SÈRIE 1

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

Criteris generals per a la correcció:

1. En tots els casos la resolució que fa l'estudiant s'ha de poder seguir i comprendre els passos que fa. **Aquelles respostes, parcials o totals, que no estiguin desenvolupades o no es pugui seguir el com s'ha arribat a donar la resolució seran puntuades amb 0 punts.**
2. La resolució proposada és, en alguns casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, **sempre que l'enunciat ho permeti, en el cas que l'estudiant respongui amb una resolució alternativa totalment correcta se li assignarà el total de puntuació de l'apartat.** Si la resposta és parcial la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.
3. En alguns casos, la solució final pot admetre **expressions equivalents**. En aquests casos la puntuació serà la totalitat de la puntuació de l'apartat.
4. Tots els exercicis, apartats i passos dins d'un apartat es valoraran amb múltiples de 0,25 punts.
5. **Penalització per errades de càlcul o transcripció:**

- Si l'errada que es comet no té més trascendència, aleshores NO es descomptarà res de la puntuació parcial de l'apartat.
- En el cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, es valorarà i puntuarà el desenvolupament i coherència de la resolució resultant, i només s'aplicarà una penalització final de 0,25 punts.
- En cas que l'errada condueixi a no tenir sentit alguna de les qüestions que es demanen, aleshores la puntuació màxima de l'apartat serà de 0,75 punts.
- Si la resolució d'un apartat conté dues errades la puntuació de l'apartat serà l'acumulada fins al moment previ al cometre la segona errada.

1.

a)

Estudieu per a quins valors de λ el sistema és incompatible.

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 2\lambda & -1 & 5\lambda & 30 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2\lambda & -1 & 5\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 5\lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5\lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda(5\lambda+5) = 5\lambda(\lambda+1)$$

<u>CAS I: Si $\lambda \neq 0$ i $\lambda \neq -1$</u>

$Rang\ M = Rang\ \overline{M} = núm.incòg = 3$

En virtut del teorema de Rouché-Frobënius, en aquest cas el sistema és *compatible determinat*.

<u>CAS II: Si $\lambda = 0$</u>

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 30 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \ , \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad Rang\ M = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 10 \\ -1 & 0 & 30 \end{vmatrix} = 70 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad Rang\ \overline{M} = 3$$

$Rang\ M \neq Rang\ \overline{M}$

En virtut del teorema de Rouché-Frobënius, el sistema és *incompatible*.

CAS III: $\lambda = -1$

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ -2 & -1 & -5 & 30 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \ , \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad Rang\ M = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 10 \\ -1 & -5 & 30 \end{vmatrix} = 120 \neq 0 \ \Longrightarrow \quad Rang\ \overline{M} = 3$$

$Rang\ M = 2 \qquad Rang\ \overline{M} = 3$

$Rang\ M \neq Rang\ \overline{M}$

En virtut del teorema de Rouché-Frobënius, el sistema és $incompatible$.

El sistema és incompatible per a dos valors del paràmetre λ: $\lambda = 0$ i $\lambda = -1$.

b) Resoleu el sistema per a $\lambda = 1$.

$$\begin{cases} x + y - z &= 0 \\ y + z &= 10 \\ 2x - y + 5z &= 30 \end{cases}$$

En aquest cas el sistema és compatible determinat, té una única solució i el sistema es pot resoldre per qualsevol mètode conegut, per exemple, pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 5 & 30 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -3 & 7 & 30 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 60 \end{array}\right)$$

De la tercera equació, tenim $10z = 60$, per tant, $z = 6$.
De la segona equació, tenim y+$z = 10$, per tant, $y = 4$.
De la primera equació, tenim $x + y - z = 0$, per tant, $x = 2$.

Solució: $(x = 2 \ , \quad y = 4 \ , \quad z = 6)$.

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts per al determinant de la matriu de coeficients i per als valors crítics.
0,25 punts per a la discussió del cas $\lambda = -1$.
0,25 punts per a la discussió del cas $\lambda = 0$.
0,25 punts per a la resposta a la pregunta.

b)
0,25 punts per al sistema particular (i la indicació de SCD, si és el cas, que no cal).
0,25 punts per al valor de la x.
0,25 punts per al valor de la y.
0,25 punts per al valor de la z.

