**Sèrie 2**

---

**Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.**

**Cada qüestió val 2 punts.**

**Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.**

---

# Criteris generals per a la correcció:

- En tots els casos la resolució que fa l'estudiant s'ha de poder seguir i comprendre els passos que fa. **Aquelles respostes, parcials o totals, que no estiguin desenvolupades o no es pugui seguir el com s'ha arribat a donar la resolució seran puntuades amb 0 punts.**
- La resolució proposada és, en alguns casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, **sempre que l'enunciat ho permeti, en el cas que l'estudiant respongui amb una resolució alternativa totalment correcta se li assignarà el total de puntuació de l'apartat.** Si la resposta és parcial la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.
- En alguns casos, la solució final pot admetre **expressions equivalents**. En aquests casos la puntuació serà la totalitat de la puntuació de l'apartat.
- **Penalització per errades de càlcul:**
    - Si l'errada de càlcul que es comet no té més trascendència, aleshores es descomptarà 0,125 punts de la puntuació parcial que correspongui.
    - En el cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, es valorarà i puntuarà el desenvolupament i coherència de la resolució resultant, i només s'aplicarà la penalització fruit de l'errada (0,125 punts).
    - En cas que l'errada condueixi a no tenir sentit alguna de les qüestions que es demanen, aleshores la puntuació màxima serà la parcial corresponent i es descomptaran els 0,125 punts.
    - Si la resolució d'un apartat conté dues errades es descomptaran 0,25 punts del que s'estigui resolent i no es valorarà la resta de l'apartat. En cap cas un apartat tindrà una puntuació negativa.

**1.** Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\left.\begin{array}{rcl} -3x+2y+3z &=& 0 \\ (a-2)y-3z &=& 0 \\ -x-y+(-a-3)z &=& 0 \end{array}\right\}.$$

***a)*** Calculeu per a quins valors del paràmetre $a$ el sistema té més d'una solució.

[1 punt]

***b)*** Resoleu el sistema per al cas $a=-3$.

[1 punt]

# Resolució:

***a)*** En tractar-se d'un sistema homogeni, sempre compatible, el sistema tindrà més d'una solució quan el rang de la matriu de coeficients sigui inferior al nombre d'incògnites, 3 en el nostre cas.

La matriu dels coeficients és $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & a-2 & -3 \\ -1 & -1 & -a-3 \end{pmatrix}$.

Per tal que $rang(A)<3$ s'anul·la el determinant de la matriu *A*.

Per tant $|A|=\begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & a-2 & -3 \\ -1 & -1 & -a-3 \end{vmatrix}=3(a-2)(a+3)+6+3(a-2)+9=$
$3a^2+6a-9=3(a^2+2a-3)$.

Igualant a 0, obtenim $a=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\left|\begin{array}{l}\boxed{a=1}\\ \boxed{a=-3}\end{array}\right.$ .

El problema també es pot resoldre triangulant per Gauss la matriu *A*.

***b)*** Cas $a=-3$.

En aquest cas el sistema a resoldre és

$$\left.\begin{array}{rcl} -3x+2y+3z &=& 0 \\ -5y-3z &=& 0 \\ -x-y &=& 0 \end{array}\right\}$$

i sabem que *rang(A)*=2 i per tant que el sistema és compatible indeterminat amb (3-2=1) 1 grau de llibertat, és a dir amb una incògnita com a paràmetre.

Com que la primera equació és combinació lineal de la segona i la tercera, resoldrem el sistema directament a partir de les dues darreres equacions i obtenim $x = -y$ i $z = \frac{-5y}{3}$.

Per tant els punts solució del sistema són els de la forma $\boxed{\left(-y,\ y, \frac{-5y}{3}\right)}$.

## Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts per la matriu de coeficients.

0,25 punts pel raonament i plantejament a partir del rang i/o determinant.

0,25 punts pel determinant de la matriu de coeficients.

0,25 punts per la resolució de l'equació.

Apartat b)

0,5 punts per la compatibilitat del sistema.

0,5 punts per la resolució.

**2.** Sigui $r$ la recta de l'espai que té per equació $r$: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = z$ i sigui $P$ el punt de coordenades (6, 0, -1).

***a)*** Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa pel punt $P$ i talla perpendicularment la recta $r$.

[1 punt]

***b)*** Trobeu l'equació paramètrica del pla que passa pel punt $P$ i conté la recta $r$.

[1 punt]

# Resolució:

***a)*** La recta $r$ passa pel punt $Q = (1, -3, 0)$ i té vector director $v = (2, -1, 1)$.

Si el pla ha de tallar perpendicularment la recta $r$ això vol dir que el vector $v$ serà normal al pla i formarà els coeficients $(A, B, C)$ de l'equació cartesiana.

Per tant l'equació del pla serà $2x - y + z = D$ i si ha de passar pel punt $P = (6, 0, -1)$ tenim $2 \cdot 6 - 0 + (-1) = D$ i per tant $D = 11$.

Així doncs el pla que es demana és el d'equació cartesiana $\boxed{2x - y + z = 11}$.

