SÈRIE 3

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar qualsevol decimal i després arrodonir la suma total. Podeu matisar la nota de cada pregunta amb signes + i –, de manera a compensar els matisos entre totes les preguntes.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Valoreu totes les parts de cada subapartat que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0.25 o 0.5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0.75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.
- Copieu la nota de la pregunta *i* en la casella *i,* a fi de poder fer estadístiques sobre cada qüestió.

QÜESTIONS

1. Considereu la funció

$$f(x)=\frac{x^2}{2x-1}.$$

a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la corba $y=f(x)$ en el punt d'abscissa $x=2$.
b) Determineu els intervals de creixement i decreixement, així com els extrems, si n'hi ha.

Puntuació: Cada apartat 1 punt. Total 2 punts.

Solució: a) La funció derivada és $\boxed{f'(x)=\frac{2x(2x-1)-2x^2}{(2x-1)^2}=\frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}}$.

Per tant: $f(2)=\frac{4}{3}$ i $f'(2)=\frac{4}{9}$, i la recta tangent té per equació:

$$y=\frac{4}{3}+\frac{4}{9}(x-2)\rightarrow \boxed{4x-9y+4=0}.$$

b) La derivada s'anul·la per $x=0$ i per $x=1$. Els intervals de creixement i decreixement i els extrems són doncs:

	$x<0$	$x=0$	$0<x<1;\quad x\neq\frac{1}{2}$	$x=1$	$x>1$
	$f'>0$	$f'=0$	$f'<0$	$f'=0$	$f'>0$
f	creix	màx	decreix	min	creix
f		0		1	

El tipus d'extrem es pot determinar directament a partir del creixement i decreixement al voltant i per tant no és necessari calcular la derivada segona.

2. Resoleu el sistema

$$\begin{cases} x+2y-5z=-1 \\ -3x+y-2z=7 \\ 2x-3y+z=-12. \end{cases}$$

Puntuació: Total 2 punts.

Solució: Resolem per Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -5 & | & -1 \\ -3 & 1 & -2 & | & 7 \\ 2 & -3 & 1 & | & -12 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -5 & | & -1 \\ 0 & 7 & -17 & | & 4 \\ 0 & -7 & 11 & | & -10 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -5 & | & -1 \\ 0 & 7 & -11 & | & 10 \\ 0 & 0 & -6 & | & -6 \end{array}\right)$$

D'on resulta: $\boxed{z=1; \quad y=(10+11\cdot 1)/7=3; \quad x=-1+5\cdot 1-2\cdot 3=-2}$.

3. Considereu el sistema d'inequacions següent:

$$\left.\begin{array}{ccc} x-y+1 & \geq & 0 \\ x+y & \geq & 1 \\ 5x+y & \leq & 13 \end{array}\right\}$$

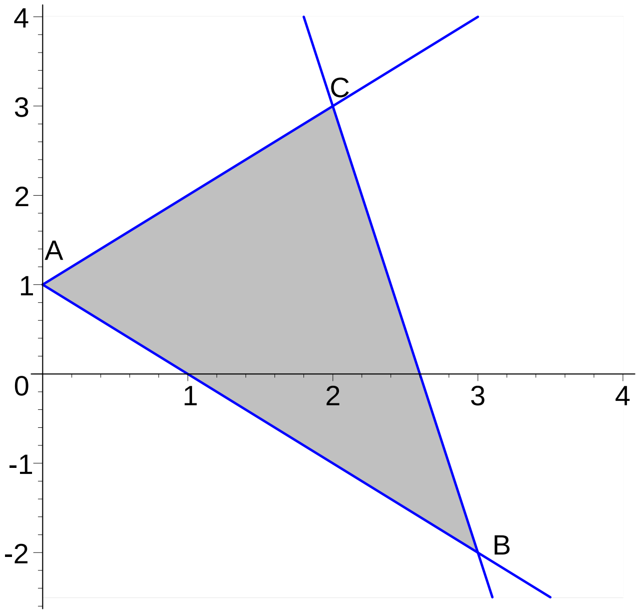
a) Representeu gràficament la regió factible.
b) Calculeu el màxim de la funció $f(x,y)=x-3y$ en aquesta regió.

Puntuació: Cada apartat 1 punt. Total 2 punts. La forma més convenient de determinar la regió és determinar els punts d'intersecció, però donat que no es demana calcular-los, es considerarà correcta la solució si el gràfic està ben fet. No obstant cal valorar la correcció del gràfic i descomptar puntuació si la claredat no és suficient.

Solució: a) Trobem els punts d'intersecció:

$$A:\left\{\begin{array}{ccc} x-y & = & -1 \\ x+y & = & 1 \end{array}\right\} \rightarrow A(0,1) \quad B:\left\{\begin{array}{ccc} x+y & = & 1 \\ 5x+y & = & 13 \end{array}\right\} \rightarrow B(3,-2)$$

$C:\left\{\begin{array}{ccc} x-y & = & -1 \\ 5x+y & = & 13 \end{array}\right\} \rightarrow A(2,3)$. Representem la regió factible:



b) Trobem el màxim de $f(x,y) = x - 3y$ a la regió factible. Fem la taula:

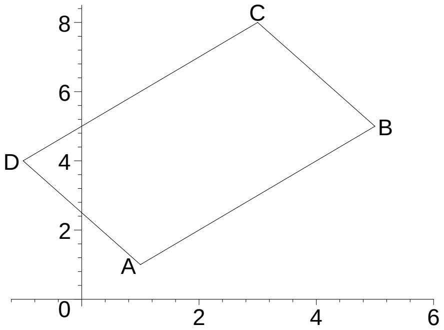
	A(0,1)	B(3,-2)	C(2,3)
$3x+4y=200$	-3	9	-7
		màxim	

Per tant el $\boxed{\text{màxim és 9 i s'obté en el punt B(3,-2)}}$.

