalo $(-\infty,-3)$ tomamos *x = –4* y la derivada vale

$f'(-4)=\frac{8(-4)+8}{\left((-4)^2+2(-4)-3\right)^2}=\frac{-24}{25}<0$. La función decrece en $(-\infty,-3)$.

En el intervalo $(-3,-1)$ tomamos *x = –2* y la derivada vale

$f'(-2)=\frac{8(-2)+8}{\left((-2)^2+2(-2)-3\right)^2}=\frac{-8}{9}<0$. La función decrece en $(-3,-1)$.

En el intervalo $(-1,1)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $f'(0)=\frac{8}{(-3)^2}=\frac{8}{9}>0$. La función crece en $(-1,1)$.

En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $f'(2)=\frac{16+8}{\left(2^2+4-3\right)^2}=\frac{24}{25}>0$.

La función crece en $(1,+\infty)$.

Resumiendo: La función decrece en $(-\infty,-3)\cup(-3,-1)$ y crece en $(-1,1)\cup(1,+\infty)$

b)

$$F(x)=\int f(x)dx=\int-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}dx=-\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{1}{x+3}dx=\boxed{-\ln|x-1|+\ln|x+3|+K}$$

c) Vemos si la función corta el eje de abscisas.

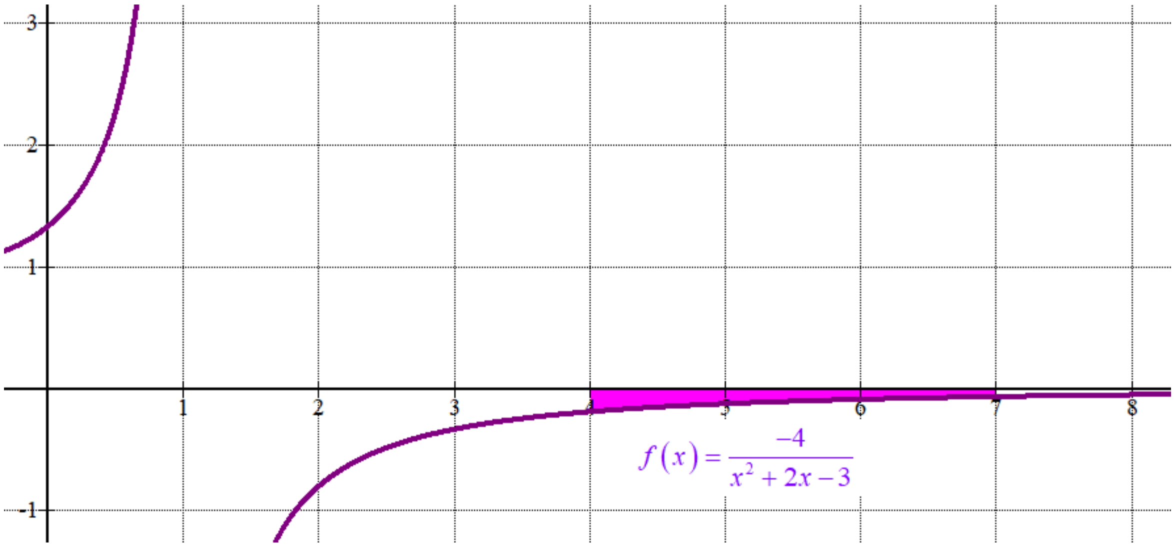
$$\left.\begin{array}{r} f(x) = -\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{-4}{x^2+2x-3} \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = \dfrac{-4}{x^2+2x-3} \Rightarrow -4 = 0 \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

La función no corta el eje de abscisas.
El área comprendida entre la gráfica de la función *f(x)* y las rectas *x = 4, x = 7* e *y = 0* será el valor absoluto de la integral definida entre 4 y 7 de la función.

$$Área = \left| \int_4^7 f(x)\,dx \right| = \left| \left[-\ln|x-1| + \ln|x+3| \right]_4^7 \right| =$$

$$= \left| \left[-\ln|7-1| + \ln|7+3| \right] - \left[-\ln|4-1| + \ln|4+3| \right] \right| = \left| -\ln 6 + \ln 10 + \ln 3 - \ln 7 \right| \simeq |-0.336|$$

$$\boxed{Área = \ln \frac{42}{30} \simeq 0.336\, u^2}$$



5 Una academia de inglés cobra una cuota de 50 euros mensuales y cuenta con 200 estudiantes. Un estudio de mercado afirma que por cada 2 euros que sube (o baja) la cuota se pierden (o se ganan) 10 estudiantes.
a) Escriba el número de estudiantes de la academia en función del precio de la cuota. (3 puntos)
b) ¿Para qué valor de la cuota la academia se quedaría sin estudiantes? (2 puntos)
c) Determine en qué precio se debe fijar la cuota para obtener un ingreso mensual máximo. ¿Cuál sería ese ingreso y cuántos estudiantes tendría la academia? (5 puntos)

a) Llamamos "x" a la cuota mensual y N(x) al número de estudiantes.

N(x) es una función lineal → $N(x)=ax+b$.
Tenemos que N(50) = 200 y N(52) = 200 – 10 = 190.

$$\left.\begin{array}{l} N(x)=ax+b \\ N(50)=200=50a+b \\ N(52)=190=52a+b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 200=50a+b \\ 190=52a+b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 200-50a=b \\ 190=52a+b \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 190=52a+200-50a \Rightarrow -10=2a \Rightarrow \boxed{a=-5} \Rightarrow \boxed{b=200-50(-5)=450} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{N(x)=-5x+450}$$

La función es $N(x)=-5x+450$, siendo *x* la cuota mensual y *N(x)* el número de estudiantes.

b) Nos piden averiguar cuando *N(x) = 0*.

$$\left.\begin{array}{l} N(x)=-5x+450 \\ N(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -5x+450=0 \Rightarrow 5x=450 \Rightarrow x=\frac{450}{5}=90$$

Con una cuota de 90 euros la academia se queda sin estudiantes.

c) El ingreso mensual es el producto del número de estudiantes por la cuota que paga cada uno.

$$I(x)=x\cdot N(x)=x(-5x+450)=-5x^2+450x$$

Derivamos esta función e igualamos la derivada a cero en busca de su unto crítico.

$$\left.\begin{array}{r} I(x)=-5x^2+450x \Rightarrow I'(x)=-10x+450 \\ I'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -10x+450=0 \Rightarrow 10x=450 \Rightarrow \boxed{x=45}$$

Calculamos la derivada segunda y vemos su signo para *x = 45*.

$$I'(x)=-10x+450 \Rightarrow I''(x)=-10 \Rightarrow I''(45)=-10<0$$

La función ingresos mensuales alcanza un máximo para una cuota mensual de 45 €.

Como $N(45)=-5\cdot 45+450=225$ el número de estudiantes es de 225.
Como $I(45)=-5\cdot 45^2+450\cdot 45=10125$ los ingresos máximos que se consiguen son 10125 €.

6 La evolución de la población de un Estado, en millones de habitantes, se puede aproximar mediante la función

$$P(t)=\frac{20t}{4+t^2}+40,\ \ t\geq 0$$

donde t es el tiempo en años.

a) Calcule la población actual (para $t = 0$) (2 puntos)

b) Determine el límite de $P(t)$ cuando t tiende a infinito. (3 puntos)

c) Determine al cabo de cuántos años la población será máxima y el número de habitantes que la función predice para este máximo. (5 puntos)

a) $P(0)=\frac{0}{4+0^2}+40=40$. La población inicial es de 40 millones de habitantes.

b) $$\lim_{t\to+\infty} P(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{20t}{4+t^2}+40=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{20t}{t^2}}{\frac{4}{t^2}+\frac{t^2}{t^2}}+40=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{20}{t}}{\frac{4}{t^2}+1}+40=\frac{\frac{20}{\infty}}{\frac{4}{\infty}+1}+40=\frac{0}{1}+40=40.$$

c) Derivamos la función e igualamos a cero la función derivada.

$$P'(t)=\frac{20\left(4+t^2\right)-2t\left(20t\right)}{\left(4+t^2\right)^2}+0=\frac{80+20t^2-40t^2}{\left(4+t^2\right)^2}=\frac{80-20t^2}{\left(4+t^2\right)^2}$$

$$P'(t)=0\Rightarrow\frac{80-20t^2}{\left(4+t^2\right)^2}=0\Rightarrow 80-20t^2=0\Rightarrow 20t^2=80\Rightarrow t^2=4\Rightarrow\boxed{t=\sqrt{4}=2}$$

Valoramos la derivada antes y después del segundo año para comprobar si es un máximo o un mínimo.

En $(0,2)$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale $P'(1)=\frac{80-20\cdot 1^2}{\left(4+1^2\right)^2}=\frac{60}{25}>0$.

La función crece en $(0,2)$.

En $(2,+\infty)$ tomamos $t = 3$ y la derivada vale $P'(3)=\frac{80-20\cdot 3^2}{\left(4+3^2\right)^2}=\frac{-100}{169}<0$.

La función decrece en $(2,+\infty)$.

Por lo que la función presenta un máximo relativo en $t = 2$.

Para $t = 2$ la función vale $P(2)=\frac{40}{4+2^2}+40=45$.

Resumiendo: Al cabo de dos años se alcanza una población máxima de 45 millones de habitantes.

7 En una universidad se ha observado que la distribución de las calificaciones de Física en los estudios de Ingeniería Informática sigue una ley normal de media $\mu = 5.1$ puntos y desviación típica $\sigma = 1.6$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar obtenga una nota inferior a 4 puntos? (3 puntos)

b) ¿Cuál es la probabilidad que una muestra de 64 alumnos tenga una media superior a 5.9? (5 puntos)

c) Si en un aula hay 50 alumnos, ¿cuántos alumnos se puede esperar que tengan una nota superior a 4 puntos? (3 puntos)

X = Las calificaciones de Física en los estudios de Ingeniería Informática.
X = N(5.1, 1.6)

a) Nos piden calcular $P(X<4)$.

$$P(X<4) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{X-5.1}{1.6} < \frac{4-5.1}{1.6}\right) = P(Z < -0.6875) =$$

$$= P(Z \geq 0.6875) = 1 - P(Z \leq 0.6875) = \{\text{Miramos en la tabla N(0, 1)}\} =$$

$$= 1 - 0.7549 = \boxed{0.2451}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	[illegible]
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	[illegible]
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	[illegible]
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	[illegible]
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	[illegible]
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	[illegible]
0.6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852

b)

Si X = N(5.1, 1.6) entonces $\overline{X_{64}} = N\left(5.1, \frac{1.6}{\sqrt{64}}\right) = N(5.1, 0.2)$.

Nos piden calcular $P\left(\overline{X_{64}} > 5.9\right)$.

$$P\left(\overline{X_{64}} > 5.9\right) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{5.9-5.1}{0.2}\right) =$$

$$= P(Z > 4) = 1 - P(Z < 4) = 1 - 1 = \boxed{0}$$

c) Calculamos $P(X>4)$.

$$P(X>4) = 1 - P(X<4) = 1 - 0.2451 = 0.7549$$

El número de alumnos de un grupo de 50 que se puede esperar que tengan una nota superior a 4 puntos es de 0.7549 · 50 = 37.745. Aproximadamente se esperan unos 38 alumnos con dicha nota.

	0	
0.0	[illegible]	0.
0.1	[illegible]	0.
0.2	[illegible]	0.
0.3	[illegible]	0.
0.4	[illegible]	0.
0.5	[illegible]	0.
0.6	[illegible]	0.
0.7	[illegible]	0.
0.8	[illegible]	0.
0.9	[illegible]	0.
1.0	[illegible]	0.
1.1	[illegible]	0.
1.2	[illegible]	0.
1.3	[illegible]	0.
1.4	[illegible]	0.
1.5	[illegible]	0.
1.6	[illegible]	0.
1.7	[illegible]	0.
1.8	[illegible]	0.
1.9	[illegible]	0.
2.0	[illegible]	0.
2.1	[illegible]	0.
2.2	[illegible]	0.
2.3	[illegible]	0.
2.4	[illegible]	0.
2.5	[illegible]	0.
2.6	[illegible]	0.
2.7	[illegible]	0.
2.8	[illegible]	0.
2.9	[illegible]	0.
3.0	[illegible]	0.
3.1	[illegible]	0.
3.2	[illegible]	0.
3.3	[illegible]	0.
3.4	[illegible]	0.
3.5	[illegible]	0.
3.6	[illegible]	0.
3.7	[illegible]	0.
3.8	[illegible]	0.
3.9	[illegible]	1.
4.0	1.0000	1.
4.1	1.0000	1.