***b)*** El pla que ens demanen té com a vectors directors el vector director de la recta $v = (2, -1, 1)$ i $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (1, -3, 0) - (6, 0, -1) = (-5, -3, 1)$. Per tant, tenint en compte que el pla passa per $P$, l'equació paramètrica del pla serà

$$\boxed{\begin{aligned}(x, y, z) &= (6, 0, -1) + \lambda(2, -1, 1) + \mu(-5, -3, 1)\\ &= (6 + 2\lambda - 5\mu, -\lambda - 3\mu, -1 + \lambda + \mu)\end{aligned}}$$

# Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts per identificar el vector director de $r$.

0,25 punts per veure el vector com a normal al pla.

0,25 punts per la part literal de l'equació general.

0,25 punts pel càlcul del terme independent.

Apartat b)

0,25 punts pel vector *v* com a un dels vectors directors.

0,25 punts pel vector PQ com a un dels vectors directors.

0,5 punts per l’equació paramètrica.

**3.** Responeu a les qüestions següents:

***a)*** Determineu l'equació de la recta tangent a la corba $y = x^3$ en el punt d'abscissa $x = 2$.

[1 punt]

***b)*** Calculeu l'àrea de la regió plana finita limitada per la corba $y = x^3$ i la recta $y = 3x - 2$.

[1 punt]

# Resolució:

***a)*** Tenim $y = x^3$ i per tant la seva derivada $y' = 3x^2$. I quan avaluem en $x = 2$ tenim $y(2) = 8$ i $y'(2) = 12$. Per tant la recta tangent que busquem és la recta que passa pel punt $(2, 8)$ i que té pendent 12, és a dir

$$\boxed{y =}\ 12(x-2) + 8\ \boxed{= 12x - 16}.$$

***b)*** Primer hem de trobar els punts d'intersecció entre les dues funcions. Igualant obtenim:

$x^3 = 3x - 2$, és a dir $x^3 - 3x + 2 = 0$.

Si apliquem la regla de Ruffini obtenim $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2 \cdot (x+2) = 0$ i per tant que les abscisses dels punts de tall són $x = -2$ i $x = 1$.

Per la continuïtat de les funcions l'ordre entre elles és el mateix al llarg de tot l'interval (-2, 1). Com que en $x = 0$ el valor de la corba és 0 i el valor de la recta és -2, la funció cúbica està més amunt que la recta i per tant el valor de l'àrea limitada serà

$$\int_{-2}^{1}\left(x^3 - (3x-2)\right)dx = \int_{-2}^{1}(x^3 - 3x + 2)dx = \left(\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{-2}^{1} = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2\right) - (4 - 6 - 4) = \frac{3}{4} + 6 = \boxed{\frac{27}{4}\ u^2}$$

*Observació*: També es pot haver plantejat amb el valor absolut de la integral directament, sense fer el balanç de quina funció pren valors més grans.

## Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts per la funció derivada.

0,25 punts per la formulació.

0,25 punts per la substitució.

0,25 punts per l’equació final.

Apartat b)

0,25 punts per trobar els punts de tall.

0,25 punts pel plantejament de la integral.

0,25 punts per la primitiva.

0,25 punts per l’aplicació de la regla de Barrow.

**4.** Considereu a $R^3$ la recta que té per equació $r$: $(x, y, z) = (-4 + 2\lambda, -2, 1 - \lambda)$ i els plans $\pi_1$ i $\pi_2$ d'equacions $\pi_1: x + 2y + 2z = -1$ i $\pi_2: x - 2y + 2z = -3$, respectivament.

***a)*** Determineu la posició relativa de $\pi_1$ i $\pi_2$.

[1 punt]

***b)*** Comproveu que tots els punts de la recta $r$ estan situats a la mateixa distància dels plans $\pi_1$ i $\pi_2$.

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades $(x_0, y_0, z_0)$ al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

# Resolució:

a) Els vectors normals dels respectius plans són $n_1 = (1,2,2)$ i $n_2 = (1,-2,2)$ que no són proporcionals i per tant els plans no són paral·lels. Per tant la posició relativa és que $\boxed{\text{els plans } \pi_1 \text{ i } \pi_2 \text{ es tallen definint una recta intersecció}}$.

b) Un punt genèric $R$ de $r$ és de la forma $R = (-4 + 2\lambda, -2, 1 - \lambda)$. Es tracta de demostrar que $d(R, \pi_1) = d(R, \pi_2)$, amb independència del paràmetre $\lambda$. Quan plantegem ambudes distàncies ens hem de preguntar si es compleix

$$\frac{|-4 + 2\lambda + 2(-2) + 2(1 - \lambda) + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|-4 + 2\lambda - 2(-2) + 2(1 - \lambda) + 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}}.$$

I, efectivament, quan fem els càlculs obtenim la igualtat

$$\frac{|-5|}{3} = \frac{|5|}{3}$$

que és certa independentment del valor del paràmetre $\lambda$.

És a dir, $\boxed{\text{tota la recta } r \text{ equidista dels dos plans } \pi_1 \text{ i } \pi_2}$.

