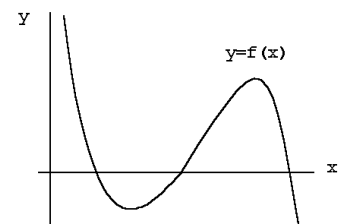




PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

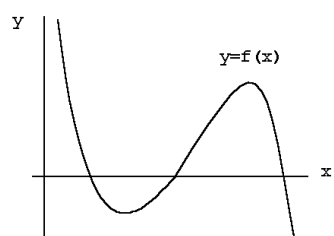
1. Donat el sistema d'equacions
$$\begin{cases} y+z = 2 \\ -2x+y+z = -1 \\ (2-2a)x+(2a-2)z = a-1 \end{cases},$$
- Discutiu les solucions del sistema segons els valors de a .
 - Feu una interpretació geomètrica de les solucions.
2. Sigui P_1 el punt $(1,0,-1)$, P_2 el punt simètric de P_1 respecte al pla $x-2y=0$ i P_3 el punt simètric de P_2 respecte al pla $x+2y+z=1$. Calculeu l'equació del pla que passa pels punts P_1 , P_2 i P_3 .
3. Si $f(x)=e^{a|x|}$, on a és un número real qualsevol...
- Representeu esquemàticament la funció $y=f(x)$ per als diferents valors de a
 - Calculeu la funció derivada $f'(x)$. Representeu-la esquemàticament per al cas $a>0$
4. En un trajecte de metro utilitzem dues escales mecàniques, A i B. L'escala A està avariada un de cada 10 dies; l'escala B, un de cada set. Les dues escales s'avarien independentment. En un viatge concret, calculeu quina probabilitat hi ha que...
- Com a mínim, hi hagi una escala avariada
 - No hi hagi cap escala avariada
 - Hi hagi exactament una escala avariada.
5. Calculeu quina àrea hi ha compresa entre les corbes $y=x^3$ i $y=\sqrt[3]{x}$ en el primer quadrant (x,y són positius).
6. a) Si la derivada d'una funció f és positiva a tot arreu, pot deduir-se que f és positiva? Raoneu la vostra resposta.
- b) Demostreu que tota funció polinòmica de tercer grau té com a mínim una arrel real.
7. a) Discutiu la posició relativa dels plans... $P_1: ax+by+az=0$ i $P_2: (a+3)x+(1/a)y+z=1$ segons els valors de a ($a \neq 0$).
- b) Quan els plans siguin paral·lels, calculeu quina distància hi haurà entre els dos plans.
8. Considereu la corba $y=\frac{1}{x}$ i la circumferència que està centrada a l'origen i que té un radi de $\sqrt{\frac{17}{4}}$. Calculeu quina àrea hi ha compresa entre les dues corbes en el primer quadrant (x,y són positius).
9. En la figura hi ha un esquema del gràfic de la funció $y=f(x)$
- En el vostre full de respostes, feu un esquema on apareguin conjuntament els gràfics de $y=f(x)$ i el de la funció $y=f(2x)$
 - Feu un esquema on apareguin conjuntament els gràfics de $y=f(x)$ i el de la funció derivada $y=f'(x)$. Expliqueu en què us baseu per a construir els esquemes.



PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

10. A i B són dos esdeveniments qualsevol amb probabilitat $\Pr(A)$ i $\Pr(B)$, respectivament.
- a) Digueu si és certa o falsa l'afirmació següent (raoneu la resposta): La probabilitat que esdevingui exactament un dels dos (A o B però no tots dos simultàniament) es $\Pr(A)+\Pr(B)-2\Pr(AB)$
- b) Expliqueu amb algun exemple quina diferència hi ha entre *esdeveniments independents* i *esdeveniments disjunts*.
11. Tenim set calaixos numerats de l'u al set i set fulls de paper numerats també de l'u al set. El full número 1 està inicialment al calaix número 1; el full 2, al calaix 2; etc. Traiem el full 1 del seu calaix, però després algú el torna a posar en un calaix qualsevol a l'atzar. Després traiem un full del calaix 2. Quina probabilitat hi ha que aquest full sigui el número 2? Expliqueu bé el perquè de la vostra resposta.
12. Calculeu la funció $f(x)$ que compleix $f(0)=1$, $f'(x)=e^x \cos x$ (utilitzeu dues vegades la fórmula d'integració per parts).
13. Considereu la recta r de \mathbf{R}^3 de vector director $(1,1,0)$ que passa per l'origen. Escriviu les equacions paramètriques de totes les rectes que passen per l'origen, que estan contingudes al pla $x-y=0$ i que formen, a més, un angle de 60 graus amb r .
14. Calculeu els màxims, els mínims i els intervals de creixement i de decreixement de la funció $f(x)=x^3-3x+K$ en què K és una constant real. Després digueu per a quins valors de K l'equació $f(x)=0$ té tres solucions reals diferents.
15. Discuti el sistema d'equacions següent segons els valors del paràmetre λ :
- $$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ 4x + \lambda y + 2z = \lambda \\ 8x + 4y + 2\lambda z = 2\lambda \end{cases}$$
16. Tres poblacions A, B i C estan comunicades per autobusos de línia regular. Qualsevol conductor de la companyia que fa aquest servei, quan està a A, té la mateixa probabilitat de conduir l'autobús que vagi a B que la de conduir un autobús que vagi a C; quan està a B té una probabilitat d' $\frac{1}{3}$ de conduir un autobús que vagi a A i una probabilitat de $\frac{2}{3}$ de conduir-ne un que vagi a C; quan està a C la probabilitat és la mateixa tant perquè vagi a A com perquè vagi a B. Calculeu quina probabilitat té qualsevol conductor que estigui a A de fer un trajecte que torni a A sense haver passat dues vegades per cap de les altres ciutats.
17. Quina és l'àrea més gran que pot tenir un rectangle de costats paral·lels als eixos de coordenades inscrit a l'el·lipse d'equació $4x^2+y^2=1$?
18. Determineu λ perquè existeixi un pla que contingui a la recta següent:
- $$\begin{cases} x - 2y - 6z = 1 \\ 2x - 2y - 3z = 6 \end{cases}$$
- i que sigui perpendicular al vector $(-6, 8, \lambda)$. Expliqueu bé el perquè de la vostra resposta.

PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

19. Calculeu l'àrea del recinte de \mathbf{R}^2 limitat pels gràfics de les dues funcions següents: $f(x)=x^3-2x$, $g(x)=x^2$, quan considerem només valors de $x \leq 0$.
20. Calculeu els intervals de creixement i de decreixement, els màxims i els mínims de la funció següent: $f(x)=x^2 e^{\frac{x}{1000}}$. Després feu-ne un esquema senzill del gràfic.
21. Una fàbrica de retoladors en fabrica de blaus i de vermells en la mateixa proporció. Per defectes en el procés de fabricació, alguns retoladors surten amb la mateixa tinta de l'altre color. Sabem que el percentatge de retoladors blaus que porten la tinta blava és del 82% i que el dels vermells que porten la tinta vermella és del 92%.
- a) Calculeu quina probabilitat hi ha que un retolador agafat a l'atzar tingui la tinta del color que li pertoca.
- b) Si sabem que un retolador escollit a l'atzar és defectuós, calculeu quina probabilitat hi ha que escrigui en vermell.
22. Determineu el valor de k que fa que la funció $f(x)=\frac{e^x}{x^2+k}$ tingui un sol extrem relatiu. Es tracta d'un màxim o d'un mínim? Per a quins valors de k la funció és contínua a tot arreu?
23. Considereu una funció f , contínua, definida a tots els números reals i que té inversa f^{-1} . Sabent que els gràfics de f i de f^{-1} es tallen en algun punt x es compleix $f(x)=x$. (Indicació: considereu la funció $g(x)=f(x)-x$ i utilitzeu algun teorema de continuïtat).
24. En la figura hi ha un esquema del gràfic de la funció $y=f(x)$.
- a) En el vostre full de respostes, feu un altre esquema on aparegui el gràfic de la funció $y=-f(x)$
- b) En el vostre full de respostes, feu un esquema on apareguin conjuntament el gràfic de $y=f(x)$ i el de $y=2f(x)$.
Expliqueu en què us baseu per a construir els esquemes.
- 
25. Busqueu tots els valors de m que fan que el sistema següent sigui compatible.
- $$\begin{cases} x-my = 1 \\ 2x+my = m \\ x+y = 2 \end{cases}$$
26. Calculeu el valor de c ($c > 0$) per tal que l'àrea limitada per la corba $y=-x^3+c^3$ i les rectes $y=0$, $x=0$ sigui igual a 3.
27. a) La inversa d'una matriu A és aquella matriu B tal que $AB=BA=I$ (on I és la matriu identitat). Trobeu la matriu inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- b) Digueu si l'afirmació següent és certa o falsa, i raoneu la resposta. Dues rectes de l'espai que no es tallen en cap punt són paral·leles.
28. a) Calculeu els valors de k que fan que la funció $f(x)=\frac{2x^2}{(kx+1)^2}$ tingui límit 2 quan $x \rightarrow +\infty$.
- b) Digueu si l'afirmació següent és certa o falsa, i raoneu la resposta.

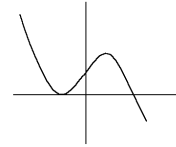
PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

Si una funció és creixent a l'esquerra de x_0 i decreixent a la dreta, ha de tenir un màxim en x_0 .

29. En una capsa hi ha 10 boles, tres de blanques i set de negres. Es fan dues extraccions sense reposició. Sabent que a la segona extracció s'ha obtingut una bola blanca, calculeu la probabilitat que la bola de la primera extracció hagi estat també blanca.
30. Calculeu el valor de k per tal que els vectors $(1, 2, -1, 1)$, $(1, -1, 1, 1)$ i $(2, 5k, -3k, 2)$ siguin linealment dependents.
31. Determineu si la corba $y = x^2 - 2x + 2$ i la recta $y = 2x - 2$ són tangents en algun punt. Cas que ho siguin, determineu aquest punt. Talla la recta en algun altre punt la corba?
32. a) Doneu un exemple de funció $y = f(x)$ que tingui un sol màxim i un sol mínim locals. Justifiqueu la resposta.
b) Raoneu la certesa o falsedat de l'afirmació següent: Dues funcions amb idèntica funció derivada són necessàriament idèntiques.
33. Un valor propi d'una matriu A és un nombre k tal que el determinant de $A - kI$ (on I és la matriu identitat) és igual a zero. A partir d'aquesta definició, trobeu els valors propis de la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
34. Tirem un dau sis vegades. Quina és la probabilitat d'aconseguir com a mínim un as? (Un as és el mateix que cara 1). Justifiqueu la resposta.
35. Discutiu el sistema d'equacions $\begin{cases} (m-1)x + (m-1)y = m \\ mx + (m+1)y = m-1 \end{cases}$ segons els valors de m i resoleu el sistema quan sigui possible.
36. Determineu les zones de creixement i de decreixement de la funció següent:
 $f(x) = (x-2)^2(x+1)$.
37. a) Suposant que A , B i C són matrius quadrades del mateix ordre, demostreu que si A commuta amb B i amb C (o sigui, $AB = BA$ i $AC = CA$), llavors A commuta amb la matriu $M = B - C$.
b) Trobeu l'equació del pla que passa per $(0, 0, 0)$ i és perpendicular a la recta que passa pels punts $(1, 0, 1)$ i $(-1, 2, -1)$.
38. a) Doneu un exemple de funció $y = f(x)$ que sigui sempre decreixent i tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -5$.
b) Calculeu els valors de a i b perquè la funció $f(x) = a + be^{-x}$ verifiqui $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, $f(0) = 4$.
39. En una caixa tenim vuit boles, tres blanques numerades de l'1 al 3 i cinc negres numerades de l'1 al 5. Es tria una bola a l'atzar, i es consideren els esdeveniments següents:
a) bola blanca - b) número més petit o igual que 2.
Són els esdeveniments A i B independents? Calculeu $P(B/A)$. Justifiqueu les respostes.
40. Si els vectors \vec{u} , \vec{v} i \vec{w} són linealment independents, demostreu que $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$ i \vec{w} són també linealment independents.

PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

41. Donada la funció que té la gràfica adjunta, representeu esquemàticament el gràfic de la seva funció derivada. Expliqueu el procediment utilitzat.



42.a) La inversa d'una matriu A és una altra matriu B tal que $AB=BA=I$ (a on I és la matriu identitat). Per quins valors de a la matriu $\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és inversa d'ella mateixa?

b) Justifiqueu la següent afirmació: El determinant $\begin{vmatrix} -\cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{vmatrix}$ no depèn del valor de t.

43.a) Doneu un exemple de funció $y=f(x)$ que sigui sempre creixent i tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$.

b) Trobeu l'equació de la recta tangent a la corba $y = \frac{x-1}{x^2+1}$ en el punt d'abscissa $x=1$.

44. Fem dues extraccions amb reposició d'una caixa que conté quatre boles numerades de l'1 al 4. Quina és la probabilitat que la bola marcada amb el 2 surti com a mínim una vegada?

45. Trobeu els punts situats sobre la recta d'equacions paramètriques següents: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda - 1 \\ z = -\lambda + 1 \end{cases}$ i que disten $\frac{\sqrt{6}}{3}$ del pla $x+2y+z=5$.

46. Feu un esquema senzill del gràfic de la funció $f(x) = x \ln(1037x) - 1$ per a $x > 0$ i expliqueu de manera raonada per què l'equació $x \ln(1037x) = 1$ només té una solució per a $x > 0$.

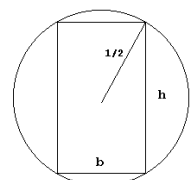
47. Calculeu el volum de la figura de revolució que obtenim si fem girar al voltant de l'eix de les x el gràfic de la funció $f(x) = \sin x + \cos x$, quan està comprès entre $-\frac{\pi}{4}$ i $\frac{3\pi}{4}$.

48. Les dades de votants en les últimes eleccions corresponents a una determinada ciutat mostren que el 73,5% dels homes censats van exercir el seu dret a vot, mentre que el percentatge de dones censades que ho van fer va ser del 57,1%. El cens d'aquesta ciutat està compost per un 48% d'homes i un 52% de dones. Entre les persones censades n'escollim una a l'atzar. Calculeu les probabilitats perquè aquesta persona: a) Hagi votat. -b) Hagi votat i sigui home. -c) Sabent que ha votat, sigui dona.

49. Calculeu, entre tots els triangles rectangles d'hipotenusa 1, les dimensions del que té l'àrea més gran.

50. Quantes rectes hi ha a \mathbf{R}^2 que passin pel punt $(-\frac{5}{4}, 1)$ i que siguin tangents a la corba $y = \frac{1}{x}$? Trobeu-les totes.

51. La resistència de flexió d'una biga de secció rectangular és directament proporcional a la base i directament proporcional, també, al quadrat de l'alçària d'aquesta secció. Calculeu les dimensions que ha de tenir la secció rectangular d'una biga fabricada a partir del tronç



PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

cilíndric d'un arbre que fa un metre de diàmetre per tal que tingui una resistència de flexió màxima.

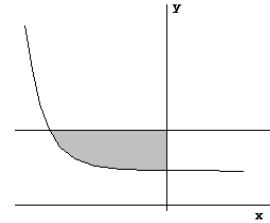
52. Discutiu el sistema d'equacions següent segons els valors del paràmetre λ :

$$\begin{cases} x+y+z = 1 \\ \lambda x+18y+9z = 3 \\ x+2\lambda y+3z = 1 \end{cases}$$

53.

