SÈRIE 1

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar qualsevol decimal i després arrodonir la suma total. Podeu matisar la nota de cada pregunta amb signes + i –, de manera a compensar els matisos entre totes les preguntes.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Valoreu totes les parts de cada subapartat que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0,25 o 0,5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0,75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.
- Copieu la nota de la pregunta *i* en la casella *i,* a fi de poder fer estadístiques sobre cada qüestió.

QÜESTIONS

1. Considereu la funció $f(x)=\dfrac{3-2x}{x}$

a) Trobeu els punts de la gràfica en els quals la recta tangent és paral·lela a la recta $3x+4y+5=0$.

b) Calculeu l'equació d'aquestes rectes tangents.

Puntuació: a) 1 punt; b) 1 punt. Total: 2 punts.

Solució: a) La funció és $f(x)=\dfrac{3-2x}{x}=-2+\dfrac{3}{x}$ i la seva derivada $f'(x)=-\dfrac{3}{x^2}$. Igualant-la al pendent de la recta obtenim els punts en els quals la recta tangent és paral·lela a la recta donada:

$-\dfrac{3}{x^2}=-\dfrac{3}{4}$; per tant $x^2=4$ i $x=\pm 2$. Substituint en la funció $f(x)$ obtenim les ordenades dels punts: $P_1=\left(2,-\dfrac{1}{2}\right)$, $P_2=\left(-2,-\dfrac{7}{2}\right)$.

b) Per tant les rectes són:

$$y+\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}(x-2) \quad \text{o bé} \quad 3x+4y-4=0,$$
$$y+\frac{7}{2}=-\frac{3}{4}(x+2) \quad \text{o bé} \quad 3x+4y+20=0.$$

Nota pel corrector: No es demana de fer el gràfic.

2. Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, esbrineu si existeix una matriu C que compleixi $B \cdot C = A$, i si s'escau, calculeu-la.

Puntuació total: 2 punts.

Solució: Escrivim el producte

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per trobar els valors possibles formem el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} x + 3z & = & 2 \\ 2x + 6z & = & 1 \end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{rcl} y + 3t & = & 3 \\ 2y + 6t & = & 2 \end{array}\right\}$$

que és incompatible. Per tant no existeix cap matriu C.

3. Discutiu en funció del paràmetre p el sistema d'equacions lineals de matriu ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & p+5 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & p-1 & 0 \end{array}\right).$$

Puntuació total: 2 punts.

Solució:
Per $\underline{p = 1}$ el sistema és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & | & 8 \\ 0 & 6 & 7 & | & 5 \end{pmatrix}$$

que és compatible i indeterminat amb un grau de llibertat.

Per $\underline{p = -5}$ el sistema és:

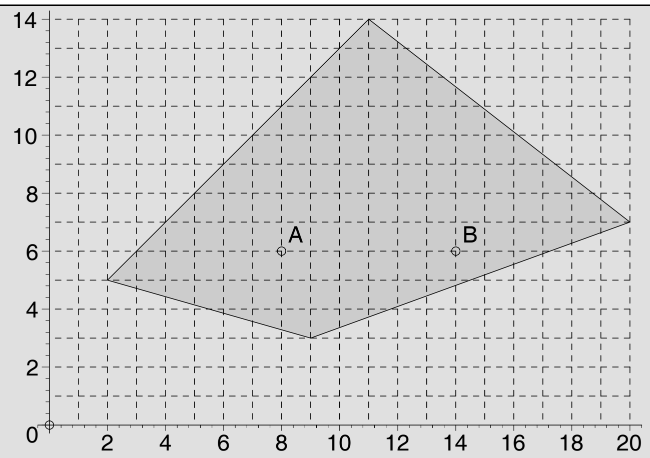
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & | & 8 \\ 0 & 0 & 7 & | & 5 \\ 0 & 0 & -6 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & | & 8 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -5 \end{pmatrix}$$

que és incompatible.

Per $\underline{p \neq 1}$ i $\underline{p \neq -5}$ el sistema és compatible determinat.

Nota pel corrector: No es demanen les solucions, si no únicament la discussió.

4. La funció objectiu d'un problema de programació lineal és $f(x,y) = ax - by + c$, amb a,b,c nombres positius**.** Esbrineu a quin dels dos punts del gràfic A ó B la funció objectiu pren un valor major. Raoneu la resposta.



Puntuació total: 2 punts.

Solució: La funció objectiu en els punts A i B pren els valors:

$$\left.\begin{array}{lcl} f(A) & = & 8a - 6b + c \\ f(B) & = & 14a - 6b + c \end{array}\right\} \text{ i la diferència és: } f(B) - f(A) = 6a > 0.$$

Per tant, $f(B)$ és més gran que $f(A)$.