*Observació*: Com que l'enunciat només demana comprovar l'equidistància NO cal que l'estudiant expliciti que la recta és a 5/3 unitats dels plans.

# Pautes de correcció:

Apartat a)

0,5 punts per la identificació dels dos vectors normals.

0,5 punts per la posició relativa.

Apartat b)

0,5 punts pel plantejament de la igualtat

0,5 punts per la resolució.

**5.** Responeu a les qüestions següents:

***a)*** Calculeu la matriu de la forma $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ que satisfà $A^2 - A = I$, en que $I$ és la matriu identitat, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[1 punt]

***b)*** Calculeu $A^{-1}$ i comproveu que el resultat es correspon amb el que obteniu de deduir la matriu $A^{-1}$ a partir de la igualtat $A^2 - A = I$.

[1 punt]

# Resolució:

***a)*** Desenvolupem la igualtat $A^2 - A = I$ utilitzant $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+a & a \\ 1 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si igualem terme a terme, obtenim directament que $a = 1$ i per tant la matriu buscada és

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

***b)*** Calculem la inversa $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$

Per altra banda si tenim la igualtat $A^2 - A = I$ podem treure factor comú la matriu $A$, sigui per la dreta o per l'esquerra, per la propietat distributiva del producte de matrius, i obtenim

$$A \cdot (A - I) = I = (A - I) \cdot A.$$

Aquesta igualtat ens demostra que $A$ és invertible i que la seva matriu inversa és la matriu $A - I$ ja que el producte d'ambdues matrius (en els dos ordres) és la matriu identitat, $I$. Per tant, $A^{-1} = A - I$.

Quan utilitzem aquesta fórmula obtenim

$$\boxed{A^{-1} = A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

tal com volíem comprovar.

# Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts pel producte matricial.

0,25 punts per la diferència matricial.

0,25 punts pel valor del paràmetre $a$.

0,25 punts per la matriu $A$.

Apartat b)

0,25 punts pel càlcul de la matriu inversa.

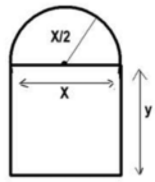
0,25 punts per la factorització.

0,25 punts per la deducció de la invertibilitat i l'expressió de la matriu inversa.

0,25 punts per la comprovació final.

**6.**

La portalada d'una catedral està formada, en la part superior, per un arc de mitja circumferència que recolza sobre dues columnes, com il·lustra la figura adjunta, en què $x$ és el diàmetre de la circumferència, és a dir, la distància entre columnes, i $y$ és l'alçària de cada columna.




***a)*** Comproveu que la funció $f(x,y) = \frac{\pi\, x^2}{8} + x\, y$ determina l'àrea d'aquesta portalada.

[1 punt]

***b)*** Si el perímetre de la portalada fa 20 m, determineu les mides $x$ i $y$ de la portalada que en maximitzen l'àrea.

[1 punt]

## Resolució:

***a)*** L'àrea de la portalada serà la suma de l'àrea de la semicircumferència més la del rectangle inferior, és a dir

$$\frac{\pi\,\left({}^{x}\!/_{2}\right)^2}{2} + xy = \boxed{\frac{\pi\, x^2}{8} + xy}$$

que és l'expressió proposada.

***b)*** Que el perímetre sigui 20 m ens indica la restricció $\pi\frac{x}{2} + 2y + x = 20$, és a dir $\frac{\pi+2}{2}x + 2y = 20$.

D'aquesta condició podem aïllar la $y$ i substituir-la a la funció de l'àrea per a maximitzar-la. Tenim $y = 10 - \frac{\pi+2}{4}x$ i per tant

$$A(x) = \frac{\pi\, x^2}{8} + x\left(10 - \frac{\pi+2}{4}x\right) =$$
$$= \frac{\pi}{8}x^2 + 10x - \frac{\pi+2}{4}x^2 = -\frac{\pi+4}{8}x^2 + 10x.$$

Per a maximitzar la funció, derivem i igualem la derivada a 0.

$$A'(x) = -\frac{\pi+4}{4}x + 10\,.$$

Quan fem $A'(x) = 0$, obtenim $\boxed{x = \frac{40}{\pi+4}\ metres}$.

Com que la derivada segona és $A''(x) = -\frac{\pi+4}{4} < 0$ independent del valor de l'abscissa del punt, en el nostre valor $x = \frac{40}{\pi+4}$ tindrem un màxim.

Quan $x = \frac{40}{\pi+4}$ el valor de $y$ és $\boxed{y = 10 - \frac{\pi+2}{4}\frac{40}{\pi+4} = 10 - 10\frac{\pi+2}{\pi+4} = \frac{20}{\pi+4}\ metres}$.

# Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts pel càlcul de l’àrea de la semicircumferència.

0,25 punts pel càlcul de l’àrea del rectangle.

0,5 punts per la justificació de la fórmula.

Apartat b)

0,25 punts per la relació entre $x$ i $y$ a través del perímetre.

0,25 punts per la funció a maximitzar.

0,25 punts per la funció derivada i obtenció de $x$.

0,25 punts per la comprovació de màxim i obtenció de la $y$.