

**SÈRIE 2**

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar qualsevol decimal i després arrodonir la suma total. Podeu matisar la nota de cada pregunta amb signes + i -, de manera que es compensin els matisos entre totes les preguntes.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Valoreu totes les parts de cada subapartat que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0,25 o 0,5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0,75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.
- Copieu la nota de la pregunta  $i$  en la casella  $i$  degudament arrodonida a un múltiple de 0.5, a fi de poder fer estadístiques sobre cada qüestió.

**QÜESTIONS**

1.- Se sap que certa funció derivable  $F(x)$  verifica les condicions  $F'(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$  i

$F(1) = 3$ .

a) Trobeu  $F(x)$ .

b) Calculeu l'àrea compresa entre  $F(x)$  i l'eix OX des de  $x=0$  fins a  $x=1$ .

PUNTUACIÓ: 1 punt cada apartat.

**Solució:**

a) En primer lloc es calcula la primitiva de la derivada,

$$F(x) = \int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx = \int x^{-1/4} dx = \frac{x^{3/4}}{3/4} + C = \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + C.$$

A continuació, aplicant  $F(1) = 3$ , s'obté la constant:  $\frac{4}{3} + C = 3 \Rightarrow C = \frac{5}{3}$ . Així, la funció demanada és

$$F(x) = \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + \frac{5}{3}.$$

b) Tenint en compte que la funció és sempre positiva, l'àrea demanada s'obté de calcular

$$\int_0^1 F(x) dx = \int_0^1 \left( \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + \frac{5}{3} \right) dx = \left[ \frac{4}{3} \cdot \frac{x^{7/4}}{7/4} + \frac{5}{3} x \right]_0^1 = \frac{17}{7}.$$

2.- *Siguin*  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$  i  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ .

a) Trobeu la matriu  $M$ , quadrada d'ordre 2, tal que  $M \cdot A = B$ .

b) Comproveu que  $M^2 = I_2$  (matriu identitat d'ordre 2); deduiu l'expressió de  $M^n$ .

PUNTUACIÓ: 1 punt cada apartat.

**Solució:**

a) Podem calcular  $M$  utilitzant la matriu inversa de la matriu  $A$ ,

$$M = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/4 & 3/8 \\ -1/4 & 1/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

També es pot resoldre com un sistema d'equacions, posant  $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ . Llavors,

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ -3x + 2y = 3 \\ z + 2t = 2 \\ -3z + 2t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/2 \\ y = 3/4 \\ z = 1 \\ t = 1/2 \end{cases}$$

b) En efecte,  $M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ . Amb això,  $M^n = \begin{cases} M, & \text{si } n \text{ és senar} \\ I_2, & \text{si } n \text{ és parell} \end{cases}$ .

3.- Donat el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} x + y + (m-1)z = 1 \\ x + (m-1)y + z = m-1 \\ (m-1)x + y + z = m+2 \end{cases}$$

discutiu-lo en funció dels valors del paràmetre  $m$ .

PUNTUACIÓ: 2 punts

**Solució:**

Primerament es fa l'escalonament de la matriu ampliada,

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m-1 & 1 \\ 1 & m-1 & 1 & m-1 \\ m-1 & 1 & 1 & m+2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m-1 & 1 \\ 0 & m-2 & 2-m & m-2 \\ 0 & -m+2 & 2m-m^2 & 3 \end{array} \right) \\ & \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m-1 & 1 \\ 0 & m-2 & 2-m & m-2 \\ 0 & 0 & 2+m-m^2 & m+1 \end{array} \right); \quad 2+m-m^2 = 0 \Leftrightarrow m = -1, \quad m = 2. \end{aligned}$$

S'observa que els valors que cal estudiar separatament són  $m = -1$  i  $m = 2$ .

S'arriba a la mateixa conclusió igualant a zero el determinant de la matriu de coeficients

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m-1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ m-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -m^3 + 3m^2 - 4 = -(m-2)^2(m+1).$$

Llavors, quan  $m$  és diferent de 2 i de -1, el sistema és compatible determinat.

Si  $m=2$ , la matriu ampliada, després d'escalonar, és  $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$  i el sistema és incompatible ja que la matriu de coeficients té rang 1 i l'ampliada rang 2.

Finalment, si  $m=-1$  la matriu és  $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$  i el sistema és compatible indeterminat ja que tant la matriu de coeficients com l'ampliada tenen rang 2.