8 Sean A y B dos sucesos tales que

$$p(B/A)=0.9 \qquad p(A/B)=0.2 \qquad p(A)=0.1$$

a) Calcule $p(A\cap B)$ y $p(B)$. (5 puntos)

b) ¿Son A y B sucesos independientes? Justifique la respuesta. (2 puntos)

c) Calcule $p\left(A\cap \overline{B}\right)$, donde $\overline{B}$ denota el suceso complementario de B. (3 puntos)

a)

$$\left.\begin{array}{l} p(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} \\ p(A)=0.1 \\ p(B/A)=0.9 \end{array}\right\} \Rightarrow 0.9=\frac{P(A\cap B)}{0.1} \Rightarrow \boxed{P(A\cap B)=0.09}$$

$$\left.\begin{array}{l} p(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \\ P(A\cap B)=0.09 \\ p(A/B)=0.2 \end{array}\right\} \Rightarrow 0.2=\frac{0.09}{p(B)} \Rightarrow 0.2\cdot p(B)=0.09 \Rightarrow \boxed{p(B)=\frac{0.09}{0.2}=0.45}$$

b) Para que dos sucesos A y B sean independientes debe cumplirse: $p(A\cap B)=p(A)\,p(B)$.

$$\left.\begin{array}{l} p(A\cap B)=0.09 \\ p(A)\,p(B)=0.1\cdot 0.45=0.045 \end{array}\right\} \Rightarrow p(A\cap B)\neq p(A)\,p(B)$$

Los sucesos A y B no son independientes.

c)

$$\left.\begin{array}{l} p(A)=p(A\cap B)+p\left(A\cap \overline{B}\right) \\ p(A)=0.1 \\ p(A\cap B)=0.09 \end{array}\right\} \Rightarrow 0.1=0.09+p\left(A\cap \overline{B}\right) \Rightarrow \boxed{p\left(A\cap \overline{B}\right)=0.1-0.09=0.01}$$

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Modelo 1

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4. Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

1 Dado el sistema siguiente:

$$\begin{aligned} 3x+2y+z&=1 \\ -mx+2y+z&=2 \end{aligned}$$

dependiente del parámetro *m*.

a) Discuta para qué valores de *m* el sistema tiene solución y cuántas tiene en cada caso. (5 puntos)

b) Encuentre la solución para *m = 2*. (5 puntos)

2 Dadas las matrices

$$X=\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad Y=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & k \end{pmatrix}$$

a) Encuentre los valores de *k* para los cuáles Y es invertible. (3 puntos)

b) Encuentre la inversa de Y para *k = 1*. (3 puntos)

c) Determine los valores de *m* y *n* para los que la matriz X satisface

$$X^2-4X+n\,Id=0,$$

Donde Id denota la matriz identidad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y 0 la matriz nula $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. (4 puntos)

3 El dueño de una tienda de chucherías dispone de 10 paquetes de pipas, 30 chicles y 18 bombones. Decide que para su mejor venta confeccionará dos tipos de paquetes: el tipo A estará formado por un paquete de pipas, dos chicles y dos bombones y se venderá a 1´5 euros. El tipo B estará formado por un paquete de pipas, cuatro chicles y un bombón y se venderá a 2 euros.

a) Plantee la maximización del beneficio de la tienda como un problema de programación lineal. (4 puntos)

b) Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 puntos)

c) Calcule el número de paquetes de tipo A y B que se tienen que confeccionar y vender para obtener un beneficio máximo. Determine también este beneficio máximo. (2 puntos)

4 Dada la función $f(x)=-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+3}$

a) Encuentre su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento. (5 puntos)

b) Encuentre una primitiva de *f(x)*. (3 puntos)

c) Calcule el área comprendida entre la gráfica de la función *f(x)* y las rectas *x = 4, x = 7* e *y = 0.* (2 puntos)

5 Una academia de inglés cobra una cuota de 50 euros mensuales y cuenta con 200 estudiantes. Un estudio de mercado afirma que por cada 2 euros que sube (o baja) la cuota se pierden (o se ganan) 10 estudiantes.

a) Escriba el número de estudiantes de la academia en función del precio de la cuota. (3 puntos)

b) ¿Para qué valor de la cuota la academia se quedaría sin estudiantes? (2 puntos)

c) Determine en qué precio se debe fijar la cuota para obtener un ingreso mensual máximo. ¿Cuál sería ese ingreso y cuántos estudiantes tendría la academia? (5 puntos)

6 La evolución de la población de un Estado, en millones de habitantes, se puede aproximar mediante la función

$$P(t)=\frac{20t}{4+t^2}+40,\ \ t\geq 0$$

donde t es el tiempo en años.

a) Calcule la población actual (para $t = 0$) (2 puntos)

b) Determine el límite de $P(t)$ cuando t tiende a infinito. (3 puntos)

c) Determine al cabo de cuántos años la población será máxima y el número de habitantes que la función predice para este máximo. (5 puntos)

7 En una universidad se ha observado que la distribución de las calificaciones de Física en los estudios de Ingeniería Informática sigue una ley normal de media $\mu=5.1$ puntos y desviación típica $\sigma=1.6$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar obtenga una nota inferior a 4 puntos? (3 puntos)

b) ¿Cuál es la probabilidad que una muestra de 64 alumnos tenga una media superior a 5.9? (4 puntos)

c) Si en un aula hay 50 alumnos, ¿cuántos alumnos se puede esperar que tengan una nota superior a 4 puntos? (3 puntos)

8 Sean A y B dos sucesos tales que

$$p(B/A)=0.9 \qquad p(A/B)=0.2 \qquad p(A)=0.1$$

a) Calcule $p(A\cap B)$ y $p(B)$. (5 puntos)

b) ¿Son A y B sucesos independientes? Justifique la respuesta. (2 puntos)

c) Calcule $p\left(A\cap\overline{B}\right)$, donde $\overline{B}$ denota el suceso complementario de B. (3 puntos)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal N(0, 1)

SOLUCIONES

1 Dado el sistema siguiente:

$$\begin{aligned} 3x+2y+z&=1 \\ -mx+2y+z&=2 \end{aligned}$$

dependiente del parámetro *m*.

a) Discuta para qué valores de *m* el sistema tiene solución y cuántas tiene en cada caso. (5 puntos)

b) Encuentre la solución para *m = 2*. (5 puntos)

Obtenemos un sistema equivalente más sencillo de estudiar.

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y+z=1 \\ -mx+2y+z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2y+z+3x=1 \\ 2y+z-mx=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} 2y+z+3x & =1 \\ -2y-z+mx & =-2 \end{array}\right\}$$
$$\overline{\left(3+m\right)x=-1}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2y+z+\quad 3x=1 \\ \left(3+m\right)x=-1 \end{array}\right\}$$

Se plantean dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

- Si *3 + m = 0* → *m = –3* entonces el sistema queda $\left.\begin{array}{r} 2y+z+3x=1 \\ {\color{red}0=-1} \end{array}\right\} \Rightarrow$ ¡Imposible!

  Si *m = –3* el sistema es incompatible (sin solución).

- Si *3 + m ≠ 0* → *m ≠ –3* entonces el sistema se puede resolver, pues queda:

$$\left.\begin{array}{r} 2y+z+\quad 3x=1 \\ \left(3+m\right)x=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{3+m\neq 0\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2y+z+\quad 3x=1 \\ \boxed{x=\dfrac{-1}{3+m}} \end{array}\right\} \Rightarrow 2y+z+3\frac{-1}{3+m}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y+z=1+\frac{3}{3+m} \Rightarrow 2y+z=\frac{3+m+3}{3+m} \Rightarrow \boxed{z=\frac{6+m}{3+m}-2y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Solución:} \begin{cases} x=\dfrac{-1}{3+m} \\ y=t \\ z=\dfrac{6+m}{3+m}-2t \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

a) El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) cuando *m ≠ –3*

b) Si *m = 2* el sistema tiene infinitas soluciones, Sustituimos en las soluciones obtenidas anteriormente para *m ≠ –3*.

$$\text{Solución:}\begin{cases} x = \dfrac{-1}{3+2} = -\dfrac{1}{5} \\ y = t \\ z = \dfrac{6+2}{3+2} - 2t = \dfrac{8}{5} - 2t \end{cases}$$

Las infinitas soluciones son: $x = -\dfrac{1}{5};\ \ y = t;\ \ z = \dfrac{8}{5} - 2t;\ \ t \in \mathbb{R}$

2 Dadas las matrices

$$X=\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad Y=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & k \end{pmatrix}$$

a) Encuentre los valores de k para los cuáles Y es invertible. (3 puntos)
b) Encuentre la inversa de Y para $k = 1$. (3 puntos)
c) Determine los valores de m y n para los que la matriz X satisface

$$X^2-4X+n\,Id=0,$$

Donde Id denota la matriz identidad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y 0 la matriz nula $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. (4 puntos)

a) La matriz Y es invertible si su determinante es no nulo.

$$\left.\begin{array}{r} |Y|=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix}=-k-4 \\ |Y|=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -k-4=0 \Rightarrow \boxed{k=-4}$$

La matriz Y es invertible si $k \neq -4$.

b) Si $k = 1$ la matriz Y es invertible.

$$|Y|=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1-4=-5\neq 0.$$

$$Y^{-1}=\frac{Adj\left(Y^T\right)}{|Y|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{-5}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Y^{-1}=\begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}}$$

c) Sustituimos en la ecuación matricial los valores de las matrices y resolvemos.

$$X^2-4X+n\,Id=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}-4\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}+n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4m & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} m^2-4m+n & 0 \\ 0 & -3+n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^2-4m+n=0 \\ -3+n=0 \rightarrow \boxed{n=3} \end{cases} \Rightarrow m^2-4m+3=0 \Rightarrow m=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-12}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases} \dfrac{4+2}{2}=\boxed{3=m} \\ \dfrac{4-2}{2}=\boxed{1=m} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $m = n = 3$ o $m = 1$ y $n = 3$.

3 El dueño de una tienda de chucherías dispone de 10 paquetes de pipas, 30 chicles y 18 bombones. Decide que para su mejor venta confeccionará dos tipos de paquetes: el tipo A estará formado por un paquete de pipas, dos chicles y dos bombones y se venderá a 1´5 euros. El tipo B estará formado por un paquete de pipas, cuatro chicles y un bombón y se venderá a 2 euros.
a) Plantee la maximización del beneficio de la tienda como un problema de programación lineal. (4 puntos)
b) Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 puntos)
c) Calcule el número de paquetes de tipo A y B que se tienen que confeccionar y vender para obtener un beneficio máximo. Determine también este beneficio máximo. (2 puntos)

a) Llamamos x = número de paquetes del tipo A, y = número de paquetes del tipo B.

Realizamos una tabla.

	Paquetes de pipas	chicles	Bombones	Beneficio
Nº paquetes tipo A (x)	**x**	**2x**	**2x**	**1.5x**
Nº paquetes tipo B (y)	**y**	**4y**	**y**	**2y**
TOTAL	$x+y$	$2x+4y$	$2x+y$	$1.5x+2y$

La función a maximizar es el beneficio que viene dado por la expresión:

$$B(x,y)=1.5x+2y$$

Las restricciones son:

"*dispone de 10 paquetes de pipas, 30 chicles y 18 bombones*" → $x+y\leq 10;\ 2x+4y\leq 30;\ 2x+y\leq 18$

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\leq 10 \\ 2x+4y\leq 30 \\ 2x+y\leq 18 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y\leq 10 \\ x+2y\leq 15 \\ 2x+y\leq 18 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

b) Empezamos dibujando las rectas que delimitan la región factible.

$x+y=10$

$$\begin{array}{c|c} x & y=10-x \\ \hline 0 & 10 \\ 5 & 5 \\ 8 & 2 \end{array}$$

$x+2y=15$

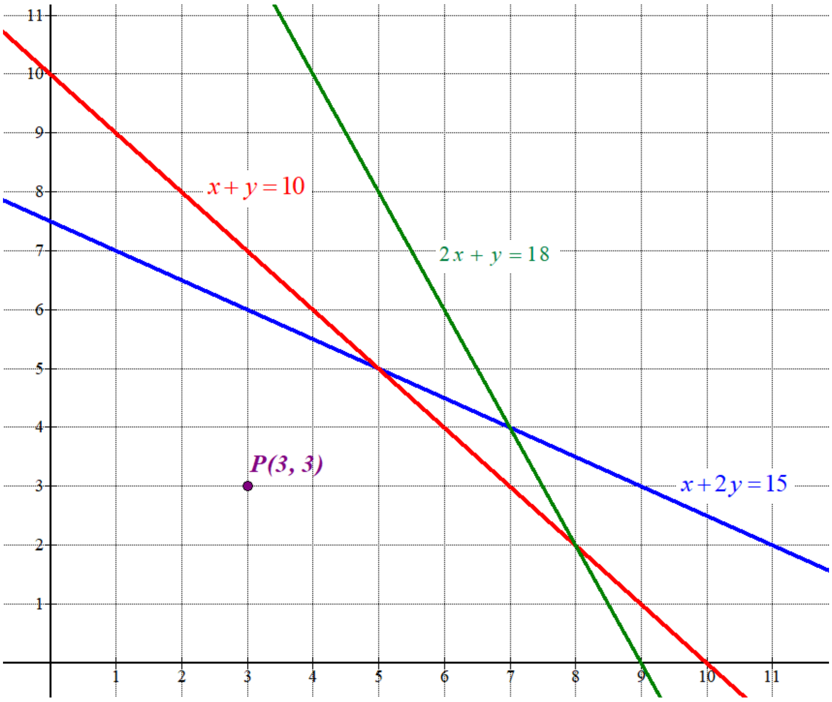
$$\begin{array}{c|c} x & y=\dfrac{15-x}{2} \\ \hline 0 & 7.5 \\ 5 & 5 \\ 15 & 0 \end{array}$$

$2x+y=18$

$$\begin{array}{c|c} x & y=18-2x \\ \hline 0 & 18 \\ 7 & 4 \\ 8 & 2 \end{array}$$

$x\geq 0;\ y\geq 0$

Primer cuadrante



La región factible es la región del primer cuadrante que cumple las inecuaciones

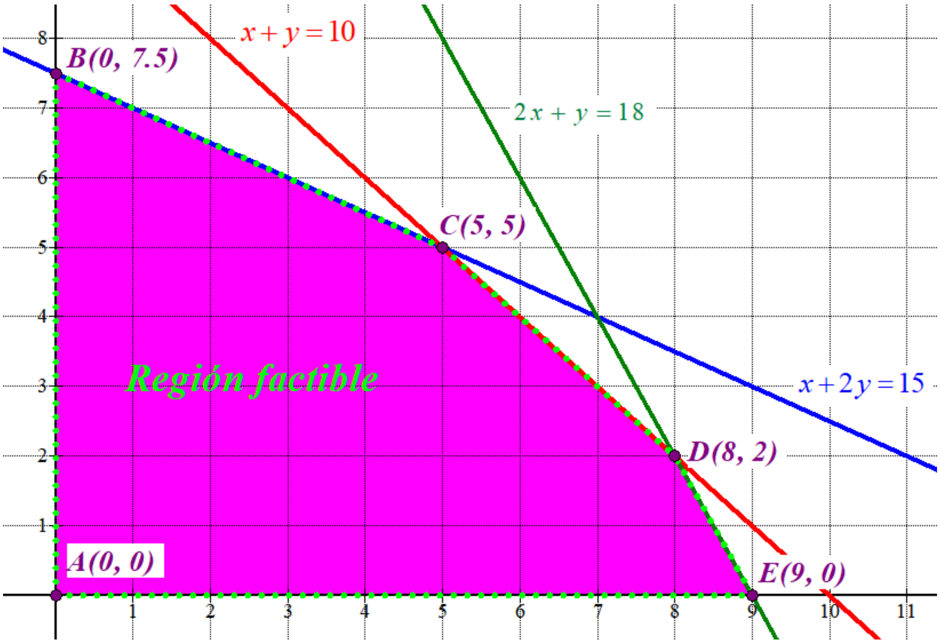
$$\left.\begin{array}{l} x+y\leq 10 \\ x+2y\leq 15 \\ 2x+y\leq 18 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

, por lo tanto, es la región del primer cuadrante por debajo de las rectas azul, verde y roja.

