

EXERCICIS

LÍMITS:

1.- Calcula tots els límits següents de forma analítica.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^4 - 7x^3 - 10)$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + x^3 - 10x^4)$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^2 + 6x - 1)$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-9x^4 - 3x)$

2.- Calcula tots els límits següents de forma directa però raonant la resposta.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (-x^3 - x^2 - x)$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^5 + 6x^2 - 22)$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - 3x^3 + 5x^5)$ d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 5x^3 + 3x^4)$

3.- Calcula tots els límits següents de forma analítica.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 4}{2x - 6}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4 + 2x}{x^4 - 6x^3}$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x + x^2}{4x^4 - 3x^3}$ d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x^2 - 1}{2x^3 - x + 8}$

4.- Calcula tots els límits següents de forma directa però raonant la resposta.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 + x - 5}{x + 9}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 2}{x^4 - 6x}$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + 4x - 3x^4}{x^3 - x^2}$ d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^4 - x^2}{2x^4 + 8}$

5.- Calcula tots els límits següents de forma analítica.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^3 - 1}$ b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^3 - x + 6}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6x}{x^3 - x^2 + 2x}$ d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2 + x^4}{x + 1}$

6.- Calcula tots els límits següents de forma analítica.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{1 - x}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sqrt{x^2 + 4} - 1}{5x + 1}$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^4 + x^3 + 3x}}{x^3 + x}$ d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^4 + 1}}{x}$

7.- Calcula tots els límits següents de forma directa però raonant la resposta.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x - 2}}{\sqrt{x^2 - 4}}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 4} + 3x}{1 - 5x}$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - x^3}{\sqrt{x^3 + x}}$ d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{3x^3 - x}}$

8.- Calcula tots els límits següents de forma analítica.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + x} - x)$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x + 1})$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - \sqrt{1 + 4x^2})$ d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + x})$

9.- Prova de calcular tots els límits següents de forma directa però raonant la resposta.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 1} - x^2)$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (4x^2 + 3 - \sqrt{x})$

10.- Calcula tots els límits següents de forma analítica.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 3x + 2} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - x + 3} - x} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + x} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} \end{array}$$

11.- Calcula tots els límits següents de forma analítica.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + x + x^2}{x^2} \right)^{2x-1} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{x+1} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2 + x^3}{x^3} \right)^{x^2} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-x}{3-x} \right)^{x^2} \end{array}$$

CONTINUÏTAT:

1.- Estudia la continuïtat de les funcions següents. Indica quin tipus de discontinuïtat és i els intervals de continuïtat.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} & \text{b) } g(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+3x-2}{2x^2-5x+2} & x \neq \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{3} & x = \frac{1}{2} \end{cases} & \text{c) } f(x) = \sqrt{4x-8} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{d) } h(x) = \begin{cases} 3^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \in \mathbb{R} - \{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} & \text{e) } f(x) = \frac{x^2-9}{x+3} \end{array}$$

$$\text{f) } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sin x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll} \text{g) } f(x) = \begin{cases} |3-x| & \text{si } x \leq 5 \\ \ln e^x & \text{si } x > 5 \end{cases} & \text{h) } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ -x+4 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases} & \text{i) } f(x) = \ln(x^2-1) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{j) } f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{x} & \text{k) } f(x) = \sqrt{\frac{4-x^2}{x^2+2x}} & \text{l) } f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq -1 \\ 2x+1 & \text{si } -1 < x < 3 \\ x^2-2x+4 & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ \sqrt{2x-6} & \text{si } x \geq 5 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{m) } f(x) = \begin{cases} \log(x+4) & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} & \text{n) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2-2x} & \text{si } x < 1 \\ 2x-3 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x^2-9} & \text{si } x > 2 \end{cases} \end{array}$$

$$\text{o) } f(x) = \begin{cases} \log(5+x) & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{x}{2}-1 & \text{si } -2 < x \leq 4 \\ \sqrt{5-x} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

2.- Calcula el valor de **k** perquè la funció $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ k & \text{si } x = 2 \end{cases}$ sigui contínua.

- 3.- La funció $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + a}{x - 1}$ no és contínua en $x = 1$. Troba el valor de **a** perquè la funció sigui contínua en el valor de $f(1)$.
- 4.- Per què la funció $f(x) = \frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 + 1}$ és contínua en $(-\infty, +\infty)$?
- 5.- Per què la funció $f(x) = \frac{3}{x}$ és discontinua en $x = 0$?
- 6.- Doneu un exemple de funció $y = f(x)$ que verifiqui $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = +\infty$.
- 7.- Calculeu els valors de **a** i **b** per tal que la funció $f(x) = a + b \cdot e^{-x}$ verifiqui $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$ i $f(0) = 4$.
- 8.- Calculeu els valors de **k** que fan que $f(x) = \frac{2x^2}{(kx + 1)^2}$ tingui límit 2 quan $x \rightarrow \infty$.
- 9.- Busqueu els punts de discontinuïtat de la funció $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 2x + 1}$.
- 10.- Doneu un exemple de funció no constant i contínua per a tot x que verifiqui $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$.
- 11.- Estudieu la continuïtat de la funció $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 + 5x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 4x + 3 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$.
- 12.- Donada la funció $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ estudieu la continuïtat en $x = 1$.
- 13.- Estudieu la continuïtat de la funció $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{e^x + 1} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.
- 14.- Quan ha de valer **a** perquè $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x - 5} & \text{si } x \neq 5 \\ a & \text{si } x = 5 \end{cases}$ sigui sempre contínua?
- 15.- Donada la funció $f(x) = \frac{x \cdot (\ln x)^2}{(x - 1)^2}$, es pot assignar algun valor a $f(x)$ en els punts de discontinuïtat perquè sigui contínua en l'interval $[0, \infty)$?
- 16.- Quin hauria de ser el valor de $f(-1)$ perquè la funció $f(x) = 3 + (x + 1) \cdot \frac{1}{x + 1}$ sigui sempre contínua?
- 17.- Calcula el valor de **a** i **b** perquè la funció $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a & \text{si } x \leq -2 \\ 1 + bx & \text{si } -2 < x < 0 \\ x + a & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$ sigui contínua.
- 18.- Trobeu **a** i **b** perquè la funció $f(x) = \begin{cases} a \cdot (x - 1)^2 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{b + 2x} & \text{si } 0 < x < 4 \\ x + a & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$ sigui contínua.

