SÈRIE 4

- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Valoreu totes les parts de cada subapartat que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul segons la importància de l'error i el vostre criteri. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.
- Copieu la nota de la pregunta *i* en la casella *i,* a fi de poder fer estadístiques sobre cada qüestió.
- La nota final de l'exercici serà el resultat d'arrodonir la suma final al mig punt més pròxim, i si resulta ser equidistant entre tots dos, s'apujarà 0.25

QÜESTIONS

1.- Considereu la funció $f(x)=ax^2+x+b$ ($a,b \in R$). Trobeu els valors de a i b que fan que la recta $y=2x+1$ sigui tangent a la gràfica de f quan $x=1$.

PUNTUACIÓ: 2 punts.

Solució:

Si la recta donada és tangent a la gràfica de la funció *f*, es pot assegurar que $f(1)=y(1)=2\cdot 1+1=3$. A més a més, $f'(1)=2$. Utilitzant aquestes dues igualtats, i observant que $f'(x)=2ax+1$, s'arriba al sistema

$$\begin{cases} a+b+1=3 \\ 2a+1=2 \end{cases}$$

que té per solució $a=\dfrac{1}{2}$ i $b=\dfrac{3}{2}$.

2.- Sigui $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) ***Calculeu A^2 i A^3.***

b) ***Determineu, raonadament, el valor de A^{60124}.***

PUNTUACIÓ: 1 punt per cada apartat.

Solució:

a) $$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_3$$

c) A la vista del resultat anterior, podem assegurar que $A^6 = I_3$. Llavors,

$$A^{60124} = A^{1020\cdot 6+4} = (A^6)^{1020}\cdot A^4 = I_3\cdot A^4 = A\cdot A^3 = -A\ .$$

3.- Considereu un sistema de dues equacions amb tres incògnites.

a) Pot ser incompatible?

b) Pot ser compatible determinat?

Raoneu les respostes

PUNTUACIÓ: un punt cada apartat.

Solució:

a) Efectivament, un sistema de dues equacions amb tres incògnites pot ser incompatible. Per exemple, ho és

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}.$$

En general, un sistema $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases}$ és incompatible si i sol si $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ (observeu que aquesta és la condició per a què els plans representats per les dues equacions siguin paral·lels).

b) Un sistema de dues equacions amb tres incògnites no pot ser compatible determinat, perquè el rang de la matriu del sistema és, com a màxim, 2 (té solament dues files), mentre que el número d'incògnites és 3.

4.- Donats el punt $P = (7,5,1)$***, el pla*** $\pi : x - 2y - 3z = 10$ ***i la recta***

$$r : \begin{cases} 3x - 2y + 2z = 7 \\ x - 6y - 2z = 5 \end{cases},$$

a) Trobeu la distància de P ***a*** π***.***

b) Trobeu la distància de P ***a*** r***.***

c) Trobeu la distància de r ***a*** π***.***

PUNTUACIÓ: 0.5 punts pels apartats a) i c); 1 punt per l'apartat b).

Solució:

a) La distància d'un punt $P=(x_0,y_0,z_0)$ a un pla $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ ve donada per la fórmula

$$d(P,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\ .$$

En el nostre cas, $d(P,\pi)=\dfrac{|7-10-3-10|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-3)^2}}=\dfrac{|-16|}{\sqrt{14}}=\dfrac{16}{\sqrt{14}}$.

b) La manera més directa de trobar la distància d'un punt P a una recta r és la utilització de la fórmula

$$d(P,r)=\frac{\left\|\overrightarrow{PQ}\wedge\vec{v}_r\right\|}{\left\|\vec{v}_r\right\|}\ ,$$

essent Q un punt qualsevol de la recta i $\vec{v}_r$ el seu vector director.

De les equacions implícites de la recta se'n poden deduir les seves equacions paramètriques,

$$\begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1-2\lambda \end{cases}$$

Per tant, podem agafar $Q=(3,0,-1)$ i $\vec{v}_r=(2,1,-2)$.

