SÈRIE 4.

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar fraccions de 0,25 punts en els diferents apartats i després arrodonir la suma total.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0,25 o 0,5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0,75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.

QÜESTIONS

1.-

a) **[1 punt]** Si fem servir A com punt base i el vector $A\vec{B} = \left(-1,0,-1\right)$ com a vector director de la recta, la seva equació contínua és:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-2}{-1}.$$

La general serà, doncs,

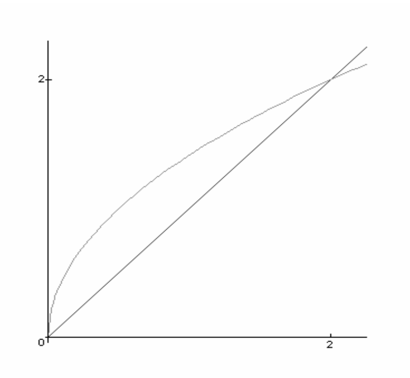
$$\begin{cases} y-1 &= 0 \\ x-z+1 &= 0. \end{cases}$$

b) **[1 punt]** Per **no** formar un triangle, els tres punts han de estar alineats. Per tant, el punt *C* ha de pertànyer a la recta *AB*:

$$\begin{cases} 1-1 &= 0 \\ k-5+1 &= 0. \end{cases} \Rightarrow \quad k = 4.$$

Així, la condició per tal que *A*, *B* i *C* formin un triangle és que $k \neq 4$.

2.-



[2 punts] Els punts de tall de les dues gràfiques són $(0,0)$ i $(2,2,)$. L'àrea que ens demanen és

$$\left|\int_0^2 \left(\sqrt{2x} - x\right) dx\right| = \left|\frac{2\sqrt{2}}{3} x^{3/2} - \frac{x^2}{2}\Big|_0^2\right| = \frac{2}{3} \text{ unitats}$$

quadrades.

Puntueu 1 punt per plantejar correctament la integral i 1 punt pel seu càlcul.

3.-

[2 punts] Calculem el mínim de la funció $f(v)$. Hem de resoldre $f'(v) = 0$:

$$\frac{0{,}036\, v\, e^{0{,}012\, v} - 3e^{0{,}012\, v}}{v^2} = 0 \quad \Rightarrow 0{,}036\, v\, e^{0{,}012\, v} - 3e^{0{,}012\, v} = 0$$

$$0{,}036\, v\, e^{0{,}012\, v} - 3e^{0{,}012\, v} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{0{,}012\, v}\left(0{,}036\, v - 3\right) = 0 \Rightarrow v = \frac{3}{0{,}036} = 83{,}333\ldots$$

Com que $f'(v) < 0$ per $v < 83{,}333\ldots$ i $f'(v) > 0$ per $v > 83{,}333\ldots$, estem davant d'un mínim. La solució és, doncs, 83,333... km/h.

Puntueu 1,5 punts per arribar correctament a $v = 83{,}33\ldots$ La resta per la comprovació de mínim.

4.-

a) **[0,5 punts]** El pendent del primer tram, entre 0 i 1, és 1. El pendent del segon tram, entre 1 i 2, és 1/2. Per tant,

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1) \\ 1/2 & x \in (1,2) \end{cases}$$

b) **[0,5 punts]** Evidentment, $f'(x)$ no existeix per $x = 1$ perquè en el punt (1,1) la gràfica de $f(x)$ no té tangent. Alternativament es pot argumentar que en el punt $x = 1$, la derivada de $f(x)$ per l'esquerra és 1 i per la dreta 1/2.