Comprobamos que el punto P(3, 3) perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 3+3\leq 10 \\ 3+6\leq 15 \\ 6+3\leq 18 \\ 3\geq 0;\ 3\geq 0 \end{array}\right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



c) Para obtener el máximo beneficio valoramos la función $B(x,y)=1.5x+2y$ en cada uno de los vértices.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(0, 7.5) → $B(0,7.5)=0+15=15$

C(5, 5) → $B(5,5)=7.5+10=17.5$ ¡Máximo!

D(8, 2) → $B(8,2)=12+4=16$

E(9, 0) → $B(9,0)=13.5+0=13.5$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice C(5, 5). Significa que confeccionando y vendiendo 5 paquetes de cada tipo se consiguen unos beneficios máximos de 17.5 €.

4 Dada la función $f(x)=-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+3}$

a) Encuentre su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento. (5 puntos)

b) Encuentre una primitiva de *f(x)*. (3 puntos)

c) Calcule el área comprendida entre la gráfica de la función *f(x)* y las rectas *x = 4*, *x = 7* e *y = 0*. (2 puntos)

a) El dominio son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

Dominio $f(x)=\mathbb{R}-\{-3,1\}$

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento utilizamos la derivada.

$$f(x)=-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}=\frac{-(x+3)+x-1}{(x-1)(x+3)}=\frac{-x-3+x-1}{x^2+3x-x-3}=\frac{-4}{x^2+2x-3}$$

$$f'(x)=\frac{0-(-4)(2x+2)}{(x^2+2x-3)^2}=\frac{8x+8}{(x^2+2x-3)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{8x+8}{(x^2+2x-3)^2}=0\Rightarrow 8x+8=0\Rightarrow 8x=-8\Rightarrow\boxed{x=-1}$$

Tenemos un punto crítico. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x=-3$, $x=-1$ y $x=1$.

En el intervalo $(-\infty,-3)$ tomamos *x = –4* y la derivada vale

$f'(-4)=\dfrac{8(-4)+8}{((-4)^2+2(-4)-3)^2}=\dfrac{-24}{25}<0$. La función decrece en $(-\infty,-3)$.

En el intervalo $(-3,-1)$ tomamos *x = –2* y la derivada vale

$f'(-2)=\dfrac{8(-2)+8}{((-2)^2+2(-2)-3)^2}=\dfrac{-8}{9}<0$. La función decrece en $(-3,-1)$.

En el intervalo $(-1,1)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $f'(0)=\dfrac{8}{(-3)^2}=\dfrac{8}{9}>0$. La función crece en $(-1,1)$.

En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $f'(2)=\dfrac{16+8}{(2^2+4-3)^2}=\dfrac{24}{25}>0$.

La función crece en $(1,+\infty)$.

Resumiendo: La función decrece en $(-\infty,-3)\cup(-3,-1)$ y crece en $(-1,1)\cup(1,+\infty)$

b)

$$F(x)=\int f(x)dx=\int-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}dx=-\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{1}{x+3}dx=\boxed{-\ln|x-1|+\ln|x+3|+K}$$

c) Vemos si la función corta el eje de abscisas.

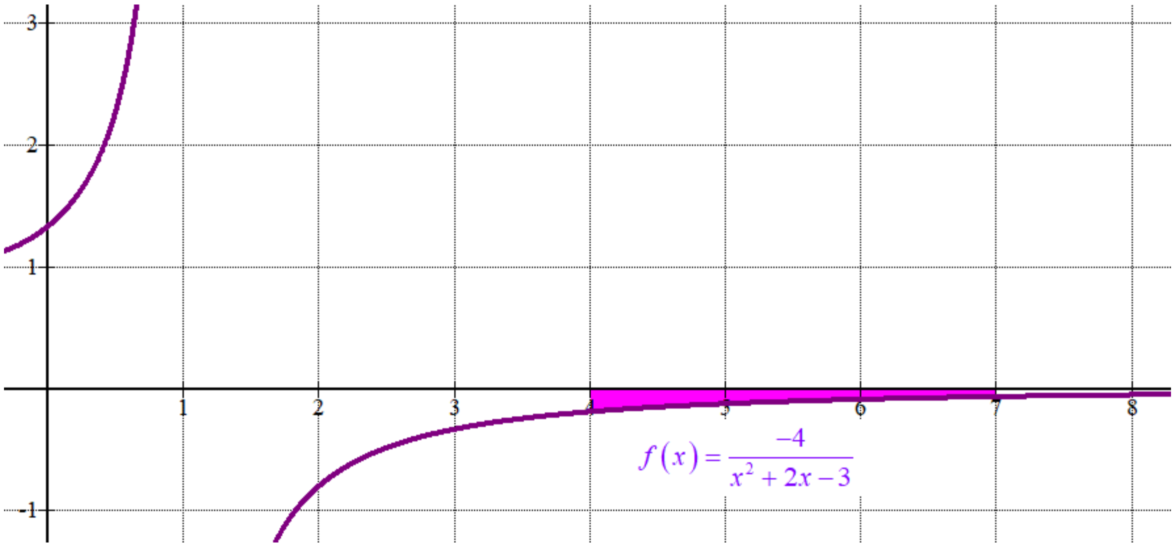
$$\left.\begin{array}{r} f(x) = -\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{-4}{x^2+2x-3} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = \frac{-4}{x^2+2x-3} \Rightarrow -4 = 0 \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

La función no corta el eje de abscisas.
El área comprendida entre la gráfica de la función *f(x)* y las rectas *x = 4, x = 7* e *y = 0* será el valor absoluto de la integral definida entre 4 y 7 de la función.

$$\text{Área} = \left|\int_4^7 f(x)\,dx\right| = \left|\left[-\ln|x-1| + \ln|x+3|\right]_4^7\right| =$$

$$= \left|\left[-\ln|7-1| + \ln|7+3|\right] - \left[-\ln|4-1| + \ln|4+3|\right]\right| = |-\ln 6 + \ln 10 + \ln 3 - \ln 7| \simeq |-0.336|$$

$$\boxed{\text{Área} = \ln\frac{42}{30} \simeq 0.336\,u^2}$$



5 Una academia de inglés cobra una cuota de 50 euros mensuales y cuenta con 200 estudiantes. Un estudio de mercado afirma que por cada 2 euros que sube (o baja) la cuota se pierden (o se ganan) 10 estudiantes.
a) Escriba el número de estudiantes de la academia en función del precio de la cuota. (3 puntos)
b) ¿Para qué valor de la cuota la academia se quedaría sin estudiantes? (2 puntos)
c) Determine en qué precio se debe fijar la cuota para obtener un ingreso mensual máximo. ¿Cuál sería ese ingreso y cuántos estudiantes tendría la academia? (5 puntos)

a) Llamamos "x" a la cuota mensual y N(x) al número de estudiantes.

N(x) es una función lineal → $N(x) = ax + b$.
Tenemos que N(50) = 200 y N(52) = 200 – 10 = 190.

$$\left.\begin{array}{l} N(x) = ax+b \\ N(50) = 200 = 50a+b \\ N(52) = 190 = 52a+b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 200 = 50a+b \\ 190 = 52a+b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 200-50a = b \\ 190 = 52a+b \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 190 = 52a + 200 - 50a \Rightarrow -10 = 2a \Rightarrow \boxed{a=-5} \Rightarrow \boxed{b = 200-50(-5) = 450} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{N(x) = -5x+450}$$

La función es $N(x) = -5x + 450$, siendo *x* la cuota mensual y *N(x)* el número de estudiantes.

b) Nos piden averiguar cuando *N(x) = 0*.

$$\left.\begin{array}{l} N(x) = -5x+450 \\ N(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -5x+450 = 0 \Rightarrow 5x = 450 \Rightarrow x = \frac{450}{5} = 90$$

Con una cuota de 90 euros la academia se queda sin estudiantes.

c) El ingreso mensual es el producto del número de estudiantes por la cuota que paga cada uno.

$$I(x) = x \cdot N(x) = x(-5x+450) = -5x^2 + 450x$$

Derivamos esta función e igualamos la derivada a cero en busca de su unto crítico.

$$\left.\begin{array}{r} I(x) = -5x^2+450x \Rightarrow I'(x) = -10x+450 \\ I'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -10x+450 = 0 \Rightarrow 10x = 450 \Rightarrow \boxed{x=45}$$

Calculamos la derivada segunda y vemos su signo para *x = 45*.

$$I'(x) = -10x+450 \Rightarrow I''(x) = -10 \Rightarrow I''(45) = -10 < 0$$

La función ingresos mensuales alcanza un máximo para una cuota mensual de 45 €.

Como $N(45) = -5 \cdot 45 + 450 = 225$ el número de estudiantes es de 225.
Como $I(45) = -5 \cdot 45^2 + 450 \cdot 45 = 10125$ los ingresos máximos que se consiguen son 10125 €.

6 La evolución de la población de un Estado, en millones de habitantes, se puede aproximar mediante la función

$$P(t)=\frac{20t}{4+t^2}+40,\ \ t\geq 0$$

donde t es el tiempo en años.

a) Calcule la población actual (para $t = 0$) (2 puntos)

b) Determine el límite de $P(t)$ cuando t tiende a infinito. (3 puntos)

c) Determine al cabo de cuántos años la población será máxima y el número de habitantes que la función predice para este máximo. (5 puntos)

a) $P(0)=\dfrac{0}{4+0^2}+40=40$. La población inicial es de 40 millones de habitantes.

b) $$\lim_{t\to+\infty}P(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{20t}{4+t^2}+40=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{20t}{t^2}}{\frac{4}{t^2}+\frac{t^2}{t^2}}+40=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{20}{t}}{\frac{4}{t^2}+1}+40=\frac{\frac{20}{\infty}}{\frac{4}{\infty}+1}+40=\frac{0}{1}+40=40.$$

c) Derivamos la función e igualamos a cero la función derivada.

$$P'(t)=\frac{20\left(4+t^2\right)-2t\left(20t\right)}{\left(4+t^2\right)^2}+0=\frac{80+20t^2-40t^2}{\left(4+t^2\right)^2}=\frac{80-20t^2}{\left(4+t^2\right)^2}$$

$$P'(t)=0\Rightarrow\frac{80-20t^2}{\left(4+t^2\right)^2}=0\Rightarrow 80-20t^2=0\Rightarrow 20t^2=80\Rightarrow t^2=4\Rightarrow\boxed{t=\sqrt{4}=2}$$

Valoramos la derivada antes y después del segundo año para comprobar si es un máximo o un mínimo.

En $(0,2)$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale $P'(1)=\dfrac{80-20\cdot1^2}{\left(4+1^2\right)^2}=\dfrac{60}{25}>0$.

La función crece en $(0,2)$.

En $(2,+\infty)$ tomamos $t = 3$ y la derivada vale $P'(3)=\dfrac{80-20\cdot3^2}{\left(4+3^2\right)^2}=\dfrac{-100}{169}<0$.

La función decrece en $(2,+\infty)$.

Por lo que la función presenta un máximo relativo en $t = 2$.

Para $t = 2$ la función vale $P(2)=\dfrac{40}{4+2^2}+40=45$.

Resumiendo: Al cabo de dos años se alcanza una población máxima de 45 millones de habitantes.

7 En una universidad se ha observado que la distribución de las calificaciones de Física en los estudios de Ingeniería Informática sigue una ley normal de media $\mu = 5.1$ puntos y desviación típica $\sigma = 1.6$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar obtenga una nota inferior a 4 puntos? (3 puntos)

b) ¿Cuál es la probabilidad que una muestra de 64 alumnos tenga una media superior a 5.9? (5 puntos)

c) Si en un aula hay 50 alumnos, ¿cuántos alumnos se puede esperar que tengan una nota superior a 4 puntos? (3 puntos)

X = Las calificaciones de Física en los estudios de Ingeniería Informática.
X = N(5.1, 1.6)

a) Nos piden calcular $P(X<4)$.

$$P(X<4)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{X-5.1}{1.6}<\frac{4-5.1}{1.6}\right)=P(Z<-0.6875)=$$

$$=P(Z\geq 0.6875)=1-P(Z\leq 0.6875)=\{\text{Miramos en la tabla N(0, 1)}\}=$$

$$=1-0.7549=\boxed{0.2451}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	[illegible]
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	[illegible]
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	[illegible]
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	[illegible]
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	[illegible]
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	[illegible]
0.6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852

b)

Si X = N(5.1, 1.6) entonces $\overline{X_{64}}=N\left(5.1,\frac{1.6}{\sqrt{64}}\right)=N(5.1,0.2)$.

Nos piden calcular $P\left(\overline{X_{64}}>5.9\right)$.

$$P\left(\overline{X_{64}}>5.9\right)=\{Tipificamos\}=P\left(Z>\frac{5.9-5.1}{0.2}\right)=$$

$$=P(Z>4)=1-P(Z<4)=1-1=\boxed{0}$$

c) Calculamos $P(X>4)$.

$$P(X>4)=1-P(X<4)=1-0.2451=0.7549$$

El número de alumnos de un grupo de 50 que se puede esperar que tengan una nota superior a 4 puntos es de 0.7549 · 50 = 37.745. Aproximadamente se esperan unos 38 alumnos con dicha nota.

