SÈRIE 2

1. Un arbre té un volum de 30 m^3 i, per la qualitat de la seva fusta, es ven a 50 € per metre cúbic. Cada any l'arbre augmenta el volum en 5 m^3. Alhora, la qualitat de la fusta disminueix, i també el preu, que cada any és un euro per metre cúbic més barat. D'aquí a quants anys aconseguirem el màxim d'ingressos per la venda de la fusta de l'arbre? Quins seran aquests ingressos? *[2 punts]*

   Anomenem x la quantitat d'anys que passen des del moment inicial. El volum de l'arbre al cap de x anys, expressat en m^3, serà V(x) = 30 + 5x. El preu de la fusta de l'arbre al cap de x anys, expressat en €/m^3, serà P(x) = 50 – x. L'ingrés que prové de la fusta de l'arbre al cap de x anys, expressat en euros, serà I(x) = V(x)·P(x):

$$I(x) = (30 + 5x)(50 - x) = 1500 + 220x - 5x^2$$
$$I'(x) = 220 - 10x$$
$$I'(x) = 0 \text{ quan } x = 22.$$

   A més, aquesta derivada és positiva quan x < 22 i negativa després. Per tant, es tracta d'un màxim.

   L'ingrés màxim de la fusta es donarà al cap de 22 anys. Quan això passi, aquest ingrés màxim serà de $I(22) = 1500 + 220\cdot 22 - 5\cdot 22^2 = 3920$ €.

---

2. En resoldre un sistema lineal de tres equacions amb tres incògnites, *x, y*, *z*, hem trobat que les solucions compleixen les condicions següents:
   - La suma de les solucions és 6.
   - La segona és la mitjana aritmètica de les altres dues.
   - El valor de la tercera és la suma dels valors de les altres dues.

   Escriviu el sistema d'equacions que satisfà les condicions anteriors, resoleu-lo i indiqueu si és compatible determinat o indeterminat. *[2 punts]*

   El sistema és aquest: $\left.\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ y=\dfrac{x+z}{2} \\ z=x+y \end{array}\right\}$. Es pot resoldre directament, o pel mètode de Gauss, i obtenim x = 1, y = 2, z = 3. Per tant, el sistema és compatible determinat.

3. Considerem la funció $f(x)=\dfrac{2x+2}{x^2-x+2}$.
   a. Escriviu l’equació de la recta tangent a la gràfica de f en el punt de tall amb l’eix de les ordenades. *[1 punt]*
   b. Determineu els punts de la corba en els que la recta tangent és horitzontal. *[1 punt]*

a. f(0) = 1; el punt on la gràfica de f talla l’eix d’ordenades és (0,1). A més, $f'(x)=\dfrac{-2x^2-4x+6}{\left(x^2-x+2\right)^2}$. Per tant, $f'(0)=\dfrac{3}{2}$. La recta tangent en (0,1) serà, per tant, $y=\dfrac{3}{2}x+1$.

b. $f'(x)=0 \rightarrow -2x^2-4x+6=0 \rightarrow x=-3, x=1$. A més, $f(-3)=-\dfrac{2}{7}$ i $f(1)=2$. Per tant, els punts on la recta tangent a la corba és horitzontal són $\left(-3,-\dfrac{2}{7}\right)$ i $(1,2)$.

4. Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & c \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   a. Calculeu les matrius A + B i A · B. *[1 punt]*
   b. Determineu els valors de *a*, *b* i *c* que fan A + B = A · B. *[1 punt]*

a. $A+B=\begin{pmatrix} 1+b & a+c \\ 3 & 1-a \end{pmatrix}$ $A \cdot B=\begin{pmatrix} b+a & c+a \\ 2b-a & 2c-a \end{pmatrix}$.

b. A + B = A · B ens porta al sistema: $\left.\begin{array}{r} 1+b=b+a \\ a+c=c+a \\ 3=2b-a \\ 1-a=2c-a \end{array}\right\}$, que té com a solució

$a=1, b=2, c=\dfrac{1}{2}$.

---

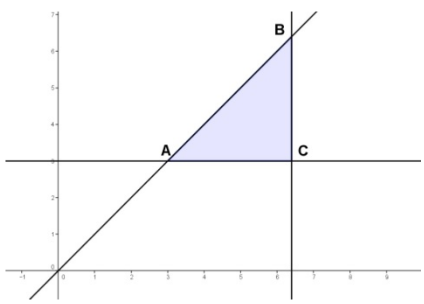
5. La funció derivada d'una funció *f* és $f'(x)=e^{-2x} \cdot (x-x^2)$.
   a. Estudieu el creixement i el decreixement de la funció *f*. *[1 punt]*
   b. Si la funció *f* té extrems relatius, indiqueu-ne les abscisses i classifiqueu-los. *[1 punt]*

a. La variació de la funció *f* vindrà donada pel signe de *f'*. Com que l'exponencial és sempre estrictament positiva, aquest signe depèn només del factor polinòmic, que és positiu quan *x* està comprès entre 0 i 1. Per tant, *f* és estrictament creixent a $(0,1)$, i estrictament decreixent a $(-\infty,0) \cup (1,+\infty)$.

b. Com a conseqüència de l'apartat anterior, la funció *f* té un mínim relatiu a x = 0 i un màxim relatiu a x = 1.

---

6. Una refineria de petroli produeix gasolina i gasoil. En el procés de refinació que s'hi porta a terme s'obté més gasolina que gasoil. A més, per a cobrir la demanda cal produir com a mínim 3 milions de litres de gasoil al dia, mentre que la demanda de gasolina és de 6,4 milions de litres al dia, com a màxim.
La gasolina té un preu d'1,9 €/L, i el gasoil val 1,5 €/L. Tenint en compte que es ven la totalitat de la producció, determineu quants litres de gasolina i de gasoil cal produir al dia per a obtenir el màxim d'ingressos. *[2 punts]*



Anomenarem *x* als milions de litres de gasolina, i *y* als milions de litres de gasoil. Les restriccions són:

$$\left.\begin{array}{c} x \geq y \\ y \geq 3 \\ x \leq 6,4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$$

. La funció objectiu serà, en milions d'euros, $I(x,y) = 1,9x + 1,5y$. Els vèrtexs són: A(3,3), B(6.4,6.4) i C(6.4,3). Els ingressos respectius són: $I(A) = 10,2$, $I(B) = 21,76$, $I(C) = 16,6$. Per tant, el màxim benefici s'obtindrà amb la producció de 6,4 milions de litres de cada tipus de carburant.

Una altra interpretació és considerar $x > y$. En aquest cas no existeix màxim de I(x,y) a la regió factible.