Una altra manera de trobar un punt de la recta i el seu vector director consisteix en donar un valor arbitrari a una de les variables. Si fem, per exemple, $y=0$, del sistema que defineix la recta en deduïm

$$\begin{cases} 3x + 2z = 7 \\ x - 2z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=3\ , \quad z=-1\ ,$$

obtenint així un punt de la recta, $Q=(3,0,-1)$. El vector director s'obté buscant un vector perpendicular als vectors característics dels plans que defineixen la recta, ja sigui utilitzant el producte escalar,

$$\begin{cases} (a,b,c)\bullet(3,-2,2)=0 \\ (a,b,c)\bullet(1,-6,-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3a-2b+2c=0 \\ a-6b-2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad a=2b\ , \quad c=-2b$$

d'on $\vec{v}_r=(2,1,-2)$, o utilitzant el producte vectorial,

$$\vec{v}_r=\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -6 & -2 \end{vmatrix}=(16,8,-16)\ \ ||\ \ (2,1,-2)\,.$$

Sigui com sigui,

$$\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -4 & -5 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (12,-12,6).$$

Per tant, $d(P,r) = \dfrac{\left\| \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{v}_r \right\|}{\left\| \vec{v}_r \right\|} = \dfrac{\|(12,-12,6)\|}{\|(2,1,-2)\|} = \dfrac{18}{3} = 6$.

Encara hi ha una altra manera de trobar la distància entre el punt P i la recta r. Consisteix en trobar el pla perpendicular a r, passant per P. Es busca la intersecció entre aquest nou pla i la recta. Sigui Q el punt d'intersecció. Llavors, $d(P,r) = d(P,Q)$. Per si algú ho fa així, el pla perpendicular a r, passant per P, té per equació $2x + y - 2z - 17 = 0$ i el punt de tall entre ell i la recta és el punt $Q = (5,1,-3)$. Llavors,

$$d(P,r) = d(P,Q) = \sqrt{(5-7)^2 + (1-5)^2 + (-3-1)^2} = 6.$$

c) La recta r i el pla π no són paral·lels, ja que el director de la recta i el característic del pla no són perpendiculars,

$$(2,1,-2) \bullet (1,-2,-3) = 2 - 2 + 6 = 6 \neq 0.$$

Per tant, $d(r,\pi) = 0$.

PROBLEMES

5.- Definim les funcions $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ ***i*** $g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$***.***

a) Comproveu que $[g(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$***.***

b) Comproveu també que $f'(x) = g(x)$ ***i*** $g'(x) = f(x)$***.***

c) Comproveu que $f(x+y) = f(x) \cdot g(y) + f(y) \cdot g(x)$***.***

d) Calculeu $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ***dividint per*** e^x ***el numerador i el denominador; amb un procediment similar (però no igual), trobeu*** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$***.***

PUNTUACIÓ: 1 punt cada apartat.

Solució:

a) Es tracta simplement de fer les operacions indicades,

$$[g(x)]^2-[f(x)]^2=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$$
$$=\frac{e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}}{4}-\frac{e^{2x}-2e^xe^{-x}+e^{-2x}}{4}=\frac{4e^{x-x}}{4}=\frac{4\cdot 1}{4}=1$$

b) Recordant les propietats de la derivada, tenim

- $Df(x)=D\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]=\frac{D(e^x-e^{-x})}{2}=\frac{e^x-e^{-x}\cdot(-1)}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=g(x)$
- $Dg(x)=D\left[\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right]=\frac{D(e^x+e^{-x})}{2}=\frac{e^x+e^{-x}\cdot(-1)}{2}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=f(x)$

c) Observem que $f(x+y)=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}$. Intentarem arribar a aquesta expressió fent els càlculs del membre de la dreta de la igualtat

$$f(x)\cdot g(y)+f(y)\cdot g(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^y-e^{-y}}{2}\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$
$$=\frac{e^{x+y}+e^{x-y}-e^{-x+y}-e^{-x-y}}{4}+\frac{e^{y+x}+e^{y-x}-e^{-y+x}-e^{-y-x}}{4}$$
$$=\frac{2e^{x+y}-2e^{-x-y}}{4}=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}=f(x+y).$$

d) El càlcul d'aquests límits no es pot fer utilitzant la regla de l'Hôpital degut a què la derivada de la funció exponencial és ella mateixa. La forma de calcular-los consisteix en dividir numerador i denominador pel factor adequat (aquell que fa que el quocient sigui una indeterminació del tipus ∞/∞). Així,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{e^x-e^{-x}}{e^x}}{\frac{e^x+e^{-x}}{e^x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=\frac{1+0}{1-0}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{e^x-e^{-x}}{e^{-x}}}{\frac{e^x+e^{-x}}{e^{-x}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