**4.- Trobeu l'equació de la recta perpendicular al pla  $\pi : 2x - y + z + 3 = 0$  que passa pel punt  $(-1, 3, a)$  del pla.**

PUNTUACIÓ: 2 punts.

**Solució:**

Si el punt  $(-1, 3, a)$  és del pla, ha de complir la seva equació,

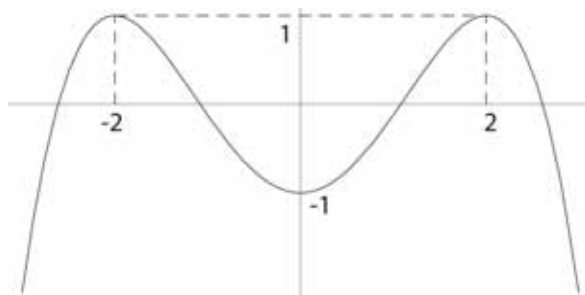
$$2 \cdot (-1) - 3 + a + 3 = 0 \Leftrightarrow a = 2.$$

El vector director de la recta buscada ha de ser paral·lel al vector característic del pla, la qual cosa permet agafar com a vector director aquest mateix vector. Així, l'equació de la recta és

$$(x, y, z) = (-1, 3, 2) + \lambda(2, -1, 1).$$

## PROBLEMES

**5.- Considereu una funció tal que la seva representació gràfica a l'interval  $(-3, 3)$  és**



- Esbrineu les abscisses dels seus punts extrems (màxims i mínims) relatius.
- Estudieu el creixement i decreixement de la funció a l'interval  $(-3, 3)$ .
- Feu un esbós de la gràfica de la derivada d'aquesta funció.

**d) Sabent que la funció és de la forma  $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ , trobeu de quina funció es tracta.**

PUNTUACIÓ:

Apartat a) 0.5 punts; apartat b) 0.5 punts; apartat c) 1 punt; apartat d) 2 punts.

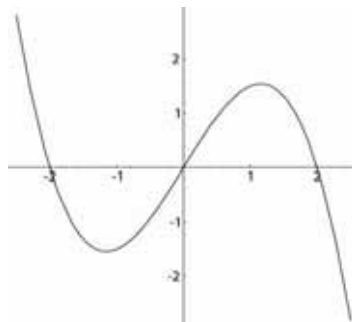
**Solució:**

- a) És fàcil observar que els màxims relatius es troben quan  $x = -2$  i  $x = 2$ . El mínim relatiu té abscissa  $x = 0$ .
- b) D'acord amb la gràfica, la funció és
- creixent a  $(-3, -2) \cup (0, 2)$ .
  - decreixent a  $(-2, 0) \cup (2, 3)$ .

Gràficament,

(-3,-2)	(-2,0)	(0,2)	(2,3)
↗	↘	↗	↘

c) La gràfica de la derivada és



d) Sabem que  $f(-2) = 1$ ,  $f(2) = 1$ ,  $f'(-2) = 0$ ,  $f'(2) = 0$ ,  $f'(0) = 0$  i  $f(0) = -1$ . És a dir, tenim el sistema lineal

$$\left. \begin{array}{l} 16a + 4b + c = 1 \\ 16a + 4b + c = 1 \\ -32a - 4b = 0 \\ 32a + 4b = 0 \\ c = -1 \end{array} \right\} \text{ que té per solucions } a = -1/8, b = 1 \text{ i } c = -1.$$

O sigui, que la funció és  $f(x) = -x^4/8 + x^2 - 1$ .

6.- Donades les rectes  $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$ ,  $s: \frac{x-1}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z+5}{3}$  i el punt  $P = (1, 1, -1)$ , volem trobar l'equació de la recta que passa per  $P$  tallant a  $r$  i  $s$ . Per aconseguir-ho, es demana:

- Trobeu l'equació general o cartesiana (és a dir, l'equació de la forma  $Ax + By + Cz + D = 0$ ) del pla  $\pi$  que conté la recta  $r$  i el punt  $P$ .
- Busqueu el punt  $M$  intersecció entre el pla  $\pi$  i la recta  $s$ .
- Trobeu l'equació de la recta que passa pels punts  $P$  i  $M$ .
- Comproveu que la recta trobada a l'apartat anterior és la que estem buscant.

PUNTUACIÓ: 1 punt per cada apartat.

**Solució:**

- L'equació del pla  $\pi$  es pot trobar de diferents maneres. Aquí se n'exposen dues.