Calculeu l'àrea del recinte limitat per les

corbes següents: $y = \frac{1}{+\sqrt{x+4}}$; $y=1$; $x=0$.



54. Entre tots els plans que passen per la recta següent: $\begin{cases} x+2y+6z = 5 \\ x-y-z = -1 \end{cases}$

trobeu l'equació cartesiana del que és paral·lel al pla $3x+4z=4$ (l'equació cartesiana d'un pla és aquella que té la forma $ax+by+cz=d$). Calculeu també la distància entre aquests dos últims plans (el pla que heu trobat i el pla $3x+4z=4$).

55. Busqueu l'equació del pla que conté la recta $\frac{x-1}{2} = y = \frac{z-1}{2}$ i passa pel punt $(-1, 2, 1)$.

56. Trobeu el valor de k (>0) tal que el cos de revolució generat per la corba $y=kx^2$, $0 \leq x \leq 1$, al girar al voltant de l'eix abscisses sigui igual a 1

57. a) Busqueu l'equació de la recta tangent a la corba $y=\ln(x^2+1)$ en el punt d'abscissa $x=0$.

b) Busqueu la matriu X que verifica $AX=B$, on $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

58. a) Calculeu el valor de k a fi que la funció $f(x) = xe^{-kx}$ tingui un extrem relatiu a $x=1$.

b) Doneu un exemple de funció $y=f(x)$ que verifiqui $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = +\infty$. Justifiqueu la resposta.

59. Tirem sis vegades dos daus. Quina és la probabilitat d'aconseguir com a mínim un as doble? (As doble vol dir que les dues cares dels daus siguin 1). Justifiqueu la resposta.

60. Sigui $f(x) = kx^2 + 2$. Calculeu el valor de k per tal que la tangent al gràfic de la funció a $x=3$ passi pel punt $(0, 4)$.

61. Donats els plans d'equacions $ax-2z=15$, $2x+y+z=-7$, $x+y+az=-8a$,

a) Determineu els valors de a pels quals els tres plans passen per una recta.

b) En aquest cas, determineu dos punts d'aquesta recta.

62. Donada la corba $y = \frac{2}{x} + \ln(x^2)$

PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

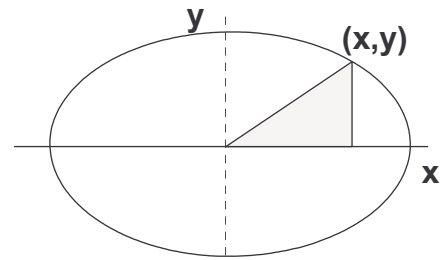
- a) Busqueu el punt M de la corba en el qual la tangent és paral·lela a l'eix de les abscisses.
- b) Busqueu el punt d'inflexió I.
- c) Busqueu l'àrea del triangle que té per vèrtexs els punts M, I i la intersecció J de les tangents a la corba en els punts M i I.
63. En un sistema de coordenades rectangulars tenim la família de rectes $y=2ax+a^2$ i el punt P de coordenades $(1/2,2)$.
- a) Esbrineu si hi ha rectes de la família que passin pel punt P.
- b) Comproveu que hi ha rectes de la família que estan a una distància més gran que 1000 del punt P.
- c) Determineu les rectes de la família que estan a una distància mínima del punt P.
64. Es tenen dos daus, un de normal i l'altre trucat. En aquest últim dau hi ha 4 uns i 2 dossos. S'elegeix un dau a l'atzar i es tira dues vegades. a) Digueu quina és la probabilitat d'obtenir un 1 a la primera tirada i un 2 a la segona. b) Sabent que el resultat que ha sortit a la primera tirada ha estat un 1, i el que ha sortit a la segona ha estat un 2, calculeu la probabilitat que s'hagi escollit el dau trucat.
65. Considereu la funció $f(x)=ae^{2x}+bx^2$. Determineu el valor de les constants a i b sabent que $f(x)$ té un punt d'inflexió en $x=0$, que la tangent a la gràfica de $f(x)$ en aquest punt d'inflexió té pendent positiu, i que l'angle entre aquesta tangent i l'eix de les x és de 45 graus (expliqueu detalladament tot el que feu).
66. Donat el sistema lineal
$$\left. \begin{array}{l} ax-y-z = -a \\ x+ay+az = a \\ x+y+z = -1 \end{array} \right\}$$
- a) Determineu els valors de a pels quals el sistema té solució.
- b) Doneu una interpretació geomètrica de les solucions del sistema.
67. Donada la funció $y=x^3-\ln(x^3)$
- a) Busqueu els màxims i mínims.
- b) Dibuixeu la gràfica de la funció.
68. En un sistema de coordenades rectangulars tenim la família de rectes r:
- $$\left. \begin{array}{l} \frac{x-3}{a} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3} \\ \text{i la recta s: } \end{array} \right\} \begin{array}{l} x+y+z = 1 \\ x+y-z = -1 \end{array}$$
- a) Determineu les dues rectes de la família r que fan un angle de 60° amb la recta s.
- b) Determineu l'angle d'aquestes dues rectes de la família r.
69. Tenim dues urnes A i B amb 50 boles a cada una, a l'urna A n'hi ha a de blanques i les altres són negres, a l'urna B n'hi ha a de negres i les altres són blanques. Sigui P_1 la probabilitat de treure una bola blanca de B després d'haver-hi posat una bola de A, sigui P_2 la probabilitat de treure una bola blanca de A després d'haver-hi posat una bola de B.
- a) Comproveu $\frac{1}{51} \leq P_1 \leq \frac{50}{51}$; $\frac{1}{51} \leq P_2 \leq \frac{50}{51}$

PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

- b) Comproveu $P_1 + P_2 = 1$.
- c) Comproveu que si $P_1 < P_2$, aleshores $\frac{1}{2} < P_2 \leq \frac{50}{51}$; $\frac{1}{51} \leq P_1 < \frac{1}{2}$
70. Donada la corba $y = \frac{1}{x^2} + \ln(x^2)$
- a) Busqueu els dos punts d'inflexió de la corba.
- b) Busqueu la distància entre aquests dos punts.
71. Donades les rectes d'equacions $\left. \begin{array}{l} ay - 2z = a - 4 \\ 2x - 3y = 3 \end{array} \right\}$ i $\left. \begin{array}{l} 3y - az = 3 - 2a \\ ax - 3y = 3 \end{array} \right\}$
- a) Busqueu els valors de a pels quals les dues rectes es tallen.
- b) Busqueu, en aquest cas, una equació del pla que conté les dues rectes.
72. Busqueu el pla que passa pel punt $(2, 2, 2)$, és paral·lel a la recta $\frac{x - \sqrt{2}}{2} = \frac{y - \sqrt{3}}{3} = \frac{z - \sqrt{5}}{5}$ i és perpendicular al pla $2x - 3y + 4z = \sqrt{17}$.
73. Dibuixeu la gràfica de la funció $y = \frac{x^5 + 1}{x^2}$.
74. Busqueu totes les solucions del sistema $\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ 3x + 4y + 3z = 0 \end{array} \right.$ i doneu una interpretació geomètrica d'elles.
75. Calculeu l'àrea del tros de pla comprès entre la corba $y = x^3 + x$ i la recta $y = 2x$.
76. Determineu la projecció ortogonal del punt de coordenades $(1, 1, 1)$ sobre el pla d'equació $3x + 2y + 3z = 4$.
77. Busqueu l'àrea del tros de pla comprès entre la corba $y = x^4 - x^2$ i la recta $y = 0$.
78. Busqueu els valors de a perquè els tres plans d'equacions $ax + y + z = 1$, $x + ay + z = 2$, $x + y + az = 3$ són mútuament perpendiculars. Busqueu també la intersecció d'aquests tres plans.
79. La corba $y = ax^3 + bx^2 + c$ té un punt d'inflexió en el punt de coordenades $(1, 1)$ i la tangent en aquest punt forma un angle de 45° amb l'eix de les x . Busqueu els màxims i els mínims d'aquesta corba.
80. Busqueu el pla que passa per la recta d'equacions $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-7}{5}$ i és perpendicular al pla d'equació $x + y + z = 17$.
81. Expliqueu, de la manera més senzilla possible, què vol dir que un sistema d'equacions lineals sigui compatible, i què vol dir que sigui indeterminat (no utilitzeu a l'explicació rangs de matrius). Digueu si un sistema incompatible pot ser determinat i/o indeterminat. Raoneu la resposta.
82. Calculeu la probabilitat que la suma de punts obtinguts en tres llançaments consecutius d'un dau sigui 5.
83. Considereu la recta de \mathbf{R}^3 d'equacions $\left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 2z = 3 \\ x + y - 4z = 3 \end{array} \right.$. Trobeu tots els punts de la recta donada, tals que la seva distància a l'origen de coordenades és $\sqrt{14}$.

PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

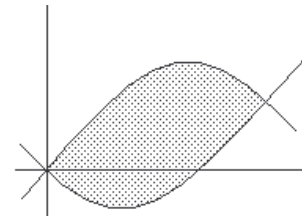
84. Considereu a \mathbf{R}^2 un triangle rectangle de vèrtexs $(0,0)$, $(x,0)$ i (x,y) , amb $x>0$ i $y>0$, i amb el vèrtex (x,y) sobre l'el·lipse d'equació $x^2+2y^2=2$, tal com s'indica a la figura. Calculeu quin ha de ser el punt (x,y) perquè el triangle rectangle tingui àrea màxima.



85. Determineu els coeficients a i b de la paràbola $y=ax^2+bx+2$, sabent que la recta tangent en el punt en què $x=1$ és la recta $y=-2x$.

86. Considereu una recta de \mathbf{R}^3 d'equacions $\begin{cases} ax+by+cz = d \\ a'x+b'y+c'z = d' \end{cases}$. Considereu també un pla de \mathbf{R}^3 d'equació $a''x+b''y+c''z=d''$. Digueu què significa geomètricament que el sistema que s'obté unint les dues equacions sigui incompatible. Digueu què significa geomètricament que el sistema sigui compatible i indeterminat. Raoneu les respostes.

87. Calculeu l'àrea del recinte de \mathbf{R}^2 limitat per les dues paràboles d'equacions $y=x^2-2x$ i $y=-x^2+4x$.



88. Una fàbrica produeix tres tipus diferents de bolígraf, A, B i C. El nombre d'unitats produïdes de cada un d'ells és el mateix (un terç del total). Malgrat tot, surten defectuosos un 15 per mil de tots els del tipus A, un 3 per mil de tots els del tipus B, i un 7 per mil de tots els del tipus C. En un control de qualitat es detecten el 70% de tots els bolígrafs defectuosos de tipus A, el 80% dels del tipus B, el 90% dels del tipus C. Els bolígrafs defectuosos detectats en aquest control es llançan. Si es treu a l'atzar un d'aquests bolígrafs defectuosos que s'han llançat, calculeu la probabilitat que sigui del tipus A.

89. Considereu dos plans de \mathbf{R}^3 d'equacions respectives $ax+by+cz=d$ i $a'x+b'y+c'z=d'$. Digueu com ha de ser el sistema format per aquestes dues equacions per tal que els dos plans siguin paral·lels (compatible, incompatible, indeterminat...?). Digueu quina relació han de complir els coeficients $a, b, c, d, a', b', c', d'$ per tal que això succeeixi. Raoneu la resposta.

90. Considereu el con que s'obté en fer girar sobre l'eix de les x el triangle de \mathbf{R}^2 de vèrtexs $(0,0)$, $(0,r)$ i $(h,0)$, on r i h són nombres positius donats. Demostreu que el seu volum és $\pi r^2 h/3$.

91. Trobeu el domini de definició, els límits quan $x \rightarrow \infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$, els zeros, les asímptotes i els intervals de creixement i decreixement de la funció: $f(x) = \frac{x^2 - x}{8x^2 + 1}$. Dibuixeu després un esquema senzill del seu gràfic.

PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

92. Tenim dues urnes amb boles blanques i negres. La primera conté 3 boles blanques i 5 de negres. La segona conté 4 boles blanques i 3 de negres. Es treu a l'atzar una bola de la primera urna i es posa a la segona. Després es treu a l'atzar una bola de la segona urna i es posa a la primera. Finalment es treu una bola de la primera urna. Calculeu la probabilitat que sigui blanca.

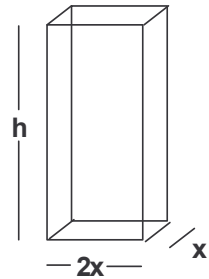
93. Expliqueu de manera concisa el concepte de derivada d'una funció en un punt. Expliqueu la relació que hi ha entre aquest concepte i la recta tangent al gràfic de la funció en un punt. Calculeu finalment la recta tangent a la paràbola $y=x^2$ en el punt $(2,4)$.

94. Considereu la recta de \mathbf{R}^3 d'equacions $\begin{cases} x-y-3z = 1 \\ x-3y+z = 5 \end{cases}$. Digueu si el punt $(6,2,2)$ es troba o no sobre la recta paral·lela a l'anterior que passa per l'origen. Raoneu la resposta.

95. Discutiu el sistema d'equacions següent, segons els valors del paràmetre λ :

$$\begin{cases} x-y+z = 5 \\ \lambda x+y+2\lambda z = 1 \\ 2\lambda x+2y-3z = 5\lambda+1 \end{cases}$$

96. Considereu un prisma recte de base rectangular, amb dos dels costats d'aquest rectangle de longitud doble que els altres dos, tal com s'indicava a la figura. Trobeu les dimensions que ha de tenir aquest prisma per tal que la seva àrea total sigui 12 metres quadrats i que amb aquestes condicions tingui volum màxim.



97. Es té una baralla espanyola completa (48 cartes) i una altra baralla de 4 cartes espanyoles on només hi ha els quatre reis. S'agafa a l'atzar una carta de la baralla de 4 cartes i s'introdueix a la baralla completa. Després es treu a l'atzar una carta d'aquesta última baralla. Calculeu la probabilitat que sigui el rei d'espases.

98. Fent el canvi de variable $u=e^x$, calculeu la integral $\int_{\ln(\pi/2)}^{\ln\pi} e^x \sin e^x dx$

99. Considereu la recta de \mathbf{R}^3 d'equacions $\begin{cases} 2x+(a-5)y-2z = 3a-13 \\ ay-2z = 3a \end{cases}$

Determineu a per tal que existeixi un pla que contingui aquesta recta i que sigui perpendicular al vector $(1,1,1)$. Escriviu l'equació cartesiana d'aquest pla.

100. Trobeu el domini de definició, els límits quan $x \rightarrow \infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$, les asímptotes, els intervals de creixement i decreixement, i els zeros de la funció: $f(x) = \frac{xe^x}{x+4}$. Dibuixeu després un esquema senzill del seu gràfic.

101. Expliqueu el concepte d'assíptota obliqua d'una funció i digueu com es pot calcular una tal assíptota, en el cas que existeixi.

PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

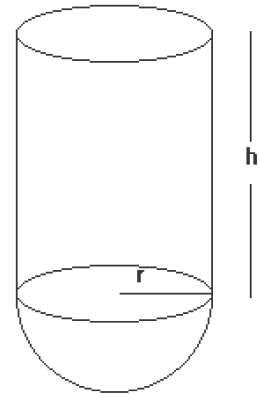
102. Sigui $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una funció derivable. Si us diuen que la derivada de f s'anul·la en un punt a , podríeu afirmar que f té necessàriament un màxim o un mínim relatiu en el punt a ? Si ara us diuen que la derivada de f és negativa en tots els punts $x < a$ i positiva en tots els punts $x > a$, podríeu afirmar que f té un màxim relatiu en el punt a ? I un màxim absolut? I un mínim relatiu? I un mínim absolut? Raoneu les respostes.

103. Expliqueu el concepte de *probabilitat condicionada* i el concepte d'*esdeveniments independents*. Poseu algun exemple que aclareixi les vostres explicacions.

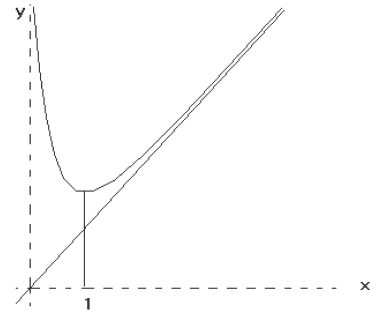
104. Discutiu el sistema d'equacions següent, segons els valors del paràmetre

$$\lambda: \begin{cases} \lambda x + y + 4z = 1 \\ -x - \lambda y + 2z = \lambda \\ x - 2\lambda y + 14z = 8 \end{cases}$$

105. Considereu un dipòsit constituït per una semiesfera de radi r a la qual s'ha afegit un cilindre circular del mateix radi r i d'altura h , tal com s'indica a la figura. Calculeu r i h de manera que l'àrea total de les parets i de la tapa sigui de 5 metres quadrats i tingui volum màxim. (La tapa és un disc de radi r que es col·loca sobre el cilindre. Recordeu que l'àrea d'una esfera de radi r és $4\pi r^2$ i el seu volum és $\frac{4\pi r^3}{3}$. L'àrea lateral del cilindre és $2\pi rh$).



107. Tenim una funció derivable $f(x)$ definida en el domini de les $x > 0$, de la qual l'única cosa que sabem és que el seu gràfic és aproximadament el que s'indica a la figura (l'eix de les y és asymptota vertical, la recta d'equació $y=x$ és asymptota obliqua i té un mínim en el punt



106 d'abscissa $x=1$). Feu un esquema senzill del gràfic de la funció derivada $f'(x)$ tot explicant molt raonadament la resposta.

108. Calculeu la integral $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx$ (Podríeu assajar el canvi $u = \sqrt{e^x+1}$)

109. Expliqueu com es calcula el rang d'una matriu. Calculeu el rang de la

$$\text{matriu} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Podríeu afegir una columna a la matriu anterior de

manera que la nova matriu tingués rang 3? I rang 2? Raoneu les respostes.

110. Considereu una piràmide recta que té per base un hexàgon regular d'1 centímetre de costat. L'altura d'aquesta piràmide mesura també 1 centímetre. Digueu a quina distància de la base s'ha de situar un punt P

PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

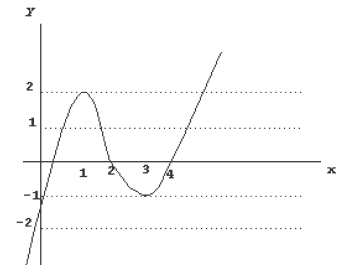
sobre l'altura per tal que la suma de distàncies de P als set vèrtexs de la piràmide sigui mínima.

111. Determineu el valor de a per al qual el pla P de \mathbf{R}^3 d'equació $x+y+z=1$ és paral·lel a la recta $\begin{cases} 3x+2y+az = 5 \\ 2x+y-z = 3 \end{cases}$ Escriviu després l'equació del pla que conté aquesta recta i és paral·lel al pla P .

112. Trobeu el domini de definició, els límits quan $x \rightarrow \infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$, i els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x) = \frac{x^2+3x}{x-1}$ Dibuixeu un esquema senzill del gràfic d'aquesta funció.

113. Considereu la recta r de \mathbf{R}^3 d'equacions $\begin{cases} x = z \\ y = 1 \end{cases}$ i la recta r' d'equacions $\frac{x-1}{2} = y-1 = \frac{z-1}{a}$ on a és una constant. Aquestes dues rectes es tallen en el punt $(1,1,1)$ ja que aquest punt compleix les equacions de les dues rectes. Determineu els valors de a que fan que r i r' es tallin en aquest punt formant un angle de 30 graus.

114. Tenim una funció $y=f(x)$ de la qual l'única cosa que sabem és que el seu gràfic és aproximadament el que s'indica a la figura. Feu un esquema senzill del gràfic de la funció $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. Raoneu molt detalladament la resposta.



115. Calculeu la integral $\int \frac{dx}{x^2+x-2}$

116. Determineu els coeficients a, b i c de la funció $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ per tal que aquesta funció tingui un màxim relatiu en el punt en què $x=0$, tingui un mínim relatiu en el punt en què $x=1$ i compleixi la condició $f(1) = -1/2$.

117. Discussiu el sistema d'equacions següent, segons els valors del paràmetre

$$\lambda: \begin{cases} x+y+z = 3 \\ \lambda x - 2y - z = -2 \\ 5x - 3y + (1-\lambda)z = -1 \end{cases}$$

118. El 80% dels estudiants de COU han escollit l'anglès com a idioma estranger, el 15% han escollit francès i el 5% han escollit altres idiomes. El 24% d'estudiants de COU cursen anglès i matemàtiques. El 10,5% d'estudiants de COU cursen francès i no cursen matemàtiques. El 3,5% dels estudiants de COU no cursen ni anglès ni francès ni matemàtiques. Si escollim un estudiant de COU a l'atzar, digueu quina és la probabilitat que cursi matemàtiques. Sabent que el que hem escollit cursa aquesta assignatura, digueu quina és la probabilitat que faci francès.

119. Estudieu el creixement o decreixement de la funció $f(x) = x^3 + 2x + 5$. Demostreu que l'equació $f(x) = 0$ té una única arrel real, i que aquesta està compresa entre $-1,5$ i -1 .

PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

120. Entre totes les rectes que son tangents a la corba $y=\tan x$, on x està situada entre $-\pi/2$ i $\pi/2$, escriviu l'equació de la que té pendent mínim.

121. Considereu la recta r de \mathbf{R}^3 d'equacions paramètriques $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 6 + \lambda \end{cases}$ i la

recta r' d'equacions $x-1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$. Doneu les cordenades del punt A de r i del punt B de r' que compleixen la condició que la recta \overline{AB} és perpendicular a r i a r' .

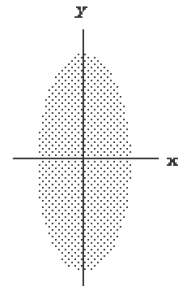
122. Utilitzant dues vegades la fórmula d'integració per parts, calculeu una primitiva de la funció $f(x)=x \ln^2 x$.

123.a) Doneu l'expressió del producte escalar de dos vectors de \mathbf{R}^3 en funció de les components de cada un dels dos vectors. Expliqueu quina relació hi ha entre el producte escalar de dos vectors de \mathbf{R}^3 i l'angle que formen.

b) Com a exemple de les vostres explicacions de l'apartat anterior, calculeu l'angle dels vectors $(1,1,0)$ i $(1,1,\sqrt{2})$.

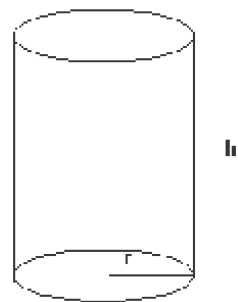
124.a) Calculeu la integral $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ (Podríeu assajar el canvi $x=\sin t$).

b) Demostreu que l'àrea del recinte de \mathbf{R}^2 limitat per l'el·lipse $4x^2+y^2=4$ és 2π .



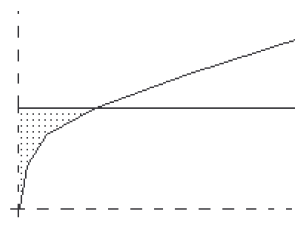
125. Un sistema de 3 equacions lineals amb 3 incògnites, pot ser incompatible? Pot ser indeterminat? Raoneu les respostes i poseu algun exemple que aclareixi les vostres explicacions.

126. Entre tots els cilindres rectes de base circular i d'àrea total 6π metres quadrats, trobeu les dimensions del que té volum màxim. (Recordeu que l'àrea total d'un cilindre és $2\pi r h + 2\pi r^2$, on r és el radi de la base i h l'altura, tal com indica el dibuix).



127. Considereu la recta r de \mathbf{R}^3 d'equacions: $\begin{cases} 2x - 2y + z = 3 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$ Trobeu el peu de la perpendicular traçada des del punt $P=(5,5,3)$ a la recta r , i calculeu la distància entre P i la recta r .

128. Considereu el recinte de \mathbf{R}^2 limitat per la corba $y=+\sqrt{x}$, l'eix de les y i la recta horitzontal $y=a$. Determineu el valor de a per tal que l'àrea



PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

d'aquest recinte valgui 9.

129. Trobeu el domini de definició, els límits quan $x \rightarrow \infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$, les asímptotes (si n'hi ha), els zeros, els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims de la funció: $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{e^x}$. Dibuixem

després un esquema senzill del seu gràfic.

130. Calculeu quina àrea hi ha compresa entre les corbes $y = |x^2 - 1|$ i $y = x + 5$ en el primer quadrant (x, y són positius)

131. En una ciutat es publiquen tres diaris: A, B i C. El 50% de la gent està subscripta a A; el 40%, a B, i el 30%, a C. El 20% està subscripta a A i a B; el 10%, a A i a C; el 20%, a B i a C, i el 5%, a A, a B i a C.

Si escollim a l'atzar un habitant d'aquesta ciutat, calculeu quina probabilitat hi ha que... a) Estigui subscript almenys a un diari. -b) No estigui subscript a cap diari. -c) Estigui subscript exactament a un diari.

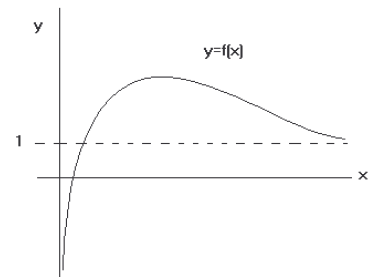
132. Escriviu l'equació cartesiana (de la forma $ax + by + cz = d$) del pla de \mathbf{R}^3 que passa pels punts $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ i $(1, 0, 1)$.

133. En la figura hi ha un esquema del gràfic de la funció $y = f(x)$.

a) En el vostre full de respostes, feu un esquema on aparegui el gràfic de la funció $y = -f(x)$.

b) En el vostre full de respostes, feu un esquema on apareguin conjuntament els gràfics de $y = f(x)$ i el de la seva funció derivada.

Expliqueu en què us baseu per a construir els esquemes.



134. Considereu a l'espai \mathbf{R}^3 les dues rectes següents:

$$(x, y, z) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2) + \lambda(1, a, 1), \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ \sqrt{2}x - z = 0 \end{cases}, \text{ on } a \text{ és un nombre}$$

real. Comproveu que aquestes dues rectes es tallen per a qualsevol valor de a i determineu a perquè formin un angle de 60 graus.

135. Descriviu, segons els valors de a , totes les solucions del sistema...

$$\begin{cases} x + y/2 - z = 1 \\ 2x + y + az = 0 \end{cases}$$

136. Considereu els tres punts següents de \mathbf{R}^2 : $A=(0, 12)$, $B=(-9, 0)$, $C=(16, 0)$.

Comproveu que són els vèrtexs d'un triangle. Sigui E un punt sobre el costat BA situat a una distància h de la hipotenusa. Sigui F un punt sobre el costat AC , i H i G dos punts sobre el costat BC de manera que E, F, H i G siguin els quatre vèrtexs d'un rectangle. Determineu h perquè l'àrea d'aquest rectangle sigui màxima.

137. El 13% d'assistents a una reunió tenen els ulls blaus, el 25% porten jersei i el 60% tenen el cabell negre. El 69% dels assistents tenen almenys una de les tres característiques anteriors, mentre que només un 4%

PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

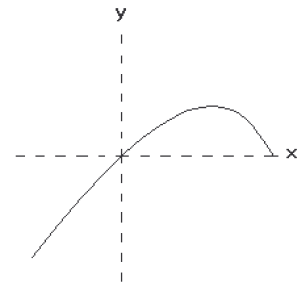
dels assistents tenen les tres característiques a la vegada. El 8% dels assistents tenen els ulls blaus i el cabell negre. El 18% porten jersei i tenen el cabell negre. S'escull a l'atzar una persona de la reunió. Digueu quina és la probabilitat que tingui els ulls blaus i porti jersei.

138. S'elegeix a l'atzar un número entre el 10.000 i el 50.000 tots dos inclosos. Calculeu la probabilitat que sigui cap-i-cua (això és, que llegit d'esquerra a dreta doni el mateix que llegit de dreta a esquerra). Raoneu molt detalladament la resposta.

139. Considereu la recta r de l'espai donada per les equacions següents:
$$\begin{cases} x+y+z = 1 \\ -x-2y+z = 0 \end{cases}$$
 Determineu a per tal que el pla d'equació $2x+ya+az=b$ sigui paral·lel a r . Digueu per a quin valor de b la recta està continguda en el pla.

140.a) Trobeu una primitiva de la funció $f(x) = x\sqrt{1-x}$ (podeu fer el canvi de variable $\sqrt{1-x} = t$).

b) Expliqueu de manera raonada per què el gràfic de la funció $f(x)$ és el que s'indica a la figura. Calculeu després l'àrea del recinte tancat limitat per l'eix de les x i el gràfic de $f(x)$.

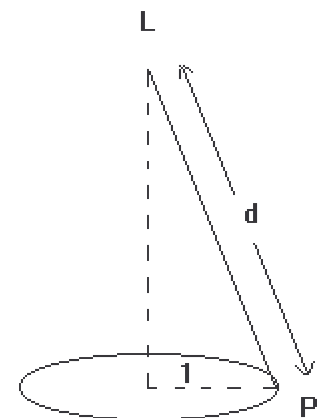


141.a) A l'espai, considereu un pla d'equació cartesiana $ax+by+cz=d$. Considereu dos punts qualssevol P i Q d'aquest pla. Usant el concepte de producte escalar, justifiqueu que el vector (a,b,c) és perpendicular al vector \overrightarrow{PQ} del pla (vector d'origen P i extrem Q).

b) Busqueu l'equació cartesiana del pla de l'espai que passa pel punt de coordenades $(1,2,3)$ i és perpendicular a la recta que passa per $(1,1,1)$ i $(2,0,4)$.

142. Feu un esquema senzill del gràfic de la funció $f(x) = e^x + e^{-x}$ que posi en evidència els límits quan $x \rightarrow \infty$ i $x \rightarrow -\infty$ i els possibles màxims i mínims. Expliqueu raonadament tot el que feu.