6.- Les rectes $r_1 : \dfrac{x-a}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{4}$ ***i*** $r_2 : \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-b}{2} = \dfrac{z-4}{-1}$ ***són coplanàries (és a dir, estan incloses en un mateix pla).***

a) Expliqueu, raonadament, quina és la seva posició relativa.

b) Trobeu la relació que hi ha entre els paràmetres a ***i*** b***.***

c) Trobeu els valors de a ***i*** b ***si el pla que les conté passa pel punt*** $P = (2,4,6)$***.***

PUNTUACIÓ: apartat a) 1.5 punts; apartat b) 1punt; apartat c) 1.5 punts.

Solució:

a) Dues rectes coplanàries han de tallar-se o ser paral·leles. Com que els vectors directors corresponents no són proporcionals ($2/1 \neq 1/2$), sigui quin sigui el valor del paràmetre a, és evident que es tallen en un punt.

b) Sigui Q el punt on es tallen. Llavors, per ser d'ambdues rectes,

$$Q = (a+2\lambda, \lambda, -1+4\lambda) = (-2+\mu, b+2\mu, 4-\mu) \ .$$

El sistema que ens queda,

$$\begin{cases} 2\lambda - \mu = -2-a \\ \lambda - 2\mu = b \\ 4\lambda + \mu = 5 \end{cases}$$

ha de ser compatible determinat. Treballant amb la matriu ampliada del sistema obtenim

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & b \\ 2 & -1 & -a-2 \\ 4 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & b \\ 0 & 3 & -a-2-2b \\ 0 & 9 & 5-4b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & b \\ 0 & 3 & -a-2-2b \\ 0 & 0 & 3a+2b+11 \end{array}\right) ,$$

la qual cosa ens porta a què el sistema és compatible determinat si i sol si $3a+2b+11=0$.

Podem arribar a la mateixa conclusió observant que la matriu del sistema té rang 2 (per exemple, les dues primeres files són independents) per a qualsevol valor del paràmetre a. Per tant, cal que la matriu ampliada no tingui rang 3:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2-a \\ 1 & -2 & b \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -9a-6b-33=0 \Leftrightarrow 3a+2b+11=0 .$$

Encara es pot arribar a la mateixa conclusió d'una altra manera. De l'equació contínua de cada una de les rectes, podem passar a les equacions implícites,

$$r_1 : \begin{cases} x - 2y = a \\ 4y - z = 1 \end{cases} ; \qquad r_2 : \begin{cases} 2x - y = 1 \\ y + 2z = b+8 \end{cases} .$$

El sistema format per les quatre equacions ha de ser compatible determinat:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & a \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -b-4 \\ 0 & 1 & 2 & b+8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & a \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -2a-b-4 \\ 0 & 1 & 2 & b+8 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2 & b+8 \\ 0 & 0 & -9 & -4b-31 \\ 0 & 0 & -6 & -2a-4b-28 \end{array}\right)$$

Les dues últimes files han de ser proporcionals:

$$\frac{3}{2} = \frac{4b+31}{2a+4b+28} \Leftrightarrow 3a+2b+11=0 \ .$$

Així, per a què les rectes siguin coplanàries ha de ser $3a+2b+11=0$.

c) El pla que les conté es pot escriure com

$$\pi : (x,y,z) = (a,0,-1) + \lambda(2,1,4) + \mu(1,2,-1) \ .$$

D'acord amb l'enunciat, el punt $P=(2,4,6)\in\pi$, és a dir, aquest punt satisfà l'equació del pla: $(2,4,6)=(a,0,-1)+\lambda(2,1,4)+\mu(1,2,-1)$. D'aquí, el sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2\lambda & + & \mu & = & 2-a \\ \lambda & + & 2\mu & = & 4 \\ 4\lambda & - & \mu & = & 7 \end{array}\right.$$

ha de ser compatible determinat.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2-a \\ 4 & -1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -a-6 \\ 0 & -9 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & a+6 \\ 0 & 0 & 3a+9 \end{array}\right) .$$

Per tant, cal que $3a+9=0 \Leftrightarrow a=-3$. Substituint aquest valor a la relació trobada a l'apartat anterior, tenim $b=-1$.

En definitiva, els valors són $a=-3$ i $b=-1$.