2.

a)
Si el pla ha de ser perpendicular als dos plans π_1 i π_2, aleshores el seu vector normal, $n = (A, B, C)$ haurà de ser perpendicular als respectius vectors normals $n_1 = (5, -1, -7)$ i $n_2 = (2, 3, 1)$.

Així doncs $n = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & 5 & 2 \\ j & -1 & 3 \\ k & -7 & 1 \end{vmatrix} = (20, -19,\ 17)$.

El pla tindrà la forma $20x - 19y + 17z = D$, però si ha de passar per l'origen de coordenades (0,0,0), aleshores D = 0 i el pla buscat serà $\boxed{20x - 19y + 17z = 0}$.

b) L'angle entre els dos plans serà l'angle que formin els respectius vectors normals. Així doncs:

$$\boxed{\alpha} = \alpha(\pi_1, \pi_2) = \alpha(n_1, n_2) = \alpha\big((5, -1, -7), (2,3,1)\big) = arccos\frac{n_1 \cdot n_2}{\|n_1\| \cdot \|n_2\|} =$$
$$= arccos\frac{10 - 3 - 7}{\|n_1\| \cdot \|n_2\|} = arc\cos 0 = \boxed{90° = \frac{\pi}{2} rad}.$$

Els dos plans són perpendiculars.

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts pel plantejament de perpendicularitat entre vectors normals.
0,25 punts pel producte vectorial.
0,25 punts per la forma inicial del pla.
0,25 punts per l'equació final del pla.

b)
0,25 punts per l'angle a partir de l'angle entre els vectors normals.
0,25 punts per la formulació de l'angle.
0,25 punts pel producte escalar.
0,25 punts per la perpendicularitat (o l'angle de 90º, sense indicar perpendicularitat).

3.

a)

La resposta depèn del signe de k.

- Si $k < 0$, aleshores $x^2 - k > 0$ per a qualsevol valor de x i, per tant, $\boxed{\text{Dom}(f) = \mathbb{R}}$ i la funció $f(x) = \frac{1}{x^2-k}$ és contínua perquè no s'anul·la el denominador i $\boxed{\text{no té cap asímptota vertical}}$.
  Com que $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2-k} = 0$, la funció $\boxed{\text{té una asímptota horitzontal en l'eix de les } x,\ y=0}$.
- Si $k > 0$ aleshores $x^2 - k$ s'anul·la per als valors $\pm\sqrt{k}$ i, per tant, $\boxed{\text{Dom}(f) = \mathbb{R}\text{-}\{\pm\sqrt{k}\}}$ i la funció $f(x) = \frac{1}{x^2-k}$ $\boxed{\text{tindrà dues asímptotes verticals, en } x = +\sqrt{k} \text{ i en } x = -\sqrt{k}}$.
  Com que $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2-k} = 0$, la funció $\boxed{\text{té una asímptota horitzontal en l'eix de les } x,\ y=0}$.

b) $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-k)^2} = 0$ si $x = 0$, amb independència del valor de k.

$$f''(x) = \frac{(-2)(x^2-k)^2 - (-2x)2(x^2-k)2x}{(x^2-k)^4} = \frac{(-2)(x^2-k) + 8x^2}{(x^2-k)^3} = \frac{6x^2+2k}{(x^2-k)^3}$$

Com que $f''(0) = \frac{-2}{k^2} < 0$,

$\boxed{f\text{, per tant, té un màxim relatiu en el punt } \left(0, \frac{-1}{k}\right) \text{ i no té mínims relatius.}}$

Observació: En lloc de fer servir el signe de la derivada segona també es pot veure el creixement o decreixement de la funció f a l'entorn de $x = 0$.

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts pel domini i no AV quan $k < 0$
0,25 punts pel domini i AV quan $k > 0$
0,25 punts per la AH quan $k < 0$
0,25 punts per la AH quan $k > 0$

b)
0,25 punts per la derivada primera.
0,25 punts pel punt singular.
0,25 punts per la derivada segona o el raonament equivalent sobre el creixement o decreixement.
0,25 punts per la classificació del punt i la resposta final.