Accepteu també com a resposta correcta l'argument que la gràfica de $f(x)$ en $x = 1$ no és "suau", presenta una "punxa". Puntueu 0,25 la resposta amb alguna altra justificació que encara que no sigui correcta sigui raonablement plausible.

c) **[1 punt]** La integral demanada es pot calcular com la suma de les àrees del triangle per sobre de $(0,1)$ i del trapezi per sobre de $(1,2)$:

$$\frac{1}{2}1\cdot 1+\frac{1+3/2}{2}\cdot 1=\frac{7}{4}\text{ unitats quadrades;}$$

o bé es pot calcular obtenint l'expressió analítica de $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x<1 \\ \dfrac{x+1}{2} & 1\le x\le 2. \end{cases}$$

Ara

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 x\ dx+\int_1^2 \frac{x+1}{2}\ dx=\frac{1}{2}+\frac{5}{4}=\frac{7}{4}\text{ unitats quadrades.}$$

PROBLEMES

5.-

a) **[2,5 punts]**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\quad\Rightarrow\begin{cases} x-y+z & = & 1 \\ -2x+y+3z & = & 2 \\ -y+5z & = & 4 \end{cases}$$

Per tant els vectors $\vec{v}=(x,y,z)$ demanats han de ser les solucions del sistema anterior. Resolem el sistema. Fem-ho per Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat. Si fem servir *z* com incògnita secundària, la solució es pot expressar com

$$\begin{cases} x & = & 4z-3 \\ y & = & -4+5z \\ z & = & z \end{cases}$$

Els vectors $\vec{v}$ són els de la forma $(4t-3,-4+5t,t)$ amb $t\in R$.

Puntueu 1 punt pel plantejament del sistema i 1,5 punts per la resolució correcta.

b) **[1,5 punts]** Per tal que passi això que ens diuen, el sistema

$$\begin{cases} x-y+z &= a \\ -2x+y+3z &= b \\ -y+5z &= c \end{cases}$$

ha de ser incompatible.
Si tornem a reduir-lo per Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ -2 & 1 & 3 & b \\ 0 & -1 & 5 & c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 5 & 2a+b \\ 0 & -1 & 5 & c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 5 & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & c-2a-b \end{pmatrix}.$$

Per tal que el sistema sigui incompatible, $c-2a-b \neq 0$.
Per tant la resposta és afirmativa:
tots els vectors de la forma (a,b,c) amb $c \neq 2a+b$.

Puntueu 0,5 punts pel plantejament i l'argument que el sistema ha de ser incompatible. Puntueu 1 punt per la condició que compleixen a, b i c.

6.-

SOLUCIÓ.

a) **[1 punt]** Un punt qualsevol de *r* és $P(-3+2t,5-2t,3+t)$. La distància de *P* a *M* és (en funció del paràmetre *t*):

$$d(t) = \sqrt{(-5+2t)^2 + (2-2t)^2 + (-4+t)^2} = \sqrt{9t^2-36t+45} = 3\sqrt{t^2-4t+5}.$$

b) **[1 punt]** Resolem l'equació $d(t) = 3\sqrt{2}$:

$$3\sqrt{t^2-4t+5} = 3\sqrt{2} \quad \Rightarrow t^2-4t+5=2 \quad \Rightarrow t=1; \quad t=3.$$

Els punts són $A(-1,3,4)$; $B(3,-1,6)$.

c) **[1 punt]** El triangle és rectangle en *M* perquè els vectors $\vec{MA} = (-3,0,-3); \vec{MB} = (1,-4,-1)$ són perpendiculars:

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = (-3)\cdot 1 + 0\cdot(-4) + (-3)\cdot(-1) = 0.$$

Puntueu l'apartat bé si s'han equivocat a b) i els punts trobats fan que el triangle no sigui rectangle i ho raonen correctament.

d) **[1 punt]** Per calcular les coordenades de $C(a,b,c)$ hem de pensar que *M* és el punt mig del segment *AC*. Per tant

$$\begin{cases} \dfrac{-1+a}{2} &= 2 \\ \dfrac{3+b}{2} &= 3 \\ \dfrac{4+c}{2} &= 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=3 \\ c=10 \end{cases}$$

Procedint de la mateixa manera, podem calcular les coordenades de $D(m,n,p)$ fent que *M* sigui el punt mig del segment *BD*:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{3+m}{2} & = & 2 \\ \dfrac{-1+n}{2} & = & 3 \\ \dfrac{6+p}{2} & = & 7 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m=1 \\ n=7 \\ p=8 \end{array}\right.$$

Els punts demanats són $C(5,3,10)$ i $D(1,7,8)$.

Puntueu l'apartat correctament si fan els càlculs correctes amb els valors de A i B equivocats.