PROBLEMES

5. Si el preu de l'entrada d'un cinema és de 6 €, hi van 320 persones. El propietari sap per experiència que per cada augment de 0,25 € en el preu de l'entrada hi van 10 espectadors menys. Trobeu:

a) la funció que determina el nombre d'espectadors en funció del preu de l'entrada;
b) la funció que determina els ingressos del cinema en funció del preu de l'entrada;
c) el preu de l'entrada per tal que els ingressos del propietari siguin màxims;
d) el nombre d'espectadors que aniran al cinema quan el preu sigui el que correspon als ingressos màxims i aquests ingressos màxims.

Puntuació cada apartat: 1 punt. Total: 4 punts.

Solució:

a) La funció és una recta que passa pel punt $(6,320)$ i té pendent $-\frac{10}{0,25}=-40$. Per tant és:

$$e(p)=320-40(p-6)=560-40p\,.$$

b) Els ingressos s'obtenen multiplicant el nombre d'espectadors pel preu:

$$i(p)=e(p)\cdot p=-40p^2+560p\,.$$

c) La funció que dóna els ingressos és una paràbola amb un màxim en el punt en què s'anul·la la derivada $i'(p)=-80p+560$, i que correspon a $p=7$ €.

d) Per aquest preu, el nombre d'espectadors resultant és: $e(7)=560-40\cdot 7=280$. Els ingressos màxims seran: $i(7)=280\cdot 7=1960$ €.

6. Els alumnes d'un institut disposen de 300 samarretes, 400 llapis i 600 bolígrafs per finançar-se un viatge. Tenen la intenció de vendre'ls en dos tipus de lots: el lot A consta d'1 samarreta, 3 llapis i 2 bolígrafs i el venen per 9€. El lot B consta d'1 samarreta, 2 llapis i 4 bolígrafs i el venen per 11€. Calculeu quants lots de cada tipus han de vendre per treure'n el benefici màxim i aquest benefici màxim.

Puntuació del plantejament: 2 punts; gràfic: 1 punt; solució: 1 punt. Total: 4 punts.

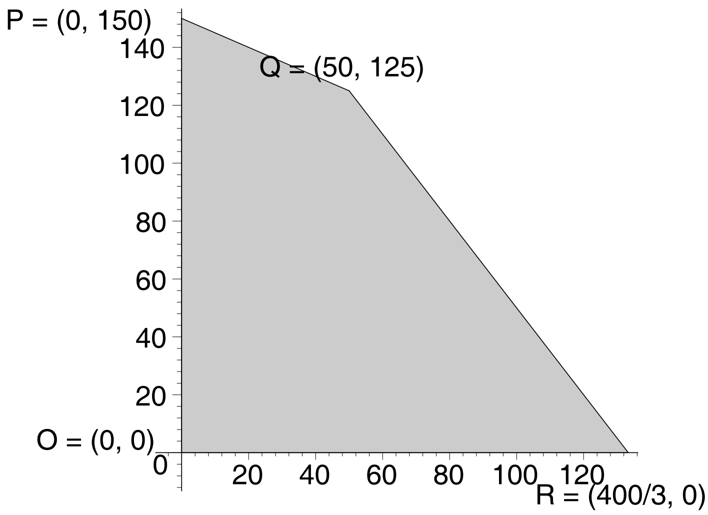
Solució: Fem la taula corresponent als dos lots amb els totals de samarretes, llapis i bolígrafs:

	Samarretes	Llapis	Bolígrafs	Preu/u
A	1	3	2	9
B	1	2	4	11
	300	400	600	

Les restriccions són:

$$\left.\begin{array}{r} A \geq 0; B \geq 0; \\ A+B \leq 300; \\ 3A+2B \leq 400; \\ 2A+4B \leq 600. \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} A \geq 0; B \geq 0; \\ A+B \leq 300; \\ 3A+2B \leq 400; \\ A+2B \leq 300. \end{array}\right\}$$

La regió factible correspon al gràfic següent:



Avaluem la funció objectiu en els vèrtexs de la regió factible. Tenim:

	O=(0,0)	P=(0,150)	Q=(50,125)	R=(400/3,0)
$f(A,B)=9A+11B$	0	1650	1825	1200

Per tant, el benefici màxim s'obté venent 50 lots de tipus A i 125 lots de tipus B, i és de 1825 €.

SÈRIE 3

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar qualsevol decimal i després arrodonir la suma total. Podeu matisar la nota de cada pregunta amb signes + i –, de manera a compensar els matisos entre totes les preguntes.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Valoreu totes les parts de cada subapartat que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0,25 o 0,5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0,75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.
- Copieu la nota de la pregunta *i* en la casella *i,* a fi de poder fer estadísitiques sobre cada qüestió.