	0	
0.0	[illegible]	0.
0.1	[illegible]	0.
0.2	[illegible]	0.
0.3	[illegible]	0.
0.4	[illegible]	0.
0.5	[illegible]	0.
0.6	[illegible]	0.
0.7	[illegible]	0.
0.8	[illegible]	0.
0.9	[illegible]	0.
1.0	[illegible]	0.
1.1	[illegible]	0.
1.2	[illegible]	0.
1.3	[illegible]	0.
1.4	[illegible]	0.
1.5	[illegible]	0.
1.6	[illegible]	0.
1.7	[illegible]	0.
1.8	[illegible]	0.
1.9	[illegible]	0.
2.0	[illegible]	0.
2.1	[illegible]	0.
2.2	[illegible]	0.
2.3	[illegible]	0.
2.4	[illegible]	0.
2.5	[illegible]	0.
2.6	[illegible]	0.
2.7	[illegible]	0.
2.8	[illegible]	0.
2.9	[illegible]	0.
3.0	[illegible]	0.
3.1	[illegible]	0.
3.2	[illegible]	0.
3.3	[illegible]	0.
3.4	[illegible]	0.
3.5	[illegible]	0.
3.6	[illegible]	0.
3.7	[illegible]	0.
3.8	[illegible]	0.
3.9	[illegible]	1.
4.0	1.0000	1.
4.1	1.0000	1.

8 Sean A y B dos sucesos tales que

$$p(B/A)=0.9 \qquad p(A/B)=0.2 \qquad p(A)=0.1$$

a) Calcule $p(A\cap B)$ y $p(B)$. (5 puntos)

b) ¿Son A y B sucesos independientes? Justifique la respuesta. (2 puntos)

c) Calcule $p(A\cap \overline{B})$, donde $\overline{B}$ denota el suceso complementario de B. (3 puntos)

a)

$$\left.\begin{array}{l} p(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} \\ p(A)=0.1 \\ p(B/A)=0.9 \end{array}\right\} \Rightarrow 0.9=\frac{P(A\cap B)}{0.1} \Rightarrow \boxed{P(A\cap B)=0.09}$$

$$\left.\begin{array}{l} p(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \\ P(A\cap B)=0.09 \\ p(A/B)=0.2 \end{array}\right\} \Rightarrow 0.2=\frac{0.09}{p(B)} \Rightarrow 0.2\cdot p(B)=0.09 \Rightarrow \boxed{p(B)=\frac{0.09}{0.2}=0.45}$$

b) Para que dos sucesos A y B sean independientes debe cumplirse: $p(A\cap B)=p(A)\,p(B)$.

$$\left.\begin{array}{l} p(A\cap B)=0.09 \\ p(A)\,p(B)=0.1\cdot 0.45=0.045 \end{array}\right\} \Rightarrow p(A\cap B)\neq p(A)\,p(B)$$

Los sucesos A y B no son independientes.

c)

$$\left.\begin{array}{l} p(A)=p(A\cap B)+p(A\cap \overline{B}) \\ p(A)=0.1 \\ p(A\cap B)=0.09 \end{array}\right\} \Rightarrow 0.1=0.09+p(A\cap \overline{B}) \Rightarrow \boxed{p(A\cap \overline{B})=0.1-0.09=0.01}$$

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades. Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4.

Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic, o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

P1. — Volem contractar una empresa de gestió d'entre les següents:

- L'empresa A ens cobra 150 € de cost base, i addicionalment 5 € per cada client i 3 € per cada factura que emet.
- L'empresa B ens cobra 300 € de cost base, 10 € per cada client, i no cobra per emetre factures.
- L'empresa C ens cobra 100 € de cost base, no cobra en funció del nombre de clients, però cobra 5 € per cada factura que emet.

a) Si l'any passat vàrem tenir 50 clients i, en total, vàrem emetre 180 factures, quina empresa ens hauria costat menys contractar? **(3 pt)**

De cara a l'any vinent, tenim una previsió de x clients i y factures. Amb aquesta previsió, l'empresa A ens costaria 1050 € i l'empresa B ens costaria 900 €.

b) Calcula el nombre de clients x i el nombre de factures y prevists. **(5 pt)**

c) Amb x clients i y factures, quant ens costaria l'empresa C? **(2 pt)**

P2. — Un camió transporta una càrrega d'exactament 12 metres cúbics de volum i, com a màxim, un pes de 18 tones. Pot transportar:

- Sorra, que pesa 1.6 tones per metre cúbic, i que es factura a 80 € per metre cúbic.
- Grava, que pesa 1.8 tones per metre cúbic, i que es factura a 100 € per metre cúbic.
- Cendra, que pesa 0.5 tones per metre cúbic, i que es factura a 25 € per metre cúbic.

Ens interessa calcular el preu més alt que podrà facturar en un viatge. Per fer-ho, es demana:

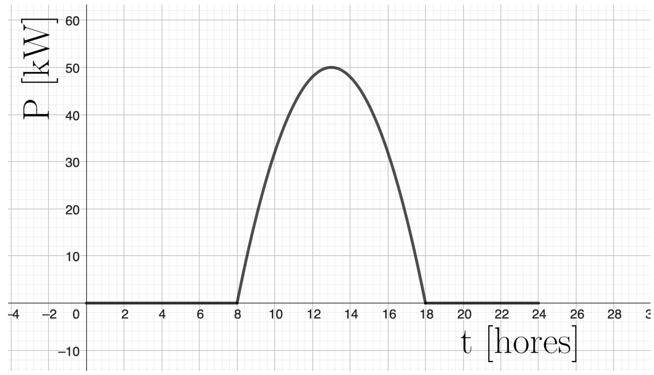
a) Planteja la maximització d'aquest preu com un problema de programació lineal amb dues variables. **(4 pt)**

b) Dibuixa la regió factible, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten. **(4 pt)**

c) Calcula el nombre de tones de cada material que s'han de transportar per tal d'assolir el preu màxim, i determina també aquest preu màxim. **(2 pt)**

P3. — La potència generada per una placa solar, P (mesurada en kW), depèn del temps transcorregut, t (mesurat en hores), segons l'expressió següent:

$$P(t) = \begin{cases} 0 & \text{per a } 0 \leq t < 8, \\ -2t^2 + 52t + c & \text{per a } 8 \leq t < 18, \\ 0 & \text{per a } 18 \leq t \leq 24, \end{cases}$$



on c és un paràmetre real.

a) Tenint en compte que la funció és contínua, quin és el valor del paràmetre c? **(3 pt)**

b) Tenint en compte que el valor màxim s'assoleix a les 13 hores, calcula amb l'expressió donada quina és la potència en aquest moment. **(3 pt)**

c) En quins intervals la funció és creixent? En quins intervals és decreixent? **(4 pt)**

P4. — Considerem el pes d'un adult, p (en kg), i el seu metabolisme basal, m (en watts). Un investigador ens proporciona el model següent:

$$p(m) = 0.1 \cdot m^{1.5}, \qquad m \in (0, +\infty).$$

a) Fes una gràfica esquemàtica de la funció $p(m)$, indicant el domini, el comportament en els extrems del domini, els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims locals. **(7 pt)**

b) Troba la funció que dona el metabolisme basal en funció del pes, $m(p)$ (és a dir, aïlla la variable m). **(3 pt)**

P5. — Considera les funcions:

$$f(x) = (x+2)^3, \qquad g(x) = x^3 + 6x^2 + 12x.$$

a) Justifica, calculant, que $f'(x) = g'(x)$. **(4 pt)**

b) És cert que $f(x) = g(x)$? **(3 pt)**

c) Calcula $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. **(3 pt)**

P6. — En Manel escull a l'atzar dues xifres entre 0 i 9, que podrien estar repetides.

a) Quina és la probabilitat que ambdues xifres siguin múltiple de tres? **(3 pt)**

b) El producte de les dues xifres és múltiple de tres si almenys una de les xifres és múltiple de tres. Quina és la probabilitat que el producte de les dues xifres sigui múltiple de tres? **(4 pt)**

Ara, en Pep et dona el seu número de telèfon, que conté nou xifres també entre 0 i 9, possiblement repetides, i que suposarem que són xifres escollides a l'atzar.

c) Quina és la probabilitat que el producte de les nou xifres sigui múltiple de tres? **(3 pt)**

P7. — D'un total de $n = 80$ alumnes, el 80% d'alumnes han aprovat un examen de matemàtiques, i el 75% han aprovat un examen de física. A més, dels que han suspès l'examen de matemàtiques, només un 50% ha aprovat el de física.

a) Dels que han suspès l'examen de física, quants han aprovat el de matemàtiques? **(4 pt)**

b) Quants alumnes han aprovat algun dels dos exàmens? **(3 pt)**

c) Aprovar l'examen de física i aprovar l'examen de matemàtiques són esdeveniments independents? **(3 pt)**

P8. — Per estudiar la vida de les tortugues marines, hem recopilat l'edat que varen assolir alguns exemplars que varen morir per causes naturals, i hem obtingut (en anys):

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
55	62	69	70	72	77	94	103

$\bar{x}$
75.25

Suposant que aquestes dades segueixen una distribució normal, i que la seva desviació típica poblacional és de $\sigma = 20$ anys,

a) Calcula l'interval de confiança per a la mitjana poblacional amb el 90% de confiança. **(4 pt)**

Suposem ara, a més, que la mitjana poblacional és de $\mu = 75.25$.

b) Quina és la probabilitat que una tortuga marina superi els 80 anys de vida? **(3 pt)**

c) Quina és la probabilitat que una tortuga marina superi els 80 anys de vida, però no els 100 anys de vida? **(3 pt)**

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0,1)$.

Criteris de correcció globals

- Heu de corregir quatre qüestions en total d'entre les vuit proposades. Si l'alumne presenta més de quatre qüestions, corregiu-ne les quatre primeres.
- Cada problema té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions màximes que apareixen a cada apartat (si no està indicat, tots els apartats d'una mateixa pregunta tenen la mateixa valoració). Les puntuacions dels apartats són independents: si l'alumne s'ha equivocat en qualque apartat però fa bé els altres (segons les "seves" dades equivocades), donau-li la puntuació adient.
- Es valorarà conjuntament el resultat, la justificació (ja sigui simbòlica o escrita), la claredat i ús del llenguatge matemàtic i no matemàtic, i l'estructura de la resposta. Orientativament, penalitzau:
  - Els errors de càlcul amb un 25%; els errors greus i/o que portin a resultats incoherents o absurds, amb un 50%.
  - En preguntes de justificar, si la justificació és només "intuïtiva" (p. ex. una observació que no respon exhaustivament a allò que s'ha demanat), amb el 30%-50%; en preguntes de justificar, una resposta sense cap justificació s'ha de penalitzar amb el 100%.
  - En qualsevol pregunta, si apareixen raonaments (que no són clars/evidents) sense justificar, amb el 20%-30%.
  - La imprecisió en l'ús del llenguatge matemàtic (p. ex. variables sense introduir/que canvien de significat), o la falta de claredat per absència de llenguatge matemàtic, amb un 20%-30%.
  - L'estructura s'ha de penalitzar en funció de la dificultat per entendre la resposta.
- Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris generals o específics. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Criteris de correcció específics

Només es detallen els apartats en què hi ha diverses preguntes o que es poden desglossar. En apartats on s'omet el criteri de correcció específic, aquest serà simplement "Càlcul i/o justificació correcta".

P1. — Volem contractar una empresa de gestió d'entre les següents:

- L'empresa A ens cobra 150 € de cost base, i addicionalment 5 € per cada client i 3 € per cada factura que emet.
- L'empresa B ens cobra 300 € de cost base, 10 € per cada client, i no cobra per emetre factures.
- L'empresa C ens cobra 100 € de cost base, no cobra en funció del nombre de clients, però cobra 5 € per cada factura que emet.

a) Si l'any passat vàrem tenir 50 clients i, en total, vàrem emetre 180 factures, quina empresa ens hauria costat menys contractar?

Criteris: Calcular correctament tres dades (3 pt), només dues (2 pt), només una o cap (0 pt). **(Total 3 pt)**

De cara a l'any vinent, tenim una previsió de x clients i y factures. Amb aquesta previsió, l'empresa A ens costaria 1050 € i l'empresa B ens costaria 900 €.

b) Calcula el nombre de clients x i el nombre de factures y prevists.

Criteris: Plantejament (2 pt), solució (1.5 pt/variable, total 3pt). **(Total 5 pt)**

c) Amb x clients i y factures, quant ens costaria l'empresa C?

Criteris: No es penalitza si es deixa en funció d'x i y. **(Total 2 pt)**

P2. — Un camió transporta una càrrega d'exactament 12 metres cúbics de volum i, com a màxim, un pes de 18 tones. Pot transportar:

- Sorra, que pesa 1.6 tones per metre cúbic, i que es factura a 80 € per metre cúbic.
- Grava, que pesa 1.8 tones per metre cúbic, i que es factura a 100 € per metre cúbic.
- Cendra, que pesa 0.5 tones per metre cúbic, i que es factura a 25 € per metre cúbic.

Ens interessa calcular el preu més alt que podrà facturar en un viatge. Per fer-ho, es demana:

a) Planteja la maximització d'aquest preu com un problema de programació lineal amb dues variables.

Criteris: No penalitzar si es planteja amb tres variables. Penalitzar -1 pt si es planteja amb dues variables i la tercera no està incorporada (p.ex. s'ignora una de les variables). Penalitzar -1 pt si la funció a maximitzar no apareix en tota la pregunta. **(Total 4 pt)**

b) Dibuixa la regió factible, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten.

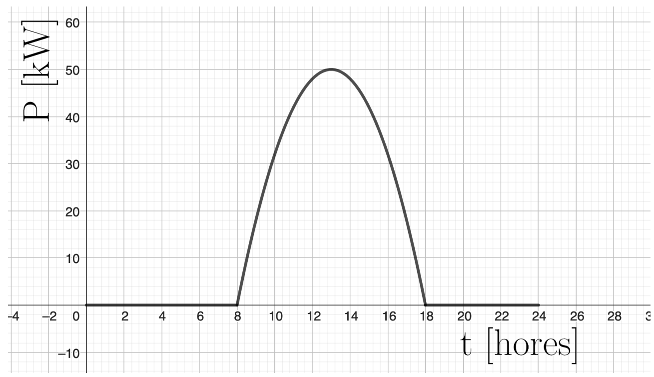
Criteris: 1 pt/recta (total 2 pt) i 1 pt/vèrtex (total 2 pt). **(Total 4 pt)**

c) Calcula el nombre de tones de cada material que s'han de transportar per tal d'assolir el preu màxim, i determina també aquest preu màxim.