143. Per tal d'il·luminar una taula circular d'un metre de radi, volem penjar del sostre de l'habitació un llum situat en la vertical del centre de la taula i que enfoqui cap avall. Digueu a quina alçada hem de situar aquest llum respecte a la taula per tal que els punts de la seva vora tinguin una il·luminació màxima. Si designem per L el llum (que se suposa puntual) i per P un punt qualsevol de la taula, la il·luminació I del punt P ve donada per $I = K \frac{\cos \alpha}{d^2}$, on K és una constant que depèn de les



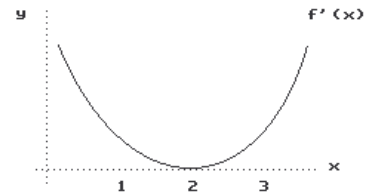
PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

característiques del llum, d és la distància entre P i L , i α és l'angle entre \overline{PL} i la vertical.

144. Considereu un sistema homogeni de 3 equacions lineals i 3 incògnites que tingui una solució no trivial (és a dir, una solució en la qual alguna variable té valor diferent de zero). Expliqueu raonadament per què el determinant de la matriu de coeficients d'aquest sistema ha de ser necessàriament igual a zero. Poseu algun exemple de sistema homogeni d'aquesta mena tot mostrant-ne una solució no trivial i comprovant també que el determinant de la matriu de coeficients és zero.

145. Quines condicions han de complir els coeficients de les equacions cartesianes de dos plans de l'espai per tal que siguin paral·lels? Justifiqueu la resposta. Com a exemple, determineu els valors de a que fan que els dos plans d'equacions $(a+2)x+ay+az=5$ i $ax+y+z=3$ siguin paral·lels. Per a cada un d'aquests valors de a calculeu la distància entre els dos plans paral·lels.

146. Tenim la funció $f(x)$ de la qual sabem que la seva derivada és positiva en tot punt $x \neq 2$ i s'anul·la en $x=2$, tal com indica la figura. Què podeu dir de la funció $f(x)$ en el punt $x=2$? Tindrà en aquest punt un màxim, un mínim, un punt d'inflexió? Raoneu detalladament la vostra resposta.



147. Calculeu l'àrea de la regió del pla limitada per la paràbola d'equació $y=-x^2+4x-3$ i les seves tangents en els punts $(0,-3)$ i $(4,-3)$.

148. Considereu la funció $f(x) = |x-2| + |2x-2|$. Busqueu expressions d'aquesta funció que no utilitzin valors absoluts en cada un dels tres dominis següents: $\{x \in \mathbf{R}, x < 1\}$, $\{x \in \mathbf{R}, 1 < x < 2\}$, $\{x \in \mathbf{R}, x > 2\}$. Feu després un esquema senzill del gràfic de $f(x)$ i trobeu el mínim absolut d'aquesta funció.

149. Expliqueu el mètode d'integració per parts i trobeu, utilitzant aquest mètode, primitives de les funcions $\arctan x$ i $\arcsin x$.

150. Considereu una urna amb 100 boles numerades de l'1 al 100. Se'n treuen dues simultàniament.

a) Calculeu la probabilitat que la suma de dos punts obtinguts sigui 10.

b) Sabent que els números obtinguts són tots dos parells, calculeu la probabilitat que la suma de punts sigui 10.

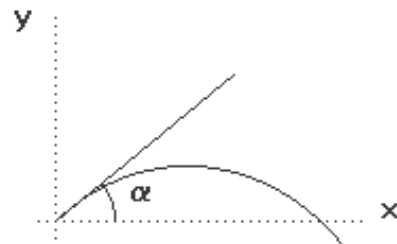
Aprofiteu la resolució d'aquest problema per explicar el concepte de probabilitat condicionada, en general.

151. Trobeu l'equació cartesiana del pla de l'espai que conté la recta d'equacions $x = \frac{2y}{-3} = 2(z+1)$ i és paral·lel a la recta $\left. \begin{array}{l} 2x+y-3z = 6 \\ x-2y+z = 0 \end{array} \right\}$.

152. La trajectòria d'un projectil disparat per un canó d'artilleria situat a l'origen de \mathbf{R}^2 és la paràbola $y = -K(1+\tan^2\alpha)x^2 + (\tan\alpha)x$, on K és una

PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

constant positiva que depèn de les característiques del canó, i α és l'angle que formen l'eix de les x positives i el canó. L'angle α se suposa comprès entre 0 i 90 graus, tal com indica el dibuix. Calculeu l'angle α per al qual la paràbola anterior intersecta l'eix de les x positives al més lluny possible de l'origen.



153. Busqueu l'equació del pla que conté la recta $x=y=z-1$ i passa pel punt $(2,3,1)$.
154. Calculeu el valor de a per tal que l'àrea limitada per la corba $y = a \sin(x/2)$ i les rectes $y=0$ i $x=\pi$ sigui igual a 4.
155. Digueu si les afirmacions següents són certes o falses, i justifiqueu la resposta: a) La intersecció de tres plans en l'espai pot ser un punt. b) L'equació $3x-2y=2$ queda representada en l'espai per una recta.
156. Busqueu una funció polinòmica $y=P(x)$ de tercer grau que talli l'eix d'abscisses en $x=-1$, $x=2$ i $x=3$. Calculeu els extrems relatius de la funció.
157. Es fan dues extraccions amb reposició d'una urna que conté cinc boles numerades de l'1 al 5. Quina és la probabilitat que la suma dels números obtinguts sigui igual a quatre?
158. Calculeu el simètric del punt $(1,2,3)$ respecte de la recta $(x,y,z)=(0,0,2) + \lambda(3,1,0)$.
159. Calculeu el volum del cos de revolució generat per la corba $y=-x^2+1$ en girar al voltant de l'eix d'abscisses.
160. a) Una matriu idempotent és aquella matriu A tal que $A \cdot A = A$. Determineu el valor de a per tal que la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ sigui idempotent. b) Determineu un valor de k tal que el sistema $\begin{cases} kx+2y = 1 \\ x+y = 2 \end{cases}$ sigui incompatible. Raoneu la resposta.
161. a) Raoneu la certesa o falsedat de l'afirmació següent: La funció $f(x)=4x+\cos(x)$ no té extrems relatius. b) Calculeu $\int_0^1 (1-x)^3 dx$.
162. Una urna conté quatre boles blanques i cinc de negres. Quina és la probabilitat que en extreure simultàniament dues boles surtin de colors diferents?
163. Calculeu els coeficients a, b i c de la funció $f(x)=ax^2+be^{2x}+c$ sabent que la recta tangent al gràfic d'aquesta funció en el punt d'abscissa $x=0$ és la recta $y=x-1$ i sabent que el punt d'abscissa $x=0$ és un punt d'inflexió (e indica la base dels logaritmes neperians).
164. Siguin h, r i R tres nombres positius. Considereu el tronc de con que s'obté en fer girar entorn de l'eix de les x el trapezi de \mathbf{R}^2 de vèrtex $(0,0)$, $(0,r)$, (h,R) i $(h,0)$ (l'altura d'aquest tronc de con és h i les

PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

dues bases circulars tenen radi r i R respectivament). Demostreu que el volum V d'aquesta figura és $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + rR + r^2)$.

165. Considereu la recta r de l'espai que passa pel punt de coordenades $(1, 1, 2)$ i té el vector de components $(1, 1, 1)$ com a vector director. Considereu el vector $\vec{v} = (1, 1, a)$. Digueu si per a algun valor del paràmetre a existeix un pla que conté r i és perpendicular a \vec{v} . En cas afirmatiu, escriviu l'equació cartesiana d'aquest pla.

166.a) Fent un estudi del gràfic de la funció $f(x) = x \cdot \ln x$ (definida només per a $x > 0$), digueu quantes solucions té l'equació $x \cdot \ln x = 1$.

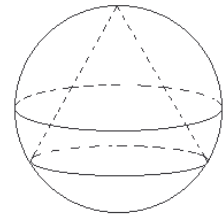
b) Representeu el gràfic de la funció $g(x) = e^x / \ln x$ indicant el seu domini de definició, els límits per a $x \rightarrow 0$ i $x \rightarrow \infty$, les asíptotes i els màxims i els mínims (si en té). Raoneu detalladament tot el que feu.

167. Preneu tres eixos perpendiculars de coordenades a l'espai. Trobeu el peu de la perpendicular traçada des de l'origen fins a la recta que passa pel punt $(-1, 7, 1)$ i que té $(1, -1, 2)$ com a vector director.

168. Feu un esquema senzill del gràfic de la funció $f(x) = e^{-x^2}$, indicant de manera raonada el domini de definició, els límits quan $x \rightarrow \infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$, i possibles màxims i mínims.

169. En un país hi ha un 50,5% de dones i un 49,5% d'homes. Un 8 per mil de les dones ha passat una malaltia determinada, mentre que el 99% dels homes no l'ha passada. Si s'agafa a l'atzar una persona que hagi passat la malaltia, calculeu la probabilitat que sigui home.

170. Trobeu la màxima àrea lateral que pot tenir un con circular recte inscrit en una esfera de 3 centímetres de radi (l'àrea lateral d'un con circular recte és la meitat de la longitud de la circumferència de la base per la longitud de la generatriu).



171. Discutiu les solucions del sistema següent, segons els valors de m , i

$$\left. \begin{array}{l} x - my = 1 \\ 2x + my = m \\ x + y = 2 \end{array} \right\} \text{ calculeu la solució quan sigui possible.}$$

172. Sigui $f(x) = kx^2 + 2$. Calculeu el valor de k per tal que la tangent al gràfic de la funció en $x=3$ passi pel punt $(0, 4)$.

173.a) Si A i B són matrius quadrades del mateix ordre, demostreu que si A commuta amb B (és a dir, $AB = BA$), aleshores A commuta amb la matriu $M = 2A - B$.

b) Calculeu per als diferents valors de k , la dimensió del subespai vectorial generat pels vectors $(1, 1, 0)$, $(3, 1, 0)$, $(1 - k, k, k)$.

174.a) Determineu per quins valors de k la funció $f(x) = \ln(kx^2 + 1)$ és creixent en $x=1$.

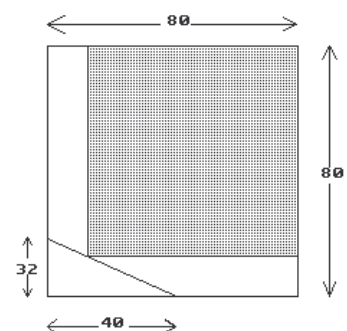
b) Doneu un exemple de funció $y=f(x)$, no constant i contínua per a tot x , que verifiqui $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$. Justifiqueu la resposta.

PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

175. Fem dues extraccions amb reposició d'una capsula que conté tres boles numerades de l'1 al 3. Quina és la probabilitat que la bola número 3 surti com a mínim una vegada? Justifiqueu la resposta.
176. Busqueu l'equació del pla que conté la recta $\frac{x-1}{2} = y = \frac{z-1}{2}$ i passa pel punt $(-1, 2, 1)$.
177. Busqueu el valor de $K (>0)$ per tal que el cos de revolució generat per la corba $y=kx^2$, $0 \leq x \leq 1$, al girar al voltant de l'eix d'abscisses sigui igual a 1.
178. Considereu la funció $f(x)$ definida per $f(x) = \sqrt[3]{x}$. a) Representeu esquemàticament el gràfic de la funció. b) És contínua la funció en tot el domini? c) És derivable la funció en tot el domini? d) Escriviu l'equació de la tangent a la corba en el punt d'abscissa 0.
179. Escriviu l'equació de la recta de \mathbf{R}^2 que passa per l'origen i és tangent a la corba $y = \ln x$ en algun punt d'aquesta corba.
180. Les quatre arestes laterals d'una piràmide recta de base quadrada tenen longitud 1. Digueu quin és el màxim volum que pot tenir la piràmide.
181. Busqueu l'equació del pla que passa pel punt $(0, 0, 0)$ i és perpendicular a la recta que passa pels punts $(1, 0, 1)$ i $(-1, 2, -2)$. Calculeu el punt d'intersecció d'aquest pla amb la recta d'equació $x=y=z+1$.
182. Calculeu el valor de a per tal que l'àrea limitada per la corba $y=-x^2+a$ i la recta $y=0$ sigui igual a 4.
183. a) Demostreu que els tres punts $(1, 1, 1)$, $(2, 0, 1)$ i $(0, 2, 1)$ són sobre la mateixa recta. b) Per a quins valors de a el sistema $\left. \begin{array}{l} ax+2y = 1 \\ x+y = 1 \end{array} \right\}$ té més d'una solució?
184. a) Raoneu la certesa o falsedat de l'afirmació següent: la funció $f(x) = 2x + \cos(x)$ és sempre creixent. b) Calculeu $\int_0^1 (2-x)^4 dx$.
185. Llancem un dau i una moneda. Considerem els esdeveniments següents: A: la moneda mostra cara. B: El dau mostra una cara més petita o igual que tres. Calculeu $P(A \cup B)$ i raoneu la resposta.
186. Busqueu el punt simètric de $(1, 2, 3)$ respecte del pla $x-3y-2z+4=0$.
187. Calculeu el volum del cos de revolució que genera la corba $y=x(x-1)$ en girar al voltant de l'eix d'abscisses.
188. a) Una matriu quadrada M es diu ortogonal si compleix $M'M=I$, on I és la matriu identitat i M' és la transposada de M . Determineu si la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ és ortogonal. b) Calculeu el valor de x que fa que els punts $(1, 0, 1)$, $(x, x, 1)$ i $(-2, -1, 1)$ estiguin alineats.
189. a) Calculeu el valor de x que minimitza el valor de l'expressió $(x-3)^2+2$. Quin és aquest valor mínim? Justifiqueu les respostes. b) En quin punt la funció $f(x) = 2x^2 - x + 3$ passa de ser decreixent a ser creixent?

PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

190. Es tira una moneda repetidament fins que surt cara. Calculeu la probabilitat que calgui tirar la moneda menys de cinc vegades. Justifiqueu la resposta.
191. Doneu l'expressió del producte escalar de dos vectors de l'espai en funció de les seves components i expliqueu com es pot utilitzar aquest producte escalar per calcular l'angle de dos vectors. Com a exemple, calculeu l'angle que formen els dos vectors següents: $\vec{u} = (\sqrt{2}, -2, -\sqrt{2})$, $\vec{v} = (\sqrt{3} + 1, \sqrt{6} - \sqrt{2}, -\sqrt{3} - 1)$.
192. Dibuixeu la figura de revolució que s'obté quan es fa girar entorn de l'eix de les x el gràfic de la funció $f(x) = \sin x$ entre els valors $x=0$ i $x=\pi/2$, i calculeu-ne el volum.
193. Considereu la funció $f(x) = x^3$. a) Digueu si la recta tangent al gràfic d'aquesta funció en el punt d'abscissa $x=3$ passa pel punt de coordenades $(1,5)$. b) Trobeu totes les rectes del pla que passen pel punt de coordenades $(1,5)$ i que són tangents al gràfic de la funció $f(x)$ en algun punt d'aquest gràfic.
194. Quatre aeroports estan enllaçats per vols que uneixen cadascun d'aquests aeroports amb els altres tres. Un viatger parteix d'un d'aquests aeroports i agafa a l'atzar un vol amb destinació a un altre. Quan arriba a l'aeroport de destinació torna a agafar a l'atzar un vol cap a un altre d'aquests aeroports. Repeteix aquesta operació indefinidament amb l'única condició de no enllaçar mai cap vol amb el mateix fet en sentit invers (no enllaça mai un vol de A a B amb el vol de B a A). Calculeu la probabilitat que torni a l'aeroport del qual ha partit la primera vegada sense haver fet més de quatre vols.
195. Expliqueu el concepte de distància d'un punt de l'espai a un pla. Expliqueu algun mètode de càlcul d'aquesta distància. Com a exemple, calculeu la distància del punt de coordenades $(1,1,0)$ al pla d'equació $3x+y+z=5$.
196. Expliqueu de manera senzilla i sense usar rangs de matrius què significa que un sistema d'equacions sigui a) incompatible b) compatible, indeterminat c) compatible, determinat. Poseu algun exemple (si n'hi ha cap) de sistema de dues equacions lineals amb dues incògnites que sigui del tipus a), del tipus b) i del tipus c).
197. Un mirall pla que tenia forma d'un quadrat de 80 centímetres de costat s'ha trencat per una cantonada seguint una recta. El tros petit que se n'ha després té forma d'un triangle rectangle els catets del qual mesuren 32 centímetres i 40 centímetres respectivament. Trobeu les dimensions del mirall rectangular



PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

d'àrea màxima que es pot retallar del tros gros de mirall trencat, de manera que les vores d'aquest mirall nou siguin paral·leles a les del mirall inicial.

