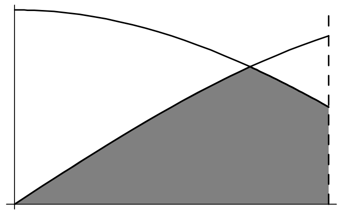
Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals (ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar altres decimals per als diferents apartats i després arrodonir la suma).

Aquestes pautes no pretenen planificar tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Hi haurà molts casos concrets, doncs, en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos en què les pautes siguin de difícil aplicació, feu prevaldre sempre el vostre criteri i sentit comú.

Qüestions

1. *a)* *Quin és l'angle x en radians $(0 < x < \frac{\pi}{2})$ tal que $\sin(x) = \cos(x)$?*

b) *Considereu les funcions $f(x) = \sin(x)$ i $g(x) = \cos(x)$. Calculeu la superfície del recinte delimitat superiorment per les gràfiques d'aquestes funcions, inferiorment per l'eix d'abscisses i lateralment per les rectes verticals $x = 0$ i $x = \frac{\pi}{3}$ representat en el esquema següent*



---

a) L'angle és $x = \pi/4$ amb $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$

b) La superfície que es demana és la suma d'integrals

$$\int_0^{(\pi/4)} \sin x\, dx + \int_{(\pi/4)}^{(\pi/3)} \cos x\, dx = [\quad \cos x]_0^{(\pi/4)} + [\sin x]_{(\pi/4)}^{(\pi/3)} = 1 \quad \sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(que té un valor aproximat de $0,4518$).

Compteu mig punt per la determinació del punt de tall de les dues gràfiques, és a dir, per l'apartat a). Compteu fins a 1 punt pel plantejament de la integral i el càlcul de les primitives i deixeu el mig punt restant pels càlculs finals. Intenteu valorar el segon apartat encara que el primer no estigui bé.

---

2. *La circumferència C passa pel punt $A = (4, 0)$ i és tangent a la recta $y = x$ en el punt $B = (4, 4)$.*

a) *Determineu l'equació de la recta que passa per B i pel centre de la circumferència C.*

b) *Trobeu el centre de C i calculeu el seu radi.*

---

a) La recta determinada pel punt B i el centre de la circumferència i la recta tangent a aquesta circumferència en el punt B són perpendiculars. Per tant, el pendent d'aquesta recta és   1 i la seva equació serà $y \quad 4 = \quad (x \quad 4)$ (passa per $B = (4, 4)$).

b) Els punts P que equidisten de A i B són els de la forma $P = (x, 2)$ per a qualsevol valor de x. Per tant, el centre de la circumferència està en la recta $y \quad 4 = \quad (x \quad 4)$ i és de la forma $(x, 2)$. Amb això obtenim que aquest centre ha de ser el punt $(6, 2)$. El radi r de la circumferència serà la distància d'aquest punt a A o B, que resulta $r = \sqrt{(6 \quad 4)^2 + (2 \quad 0)^2} = \sqrt{8}$

Compteu fins a 1 punt per cada apartat i resteu, en total, com a màxim mig punt per els possibles errors en els càlculs.

---

3. *Donats els punts de l'espai $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ i $C = (0, 0, 3)$.*

a) Determineu l'equació del pla π que els conté.

b) Calculeu l'equació de la recta r perpendicular al pla π i que passa per l'origen.

---

a) L'espai director del pla π està determinat pels vectors $B \quad A = (\quad 2, 1, 0)$ i $C \quad A = (\quad 2, 0, 3)$. L'equació del pla que passa per $A = (2, 0, 0)$ i té aquest espai director és

$$3x + 6y + 2z \quad 6 = 0$$

b) Un vector perpendicular al pla π és $(3, 6, 2)$. Les equacions de la recta amb aquest vector director que passa per l'origen son

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{6} = \frac{z}{2}$$

Compteu 1 punt per cada apartat, donant com a bones qualsevol de les diferents equacions que poden determinar el pla i la recta. Traieu com a màxim mig punt del total de 2 per errors de càlcul.