Criteris: 1 pt pel càlcul i 1 pt per interpretar. No penalitzar si la solució s'expressa correctament en m^3. **(Total 2 pt)**

P3. — La potència generada per una placa solar, P (mesurada en kW), depèn del temps transcorregut, t (mesurat en hores), segons l'expressió següent:

$$P(t) = \begin{cases} 0 & \text{per a } 0 \leq t < 8, \\ -2t^2 + 52t + c & \text{per a } 8 \leq t < 18, \\ 0 & \text{per a } 18 \leq t \leq 24, \end{cases}$$



on c és un paràmetre real.

a) Tenint en compte que la funció és contínua, quin és el valor del paràmetre c?

Criteris: 2 pt per trobar almenys una igualtat, 1 pt pel càlcul correcte de c. No penalitzar si no es justifica igualtat entre límits per la dreta i l'esquerra. No penalitzar si c s'obté del valor màxim igual a 50 deduït de la gràfica (però penalitzar al següent apartat). **(Total 3 pt)**

b) Tenint en compte que el valor màxim s'assoleix a les 13 hores, calcula amb l'expressió donada quina és la potència en aquest moment.

Criteris: 0 pt si es justifica partint de la gràfica. Penalitzar -0.5 pt si no s'utilitzen unitats correctament. **(Total 3 pt)**

c) En quins intervals la funció és creixent? En quins intervals és decreixent?

Criteris: 2pt/interval, total 4 pt. Pot ser argumentat en base a la gràfica, en base a la derivada o en base a que el màxim es troba en $t = 13$. No penalitzar si s'inclouen o no els intervals on la funció és constant (no s'especifica si el creixement és necessàriament estricte). Penalitzar -0.5 pt per cada interval tancat. **(Total 4 pt)**

P4. — Considerem el pes d'un adult, p (en kg), i el seu metabolisme basal, m (en watts). Un investigador ens proporciona el model següent:

$$p(m) = 0.1 \cdot m^{1.5}, \qquad m \in (0, +\infty).$$

a) Fes una gràfica esquemàtica de la funció $p(m)$, indicant el domini, el comportament en els extrems del domini, els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims locals.

Criteris: Indicar el domini (1 pt). Indicar els valors en els extrems del domini (1 pt/extrem, total 2pt). Indicar el creixement/decreixement (1 pt). Indicar els màxims/mínims locals (1 pt). Claredat/correcció de la gràfica i els eixos (2 pt). **(Total 7 pt)**

b) Troba la funció que dona el metabolisme basal en funció del pes, $m(p)$ (és a dir, aïlla la variable m).

Criteris: 1 pt si es passa 0.1 dividint, i 2 pt si es dona el resultat correcte. **(Total 3 pt)**

P5. — Considera les funcions:

$$f(x) = (x+2)^3, \qquad g(x) = x^3 + 6x^2 + 12x.$$

a) Justifica, calculant, que $f'(x) = g'(x)$.

Criteris: 2 pt/derivada, total 4 pt. Penalitzar -1 pt si no es justifica que són dues expressions iguals. **(Total 4 pt)**

b) És cert que $f(x) = g(x)$?

Criteris: Penalitzar -1 pt per error de càlcul lleu. Penalitzar tota la puntuació per error de càlcul greu (p. ex. $(x+2)^3 = x^3 + 2^3$). **(Total 3 pt)**

c) Calcula $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Criteris: Penalitzar -1 pt per no argumentar com es resol el límit. Penalitzar tota la puntuació si es dedueix incorrectament que $\frac{\infty}{\infty} = 1$. **(Total 3 pt)**

P6. — En Manel escull a l'atzar dues xifres entre 0 i 9, que podrien estar repetides.

a) Quina és la probabilitat que ambdues xifres siguin múltiple de tres?

Criteris: En tot el problema, no penalizar si es consideren 3 o 4 múltiples de tres. Penalitzar -1 pt si no es justifica.

(Total 3 pt)

b) El producte de les dues xifres és múltiple de tres si almenys una de les xifres és múltiple de tres. Quina és la probabilitat que el producte de les dues xifres sigui múltiple de tres?

Criteris: Penalitzar -2 pt si no es justifica. **(Total 4 pt)**

Ara, en Pep et dona el seu número de telèfon, que conté nou xifres també entre 0 i 9, possiblement repetides, i que suposarem que són xifres escollides a l'atzar.

c) Quina és la probabilitat que el producte de les nou xifres sigui múltiple de tres?

Criteris: Penalitzar -1 pt si no es justifica. **(Total 3 pt)**

P7. — D'un total de $n = 80$ alumnes, el 80% d'alumnes han aprovat un examen de matemàtiques, i el 75% han aprovat un examen de física. A més, dels que han suspès l'examen de matemàtiques, només un 50% ha aprovat el de física.

a) Dels que han suspès l'examen de física, quants han aprovat el de matemàtiques?

Criteris: Penalitzar -0.5 pt si es deixa en termes de fracció decimal o percentatge. **(Total 4 pt)**

b) Quants alumnes han aprovat algun dels dos exàmens?

Criteris: Penalitzar -0.5 pt si es deixa en termes de fracció decimal o percentatge. **(Total 3 pt)**

c) Aprovar l'examen de física i aprovar l'examen de matemàtiques són esdeveniments independents?

Criteris: 1 pt per resposta correcta i 2 pt per justificar. **(Total 3 pt)**

P8. — Per estudiar la vida de les tortugues marines, hem recopilat l'edat que varen assolir alguns exemplars que varen morir per causes naturals, i hem obtingut (en anys):

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
55	62	69	70	72	77	94	103

$\bar{x}$
75.25

Suposant que aquestes dades segueixen una distribució normal, i que la seva desviació típica poblacional és de $\sigma = 20$ anys,

a) Calcula l'interval de confiança per a la mitjana poblacional amb el 90% de confiança.

Criteris: Càlcul de $z_{\alpha/2}$ 1 pt, càlcul de $z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 1 pt, càlcul dels extrems de l'interval 2 pt. Penalitzar -1 pt si s'utilitza 1.645 sense justificar que és $z_{\alpha/2}$. **(Total 4 pt)**

Suposem ara, a més, que la mitjana poblacional és de $\mu = 75.25$.

b) Quina és la probabilitat que una tortuga marina superi els 80 anys de vida?

Criteris: Penalitzar -1 pt si la distribució no és correcta. Penalitzar -1.5 pt si la probabilitat es deriva de la mostra amb la llei de Laplace. **(Total 3 pt)**

c) Quina és la probabilitat que una tortuga marina superi els 80 anys de vida, però no els 100 anys de vida?

Criteris: Penalitzar -1 pt si la distribució no és correcta. Penalitzar -1.5 pt si la probabilitat es deriva de la mostra amb la llei de Laplace. **(Total 3 pt)**

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0,1)$.

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades. Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4.

Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic, o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

P1. — Volem contractar una empresa de gestió d'entre les següents:

- L'empresa A ens cobra 150 € de cost base, i addicionalment 5 € per cada client i 3 € per cada factura que emet.
- L'empresa B ens cobra 300 € de cost base, 10 € per cada client, i no cobra per emetre factures.
- L'empresa C ens cobra 100 € de cost base, no cobra en funció del nombre de clients, però cobra 5 € per cada factura que emet.

a) Si l'any passat vàrem tenir 50 clients i, en total, vàrem emetre 180 factures, quina empresa ens hauria costat menys contractar? **(3 pt)**

Solució. Podem emprar matrius per a calcular-ho:

$$\begin{pmatrix} 150 & 5 & 3 \\ 300 & 10 & 0 \\ 100 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 50 \\ 180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 940 \\ 800 \\ 1000 \end{pmatrix}.$$

És a dir, ens hauria costat 940 € l'empresa A, 800 € l'empresa B, i 1000 € l'empresa C.

De cara a l'any vinent, tenim una previsió de x clients i y factures. Amb aquesta previsió, l'empresa A ens costaria 1050 € i l'empresa B ens costaria 900 €.

b) Calcula el nombre de clients x i el nombre de factures y prevists. **(5 pt)**

Solució. Sigui K el cost de l'empresa C. Aleshores,

$$\begin{pmatrix} 150 & 5 & 3 \\ 300 & 10 & 0 \\ 100 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1050 \\ 900 \\ K \end{pmatrix},$$

que és equivalent a

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1050-150 \\ 900-300 \\ K-100 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1050-150 \\ 900-300 \end{pmatrix}$$

Resolent el sistema, $x = 60$ i $y = 200$.

c) Amb x clients i y factures, quant ens costaria l'empresa C? **(2 pt)**

Solució. Seguint la solució de l'apartat anterior,

$$100 + 0x + 5y = K \implies K = 5 \cdot 200 + 100 = 1100.$$

És a dir, l'empresa C ens costaria 1100 €.

P2. — Un camió transporta una càrrega d'exactament 12 metres cúbics de volum i, com a màxim, un pes de 18 tones. Pot transportar:

- Sorra, que pesa 1.6 tones per metre cúbic, i que es factura a 80 € per metre cúbic.
- Grava, que pesa 1.8 tones per metre cúbic, i que es factura a 100 € per metre cúbic.
- Cendra, que pesa 0.5 tones per metre cúbic, i que es factura a 25 € per metre cúbic.

Ens interessa calcular el preu més alt que podrà facturar en un viatge. Per fer-ho, es demana:

a) Planteja la maximització d'aquest preu com un problema de programació lineal amb dues variables. **(4 pt)**

Solució. Ho podem resoldre com un problema de programació lineal en dues dimensions. En particular, siguin x els metres cúbics de sorra, y els metres cúbics de grava, i $12 - x - y$ els metres cúbics de cendra. Aleshores, les restriccions són:

$$\left.\begin{array}{rcl} x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \\ 12 - x - y & \geq & 0 \\ 1.6x + 1.8y + 0.5(12 - x - y) & \leq & 18 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \\ x + y & \leq & 12 \\ 1.1x + 1.3y & \leq & 12 \end{array}\right\}$$

Per una altra part, la funció que volem maximitzar és:

$$f(x, y) = 80x + 100y + 25 \cdot (12 - x - y) = 55x + 75y + 300.$$

b) Dibuixa la regió factible, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten. **(4 pt)**

Solució. La regió factible ve donada només per les tres primeres condicions (si se satisfan les dues primeres i la quarta, aleshores sempre se satisfà la tercera), d'on obtenim els vèrtexs de la regió com a:

$$(x_1, y_1) = (0, 0), \qquad (x_2, y_2) = (10.91, 0), \qquad (x_3, y_3) = (0, 9.23).$$

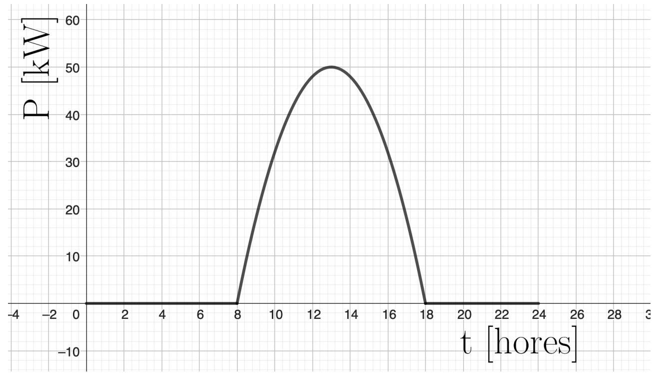
c) Calcula el nombre de tones de cada material que s'han de transportar per tal d'assolir el preu màxim, i determina també aquest preu màxim. **(2 pt)**

Solució. La funció que volem maximitzar és $f(x, y) = 55x + 75y + 300$, que té un valor màxim a $f(0, 9.23) = 992.31$.

És a dir, el preu màxim és de 992.31 €. A més, aquest s'assoleix amb $x = 0$ metres cúbics de sorra, $y = 9.23$ metres cúbics de grava, i $(12 - x - y) = 2.77$ metres cúbics de cendra, que equivalen a 16.62 tones de grava i 1.38 tones de cendra.

P3. — La potència generada per una placa solar, P (mesurada en kW), depèn del temps transcorregut, t (mesurat en hores), segons l'expressió següent:

$$P(t) = \begin{cases} 0 & \text{per a } 0 \leq t < 8, \\ -2t^2 + 52t + c & \text{per a } 8 \leq t < 18, \\ 0 & \text{per a } 18 \leq t \leq 24, \end{cases}$$



on c és un paràmetre real.

a) Tenint en compte que la funció és contínua, quin és el valor del paràmetre c? **(3 pt)**

Solució. Coneixent els punts per on passa la funció quadràtica,

$$\begin{cases} -2 \cdot 8^2 + 52 \cdot 8 + c = 0, \\ -2 \cdot 18^2 + 52 \cdot 18 + c = 0. \end{cases}$$

Resolent qualsevol d'aquestes dues equacions obtenim que $c = -288$.

b) Tenint en compte que el valor màxim s'assoleix a les 13 hores, calcula amb l'expressió donada quina és la potència en aquest moment. **(3 pt)**

Solució. Ens demanen el valor $P(13)$, que és:

$$P(t) = -2t^2 + 52t + c \implies P(13) = -2 \cdot 13^2 + 52 \cdot 13 - 288 \implies P(13) = 50 \text{ kW}.$$

c) En quins intervals la funció és creixent? En quins intervals és decreixent? **(4 pt)**

Solució. Segons la gràfica, és creixent abans del màxim $t = 13$, i és decreixent després.

Els intervals en què la funció és constant ($t \in [0, 8]$ i $t \in [18, 24]$) són tècnicament creixents (i també decreixents), però no estrictament creixents (ni estrictament decreixents).