La primera consisteix en trobar dos vectors generadors del pla. Com que ha de contenir la recta  $r$ , el vector director d'ella,  $\vec{v}_r = (1, 2, -1)$ , és un dels vectors generadors. L'altre es pot calcular com  $\overrightarrow{PQ}$ , essent  $Q$  un punt qualsevol de la recta  $r$ ; per exemple,  $Q = (2, -1, 0)$ . Així,  $\overrightarrow{PQ} = (2, -1, 0) - (1, 1, -1) = (1, -2, 1)$  i l'equació vectorial del pla  $\pi$  és  $(x, y, z) = (1, 1, -1) + \lambda(1, 2, -1) + \mu(1, -2, 1)$ , que dóna lloc a l'equació general  $y + 2z + 1 = 0$ .

En la segona forma, agafem l'equació  $Ax + By + Cz + D = 0$  i fem que sigui verificada per tres dels punts del pla:  $P = (1, 1, -1)$ ,  $Q_1 = (2, -1, 0)$  i  $Q_2 = (3, 1, -1)$ . Els dos últims estan extrets de la recta  $r$ :  $Q_1$  es dedueix directament de l'equació i  $Q_2$  s'obté sumant una vegada el vector director  $\vec{v}_r = (1, 2, -1)$  a  $Q_1$ . El sistema d'equacions que ens queda és

$$\begin{cases} A + B - C + D = 0 \\ 2A - B + D = 0 \\ 3A + B - C + D = 0 \end{cases}$$

que té per solució  $A = 0$ ,  $B = D$ ,  $C = 2D$ . Fent  $D = 1$ , per exemple, obtenim l'equació buscada:  $y + 2z + 1 = 0$ .

- Les equacions paramètriques de la recta  $s$  són  $x = 1 + \lambda$ ,  $y = -7 + 2\lambda$ ,  $z = -5 + 3\lambda$ . Substituint-les a l'equació del pla anterior, tenim

$$(-7 + 2\lambda) + 2(-5 + 3\lambda) + 1 = 0 \Leftrightarrow 8\lambda - 16 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2.$$

El punt de tall és  $M = (1 + 2, -7 + 4, -5 + 6) = (3, -3, 1)$ .

Naturalment, hi ha altres maneres per a calcular aquest punt. Per exemple, l'equació contínua de la recta  $s$  es pot descompondre en dues equacions implícites i resoldre el sistema format per elles i l'equació del pla de l'apartat anterior.

c) L'equació contínua de la recta demanada és

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-1}{-3-1} = \frac{z+1}{1+1} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+1}{2}.$$

d) Per construcció, la recta trobada passa pel punt  $P = (1,1,-1)$  i talla a la recta  $s$  en el punt  $M = (3,-3,1)$ . Per tant, solament resta per comprovar que també talla a la recta  $r$ . Un dels mètodes per a realitzar aquesta comprovació és veure que el sistema format per les equacions contínues d'ambdues rectes és compatible determinat,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1} \\ \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+1}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 5 \\ y + 2z = -1 \\ 2x + y = 3 \\ x - z = 2 \end{array} \right.$$

Sumant la primera i la tercera equació tenim  $4x = 8$ , és a dir,  $x = 2$ . D'aquí, a més a més,  $y = -1$ . De la segona equació,  $z = 0$ , valor que també compleix la quarta equació. Per tant, la recta de l'apartat c) talla a la recta  $r$  en el punt  $(2,-1,0)$ .

Aquest apartat es pot raonar també sense buscar el punt d'intersecció amb  $r$ . En efecte, la recta trobada a l'apartat c) passa per  $P$  i per  $M$  per construcció. Com que, a més a més, està continguda al pla  $\pi$ , que també conté la recta  $r$ , la intersecció entre les dues està assegurada, a menys que fossin paral·leles, que no és, evidentment, el cas.

**SÈRIE 5**

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar qualsevol decimal i després arrodonir la suma total. Podeu matisar la nota de cada pregunta amb signes + i -, de manera que es compensin els matisos entre totes les preguntes.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Valoreu totes les parts de cada subapartat que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0,25 o 0,5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0,75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.
- Copieu la nota de la pregunta  $i$  en la casella  $i$  degudament arrodonida a un múltiple de 0,5, a fi de poder fer estadístiques sobre cada qüestió.

**QÜESTIONS**

**1.- Trobeu els valors dels paràmetres  $a$  i  $b$  per tal que la funció següent sigui contínua i derivable en  $x = 2$ .**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x + 3 & \text{si } x < 2 \\ x^3 + bx + 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

PUNTUACIÓ: 2 punts.