198. Feu un esquema senzill del gràfic de la funció $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x - 2}$ que posi en evidència les asymptotes, els màxims i els mínims (si n'hi ha) i els punts de tall amb els eixos. Expliqueu raonadament tot el que feu.

199. Sabem que el tant per cent d'alumnes que han aprovat el COU i que el pare o mare dels quals tenia estudis superiors és d'un 10'1%. El tant per cent d'alumnes que han aprovat el COU ni el pare ni la mare dels quals tenia estudis superiors és d'un 75'9%. El tant per cent d'alumnes que han suspès el COU ni pare ni mare dels quals tenia estudis superiors és d'un 13'1%. Si A és l'esdeveniment que consisteix a aprovar el COU i B és l'esdeveniment que consisteix a tenir pare o mare amb estudis superiors, calculeu les probabilitats $P(A)$, $P(\bar{A})$ i $P(A/B)$. Digueu si els esdeveniments A i B són independents. $P(A/B)$ indica la probabilitat de A condicionada al fet que B s'esdevingui.)

200. Trobeu la recta vertical $x=k$ que divideix en dues parts iguals l'àrea del recinte limitat per les corbes $y=x^2$, $x=2$, $y=0$.

201. Entre tots els triangles rectangles d'àrea 1, calculeu les dimensions dels tres costats d'aquell que té hipotenusa màxima.

202. Calculeu per a quins valors x_0 les tangents a les dues corbes $y=e^x$ i $y=e^{-2x}$ en els punts (x_0, e^{x_0}) i (x_0, e^{-2x_0}) són perpendiculars.

203. Digueu si existeix cap pla paral·lel al pla $5x+5y+3z=10$ que contingui la recta donada per
$$\left. \begin{array}{l} 2x+3y+z = 1 \\ x-y+z = 6 \end{array} \right\} \quad \text{Si n'hi ha cap, digueu quants n'hi ha i trobeu-ne les equacions cartesianes (l'equació cartesiana d'un pla és aquella que té la forma } ax+by+cz=d).$$

204. Considereu la funció polinòmica $f(x)=3x^5-5ax^3+1$ en què a és un nombre real. Digueu si la funció pot tenir màxims o mínims i calculeu els intervals de creixement i de decreixement en cada un dels tres casos següents: I) $a>0$, II) $a=0$, III) $a<0$, (en els casos I i III, raoneu amb un a qualsevol, no pas amb valors particulars de a).

205. Calculeu, com a exemple d'aplicació de la fórmula d'integració per parts, el volum de la figura de revolució que obtenim si fem girar al voltant de l'eix de les x la part del gràfic de la funció $f(x)=\ln x$ compresa entre $x=1$ i $x=e$.

206. Considereu la recta que passa pel punt $(1,2,0)$ i que té $(1,1,1)$ com a vector director, i la recta que passa per $(0,0,1)$ i que té $(1,2,1)$ com a vector director. Escriviu les equacions paramètriques de la recta que talla les dues anteriors i que és perpendicular a cadascuna.

PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

207. Quina probabilitat tenim que en una classe de dotze alumnes n'hi hagi almenys dos que siguin d'un mateix signe del zodíac? (Hi ha dotze signes del zodíac). Expliqueu bé el perquè de la vostra resposta.

208. Discuti el sistema d'equacions següent segons els valors del paràmetre λ :

$$\left. \begin{aligned} 2x+3\lambda y+z &= \lambda \\ 4x+6y+2\lambda z &= 2\lambda \\ 6\lambda x+9y+3\lambda z &= 3\lambda \end{aligned} \right\}$$

209. Tenim sis cadires al voltant d'una taula hexagonal, una a cada costat de l'hexàgon, i sis persones, A, B, C, D, E i F, s'hi asseuen a l'atzar. Si sabem que A s'ha assegut enfront de B, quina probabilitat hi ha que C s'hagi assegut enfront de D? Expliqueu bé el perquè de la vostra resposta (l'hexàgon és regular; que una persona s'assegui enfront d'una altra vol dir que totes dues s'han assegut en costats oposats de l'hexàgon, és a dir, en costats paral·lels).

210. Discuti el sistema d'equacions següent segons els valors del paràmetre λ :

$$\left\{ \begin{aligned} x+3y+\lambda z &= 1 \\ \lambda x+9y+9z &= \lambda \\ x+\lambda y+3z &= 1 \end{aligned} \right.$$

211. Considereu la recta següent: $\left\{ \begin{aligned} x+y-z &= 0 \\ 2x+y-2z &= 0 \end{aligned} \right.$ Doneu l'equació

cartesiana del pla que conté la recta anterior i que és perpendicular al pla $y=0$ (l'equació cartesiana d'un pla és aquella que té la forma $ax+by+cz=d$).

212. Calculeu el volum del cos de revolució que obtenim si fem girar l'el·lipse $x^2+2y^2=1$ al voltant de l'eix de les x . Expliqueu bé el perquè de la vostra resposta.

213. Trobeu el punt de la paràbola $y=2x^2$ que està més a prop del punt $(9,0)$.

214. Trobeu una primitiva de la funció $f(x)=x^2e^{-x}$ (utilitzeu dues vegades la fórmula d'integració per parts).

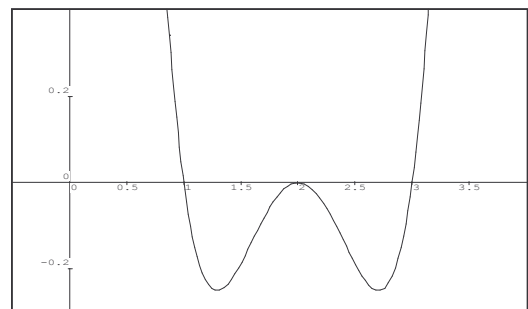
215. Trobeu la distància de l'origen de coordenades a la recta següent:

$$\left\{ \begin{aligned} x-y &= 1 \\ x-z &= 2 \end{aligned} \right.$$

216. Determineu a i b perquè els tres plans d'equacions següents siguin perpendiculars dos a dos: $2ax+3y+15z=3$; $3x+ay+3z=-5$; $84x+by+41z=75$.

217.a) Expliqueu el concepte de mínim local d'una funció i la diferència que hi ha entre els conceptes de mínim local i de mínim absolut.

b) Sabem que el gràfic de la derivada $f'(x)$ d'una funció $f(x)$ és el que mostra el dibuix (s'anul·la per a $x=1$, $x=2$ i $x=3$). Digueu quins valors de x



PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

corresponen a mínims locals de $f(x)$.

Expliqueu bé el perquè de la vostra resposta.

218. Un estudi estadístic sobre els partits de futbol de primera i segona divisió demostra que en el 49% de partits guanya l'equip de casa i que el 22% de partits acaben amb empat. Calculeu quina probabilitat tindrem perquè en una jornada de lliga triada a l'atzar hi hagi, en els 14 partits que constitueixen la travessa (sense comptar el ple al 15), 7 victòries de l'equip de casa, 3 empats i 4 victòries de l'equip visitant. Expliqueu bé el perquè de la vostra resposta.

219. Considereu la funció següent: $f(x) = \frac{\ln(1000x)}{x}$ per a $x > 0$. Feu un raonament que mostri que l'equació $f'(x) = 0$ només pot tenir una solució. Trobeu aquesta solució. Després feu un esquema senzill del gràfic de $f(x)$, i expliqueu-ho.

220. Des del punt $(4, 1, 3)$ tracem la perpendicular al pla d'equació $x + y + z = 0$. Calculeu el peu d'aquesta perpendicular (és a dir, el punt d'intersecció del pla amb la perpendicular).

221. En un magatzem hi tenim taules grosses, mitjanes i petites, i que són marrons o negres. El 61% d'aquestes taules són petites, el 32% són mitjanes i el 7% són grosses. Segons el color, el 40% són marrons i el 60%, negres. Un 26,3% de les taules emmagatzemades són petites i marrons i un 5,2% són grosses i negres. N'escollim una a l'atzar i sabem que és negra. Quina probabilitat hi ha que sigui, a més, mitjana?

222. Justifiqueu la fórmula del volum d'una esfera de radi R , $\text{Vol} = 4\pi R^3/3$, tenint en compte que si fem girar el gràfic de la funció $f(x) = +\sqrt{R^2 - x^2}$ al voltant de l'eix de les x obtenim una esfera de radi R .

223. Discutiu el sistema d'equacions següent segons els valors del paràmetre λ :

$$\begin{cases} \lambda x + 3y + 5z & = 1 \\ 4x + 6y + 5\lambda z & = \lambda \\ (2\lambda + 4)x + 12y + 20z & = 4 \end{cases}$$

224. Considereu la recta de \mathbf{R}^3 donada per l'equació $(x, y, z) = (1, 1, 1)t + (2, 0, 1)$. Per a cada $t \in \mathbf{R}$, sigui $P(t)$ el punt (x, y, z) d'aquesta recta corresponent al paràmetre t . Escriviu explícitament la funció de t donada per $f(t) =$ la distància entre $P(t)$ i $(1, 0, 1)$. Calculeu el valor de t que fa mínima la funció $f(t)$ i comproveu que, per a aquest valor de t , el vector diferència $P(t) - (1, 0, 1)$ és perpendicular al vector director de la recta.

225. Digueu si existeix cap valor de λ per al qual la recta següent:

$$\begin{cases} 2x + \lambda y + 3z & = 12 \\ x + 4y + 5z & = 3 \end{cases}$$

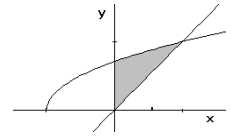
és paral·lela al pla $\lambda x + 12y + 13z = 5$. Expliqueu bé el perquè de la vostra resposta.

226. Considereu una paràbola de \mathbf{R}^2 d'equació general $y = ax^2 + bx + c$. Determineu els coeficients a, b i c de l'equació anterior de manera que la paràbola passi

PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

per l'origen, pel punt (1,0) i que la recta tangent a la paràbola a l'origen formi un angle de 60 graus amb l'eix de les x i tingui pendent positiu.

227. Calculeu l'àrea del recinte limitat per les corbes següents: $y=x$, $x=0$, $y=+\sqrt{x+2}$.



228. Demanem a dues persones que cadascuna escrigui un nombre de dues xifres. Calculeu la probabilitat perquè la suma dels dos nombres sigui 120. Una vegada realitzada l'experiència, sabem que tots dos nombres són estrictament més grans que 50. Quina probabilitat tenim ara que tots dos sumin 120?

229. Calculeu l'àrea de la regió del pla limitada per l'eix de les x i el gràfic de la funció $f(x)=x \sin x$ entre l'origen i el primer zero positiu d'aquesta funció. (Indicació: Per trobar una primitiva de $f(x)$ podeu aplicar el mètode d'integració per parts.)

230. Tenim un dau trucat en el qual la probabilitat de treure un 2 és doble que la de treure un 1, la de treure un 3 és tres vegades la de treure un 1, la de treure un 4 és quatre vegades la de treure un 1, etc. Tenim també un altre dau sense trucar en el qual tots els números de l'1 al 6 tenen la mateixa probabilitat de sortir. Si es tiren els dos daus simultàniament, calculeu la probabilitat que la suma de punts obtinguts sigui 3.

231. Considereu la funció $f(x)=x^4+x$ a) Trobeu l'angle que forma l'eix de les x i la tangent al gràfic de $f(x)$ en el punt d'abscissa $x=\sqrt[3]{\frac{(\sqrt{3}-1)}{4}}$ b) Trobeu totes les rectes que són tangents al gràfic de la funció $f(x)$ en algun punt d'aquest gràfic i que formen un angle de 45 graus amb l'eix de les x.

232. Considereu les dues rectes de l'espai donades per les equacions següents:

$$\begin{cases} x-y = 2 \\ 3x-y-z = 4 \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} x+y = -3 \\ x+2y+z = a \end{cases} \quad \text{Determineu el paràmetre } a$$

per tal que siguin coplanàries i escriviu després l'equació cartesiana del pla que les conté.

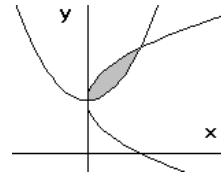
233. Determineu els coeficients a i b de la funció $f(x)=x^3+ax^2+bx$ sabent que canvia de còncava a convexa en el punt d'abscissa $x=1$ i que la tangent al gràfic de la funció en aquest punt és horitzontal. Raoneu molt detalladament la resposta.

234. Expliqueu el concepte de distància d'un punt de l'espai a una recta. Expliqueu algun mètode de càlcul d'aquesta distància. Com a exemple d'aplicació del mètode de càlcul que hagueu explicat, calculeu la distància de l'origen de coordenades a la recta que passa per (0,0,1) i té (1,1,1) com a vector director.

PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

235. Preneu dos eixos perpendiculars de coordenades en el pla. Entre tots els segments que passen pel punt de coordenades (8,1) i estan limitats per aquests eixos, escriviu l'equació del que té longitud mínima.

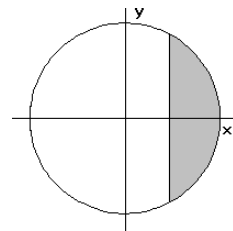
236. Preneu dos eixos perpendiculars de coordenades en el pla i considereu les dues paràboles d'equacions $(y-1)^2=x$ i $y=x^2+1$. Trobeu l'àrea del recinte tancat limitat per aquestes dues corbes.



237. Quin perímetre màxim pot tenir un sector circular d'una àrea de 25 metres quadrats? (recordeu que anomenem sector circular la figura geomètrica limitada per dos radis d'un cercle i per l'arc de circumferència comprès entre aquests dos radis).

238. Trobeu l'equació cartesiana del pla que passa pel punt (1,0,0) i que és perpendicular a la recta següent:
$$\begin{cases} 2x - y - z = 3 \\ x + y - 2z = 5 \end{cases} \quad (\text{l'equació cartesiana d'un pla és aquella que té forma } ax+by+cz=d).$$
 Expliqueu bé el perquè de la vostra resposta.

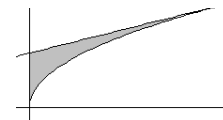
239. En un dipòsit esfèric d'un metre de radi hi tenim una certa quantitat d'aigua. Calculeu quants litres hi ha, si sabem que la distància entre el punt més baix del dipòsit i el nivell de l'aigua és de mig metre (tingueu en compte que un casquet esfèric és una figura de revolució).