P4. — Considerem el pes d'un adult, p (en kg), i el seu metabolisme basal, m (en watts). Un investigador ens proporciona el model següent:

$$p(m) = 0.1 \cdot m^{1.5}, \qquad m \in (0, +\infty).$$

a) Fes una gràfica esquemàtica de la funció $p(m)$, indicant el domini, el comportament en els extrems del domini, els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims locals. **(7 pt)**

Solució. El domini és $m \in (0, \infty)$.

En els extrems,

$$\lim_{m \to 0^+} p(m) = p(0) = 0.1 \cdot 0^{1.5} = 0, \qquad \lim_{m \to +\infty} p(m) = p(0) = 0.1 \cdot \infty^{1.5} = +\infty.$$

La funció és clarament creixent, ja que la seva derivada és sempre positiva i, per no ser $m = 0$ del domini, no té ni mínims ni màxims.

b) Troba la funció que dona el metabolisme basal en funció del pes, $m(p)$ (és a dir, aïlla la variable m). **(3 pt)**

Solució. Únicament hem d'invertir la funció:

$$p = 0.1 \cdot m^{1.5} \implies m^{1.5} = \frac{p}{0.1} \implies m = \left(\frac{p}{0.1}\right)^{1/0.667} \implies m = 4.64 \cdot p^{0.667}.$$

És a dir, la funció demanada és $m(p) = 4.64 \cdot p^{0.667}$.

P5. — Considera les funcions:

$$f(x) = (x+2)^3, \qquad g(x) = x^3 + 6x^2 + 12x.$$

a) Justifica, calculant, que $f'(x) = g'(x)$. **(4 pt)**

Solució. Calculem la derivada de la primera funció:

$$f'(x) = \left((x+2)^3\right)' = 3 \cdot (x+2)^2 = 3 \cdot (x^2 + 4x + 4) = 3x^2 + 12x + 12.$$

Per al segon terme:

$$g'(x) = \left(x^3 + 6x^2 + 12x\right)' = 3x^2 + 2 \cdot 6x + 12 = 3x^2 + 12x + 12,$$

d'on observam que els dos termes són iguals.

b) És cert que $f(x) = g(x)$? **(3 pt)**

Solució. No, ja que $f(0) = 2^3 = 8$, però $g(0) = 0$.

c) Calcula $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$. **(3 pt)**

Solució. Podem veure que els dos polinomis són de grau 3, i que els dos tenen el coeficient 1 al terme de grau 3, així que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 \cdot x^3 + \dots}{1 \cdot x^3 + \dots} = 1.$$

Alternativament, atès que $f(x)$ i $g(x)$ són dues primitives de la funció $3x^2 + 12x + 12$, podem calcular explícitament $f(x)$ com a:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + C}{x^3 + 6x^2 + 12x} = 1,$$

on C és una constant real desconeguda.

Alternativament, també es pot aplicar la regla de De L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ si existeix,}$$

i, en aquest cas, el límit del quocient entre les derivades sí que existeix:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} 1 = 1 \implies \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

P6. — En Manel escull a l'atzar dues xifres entre 0 i 9, que podrien estar repetides.

a) Quina és la probabilitat que ambdues xifres siguin múltiple de tres?

(3 pt)

Solució. Cada una de les dues xifres té una probabilitat de $4/10$ de ser un múltiple de tres per la llei de Laplace.

Sigui A l'esdeveniment "la primera xifra és múltiple de tres", i B l'esdeveniment "la segona xifra és múltiple de tres". Atès que l'elecció d'ambdues xifres és independent, la probabilitat demanada és de

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \left(\frac{4}{10}\right) \cdot \left(\frac{4}{10}\right) = \frac{16}{100}.$$

b) El producte de les dues xifres és múltiple de tres si almenys una de les xifres és múltiple de tres. Quina és la probabilitat que el producte de les dues xifres sigui múltiple de tres? **(4 pt)**

Solució. Observem que el producte de les dues xifres serà múltiple de tres si alguna d'elles ho és. Amb els mateixos esdeveniments que la pregunta anterior,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\left(\frac{4}{10}\right)+\left(\frac{4}{10}\right)-\left(\frac{16}{100}\right)=\frac{64}{100}.$$

Ara, en Pep et dona el seu número de telèfon, que conté nou xifres també entre 0 i 9, possiblement repetides, i que suposarem que són xifres escollides a l'atzar.

c) Quina és la probabilitat que el producte de les nou xifres sigui múltiple de tres? **(3 pt)**

Solució. Considerem els esdeveniments A_i: la xifra i-èssima és múltiple de tres. Observem que el producte dels nombres serà múltiple de tres, si i només si almenys un dels nombres ho és. Per tant, la probabilitat demanada és:

$$P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_9).$$

És més fàcil calcular la probabilitat que NO sigui múltiple de tres:

$$P(A_1^c\cap A_2^c\cap\ldots\cap A_9^c)=P(A_1^c)\cdot P(A_2^c)\ldots P(A_9^c)=\left(\frac{6}{10}\right)^9\implies P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_9)=1-\left(\frac{6}{10}\right)^9=0.990$$

P7. — D'un total de $n=80$ alumnes, el 80% d'alumnes han aprovat un examen de matemàtiques, i el 75% han aprovat un examen de física. A més, dels que han suspès l'examen de matemàtiques, només un 50% ha aprovat el de física.

a) Dels que han suspès l'examen de física, quants han aprovat el de matemàtiques? **(4 pt)**

Solució. Escollint un alumne a l'atzar, definim els esdeveniments M: "ha aprovat l'examen de matemàtiques"; i F: "ha aprovat l'examen de física". Aleshores,

$$P(M)=0.80,\quad P(F)=0.75,\quad P(F|M^c)=0.50.$$

Per tant,

$$P(F|M^c)=0.50\implies P(F^c|M^c)=0.50\implies P(M^c|F^c)=\frac{P(M^c)}{P(F^c)}\cdot P(F^c|M^c)=0.4\implies P(M|F^c)=0.6.$$

És a dir, un 60% dels alumnes que han suspès l'examen de física, han aprovat el de matemàtiques.

En quantitat total d'alumnes, el 25% de 80 alumnes, és a dir 20 alumnes, han suspès l'examen de física. Per tant, el 60% d'aquests 20 alumnes, és a dir 12 alumnes, han suspès l'examen de física i han aprovat el de matemàtiques.

b) Quants alumnes han aprovat algun dels dos exàmens? **(3 pt)**

Solució. Pel teorema de les probabilitats totals,

$$P(F)=P(F|M)P(M)+P(F|M^c)P(M^c)\implies P(F|M)=0.8125.$$

Per tant, podem calcular la probabilitat de la intersecció i, per tant, de la unió:

$$P(F|M)=\tfrac{P(F\cap M)}{P(M)}\implies P(F\cap M)=P(F|M)P(M)=0.65$$

$$\implies P(F\cup M)=P(F)+P(M)-P(F\cap M)=0.90.$$

És a dir, el 90% de 80 alumnes, 72 alumnes han aprovat algun dels dos exàmens.

c) Aprovar l'examen de física i aprovar l'examen de matemàtiques són esdeveniments independents? **(3 pt)**

Solució. No, ja que $P(F \cap M) = 0.65$, però $P(F) \cdot P(M) = 0.60$.

P8. — Per estudiar la vida de les tortugues marines, hem recopilat l'edat que varen assolir alguns exemplars que varen morir per causes naturals, i hem obtingut (en anys):

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
55	62	69	70	72	77	94	103

$\bar{x}$
75.25

Suposant que aquestes dades segueixen una distribució normal, i que la seva desviació típica poblacional és de $\sigma = 20$ anys,

a) Calcula l'interval de confiança per a la mitjana poblacional amb el 90% de confiança. **(4 pt)**

Solució. Per a un nivell de confiança del 90%, el nivell de significació és $\alpha = 0.10$, i l'interval demanat el podem calcular com a:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(75.25 - 1.645 \cdot \frac{20}{\sqrt{8}},\ 75.25 + 1.645 \cdot \frac{20}{\sqrt{8}}\right) = (63.62,\ 86.88)\,.$$

Suposem ara, a més, que la mitjana poblacional és de $\mu = 75.25$.

b) Quina és la probabilitat que una tortuga marina superi els 80 anys de vida? **(3 pt)**

Solució. Si $X \sim \mathcal{N}(75.25,\ 20)$, aleshores la variable aleatòria $Z = \frac{X-75.25}{20}$ segueix una distribució $\mathcal{N}(0,1)$. Per tant,

$$P(X \geq 80) = P\left(\frac{X - 75.25}{20} \geq \frac{80 - 75.25}{20}\right) = P(Z \geq 0.2375) = 1 - P(Z \leq 0.2375) = 1 - 0.5948, = 0.4052.$$

És a dir, la probabilitat demanada és de 0.4052 o del 40.52%.

c) Quina és la probabilitat que una tortuga marina superi els 80 anys de vida, però no els 100 anys de vida? **(3 pt)**

Solució. D'acord, amb la notació de l'apartat anterior, calculem primer $P(X \leq 80)$ i $P(X \leq 100)$:

$$P(X \leq 80) = 1 - P(X \geq 80) = 0.5948,$$

i també

$$P(X \leq 100) = P\left(\frac{X - 75.25}{20} \leq \frac{100 - 75.25}{20}\right) = P(Z \leq 1.2375) = 0.8925.$$

Per tant, la probabilitat demanada és:

$$P(80 \leq X \leq 100) = P(X \leq 100) - P(X \leq 80) = 0.2977.$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0,1)$.

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades. Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4.

Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic, o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

P1. — Volem mesurar el consum d'un cotxe elèctric que té una bateria de 50 kWh i que té un consum diferent si el conduim per autopista, per ciutat o per carretera de muntanya. Vàrem fer tres sortides, cada una començant amb la bateria completament carregada, i vàrem poder recórrer les següents distàncies fins a acabar la bateria:

- Primer dia: 180 km per autopista i 60 km per ciutat.
- Segon dia: 200 km per ciutat i 80 km per carretera de muntanya.
- Tercer dia: 150 km per autopista i 80 km per carretera de muntanya.

a) Calcula el consum del cotxe per a cada un dels tipus de carreteres. **(7 pt)**

b) Si únicament l'utilitzam per conduir per ciutat, quina seria la quantitat total de km que podríem recórrer amb una càrrega completa de la bateria? **(3 pt)**

P2. — Un camió necessita transportar una càrrega d'exactament 12 metres cúbics de volum, i d'exactament 18 tones de pes. Pot transportar:

- Sorra, que pesa 1.6 tones per metre cúbic.
- Grava, que pesa 1.8 tones per metre cúbic.
- Cendra, que pesa 0.5 tones per metre cúbic.

a) Si volem omplir el camió només amb sorra i cendra, calcula quina quantitat de cada material ens permet assolir simultàniament la màxima capacitat de volum i la màxima capacitat de pes. **(5 pt)**

b) Si volem omplir el camió només amb sorra i grava, no podem assolir simultàniament la màxima capacitat de volum i la màxima capacitat de pes. Justifica per què no. **(5 pt)**

P3. — En una pastisseria volen promocionar els seus productes amb dues ofertes:

- Oferta A: 2 ensaïmades, 2 coques de patata, 4 barres de xocolata, a 4 €.
- Oferta B: 6 ensaïmades, 3 coques de patata, 3 barres de xocolata, a 8 €.

Disposen de 120 ensaïmades, 60 coques de patata i 72 barres de xocolata. Suposant que totes les ofertes es vendran completament, ens interessa calcular quantes ofertes A i quantes ofertes B haurien d'oferir per maximitzar el benefici.

a) Planteja la maximització d'aquest benefici com un problema de programació lineal amb dues variables. **(3 pt)**

b) Dibuixa la regió factible, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten. **(5 pt)**

c) Quantes ofertes A i quantes ofertes B haurien d'oferir per maximitzar el benefici? Quin seria el benefici en aquest cas? **(2 pt)**

P4. — La temperatura d'un objecte, t (en graus centígrads), canvia a mesura que passa el temps, s (en segons), segons el model següent:

$$\begin{aligned} t(s) &= 45 \cdot e^{-0.08s} + 25 \\ &= 45 \cdot 0.923^s + 25, \qquad \text{per a } s \geq 0. \end{aligned}$$

(Et proprocionem dues expressions algebraiques vàlides i equivalents, pots utilitzar la que prefereixis.)

a) Fes una gràfica esquemàtica de la funció $t(s)$. Calcula o justifica, i indica sobre la gràfica: el domini, el comportament en els extrems del domini, els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims locals i globals. **(7 pt)**

b) A què tendirà la temperatura de l'objecte quan hagi passat molt de temps? **(3 pt)**

P5. — Una maleta rectangular té tres mesures (amplada, alçària i profunditat), i el seu volum és el producte de les tres mesures. Volem dissenyar una maleta rectangular de 30 cm de profunditat, i tal que la suma de l'amplada, l'alçària i la profunditat sigui exactament 110 cm. Quin és el volum màxim que pot tenir aquesta maleta? **(10 pt)**

P6. — Tirem dos daus no trucats. Considera els esdeveniments següents:

A: En el primer dau ha sortit un 1.
B: En el segon dau ha sortit un 1.
C: La suma dels valors dels dos daus és 3.

a) Calcula $P(A)$. **(3 pt)**

b) Calcula $P(A \cup B)$. **(3 pt)**

c) Són C i $A \cup B$ esdeveniments independents? **(4 pt)**

P7. — En una població:

- les alçades dels homes segueixen una distribució normal de mitjana 1.76 metres i desviació típica 0.12 metres; i
- les alçades de les dones segueixen una distribució normal de mitjana 1.62 metres i desviació típica 0.11 metres.