---

4. *Els tres costats d'un triangle mesuren 3 cm, 4 cm i 5 cm. Calculeu els seus angles i la seva àrea.*

El triangle és rectangle, ja que $5^2 = 3^2 + 4^2$, i l'angle recte és el que formen els costats de longitud 3 i 4. Tenint en compte l'anterior, el cosinus de l'angle α que formen el catet de longitud 4 amb la hipotenusa de longitud 5 serà

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

d'on $\alpha = 36,87^o$. De la mateixa manera podem deduir que el cosinus de l'angle β que formen el catet de longitud 3 amb la hipotenusa serà

$$\cos\beta = \frac{3}{5}$$

d'on $\beta = 53,13^o$

L'àrea del triangle es pot calcular prenent com a base 4 i com altura 3, de forma que el seu valor serà

$$\text{Àrea} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

El més probable és que trobeu que els angles es determinen aplicant el teorema del cosinus, sense observar que el triangle és rectangle fins al final dels càlculs. En aquests casos, valoreu el coneixement que es demostri sobre el mètode. Compteu fins a 1 punt per la determinació dels angles i deixeu l'altre punt per la determinació de l'àrea (aquí també hi pot haver diferencies significatives entre els que utilitzin el fet que el triangle és rectangle i els que no ho facin. En tot cas, valoreu com es determina l'altura del triangle). Teniu en compte també que, segons els arrodoniments que es facin servir en els càlculs, els resultats finals poden ser bastant discrepants i que, per tant, s'haurà de valorar principalment la correcció en els mètodes utilitzats.

Problemes

1. *Hem de fer un mapa d'una certa zona geogràfica. A, B i C són els cims de tres muntanyes de la mateixa alçària, de forma que les posicions de A i B són ben conegudes i ja estan representades en el mapa, mentre que la posició de C s'ha de determinar. Pugem a dalt del cim A i mesurem l'angle entre la línia A B i la línia A C, que és de 68^o. Pugem a dalt del cim B i aquí mesurem l'angle entre les línies B C i B A, que resulta ser de 35^o. En el mapa que tenim, la distància sobre el paper entre A i B és de 3 cm.*

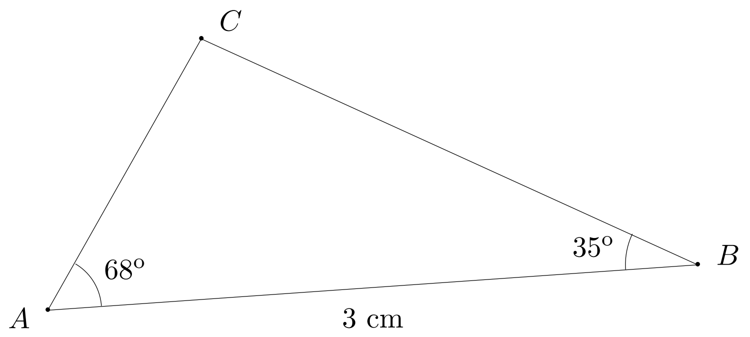
a) *Feu un diagrama de la situació i determineu quin angle formen en C les línies C A i C B.*

b) *Quines seran, sobre el mapa, les distàncies entre A i C i entre B i C?*

c) *Si el mapa és a escala 1:50000, calculeu la distància real entre els punts A, B i C.*

---

a) L'esquema del que es veu sobre el mapa és



L'angle d'aquest triangle en el vèrtex C serà

$$180^{\text{o}} \quad 68^{\text{o}} \quad 35^{\text{o}} = 77^{\text{o}}$$

b) Aplicat el teorema de sinus obtenim

$$BC = 3\frac{\sin 68^{\text{o}}}{\sin 77^{\text{o}}} \sim 2,8547 \text{ cm}$$
$$AC = 3\frac{\sin 35^{\text{o}}}{\sin 77^{\text{o}}} \sim 1,7659 \text{ cm}$$

c) Per a obtenir les distàncies real només s'ha de multiplicar per 50.000. S'obté

$$d(A,B) = 3 \times 50.000 = 150.000 \text{ cm} = 1,5 \text{ km}$$
$$d(B,C) \sim 2,8547 \times 50.000 \sim 142.736 \text{ cm} = 1,427 \text{ km}$$
$$d(A,C) \sim 1,7659 \times 50.000 \sim 88.299,58 \text{ cm} \sim 883 \text{ m}$$

Compteu 1 punt per l'apartat a), 2 punts per l'apartat b) i 1 punt per l'apartat c). En l'apartat b) valoreu sobretot el coneixement dels mètodes de resolució de triangles. Intenteu puntuar els apartats independentment i resteu com a màxim 1 punt per errors de càlcul en el total dels 4 punts.