**Solució:**

Per a què la funció sigui contínua en el punt  $x = 2$ , cal que els límits laterals existeixin, coincideixin i siguin iguals al valor de la funció en el punt.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^2 + 2x + 3) = 4a + 7;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^3 + bx + 5) = 13 + 2b.$$

$$f(2) = 13 + 2b$$

Així, ens queda que la funció és contínua en  $x = 2$  si i sol si  $4a + 7 = 13 + 2b$ .

Per estudiar la derivabilitat, busquem les derivades laterals en el punt 2,

$$f'_-(x) = 2ax + 2 \Rightarrow f'_-(2) = 4a + 2; \quad f'_+(x) = 3x^2 + b \Rightarrow f'_+(2) = 12 + b.$$

La funció és derivable en el punt  $x = 2$ , si i sol si  $4a + 2 = 12 + b$ . Arribem així al sistema

$$\begin{cases} 4a - 2b = 6 \\ 4a - b = 10 \end{cases}$$

que té per solució  $a = \frac{7}{2}$ ,  $b = 4$ .

**2.- Considereu la matriu  $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$ , on  $a$  i  $b$  són nombres reals.**

**a) Calculeu el valor de  $a$  i  $b$  per tal que  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .**

**b) Per als valors obtinguts a l'apartat anterior, calculeu  $A^3$  i  $A^4$ .**

**c) Sigui  $n$  un nombre natural qualsevol. Doneu l'expressió de  $A^n$  en funció de  $n$ .**

PUNTUACIÓ: 1 punt per l'apartat a); 0.5 punts per l'apartat b); 0.5 punts per l'apartat c).

**Solució:**

a) Calculem  $A^2$  i igualem a la matriu que ens indiquen.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+b)^2 & 2a \\ 0 & (a-b)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'aquí, cal que  $(a+b)^2 = 1$ ,  $(a-b)^2 = 1$  i  $2a = 2$ . La solució de la tercera equació és  $a = 1$ . De la primera i tercera equació deduïm que  $b = 0$ .

b) La matriu obtinguda a l'apartat anterior és  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Llavors,

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; A^4 = A \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) A la vista dels resultats obtinguts fins ara, l'expressió de la potència  $n$ -ésima de la matriu  $A$  és  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**3.- Digueu per quin valor de  $x$  la recta tangent a la corba  $y = \ln(x^2 + 1)$  és paral·lela a la recta  $y = x$ . Escriviu l'equació d'aquesta tangent.**

PUNTUACIÓ: 2 punts.

**Solució:**

El pendent de la recta tangent ha de valer 1. Per tant, cal igualar la derivada de la funció  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$  a aquest valor.

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} = 1 \Leftrightarrow 2x = x^2 + 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

L'equació de la recta tangent és  $y = x - 1 + \ln(2)$ .



4.- Donats el pla  $\pi : 3x - 2y + 5z = 6$  i la recta  $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-3}$ , busqueu el punt de tall, si existeix.

PUNTUACIÓ: 2 punts.

**Solució:**

De l'equació contínua de la recta se'n dedueix que

$$x = 1 + 2\lambda, \quad y = -1 + \lambda, \quad z = -2 - 3\lambda.$$

Substituint aquests valors a l'equació del pla  $\pi$  ens queda que

$$3(1 + 2\lambda) - 2(-1 + \lambda) + 5(-2 - 3\lambda) = 6 \Leftrightarrow -11\lambda = 11 \Leftrightarrow \lambda = -1.$$

El punt de tall és  $P = (-1, -2, 1)$ .

El problema també es pot resoldre trobant les equacions implícites de la recta i resolent el sistema de tres equacions amb tres incògnites resultant d'ajuntar-hi l'equació del pla.

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 2y+2 \\ -3y-3 = z+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y = 3 \\ 3y+z = -5 \end{cases}$$

El sistema és

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 6 \\ x - 2y = 3 \\ 3y + z = -5 \end{cases}$$

que té per solució el punt  $P$ .

## PROBLEMES

5.- Considereu el sistema d'equacions

$$\begin{cases} 2x + y - (a-1)z = 4 \\ x - 2y + z = -4 \\ 4x - (a+1)y + z = -2a \end{cases}$$

- Discutiu-lo en funció del paràmetre  $a$ .
- Resoleu-lo quan sigui compatible indeterminat.
- En el cas (b), trobeu una solució del sistema en què  $x$ ,  $y$  i  $z$  tinguin valors enters.

PUNTUACIÓ: 2 punts per l'apartat a); 0.5 punts per l'apartat b); 1 punt per l'apartat c); 0.5 punts per l'apartat d).