Es demana:

a) Escollim un **home** a l'atzar. Quina és la probabilitat que la seva alçada sigui major o igual que 1.76 metres? **(3 pt)**

b) Escollim una **dona** a l'atzar. Quina és la probabilitat que la seva alçada sigui major o igual que 1.76 metres? **(4 pt)**

c) Què és més probable, que un home tengui una alçada **inferior** a 1.76 metres, o que una dona tengui una alçada **inferior** a 1.76 metres? **(3 pt)**

P8. — Tiram una moneda a l'aire 100 vegades, i ha sortit 46 vegades cara i 54 vegades creu. Un estudiant creu que la moneda no està trucada i proposa aproximar el nombre de cares que surten en 100 tirades com una variable aleatòria amb distribució normal $\mathcal{N}\,(\mu = 50,\ \sigma = 5)$.

a) Segons la distribució proposada, quina hauria estat la probabilitat d'obtenir 60 cares o més? **(3 pt)**

b) Calcula l'interval de confiança que contingui el 90% dels valors més probables que apareixen a la distribució proposada. És raonable la hipòtesi que la moneda no està trucada? **(4 pt)**

Ara, tirarem una altra moneda a l'aire 100 vegades, i el nombre de cares que obtendrem també seguirà una distribució normal $\mathcal{N}\,(\mu = 50,\ \sigma = 5)$. Sospitarem que la moneda està trucada si el nombre de cares **no** està contingut a l'interval calculat a l'apartat anterior.

c) Quina és la probabilitat que sospitem que la moneda està trucada? **(3 pt)**

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0,1)$.

Criteris de correcció globals

- Heu de corregir quatre qüestions en total d'entre les vuit proposades. Si l'alumne presenta més de quatre qüestions, corregiu-ne les quatre primeres.
- Cada problema té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions màximes que apareixen a cada apartat (si no està indicat, tots els apartats d'una mateixa pregunta tenen la mateixa valoració). Les puntuacions dels apartats són independents: si l'alumne s'ha equivocat en qualque apartat però fa bé els altres (segons les "seves" dades equivocades), donau-li la puntuació adient.
- Es valorarà conjuntament el resultat, la justificació (ja sigui simbòlica o escrita), la claredat i ús del llenguatge matemàtic i no matemàtic, i l'estructura de la resposta. Orientativament, penalitzau:
  - Els errors de càlcul amb un 25%; els errors greus i/o que portin a resultats incoherents o absurds, amb un 50%.
  - En preguntes de justificar, si la justificació és només "intuïtiva" (p. ex. una observació que no respon exhaustivament a allò que s'ha demanat), amb el 30%-50%; en preguntes de justificar, una resposta sense cap justificació s'ha de penalitzar amb el 100%.
  - En qualsevol pregunta, si apareixen raonaments (que no són clars/evidents) sense justificar, amb el 20%-30%.
  - La imprecisió en l'ús del llenguatge matemàtic (p. ex. variables sense introduir/que canvien de significat), o la falta de claredat per absència de llenguatge matemàtic, amb un 20%-30%.
  - L'estructura s'ha de penalitzar en funció de la dificultat per entendre la resposta.
- Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris generals o específics. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Criteris de correcció específics

Només es detallen els apartats en què hi ha diverses preguntes o que es poden desglossar. En apartats on s'omet el criteri de correcció específic, aquest serà simplement "Càlcul i/o justificació correcta".

P1. — Volem mesurar el consum d'un cotxe elèctric que té una bateria de 50 kWh i que té un consum diferent si el conduim per autopista, per ciutat o per carretera de muntanya. Vàrem fer tres sortides, cada una començant amb la bateria completament carregada, i vàrem poder recórrer les següents distàncies fins a acabar la bateria:

- Primer dia: 180 km per autopista i 60 km per ciutat.
- Segon dia: 200 km per ciutat i 80 km per carretera de muntanya.
- Tercer dia: 150 km per autopista i 80 km per carretera de muntanya.

a) Calcula el consum del cotxe per a cada un dels tipus de carreteres. **(Total 7 pt)**

Criteris: Plantejar un sistema d'equacions (1 pt/equació, total 3 pt), calcular-ne la solució correcta (4 pt). Penalitzar -1.5 pt per errors de càlcul. Penalitzar -0.5 pt per no posar una unitat correctament, o -1 pt si és més d'una vegada. No penalitzar si s'utilitza el vector $(1, 1, 1)$.

b) Si únicament l'utilitzam per conduir per ciutat, quina seria la quantitat total de km que podríem recórrer amb una càrrega completa de la bateria? **(Total 3 pt)**

Criteris: Resolució correcta (3 pt). Penalitzar -1 pt per errors de càlcul. No penalitzar per errors d'arrodonomient si utilitzen dos o més decimals.

P2. — Un camió necessita transportar una càrrega d'exactament 12 metres cúbics de volum, i d'exactament 18 tones de pes. Pot transportar:

- Sorra, que pesa 1.6 tones per metre cúbic.
- Grava, que pesa 1.8 tones per metre cúbic.
- Cendra, que pesa 0.5 tones per metre cúbic.

a) Si volem omplir el camió només amb sorra i cendra, calcula quina quantitat de cada material ens permet assolir simultàniament la màxima capacitat de volum i la màxima capacitat de pes. **(Total 5 pt)**

Criteris: Plantejar sistema d'equacions (1 pt/equació, total 2 pt), calcular-ne la solució (2 pt), interpretar-la (1 pt). Penalitzar -1 pt per errors de càlcul. Penalitzar -0.5 pt per cada unitat que no apareix correctament.

b) Si volem omplir el camió només amb sorra i grava, no podem assolir simultàniament la màxima capacitat de volum i la màxima capacitat de pes. Justifica per què no. **(Total 5 pt)**

Criteris: Si es resol amb un sistema de dues equacions: plantejar (2 pt), calcular-ne la solució (2 pt), argumentar que alguna quantitat és negativa (1 pt). Si es resol com una funció d'una variable: plantejar (2 pt), calcular el recorregut justificant la monotonia (2 pt), argumentar que el pes/el volum no es pot ajustar (1 pt). Penalitzar -1 pt per errors de càlcul. Penalitzar -0.5 pt per cada unitat que no apareix correctament.

P3. — En una pastisseria volen promocionar els seus productes amb dues ofertes:

- Oferta A: 2 ensaïmades, 2 coques de patata, 4 barres de xocolata, a 4 €.
- Oferta B: 6 ensaïmades, 3 coques de patata, 3 barres de xocolata, a 8 €.

Disposen de 120 ensaïmades, 60 coques de patata i 72 barres de xocolata. Suposant que totes les ofertes es vendran completament, ens interessa calcular quantes ofertes A i quantes ofertes B haurien d'oferir per maximitzar el benefici.

a) Planteja la maximització d'aquest benefici com un problema de programació lineal amb dues variables. **(Total 3 pt)**

Criteris: Plantjear rectes (0.25 pt/recta trivial, 0.5/pt recta no trivial, total 2 pt), funció objectiu (1 pt). Penalitzar tota la puntuació si les variables són incorrectes.

b) Dibuixa la regió factible, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten. **(Total 5 pt)**

Criteris: Traçar rectes no trivials (1 pt/recta, total 3 pt), calcular vèrtexs (0.5 pt/vèrtex, total 2 pt). Penalitzar -2.5 pt si la regió factible no està dibuixada o és incorrecta. Penalitzar -1 pt si les rectes trivials no estan representades o es representen intercanviades.

c) Quantes ofertes A i quantes ofertes B haurien d'oferir per maximitzar el benefici? Quin seria el benefici en aquest cas? **(Total 2 pt)**

Criteris: Calcular correctament el vèrtex corresponent al màxim (1 pt) i interpretar-lo (1 pt).

P4. — La temperatura d'un objecte, t (en graus centígrads), canvia a mesura que passa el temps, s (en segons), segons el model següent:

$$\begin{aligned} t(s) &= 45 \cdot e^{-0.08s} + 25 \\ &= 45 \cdot 0.923^s + 25, \qquad \text{per a } s \geq 0. \end{aligned}$$

(Et proprocionem dues expressions algebraiques vàlides i equivalents, pots utilitzar la que prefereixis.)

a) Fes una gràfica esquemàtica de la funció $t(s)$. Calcula o justifica, i indica sobre la gràfica: el domini, el comportament en els extrems del domini, els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims locals i globals. **(Total 7 pt)**

Criteris: Determinar i indicar el domini (1 pt), els valors en els extrems del domini (1 pt/extrem, total 2 pt), la monotonia (1 pt/càlcul derivada, 1 pt/interpretació, total 2 pt), els màxims/mínims (1 pt), i la claredat/correcció de la gràfica i els eixos (1 pt). Per cada element de la gràfica, penalitzar -100% de la puntuació de l'element si no es justifica, i penalitzar -50% si es justifica però la gràfica no ho reflecteix correctament. Penalitzar -0.5 pt si l'alumne diu que hi ha un mínim. Penalitzar -0.5 pt per cada unitat/nom de variable no especificat a la gràfica.

b) A què tendirà la temperatura de l'objecte quan hagi passat molt de temps? **(Total 3 pt)**

Criteris: Interpretar com un límit (2 pt), calcular correctament o justificar en base a la gràfica (1 pt).

P5. — Una maleta rectangular té tres mesures (amplada, alçària i profunditat), i el seu volum és el producte de les tres mesures. Volem dissenyar una maleta rectangular de 30 cm de profunditat, i tal que la suma de l'amplada, l'alçària i la profunditat sigui exactament 110 cm. Quin és el volum màxim que pot tenir aquesta maleta? **(Total 10 pt)**

Criteris: Si està plantejat com un problema de minimització d'una funció d'una variable: determinar la funció amb dues/tres variables (1 pt), trobar la relació entre les variables (1 pt), determinar la funció a maximitzar amb una sola variable (1 pt), calcular la derivada (3 pt), calcular el màxim (2 pt trobar extrem relatiu, 2 pt comprovar que és un màxim, total 4 pt). Si està plantejat com un problema de programació lineal (incorrecte: la funció objectiu no és lineal): plantejament (2 pt) trobar la regió factible i els vèrtexs (3 pt).

P6. — Tirem dos daus no trucats. Considera els esdeveniments següents:

A: En el primer dau ha sortit un 1.
B: En el segon dau ha sortit un 1.
C: La suma dels valors dels dos daus és 3.

a) Calcula $P(A)$. **(Total 3 pt)**

Criteris: Penalitzar -1 pt si no s'argumenta amb la la llei de Laplace, una taula, o especificant casos favorables/totals. Penalitzar -1 pt errors de càlcul o compteig.

b) Calcula $P(A \cup B)$. **(Total 3 pt)**

Criteris: Penalitzar -1 pt si no s'argumenta amb la la llei de Laplace, una taula, o especificant casos favorables/totals. Penalitzar -1 pt errors de càlcul o compteig. Penalitzar -1 pt si s'utilitza que A, B són independents sense especificar-ho.

c) Són C i $A \cup B$ esdeveniments independents? **(Total 4 pt)**

Criteris: Càlculs (1 pt/terme de la igualtat, total 2 pt), interpretació (2 pt). Penalitzar -1 pt errors de càlcul o compteig. No penalitzar si s'utilitzen càlculs incorrectes d'apartats anteriors.

P7. — En una població:

- les alçades dels homes segueixen una distribució normal de mitjana 1.76 metres i desviació típica 0.12 metres; i
- les alçades de les dones segueixen una distribució normal de mitjana 1.62 metres i desviació típica 0.11 metres.

Es demana:

a) Escollim un **home** a l'atzar. Quina és la probabilitat que la seva alçada sigui major o igual que 1.76 metres? **(Total 3 pt)**

Criteris: Si es justifica per la simetria de la distribució normal, 3 pt. Si es resol tipificant, tipificar (1.5 pt), calcular (1.5 pt). Penalitzar -1 pt errors de càlcul. Penalitzar -2 pt errors de llenguatge (p. ex. es gira el signe de la desigualtat sense sentit).

b) Escollim una **dona** a l'atzar. Quina és la probabilitat que la seva alçada sigui major o igual que 1.76 metres? **(Total 4 pt)**

Criteris: Tipificar (2 pt), càlcul (2 pt). Penalitzar -1 pt errors de càlcul. Penalitzar -2 pt errors de llenguatge (p. ex. es gira el signe de la desigualtat sense sentit).

c) Què és més probable, que un home tengui una alçada **inferior** a 1.76 metres, o que una dona tengui una alçada **inferior** a 1.76 metres? **(Total 3 pt)**

Criteris: Càlculs (1 pt/probabilitat, total 2 pt), interpretació (1 pt). Penalitzar -1 pt errors de càlcul. Penalitzar -2 pt errors de llenguatge (p. ex. es gira el signe de la desigualtat sense sentit). No penalitzar errors si provenen d'apartats anteriors.

P8. — Tiram una moneda a l'aire 100 vegades, i ha sortit 46 vegades cara i 54 vegades creu. Un estudiant creu que la moneda no està trucada i proposa aproximar el nombre de cares que surten en 100 tirades com una variable aleatòria amb distribució normal $\mathcal{N}(\mu = 50,\ \sigma = 5)$.

a) Segons la distribució proposada, quina hauria estat la probabilitat d'obtenir 60 cares o més? **(Total 3 pt)**

Criteris: Tipificar (1.5 pt), calcular (1.5 pt). Penalitzar -1 pt errors de càlcul. Penalitzar -1.5 pt si la distribució és incorrecta. Penalitzar -2 pt errors de llenguatge (p. ex. es "gira" el signe de la desigualtat). No penalitzar si s'ajusta o no l'aproximació de la normal (considerant $X \geq 60.5$ en comptes de $X \geq 60$).

b) Calcula l'interval de confiança que contingui el 90% dels valors més probables que apareixen a la distribució proposada. És raonable la hipòtesi que la moneda no està trucada? **(Total 4 pt)**

Criteris: Determinar justificadament el valor de $z_{\alpha/2}$ (1 pt), calcular l'interval de confiança (2 pt), interpretar la hipòtesi (1 pt). Penalitzar -1 pt errors de càlcul. Penalitzar -1 pt si la distribució és incorrecta.

Ara, tirarem una altra moneda a l'aire 100 vegades, i el nombre de cares que obtendrem també seguirà una distribució normal $\mathcal{N}(\mu = 50,\ \sigma = 5)$. Sospitarem que la moneda està trucada si el nombre de cares **no** està contingut a l'interval calculat a l'apartat anterior.

c) Quina és la probabilitat que sospitem que la moneda està trucada? **(Total 3 pt)**

Criteris: Si es justifica en base al concepte d'interval de confiança (3 pt). Si es calcula explícitament, tipificar (1.5 pt), calcular (1.5 pt). Penalitzar -1 pt errors de càlcul. Penalitzar -2 pt errors de llenguatge. No penalitzar si utilitzen dades incorrectes calculades a l'apartat anterior.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0,1)$.