---

2. *Considereu la funció:* $f(x) = \dfrac{x^2 \quad 2x}{2x^2 + 1}$

a) *Determineu les seves asímptotes.*

b) *Calculeu els intervals on creix i on decreix i els extrems relatius.*

c) *D'acord amb els resultats que heu obtingut, dibuixeu aproximadament la seva gràfica.*

d) *Fixant-vos en la gràfica anterior, expliqueu quina seria la gràfica de la funció* $g(x) = \quad f(x) + 3$ *(feu-ne un esquema). En quins punts té màxims la funció* $g(x)$*?*

---

a) Com que el denominador $2x^2 + 1$ no s'anul·la per a cap valor de x, no hi ha cap valor b per al que $\lim_{x \to b} f(x)$ sigui infinit. Per tant, no hi ha cap asímptota vertical.

Es té $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to \ \infty} f(x) = 1/2$. Per tant la recta $y = 1/2$ és asímptota horitzontal de la gràfica de $f(x)$ quan x tendeix a $+\infty$ i també quan x tendeix a ∞ .

b) Tenim

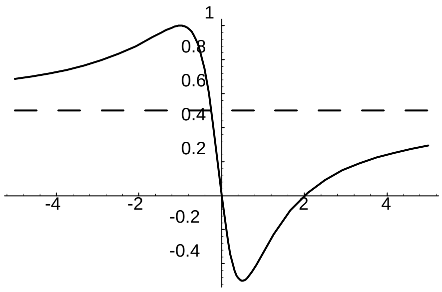
$$f'(x) = 2\frac{2x^2 + x \quad 1}{(2x^2 + 1)^2}$$

de forma que $f'(x) = 0$ per a $x = \quad 1$ i per a $x = 1/2$. Els signes de $f'(x)$ seran

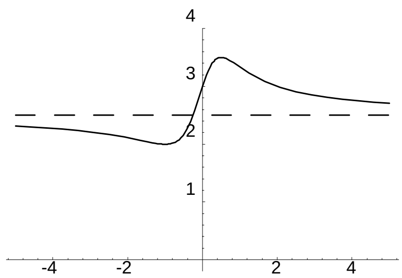
- Positiu quan $x < \quad 1$ (i $f(x)$ és creixent).
- Negatiu quan $\quad 1 < x < 1/2$ (i $f(x)$ és decreixent).
- Positiu quan $x > 1/2$ (i $f(x)$ torna a ser creixent).

A més, podem afirmar que hi ha un màxim local en el punt d'abscissa $x = \quad 1$ i un mínim local en el d'abscissa $x = 1/2$.

c) Les informacions que hem obtingut permeten deduir una gràfica per a $f(x)$ de la forma següent



d) Tenint en compte el canvi de signe i la translació que produeix la suma de 3 unitats, la gràfica de $g(x)$ serà de la forma



que tindrà per asímptota horitzontal la recta $y = \quad 3 + (1/2)$, un mínim local en $x = \quad 1$ i un màxim local en $x = 1/2$.

Compteu fins a 1 punt en cada apartat. En l'apartat a) compteu 1 punt si s'ha calculat l'asímptota horitzontal i s'ha explicat que no hi ha asímptotes verticals. En l'apartat c) valoreu principalment la coherència amb els resultats obtinguts en els apartats anteriors. En l'apartat d) teniu en compte que l'enunciat demana explícitament que la gràfica de $g(x)$ es dedueixi de la gràfica de $f(x)$, el que s'ha de valorar, doncs, és com es relacionen les gràfiques de $f(x)$ i $g(x)$ entre si. Procureu valorar cada un dels apartats el més independentment possible dels altres.