4. Escriviu un sistema d'inequacions lineals que doni com a zona solució l'interior del paral·lelogram que té vèrtexs A(1,1), B(5,5), C(3,8), i D(-1,4).

Puntuació: 1 punt per les equacions; 1 punt per les inequacions. Total 2 punts. Gradueu la puntuació en funció dels errors de càlcul i signes. Descompteu 0.25 punts per cada signe de les inequacions equivocat.

Solució: El paral·lelogram és:

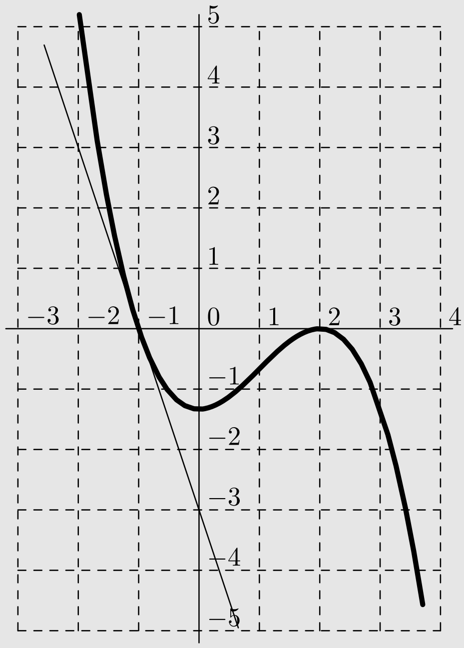


Les condicions seran:

$$\text{Costat} \quad AB; \qquad y-1 > x-1; \qquad y-x>0.$$
$$\text{Costat} \quad BC; \qquad y-5 < -\frac{3}{2}(x-5); \qquad 3x+2y<25.$$
$$\text{Costat} \quad CD; \qquad y-4<(x+1) \qquad y-x<5.$$
$$\text{Costat} \quad DA; \qquad y-1 > -\frac{3}{2}(x-1) \qquad 3x+2y>5.$$

PROBLEMES

5. La corba $y = f(x)$ de la figura té per domini el conjunt de tots els nombres reals.



a) Determineu els punts on la funció val 0. Determineu els valors de x pels quals la funció és positiva.

b) Digueu en quins punts s'anul·la la derivada i en quins punts $f'(x) < 0$.

c) Trobeu l'equació de la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 2$.

d) Determineu la recta tangent en el punt d'abscissa $x = -1$.

e) Determineu a sabent que $f(x) = a(x+1)(x-2)^2$.

Puntuació: Apartat a) 0.5 punts; apartat b) 0.5 punts; apartat c) 0.5 punts; apartat d) 1 punt; apartat e) 1.5 punts. Total 4 punts. L'apartat e) és el més difícil donat que l'únic valor no nul que és clarament llegible a la gràfica és el de la derivada en el punt $x = -1$. Tot raonament correcte que condueixi a un valor aproximat de *a* ha de ser valorat fins a 1 punt.

Solució: a) La funció val 0 per $x=-1$ i per $x=2$, i és positiva per $x<-1$.

b) La derivada s'anul·la per $x=0$ i per $x=2$ i $f'(x)<0$ per $x<0$ i $x>2$.

c) La recta tangent per $x=2$ és $\boxed{y=0}$

d) El pendent de la recta tangent en el punt d'abscissa $x=-1$ és -3 i la funció val 0. Per tant, la recta tangent és: $\boxed{y=-3(x+1)}$.

e) Tenim

$$f(x)=a(x+1)(x-2)^2=a(x^3-3x^2+4)\,.$$

Per tant, la derivada és $f'(x)=a(3x^2-6x)$. Com aquesta val -3 per $x=-1$ obtenim $a(3+6)=-3$, d'on resulta $a=-\frac{1}{3}$. Per tant la funció és:

$$\boxed{f(x)=-\frac{1}{3}(x+1)(x-2)^2=-\frac{1}{3}(x^3-3x^2+4)}\,.$$

6. Una persona va a la vinateria i compra tres tipus de vi. En total compra 20 botelles i s'hi gasta 100 €. Compra botelles de tres classes A, B i C, que costen 3 €, 7 € i 8 € respectivament. Trobeu el nombre de botelles de cada classe que ha comprat, sabent que al menys n'ha comprat una de cada classe.

Puntuació: 1.5 punts pel plantejament; 1 per la solució genèrica i 1.5 punts per la discussió amb enters. Total: 4 punts.

Solució: Anomenant respectivament x, y, z als nombres de botelles dels tipus A, B i C el sistema de condicions és:

$$\left.\begin{array}{lcl} x+y+z & = & 20 \\ 3x+7y+8z & = & 100 \\ x & \geq & 1 \\ y & \geq & 1 \\ z & \geq & 1 \end{array}\right\} \text{ d'on per Gauss: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 20 \\ 3 & 7 & 8 & | & 100 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 20 \\ 0 & 4 & 5 & | & 40 \end{pmatrix}$$

Així: $y=\frac{40-5z}{4}=10-5\frac{z}{4}$ i $x=10+\frac{z}{4}$.

Com x, y, z han de ser enters més grans o igual que 1, necessàriament z ha de ser múltiple de 4. El mínim valor de z possible és 4, pel qual corresponen $\boxed{x=11,\ y=5}$ i $\boxed{z=4}$. Aquests són els únics valors possibles de x, y, z, ja que si posem $z=8$ resultaria $y=0$ que ja és incompatible amb les hipòtesis.