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades. Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4.

Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic, o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

P1. — Volem mesurar el consum d'un cotxe elèctric que té una bateria de 50 kWh i que té un consum diferent si el conduim per autopista, per ciutat o per carretera de muntanya. Vàrem fer tres sortides, cada una començant amb la bateria completament carregada, i vàrem poder recórrer les següents distàncies fins a acabar la bateria:

- Primer dia: 180 km per autopista i 60 km per ciutat.
- Segon dia: 200 km per ciutat i 80 km per carretera de muntanya.
- Tercer dia: 150 km per autopista i 80 km per carretera de muntanya.

a) Calcula el consum del cotxe per a cada un dels tipus de carreteres. **(7 pt)**

Solució. Siguin x, y, z el consum (en kWh) del cotxe quan aquest circula, respectivament, per autopista, per ciutat i per muntanya. Aleshores,

$$\begin{pmatrix} 180 & 60 & 0 \\ 0 & 200 & 80 \\ 150 & 0 & 80 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Resolem el sistema d'equacions,

$$x = 0.222, \qquad y = 0.167, \qquad z = 0.208.$$

b) Si únicament l'utilitzam per conduir per ciutat, quina seria la quantitat total de km que podríem recórrer amb una càrrega completa de la bateria? **(3 pt)**

Solució. Si volem conduir únicament per ciutat, el nombre de km que podrem fer, k, el podem calcular com a:

$$0 \cdot 0.222 + k \cdot 0.167 + 0 \cdot 0.208 = 50 \implies k = 50/0.167 = 300 \text{ km}.$$

P2. — Un camió necessita transportar una càrrega d'exactament 12 metres cúbics de volum, i d'exactament 18 tones de pes. Pot transportar:

- Sorra, que pesa 1.6 tones per metre cúbic.
- Grava, que pesa 1.8 tones per metre cúbic.
- Cendra, que pesa 0.5 tones per metre cúbic.

a) Si volem omplir el camió només amb sorra i cendra, calcula quina quantitat de cada material ens permet assolir simultàniament la màxima capacitat de volum i la màxima capacitat de pes. **(5 pt)**

Solució. Sigui x els metres cúbics de sorra, i z els metres cúbics de cendra. Aleshores, cercam solucions del sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases} x + z = 12, \\ 1.6x + 0.5z = 18, \end{cases}$$

que podem comprovar que té una única solució amb $x, z \geq 0$.

b) Si volem omplir el camió només amb sorra i grava, no podem assolir simultàniament la màxima capacitat de volum i la màxima capacitat de pes. Justifica per què no. **(5 pt)**

Solució. Com a l'apartat anterior, podem resoldre un sistema de dues equacions lineals i dues incògnites, i comprovar que la solució que obtenim té alguna quantitat negativa.

Alternativament, sigui x els metres cúbics de sorra, aleshores $y = 12 - x$ són els metres cúbics de grava. Si calculam el pes de la càrrega:

$$p(x) = x \cdot 1.6 + (12 - x) \cdot 1.8 = 12 \cdot 1.8 - x \cdot 0.2 = 21.6 - 0.2x,$$

ara bé, si x és a l'interval $[0, 12]$, aleshores $p(x)$ està entre els nombres $p(0) = 21.6$ i $p(12) = 19.2$, ja que és una funció sempre decreixent. Per tant, si s'assoleix la capacitat en volum, sempre sobrepassam la capacitat en càrrega.

P3. — En una pastisseria volen promocionar els seus productes amb dues ofertes:

- Oferta A: 2 ensaïmades, 2 coques de patata, 4 barres de xocolata, a 4 €.
- Oferta B: 6 ensaïmades, 3 coques de patata, 3 barres de xocolata, a 8 €.

Disposen de 120 ensaïmades, 60 coques de patata i 72 barres de xocolata. Suposant que totes les ofertes es vendran completament, ens interessa calcular quantes ofertes A i quantes ofertes B haurien d'oferir per maximitzar el benefici.

a) Planteja la maximització d'aquest benefici com un problema de programació lineal amb dues variables. **(3 pt)**

Solució. Sigui a el nombre d'ofertes tipus A, i b el nombre d'ofertes tipus B. Aleshores, volem maximitzar $f(a, b) = 4a + 8b$, amb les restriccions següents:

$$\left.\begin{array}{rcl} a & \geq & 0 \\ b & \geq & 0 \\ 2a + 6b & \leq & 120 \\ 2a + 3b & \leq & 60 \\ 4a + 3b & \leq & 72 \end{array}\right\}$$

b) Dibuixa la regió factible, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten. **(5 pt)**

Solució. Si calculam la regió factible, veiem que els vèrtexs possibles són

$$(x_1, y_1) = (0, 0), \quad (x_2, y_2) = (18, 0), \quad (x_3, y_3) = (6, 16), \quad (x_4, y_4) = (0, 20).$$

c) Quantes ofertes A i quantes ofertes B haurien d'oferir per maximitzar el benefici? Quin seria el benefici en aquest cas? **(2 pt)**

Solució. La funció és màxima al vèrtex $f(0, 20) = 160$, que correspon a fer 20 ofertes del tipus B, i no fer-ne cap del tipus A, per obtenir 160€ de benefici.

P4. — La temperatura d'un objecte, t (en graus centígrads), canvia a mesura que passa el temps, s (en segons), segons el model següent:

$$\begin{aligned} t(s) &= 45 \cdot e^{-0.08s} + 25 \\ &= 45 \cdot 0.923^s + 25, \qquad \text{per a } s \geq 0. \end{aligned}$$

(Et proprocionem dues expressions algebraiques vàlides i equivalents, pots utilitzar la que prefereixis.)

a) Fes una gràfica esquemàtica de la funció $t(s)$. Calcula o justifica, i indica sobre la gràfica: el domini, el comportament en els extrems del domini, els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims locals i globals. **(7 pt)**

Solució. El domini, donat per l'enunciat, és $[0, \infty)$. La funció és clarament contínua a tot el seu domini. Vegem què passa als dos extrems de l'interval:

$$t(s=0) = 45e^{-0.08\cdot 0} + 25 = 45e^{0} + 25 = 70^\circ \text{ C},$$
$$\text{lím}_{s\to\infty} 45e^{-0.08s} + 25 = 0 + 25 = 25^\circ \text{ C}.$$

El ritme al qual creix o decreix ve donat per la derivada d'aquesta expressió:

$$t'(s) = \left(45e^{-0.08s} + 25\right)' = 45e^{-0.08s}\cdot(-0.08) + 0 = -3.6e^{-0.08s}.$$

En particular, per a tot instant de temps $s \geq 0$, la funció és sempre decreixent:

$$e^{-0.08s} > 0 \implies -3.6e^{-0.08s} < 0.$$

Per tant, no té extrems relatius, i té un màxim global en $s = 0$.

b) A què tendirà la temperatura de l'objecte quan hagi passat molt de temps? **(3 pt)**

Solució. Com hem calculat anteriorment,

$$\lim_{s\to\infty} 45e^{-0.08s} + 25 = 25,$$

és a dir, que la temperatura de l'objecte tendirà a 25° centígrads.

P5. — Una maleta rectangular té tres mesures (amplada, alçària i profunditat), i el seu volum és el producte de les tres mesures. Volem dissenyar una maleta rectangular de 30 cm de profunditat, i tal que la suma de l'amplada, l'alçària i la profunditat sigui exactament 110 cm. Quin és el volum màxim que pot tenir aquesta maleta? **(10 pt)**

Solució. Siguin x, y, z les mesures d'amplada, alçària i profunditat, respectivament.
El volum màxim el tindrà quan s'arriba al límit dels 110 cm, així que si $z = 30$

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 110 \\ z = 30 \end{array}\right. \implies y = 110 - x - 30 = 80 - x.$$

Ara sí, podem expressar el volum de la maleta en funció de l'amplada,

$$V(x) = x\cdot y\cdot z = x\cdot(80-x)\cdot 30 = -30x^2 + 2400x, \quad \text{on } x \in (0, 80).$$

Per calcular el màxim global d'aquesta funció, haurem de cercar-ne els extrems relatius,

$$V'(x) = 0 \implies -60x + 2400 = 0 \implies x = 2400/60 = 40,$$

i, ara sí, el màxim serà el valor més alt entre els candidats a ser extrems relatius i els extrems de l'interval:

$$V(0) = 0, \quad V(40) = 48000, \qquad V(80) = 0,$$

on és clar que els extrems de l'interval corresponen a casos degenerats (maletes sense amplada o sense alçària), i el màxim global de la funció és de 48.000 cm^3 quan $x = y = 40$ cm.

P6. — Tirem dos daus no trucats. Considera els esdeveniments següents:

A: En el primer dau ha sortit un 1.
B: En el segon dau ha sortit un 1.
C: La suma dels valors dels dos daus és 3.

a) Calcula $P(A)$. **(3 pt)**

Solució. Per la llei de Laplace, la probabilitat demanada és

$$P(A) = \frac{\#\text{ casos favorables}}{\#\text{ casos totals}} = \frac{1}{6}.$$

b) Calcula $P(A \cup B)$. **(3 pt)**

Solució. $A \cup B$ és l'esdeveniment "en algun dau ha sortit un 1". El podem trobar mitjançant la llei de Laplace o tenint en compte que els dos esdeveniments són independents:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(A) = 1/6 \\ P(B) = 1/6 \end{array} \right. \implies P(A \cap B) = \frac{1}{36} \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

c) Són C i $A \cup B$ esdeveniments independents? **(4 pt)**

Solució. De nou, amb la llei de Laplace,

$$P(C|A \cup B) = \frac{\#\text{ casos favorables}}{\#\text{ casos totals}} = \frac{\#\text{ casos } C \cap (A \cup B)}{\#\text{ casos } (A \cup B)} = \frac{2}{11}.$$

Per tant, no són independents, ja que $P(C) = 2/36$, mentre que $P(C|A \cup B) = 2/11$.

P7. — En una població:

- les alçades dels homes segueixen una distribució normal de mitjana 1.76 metres i desviació típica 0.12 metres; i
- les alçades de les dones segueixen una distribució normal de mitjana 1.62 metres i desviació típica 0.11 metres.

Es demana:

a) Escollim un **home** a l'atzar. Quina és la probabilitat que la seva alçada sigui major o igual que 1.76 metres? **(3 pt)**

Solució. Si X és la variable aleatòria "alçada d'una home", aleshores $X \sim \mathcal{N}(1.76, 0.12)$ i, per tant,

$$P(X \geq 1.76) = 0.5,$$

per ser 1.76 la mitjana de la població normal.

b) Escollim una **dona** a l'atzar. Quina és la probabilitat que la seva alçada sigui major o igual que 1.76 metres? **(4 pt)**

Solució. Si Y és la variable aleatòria "alçada d'una dona", aleshores $Y \sim \mathcal{N}(1.62, 0.11)$ i, per tant,

$$P(Y \geq 1.76) = P\left(\frac{Y - 1.62}{0.11} \geq \frac{1.76 - 1.62}{0.11}\right) = P(Z \geq 1.273) = 1 - P(Z \leq 1.273) = 1 - 0.898 = 0.102,$$

on $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

c) Què és més probable, que un home tengui una alçada **inferior** a 1.76 metres, o que una dona tengui una alçada **inferior** a 1.76 metres? **(3 pt)**

Solució. Seguint amb la notació dels apartats anteriors,

$$P(X < 1.76) = 1 - P(X \geq 1.76) = 1 - 0.500 = 0.500,$$
$$P(Y < 1.76) = 1 - P(Y \geq 1.76) = 1 - 0.102 = 0.898,$$

i, per tant, és més probable que una dona tengui una alçada inferior a 1.76 metres, que no que un home tengui una alçada inferior a 1.76 metres.

P8. — Tiram una moneda a l'aire 100 vegades, i ha sortit 46 vegades cara i 54 vegades creu. Un estudiant creu que la moneda no està trucada i proposa aproximar el nombre de cares que surten en 100 tirades com una variable aleatòria amb distribució normal $\mathcal{N}\,(\mu = 50,\ \sigma = 5)$.

a) Segons la distribució proposada, quina hauria estat la probabilitat d'obtenir 60 cares o més? **(3 pt)**

Solució. Amb $X \sim \mathcal{N}(50, 5)$, i considerant una variable $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$,

$$P(X \geq 60) = P\left(\frac{X - 50}{5} \geq \frac{60 - 50}{5}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - \phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228,$$

i, per tant, la probabilitat demanada és del 0.0228 o del 2.28%.

b) Calcula l'interval de confiança que contingui el 90% dels valors més probables que apareixen a la distribució proposada. És raonable la hipòtesi que la moneda no està trucada? **(4 pt)**

Solució. Per a un nivell de confiança del 90%, el nivell de significació és $\alpha = 0.10$, i l'interval demanat el podem calcular com a:

$$\left(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \sigma,\ \mu + z_{\alpha/2} \cdot \sigma\right) = (50 - 1.645 \cdot 5,\ 50 + 1.645 \cdot 5) = (41.775,\ 58.225)\,.$$

El valor 46 entra dins de l'interval de confiança i, per tant, sembla raonable la hipòtesi que la moneda no està trucada (amb el nivell de confiança demanat).

Ara, tirarem una altra moneda a l'aire 100 vegades, i el nombre de cares que obtendrem també seguirà una distribució normal $\mathcal{N}\,(\mu = 50,\ \sigma = 5)$. Sospitarem que la moneda està trucada si el nombre de cares **no** està contingut a l'interval calculat a l'apartat anterior.

c) Quina és la probabilitat que sospitem que la moneda està trucada? **(3 pt)**

Solució. L'apartat anterior contenia el 90% de valors més probables, així que la probabilitat de que aquesta nova observació no estigui continguda en el mateix és del 10%.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0,1)$.