240. Trobeu per a quins valors x_0 les tangents a les dues corbes $y=(x^2-5x+8)e^x$ i $y=e^x$ en els punts $(x_0, (x_0^2-5x_0+8)e^{x_0})$ i (x_0, e^{x_0}) són paral·leles.

241. Sabem que malalties diferents poden presentar els mateixos símptomes. Sigui H un conjunt particular de símptomes que només poden ser provocats per tres malalties diferents, A, B i C, mútuament excloents. Uns estudis estadístics ens demostren que el 10 per mil de la població té la malaltia A, que el 0,5 per mil té la B, i que el 2 per mil té la C. Desenvolupen els símptomes H un 70% dels malalts que tenen la A, un 90% dels que tenen la B i un 60% dels que tenen la C. Quina probabilitat hi ha que un malalt que presenta aquests símptomes H tingui la malaltia A?

242. Calculeu l'àrea del recinte limitat per la corba $y=+\sqrt{x}$, la tangent a aquesta corba en el punt $x=4$ i l'eix de les y.



243. Proveu que a \mathbf{R}^2 només hi ha dues rectes que passen pel punt $(3/2, 2)$ i que són tangents a la paràbola $y=x^2$. Trobeu aquestes rectes.

244. Discutiu el sistema d'equacions següent segons els valors del paràmetre λ :

$$\begin{cases} x+y+\lambda z = 2 \\ \lambda x+\lambda y+9z = 2\lambda \\ (\lambda/3)x+y+3z = 2\lambda/3 \end{cases}$$

245. Tenim, en una urna, cinc boles numerades de l'u al cinc i en traiem una a l'atzar. Si surt un nombre parell el joc s'acaba. Si surt senar, ens

PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

apuntem el nombre que ha sortit, retornem la bola a l'urna i tornem a fer una altra extracció. Si la suma dels nombres de les dues extraccions que hem fet fins ara és parell, el joc també s'acaba. Si no, ens apuntem el que ha sortit, retornem la bola a l'urna i tornem a fer una altra extracció. Continuem aquest procés fins que la suma dels nombres corresponents a totes les extraccions fetes fins llavors sigui parell. Calculeu la probabilitat perquè el joc s'acabi en els dos casos següents: a) en quatre extraccions exactament. b) en quatre extraccions com a màxim.

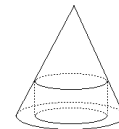
246. Considereu la recta r donada per
$$\begin{cases} 4x - \sqrt{2}y + 2z = 0 \\ \sqrt{2}x - y = 0 \end{cases}$$
 i la recta r' de vector director $(1, a, -1)$ que passa per l'origen. Determineu per a quins valors de a , r i r' es tallen a l'origen formant un angle de 45 graus.

247. Considereu la funció $f(x) = 1/x$, definida per a tot x real diferent de zero. a) Feu un esquema senzill del gràfic de $f(x)$. b) Tots sabeu que $\ln x$ és una primitiva de $f(x)$ en el domini de les $x > 0$ (recordeu que $\ln x$ no està definida per a $x \leq 0$). Però, coneixeu alguna primitiva de $f(x)$ en el domini de les $x < 0$? En cas afirmatiu, escriviu-ne una i raoneu detalladament la resposta.

248. Trobeu el peu de la perpendicular traçada des del punt de l'espai de coordenades $(1, 0, 3)$ al pla d'equació $x + y - z = 1$.

249. Es tiren dos daus simultàniament. a) Calculeu la probabilitat que en algun hi hagi sortit un 2. b) Sabent que la suma de punts obtinguts en cada dau no supera 6, calculeu la probabilitat que en algun hi hagi sortit un 2.

250. Trobeu l'altura del cilindre circular recte de volum màxim que es pot inscriure en un con circular recte d'un metre d'altura.



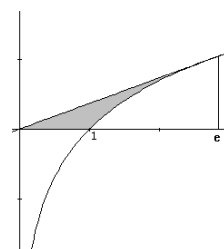
251. Discutiu el sistema d'equacions següent, segons els valors del paràmetre

$$\lambda: \begin{cases} 2\lambda x + 3y = 5 \\ 2x + 3\lambda y = -5 \end{cases} \quad \text{Interpreteu després geomètricament la discussió}$$

del sistema, indicant, segons els valors de λ , si les dues rectes del pla que tenen per equacions cada una de les equacions del sistema es tallen o no.

252. Trobeu els valors de a que fan que el vector perpendicular al pla $z = 0$ i la recta de l'espai d'equacions
$$\begin{cases} 2x + ay - z = 5 \\ 3x - 2ay + 2z = 5 \end{cases}$$
 formin un angle de 30 graus.

253. Calculeu l'àrea de la regió limitada pel gràfic de la funció $f(x) = \ln x$, la recta tangent a aquest gràfic en el punt d'abscissa $x = e$ i l'eix de les x (si necessiteu buscar una



PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

primitiva de $\ln x$ podeu usar el mètode d'integració per parts).

254.a) Calculeu el límit de la funció $x \ln x$ quan x tendeix a zero (essent $x > 0$). Raoneu la resposta. Calculeu després el límit de x^x quan x tendeix a zero (essent $x > 0$). Raoneu la resposta.

b) Feu un esquema senzill del gràfic de la funció $f(x) = x^x$ en el domini de les $x > 0$ que posi en evidència els màxims i els mínims (si en té algun), i els límits de $f(x)$ quan x tendeix a 0 (que haureu calculat a l'apartat a)) i quan x tendeix a ∞ . Raoneu detalladament tot el que feu.

255.a) Calculeu l'equació del pla que passa pels punts $(1,0,1)$, $(-1,0,1)$ i $(2,2,2)$. b) Raoneu la certesa o falsedat de l'afirmació següent: Les dues rectes $r_1: x=y=z$ i $r_2: \frac{x-1}{2} = 1-y = z-1$ es tallen.

256. Per a quins valors de m i n el sistema següent representa una recta en

$$\text{l'espai? } \begin{cases} x - y + mz = 1 \\ 3x - y + z = n \\ -y + 2z = 0 \end{cases}$$

257. Es tiren dos daus simultàniament. Calculeu la probabilitat que la suma de les cares sigui més gran que 2. Quina és la probabilitat que la suma no passi de 10?

258.a) Raoneu la certesa o falsedat de l'afirmació següent: una funció que és sempre creixent té límit infinit quan x tendeix a $+\infty$. b) Busqueu tots els punts de discontinuïtat de la funció $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x+1}$.

259. Calculeu els punts de la corba $y = \frac{1}{1+x^2}$ en què la recta tangent té pendent màxim. Doneu també l'equació de la recta que és tangent en aquests punts.

260. Tirem simultàniament quatre daus. a) Calculeu quina probabilitat hi ha que la suma de punts obtinguts entre tots els daus sigui 5. b) Calculeu quina probabilitat hi ha que la suma de punts obtinguts entre tots els daus sigui 6.

261. Donades les rectes $r_1: \frac{x}{k} = \frac{y}{-1} = z$, i $r_2: \begin{cases} kx + y = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$, determineu el valor de k per tal que les rectes siguin paral·leles.

262. Una determinada impressora té un defecte a conseqüència del qual un 2% dels caràcters que imprimeix són il·legibles. Calculeu quina probabilitat hi ha que, en imprimir la paraula IMPRIMIR, els únics caràcters que es puguin reconèixer siguin dues lletres I (no cal que efectuem les operacions; podeu deixar-les indicades).

263.a) El polinomi $ax^7 + bx^3 + x + d$, té cap arrel real? Raoneu la resposta. b) Podeu assegurar que una funció polinòmica de grau 7 té pendent igual a zero en algun punt?

264. Determineu les funcions $f(x)$, $g(x)$ i $h(x)$, sabent que $f'(x) = 2^x$, $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $h'(x) = \tan x$ i que $f(0) = 0$, $g(1) = 2$, $h(0) = 1$.

PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

265. Considereu, a \mathbf{R}^3 , les dues rectes següents: $\begin{cases} 2x-y+z = 1 \\ x+z = 4 \end{cases}$ i $\begin{cases} ax+z = 0 \\ x-y = 0 \end{cases}$, on a és un nombre real. Digueu si existeix algun valor de a per al qual les rectes es tallin.
266. Calculeu $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$, on e és la base dels logaritmes neperians.
267. Calculeu l'àrea del recinte tancat per les corbes $y=x^2+2x-1$ i $y=-x^2+3$.
268. Tenim sis calaixos numerats de l'u al set i set fulls de paper també numerats de l'u al set. El full número 1 està inicialment al calaix número 1; el full 2, al calaix 2; etc. Traiem el full 1 del seu calaix, però després algú el torna a posar en un calaix qualsevol, a l'atzar. Després traiem un full del calaix 2. Quina probabilitat hi ha que aquest full sigui el número 2? Expliqueu bé el perquè de la vostra resposta.
269. Considereu, a \mathbf{R}^3 , el pla $x+y+z=3$ i la recta $\begin{cases} x-y-2z = 6 \\ -x+5y+8z = 1 \end{cases}$. Digueu si la recta talla el pla en un punt, si la recta està continguda en el pla, o bé si la recta i el pla són paral·lels.
270. Calculeu el volum del casquet parabòlic generat per la paràbola $y=3x^2$ entre $x=0$ i $x=2$ en girar al voltant de l'eix d'abscisses.
271. a) Digueu si l'afirmació següent és certa o falsa, i justifiqueu la resposta: No hi ha cap valor de m que faci que els punts $A=(0,0,0)$, $B=(1,0,1)$, $C=(0,0,1)$, $D=(1,1,m)$ siguin en un mateix pla. b) Per a quins valors de k els vectors $(k,2)$ i $(k,3)$ són linealment independents? Justifiqueu la resposta.
272. a) Si la funció $y=f(x)$ és definida a \mathbf{R} i és sempre creixent, és possible que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$? Raoneu la resposta. b) Donada la funció $f(x) = \sin((k+1)\cos x)$, determineu el valor de k per tal que la derivada $f'(x)$ sigui zero per a tots els valors de x.
273. Considereu la família de rectes $r_\alpha: x=\alpha y=z$, on $\alpha \in \mathbf{R}$. a) Totes aquestes rectes són en un mateix pla? En cas afirmatiu doneu l'equació d'aquest pla. b) Per a quin valor de α s'obté una recta que sigui perpendicular al pla $x+3y+z=0$?
274. Considerem dues urnes U_1 i U_2 amb la composició següent: la urna U_1 conté una bola blanca i dues de negres, mentre que la urna U_2 conté dues boles blanques i una de negra. Es llança una moneda i si surt cara s'extreu una bola de la urna U_1 , si surt creu s'extreu una bola de la urna U_2 . Calculeu la probabilitat d'obtenir bola blanca. Raoneu la resposta.
275. a) Segons el valor de a, que és un nombre real, quantes rectes tangents a la corba $y=x^3+ax$ són paral·lels a la recta $y=x$? b) Quan $a=0$, quina distància hi ha entre les dues rectes tangents?
276. Calculeu el valor que cal que tingui a perquè l'àrea del triangle format per les interseccions dels eixos amb el pla $ax+3y+z-2=0$ sigui 4.
277. Determineu els màxims i mínims relatius (o locals) de la funció $f(x) = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) + x$ a l'interval $[0, 2\pi]$. Busqueu els punts d'inflexió de

PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

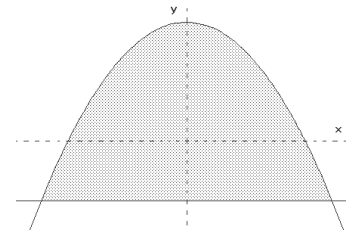
$f(x)$ en aquest interval. ¿Hi ha algun punt entre 0 i 2π en què la gràfica de $f(x)$ talli l'eix de les x ? Dibuixeu la gràfica de $f(x)$ a l'interval $[0, 2\pi]$. Digueu també quin és el màxim absolut i quin és el mínim absolut de $f(x)$ en aquest interval.

278. Discutiu, segons els valors de λ , el sistema d'equacions següent:

$$\left. \begin{aligned} (3+\lambda)x+4y+5z &= 4+\lambda \\ 2x+(1-\lambda)y &= 2 \\ 5x+(5-\lambda)y+5z &= 5 \end{aligned} \right\}$$

279. Considereu la recta de \mathbf{R}^3 donada per $\left. \begin{aligned} x+y+z &= 2 \\ x+z &= 1 \end{aligned} \right\}$ i el pla d'equació $x+y=3$. Digueu quin angle formen aquesta recta amb aquest pla.

280. Considereu el recinte tancat de \mathbf{R}^2 limitat per la paràbola d'equació $y=-x^2+1$ i la recta horitzontal d'equació $y=a$, on a és un número més petit que 1 (que pot ser positiu o negatiu). Determineu el valor d' a per tal que l'àrea d'aquest recinte valgui $\frac{8\sqrt{2}}{3}$.



281. Digueu quina és l'àrea màxima que pot tenir un sector circular de 8 metres de perímetre (recordeu que sector circular és la porció de cercle compresa entre un arc de la seva circumferència i els radis que passen pels extrems d'aquest arc).

282. Considereu el pla de \mathbf{R}^3 d'equació $3x+ay+z=6$. Determineu a per tal que la recta que passa pel punt $(1,1,2)$ i és perpendicular a aquest pla sigui paral·lela al pla $x-y=3$. Escriviu les equacions paramètriques d'aquesta recta. Expliqueu detalladament tot el que feu.

283. Considereu la recta r de \mathbf{R}^3 d'equacions $\frac{3x-\sqrt{3}}{3} = \frac{3y-\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}-3z}{6}$. Calculeu les coordenades del peu de la perpendicular traçada des de l'origen de coordenades a la recta r i calculeu després la distància de l'origen a aquesta recta.

284. Expliqueu el mètode d'integració per parts. Com a exemple d'aplicació d'aquest mètode (utilitzant-lo reiteradament, si cal) busqueu una primitiva de la funció $f(x)=x\ln^2x$.

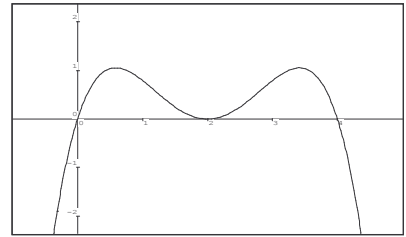
285. En Pere, en Joan i 8 amics més (10 persones en total) s'asseuen a l'atzar entorn d'una taula circular. Calculeu la probabilitat que en Joan i en Pere estiguin de costat. Raoneu detalladament la resposta.

286. a) Estudiant la gràfica de la funció $f(x)=x^2e^x$, expliqueu per què l'equació $x^2e^x=1$ només té una única solució. Proveu que aquesta solució està entre $1/2$ i 1 . b) Considereu la funció $g(x)=e^x+\frac{1}{x}$. Calculeu-ne els límits quan x tendeix a ∞ i a $-\infty$, i digueu si té alguna asímptota. Utilitzant l'apartat anterior expliqueu per què hi ha un únic valor de x que anul·la la derivada de g . Estudieu el creixement i decreixement de $g(x)$ i dibuixeu-ne finalment la gràfica.

PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

287. Considereu la paràbola d'equació $y=x^2$. Calculeu el punt Q d'aquesta paràbola que és més a prop del punt $P=(3,0)$. Comproveu després que la recta \overline{QP} és perpendicular a la tangent a la paràbola en el punt Q.