**Solució:**

a) Escalonant la matriu ampliada del sistema ens queda

$$(A|b) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 1-a & 4 \\ 4 & -a-1 & 1 & -2a \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -a-1 & 12 \\ 0 & -a+7 & -3 & 16-2a \end{array} \right)$$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -a-1 & 12 \\ 0 & 0 & -a^2+6a-8 & 2a-4 \end{array} \right)$$

**Nota:** ens podem estalviar l'últim pas mirant si la segona i la tercera files de la matriu del sistema (no de l'ampliada) són proporcionals:

$$\frac{5}{-a+7} = \frac{-a-1}{-3} \Leftrightarrow -15 = a^2 - 6a - 7 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 8 = 0$$

Sigui d'una o altra manera, cal buscar els valor del paràmetre  $a$  per als quals  $-a^2 + 6a - 8 = 0$ . Les solucions d'aquesta equació de segon grau són  $a = 2$ ,  $a = 4$ . Llavors,

- Si  $a \neq 2$  i  $a \neq 4$ , tenim que  $\text{rang} A = \text{rang}(A|b) = 3$ . El sistema és compatible determinat.
- Si  $a = 2$ ,

$$(A|b) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

El sistema és compatible indeterminat, ja que  $\text{rang} A = \text{rang}(A|b) = 2$ .

- Si  $a = 4$ ,

$$(A|b) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right).$$

El sistema és incompatible, ja que  $\text{rang} A = 2 \neq \text{rang}(A|b) = 3$ .

b) La resolució del sistema en el cas compatible indeterminat ens porta a què

$$y = \frac{12+3z}{5}, \quad x = \frac{4+z}{5}, \quad \text{per a qualsevol valor de } z.$$

c) Qualsevol valor de la forma  $z = 1 + 5n$  dona lloc a solucions amb components enteres.

En efecte, si  $z = 1 + 5n$ , llavors

$$x = \frac{4+(1+5n)}{5} = 1+n \quad \text{i} \quad y = \frac{12+3(1+5n)}{5} = \frac{15+15n}{5} = 3+3n.$$

Per exemple, per  $n = 0$ , la solució és  $x = 1$ ,  $y = 3$ ,  $z = 1$ .

**6.- De tots els triangles rectangles d'hipotenusa 10 cm, trobeu la longitud dels catets d'aquell que té perímetre màxim. Feu la comprovació de què la solució trobada correspon realment al perímetre màxim.**

PUNTUACIÓ: 2.5 punts pel càlcul dels catets; 1.5 punts per la comprovació.

**Solució:**

Siguin  $x$  i  $y$  els catets del triangle. Llavors sabem, d'acord amb el teorema de Pitàgores, que  $x^2 + y^2 = 10^2$ , la qual cosa ens permet aïllar, per exemple, el valor de la variable  $y$  en funció de la  $x$ :  $y = \sqrt{100 - x^2}$ .

El perímetre del triangle és  $P = 10 + x + y = 10 + x + \sqrt{100 - x^2}$ .

Per trobar el màxim d'aquest valor, calculem la derivada del perímetre respecte de  $x$ .

$P'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{100 - x^2}}$ . Iguaem aquesta expressió a zero i esbrinem el valor de la variable  $x$ ,

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{100 - x^2} \Leftrightarrow 2x^2 = 100 \Leftrightarrow x = \pm 5\sqrt{2}.$$

El valor negatiu no té cap sentit en aquest problema (encara més: es pot observar que el valor negatiu NO ÉS solució de l'equació  $P'(x) = 0$ ). Així, ens quedarem amb  $x = 5\sqrt{2}$ . Llavors,  $y = \sqrt{100 - (5\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{2}$ .

Per fer la comprovació demanada, podem buscar el signe de la derivada segona de la funció  $P(x)$  en el punt  $x = 5\sqrt{2}$ ,

$$P''(x) = \frac{-100}{(100 - x^2)^{3/2}} \Rightarrow P''(5\sqrt{2}) = \frac{-100}{(100 - 50)^{3/2}} < 0.$$

Que la segona derivada sigui negativa ens diu que el punt  $(5\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$  correspon a un màxim.

La comprovació també es pot fer analitzant el signe de la primera deriva de la funció perímetre, tenint en compte que el domini de la funció  $P'(x)$  és  $(-10, 10)$ .

$(-10, 5\sqrt{2})$	$(5\sqrt{2}, 10)$
$P'(x) > 0$	$P'(x) < 0$
La funció creix	La funció decreix