SÈRIE 4

Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals (ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar altres decimals per als diferents apartats i arrodonir després la suma). Aquestes pautes no pretenen planificar tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Hi haurà molts casos concrets, doncs, en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos en què les pautes siguin de difícil aplicació, feu prevaler sempre el vostre criteri i el sentit comú. Copieu la nota de la pregunta i en la casella i.

QÜESTIONS

1. Tenim un litre de llimonada que conté un 25% d'aigua i un 75% de suc de llimona. Si afegim un quart de litre d'aigua obtenim llimonada més aigualida. Calculeu el percentatge d'aigua i de suc de llimona de la llimonada més aigualida.

Puntuació: 2 punts.

Solució: El percentatge de suc de llimona que contindrà la llimonada aigualida serà:

$\boxed{\frac{0,75}{1+0,25}=\frac{3}{5}=0,6=60\%}$ i el percentatge d'aigua: $\boxed{\frac{0,25+0,25}{1+0,25}=\frac{2}{5}=0,4=40\%}$

2. Discutiu i, en el seu cas, resoleu el sistema següent segons els valors del paràmetre a:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 5 \\ x & + & y & = & a \\ 3x & + & 2y & = & 4 \end{array}\right.$$

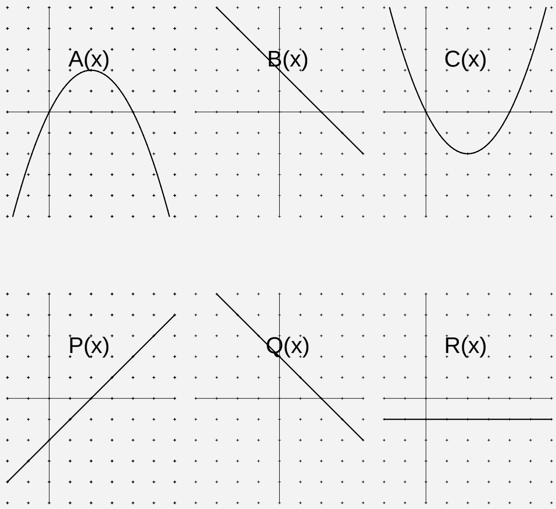
Puntuació: 2 punts. Les respostes sense raonar no puntuen.

Solució: Eliminant pel mètode de Gauss tenim:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 3 & 2a-5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2a-2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 \end{array}\right).$$

Per tant, $\boxed{\text{si } a \neq 1 \text{ el sistema és incompatible}}$. Altrament, per $\boxed{a=1 \text{ és compatible determinat, i la solució és } y=-1, x=2}$.

3. El dibuix representa les gràfiques de les tres funcions $A(x)$, $B(x)$ i $C(x)$ i de les seves derivades $P(x)$, $Q(x)$ i $R(x)$, no necessàriament en el mateix ordre.



Associeu cada funció $A(x)$, $B(x)$ i $C(x)$ amb la seva respectiva funció derivada $P(x)$, $Q(x)$ o $R(x)$. Raoneu la resposta.

Puntuació: Total: 2 punts. Les respostes sense raonar no puntuen.

Solució: $A(x)$ és creixent per $x<2$, té un màxim per $x=2$ i és decreixent per $x>2$. Per tant, la seva derivada és positiva, zero i negativa respectivament. Aquestes condicions només les compleix $Q(x)$.

El pendent de B(x) és constant i igual a -1. Per tant, la derivada de $B(x)$ és $R(x)$.

$C(x)$ és decreixent per $x<2$, té un mínim per $x=2$ i és creixent per $x>2$. Per tant, la seva derivada és negativa, zero i positiva respectivament. Aquestes condicions només les compleix $P(x)$.

4. Trobeu els valor de b i c per tal que la funció $f(x)=x^2+bx+c$ tingui un extrem relatiu en el punt $(-1,-4)$. Quin tipus d'extrem és?

Puntuació: 2 punts.

Solució: En primer lloc ha de ser $f(-1)=1-b+c=-4$. En segon lloc, la derivada $f'(x)=2x+b$ ha de complir $f'(-1)=-2+b=0$. Això dóna un sistema d'equacions que té solució $\boxed{b=2, c=-3}$. Per tant, la funció serà: $f(x)=x^2+2x-3$. Com que $f''(-1)=1>0$ el punt $(-1,-4)$ és un mínim.

PROBLEMES

5. Un curs de segon de batxillerat d'un Institut té un grup que està format per 20 noies i 10 nois, que volen organitzar un viatge de fi de batxillerat. A fi de recollir diners, troben una feina de fer enquestes. L'empresa contracta equips de joves per fer enquestes durant les tardes lliures que poden ser de dos tipus:

A: Parelles d'un noi i una noia.
B: Equips de 3 noies i 1 noi.

Paguen a 40 € la tarda pels equips A i a 90 € la tarda pels equips B.
Com els convé distribuir-se per obtenir la major quantitat possible de diners? Quina quantitat de diners obtindran per tarda treballada?