288. Se sap que la gràfica de la derivada $f'(x)$ d'una funció $f(x)$ a l'interval obert $(-1,5)$ és la que mostra el dibuix. Sabent que $f(0)=0$, dibuixeu de manera aproximada la gràfica de la funció $f(x)$ a l'interval $(-1,5)$. Indiqueu en aquesta gràfica els màxims, els mínims i els punts d'inflexió de $f(x)$. Acompanyeu el dibuix d'una explicació raonada.



289. Considereu les dues rectes r i r' de \mathbf{R}^3 donades per les equacions següents: $r \begin{cases} x-y=0 \\ ay-z=0 \end{cases}$, $r' \begin{cases} x-ay=1 \\ y-z=a \end{cases}$. Digueu si hi ha algun valor d' a per al qual r i r' es tallin, i si hi ha algun valor d' a per al qual siguin paral·leles. Justifiqueu la resposta.

290. a) Calculeu la integral $\int_{1/2}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ (podeu assajar el canvi $x=\cos t$). b) Calculeu l'àrea del recinte de \mathbf{R}^3 limitat pel tros d'el·lipse $x^2+9y^2=9$ amb $x \geq 3/2$ i la recta $x=3/2$.

291. Expliqueu el concepte d'asíptota obliqua d'una funció i com es pot calcular una tal asíptota en el cas que existeixi. Com a exemple, calculeu els valors d' a i b per tal que la recta $y=2x+1$ sigui asíptota obliqua de la funció $f(x) = \frac{ax^2+bx+1}{x-1}$.

292. En una urna hi ha un cert nombre de boles blanques i negres, cada una de les quals porta un número, que pot ser 1, 2 o 3. En fer una extracció de l'urna, les probabilitats que la bola sigui blanca o negra i que porti el número 1, 2 o 3 són les del quadre següent:

	num. 1	núm. 2	núm. 3
Blanca	0,2	0,3	0,1
Negra	0,25	0,07	0,08

(Per exemple, la probabilitat que la bola porti el núm. 2 i sigui negra és 0,07). a) Sabent que ha sortit una bola amb el núm. 3, calculeu la probabilitat que sigui negra. Digueu, a més, si són independents els esdeveniments "treure un 1" i "treure bola blanca". b) Calculeu la probabilitat de l'esdeveniment "treure un 1 o treure bola blanca".

293. Sigui A el punt de \mathbf{R}^2 de coordenades $(0,1)$ i B el punt de coordenades $(6,2)$. Entre tots els punts P situats sobre l'eix de les x, calculeu el que fa mínima la suma de distàncies $d(P,A)+d(P,B)$.

294. Considereu les dues funcions $f(x) = \frac{-1}{x+1}$ i $g(x) = (x^3/3) - 8x^2 + 3x + 5$. a) Escriviu l'equació de la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt d'abscissa $x=0$. Escriviu també l'equació de la recta tangent a la gràfica de $g(x)$ en

PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

el punt d'abscissa $x=0$. b) Calculeu els valors de λ per als quals la tangent a la gràfica de $f(x)$ i la tangent a la gràfica de $g(x)$ en els punts d'abscissa $x=\lambda$ són perpendiculars. Per a cada un d'aquests valors de λ calculeu el punt d'intersecció de les dues tangents.

295. Considereu les dues rectes r i r' de \mathbf{R}^3 donades per les equacions següents: $r \begin{cases} x+y+az = 1 \\ 2x+ay+2z = 2 \end{cases}$, $r' \begin{cases} 3bx+2y+3z = 5 \\ x+z = 2 \end{cases}$. Determineu els valors d' a i b sabent que r i r' són paral·leles.

296. Considereu la funció $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ i la funció $g(x) = \sec x \tan x$ (recordeu que $\sec x = 1/\cos x$). Escriviu la primitiva $F(x)$ de $f(x)$ que compleix la condició $F(0)=0$ i la primitiva $G(x)$ de $g(x)$ que compleix $G(0)=0$.

297. Durant un any les morts per infart representen un 2 per mil de la població adulta. Un 70% de totes les morts per infart corresponen a fumadors, i la resta, a no fumadors. Sabent que el 20% de la població adulta és fumadora, calculeu la probabilitat que una persona fumadora escollida a l'atzar mori per infart durant un any.

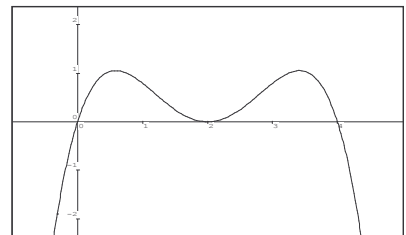
298. Considereu la recta r de \mathbf{R}^3 que passa pel punt $(1,1,1)$ i té $(2,1,0)$ com a vector director, i la recta r' que passa per $(2,2,2)$ i té $(0,1,1)$ com a vector director. Calculeu el punt P de r i el punt P' de r' que compleixen la condició que la recta $\overline{PP'}$ és perpendicular a r i a r' .

299. Sigui r la recta de \mathbf{R}^3 donada per dues equacions: $\begin{cases} ax+by+cz = d \\ a'x+b'y+c'z = d' \end{cases}$.

a) Expliqueu detalladament per què el pla d'equació cartesiana $(a+\lambda a')x+(b+\lambda b')y+(c+\lambda c')z=d+\lambda d'$ sempre conté la recta r per a qualsevol valor de λ . b) Calculeu l'equació del pla que passa pel punt $(0,1,2)$ i conté la recta $\begin{cases} x-y+z = 2 \\ x+y-z = 1 \end{cases}$

300. Se sap que a l'interval obert $(-1,5)$ la gràfica d'una funció derivable $f(x)$ és la que mostra el dibuix. Dibuixeu de manera aproximada la gràfica de la derivada $f'(x)$ en aquest interval. Acompanyeu el vostre dibuix d'una explicació raonada. Indiqueu també el valor de les dues integrals següents

$$\int_1^2 f'(x)dx, \quad \int_1^3 f'(x)dx.$$



301. Digueu quina és la mínima àrea total que pot tenir un prisma recte que té per base un triangle equilàter sabent que el seu volum és de 2 metres cúbics.

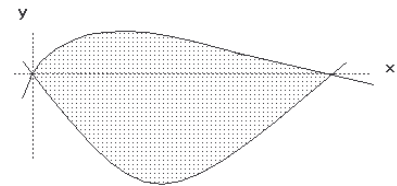
302. Considereu el pla de \mathbf{R}^3 d'equació $x+z=0$. Trobeu tots els punts P d'aquest pla tals que la distància de P a l'origen de coordenades O val 1 i que la recta \overline{OP} forma un angle de 45 graus amb el pla d'equació $x-z=0$.

PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

303. Considereu la recta de \mathbf{R}^3 donada per $x-1=y=(z-1)/2$ i la recta donada per $(x-4)/2=y-2=z-4$. Digueu si aquestes dues rectes es tallen en un punt, són paral·leles o bé es creuen (dues rectes de l'espai es creuen quan no es tallen ni són paral·leles).

304.a) En una classe hi ha un 20% d'alumnes rossos, un 15% que tenen els ulls blaus i un 6% que tenen ulls blaus i són rossos. Si s'elegeix un alumne a l'atzar, calculeu la probabilitat que sigui ros o tingui els ulls blaus. Aprofiteu aquest exemple per explicar en general la fórmula que dona la probabilitat de la reunió d'A i B en funció de les probabilitats d'A, de B i de la intersecció d'A i B. b) Doneu una fórmula similar a la de l'apartat anterior per a la probabilitat de la reunió de tres conjunts, A, B i C, i justifiqueu-la.

305. Calculeu l'àrea de la regió de \mathbf{R}^2 limitada per la gràfica de la paràbola $y=x^2-x$ i per la gràfica de la funció següent: $f(x) = \frac{x-x^2}{(x+1)(x+2)}$



306. Dibuixeu la gràfica de la funció $f(x) = e^x \sqrt{10-x}$ i indiqueu clarament el domini de definició, els límits quan x tendeix a ∞ i a $-\infty$ (si existeixen), els punts de tall amb els eixos, les possibles asymptotes, i els màxims i mínims (si n'hi ha). Expliqueu detalladament el que feu.

307. Calculeu els límits següents: a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 - x^2}$, b) $\lim_{x > 0, x \rightarrow 0} x \ln x$,
c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$, d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\ln x}$. Justifiqueu les respostes.

308. Determineu el punt P de la corba $y = -x^3 + 3x$ per al qual és màxim el pendent de la recta tangent a la corba en aquest punt.

309. En una competició de futbol hi participen 16 equips. La competició es fa per eliminatòries de la manera que es descriu a continuació. En els vuitens de final s'aparella cada equip amb un rival triat per sorteig, de manera que es fan 8 partits. Els equips que perden queden eliminats i els que guanyen passen als quarts de final (no hi ha empats). Per jugar els quarts de final s'aparellen també per sorteig els 8 equips que segueixen en competició. Aquest procés es continua de manera que passen 4 equips a les semifinals (que també s'aparellen per sorteig) i 2 equips a la final. Dos dels equips que participen en la competició, A i B, no han sortit aparellats en el sorteig inicial dels vuitens de final. Suposant que en cada partit la probabilitat de guanyar és la mateixa que la de perdre, calculeu la probabilitat que A i B juguin la final. Raoneu detalladament la resposta.

310. Considereu el pla p de \mathbf{R}^3 d'equació $x-y+z=6$, i la recta r donada per $\begin{cases} 2x + \lambda y + z = 1 \\ x - y + \lambda z = 0 \end{cases}$. Determineu els valors de λ per als quals existeix un pla

PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

p' paral·lel a p que conté r , i escriviu per a cada un d'aquests valors de λ l'equació del pla p' .

311. Calculeu el volum de la figura de revolució que s'obté quan es fa girar a l'espai l'el·lipse d'equació $x^2+4y^2=4$ entorn de l'eix de les x . Calculeu també el volum de la figura de revolució que s'obté quan es fa girar la mateixa el·lipse entorn de l'eix de les y . Raoneu detalladament les respostes.

312. Considereu un pla de \mathbf{R}^3 d'equació $ax+by+cz=d$, i una recta r donada per dues equacions:
$$\begin{cases} a'x+b'y+c'z = d' \\ a''x+b''y+c''z = d'' \end{cases}$$
 Sabent que la recta r no talla el

pla p , digueu quins seran els rangs de les dues matrius següents:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} \quad \text{Justifiqueu detalladament la resposta.}$$

313. Digueu quina és la mínima àrea total que pot tenir un cilindre circular recte que té 2π metres cúbics de volum.

314. Dibuixeu la gràfica de la funció $f(x) = \frac{x^2 - 12x}{x - 16}$ i expliciteu els límits quan x tendeix a ∞ i a $-\infty$, els punts de tall amb els eixos, les asymptotes (si n'hi ha), els màxims i mínims (si n'hi ha). En el cas que hi hagi asymptotes inclinades estudeu si la gràfica de la funció talla o no aquestes asymptotes i indiqueu clarament al dibuix els intervals en què la gràfica va per sota l'asímtota i els intervals en què hi va per sobre.

315. En una urna hi ha 100 boles numerades des del 0 fins al 99. Se'n treu una a l'atzar. a) Calculeu la probabilitat que la suma de xifres del número que hagi sortit sigui 8 i la probabilitat que l'esmentada suma sigui 9. b) Definiu el concepte de probabilitat condicionada, en general. c) En aquest exemple, sabent que la suma de xifres del número que ha sortit és 8, calculeu la probabilitat que el número comenci per 1. Feu el mateix suposant que la suma de xifres del número que ha sortit és 9. d) Digueu si són independents els esdeveniments "suma de xifres igual a 8" i "començar en 1". Digueu si són independents "suma de xifres igual a 9" i "començar en 1".

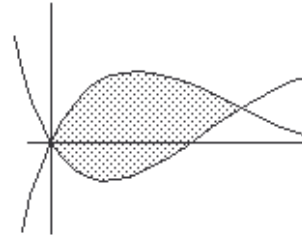
316. Considereu les dues equacions següents:
$$\begin{cases} \lambda x - y + z = 5 \\ -\lambda x + y + 2\lambda z = 2 \end{cases}$$
 a) Digueu per a quins valors del paràmetre λ aquestes dues equacions representen una recta de \mathbf{R}^3 . b) Calculeu els valors de λ per als quals les dues equacions anteriors representen una recta que talla el pla d'equació $x+z=1$ formant un angle de 30 graus. Raoneu detalladament les respostes.

317. Considereu la recta r de \mathbf{R}^3 donada per
$$\begin{cases} x - 2y = a \\ z - y = 1 \end{cases}$$
 i la recta r' que passa pels punts $(1,0,1)$ i $(3,1,-4)$. Calculeu el valor d' a sabent que r i r' es tallen. Calculeu també el punt d'intersecció de r i r' .

PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

318. Tenim dues urnes. La primera conté boles blanques i negres en una proporció desconeguda. La segona conté boles blaves i boles vermelles, també en proporció desconeguda. Ens diuen que quan es treu simultàniament una bola de la primera urna i una bola de la segona, a l'atzar, la probabilitat que la primera sigui blanca i la segona blava és $0'2$, i la probabilitat que la primera sigui blanca i la segona vermella és $0'6$. Calculeu les probabilitats dels esdeveniments "primera negra i segona blava" i "primera negra i segona vermella".

319. Calculeu l'àrea del recinte de \mathbf{R}^2 limitat per les gràfiques de les dues funcions $f(x)=xe^{-3x}$ i $g(x)=(x^2-x)e^{-3x}$ (podeu usar la fórmula d'integració per parts per tal de resoldre les integrals que us surtin).



320. Busqueu els màxims i mínims de la funció $f(x)=\cos x-\sin x$ a l'interval $[0,2\pi]$. Busqueu també els punts d'aquest interval en què la gràfica de $f(x)$ talla l'eix de les x . Busqueu els punts d'inflexió de $f(x)$ i dibuixeu la gràfica d'aquesta funció. Expliqueu per què l'equació $\cos x-\sin x=-1$ només té dues solucions entre 0 i 2π . Calculeu-les.

321. En Joan ha perdut el paraigua. Ell estima que hi ha un 60% de probabilitat d'haver-lo oblidat en uns grans magatzems de 6 plantes que ha visitat recentment. Admetem com a bona aquesta estimació subjectiva. Després d'haver comprovat que no l'ha perdut en cap de les 5 primeres plantes d'aquests magatzems, quina probabilitat hi ha que l'hagi extraviat a la sisena?

322. Digueu quins punts de la hipèrbola $x^2-2y^2=1$ estan al més a prop possible del punt $(9/2,0)$ i quina és la seva distància a aquest punt.

323.a) Descriviu la figura geomètrica de l'espai formada per les solucions del

$$\text{sistema } \begin{cases} 9x-3y+3z = 3 \\ -5x+5y+z = -1 \\ x+8y+7z = 2 \end{cases} . \text{ b) Demostreu que hi ha infinites solucions que}$$

tenen les tres coordenades positives.

324. Calculeu l'àrea de la regió plana limitada per la paràbola $y=4x-x^2$, la seva tangent a l'origen i la recta $x=2$. Dibuixeu, també, aquesta regió.