QÜESTIONS

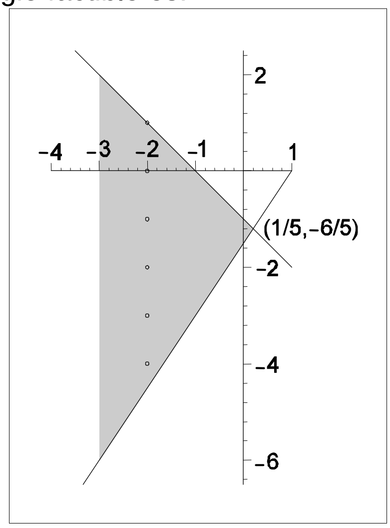
1. a) Representeu la regió solució del sistema d'inequacions lineals següent:

$$\begin{cases} 3x-2y\le 3 \\ x+y\le -1. \end{cases}$$

b) Doneu tres punts d'abscissa $x=-2$ i ordenada entera que siguin solució del sistema.

Puntuació: a) 1 punt; b) 1 punt. Total 2 punts.

Solució: a) El gràfic de la regió factible és:



b) Per $x = -2$, s'han de verificar les inequacions:

$$\left.\begin{array}{r} -6-2y \le 3 \\ -2+y \le -1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2y \ge -9 \\ y \le 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} y \ge -\dfrac{9}{2} \\ y \le 1 \end{array}\right\}$$

Per tant els punts de la regió amb abscissa igual a -2 són aquells que tinguin $-\frac{9}{2} \le y \le 1$. En particular, els que tenen coordenades enteres són:

(-2,-4), (-2,-3), (-2,-2), (-2,-1), (-2,0), (-2,1).

Nota pels correctors: No més cal donar tres punts de entre els anteriors.

2. En un problema de programació lineal la regió factible és el conjunt convex format pel triangle de vèrtexs: (0,0), (0,1) i (1,0). La funció objectiu és paral·lela a la recta $x + y = 0$. Trobeu els punts en què la funció objectiu assoleix

a) el mínim;
b) el màxim.

Puntuació: a) 1 punt; b) 1 punt. Total 2 punts.

Solució: La funció objectiu és de la forma $f(x,y) = x + y + c$, on c és una constant. Tenint en compte que el mínim i el màxim s'obtenen en els límits de la regió tindrem la taula següent:

	(0,0)	(1,0)	(0,1)
$f(x,y) = x + y + c$	c	$1+c$	$1+c$

a) El mínim s'obté en el punt (0,0).
b) El màxim s'obté en tots els punts del segment d'extrems (0,1) i (1,0).

Nota pel corrector: En l'apartat b) es descomptaran 0.5 punts si es dóna únicament un punt i 0.25 si es donen dos punts enlloc de tot el segment.

3. Discutiu en funció del paràmetre m el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + y - z = 2. \end{cases}$$

En el cas que sigui possible doneu també la solució.

Puntuació: discussió 1 punt; solucions 1 punt. Total 2 punts.

Solució: Reduïnt per Gauss la matriu del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & m & | & 1 \\ 1 & 1 & -1 & | & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & | & 1 \\ 0 & 0 & -1-m & | & 1 \end{pmatrix}$$

resulten els casos següents:

$\underline{m=-1}$ sistema incompatible.

$\underline{m \neq -1}$ compatible indeterminat amb 1 grau de llibertat. La solució és:

$$\left.\begin{array}{lll} z & = & -\dfrac{1}{1+m} \\ y & = & y \\ x & = & 1+\dfrac{m}{1+m}-y \; = \; \dfrac{1+2m}{1+m}-y \end{array}\right\}$$

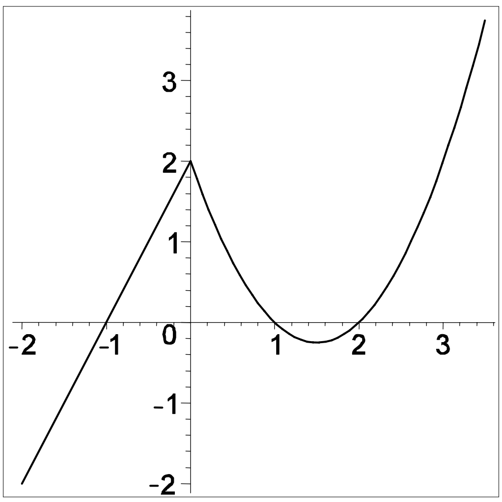
4. Considereu la funció

$$f(x)=\begin{cases} 2x+2, & \text{si} \quad x \le 0 \\ x^2-3x+2, & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

a) Dibuixeu la gràfica.
b) Estudieu la continuïtat.
c) Determineu els extrems relatius.