4.

a)

Perquè tingui solució única caldrà que el sistema sigui compatible i determinat; és a dir, que rangM=rangM'=3

amb $(M|M') = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{array}\right)$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2a$$

Per tal que rangM=3 cal que Det M $\neq 0 \quad \Leftrightarrow a \neq 0$

Això vol dir que el sistema és compatible i determinat sempre que $a \neq 0$

b) Per Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2a} = \frac{a^3 - 2a}{-2a} = \frac{2 - a^2}{2}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix}}{-2a} = \frac{1 - a^2 - 1}{-2a} = \frac{a}{2} \quad \text{i}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}}{-2a} = \frac{1 - 1 - a^2}{-2a} = \frac{a}{2}$$

Per tant, la solució del sistema (en funció del paràmetre a) és: $\boxed{\left(\frac{2-a^2}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)}$

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts per la condició de Rouché-Frobënius.
0,25 punts pel determinant de l'associada.
0,25 punts pel valor singular.
0,25 punts pel raonament final.

b)
0,25 punts per l'aplicació de la regla de Cramer o mètode equivalent.
0,25 punts pel càlcul de la x.
0,25 punts pel càlcul de la y.
0,25 punts pel càlcul de la z.

5.

a)

Per a comprovar que una matriu $M = \begin{pmatrix} x & -1 \\ y^2+1 & x \end{pmatrix}$ és invertible és suficient comprovar que el seu determinant és sempre diferent de 0.

Efectivament, $|M| = x^2 - (-1)(y^2+1) = x^2 + y^2 + 1$, que és sempre diferent de 0, ja que $x^2 + y^2 \geq 0$ en ser suma de dos quadrats, independentment del valor que tinguin les variables *x* i *y*.

a) Per a $x = 1$ i $y = -1$, tenim $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Tindrem $M^{-1} = \frac{1}{|M|}(AdjM)^t = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}$.

Pautes de correcció:

a)
0,5 punts pel plantejament a partir del determinant no nul (o del rang 2).
0,5 punts per provar que el determinant és sempre diferent de 0.

b)
0,25 punts per l'expressió de *M*.
0,25 punts per la formulació del càlcul de la matriu inversa.
0,5 punts pel càlcul final.

.

6.

a)

Pel teorema de Pitàgores sabem que $a^2 = x^2 + h^2$. Com que el volum del con val 120 cm^3, per la fórmula del volum tenim

$$120 = \frac{\pi \cdot x^2 \cdot h}{3}$$

i aïllant, obtenim $x^2 = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h}$. Substituint x^2 a l'expressió inicial, s'obté la fórmula buscada.

b) La longitud de l'aresta és una funció positiva i tenim la longitud al quadrat expressada com a funció de h, per tant és suficient amb trobar els mínims de la funció

$$f(h) = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2$$

quan $h \in (0, \infty)$. Tenim

$$f'(h) = 2h - \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h^2}$$

per tant, en igualar $F'(h) = 0$, s'obté $2h = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h^2}$, $h^3 = \frac{180}{\pi}$ i $\boxed{h = \sqrt[3]{\frac{180}{\pi}} \simeq 3{,}86 \text{ cm}}$.

Es comprova que és un mínim, ja que $f'(x) < 0$ quan $x \in \left(0, \sqrt[3]{\frac{180}{\pi}}\right)$ i $f'(x) > 0$ quan $x \in \left(\sqrt[3]{\frac{180}{\pi}}, \infty\right)$.

Alternativament, es pot treballar amb la funció

$$a(h) = \sqrt{\frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2}$$

i s'obté com a derivada

$$a'(h) = \frac{h - \frac{180}{\pi} \cdot \frac{1}{h^2}}{\sqrt{\frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2}}$$

El desenvolupament del problema és el mateix a partir d'aquí.

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts per l’aplicació del teorema de Pitàgores.
0,25 punts per la igualtat derivada del volum.
0,25 punts per aïllar la x.
0,25 punts per la substitució final.

b)
0,25 punts per l’argumentació de la funció a minimitzar.
0,25 punts per la derivada de la funció.
0,25 punts pel punt singular (en forma radical o amb l’expressió decimal).
0,25 punts per la classificació del punt singular (com a la proposta de resolució o a partir del signe de la derivada segona).