T. BOLZANO:

1.- Determina almenys una solució de l'equació $3x^3 + x^2 + 1$ amb precisió de dècima.

2.- Per què en aquesta equació $\frac{x^2 - 1}{x - 2} = 0$ no se li pot aplicar el teorema de Bolzano en l'interval $[0, 4]$?

3.- Demuestra que aquesta equació $x^3 + x - 6 = 0$ té almenys una solució en l'interval $[-2, 2]$.

4.- Digues un interval d'amplitud 1 dintre del qual creguis que l'equació $x^4 - 5x - 1$ tingui almenys una solució.

5.- En quin dels intervals de sota no se li pot aplicar el teorema de Bolzano a l'equació $f(x) = \frac{x - 2}{4 - x^2} = 0$

a) $]0, 4[$

b) $]5, 10[$

c) $] -6, 0[$

c) $] -1, 1[$

SOLUCIONS

LÍMITS:

- 1.- a) ∞ , b) ∞ , c) ∞ , d) $-\infty$.
- 2.- a) ∞ , b) $-\infty$, c) ∞ , d) ∞ .
- 3.- a) ∞ , b) 4, c) 0, d) $-\infty$.
- 4.- a) $-\infty$, b) 0, c) ∞ , d) $-1/2$.
- 5.- a) $1/3$, b) $-6/11$, c) -3 , d) -2 .
- 6.- a) -1 , b) $4/5$, c) 0, d) ∞ .
- 7.- a) 0, b) $-6/5$, c) $-\infty$, d) 0.
- 8.- a) ∞ , b) ∞ , c) 0, d) $-0,5$.
- 9.- a) $-\infty$, b) ∞ .
- 10.- a) $-0,5$, b) -6 , c) -1 , d) -2 .
- 11.- a) e^2 , b) e, c) 1, d) ∞ .

CONTINUÏTAT:

- 1) a) DI de salt en $x = -1$ i DE en $x = 1$, b) DI de salt $x = 2$ i DE en $x = 1/2$, c) DI de domini en $x = 2$, d) DI de salt en $x = 0$, e) DE en $x = -3$, f) DI de salt en $x = \pi/2$, g) DI de salt en $x = 5$, h) DI de salt en $x = 1$ i DI de domini en $x = -1$, i) DI de domini en $x = -1$ i $x = 1$, j) DI de domini en $x = 4$ i DI de salt en $x = 0$, k) DI de domini en $x = 4$ i DI de salt en $x = 0$, l) en $x = 1$ no $\exists$ discontinuïtat, en $x = 3$ $\exists$ DE puntual, en $x = 5$ $\exists$ DI de salt finit, m) en $x = -4$ $\exists$ DI de domini, en $x = 0$ $\exists$ DI de salt ∞ , n) en $x = 0$ $\exists$ DE puntual, en $x = 1$ no $\exists$ cap DE de salt finit, en $x = 3$ $\exists$ DI de domini, en $x = 3$ $\exists$ DI de domini, o) en $x = -5$ $\exists$ DI de domini, en $x = -2$ $\exists$ DI de salt finit, en $x = 4$ $\exists$ DI de salt finit, en $x = 4$ no $\exists$ cap discontinuïtat.
2.- $k = 1$.
- 3.- $a = -3$
- 4.- Perquè sempre $x^2 + 1 \neq 0$.
- 5.- Perquè $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.
- 6.- $f(x) = \frac{1}{(x-5)^2}$
- 7.- $a = 2$ i $b = 2$.
- 8.- $k = \pm 1$.
- 9.- $x = 1$.
- 10.- per ex. $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^2 + 1}$.
- 11.- DI de salt finit en $x = 1$.
- 12.- DE puntual ja que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{2}$
- 13.- DI de salt finit en $x = 0$.
- 14.- $a = 0$
- 15.- si; quan $f(1) = 1$ i $f(0) = 0$
- 16.- $f(-1) = 3$
- 17.- $a = 1$ i $b = 0$.
- 18.- $a = -1$ i $b = 1$.

T. BOLZANO:

- 1.- per exemple, $] -1, 0[$.
- 2.- pq té una discontinuïtat dins de l'interval; en $x = 2$.
- 3.- pq $f(-2) < 0$ i $f(2) > 0$.
- 4.- per exemple: $]1, 2[$.
- 5.- a i c.