Puntuació: a) 1 punt; b) 0.5 punt; c) 0.5 punts. Total 2 punts.

Solució: a) La gràfica de la funció és la recta de pendent 2 i ordenada a l'origen 2 per $x \le 0$, i per $x>0$ la paràbola $y=x^2$ traslladada de tal manera que talla l'eix x per $x=1$ i $x=2$, que són les arrels i a l'eix y en el punt (0,2). Així tenim



b) Tenim $f(0^-)=2$ i $f(0^+)=2$. Per tant la funció és contínua en tots els punts.
c) Tenim un màxim relatiu en el punt (0,2), perquè en un entorn de $x=0$ la funció pren valors menors que 2 tret del punt (0,2). El mínim relatiu s’obté igualant la derivada a 0, i resulta ser $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right)$.

PROBLEMES

5. El benefici $B(x)$ (expressat en milers d’euros), que obté una empresa per la venda de x unitats d’un determinat producte ve donat per la funció:

$$B(x)=-x^2+300x-16100 \quad \text{per a} \quad 50\le x\le 250.$$

a) Si ha venut 110 unitats, quin benefici ha obtingut?
b) Quantes unitats pot haver venut si el benefici obtingut ha estat de 3900 milers d’euros?
c) Quantes unitats ha de vendre per a que el benefici sigui màxim? Quin és aquest benefici màxim?
d) Quina quantitat d’unitats ha de vendre per no tenir pèrdues?

Puntuació: cada apartat 1 punt. Total 4 punts.

Solució: a) $B(110)=4800$ milers d’euros. (Es pot calcular per Ruffini o bé substituint x per 100).
b) Si $B(x)=3900$ resulta l’equació: $3900=-x^2+300x-16100$ o de forma equivalent $x^2-300x+20000=0$, d’on resulten $x_1=200$ i $x_2=100$. Per tant pot haver venut 100 o 200 unitats de producte.
c) Per obtenir el benefici màxim hem d’igualar a 0 la derivada de $B(x)$ que representa una paràbola amb un vèrtex amb màxim. Tenim $B'(x)=-2x+300$. Per tant el màxim s’obté per $x_M=150$, valor pel qual el benefici és $B(150)=6400$ milers d’euros.
d) Per no tenir pèrdues cal que $B(x)=-x^2+300x-16100\ge 0$. Resolent la igualtat obtenim els extrems del segment on $B(x)\ge 0$. Aquests són:

$$x=150\pm\sqrt{22500-16100}=\left\langle\begin{array}{l}230\\70\end{array}\right..$$

Per tant no tindrà pèrdues per $70\le x\le 230$.

Nota pel corrector: La no especificació correcta de les unitats es penalitzarà amb 0.5 punts.

6. La despesa mensual en salaris d'una empresa de 36 treballadors és de 54900 €. Hi ha tres categories de treballadors que indicarem per A, B i C. El salari mensual d'un treballador de la categoria A és de 900 €, el d'un de la B és de 1500 € i el d'un de la C és de 3000 €. Sense acomiadar ningú, l'empresa vol reduir la despesa salarial en un 5%. Per fer-ho ha rebaixat un 5% el salari dels de la categoria A, un 4% els de la B i un 7% els de la C. Esbrineu quants treballadors hi ha de cada categoria.

Puntuació: plantejament 2 punts; resolució 2 punts. Total 4 punts.

Solució: Com hi ha 36 treballadors resulta $a+b+c=36$. Tenint en compte els sous de cada categoria de treballadors resulta $900a+1500b+3000c=54900$, que pot simplificar-se dividint per 300 a $3a+5b+10c=183$. Determinem ara les reduccions que fa:

5% de 54900 = 2745
5% de 900 = 45
4% de 1500 = 60
7% de 3000 = 210.

Així tindrem també: $45a+60b+210c=2745$. Dividint per 15 queda $3a+4b+14c=183$. Obtenim el sistema d'equacions de matriu ampliada següent que reduïm per Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 36 \\ 3 & 5 & 10 & | & 183 \\ 3 & 4 & 14 & | & 183 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 36 \\ 0 & 1 & 11 & | & 75 \\ 0 & 2 & 7 & | & 75 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 36 \\ 0 & 1 & 11 & | & 75 \\ 0 & 0 & -15 & | & -75 \end{pmatrix}$$

Resolent obtenim:

$$\left.\begin{array}{lllll} c & = & 5 & & \\ b & = & 75-55 & = & 20 \\ a & = & 36-5-20 & = & 11 \end{array}\right\}$$

Així, els nombres de treballadors per categories són: 11 de classe A, 20 de classe B i 5 de classe C.