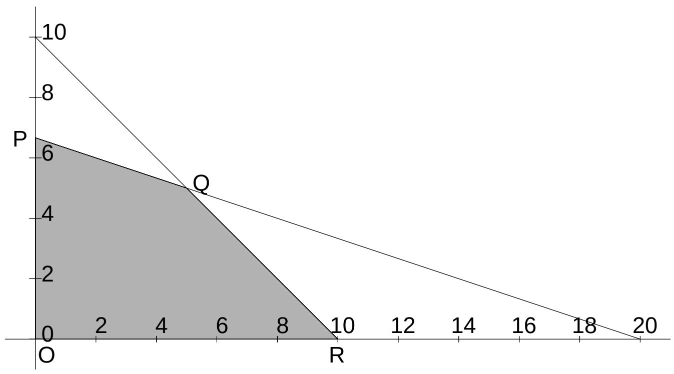
Puntuació: planteig 2 punts; resolució 2 punts. Total: 4 punts.

Solució: Denotem x en nombre de grups de tipus A i y el nombre de grups de tipus B. El sistema d'inequacions que impliquen les restriccions és:

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x + y \leq 10 \\ x + 3y \leq 20 \end{cases}$$

i la funció objectiu a maximitzar és $B(x, y) = 40x + 90y$.

El gràfic de la regió factible és:



El màxim s'obté en el contorn, i en particular en algun vèrtex. Determinem els punts d'intersecció. El punt Q és el punt d'intersecció de les rectes $x + y = 10$ i $x + 3y = 20$, i és $Q = (5,5)$. Fem la taula de valors:

	$P(0,20/3)$	$Q = (5,5)$	$R = (10,0)$	$O = (0,0)$
$B(x, y) = 40x + 90y$	600	650	400	0

Per tant obtindran guanys màxims fent 5 equips de tipus A i 5 equips de tipus B, i obtindran uns guanys de 650 €.

6. Un taller de confecció fabrica dos models de vestits. Per fer el model A es necessiten 2 m de teixit de color, 1 m de teixit blanc i 4 hores de feina. Per fer el model B es necessiten 2,5 m de teixit de color, 0,5 m de teixit blanc i 3 hores de feina. El taller disposa, cada dia, d'un màxim de 250 m de teixit de color, 100 m de teixit blanc i 380 hores de feina.

a) Anomeneu x i y el nombre de vestits del models A i B respectivament fets cada dia. Expresseu mitjançant un sistema d'inequacions les restriccions de la producció.
b) Representeu gràficament la regió del pla que satisfà les inequacions.
c) La venda d'un vestit del model A porta al taller un benefici de 5 € i la d'un vestit del model B de 4 €. Suposant que la producció diària es ven íntegrament, quants vestits de cada tipus cal fer per tal d'obtenir el màxim benefici? Quant val el benefici màxim?
d) En aquest últim cas, quin tipus de teixit sobrarà i en quina quantitat?

Puntuació: cada apartat 1 punt. Total: 4 punts.

Solució: a) Fem un quadre per resumir les dades.

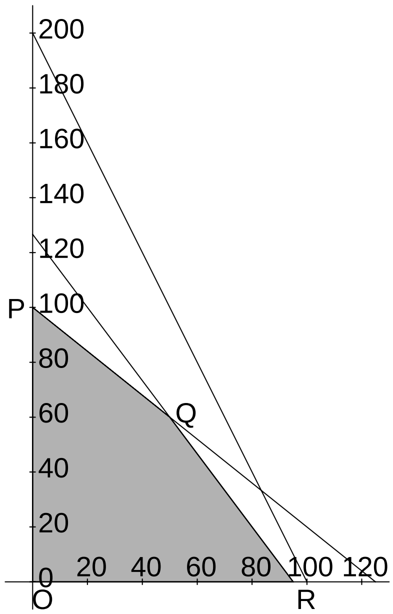
	Roba color	Roba blanca	Hores treball
x de A	2m	1m	4h
y de B	2,5m	0,5m	3h
Màxim	250m	100m	380h

Per tant el sistema d'inequacions que descriu les restriccions és:

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 2x + 2,5y \leq 250 \\ x + 0,5y \leq 100 \\ 4x + 3y \leq 380 \end{cases}$$

i la funció objectiu a maximitzar és $B(x, y) = 5x + 4y$.

b) El gràfic de la regió factible és:



c) Els màxims beneficis s'obtenen en el contorn i en particular en algun vèrtex. Determinem els punts d'intersecció. El punt Q és intersecció de les dues rectes $2x + 2,5y = 250$ i $4x + 3y = 380$ i és $Q(50,60)$. Fem el quadre de valors:

	$P(0,100)$	$Q(50,60)$	$Q(95,0)$	$O(0,0)$
$B(x,y) = 5x + 4y$	400	490	475	0

El benefici màxim s'obtindrà fabricant $\boxed{\text{50 vestits de tipus A i 60 vestits de tipus B}}$, amb un benefici total de $\boxed{\text{490 €}}$.

d) En aquest cas, s'haurà gastat $2 \cdot 50 + 2,5 \cdot 60 = 250$ m de teixit de color i per tant no en sobra gens, i $1 \cdot 50 + 0,5 \cdot 60 = 80$ m de teixit blanc i per tant $\boxed{\text{en sobren 20m de roba blanca.}}$