325. Digueu raonadament si són certes o falses les afirmacions següents:

a) La funció $f(x)=\frac{1}{3^x}$ és creixent en el seu domini.

b) Si una funció derivable $g(x)$ té un mínim relatiu en un punt x_0 amb $g(x_0)=3$, llavors la funció $\ln(g(x))$ té un mínim relatiu en x_0 amb valor $\ln(3)$.

326. Definiu el concepte de primitiva d'una funció. Per a cada una de les funcions següents, calculeu la primitiva que compleix la condició que la seva gràfica passa pel punt $(0,1)$. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $g(x)=\tan x$.

PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

327. Quin és el màxim volum que pot tenir un con circular recte d'un metre de generatriu? (Recordeu que el volum d'un con és un terç de l'àrea de la base per l'alçada).

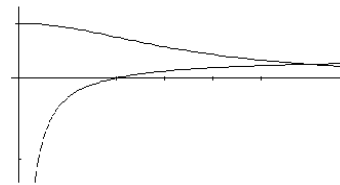
328. Considereu la recta r de l'espai donada per les equacions
$$\begin{cases} (1+a)x - y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$
 on a és un paràmetre, i la recta r' que té $(1, \sqrt{2}, -1)$ com a vector director i que passa per l'origen formant un angle de 45 graus.

329. Tenim una urna amb 10 boles blanques i 10 boles negres. Traiem dues boles a l'atzar (sense retornar cap bola a l'urna). Digueu quina és la probabilitat d'haver tret una bola blanca i una de negra.

330. Determineu el pla que passa pels punts $P=(3,2,1)$, $Q=(3,1,-5)$ i és perpendicular al pla $6x+7y+2z=10$.

331. Sabem que les gràfiques de les dues funcions $y=x^2-a$, $y=\frac{2}{x}$ són tangents en un cert punt (x_0, y_0) . Determineu el valor de a , el punt (x_0, y_0) de tangència i l'equació de la recta tangent comuna. Dibuixeu, després, la gràfica de les dues corbes.

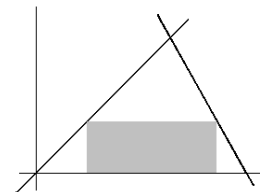
332. Donades les funcions $f(x)=\frac{1}{x^2+3}$, $g(x)=\frac{x-1}{8x}$ calculeu l'àrea de la regió limitada per les seves gràfiques amb els semieixos de coordenades positives.



333. Calculeu l'àrea tancada per la gràfica de la funció $y=+\sqrt{x}$, la seva recta tangent en el punt $(1,1)$ i l'eix d'abscisses Ox .

334. Un sistema de tres equacions lineals i tres incògnites té, entre altres, les solucions $(2,7,1)$, $(1,-1,1)$ i $(0,0,0)$. Descriviu el conjunt de totes les solucions i expliqueu quina figura geomètrica forma.

335. Calculeu les dimensions del rectangle d'àrea màxima que té un costat sobre l'eix de les x i està inscrit en el triangle que determinen les rectes $y=0$, $y=x$ i $y=4-2x$.



336. Considereu les rectes r_1 i r_2 donades per les equacions $r_1: x-1=0$, $\frac{y-2}{2}=\frac{z-2}{3}$, $r_2: x+1=y-1, z=0$. a) Calculeu l'equació del pla que passa per r_1 i és paral·lel a r_2 . b) És possible trobar un pla que passi per r_1 i sigui perpendicular a r_2 ? Raoneu la resposta.

337. Calculeu el volum de les dues figures de revolució que s'obtenen en fer girar la gràfica e la funció $y=x^2$, per a $0 \leq x \leq 2$, entorn de l'eix de les x i entorn de l'eix de les y .

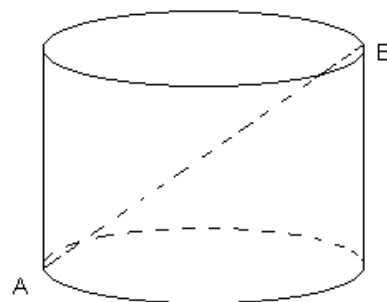
338. Una urna A conté 2 boles blanques i 3 de negres. Una segona urna B conté 4 boles blanques i 5 de negres. Escollim una d'aquestes urnes a l'atzar i en traiem una bola. Sabent que ha sortit una bola blanca, calculeu la probabilitat que l'urna escollida hagi estat la urna A.

339. Considereu les dues rectes r_1 i r_2 de l'espai donades per les equacions següents: $r_1: \begin{cases} x-2y = p \\ y+z = 3 \end{cases}$, $r_2: \begin{cases} x+z = 1 \\ y-2z = q \end{cases}$ a) Quina condició han de

PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

complir p i q per tal que estiguin contingudes en un pla? - b) Si es compleix la condició de l'apartat anterior, determineu p i q per tal que el pla passi pel punt (1,1,1).

340. Si l'alçària d'un cilindre és x i el radi del cercle de la base és r , el volum del cilindre és $\pi r^2 x$. Anomenem diàmetre o diagonal del cilindre la distància màxima entre els seus punts (a la figura, la distància entre A i B). Entre tots els cilindres d'un metre de diagonal, determineu l'alçària x i el radi r del que té volum màxim.



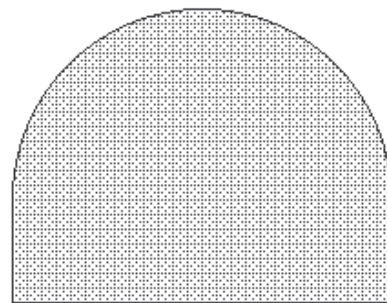
341. Discutiu, segons els valors del paràmetre a , el sistema següent:

$$\begin{cases} ax+y+z = 4 \\ x-ay+z = 1 \\ x+y+z = a+2 \end{cases} \quad \text{Doneu en cada cas la interpretació geomètrica.}$$

342. Considereu les dues rectes r_1 i r_2 de l'espai donades per les equacions següents: $r_1: \frac{x-2}{3} = z-2, y=1$; $r_2: (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(1, 1, 1)$. Calculeu la distància entre elles.

343. Calculeu el volum d'una esfera de radi a tot considerant que és un cos de revolució que s'obté fent girar entorn de l'eix de les x la semicircunferència $x^2+y^2=a^2, y \geq 0$. Considereu després el cos de revolució engendrat en fer girar entorn de l'eix de les x la regió del pla limitada per la hipèrbola $x^2-y^2=a^2$ i la recta $x=2a$. Calculeu-ne el volum i comproveu que és el mateix que el de l'esfera de radi a .

344. Volem construir una piscina la planta de la qual estigui formada per un rectangle i per un semicercle que tingui com a diàmetre un dels costats del rectangle. D'entre totes les piscines d'aquesta forma amb una superfície de 50 metres quadrats, quina és la de perímetre mínim? N'hi ha cap de perímetre màxim?



345. Considereu el recinte pla limitat per les corbes $y=x^2-3x$ i $y=-x^2+2x$. Dibuixeu aquest recinte i calculeu-ne l'àrea.

346. Calculeu el valor del paràmetre a per tal que el triangle de vèrtex $A=(1,-5,a)$, $B=(3,a,-1)$ i $C=(a,-5-a,2)$ sigui rectangle en A. Quina és la seva àrea?

347. Donada la funció $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x-d}$, a) Calculeu els valors de a, b, c i d sabent que $f(x)$ té una asymptota vertical en el punt d'abscissa $x=1$, que la recta $y=3x+2$ n'és asymptota obliqua, i que $f(x)$ té un màxim relatiu en el punt d'abscissa $x=0$. b) Dibuixeu la gràfica de la funció.

348. Tenim tres monedes en una caixa. La primera té dues cares i, per tant, quan es llença surt sempre cara. La segona té cara i creu i quan es llença

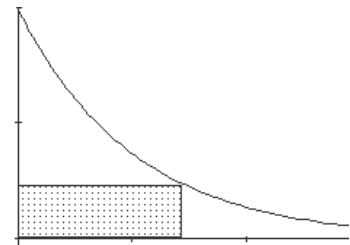
PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

surt cara o creu amb la mateixa probabilitat. La tercera també té cara i creu, però està trucada i surt cara només un 30% de les vegades que es tira. D'aquestes tres monedes n'escollim una a l'atzar i la tirem. Sabent que ha sortit cara, digueu quina és la probabilitat d'haver escollit la primera.

349.a) Definiu el concepte d'esdeveniments independents i doneu-ne algun exemple. b) Una urna conté 3 boles blanques, 5 de negres i 2 de vermelles. Es fan 5 extraccions seguides d'una bola que es retorna cada vegada a l'urna abans de fer l'extracció següent. Quina és la probabilitat d'obtenir 2 o més boles blanques?

350. Calculeu la primitiva de cada una de les funcions següents de manera que la gràfica d'ambdues primitives passi pel punt $(3,0)$: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

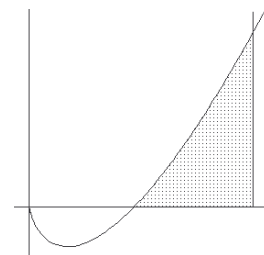
351. Es consideren tots els rectangles que tenen un costat sobre l'eix de les x , un altre sobre l'eix de les y i un vèrtex sobre la gràfica de la funció $y = e^{-2x}$. a) Calculeu l'àrea del que tingui àrea màxima. b) N'hi ha cap d'àrea mínima? Raoneu la resposta.



352. Doneu les equacions paramètriques de la recta que talla perpendicularment les rectes $r: \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$; $s: \frac{x-4}{2} = \frac{y-4}{4} = z-2$ i doneu també els punts d'intersecció d'aquesta recta amb r i s .

353.a) Calculeu la probabilitat que la suma de punts obtinguts sigui 4 quan llancem 1 dau, quan llancem 2 daus, quan llancem 3 daus i, finalment, quan llancem 4 daus. b) Un senyor ha llançat un nombre desconegut de daus entre 1 i 4, i la suma de punts ha estat 4. Quina és la probabilitat que hagi llançat exactament dos daus?

354. Expliqueu en què consisteix el mètode d'integració per parts. Calculeu després l'àrea de la regió del pla continguda en el quadrant $0 \leq x$, $0 \leq y$ i limitada per la gràfica de la funció $y = x \ln x - x$, l'eix de les x i la recta $x = e^2$.



355. Trobeu l'equació de la recta tangent a la paràbola $y = x^2$ i paral·lela a la recta $y = x + 3$. Trobeu el punt P de la paràbola per al qual la distància de P a la recta $y = x - 3$ és mínima.

356. Considereu un pla p de l'espai d'equació $5x - 4y + az = 7$ i una recta r donada per les equacions $\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 2x - ay + z = 1 \end{cases}$. a) Calculeu el valor de a que fa que la recta r estigui continguda en el pla p . b) Calculeu l'equació paramètrica de la recta r per al valor de a obtingut en l'apartat anterior.

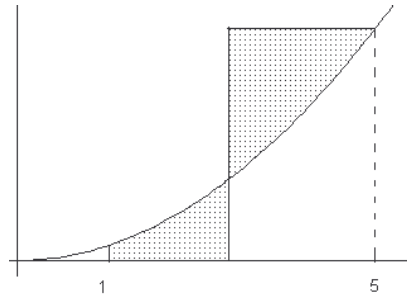
PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

357. Estudieu en funció del paràmetre a el sistema següent:
$$\begin{cases} 2x + ay = 9 \\ -5y + az = -a \\ 4x + 5y + 5az = 13 \end{cases}$$

Doneu en cada cas la interpretació geomètrica.

358. Donada la funció $y = \frac{10x}{x+7}$ estudieu-ne les asímptotes i el creixement, i dibuixeu-na la gràfica. Trobeu-ne també la funció inversa (és a dir, la funció que composta amb l'anterior dóna la identitat allà on ambdues estan definides).

359. Considereu d'una banda la regió A del pla limitada per les rectes $x=1$, $x=m$ (on m és un número entre 1 i 5), l'eix d'abscisses i la paràbola $y=x^2$. Considereu d'altra banda la regió B limitada per la mateixa paràbola quan x varia entre m i 5, i pels segments r i s donats en paramètriques per $r: (x,y)=(m+t, 25)$, $0 \leq t \leq 5-m$; $s: (x,y)=(m, 25-t)$, $0 \leq t \leq 25-m^2$. Calculeu m per tal que les àrees de A i B siguin iguals.



360. En una determinada fàbrica de cotxes s'ha detectat que un de cada 100 cotxes té un defecte en el sistema de frenada. Com que això és molt perillós es posa en marxa un dispositiu per tal de poder detectar aquest defecte abans que el cotxe surti de fàbrica. No obstant això, aquest dispositiu no és fiable del tot. Concretament, si el cotxe té el defecte, el dispositiu el detecta en el 95% dels casos mentre que si no el té, el dispositiu el dóna com a defectuós un 2% de les vegades. Si el dispositiu de control diu que un cotxe és defectuós, quina és la probabilitat que el cotxe no tingui cap defecte de frenada?

361. Trobeu la posició relativa entre el pla d'equació $2y-6z=21$ i la recta donada per les equacions següents:
$$\begin{cases} y-3z = 32 \\ x+5y-z = 0 \end{cases}$$
. Calculeu després la distància entre la recta i el pla.

362. En una empresa hi ha 60 dones i 40 homes. Triem 3 persones a l'atzar. a) Quina és la probabilitat que cap d'elles sigui una dona? b) Quina és la probabilitat d'haver triat més d'una dona?

363. Calculeu l'àrea de la regió del pla limitada per les corbes $y^2=x$ i $y=|x-2|$. Feu-ne també el dibuix.

364. Amb una corda de 4 metres volem construir dos cercles de radi igual i un quadrat. Calculeu el radi de les circumferències i el costat del quadrat de manera que la suma d'àrees d'aquestes tres figures sigui mínim. Es pot calcular el radi i el costat del quadrat per tal que aquesta suma d'àrees sigui màxima?

PROBLEMES DE SELECTIVITAT - MATEMÀTIQUES I

365. Calculeu el valor del paràmetre a , $a > 0$, per tal que l'àrea del recinte del pla limitat per la corba $y = x^3$ i la recta $y = ax$ sigui 8. Dibuixeu, també, aquest recinte.
366. a) En llençar dos daus, quina és la probabilitat d'obtenir suma 9? I la d'obtenir suma múltiple de 3? b) En llençar dos daus ha sortit una suma que és múltiple de 3. Quina és la probabilitat que sigui 9? Aprofiteu la resolució d'aquest problema per explicar el concepte de probabilitat condicionada.
367. Volem construir un dipòsit cilíndric de 50 metres cúbics de capacitat. Com que després l'hem de pintar, desitgem que la suma de l'àrea lateral i de l'àrea de la base sigui mínima. Calculeu les dimensions (alçaria i radi de la base) que ha de tenir aquest dipòsit. Hi ha algun dipòsit de 50 metres cúbics per al qual la suma de l'àrea lateral i l'àrea de la base sigui màxima?
368. Considereu les rectes r_1 i r_2 de l'espai donades per les equacions següents: $r_1: x = \frac{y-1}{2} = z$, $r_2: \frac{x-1}{a} = \frac{y+1}{b} = \frac{z}{2}$, a) Calculeu a i b per tal que r_1 i r_2 siguin paral·leles. b) Calculeu la relació que hi ha d'haver entre a i b per tal que r_1 i r_2 pertanyin al mateix pla. Doneu l'equació d'aquest pla.